

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

**POTENTIEL DES UNITÉS DE MESURE COMME OUTIL DE CONTRÔLE LORS DE
LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES À CONTEXTE PHYSIQUE**

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

AMÉLIE ALLARD

JANVIER 2026

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.12-2023). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je souhaite tout d'abord à remercier les deux professeures extraordinaires composant le comité m'ayant encadré tout au long de la maîtrise, Valériane Passaro et Mireille Saboya Mandico. Je suis incroyablement reconnaissante de l'aide et du soutien que vous m'avez offert au fil de mon parcours. Ce sont grâce à vos conseils, vos rétroactions constructives et votre engagement que j'ai réussi à me surpasser et à rédiger le présent mémoire, dont je suis éminemment fière. La grande confiance que vous m'avez accordée a été le vent sous mes ailes et m'a permis de mener à bien cette grande aventure. Je vous en remercie sincèrement.

Je souhaite également remercier les professeur.e.s Doris Jeannotte et Fernando Hitt d'avoir accepté d'évaluer le présent mémoire. Vos expertises complémentaires et votre regard frais vont me permettre de clarifier et d'approfondir certains aspects de la recherche qui y est présentée.

Merci à vous tous pour l'intérêt que vous avez octroyé à ce projet interdisciplinaire et pour les heures vous avez consacrées à sa réalisation et à son amélioration!

Je souhaite enfin remercier ma famille et mes amis, qui ont été d'un grand secours lors des moments occasionnels d'épuisement et d'abattement. Votre amour et vos encouragements ont été une source essentielle de réconfort et de motivation. Je tiens à remercier spécialement Alexandre et Marie-Catherine d'avoir été mes piliers des dernières années : je n'aurai pas réussi sans vous!

À vous tous, je dédie le présent travail.

DÉDICACE

*Education is not the learning of facts, but the
training of the mind to think.*

Albert Einstein

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	ii
DÉDICACE.....	iii
LISTE DES FIGURES	vii
LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES ABRÉVIATIONS, DES SIGLES ET DES ACRONYMES.....	xiii
RÉSUMÉ.....	xiv
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 PROBLÉMATIQUE.....	4
1.1 Un portrait de la formation collégiale	4
1.1.1 L’approche programme dans l’enseignement collégial	5
1.1.2 Le programme <i>Sciences de la nature</i>	7
1.2 L’interdisciplinarité dans le programme <i>Sciences de la nature</i>	8
1.2.1 Les cours de mathématiques et de sciences	9
1.2.2 Les cours de mathématiques et de physique	10
1.3 Les unités de mesure au Québec	13
1.3.1 Les unités de mesure dans les disciplines mathématique et physique	14
1.3.2 Les unités de mesure dans la vie quotidienne	16
1.4 Les unités de mesure dans les recherches en didactique des mathématiques.....	17
1.4.1 Étude de Dorko et Speer (2015).....	18
1.4.2 Études de Rowland et Jovanoski (2004) et de Rowland (2006)	21
1.5 Synthèse du chapitre et questions de recherche	24
CHAPITRE 2 CADRE CONCEPTUEL	27
2.1 Le Système international d’unités.....	27
2.2 Le contrôle	33
2.2.1 Le contrôle au sens de Saboya (2010)	34
2.2.2 Le contrôle au sens de Rhéaume (2020).....	36
2.2.2.1 <i>Le contrôle structural</i>	37
2.2.2.2 <i>Le contrôle opérationnel</i>	38
2.2.2.3 <i>Le contrôle restreignant</i>	42
2.3 Un tour d’horizon des études portant sur le contrôle	43
2.3.1 L’interrelation entre les composantes du contrôle	43
2.3.2 L’importance des caractéristiques du problème sur les composantes du contrôle mobilisées.....	47
2.3.3 La représentation graphique comme outil de contrôle.....	50
2.4 Les unités de mesure comme outil de contrôle	53

2.4.1	Les unités comme outil de contrôle structural	54
2.4.2	Les unités comme outil de contrôle opérationnel	56
2.4.3	Les unités et le contrôle restreignant	66
2.5	Synthèse du chapitre	66
CHAPITRE 3 MÉTHODOLOGIE		69
3.1	Retour sur les questions de recherche	69
3.2	Choix et présentation du manuel sélectionné	71
3.2.1	Justification du choix du manuel <i>Calcul différentiel : Charron-Parent</i>	71
3.2.2	Description du manuel	73
3.3	Choix méthodologiques	75
3.3.1	Analyse de contenu	76
3.3.2	Analyse catégorielle	77
3.3.3	Analyse <i>a priori</i>	79
3.4	Sélection et codage du contenu pour l'analyse	80
3.5	Description des énoncés des problèmes	81
3.5.1	Regard sur l'emplacement dans le manuel et le champ physique des problèmes	81
3.5.2	Regard sur les unités mentionnées dans les problèmes	83
3.6	Catégorisation des sous-problèmes	86
CHAPITRE 4 ANALYSE ET RÉSULTATS : PREMIÈRE QUESTION DE RECHERCHE		91
4.1	Portrait du manuel en termes de l'emplacement des problèmes et de leur contexte physique	91
4.2	Portrait du manuel en termes des unités de mesure présentes dans l'énoncé des problèmes	93
4.2.1	Unités de mesure et symboles algébriques	94
4.2.2	Unités de mesure et constantes numériques	95
4.2.3	Unités de mesure et nombres parsemant le texte de l'énoncé	96
4.2.4	Unités de mesure apparaissant dans le corpus des problèmes	96
4.3	Réponse à la première question de recherche	97
CHAPITRE 5 ANALYSE ET RÉSULTATS : DEUXIÈME QUESTION DE RECHERCHE		100
5.1	Portrait du manuel en termes des demandes mathématiques (des sous-problèmes)	100
5.2	Choix de problèmes pour l'analyse <i>a priori</i>	102
5.3	Analyse <i>a priori</i> des 13 problèmes en termes du potentiel des unités comme outil de contrôle	105
5.3.1	Problème 10705	106
5.3.2	Problème 18413	115
5.3.3	Problème 19506	120
5.3.4	Problème 19910	127
5.3.5	Problème 27904	132
5.3.6	Problème 28907	138
5.3.7	Problème 29511	144
5.3.8	Problème 29612	149
5.3.9	Problème 29613	157
5.3.10	Problème 29823	163
5.3.11	Problème 29927	168

5.3.12	Problème 43930	173
5.3.13	Problème 47412	180
5.4	Actions contrôlées liées aux unités de mesure dans les problèmes mathématiques à contexte physique 184	
5.4.1	Actions contrôlées relevant de l'exercice d'un contrôle structural	186
5.4.2	Actions contrôlées relevant de l'exercice d'un contrôle opérationnel	187
5.5	Limitations et interdisciplinarité autour des actions contrôlées liées aux unités de mesure	191
5.5.1	Aspects limitants de l'exercice d'un contrôle par les unités de mesure	192
5.5.2	Aspects interdisciplinaires soulevés par l'exercice d'un contrôle par les unités de mesure	192
5.6	Avancées sur la conceptualisation d'un contrôle passant par les unités de mesure	193
CHAPITRE 6 DISCUSSION		197
CONCLUSION		200
ANNEXE A TABLEAU SYNTHÈSE DES ANALYSES <i>A PRIORI</i>		204
RÉFÉRENCES		211

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Éléments d'un programme d'études collégiales (tiré de MES, 2022, p. 1).....	7
Figure 2.1 Deuxième loi de Newton avec l'ensemble cohérent des unités SI.....	30
Figure 2.2 Deuxième loi de Newton sans l'ensemble cohérent des unités SI	31
Figure 2.3 Énoncé du problème des trains (tiré de Saboya et al., 2015, p. 67)	44
Figure 2.4 Manifestations du contrôle en action (tiré de Saboya et al., 2015, p. 78)	45
Figure 2.5 Énoncé du problème <i>Les Olympiques</i> (tiré de Saboya et Rhéaume, 2015, p. 10).....	48
Figure 2.6 Tâche non routinière (tirée de Dufour et Jeannotte, 2013, p. 34)	50
Figure 2.7 Lien entre des unités cohérentes SI.....	54
Figure 2.8 Cohérence des unités à travers une équation	59
Figure 2.9 Preuve d'unités d'une équation erronée.....	61
Figure 2.10 Dédution du lien entre la force et la pression.....	65
Figure 2.11 Expression en unités de base du newton	65
Figure 3.1 Exemple du codage d'un problème.....	80
Figure 4.1 Énoncé du problème 40826 (contexte physique sans unité de mesure).....	94
Figure 4.2 Énoncé du problème 16813 (sans symbole algébrique).....	95
Figure 5.1 Énoncé du problème 10705 (tiré du manuel <i>Calcul différentiel: Charron-Parent</i> , 2023, p. 107)	106
Figure 5.2 Contrôle sémantique sur l'équation $s(t) = -2t^2 + 20t$	108
Figure 5.3 Énoncé du problème 18413 (tiré du manuel <i>Calcul différentiel: Charron-Parent</i> , 2023, p. 184)	115
Figure 5.4 Esquisses de droites tangentes	119
Figure 5.5 Énoncé du problème 19506 (tiré du manuel <i>Calcul différentiel: Charron-Parent</i> , 2023, p. 195)	121
Figure 5.6 Manipulation erronée possible	124
Figure 5.7 Énoncé du problème 19910 (tiré du manuel <i>Calcul différentiel: Charron-Parent</i> , 2023, p. 199)	127

Figure 5.8 Énoncé du problème 27904 (tiré du manuel <i>Calcul différentiel: Charron-Parent, 2023, p. 279</i>)	132
Figure 5.9 Énoncé du problème 28907 (tiré du manuel <i>Calcul différentiel: Charron-Parent, 2023, p. 289</i>)	139
Figure 5.10 Graphique enrichi du problème 28907.....	140
Figure 5.11 Énoncé du problème 29511 (tiré du manuel <i>Calcul différentiel: Charron-Parent, 2023, p. 295</i>)	144
Figure 5.12 Énoncé du problème 29612 (tiré du manuel <i>Calcul différentiel: Charron-Parent, 2023, p. 296</i>)	149
Figure 5.13 Schéma enrichi du problème 29612.....	151
Figure 5.14 Énoncé du problème 29613 (tiré du manuel <i>Calcul différentiel: Charron-Parent, 2023, p. 296</i>)	157
Figure 5.15 Relation entre les unités V , Ω et A	159
Figure 5.16 Énoncé du problème 29823 (tiré du manuel <i>Calcul différentiel: Charron-Parent, 2023, p. 298</i>)	164
Figure 5.17 Schéma de la situation initiale du problème 29823	165
Figure 5.18 Schéma de la situation décrite par la sous-question b) du problème 29823	166
Figure 5.19 Énoncé du problème 29927 (tiré du manuel <i>Calcul différentiel: Charron-Parent, 2023, p. 299</i>)	168
Figure 5.20 Graphique enrichi pour les sous-questions c.i) à c.iii) du problème 29927	171
Figure 5.21 Énoncé du problème 43930 (tiré du manuel <i>Calcul différentiel: Charron-Parent, 2023, p. 439</i>)	173
Figure 5.22 Schéma de la situation initiale du problème 43930	174
Figure 5.23 Énoncé du problème 47412 (tiré du manuel <i>Calcul différentiel: Charron-Parent, 2023, p. 474</i>)	180
Figure 5.24 Contrôle sémantique autour de l'équation $I(t)$ et des unités de mesure	182
Figure 5.25 Structuration des composantes du contrôle (liées aux unités) et des actions contrôlées qu'elles génèrent	194

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 Trois activités d'apprentissage de la discipline mathématique	11
Tableau 2.1 Les sept constantes définissant le SI (inspiré du tableau 1 de BIPM, 2019, p. 16)	28
Tableau 2.2 Unités de base du SI (inspiré du tableau 2 de BIPM, 2019, p. 18).....	28
Tableau 2.3 Exemples d'unités dérivées cohérentes du SI ayant un nom et un symbole spéciaux (inspiré du tableau 4 de BIPM, 2019, p. 26).....	29
Tableau 2.4 Préfixes SI (inspiré du tableau 7 de BIPM, 2019, p. 31).....	30
Tableau 2.5 Unités en dehors du SI dont l'usage est accepté avec le SI (inspiré du tableau 8 de BIPM, 2019, p. 33).....	32
Tableau 2.6 Contrôle structural au sens de Rhéaume (2020).....	38
Tableau 2.7 Contrôle opérationnel au sens de Rhéaume (2020)	42
Tableau 2.8 Contrôle restreignant au sens de Rhéaume (2020)	43
Tableau 2.9 Reconstitution de la résolution d'un élève au problème des trains (tirée de Saboya et al., 2015, p. 76).....	44
Tableau 2.10 Problème des trains (tiré de Saboya et al., 2015, p. 67)	47
Tableau 2.11 Cas possibles selon les signes des inconnues a et b (tirés de Dufour et Jeannotte, 2013, p. 36)	51
Tableau 2.12 Options de résolution offertes aux étudiants de physique	57
Tableau 2.13 Manipulations fictives d'un étudiant	62
Tableau 2.14 Suite de la résolution fictive d'un étudiant (tableau 2.13).....	63
Tableau 2.15 Preuve d'unités pour choisir entre deux équations	64
Tableau 2.16 Le contrôle par les unités de mesure	67
Tableau 3.1 Pictogrammes utilisés dans <i>Calcul différentiel : Charron-Parent</i>	72
Tableau 3.2 Structure du manuel <i>Calcul différentiel : Charron-Parent</i>	73
Tableau 3.3 Champs et sous-champs physiques tirés de la collection <i>Physique XXI</i> (2010).....	82
Tableau 3.4 Énoncé du problème 29612	82
Tableau 3.5 Emplacement (mathématique) et contexte (physique) du problème 29612	83

Tableau 3.6 Informations récoltées concernant les unités de mesure.....	83
Tableau 3.7 Mentions d'unités de mesure dans le problème 29612.....	85
Tableau 3.8 Type d'unités de mesure mentionnées dans le problème 29612	85
Tableau 3.9 Catégorisation des sous-problèmes par leur demande mathématique	86
Tableau 3.10 Catégorisation des sous-problèmes du problème 29612	88
Tableau 4.1 Distribution des problèmes mathématiques à contexte physique dans le manuel <i>Calcul différentiel: Charron-Parent</i>	91
Tableau 4.2 Champs et sous-champs physiques dont relèvent les problèmes mathématiques à contexte physique.....	92
Tableau 4.3 Exemples de contextes « autres »	93
Tableau 4.4 Unités et symboles algébriques	94
Tableau 4.5 Unités et constantes numériques.....	95
Tableau 4.6 Unités et nombres dans l'énoncé	96
Tableau 4.7 Unités apparaissant dans le corpus des problèmes mathématiques à contexte physique	96
Tableau 5.1 Distribution des sous-problèmes du corpus des problèmes mathématiques à contexte physique	100
Tableau 5.2 Emplacement mathématique et contexte physique des problèmes sélectionnés	103
Tableau 5.3 Classification par demandes mathématiques des sous-questions des 13 problèmes sélectionnés	104
Tableau 5.4 Résolution de la sous-question a.i) du problème 10705.....	109
Tableau 5.5 Résolution de la sous-question b) du problème 10705.....	110
Tableau 5.6 Résolution de la sous-question c) du problème 10705	112
Tableau 5.7 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 10705 ...	114
Tableau 5.8 Résolution des sous-questions a.i) à a.iii) du problème 18413	117
Tableau 5.9 Résolution de la sous-question b) du problème 18413.....	118
Tableau 5.10 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 18413 .	120
Tableau 5.11 Résolution de la sous-question a) du problème 19506.....	122
Tableau 5.12 Résolution de la sous-question c) du problème 19506	123

Tableau 5.13 Résolution de la sous-question d) du problème 19506.....	125
Tableau 5.14 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 19506 .	126
Tableau 5.15 Résolution de la sous-question a) du problème 19910.....	129
Tableau 5.16 Résolution de la sous-question c) du problème 19910	130
Tableau 5.17 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 19910 .	131
Tableau 5.18 Résolution de la sous-question a) du problème 27904.....	133
Tableau 5.19 Résolution de la sous-question b) du problème 27904.....	135
Tableau 5.20 Résolution de la sous-question c) du problème 27904	136
Tableau 5.21 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 27904 .	137
Tableau 5.22 Résolution de la sous-question a) du problème 28709.....	141
Tableau 5.23 Résolution de la sous-question b.i) du problème 28709.....	142
Tableau 5.24 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 28907 .	143
Tableau 5.25 Résolution de la sous-question a.i) du problème 29511	146
Tableau 5.26 Résolution de la sous-question b) du problème 29511.....	147
Tableau 5.27 Résolution de la sous-question c) du problème 29511	147
Tableau 5.28 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 29511 .	148
Tableau 5.29 Résolution de la sous-question b) du problème 29612.....	152
Tableau 5.30 Résolution de la sous-question c.i) du problème 29612	153
Tableau 5.31 Résolution de la sous-question e) du problème 29612	154
Tableau 5.32 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 29612 .	155
Tableau 5.33 Résolution de la sous-question b) du problème 29613.....	159
Tableau 5.34 Résolution de la sous-question d) du problème 29613.....	160
Tableau 5.35 Résolution de la sous-question e) du problème 29613	161
Tableau 5.36 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 29613 .	162
Tableau 5.37 Résolution de la sous-question a) du problème 29823	165
Tableau 5.38 Résolution de la sous-question c) du problème 29823	166

Tableau 5.39 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 29823 .	167
Tableau 5.40 Résolution de la sous-question a) du problème 29927	170
Tableau 5.41 Résolution de la sous-question b) du problème 29927.....	170
Tableau 5.42 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 29927 .	172
Tableau 5.43 Résolution de la sous-question a) du problème 43930.....	175
Tableau 5.44 Résolution de la sous-question b) du problème 43930.....	177
Tableau 5.45 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 43930 .	179
Tableau 5.46 Résolution de la sous-question b) du problème 47412.....	183
Tableau 5.47 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 47412 .	183
Tableau 5.48 Actions contrôlées liées aux caractéristiques du problème (contrôle structural).....	186
Tableau 5.49 Actions contrôlées s'exerçant sur les unités de mesure elles-mêmes (contrôle structural) .	187
Tableau 5.50 Actions contrôlées liées aux caractéristiques du problème (contrôle opérationnel).....	187
Tableau 5.51 Actions contrôlées s'exerçant sur les unités de mesure elles-mêmes (contrôle opérationnel)	188
Tableau 5.52 Actions contrôlées indépendantes des demandes mathématiques (contrôle opérationnel) .	189
Tableau 5.53 Actions contrôlées liées à des demandes mathématiques particulières (contrôle opérationnel)	190
Tableau 5.54 Action contrôlée liée au contexte physique (contrôle opérationnel)	191
Tableau A.1 Synthèse des manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique	204

LISTE DES ABRÉVIATIONS, DES SIGLES ET DES ACRONYMES

BIPM	Bureau international des poids et mesures
DEC	Diplôme d'études collégiales
ÉDPO	Équation différentielle de premier ordre
MES	Ministère de l'Enseignement supérieur
SI	Système international d'unités
STEM	<i>Science, technology, engineering and mathematics</i> (anglophone)
STIM	Science, technologie, ingénierie et mathématiques (francophone)

RÉSUMÉ

Au Québec, les programmes offerts par les établissements d'enseignement collégial sont encadrés par des devis émis par le ministère de l'Enseignement supérieur (MES). Dans le nouveau programme *Sciences de la nature* – dont le devis a été ratifié en décembre 2021 – l'interdisciplinarité prend davantage d'importance par rapport à la version précédente, s'inscrivant ainsi dans le mouvement international STIM (science, technologie, ingénierie et mathématiques) (Freeman et al., 2019). Ce récent devis ministériel présente un grand nombre de liens interdisciplinaires entre les mathématiques et la physique. Dans ces deux disciplines, la résolution de problèmes est centrale à l'acquisition des éléments de compétence exigés par le MES. Notamment, les cours de mathématiques puisent, de la physique, des contextes autres offrant l'opportunité de réinvestir et consolider les notions mathématiques en apprentissage. Du recours à des contextes physiques dans les problèmes mathématiques découle la présence d'unités de mesure tout au long de leur résolution. De plus, la considération des unités de mesure est nécessaire au respect de certains critères de performance des cours de mathématiques. Selon le peu de recherches en didactique des mathématiques abordant l'activité mathématique et les unités de mesure (Dorko et Speer, 2015; Rowland et Jovanoski, 2004; Rowland, 2006), la présence de ces dernières entraînent parfois des difficultés chez les étudiants. Cependant, certains éléments de ces recherches semblent soulever la possibilité que les unités de mesure puissent aider les étudiants à contrôler leur activité mathématique.

La présente recherche a ainsi comme objectif d'explorer le potentiel de l'usage des unités de mesure comme outil de contrôle sur l'activité mathématique lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique de niveau collégial. Pour ce faire, la conceptualisation du contrôle au sens de Rhéaume (2020) a d'abord été étendue – en s'appuyant sur mon expérience comme enseignante de physique et des recherches en didactique de la physique – afin d'ancrer ses composantes à la présence d'unités de mesure. Ensuite, une analyse de contenu (Bardin, 2013) a été réalisée sur le corpus des problèmes mathématiques à contexte physique issus d'un populaire manuel de calcul différentiel afin de sélectionner un nombre restreint de problèmes représentatifs dudit corpus. Enfin, ces problèmes ont été soumis à une analyse *a priori* (Artigue, 1991) orientée par la conceptualisation du contrôle passant par les unités de mesure.

D'une part, plusieurs avancées autour d'un contrôle passant par les unités de mesure découlent des analyses effectuées, venant enrichir et nuancer sa conceptualisation antérieure. Notamment, treize actions contrôlées liées aux unités de mesure – mobilisant une ou plusieurs composantes du contrôle dans un but précis selon les caractéristiques du problème et l'activité mathématique demandée par celui-ci – ont été dégagées, amenant un éclairage inédit sur la structuration et l'enchevêtrement des composantes d'un contrôle par les unités de mesure. D'autre part, divers aspects interdisciplinaires – positifs et négatifs – entre les mathématiques et la physique ont été soulevés par l'exercice d'un contrôle ancré aux unités de mesure lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique.

Bref, il ressort de la présente recherche que les unités de mesure peuvent être considérées comme une variable didactique dans les problèmes mathématiques à contexte physique – puisque leur présence et leur présentation affectent le contrôle pouvant être sollicité lors de la résolution de ces derniers – ce qui offre des pistes de rapprochements entre les mathématiques et la physique favorisant ainsi l'interdisciplinarité.

Mots clés : contrôle, unités de mesure, résolution de problèmes, contexte physique, postsecondaire

INTRODUCTION

Dans le devis ministériel – revisité en décembre 2021 – du programme collégial *Sciences de la nature*, les deux disciplines possédant le plus grand nombre de liens interdisciplinaires sont les mathématiques et la physique. Ces nombreux liens sont une manifestation de l'approche programme, qui prise l'interdisciplinarité, à l'instar du mouvement international STIM (Freeman et al., 2019). Notamment, le recours aux sciences comme sources de contextes pour l'application des notions mathématiques en apprentissage lors de la résolution de problèmes est mise de l'avant. Non seulement la présence d'unités de mesure découle du contexte physique, mais leur considération est nécessaire à l'acquisition de certains éléments de compétence. Peu d'études semblent toucher les liens entre les unités de mesure et l'activité mathématique, mais ces dernières montrent que leur présence entraîne des difficultés chez les étudiants (Dorko et Speer, 2015; Rowland et Jovanoski, 2004; Rowland, 2006). Néanmoins, quelques éléments de ces mêmes études soulèvent la possibilité que les unités de mesure puissent aider les étudiants à contrôler leur activité mathématique. L'intérêt du présent mémoire réside donc dans l'exploration du potentiel des unités comme outil de contrôle (Réhaume, 2020) sur l'activité mathématique lors de la résolution de problèmes de calcul différentiel avec un contexte physique. Cette recherche se propose d'abord d'élargir la notion de contrôle pour l'ancrer aux unités de mesure, afin d'ensuite utiliser ce travail comme cadre conceptuel lors de l'analyse théorique (sans l'intervention d'étudiants) de problèmes mathématiques à contexte mathématique. Le présent mémoire est constitué de six chapitres.

La premier chapitre traite de la problématique. Un portrait de la formation collégial est d'abord dressé, d'où ressort l'importance de l'approche programme, qui passe par la mise en valeur de l'interdisciplinarité. Ensuite, l'interdisciplinarité entre les mathématiques et la physique au sein du programme *Sciences de la nature* est abordée, dirigeant l'attention sur les unités de mesure dans ces disciplines. Enfin, la présence d'unités de mesure dans l'activité mathématique d'étudiants est abordée à travers des recherches en didactique des mathématiques. De la problématique découle l'objectif général de cette recherche, qui est d'explorer le potentiel des unités de mesure comme soutien à l'activité mathématique lors de la résolution de problèmes à contexte physique.

Le second chapitre présente la construction d'un cadre conceptuel élaboré à partir d'une connaissance du Système international des unités (SI) et de la notion de contrôle au sens de Rhéaume (2020) – qui s'appuie le contrôle au sens de Saboya (2010). Spécifiquement, la conceptualisation d'un contrôle passant par les unités de mesure est développée à partir de mon expérience comme enseignante de physique et de recherches en didactique de la physique. Du cadre conceptuel découle deux questions de recherche spécifiques :

Comment les unités apparaissent-elles dans les problèmes mathématiques à contexte physique offerts aux étudiants par un manuel du cours collégial *Calcul différentiel*? Quelles opportunités de contrôle (et de quels types) sur l'activité mathématique des étudiants l'usage des unités de mesure offre-t-il lors de la résolution de problèmes à contexte physique (routiniers de niveau collégial)?

Le troisième chapitre adresse les dispositifs méthodologiques mis en œuvre dans le cadre de la présente recherche, ainsi que leur pertinence afin de répondre aux questions de recherche. Entre autres, trois opérations analytiques sont abordées : (1) l'analyse de contenu du corpus de problèmes mathématiques à contexte physique d'un manuel de calcul différentiel, (2) l'analyse catégorielle des problèmes selon l'activité mathématique demandée dans la résolution de tels problèmes et (3) l'analyse *a priori* de problèmes représentatifs du corpus centrée sur l'exercice d'un possible contrôle passant par les unités de mesure découlant du contexte physique. De plus, le déroulement des analyses et les critères employés sont décrits.

Le quatrième chapitre détaille les analyses effectuées en accordance avec la méthodologie établie au chapitre précédent afin de répondre à la première question de recherche. D'abord, un portrait du manuel est dressé selon les caractéristiques d'intérêt du corpus des problèmes mathématiques à contexte physique. Enfin, les points importants sont distillés en termes des éléments de réponse qu'ils amènent à cette question.

Le cinquième chapitre détaille les analyses effectuées en accordance avec la méthodologie établie au chapitre précédent et rassemble les résultats tirés de ces analyses afin de répondre à la deuxième question de recherche. D'abord, les caractéristiques d'intérêt du corpus entier des problèmes mathématiques à contexte physique du manuel sont abordées. Ensuite, la sélection de (treize) problèmes comme représentants de ce corpus, et les raisons derrière celle-ci, sont énumérées, suivies des (treize) analyses *a priori* réalisées afin d'explorer le potentiel de l'usage des unités de mesure comme outil de contrôle. Puis, les actions contrôlées liées aux unités ayant émergées au fil de ces analyses sont inventoriées. Qui plus est, les limitations autour de celles-ci sont également traitées, en plus de leur aspect interdisciplinaire mathématiques-physique. Enfin, les avancées sur la conceptualisation d'un contrôle par les unités de mesure sont soulignées, surtout au niveau de la structuration de ses diverses composantes et de leur(s) manifestation(s) en action(s) contrôlée(s).

Le sixième chapitre poursuit la discussion sur les éléments de réponse présentés dans les chapitres d'analyse. Notamment, plusieurs pistes prometteuses autour d'une continuation de la présente recherche sont soulevées.

Une conclusion termine le texte principal du mémoire. Les points saillants concernant les opportunités d'un contrôle par les unités de mesure offertes par les problèmes mathématiques à contexte physique sont réitérés, puis les limites et les retombées de la présente recherche sont explicitées.

CHAPITRE 1

PROBLÉMATIQUE

Au Québec, les études collégiales prennent place après six années d'études primaires et cinq années d'études secondaires, mais précèdent les études universitaires. Il s'agit d'une particularité de l'enseignement supérieur québécois. Ce chapitre débute donc par un portrait de la formation collégiale, notamment autour de la philosophie derrière l'élaboration de programmes collégiaux, qui est abordée dans les premières pages des devis ministériels. L'incarnation de cette philosophie dans le nouveau programme préuniversitaire *Sciences de la nature* dirige ensuite notre attention vers l'interdisciplinarité entre les mathématiques et les sciences, plus spécifiquement, la physique. L'usage de la physique comme source de contextualisation des mathématiques entraîne la présence d'unités de mesure pendant la résolution de problèmes (mathématiques à contexte physique); nous portant ainsi à consulter des études en didactique des mathématiques sur le sujet. Plusieurs éléments tirés de ces études suggèrent, selon nous, que les unités de mesure puissent soutenir l'activité mathématique des étudiants en favorisant possiblement leur emprise, *leur contrôle*, sur celle-ci; nous amenant enfin à formuler de premières questions de recherche.

1.1 Un portrait de la formation collégiale

L'enseignement collégial québécois dans son ensemble est composé d'institutions uniques. Ces dernières sont pourvues d'une certaine autonomie, tout en étant redevable au ministère de l'Enseignement supérieur (MES). Les études collégiales s'étalent, à temps plein, sur deux ans pour la formation préuniversitaire ou sur trois ans pour la formation technique; les étudiants collégiaux ont généralement autour de 17 à 20 ans. Le MES établit les programmes d'études menant au diplôme d'études collégiales (DEC). Il définit également les règles d'admission aux différents programmes. Toutefois, la détermination et la mise en œuvre des activités d'apprentissages – sauf exception – sont de la responsabilité de chaque établissement. Les compétences¹ développées et énoncées par le ministère pour chaque programme doivent être acquises par les étudiants de celui-ci au terme de leur formation. Ainsi, le seuil est ministériel et les moyens de l'atteindre relèvent de l'institution collégiale (Gosselin, 2021). Les compétences peuvent se décliner de diverses manières, ce qu'abordent les premières pages des programmes d'études (e.g. *Sciences de la nature*) conduisant au DEC :

La manière de prendre en considération les visées, les compétences communes, les buts ainsi que les objectifs et les standards appartient à chaque établissement d'enseignement collégial.

¹ Des exemples de compétences associées au programme *Sciences de la nature* se retrouvent dans la section 1.2.2.

Leur mise en œuvre ne donne pas nécessairement lieu à des cours communs pour les élèves d'un même établissement. En outre, chaque cours peut traiter d'une partie de ces éléments ou d'un ou de plusieurs de ces éléments. Ce qui importe, c'est que tous les éléments soient pris en considération, dans un ou plusieurs cours, et qu'ils deviennent des objets d'enseignement et d'apprentissage, parce qu'ils ont été reconnus comme essentiels à l'exercice d'une profession ou à la poursuite des études universitaires. (Ministère de l'Enseignement supérieur, 2022, p. 3)

Afin d'obtenir le DEC, l'étudiant doit avoir, sauf exception, atteint les objectifs et standards du programme suivi et avoir réussi l'épreuve synthèse propre à celui-ci – telle que déterminée par l'institution collégiale fréquentée – ainsi que l'épreuve uniforme de langue d'enseignement et de littérature (Gosselin, 2021).

Tel que mentionné, l'enseignement collégial repose sur la notion de compétence² à développer – à laquelle sont associés des critères de performance – mais il repose également sur l'*approche programme*, notamment depuis son renouveau de 1993, orchestrée par la ministre de l'Éducation, de l'Enseignement supérieur et de la Science, Mme Lucienne Robillard (Gosselin, 2021, p. 7). Cette locution traduit la vision globale des programmes d'études conduisant au DEC qui s'inscrit dans une perspective de cohérence d'ensemble des activités d'enseignement et d'apprentissage constituant ces programmes.

1.1.1 L'approche programme dans l'enseignement collégial

Plutôt étonnamment, l'approche programme n'est pas explicitement définie dans les documents ministériels; une omission soulignée, dès l'an 2000, par le Conseil supérieur de l'éducation, qui déplorait que « les acteurs des collèges ont dû travailler sans assises théoriques clairement définies » (Conseil supérieur de l'éducation, 2000, p. 9). Cependant, certains passages dans des documents ministériels y font référence. Par exemple, dans les devis ministériels encadrant les programmes d'études préuniversitaires, les visées de formation sont présentées comme facilitant « l'**approche programme** en précisant ce qui est attendu de l'élève à la fin de ses études collégiales » (MES, 2022, p. 2, notre accentuation). De plus, la section *Renseignements complémentaires* de ces mêmes programmes d'études, précise que les buts (du programme)

donnent au programme d'études sa cohérence, ce qui favorise l'intégration et le transfert des apprentissages. Ils facilitent l'**approche programme** par l'harmonisation de la formation spécifique et de la formation générale, et ils concrétisent la finalité du programme d'études. (MES, 2022, p. 82, notre accentuation)

Malgré la présence de ces indices, il faut chercher ailleurs la définition de l'approche programme. L'approche programme – au sens large – est définie par le Conseil supérieur de l'éducation comme une

² Des exemples de compétences associés au programme *Sciences de la nature* se retrouvent dans la section 1.2.2.

« façon de concevoir et d'organiser les activités d'apprentissage d'un programme de manière qu'elles répondent à des objectifs communs (ceux du programme) et qu'elles s'inscrivent dans une démarche intégrée » (Conseil supérieur de l'éducation, 2004, p. 7). L'Office québécois de la langue française, quant à lui, définit l'approche programme comme étant une « approche axée sur la cohérence du programme de formation ou le décloisonnement des disciplines en vue de l'intégration des apprentissages » (Office québécois de la langue française, 2012). Une note étoffe cette définition : « l'approche-programme³ s'oppose à une série de cours sans relations explicites les uns avec les autres, puisque tous les cours d'un programme de formation sont interreliés en fonction de principes d'harmonisation et de cohérence » (Office québécois de la langue française, 2012).

En s'intéressant plus précisément à l'origine de l'expression *approche programme*, nous avons remarqué qu'elle précède le renouveau de l'enseignement collégial de 1993 de plusieurs années. La Commission des affaires pédagogiques de la Fédération des cégeps attribue l'apparition de cette expression au Conseil supérieur de l'éducation, qui, dès 1975, promouvait cette idée dans le document *Le Collège : rapport sur l'état et les besoins de l'enseignement collégial* (Fédération des cégeps, 1988, p. 34). Cette commission a également établi sa propre définition de l'approche programme.

Elle [l'approche programme] se veut une nouvelle façon, plus globale, plus systématique, plus curriculaire d'envisager, de concevoir et d'appliquer les programmes d'études. L'approche-programme nous ramène aux postulats de départ, à l'idée que le programme constitue l'axe d'intégration, la pierre angulaire de la formation des étudiantes et étudiants au collégial.

Le concept s'apparente également à celui de la prise en charge des programmes par les établissements dans le but d'assurer une plus grande cohérence des programmes et leur gestion.

Autrement dit, l'approche-programme c'est aussi un état d'esprit, une attitude, un choix idéologique tout autant qu'un mode et un style de gestion qui suppose une manière particulière d'orienter les actions et de réaliser les opérations touchant les programmes d'études. (Fédération des cégeps, 1988, p. 34)

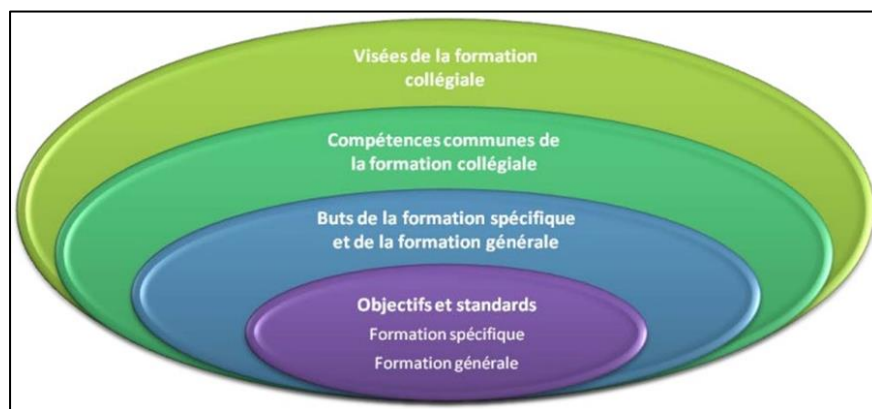
Cette définition – ancrée dans la pratique – reste la plus complète de l'approche programme que nous avons trouvée et est d'actualité dans le remaniement récent de devis ministériels encadrant des programmes d'études collégiales. Notamment, le programme *Sciences de la nature* a été revisité en 2021, avec une implantation facultative dès l'automne 2022, et obligatoire dès l'automne 2024. C'est ce programme qui est d'intérêt dans ce mémoire.

³ Les formes *approche programme* et *approche-programme* sont toutes deux acceptées (Office québécois de la langue française, 2012).

1.1.2 Le programme *Sciences de la nature*

Le devis ministériel encadrant le nouveau programme *Sciences de la nature* a été ratifié par le MES en décembre 2021. Diverses sections le constituent. D’abord, la composition des programmes d’études collégiales conduisant au DEC, dans leur ensemble, est expliquée. Les programmes d’études sont basés sur plusieurs éléments en interaction : les visées de la formation collégiale, les compétences communes de la formation collégiale, les buts de la formation spécifique et de la formation générale, les objectifs et standards de la formation spécifique et de la formation générale. La figure ci-dessous illustre leur interaction.

Figure 1.1 Éléments d'un programme d'études collégiales (tiré de MES, 2022, p. 1)



Les trois visées de la formation collégiale sont (1) de former l’élève à vivre en société de façon responsable, (2) d’amener l’élève à intégrer les acquis de la culture et (3) d’amener l’élève à maîtriser la langue comme outil de pensée, de communication et d’ouverture au monde. Les cinq compétences communes de la formation collégiale – qui découlent des visées précédentes – sont (1) de résoudre des problèmes, (2) d’exercer sa créativité, (3) de s’adapter à des situations nouvelles, (4) d’exercer son sens des responsabilités et (5) de communiquer (MES, 2022, p. 2-3).

Suivant cette section, le devis ministériel aborde la structure du programme *Sciences de la nature*, c’est-à-dire la distribution des unités (à l’instar de crédits universitaires) à travers les quatre formations le composant; la formation spécifique au programme, la formation générale commune à tous les programmes, la formation générale propre au programme, la formation générale complémentaire (à la formation spécifique). Une description détaillée des buts du programme d’études – qui sont associés aux différentes formations – est proposée par la suite. Notamment, la formation spécifique possèdent six buts.

Au terme de ses études en *Sciences de la nature*, l’élève saura :

- exploiter les savoirs disciplinaires permettant la consolidation et l’enrichissement d’une culture scientifique de base;
- traiter de situations complexes dans une perspective d’interdisciplinarité;

- apprécier les liens unissant les sciences, les technologies et la société;
- faire preuve de sens critique et de rigueur intellectuelle;
- utiliser les technologies numériques dans un contexte scientifique;
- développer un esprit de collaboration et communiquer. (MES, 2022, p. 5)

Tel que mentionné dans la section précédente, selon le ministère de l'Enseignement supérieur (2022), ce sont les buts du programme qui « donnent au programme d'études sa cohérence, ce qui favorise l'intégration et le transfert des apprentissages » et « facilitent l'approche programme » (p. 82). Ainsi, les buts de la formation spécifique au programme *Sciences de la nature* devraient refléter l'incarnation de l'approche programme propre à celui-ci. Notamment, le but concernant le traitement de situations complexes dans une perspective d'interdisciplinarité suggère que l'approche programme passe par des liens interdisciplinaires.

En s'appuyant sur ces connaissances disciplinaires, l'élève établit des liens entre les différentes disciplines. Il organise ses acquis adéquatement de façon à pouvoir les utiliser efficacement dans divers contextes.

Au terme de sa formation, l'élève adopte un point de vue plus large sur des problématiques en faisant des liens entre les disciplines. De plus, il s'est construit un ensemble de savoirs cohérents et complémentaires l'amenant à créer des liens appropriés où les interrelations entre les disciplines sont essentielles. (MES, 2022, p. 5)

Cette incarnation spécifique de l'approche programme correspond particulièrement bien à la définition offerte par l'Office québécois de la langue française (2012), qui prône le décroisement des disciplines et qui cherche à souligner leurs interrelations.

À la suite de la section détaillant les divers buts du programme, le devis ministériel liste les objectifs et les standards précis du programme *Sciences de la nature*. Pour chacune des quatre formations – spécifique, générale commune, générale propre, générale complémentaire – une compétence (l'objectif) et ses critères de performance (le standard) sont associées à une activité d'apprentissage (un cours). Chaque compétence – ainsi liée à un seul cours – est constituée de plusieurs éléments (de compétence) qui sont également accompagnés de certains critères de performance précis. Enfin, la dernière section du devis rassemble des renseignements complémentaires à propos du programme *Sciences de la nature*, tels que le vocabulaire utilisé dans les devis encadrant les programmes préuniversitaires.

1.2 L'interdisciplinarité dans le programme *Sciences de la nature*

Dans le programme préuniversitaire *Sciences de la nature*, l'interdisciplinarité semble ainsi un tenant important de l'approche programme propre à ce dernier. Tel qu'abordé dans la section précédente, cet aspect d'interdisciplinarité se manifeste notamment dans les buts du programme associés à la formation spécifique.

Puisque les objectifs et standards de la formation spécifique découlent des buts du programme (voir figure 1.1), l'interdisciplinarité s'y manifeste également. Nous allons d'abord explorer ces manifestations à partir des cours de mathématiques (envers les autres disciplines du programme).

1.2.1 Les cours de mathématiques et de sciences

Dans la formation spécifique du nouveau programme *Sciences de la nature* (200.B1), il y a quatre activités d'apprentissage (cours) en mathématiques : probabilités et statistiques⁴; calcul différentiel; calcul intégral; algèbre linéaire et géométrie vectorielle. L'interdisciplinarité est présente dans chacun de ces cours, au niveau de la compétence ou d'un de ses éléments. La compétence associée au cours de probabilités et statistiques s'appuie directement sur les liens interdisciplinaires, car elle stipule que les étudiants doivent être en mesure de « résoudre des problèmes liés aux sciences de la nature par l'utilisation de méthodes statistiques et de concepts probabilistes » (MES, 2022, p. 22). Ainsi, les outils mathématiques abordés pendant le cours vont servir à – ou, plutôt, être réinvestis dans – la résolution de problèmes issus de différentes disciplines scientifiques; notamment, la biologie, la chimie et la physique, puisqu'elles font partie de la formation spécifique du programme *Sciences de la nature*⁵. Dans le cadre des cours de calcul – calcul différentiel et calcul intégral – un des éléments de la compétence concerne explicitement les liens interdisciplinaires, celui qui précise « [d']effectuer l'analyse de problèmes liés aux sciences de la nature » (MES, 2022, p. 24, p. 26). Évidemment, les critères de performance (les standards) associées à cet élément de compétence diffèrent entre les cours de calcul différentiel et de calcul intégral. Encore une fois, l'interdisciplinarité se manifeste par le recours à des problèmes provenant d'autres disciplines scientifiques. Le cours d'algèbre linéaire et de géométrie vectorielle, tant qu'à lui, possède un élément de compétence similaire, qui demande « [d']appliquer les concepts de l'algèbre linéaire et de la géométrie vectorielle à la résolution de problèmes liés aux sciences de la nature » (MES, 2022, p. 28). Nous venons de voir comment se présente l'interdisciplinarité dans les cours de mathématiques, mais qu'en est-il des autres disciplines scientifiques?

Dans la formation spécifique du nouveau programme *Sciences de la nature* (200.B1), il y a deux activités d'apprentissage (cours) en biologie, deux en chimie et trois en physique⁶. En ce qui concerne les cours de

⁴ Ce cours de mathématiques a été ajouté au programme dans le devis ministériel ratifié en 2021 ; les autres cours de mathématiques de la formation spécifique sont restés essentiellement les mêmes que dans la version précédente.

⁵ Il n'est pas précisé si l'expression « sciences de la nature » inclut la discipline mathématique elle-même, nous aborderons cette nuance dans la section 1.2.2.

⁶ Il y a également une activité d'apprentissage en informatique et celle qui est connue sous le nom d'*épreuve synthèse de programme* ; toutes deux ne seront pas abordées dans le cadre de ce mémoire. Pour plus d'informations,

biologie, il n’y a aucune mention explicite de liens interdisciplinaires, ni dans l’énoncé de leur compétence, ni dans ceux des éléments de compétence, ni dans les critères de performance les accompagnant⁷. Les manifestations explicites d’interdisciplinarité présentes dans le devis ministériel sont associées aux cours de chimie et de physique, et mettent en jeu les mathématiques. En chimie, un des critères de performance stipule que l’élève doit montrer son « respect du formalisme mathématique et chimique » (MES, 2022, p. 30, p. 32) soit lors de « [l’]analys[e] des propriétés de la matière et des transformations chimiques » (p. 30), soit lors de « [l’]analys[e] des systèmes chimiques en solution » (p. 32), selon le cours suivi. Un critère de performance semblable se trouve associé aux trois compétences liées aux cours de physique, c’est-à-dire le « respect du formalisme mathématique » (p. 34, p. 36, p. 38), soit lors de « [l’]analys[e] des situations et des phénomènes physiques en recourant aux lois et principes fondamentaux de la mécanique classique » (p. 34), soit lors de « [l’]analys[e] des situations et des phénomènes physiques en recourant aux lois et principes fondamentaux liés à l’électricité et au magnétisme » (p. 36), soit lors de « [l’]analys[e] des situations et des phénomènes physiques en recourant aux lois et principes fondamentaux liés aux ondes et à la physique moderne » (p. 38), selon le cours en question. Selon nous, la présence d’une distinction entre le formalisme mathématique et le formalisme chimique, dans le critère de performance lié aux cours de chimie, souligne la distance que le MES perçoit entre ces types de formalisme. La réduction de ce même critère, mais sans mention d’un formalisme physique, indique, selon nous, la proximité que perçoit le ministère entre les disciplines mathématique et physique (qui semble ainsi partager le même formalisme selon le ministère). Cette proximité apparente entre les mathématiques et la physique nous encourage à explorer plus en détails les liens entre les cours de ces deux disciplines que nous pouvons retrouver le devis ministériel du programme d’études collégiales préuniversitaires *Sciences de la nature*.

1.2.2 Les cours de mathématiques et de physique

Dans la section précédente, nous avons constaté que l’interdisciplinarité présente dans les quatre activités d’apprentissage en mathématiques de la formation spécifique au programme *Sciences de la nature* (200.B1) se manifeste par le recours à des « problèmes liés aux sciences de la nature. » (MES, 2022, p. 22, p. 24, p. 26, p. 28) Dans les cours de calcul différentiel, calcul intégral, algèbre linéaire et géométrie vectorielle, le ministère distingue – par le recours à deux éléments de compétence – l’utilisation des mathématiques dans la discipline mathématique, de leur utilisation dans les disciplines dites « sciences de la nature ». Le tableau 1.1 rassemble la compétence associée à chacun de ces cours et les deux éléments de compétence en

consulter le « Sciences de la nature (200.B1) – Programme d’études préuniversitaires », par le ministère de l’Enseignement supérieur, 2022, Gouvernement du Québec.

⁷ Cela ne veut pas dire qu’il n’y a aucune possibilité de liens interdisciplinaires ; il n’y en a simplement aucune mention explicite.

question⁸; les informations sont extraites de « Sciences de la nature (200.B1) – Programme d'études préuniversitaires », par le ministère de l'Enseignement supérieur, 2022, Gouvernement du Québec, p. 24, p. 26, p. 28.

Tableau 1.1 Trois activités d'apprentissage de la discipline mathématique

Activité d'apprentissage sur le calcul différentiel	
Compétence (0M02)	Analyser des problèmes par l'application du calcul différentiel.
Éléments de compétence	Utiliser des méthodes du calcul différentiel dans des applications mathématiques.
	Effectuer l'analyse de problèmes liés aux sciences de la nature.
Activité d'apprentissage sur le calcul intégral	
Compétence (0M03)	Analyser des problèmes par l'application du calcul intégral.
Éléments de compétence	Utiliser des méthodes du calcul intégral dans des applications mathématiques.
	Effectuer l'analyse de problèmes liés aux sciences de la nature.
Activité d'apprentissage sur l'algèbre linéaire et la géométrie vectorielle	
Compétence (0M04)	Analyser des problèmes par l'utilisation de concepts de l'algèbre linéaire et de la géométrie vectorielle.
Éléments de compétence	Utiliser des méthodes de l'algèbre linéaire et de la géométrie vectorielle dans des applications mathématiques.
	Appliquer les concepts de l'algèbre linéaire et de la géométrie vectorielle à la résolution de problèmes liés aux sciences de la nature.

Pour le ministère, les sciences de la nature semblent donc référer – en se limitant aux disciplines faisant partie de la formation spécifique au programme *Sciences de la nature* – à la biologie, à la chimie et à la physique. Ainsi, le recours à ces disciplines, dans les cours de mathématiques, semble se restreindre à l'utilisation de problèmes possédant un **contexte** biologique, chimique ou physique, mais se **résolvant** par l'application d'outils mathématiques. En bref, de la physique, les cours de mathématiques y puisent des contextes offrant l'opportunité aux étudiants d'utiliser les outils mathématiques en apprentissage, c'est-à-dire qu'ils font usage de **problèmes mathématiques à contexte physique**.

La résolution de problèmes est également importante dans les trois activités d'apprentissage (cours) en physique issues de la formation spécifique au programme *Sciences de la nature* (200.B1), c'est-à-dire celles concernant : la mécanique classique; l'électricité et le magnétisme; les ondes et la physique moderne. Cette importance s'atteste par la présence du même critère de performance accompagnant les (trois) compétences liées à ces cours, puisqu'il exige la « démonstration de rigueur dans la démarche de résolution de

⁸ Dans le devis ministériel, il y a quatre éléments de compétence pour le calcul différentiel, cinq pour le calcul intégral et six pour l'algèbre linéaire et géométrie vectorielle.

problèmes » (MES, 2022, p. 34, p. 36, p. 38). Comme les lois de la physique sont fréquemment exprimées en utilisant des symboles algébriques et les règles mathématiques (Sokolowski, 2021, p. 3), la résolution de problèmes physiques consiste, de manière globale, à manipuler des symboles algébriques par le biais d'applications d'algorithmes mathématiques. Selon notre expérience⁹, en physique, une démarche commune de résolution de problèmes en physique débute par traduire mathématiquement le problème – ce qui se manifeste généralement par un choix approprié de formules physiques vues en classe – se poursuit par la manipulation algébrique des éléments composant lesdites formules, et se termine par l'interprétation physique des résultats obtenus. La manipulation algébrique étant le cœur de la démarche peut expliquer l'absence de distinction entre le formalisme mathématique et le formalisme physique dans les critères de performance des compétences associées aux cours de physique (voir la section 1.2.1).

Cependant, il existe bel et bien des différences entre ces deux types de formalisme, notamment au niveau sémantique, puisque les « physicists "load" physical meaning onto both symbols and numbers in a way that mathematicians usually do not » (Redish et Kuo, 2015, p. 565). Les représentations algébriques, et même arithmétiques, en physique sont fondamentalement différentes de celles utilisées en mathématiques (sans contexte), car les équations physiques sont composées de grandeurs physiques provenant du monde naturel :

What distinguishes these [algebraic] representations in physics from how they are used in a context-free mathematical sense is that the scientific equations are built of quantities with definite physical interpretations reflecting their derivation from nature. (Sokolowski, 2021, p. 3)

Ce sens physique, et la nécessité de le considérer, est visible dans le devis ministériel par l'ajout du critère de performance « interprétation juste des résultats », qui a été associé aux éléments de compétences mathématiques relevant de la résolution de « problèmes liés aux sciences de la nature » (MES, 2022, p. 24, p. 26, p. 28), contrairement à ceux provenant uniquement de la discipline mathématique. Ce critère reflète directement la dernière étape d'une démarche de résolution de problèmes en physique, telle qu'abordée précédemment. Ce sens physique supplémentaire se manifeste explicitement par la présence d'unités de mesure; c'est-à-dire que « math in science is about relations among physical quantities that are transformed into numbers by *measurement* [and] as a result quantities in science tend to have [...] units » (Redish, 2021, p. 314). Encore une fois, ce phénomène est visible dans le devis ministériel du programme *Sciences de la nature* (200.B1), car un critère de performance – lié aux compétences des trois cours de physique – est de

⁹ Au moment de la rédaction de ce mémoire, j'ai été enseignante dans le département de physique d'un cégep québécois pendant plus d'un an.

s'assurer de « [l']utilisation et conversion d'unités de mesure appropriées » (MES, 2022, p. 34, p. 36, p. 38) par les étudiants.

L'interdisciplinarité n'est pas seulement un tenant important de l'approche programme des études collégiales préuniversitaires au Québec; elle s'aligne avec la visée STIM (STEM dans le milieu anglophone), puisque « there has been a global turn to STEM that is clearly evident in government efforts worldwide to elaborate STEM policy » (Freeman et al., 2019, p. 350). Les unités de mesure seront ainsi de plus en plus présentes dans la discipline mathématique, notamment grâce au recours à des contextes physiques (et provenant des autres sciences). Avec la place grandissante des unités de mesure dans la résolution de problèmes mathématiques (contextuels), il semble pertinent de s'intéresser aux unités de mesure, ainsi qu'à leur possible impact sur l'activité mathématique. La prochaine section explore la place des unités de mesure au Québec, dans les sphères scolaire et quotidienne.

1.3 Les unités de mesure au Québec

Nous avons argumenté précédemment que les unités de mesure revêtent une importance grandissante dans le monde scolaire, puisque découlant de l'interdisciplinarité prisée par la visée STIM du monde occidental, et par l'approche programme de la formation collégiale au Québec. Notamment, dans le récent devis ministériel concernant le programme d'études préuniversitaires *Sciences de la nature* (200.B1), les activités d'apprentissage en mathématiques font appel à des problèmes mathématiques à contexte physique et les activités d'apprentissage en physique prennent appui sur le formalisme mathématique (voir section 1.2.2). Cependant, la présence d'unités ne se limite pas aux disciplines mathématique et physique, ni même au monde scolaire; les unités de mesure sont également omniprésentes dans la vie quotidienne. À titre d'exemple, les distances indiquées avant d'atteindre les sorties d'autoroute sont exprimées en kilomètres (km) sur les panneaux routiers. Bref, les étudiants du nouveau programme *Sciences de la nature*, seront confrontés à des unités de mesure dans leurs cours de physique – ou, plus généralement, de sciences – dans leurs cours de mathématiques, ainsi que dans leur vie personnelle. De cette diversité de sources découle un questionnement; est-ce que les étudiants font face à une uniformité dans les unités rencontrées et dans l'approche prise à leur sujet? Ou sont-ils plutôt en présence d'une complexité (possiblement implicite) en ce qui les concerne? Ces questions seront abordées dans les sections suivantes; d'abord, en contrastant la discipline mathématique et la discipline physique, puis, en se concentrant sur les situations de la vie courante au Québec.

1.3.1 Les unités de mesure dans les disciplines mathématique et physique

En ce qui concerne les disciplines mathématique et physique, nous avons brièvement mis de l'avant que leur formalisme respectif possède des similarités, mais des discordances (sémantiques) importantes. Un phénomène semblable concerne les unités de mesure elles-mêmes, leur traitement, et l'approche prise envers celles-ci.

Les mathématiques et la physique font toutes deux usage de lettres de l'alphabet latin (entre autres) comme symboles pour représenter divers paramètres, grandeurs, unités, quantités, etc. Puisque cet alphabet ne contient que 26 lettres, il n'est pas surprenant qu'une même lettre serve de symbole pour représenter deux (ou plus) éléments distincts dans différentes disciplines, ou à l'intérieur même d'une discipline. Par exemple, la lettre « m » désigne communément la pente d'une fonction linéaire en mathématiques (Redish et Kuo, 2015, p. 571), tandis qu'en physique, elle désigne fréquemment la masse d'un objet (Redish, 2021, p. 314). Aussi, pour les deux disciplines, la lettre « m » est le symbole obligatoire associé au mètre; une unité de mesure de longueur utilisée en mathématiques et en physique (Bureau international des poids et mesures¹⁰, 2019, p. 18-19). Les étudiants doivent donc naviguer à travers les similarités symboliques tout au long de leur parcours collégial¹¹ dans le programme *Sciences de la nature*, puisqu'ils suivent des cours de mathématiques et physique parfois simultanément. De plus, certaines mathématiques, notamment les mathématiques appliquées, se basent sur – ou ont recours à – un contexte concret¹². L'utilisation d'un contexte en mathématiques rapproche ces dernières de la physique, car elle entraîne la présence d'unités de mesure. Cependant, il est rarement nécessaire d'effectuer un travail approfondi sur les unités dans les cours de mathématiques. Fréquemment, les unités de mesure sont considérées en amont et en aval de la résolution, et sont ignorées durant celle-ci. Leur considération en amont est liée à l'énoncé – la prémisse – du problème mathématique à résoudre (e.g. dans la caractérisation des variables en jeu). La mise de côté des unités durant la résolution elle-même n'est pas surprenante, puisque « math in math class tends to be about numbers » (Redish, 2021, p. 314). Leur retour après la résolution consiste plutôt en leur apparition dans la présentation du résultat obtenu, c'est-à-dire que les unités de mesure sont là pour compléter la réponse, pour la relier au contexte du problème maintenant résolu. Cela peut se voir par l'ajout du critère de performance « interprétation juste des résultats » (MES, 2022, p. 24, p. 26, p. 28), lorsqu'il est question de problèmes contextualisés dans les cours de mathématiques (voir la section 1.2.2), puisque l'interprétation du résultat

¹⁰ L'acronyme du Bureau international des poids et mesures est BIPM.

¹¹ Ceci s'applique également au parcours scolaire antérieur, mais cette recherche se limite au niveau collégial.

¹² Ce qui a pris de l'importance dans la nouvelle version (2022) du programme *Sciences de la nature*.

– en termes du contexte du problème – passe par l’unité de mesure qui l’accompagne; cette dernière liant le nombre à la grandeur concrète, physique, qu’il représente (e.g. le mètre indique une mesure de longueur).

Dans les cours de physique, puisque les nombres et les symboles algébriques représentent des grandeurs physiques transformées en nombres par l’action de mesurer, un travail plus approfondi sur les unités de mesure est généralement nécessaire (Redish, 2021). Cela peut se voir par la présence d’un critère de performance similaire à, mais plus demandant que, celui joint à la résolution de problèmes contextualisés en mathématiques. Ce critère de performance est lié à l’ensemble de la compétence associée à chaque cours de physique et requiert des étudiants la « manifestation d’un jugement critique à l’égard de la vraisemblance des résultats. » (MES, 2022, p. 34, p. 36, p. 38) Selon nous, ce critère est plus demandant que celui en mathématiques, car une interprétation adéquate des résultats est nécessaire **avant** d’être en mesure de poser un jugement sur la vraisemblance de ces derniers; nous devons connaître la nature des résultats avant de pouvoir dire s’ils sont plausibles (ou non) dans le contexte physique du problème. Les unités de mesure jouent un rôle dans l’interprétation des résultats – tel qu’établi précédemment – ainsi que dans l’évaluation de leur vraisemblance, puisqu’elles permettent de considérer l’ordre de grandeur de ceux-ci. À titre d’exemple, si le problème demande aux étudiants de déterminer la masse¹³ d’une voiture, un résultat de 1 500 kilogrammes (kg) est beaucoup plus plausible qu’un résultat de 1 500 grammes (g). De même, la conversion d’unités est importante afin, entre autres, de reconnaître les résultats équivalents (e.g. 1 500 kg équivaut à 1 500 000 g). Dans ma pratique enseignante, j’ai remarqué que la plupart des étudiants (de physique) n’ont pas forcément le réflexe de poser un jugement sur la vraisemblance d’un résultat. Par exemple, dans un problème dont la réponse finale représente la masse d’un être humain, plusieurs étudiants avaient obtenu des réponses (erronées) de l’ordre de 5 000 kg ou de 0,001 kg – la masse d’un être humain se situant généralement entre 50 et 100 kg – sans relever l’absurdité de ces dernières. Il est possible que ce type de réponse indique un manque de validation ou de réflexion critique chez les étudiants, mais il est aussi possible que cela indique une difficulté au niveau de l’ordre de grandeur intrinsèque à l’unité, ici le kilogramme. Ainsi, le travail sur les unités semble plus exigeant en physique qu’en mathématiques, même lorsque les problèmes utilisés dans les cours de mathématiques possèdent des contextes physiques. Il y a également des discordances possibles entre les unités de mesure présentes dans les cours de physique et celles présentes dans les cours de mathématiques. En physique, l’utilisation du Système international d’unités (SI) est de mise, puisqu’il « est utilisé dans le monde entier comme le système préféré d’unités et comme le langage fondamental de la science, de la technologie, de l’industrie et du commerce » (BIPM, 2019, p. 10). Notamment, l’ensemble cohérent des unités SI est d’une grande importance en physique, ce

¹³ Dans le langage familier, la masse est souvent appelée (à tort) le poids; le poids d’un objet correspond à la force gravitationnelle exercée sur cet objet par la planète sur laquelle il se trouve et s’exprime en newtons (N).

qui n'est pas forcément le cas en mathématiques. La présence d'un sous-ensemble particulier d'unités SI allude à la complexité de ce système, qui sera ainsi présenté à la section 2.1.

Les similarités et les discordances, relevées précédemment, entre les disciplines mathématique et physique peuvent complexifier la gestion des unités de mesure auprès des étudiants, puisque ces derniers doivent les naviguer tout au long de leur parcours en *Sciences de la nature*. Cependant, la complexité extrinsèque des unités de mesure ne se limite pas aux disciplines scolaires, puisque les étudiants y sont également confrontés dans leur vie quotidienne.

1.3.2 Les unités de mesure dans la vie quotidienne

Le fait que nous sommes au Québec engendre une situation particulière au niveau des unités de mesure, puisque les systèmes métrique¹⁴ et impérial cohabitent. Au Québec, dans certaines sphères, le recours aux unités impériales est encore répandu. Par exemple, dans le domaine de la construction, les longueurs et distances sont majoritairement mesurées en fractions de pouces, en pouces, en pieds, etc., alors que les unités de longueur du SI sont le mètre, ses sous-multiples (e.g. centimètre, millimètre) et ses multiples (e.g. hectomètre, kilomètre) (BIPM, 2019, p. 31). Un autre exemple consiste en la diagonale des écrans d'ordinateur et des téléviseurs (renseignant sur la dimension) qui est également exprimée en pouces, ce que nous pouvons voir dans les publicités de magasins vendant ce type de produit. Il est également assez commun d'exprimer la masse de nouveaux-nés, ou même d'adultes, avec le système impérial, c'est-à-dire en onces et en livres – plutôt qu'avec le SI, c'est-à-dire en grammes et kilogrammes.

De plus, malgré l'utilisation du SI dans les cours de physique et de mathématiques, il y a plusieurs unités fréquemment utilisés dans la vie courante qui ne font pas partie du SI. À titre d'exemple, la vitesse, s'exprimant en mètres par seconde (m/s) dans le SI, est exprimée le plus souvent dans la vie courante par des kilomètres par heure (km/h), telle que sur l'indicateur de vitesse des automobiles et sur les panneaux routiers (même si les unités n'y sont pas écrites!). L'heure – ainsi que la minute et le jour – est en dehors du Système international d'unités, mais son usage est tout de même accepté avec ce dernier (BIPM, 2019, p. 33). Dans le SI, l'énergie s'exprime en joules (J), où un joule est équivalent à un watt multiplié par une seconde ($1 \text{ J} = 1 \text{ W} \cdot \text{s}$). Cependant, dans la vie quotidienne, l'énergie est généralement exprimée par le kilowatt-heure (kW·h), c'est-à-dire un kilowatt ($1 \text{ kW} = 1\,000 \text{ W}$) multiplié par une heure ($1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$), qui est équivalent à 3,6 mégajoules (MJ). L'utilisation du kilowatt-heure comme unité de mesure d'énergie

¹⁴ Le SI est la version moderne du système métrique.

est assez répandue, notamment en ce qui concerne l'énergie électrique qu'un appareil nécessite, fournit ou consomme.

1.4 Les unités de mesure dans les recherches en didactique des mathématiques

Des points soulevés dans les dernières sections concernant les unités de mesure auxquelles sont confrontées les étudiants collégiaux québécois, nous retenons que leur considération n'est peut-être pas si simple et directe. La diversité d'approches et de traitements des unités dans la résolution de problèmes physiques, dans les cours de physique, et de problèmes à contexte physique, dans les cours de mathématiques, amène une complexité autour des unités de mesure; ce qui peut possiblement entraîner des difficultés et des confusions auprès des étudiants. De plus, selon notre expérience, la gestion des unités et le Système international d'unités n'est parfois pas sujet à un enseignement explicite. Redish (2021) tient un propos similaire sur le fait qu'apprendre à tenir compte de la physique dans les mathématiques – incluant la présence d'unités de mesure associées aux grandeurs physiques – nécessite des habiletés rarement enseignées et souvent tenues pour acquises : « learning to think about physics with math instead of just calculating involves a number of general scientific thinking skills that are often taken for granted (**and rarely taught**) in physics classes »¹⁵ (p. 1, notre accentuation). Dans cette situation, il serait encore moins surprenant que la présence d'unités de mesure provoque des difficultés et confusions chez les étudiants du programme *Sciences de la nature*, notamment lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique.

Ainsi, il semble pertinent de se tourner vers la didactique des mathématiques afin d'explorer la présence des unités de mesure sur les étudiants en mathématiques de niveau collégial, notamment autour de l'activité mathématique. La première étude abordée dans les sections suivantes porte sur les difficultés des étudiants avec les unités lors de la résolution de problèmes simples en mathématiques. Les deux autres études impliquent plutôt des difficultés autour des unités dans un cas de modélisation mathématique, où des grandeurs réelles – donc comportant des unités – sont en jeu. Les sections suivantes seront également enrichies de remarques issues de mon enseignement collégial en physique du programme *Sciences de la nature*.

¹⁵ Il n'est pas explicitement précisé si ces propos sont généraux ou restreints au niveau collégial, mais l'auteur est un professeur enseignant à un niveau scolaire équivalent au collégial et appuie ces propos sur des observations tirées de son enseignement.

1.4.1 Étude de Dorko et Speer (2015)

Dans l'introduction de leur article, les auteures Dorko et Speer (2015) mentionnent que plusieurs recherches ont relevé des difficultés chez les élèves du primaire concernant la mesure de manière générale, mais particulièrement au niveau des unités de surface et de volume. Elles déplorent cependant le manque de recherches sur le sujet des unités à un niveau d'études plus élevé que le primaire. À ce propos, elles affirment :

Sucess in any STEM discipline [science, technology, engineering, and mathematics] requires both the knowledge to obtain quantitative answers and the knowledge of how those quantities relate to the physical world, including the units in which such quantities are measured. (Dorko et Speer, 2015, p. 23)

Cela fait écho à notre point de vue concernant l'importance des unités de mesure dans le domaine mathématique, qui est promue par la vision d'interdisciplinarité de l'approche programme, par le biais de problèmes mathématiques à contexte physique. De plus, même si les auteures admettent qu'il y a moins d'accent sur les unités en mathématiques qu'en physique, il y a des sujets mathématiques dans lesquels elles revêtent un rôle notable :

One example is applications of integration, in which the units of the integral depend on the units of the integrable function and the units of the dependant variable. For instance, if $v(t)$ is a velocity function with units distance/time, $\int_a^b v(t)dt$ is the total distance travelled with a distance unit. If $a(t)$ is an acceleration function with units distance/time², $\int_a^b a(t)dt$ is [a] velocity with units distance/time. (Dorko et Speer, 2015, p. 26-27)

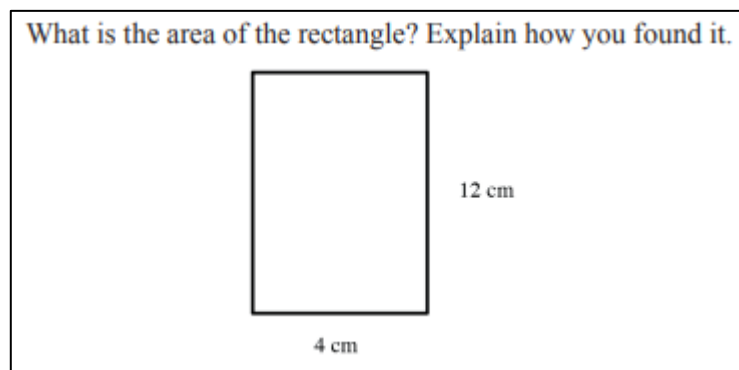
Selon nous, cet exemple illustre que les unités sont parfois incontournables, et qu'il serait possible de se servir de leur présence afin que les étudiants contrôlent mieux leur activité mathématique; par leur connaissance des unités de l'intégrande et de la variable d'intégration, les étudiants peuvent déterminer l'unité associée au résultat de l'intégrale, et donc la nature de la grandeur (physique) qu'il représente. Malgré l'exemple précédent qui relève du calcul intégral, les cinq tâches utilisées par Dorko et Speer (2015) dans leur étude sont plutôt de l'ordre du premier cycle du secondaire; elles demandent de calculer l'aire d'un rectangle (1) et d'un cercle (2), et le volume d'un prisme rectangulaire (3), d'un cylindre (4) et d'un prisme à base triangulaire (5). Elles ont sélectionné ces tâches, car elles souhaitaient comparer les possibles difficultés des étudiants¹⁶ – au sujet des unités d'aire et de volume – aux difficultés constatées chez les élèves du primaire dans des études antérieures. La présence de difficultés au niveau des unités chez des

¹⁶ Les étudiants ayant participé à l'étude de Dorko et Speer (2015) avaient un niveau scolaire équivalent au collégial du Québec et suivaient un cours de calcul (*calculus*) post-secondaire.

étudiants (post-secondaires) sur des notions pouvant raisonnablement être présumées maîtrisées soutient, selon nous, la pertinence de se pencher sur le sujet des unités autour de notions en apprentissage, telles que celles relevant du calcul différentiel.

Les auteures Dorko et Speer (2015) ont constaté deux types de difficultés autour des unités de surface et volume; elles ont remarqué une appropriation inadéquate des unités de longueur de la part des étudiants et que la présence du nombre π semble les encourager à ne pas inclure d'unités avec leurs réponses (alors qu'ils ont inclus des unités dans leur réponse aux autres tâches). Quelques pistes d'explications sont avancées par les auteures à ce propos. En ce qui concerne la première difficulté relevée, selon elles, il est possible que les étudiants croient que la longueur est une mesure adéquate d'une surface ou d'un volume – à l'instar de certains élèves du primaire – ou qu'ils pensent que la réponse doit être exprimée par les unités mentionnées dans l'énoncé du problème – sans nécessairement penser que la réponse est une longueur. Selon nous, cette deuxième piste d'explication peut être une conséquence de l'approche « mathématique » envers les unités, c'est-à-dire que les unités sont présentes dans l'énoncé du problème, ignorées pendant la résolution, et remises dans la réponse finale; il se peut que les unités remises dans la réponse soient simplement celle(s) présente(s) dans l'énoncé, sans considération supplémentaire sur la nature de celle-ci. Des réponses de participants – dont toutes les réponses contenaient une unité de longueur – abondent dans ce sens. À titre d'exemple, la figure 1.3 illustre une des tâches utilisées par les auteures.

Figure 1.3 Tâche sur l'aire d'un rectangle (tirée de Dorko et Speer, 2015, p. 29)



Par rapport à cette tâche, deux participants ont dit ceci aux auteures à propos de leur réponse qui était exprimée en centimètres :

[Participant 1] That's the thing that goes along with the sides. Whatever the side is in, that's what the answer is in.

[Participant 2] We were given a unit. The numbers are centimeters.

En ce qui concerne la deuxième difficulté relevée, les auteures soupçonnent que l'enseignement pourrait jouer un rôle sur l'absence d'unités lorsque π est présent dans la réponse :

We suspect geometry and trigonometry instruction may play a role. For instance, it is not uncommon to tell geometry students to “leave your answer in terms of/in units of π ”. Additionally, when students learn about radians, we express angles using π and no other unit (e.g. $3\pi/2$, $\sin(\pi/4)$). (Dorko et Speer, 2015, p. 39)

La piste d'explication proposée par les auteures appuie que la présence et la gestion d'unités de mesure ne sont probablement pas sujettes à un enseignement explicite en mathématiques; qu'elles sont plutôt restreintes à l'implicite. Cependant, malgré cette piste tournée vers l'enseignement, dans leurs appels à de futures recherches, Dorko et Speer (2015) ne montrent pas d'intérêt envers la manière dont les unités sont abordées dans l'enseignement en mathématiques, ni envers l'impact que les demandes des enseignants – incluant les problèmes qu'ils offrent aux étudiants – ont sur les productions de ces derniers et sur leur compréhension.

Dans leur étude, Dorko et Speer (2015) ne se sont intéressées qu'aux unités accompagnant le résultat du calcul (d'aires ou de volumes); elles ne les ont pas considérées lors du calcul lui-même. Selon nous, cela souligne la tendance, en mathématiques, à réaliser les étapes calculatoires avec seulement des nombres (abstraits). Elles font toutefois allusion à la démarche de résolution de problèmes, lorsqu'elles avancent qu'effectuer les calculs en y incluant les unités pourraient étoffer les liens entre la dimensionnalité, les lois des exposants et les unités.

We think that having students write the unit with the computation (e.g. $4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}^2$) is a good way to reinforce the connections between dimensionality, rules of exponents, and units. (Dorko et Speer, 2015, p. 42)

Elles basent cette suggestion sur la manière dont les étudiants maîtrisant bien les unités de surface et de volume réfléchissent (raisonnent) sur les unités de surface et de volume. Selon nous, cela ouvre une avenue intéressante où les unités de mesure servent à améliorer l'emprise, le contrôle, – sémantique entres autres – des étudiants sur leur activité mathématique; ici en termes de la dimensionnalité – deux dimensions pour la surface et trois dimensions pour le volume – et des exposants – unité de longueur avec un exposant deux pour la surface et unité de longueur avec un exposant trois pour le volume. Dans le cadre de mon enseignement, j'ai toutefois observé à quelques reprises des démarches où les (correctes) unités de mesure étaient conservées adéquatement, mais dont la réponse était exprimée avec une mauvaise unité. Selon nous, cela suggère que le fait de simplement conserver les unités dans les calculs n'est pas suffisant pour s'assurer que la réponse possède l'unité adéquate. Selon nous, cela indique que l'étudiant réalisant l'activité

mathématique a besoin de faire preuve de réflexion envers ce qu'il fait, qu'il a besoin d'exercer un contrôle sur ces actions (e.g. la conservation des unités).

1.4.2 Études de Rowland et Jovanoski (2004) et de Rowland (2006)

L'étude de Rowland et Jovanoski (2004) porte sur les compréhensions d'étudiants¹⁷ à propos des équations différentielles de premier ordre (ÉDPO), spécifiquement sur l'interprétation physique de celles-ci dans un contexte de modélisation mathématique. Au contraire de l'étude de Dorko et Speer (2015), les notions mathématiques en jeu sont en apprentissage chez les étudiants; il ne s'agit pas de notions préalablement maîtrisées. Les auteurs déplorent que les habiletés des étudiants, dans un contexte de modélisation mathématique, d'interpréter physiquement les différents termes d'ÉDPO et de traduire une description physique en une description mathématique – habiletés qui s'appuient sur les unités de mesure – ne sont pas abordées dans le peu de recherches portant sur la compréhension étudiante des ÉDPO. Ils continuent en énonçant le but de leur étude et la motivation derrière celle-ci.

The goal of the research reported in this paper, which is to investigate student difficulties with translating between words (physical descriptions) and mathematics, is motivated by the observation that many students “errors” in science and mathematics are not just careless slips, but are in fact systematic and furthermore common to significant numbers of students across a wide range of contexts. (Rowland et Jovanoski, 2004, p. 505)

Les résultats de leur étude indiquent que, dans un contexte d'équation différentielle de premier ordre, beaucoup d'étudiants raisonnent en termes de quantités (*amount*) au lieu de raisonner en termes du taux de variation d'une quantité (*rate of change of amount*). Un des indices relevés par les auteurs de cette manière inadéquate de raisonner concerne les unités de mesure que les étudiants associent aux différents termes d'une ÉDPO. Par exemple, dans une des questions posées aux participants de l'étude, ces derniers devaient indiquer le sens physique de chacun des termes dans l'équation – modélisant la quantité D (mg) de drogue (au sens de médicament) dans le patient au temps t heures après le début de son administration par perfusion intraveineuse continue – suivante, $\frac{dD}{dt} = 100 - 0,01D^2$. Plusieurs étudiants ont accordé l'unité milligramme par heure (mg/h) au terme dD/dt , tout en associant l'unité milligramme (mg) au terme constant 100. Quelques uns d'entre eux se sont rendu compte que ces associations étaient problématiques, sans pour autant être en mesure de régler ce problème; les autres étudiants, ayant fait les mêmes associations, ont explicitement dit que les unités n'avaient pas besoin d'être cohérentes à travers les différents termes de l'équation! Comme le résument les auteurs : « either way, the idea that one can use unit consistency to check

¹⁷ Il s'agit d'étudiants australiens en première année du baccalauréat inscrits à une séquence de deux sessions en calcul et algèbre linéaire (Rowland et Jovanoski, 2004), donc l'équivalent approximatif du niveau collégial québécois.

one's thinking was not part of any of these students' problem-solving strategies » (Rowland et Jovanoski, 2004, p. 512). À ce sujet, lors de la discussion suivant la présentation de leurs résultats, ils écrivent :

[An] area where a lack of sufficient discrimination was evident was the lack of awareness, even appreciation, by some students, that all the terms in a physical equation must have the same units. This may reflect the possibility that they have not observed or realized (or not been required to realize) that while each individual factor in a physical equation or ODE [ordinary differential equation] may have differing units, each term as a whole must in fact have the same units. (Additionally, some students did not realize that proportionality factors in ODEs often have units too.) Since this problem was only revealed in the interviews (though student answers to other questions showed that few, if any, took units into consideration when thinking about the ODEs), it is unknown how common this problem is and thus is an area for further research. (p. 514)

Ainsi, il semble que les auteurs n'aient pas anticipé le rôle des unités de mesure – et les difficultés reliées à celui-ci – dans l'interprétation physique d'une situation de modélisation mathématique. Selon nous, cette surprise des auteurs suggère que les unités de mesure sont principalement en arrière-plan et probablement assumées faciles et acquises par les étudiants.

Répondant à leur propre appel à de plus amples recherches sur le sujet, un des auteurs de l'étude, Rowland, a poursuivi l'investigation autour des difficultés des étudiants avec les unités de mesure dans un contexte de modélisation mathématique. La question concernant la perfusion intraveineuse a été reprise dans cette étude subséquente (Rowland, 2006); avec la modification de demander explicitement, non seulement, le sens physique de chaque terme de l'équation $\left(\frac{dD}{dt} = 100 - 0,01D^2\right)$, mais également l'unité qui leur est respectivement associée. Les réponses sont similaires à celles vues dans l'étude antérieure de Rowland et Jovanoski (2004); peu d'étudiants semblent conscients que l'unité de chaque terme doit être la même. De plus, environ un quart des étudiants n'ont considéré que l'unité de D (mg) dans le terme $-0,01D^2$ (donc mg^2) et, par le fait même, semblent ne pas concevoir que les constantes de proportionnalité puissent posséder des unités.

Dans l'étude de Rowland (2006), une question similaire ayant pour objet une autre ÉDPO a été ajoutée. Cette question demande aux étudiants de déterminer l'unité de la constante k dans l'équation différentielle $\frac{dv}{dt} = -kv^2$, où v est la vitesse¹⁸ d'une automobile se promenant sur une route horizontale dont le moteur cesse soudainement de fonctionner. Cette question a été sélectionnée pour deux raisons : (1) pour voir si les étudiants sont significativement meilleurs dans une question de modélisation mathématique d'une situation

¹⁸ Plus précisément, la norme du vecteur vitesse.

physique plus familière et (2) pour tester l'hypothèse que certains étudiants voient le coefficient k comme un nombre, au lieu d'une constante physique possiblement porteuse d'unité. Plusieurs étudiants ont effectivement manifesté cette vision, car la réponse la plus commune est que k ne possède pas d'unité; ce qui s'explique, selon Rowland (2006), par la vision de k comme un nombre pur (abstrait). Une autre réponse assez commune est que k possède une unité d'accélération (e.g. m/s^2). L'auteur présume qu'elle émerge parce que les étudiants ont reconnu dv/dt comme une accélération et ont attribué la même unité à k pour une raison quelconque. À ce propos, il ajoute qu'aucun étudiant ayant attribué une unité d'accélération à k n'a donné les mêmes unités aux deux côtés de l'égalité de l'équation modélisant la perfusion intraveineuse continue.

De plus, Rowland affirme que son étude ne lui permet pas de réellement quantifier la proportion d'étudiants qui ne savent pas que les unités de tous les termes d'une équation différentielle doivent être les mêmes, mais qu'elle montre clairement « that even if many are aware of this requirement, a majority do not use this fact to help them understand differential equations in modelling contexts » (Rowland, 2006, p. 557). Nous constatons ici que l'auteur voit un potentiel chez les unités – par leur restriction de cohérence notamment – d'être utilisées afin d'aider les étudiants à mieux comprendre le contexte et la nature de l'équation qu'ils ont sous les yeux. Il poursuit en disant que si la cohérence des unités est un point tenu pour acquis par les enseignants de mathématiques, particulièrement lors de modélisation mathématique, les étudiants peuvent inutilement avoir de la difficulté avec des aspects de base du cours. À ce propos, il conclut avec cette phrase : « thus it is argued that a consideration of units, how they combine, and how **they can be used** to analyze systems in modelling contexts needs to be an explicit part of instruction » (p. 557, notre accentuation). Encore une fois, Rowland semble entrevoir une utilité à la présence d'unités de mesure en modélisation mathématique, ici en terme d'aide à l'analyse de système (d'équation). Dans l'introduction de l'étude de Rowland (2006), d'autres utilités de la présence d'unités ont été suggérées. Il avance que les unités peuvent servir de moyen de validation ou de vérification, élégamment exprimé comme suit : « while an equation can be wrong if the units are right, an equation can't be right if the units are wrong » (p. 553). Il avance également que les unités peuvent aider les étudiants à déterminer comment les quantités données devraient se combiner afin d'obtenir la quantité demandée, ce qu'il illustre avec un exemple dans l'extrait ci-dessous.

Given the volume flow rate of a salt mixture flowing into a tank and the concentration of the mixture, a consideration of units makes it easy to work out that the mass rate at which salt is added to the tank is given by volume rate by concentration. (Rowland, 2006, p. 553)

Cette considération des unités de mesure pourrait permettre aux étudiants de mieux contrôler leur activité mathématique, en leur donnant une manière d'améliorer leur emprise sur la signification contextuelle (e.g.

physique) des objets (mathématiques) en jeu. Tous les bons points amenés par Rowland (2006), en ce qui concerne l'utilité potentielle des unités de mesure en modélisation mathématique, sont, selon nous, également pertinents pour la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique, puisqu'il s'agit aussi d'une activité mathématique ancrée dans un contexte entraînant la présence d'unités de mesure.

Enfin, l'auteur suppose qu'un facteur important – dans l'explication qu'aussi peu d'étudiants de ce niveau scolaire semblent être au courant de la cohérence d'unités dans une équation – est qu'en sciences, les étudiants se font majoritairement donner les équations (formules) avec lesquelles ils vont travailler et que ces dernières sont évidemment cohérentes, ce qui leur permet de s'en sortir en ne prêtant pas ou peu attention aux unités de mesure durant leurs calculs et en accolant simplement l'unité appropriée à la réponse obtenue.

1.5 Synthèse du chapitre et questions de recherche

Dans l'enseignement collégial québécois, l'approche programme est d'une grande importance. Il s'agit d'une perspective prisant l'harmonisation des différentes activités d'apprentissage composant un programme d'études collégiales et une vision globale et intégrée du programme dans son entièreté. Dans la formation spécifique au programme d'études préuniversitaires *Sciences de la nature* (200.B1) – dont la nouvelle version est obligatoire dès l'automne 2024 – l'approche programme se manifeste par des liens interdisciplinaires. Plusieurs mentions explicites d'interdisciplinarité se trouvent dans le devis – émis par le ministère de l'Enseignement supérieur – qui encadre le programme. Notamment, les cours de mathématiques ont recours à des problèmes issus d'autres disciplines scientifiques (e.g. chimie, physique); de ces dernières, ils y puisent des contextes offrant des opportunités pour le réinvestissement des notions mathématiques en apprentissage. Dans les cours de chimie et de physique, les liens interdisciplinaires explicites concernent les mathématiques. En particulier, l'accent est mis sur le respect du formalisme mathématique. Le devis ministériel ne distingue pas le formalisme physique du formalisme mathématique (tandis qu'il distingue le formalisme chimique du formalisme mathématique). Cependant, il y a bien des différences importantes, spécialement au niveau sémantique. Les physiciens imbus les nombres et symboles algébriques de sens physique, car ceux-ci représentent des grandeurs physiques issues du monde naturel. L'utilisation de contextes physiques en mathématiques entraîne un effet semblable, puisque, dans ces situations, les grandeurs en jeu sont également des grandeurs physiques. Cet ajout de sens physique se reflète, entre autres, par la présence d'unités de mesure. Ainsi, les unités de mesure semblent prendre de plus en plus d'importance, notamment avec la visée internationale STIM.

Les unités sont donc incontournables, car elles se retrouvent dans les disciplines physique et mathématique, et dans la vie courante. En mathématiques, dans la résolution de problème, les unités de mesure sont

généralement présentes dans l'énoncé, s'il y a un contexte concret, sont ignorées durant la résolution elle-même (i.e. les calculs sont effectués avec les nombres seulement), et réapparaissent dans la réponse afin de la compléter, en la reliant au contexte du problème maintenant résolu. En ce qui concerne les cours de mathématiques, un critère de performance découle du recours à des problèmes à contexte physique, c'est-à-dire l'interprétation juste des résultats. La présence d'unités de mesure sont essentielles à ce but, puisqu'elles lient la valeur numérique (de la réponse) à la grandeur physique qu'elle représente (issue du monde naturel). En physique, le travail associé aux unités reste plus demandant qu'en mathématiques lors de la résolution de problème. Cela se manifeste par le critère de performance exigeant la manifestation d'un jugement critique sur la vraisemblance des résultats, puisque la réponse doit être interprétée (correctement) avant de pouvoir être jugée sur sa vraisemblance. L'unité de mesure accompagnant le résultat a également un rôle à jouer sur la vraisemblance de celui-ci, car elle affecte l'ordre de grandeur.

Le système d'unités privilégié dans les disciplines scolaires est le Système international d'unités (SI), la version moderne du système métrique. Cependant, les approches et les traitements envers ce dernier diffèrent en mathématiques et en physique, ce qui peut mélanger les étudiants suivant des cours de mathématiques et de physique simultanément. Par exemple, l'ensemble cohérent des unités, faisant partie du SI, est primordial en physique, mais ne revêt pas la même importance en mathématiques. Ces nuances suggèrent une complexité intrinsèque à l'utilisation du SI par les étudiants du programme *Sciences de la nature*. Aussi, au Québec, le système impérial est encore présent dans la vie courante, ce qui peut engendrer des confusions chez les étudiants qui interagissent avec les deux systèmes, dans les sphères scolaire et personnelle. De plus, diverses unités de mesure qui ne font pas partie du SI – mais dont leur usage est accepté avec ce dernier (e.g. la minute, l'heure et le jour) – sont utilisées dans la vie quotidienne.

Des difficultés avec les unités de mesure ont été relevées chez des étudiants – d'un niveau scolaire équivalent au collégial québécois – dans des études en didactique des mathématiques. Elles ont été remarquées dans différents contextes mathématiques : lors de la résolution de problèmes simples purement mathématiques et utilisant des notions préalablement maîtrisées (e.g. calcul de l'aire d'un rectangle), et, lors de la résolution de problèmes de modélisation mathématique utilisant des notions en apprentissage (e.g. équation différentielle de premier ordre). Cependant, plusieurs remarques, notamment dans la section *Discussion* des études, ouvrent la porte à ce que la présence d'unités puisse aider les étudiants lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte (physique) en leur permettant d'exercer un meilleur contrôle sur celle-ci. Les remarques concernent, notamment, le recours à la cohérence (obligatoire) des unités entre les divers termes d'une équation comme un moyen de vérification/validation pour les étudiants et la présence d'unités de mesure dans les calculs comme un moyen d'améliorer l'emprise sémantique des

étudiants pendant la résolution de problèmes contextuels. Ainsi, l'objectif de ce mémoire sera d'explorer le potentiel des unités de mesure comme soutien à l'activité mathématique lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique (de niveau collégial).

CHAPITRE 2

CADRE CONCEPTUEL

Dans ce chapitre, il est question de l'élaboration des éléments conceptuels encadrant la présente recherche, qui souhaite explorer le potentiel qu'offre l'usage des unités de mesure comme soutien à l'activité mathématique lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique. L'importance que revêt les unités de mesure dans la résolution de ce type de problèmes mathématiques nous pousse à d'abord se renseigner sur celles-ci et, notamment, sur ce qu'elles signifient en physique, puisque leur présence découle du contexte physique. La présentation du SI – d'une grande importance en physique – permet d'avoir une bonne idée de ce que les unités de mesure peuvent englober dans la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique. Une bonne connaissance des unités elles-mêmes nous semble nécessaire avant de s'intéresser à ce qu'elles ont à offrir comme soutien à l'activité mathématique. À ce propos, les éléments relevés dans les études en didactique des mathématiques, tels qu'utiliser les unités comme une manière de *vérifier* et de maintenir une emprise *sémantique* sur les nombres, rejoignent des composantes de ce qui est nommé le *contrôle* (sur l'activité mathématique). Ainsi, la conceptualisation du contrôle est détaillée, suivie d'une consultation d'études ayant fait usage de ce concept comme appui théorique afin d'aborder les aspects du contrôle émergeant de l'analyse de données réelles. Enfin, nous tentons d'élargir la conceptualisation du contrôle afin d'ancrer celui-ci à la présence d'unités de mesure dans l'activité mathématique, par le biais d'une introspection de ma pratique enseignante en physique appuyée par des études provenant de la didactique de la physique.

2.1 Le Système international d'unités

Dans la sphère scolaire québécoise, notamment dans les cours de physique, l'utilisation du Système international d'unités est de mise, puisqu'il « est utilisé dans le monde entier comme le système préféré d'unités et comme le langage fondamental de la science, de la technologie, de l'industrie et du commerce » (BIPM, 2019, p. 10). Au cœur du SI se trouve sept constantes de la physique, judicieusement choisies, sur lesquelles se basent les définitions des unités SI : « à partir des valeurs fixées de ces sept constantes, exprimées en unités SI, il est possible de déduire toutes les unités du système » (p. 13). C'est en fixant la valeur numérique exacte d'une constante que son unité est définie, puisque « le produit de la **valeur numérique** par l'**unité** doit être égal à la **valeur** de la constante qui, par hypothèse, est invariante » (p. 15). Les constantes physiques, leur valeur numérique, ainsi que l'unité que chacune définit, sont rassemblées dans le tableau 2.1.

Tableau 2.1 Les sept constantes définissant le SI (inspiré du tableau 1 de BIPM, 2019, p. 16)

Constante	Symbole	Valeur numérique	Unité
Fréquence de la transition hyperfine du césium	$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	9 192 631 770	Hz
vitesse de la lumière dans le vide	C	299 792 458	m s ⁻¹
constante de Planck	H	$6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$	J s
charge élémentaire	E	$1,602\,176\,634 \times 10^{-19}$	C
constante de Boltzmann	K	$1,380\,649 \times 10^{-23}$	J K ⁻¹
constante d'Avogadro	N_A	$6,022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol ⁻¹
efficacité lumineuse	K_{cd}	683	lm W ⁻¹

Par le biais de produits ou de rapports de ces sept constantes, n'importe quelle unité du SI peut être obtenue. Les unités SI sont séparées en deux catégories, les unités de base et les unités dérivées, qui sont formées à partir de puissances des unités de base. Cette distinction n'est pas nécessaire, mais reste présente car elle est pratique et historiquement bien établie, en plus de respecter la série de normes ISO/IEC 80000 (BIPM, 2019, p. 17). Le SI comporte sept unités de base¹⁹ qui sont destinées à mesurer sept grandeurs physiques indépendantes et qui sont représentées par des symboles obligatoires.

Tableau 2.2 Unités de base du SI (inspiré du tableau 2 de BIPM, 2019, p. 18)

Grandeur de base		Unité de base	
Nom	Symbole caractéristique (recommandé)	Nom	Symbole (obligatoire)
temps	t	seconde	s
longueur	$l, x, r, \text{etc.}$	mètre	m
masse	M	kilogramme	kg
courant électrique	I, i	ampère	A
température thermodynamique	T	kelvin	K
quantité de matière	N	mole	mol
intensité lumineuse	I_v	candela	cd

Évidemment, le SI ne contient pas uniquement les sept unités de base présentées dans le tableau ci-haut; les autres unités en faisant partie sont nommées les unités dérivées. Selon le BIPM (2019) :

Les unités dérivées sont définies comme des produits de puissances des unités de base. Lorsque le facteur numérique de ce produit est un [1], les unités dérivées sont appelées *unités dérivées cohérentes*. Les unités de base et les unités dérivées cohérentes du SI forment un ensemble cohérent désigné sous le nom d'*ensemble cohérent des unités SI*. Le terme « cohérent » signifie

¹⁹ Pour connaître la manière dont les sept unités de base (tableau 2.2) sont définies à partir des sept constantes physiques (tableau 2.1), veuillez consulter les pages 18 à 23 de la brochure du BIPM (2019).

que les équations reliant les valeurs numériques des grandeurs prennent exactement la même forme que les équations reliant les grandeurs proprement dites. (p. 25)

Certaines unités dérivées cohérentes possèdent des noms et des symboles spéciaux. Toutes les unités cohérentes du SI sont des combinaisons des sept unités de base et des 22 unités dérivées cohérentes possédant un nom spécial (BIPM, 2019). Par exemple, la vitesse est une grandeur dérivée et l'unité dérivée cohérente qui lui est associée est le mètre par seconde, dont le symbole correspond à la division du symbole du mètre par le symbole de la seconde (m/s); le volume est une grandeur dérivée et l'unité dérivée cohérente qui lui est associée est le mètre cube, dont le symbole correspond au mètre exposant trois (m^3). De plus, des unités dérivées peuvent servir à exprimer d'autres unités dérivées. Ci-dessous se trouve le tableau 2.3 rassemblant les unités dérivées cohérentes possédant un nom et un symbole les plus communément utilisés dans les cours de physique collégiaux, ainsi que leur(s) expression(s) alternative(s), s'il y a lieu, et les grandeurs physiques dérivées auxquelles elles sont associées.

Tableau 2.3 Exemples d'unités dérivées cohérentes du SI ayant un nom et un symbole spéciaux (inspiré du tableau 4 de BIPM, 2019, p. 26)

Grandeur dérivée	Nom spécial de l'unité	Symbole	Expression en unités de base	Expression alternative
angle plan	Radian	rad	m/m	
fréquence	Hertz	Hz	s^{-1}	
force	Newton	N	kg m s^{-2}	
pression, contrainte	Pascal	Pa	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$	N/m^2
énergie, travail	Joule	J	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	$\text{N m} = \text{W s}$
puissance, flux énergétique	Watt	W	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$	J/s
charge électrique	Coulomb	C	s A	
potentiel (tension) électrique	Volt	V	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3} \text{A}^{-1}$	$\text{W/A} = \text{J/C}$
capacité électrique	Farad	F	$\text{kg}^{-1} \text{m}^{-2} \text{s}^4 \text{A}^2$	C/V
résistance électrique	Ohm	Ω	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3} \text{A}^{-2}$	V/A
induction magnétique	Tesla	T	$\text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$	

L'ensemble cohérent des unités SI est d'une importance primordiale en physique, puisque, comme mentionné précédemment, « le terme "cohérent" signifie que les équations reliant les valeurs numériques des grandeurs prennent exactement la même forme que les équations reliant les grandeurs proprement dites » (BIPM, 2019, p. 25). Illustrons ce phénomène (figure 2.1) avec une équation simple de la physique, la deuxième loi de Newton, qui stipule que la force exercée sur un objet (F) correspond au produit de la masse de cet objet (m) par l'accélération qu'il subit (a).

Figure 2.1 Deuxième loi de Newton avec l'ensemble cohérent des unités SI

$$\begin{aligned}
 F &= m \cdot a \\
 F &= (1 \text{ kg}) \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\
 F &= 1 \left(\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\
 F &= 1 \text{ N} \\
 \Rightarrow 1 \text{ N} &= 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}
 \end{aligned}$$

Nous voyons bien que si un objet d'un kilogramme accélère d'un mètre par seconde carrée, la force exercée sur celui-ci est d'un newton. Puisque les facteurs numériques sont tous un, il est évident que l'équation reliant les valeurs numériques prend la même forme que celle reliant les grandeurs elles-mêmes.

De plus, « des multiples et sous-multiples décimaux de 10^{30} à 10^{-30} peuvent être utilisés avec les unités SI » (BIPM, 2019, p. 31). Les noms et les symboles des préfixes utilisés pour la composition des noms et symboles des multiples et sous-multiples décimaux des unités sont présentés dans le tableau 2.4.

Tableau 2.4 Préfixes SI (inspiré du tableau 7 de BIPM, 2019, p. 31)

Multiples décimaux			Sous-multiples décimaux		
Facteur	Nom	Symbole	Facteur	Nom	Symbole
10^1	Déca	Da	10^{-1}	Déci	D
10^2	Hecto	H	10^{-2}	Centi	C
10^3	Kilo	K	10^{-3}	Milli	M
10^6	Méga	M	10^{-6}	Micro	μ
10^9	Giga	G	10^{-9}	Nano	n
10^{12}	Téra	T	10^{-12}	Pico	p
10^{15}	Péta	P	10^{-15}	Femto	f
10^{18}	Exa	E	10^{-18}	Atto	a
10^{21}	Zetta	Z	10^{-21}	Zepto	z
10^{24}	Yotta	Y	10^{-24}	Yocto	y
10^{27}	Ronna	R	10^{-27}	Ronto	r
10^{30}	Quetta	Q	10^{-30}	Quecto	q

Il est important de noter que la présence de ces préfixes implique l'exclusion de l'ensemble cohérent des unités SI, à une exception près. Pour des raisons historiques, l'unité de base associée à la masse est le **kilogramme** (kg) – et non le gramme – ce qui a comme conséquence que le kilogramme fait partie de l'ensemble cohérent des unités SI, au contraire du gramme. La figure 2.2 reprend l'exemple de la deuxième

loi de Newton – stipulant que la force exercée sur un objet (F) correspond au produit de la masse de cet objet (m) par l'accélération qu'il subit (a) – mais, cette fois-ci, avec le gramme remplaçant le kilogramme comme l'unité de masse.

Figure 2.2 Deuxième loi de Newton sans l'ensemble cohérent des unités SI

$$\begin{aligned}
 F &= m \cdot a \\
 F &= (1 \text{ g}) \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\
 F &= (0,001 \text{ kg}) \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\
 F &= 0,001 \left(\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\
 F &= 0,001 \text{ N} \\
 \Rightarrow 0,001 \text{ N} &= 1 \text{ g} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}
 \end{aligned}$$

Lorsque le gramme, une unité ne faisant pas partie de l'ensemble cohérent des unités SI, est utilisé, nous voyons bien que les facteurs numériques ne sont pas tous un. Donc, l'équation reliant les valeurs numériques ne peut plus prendre la même forme que celle reliant les grandeurs elles-mêmes; dans cet exemple particulier, il y a un facteur 1000 de différence (qui provient de la substitution du kilogramme par le gramme). Ainsi, les équations de la physique, reliant les grandeurs physiques, doivent être utilisées avec l'ensemble cohérent des unités SI afin qu'elles conservent la même forme de liaison pour les valeurs numériques. Cela entraîne que les étudiants doivent connaître l'unité dérivée cohérente associée à chacune des grandeurs physiques qu'ils croiseront dans leur parcours de physique, afin qu'ils obtiennent les valeurs numériques adéquates lors de leur recours aux équations physiques.

Ainsi, toutes les unités (cohérentes ou non) faisant partie du SI sont générées à partir des sept unités de base, des 22 unités dérivées cohérentes ayant un nom et un symbole spéciaux, en plus des multiples et sous-multiples décimaux (rassemblés dans le tableau 2.4). Cependant, le BIPM reconnaît « que certaines unités en dehors du SI sont très utilisées et continueront selon toute vraisemblance à l'être pendant de nombreuses années » (p. 33). C'est la raison pour laquelle l'utilisation de certaines unités en dehors du SI est tout de même acceptée avec ce dernier (voir le tableau 2.5). Il est important de noter que cette utilisation vient aux

dépens de certains avantages du SI; par exemple, les unités de temps en dehors du SI sont incompatibles avec l'usage des préfixes.

Tableau 2.5 Unités en dehors du SI dont l'usage est accepté avec le SI (inspiré du tableau 8 de BIPM, 2019, p. 33)

Grandeur	Nom de l'unité	Symbole de l'unité	Valeur en unités SI
temps	Minute	min	60 s
	Heure	h	3 600 s
	Jour	j	86 400 s
longueur	unité astronomique	au	149 597 870 700 m
angle plan et de phase	Degré	°	($\pi/180$) rad
	Minute	'	($\pi/10\,800$) rad
	Seconde	"	($\pi/648\,000$) rad
superficie	Hectare	ha	10^4 m^2
volume	Litre	l, L	10^{-3} m^3
masse	tonne (métrique)	t	10^3 kg
	Dalton	Da	$1,660\,539\,066\,60(50) \times 10^{-27} \text{ kg}$
énergie	Électronvolt	eV	$1,602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ J}$
logarithme d'un rapport	Néper	Np	<i>Ces unités nécessitent une valeur de référence (le dénominateur du rapport).</i>
	Bel	B	
	Décibel	dB	

Les unités en dehors du SI dont l'usage est tout de même accepté avec ce dernier que les étudiants collégiaux risquent de rencontrer le plus sont la minute, l'heure, le jour, le degré (°) et le litre, et les combinaisons d'unités les utilisant (e.g. km/h).

Le SI, dans toute sa complexité, peut sembler intimidant, autant pour les étudiants que pour les enseignants devant incorporer des contextes physiques dans leur enseignement des mathématiques, surtout qu'il y a un « nombre illimité de grandeurs » (BIPM, 2019, p. 27) et donc qu'il n'existe pas une liste complète détaillant les unités dérivées qui leur sont associées. Cependant, il est important de garder en tête que les étudiants travailleront avec les unités SI de manière graduelle, selon l'ordre des champs physiques abordés. Par exemple, le premier cours de physique collégial porte sur la mécanique classique et les unités majoritairement utilisées sont le kilogramme, le mètre, la seconde, le mètre par seconde, le mètre par seconde carrée, le radian, le newton, le pascal, le joule et le watt (ainsi que leurs multiples et sous-multiples décimaux). Dans le deuxième cours de physique, les étudiants travailleront plutôt avec les unités associées aux grandeurs physiques entourant les phénomènes d'électricité et de magnétisme. Les unités liées au monde subatomique et aux ondes (mécaniques et électromagnétiques) seront introduites dans le troisième cours de physique, qui porte justement sur les ondes et la physique moderne.

Un des éléments les plus importants à retenir du SI est l'ensemble cohérent des unités SI. Cet ensemble est composé des sept unités de base et des unités dérivées cohérentes qui sont définies comme des produits de puissances des unités de base dont le facteur numérique est un. Il s'agit d'une des grandes forces du SI, puisque les unités faisant partie de cet ensemble permettent que les équations reliant les **valeurs numériques** des grandeurs physiques aient la même forme que les équations reliant les **grandeurs physiques** proprement dites. Il ne faut pas oublier que chaque grandeur physique n'a qu'une seule unité cohérente SI lui étant associée, malgré que cette dernière puisse s'exprimer sous différentes formes (e.g. $N = \text{kg m s}^{-2}$). Ainsi, les grandeurs présentes dans une équation physique doivent s'exprimer en terme de leur (unique) unité cohérente SI, ce qui entraîne que les relations entre les valeurs numériques des différentes grandeurs sont reflétées directement par les relations entre les différentes unités cohérentes SI correspondantes.

2.2 Le contrôle

Tel qu'abordé lors de la problématique (chapitre 1), les unités de mesure prennent de l'importance en mathématiques dans le programme collégial *Sciences de la nature* (revisité en 2021), notamment par le recours à des problèmes à contexte physique. Cependant, des études en didactique des mathématiques ont rapporté la présence de difficultés autour des unités chez les étudiants. En prenant connaissance du SI – et de sa complexité intrinsèque (section 2.1) – nous pouvons mieux concevoir pourquoi les étudiants éprouvent parfois des difficultés à son sujet, spécialement s'il n'est pas l'objet d'un enseignement explicite. Toutefois, ces mêmes études avancent que la présence d'unités de mesure pourrait améliorer l'emprise des étudiants sur leur activité mathématique lors de la résolution de problèmes; les unités pourrait permettre aux étudiants de maintenir leur emprise sémantique sur les nombres et symboles en jeu, d'effectuer des vérifications et de discerner des relations entre les grandeurs physiques présentes. Ces propositions rejoignent certaines composantes de la notion de contrôle, conceptualisée par Saboya (2010) dans le cadre de sa thèse. Le contrôle a d'abord été défini à partir d'une analyse théorique de travaux issus de cinq disciplines – la sociologie, la psychologie, l'éducation mathématique (*mathematics education*), les mathématiques et la didactique – qui a, par la suite, été raffinée et étoffée par une expérimentation utilisant des tâches²⁰ provenant de l'algèbre auprès d'élèves²¹ de niveau secondaire. La conceptualisation du contrôle de Saboya

²⁰ Certains auteurs font une distinction entre une tâche et un problème mathématique. Puisque cette distinction importe peu dans le cadre de la présente recherche, les termes utilisés par les auteurs ont été simplement repris.

²¹ Communément, le terme « élève » est employé afin de désigner un apprenant de niveau primaire et secondaire, tandis que le terme « étudiant » désigne un apprenant de niveau post-secondaire (collégial et universitaire). Afin de faciliter la lecture des prochaines sections, les termes utilisés par les auteurs ont été simplement repris. Autrement, le terme « étudiant » a été privilégié.

(2010) a été reprise et enrichie à travers divers travaux de recherches²². Notamment, Rhéaume (2020), également dans le cadre de sa thèse, propose une nouvelle conceptualisation de la notion de contrôle qui a été fortement inspirée par celle de Saboya (2010), mais qui comporte plusieurs modifications et adaptations pertinentes pour la présente recherche. Ainsi, le contrôle au sens de Saboya (2010) sera d’abord explicité, suivi de celui au sens de Rhéaume (2020).

2.2.1 Le contrôle au sens de Saboya (2010)

Saboya (2010) offre une définition opérationnelle du contrôle :

Le contrôle se traduit par :

- une *réflexion* de la part de l’élève, sur toute action, sur tout choix tout au long de la tâche : au début, en cours ou à la fin de la résolution,
- la capacité à *prendre des décisions* de façon réfléchie, rationnelle,
- une *prise de distance* par rapport à la résolution,
- le recours aux *fondements* sur lesquels on s’appuie pour valider,
- l’utilisation de métaconnaissances. (p. 116)

Elle précise également que le contrôle se manifeste sous plusieurs formes et à différents moments au fil de la résolution d’une tâche mathématique.

En amont de la réalisation :

Le contrôle permet une anticipation, les élèves posent a priori une condition de validité du résultat avant de le connaître. Il assure une mobilisation des connaissances en jeu, il se manifeste par une relation entre les données et le but à atteindre.

En aval de la réalisation :

Le contrôle assure un travail rétrospectif, une vérification, une validation du résultat pour dépasser le doute et acquérir une certitude. Si nécessaire, il permet un retour sur la tâche et contribue à une évaluation des décisions d’action. Il passe également par la perception des erreurs.

En début ou en cours de processus :

Le contrôle se manifeste par des prises de décision sur la direction à prendre, la stratégie la plus efficace, la moins coûteuse en temps, par des évaluations périodiques tout au long de la réalisation. (Saboya, 2010, p. 116-117)

Cette conceptualisation du contrôle repose sur 10 composantes, dont certaines sont mentionnées dans l’extrait précédent, c’est-à-dire l’*anticipation*, la *vérification*, la *validation*, le *discernement/choix éclairé*,

²² Certaines de ces études – et leurs contributions à la notion du contrôle – seront abordées dans la section 2.3.

la *perception des erreurs*, la *sensibilité/dépassement de la contradiction*, l'*engagement réfléchi*, les *métaconnaissances*, le *contrôle syntaxique*, et, le *contrôle sémantique*.

Dans la résolution de problèmes, l'*anticipation* fait référence à « une analyse préalable des propriétés que devra posséder le résultat » (Saboya, Bednarz et Hitt, 2015, p. 63). Cela englobe, par exemple, l'estimation de l'ordre de grandeur de la valeur numérique du résultat. De manière générale, cela signifie que « l'étudiant doit être en mesure de poser des critères de validité du résultat » (Dufour et Jeannotte, 2013, p. 31). Souvent, la composante *anticipation* est jumelée avec la composante *vérification*, car elle peut mener à un retour sur le résultat lui-même ou sur la démarche menant à ce dernier. Saboya (2010) distingue la *validation* de la *vérification*; la *validation* consiste à s'assurer de la validité des énoncés mathématiques employés. Parfois, ces deux composantes se confondent lorsque, par exemple, « la vérification d'un calcul algébrique peut assurer la validité de l'énoncé algébrique obtenu par ces calculs » (Dufour et Jeannotte, 2013, p. 32).

Si une *anticipation* est déçue, car le résultat trouvé ne concorde pas avec le résultat attendu, cela peut entraîner les élèves à effectuer des *vérifications*. Cependant, il est possible qu'un élève ayant anticipé un certain résultat ne soit pas *sensible* à un résultat entrant *en contradiction* avec celui-ci. Être en mesure de percevoir les instances de contradiction est ce que Saboya (2010) nomme *être sensible à la contradiction*. Cette capacité ne garantit cependant pas que l'élève soit en mesure de *dépasser la contradiction*.

Pour qu'il y ait un dépassement de la contradiction, une action doit être entreprise par l'élève pour rétablir l'équilibre et dépasser ainsi le conflit ressenti [...] ainsi plusieurs élèves sont conscients de l'existence d'une contradiction mais n'arrivent pas à la dépasser. (Saboya, Bednarz et Hitt, 2015, p. 65)

Un parallèle peut être fait entre la *sensibilité/dépassement de la contradiction* et la *perception des erreurs*; les élèves doivent être en mesure de détecter la présence d'erreur(s) dans leur démarche et d'identifier l'origine de celle(s)-ci afin de pouvoir (possiblement) les rectifier. De plus, la présence d'une contradiction peut indiquer qu'une ou plusieurs erreurs ont été commises.

La composante de l'*engagement réfléchi* implique, quant à lui, une certaine réflexion de la part de l'élève envers ses propres actions à travers la démarche de résolution qu'il effectue. Il se caractérise par un temps d'arrêt, une prise de distance, devant le problème ou sa résolution, avant, en cours ou à la fin de celle-ci (Dufour et Jeannotte, 2013; Saboya, Bednarz et Hitt, 2015; Saboya et Rhéaume, 2015). Cette notion de réflexion de la part de l'élève est également présente dans la composante de *métaconnaissances*, car elles sont le fruit :

- d'une réflexion sur les connaissances, elles expriment un savoir sur la pertinence, l'efficacité d'une notion, d'une écriture dans une tâche donnée;
- d'une réflexion sur la combinaison de deux ou plusieurs connaissances qui débouche sur une connaissance plus élaborée. (Saboya, 2010, p. 408)

Certains des éléments mentionnés dans cet extrait font écho à la composante du *discernement/choix éclairé* que Saboya (2010) définit comme se traduisant « par une capacité à choisir parmi différentes écritures et/ou différentes stratégies celle qui est la plus appropriée, la plus efficace et la moins coûteuse en temps en ayant préalablement écarté celles qui sont inappropriées. » (p. 408)

Finalement, deux types de contrôle – *syntactique* et *sémantique* – se retrouvent dans les 10 composantes établies par Saboya (2010). Le *contrôle syntactique* concerne les manipulations mathématiques effectuées par l'élève au fil de sa démarche afin de résoudre le problème posé : « [il] est défini comme la capacité à gérer les règles de transformation » (Saboya, 2010, p. 411). Par exemple, en algèbre, les règles de transformation sont généralement « effectuées de manière à conserver l'égalité » (Saboya, Bednarz et Hitt, 2015, p. 63; Saboya et Rhéaume, 2015, p. 7). Le *contrôle sémantique* est plutôt « attaché à la capacité à ne pas se détacher de la signification des grandeurs qu'on manipule » (Saboya, 2010, p. 411). Par exemple, dans la résolution de problèmes algébriques, le *contrôle sémantique* s'appuie sur une compréhension des relations entre les données et des notations symboliques associées lors de la phase de mathématisation et d'écriture de l'équation (Saboya, Bednarz et Hitt, 2015, p. 63). Dans une résolution arithmétique, le *contrôle sémantique* est plutôt « constamment nourri par la signification contextuelle des grandeurs en présence » (p. 85).

2.2.2 Le contrôle au sens de Rhéaume (2020)

Rhéaume (2020), dans le cadre de sa thèse, ayant comme objectif général de « documenter et comprendre les prises de décision des élèves du primaire sous l'angle du contrôle²³ » (p. 41-42), a élaboré un cadre d'analyse puisant dans une multitude de travaux en didactique des mathématiques, notamment la thèse de Saboya (2010) et la conceptualisation du contrôle s'y retrouvant. Les 10 composantes du contrôle offertes par Saboya (2010) ont été récupérées, adaptées et réorganisées par Rhéaume (2020). Le changement principal initié par cette dernière concerne la composante de l'engagement réfléchi. À ce propos, Rhéaume (2020) écrit que « l'engagement réfléchi ne [lui] apparaît pas [...] comme une composante, mais plutôt comme un positionnement de l'élève face à la tâche » (p. 42). Elle précise :

²³ Plus particulièrement, les élèves participants étaient au 3^e cycle du primaire et ils ont eu des problèmes de proportion à résoudre.

L'engagement réfléchi nous apparaît central et inhérent à la mobilisation de l'ensemble des composantes que propose la notion de contrôle. Les autres composantes, l'anticipation, la vérification, la validation, le discernement/choix éclairé, la perception des erreurs et la sensibilité/dépassement de la contradiction, le contrôle syntaxique et le contrôle sémantique et les métaconnaissances [sont] intégrées à même le cadre d'analyse que nous proposons. (Rhéaume, 2020, p. 43)

Ainsi, le cadre d'analyse de Rhéaume (2020) se décline en trois contrôles – le contrôle structural, le contrôle opérationnel et le contrôle restreignant – dans lesquels sont incorporés les neuf autres composantes du contrôle de Saboya (2010). Le contrôle structural « imbrique à la fois le processus de représentation du problème et le contrôle exercé sur cette représentation grâce à un engagement réfléchi », tandis que le contrôle opérationnel consiste en « un regard critique qui s'exerce envers l'opérationnalisation du problème » (Rhéaume, 2020, p. 42). Le contrôle restreignant, quant à lui, fait plutôt référence « aux croyances et attentes liées à la résolution de problèmes qui agissent comme guides lors du processus de résolution » (p. 42). Ces trois contrôles sont abordés en détails dans les sections suivantes.

2.2.2.1 Le contrôle structural

Selon Rhéaume (2020), le contrôle structural est considéré comme une « activité intellectuelle exercée lors de la construction, le maintien ou la restructuration de la représentation du problème » (p. 51). Afin de construire la notion de contrôle structural, certains éléments conceptuels sur la représentation de problèmes en mathématiques de Julo (1995) ont été repris par Rhéaume (2020). De Julo (1995), elle retient les trois processus de la construction d'une représentation particularisée²⁴ : l'interprétation, la structuration et l'opérationnalisation. Le processus d'interprétation consiste en l'interprétation du contexte sémantique et la sélection d'informations. Il est suivi par le processus de structuration, qui, selon Julo (1995), consiste « à organiser et à coordonner cette interprétation du problème pour former un tout "structuré", où les éléments se tiennent logiquement ensemble selon la personne qui résout » (Rhéaume, 2020, p. 45). Le processus de l'opérationnalisation (de la représentation) correspond au passage à l'action par des calculs, essais ou opérations mentales; « c'est en ce sens que Julo stipule que ce sont "les procédures et les stratégies mises en œuvre qui vont, progressivement, structurer la représentation" » (Rhéaume, 2020, p. 45, citant Julo, 1995, p. 48). Rhéaume (2020) souligne que « la construction d'une représentation particularisée est un processus dynamique qui repose sur un travail progressif qui a lieu tout au long de la résolution », car une

²⁴ C'est-à-dire adaptée à la compréhension de l'individu (devant résoudre un problème) « [d']un objet déterminé qui peut être complexe, mais que l'on est capable de décrire comme un ensemble d'informations et de relations entre ces informations. » (Julo, 1995, p. 15)

« structuration initiale peut être remise en cause et être amenée à évoluer vers une restructuration de la représentation » (p. 46).

La notion du contrôle structural inclut, non seulement le processus de représentation du problème lui-même, mais le contrôle exercé sur cette représentation. Afin de définir ce dernier, Rhéaume (2020) s'appuie sur la notion de contrôle sémantique et d'engagement réfléchi de Saboya (2010). Selon elle, les élèves peuvent contrôler la cohérence et la compatibilité des informations – qui sont tirées de l'énoncé du problème ou inférées – par un engagement réfléchi, une prise de distance, un esprit critique. Le contrôle sémantique, quant à lui, « porte sur la signification des relations, des grandeurs ou des transformations » (Rhéaume, 2020, p. 45-46). Ainsi, le contrôle structural se caractérise « par un regard critique envers le choix et la coordination des données, connaissances et résultats de la représentation, ou par l'attribution aux relations, symboles, grandeurs, opérations d'une signification cohérente par l'individu » (p. 51). Rhéaume (2020) ajoute que le contrôle structural peut posséder un caractère dynamique, puisqu'il peut se manifester au début, en cours ou à la fin de la résolution du problème. Elle précise que le contrôle structural peut s'exercer **avant** le contrôle opérationnel, lorsque l'élève trouve un sens au problème avant d'entâmer des calculs, ou **en parallèle** de celui-ci, lorsque l'élève fait des allers-retours entre un contrôle sémantique et ses calculs. Le tableau 2.6 regroupe les différents éléments constituant le contrôle structural.

Tableau 2.6 Contrôle structural au sens de Rhéaume (2020)

Contrôle structural
Interprétation (de la situation)
Structuration de la représentation (de la situation)
Opérationnalisation de la représentation (de la situation)

2.2.2.2 Le contrôle opérationnel

Selon Rhéaume (2020), le contrôle opérationnel « implique à la base un engagement réfléchi, orienté cette fois vers le savoir quand et comment utiliser les mathématiques lors de l'opérationnalisation » (p. 54). Le contrôle opérationnel peut s'exercer par l'anticipation, la vérification, la sensibilité/dépassement de la contradiction, le discernement d'une procédure, le contrôle sur les nombres et opérations, et le recours à des métaconnaissances.

Rhéaume (2020) identifie deux formes d'anticipation : celle portant sur le résultat et celle concernant la planification du processus de résolution. L'anticipation portant sur le résultat correspond à la composante d'anticipation du contrôle au sens de Saboya (voir la section 2.2.1). L'autre forme d'anticipation est « l'occasion d'envisager une manière de résoudre encore hypothétique à partir des relations déjà établies, qui pourrait conduire l'élève à se rapprocher d'une solution » (Rhéaume, 2020, p. 56).

Rhéaume (2020) identifie trois types de vérification : par l'évaluation de la vraisemblance d'un résultat, par un retour à la représentation ou à l'anticipation du problème, et, par un retour à des fondements mathématiques pour valider. Le premier type de vérification consiste à « argumenter sur la vraisemblance du résultat, mobiliser les raisons ou les actions qui permettent de penser que le résultat pourrait être vrai ou faux » (Rhéaume, 2020, p. 57). Le deuxième type de vérification correspond à la composante de vérification au sens de Saboya (2010), qui affirme qu'elle « requiert un retour à la tâche, à la question posée » (p. 407), que l'élève est fait une anticipation sur le résultat ou non. Sans anticipation préalable, l'élève peut remettre le résultat trouvé en contexte afin de juger si ce dernier est conforme à ce qui est demandé par le problème. Comme mentionné précédemment, une anticipation déçue peut amener les élèves à enclencher une vérification. Rhéaume (2020) avertit cependant que les élèves peuvent effectuer des vérifications sur de fausses prémisses, si ces derniers s'appuient sur leur représentation inadéquate ou erronée du problème. Le troisième type de vérification fait intervenir la validation au sens de Saboya (2010), c'est-à-dire l'évaluation de la validité d'énoncés mathématiques. À ce propos, Rhéaume (2020) affirme que « le retour à des fondements mathématiques permet à l'élève de valider son travail, par le fait que les résultats sont conformes à des normes ou qu'ils correspondent à des connaissances qu'il reconnaît comme étant vraies » (p. 60).

En ce qui concerne la sensibilité à la contradiction, Rhéaume (2020) reprend largement les propos de Saboya (2010) :

La sensibilité à la contradiction peut provenir d'une anticipation déçue, d'un effet de surprise face à un résultat qui ne correspond pas à celui attendu. Dans une classe, la sensibilité à la contradiction peut s'exprimer à travers une mise en commun des résultats obtenus dans le groupe qui ne sont pas équivalents les uns des autres. (Saboya, 2010, p. 408)

Afin d'étoffer cette définition, elle fait appel à la présentation de la contradiction de Balacheff (1987); selon ce dernier, « prendre conscience d'une contradiction c'est poser le problème du choix entre deux propositions : une affirmation et sa négation » (p. 150). Ainsi, Rhéaume (2020) considère la sensibilité à la contradiction comme une marque de contrôle (opérationnel) en termes d'une « capacité à veiller sur le processus de résolution », d'une « capacité à percevoir que quelque chose ne va peut-être pas » (p. 64). Cependant, être sensible à la contradiction n'implique pas d'être en mesure de dépasser celle-ci.

Rhéaume (2020) identifie trois manières de dépasser la contradiction, une fois que cette dernière ait été détectée : rejet du résultat et identification de la source, changement de cadre²⁵ (Douady, 1986), et, changement de point de vue explicité par la flexibilité cognitive (Clément, 2009). Comme son appellation l'indique, une des manières de dépasser la contradiction consiste à d'abord rejeter le résultat obtenu, pour ensuite tenter d'identifier la ou les raisons derrière la contradiction. Comme le dit Rhéaume (2020), « c'est avant tout dans la recherche et l'identification des raisons derrière la contradiction que l'élève pourrait trouver un moyen de la dépasser » (p. 65). Elle mentionne également que l'abandon est une avenue fréquentée par les élèves lorsqu'ils n'arrivent pas à identifier ces raisons. Afin de dépasser la contradiction, un changement de cadre peut être effectué. Des travaux de Douady (1986), Rhéaume retient qu'un changement de cadre « favorise une réinterprétation du problème et la recherche d'autres moyens [de résolution] qui amène à une vision nouvelle de l'objet mathématique en question » (Rhéaume, 2020, p. 66), ce qui peut amener l'élève à mettre en œuvre des « outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation » (Douady, 1986, p. 11). Le dépassement de la contradiction est également possible grâce à un changement de point de vue. Rhéaume (2020) fait appel au concept de la flexibilité cognitive réactive au sens de Clément (2009) afin d'explicitier le changement de point de vue :

C'est dans l'impasse, quand plus aucune action ne semble possible que la flexibilité réactive peut se manifester. Elle procède d'une réorientation de l'attention, déclenchée par un signal de l'environnement vers des propriétés qui n'étaient pas dans le focus attentionnel. Des processus sous contrôle volontaire permettent alors le changement de but et la sortie de l'impasse. (Clément, 2009, p. 127)

Il est important de noter que Rhéaume (2020) considère l'impasse au même titre que la contradiction. Ainsi, une situation critique comme l'impasse ou la contradiction est préalable, mais insuffisante, au changement de point de vue; c'est l'aptitude à la flexibilité réactive qui offre cette opportunité.

Le contrôle opérationnel peut s'exercer par le discernement d'une procédure parmi d'autres. Ce contrôle correspond principalement à la composante que Saboya (2010) a nommé discernement/choix éclairé, qui se traduit par une capacité de l'élève à juger quelle stratégie ou procédure lui semble la plus efficace pour résoudre le problème présenté. Rhéaume (2020) enrichit cette définition par le recours à la flexibilité cognitive spontanée de Clément (2009). Selon cette dernière, la flexibilité dite spontanée est une fonction exécutive se manifestant, dans la résolution de problème, par un choix d'une stratégie optimale devant la tâche qui ne dépend pas d'un signal de l'environnement, qui est non contraint par celle-ci (Clément, 2009).

²⁵ Selon Douady (1984, 1986), un cadre est « constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. » (1986, p. 11)

De plus, c'est parce que l'élève est désengagé de l'action lorsqu'il analyse les propriétés de la situation qu'il est en mesure d'envisager plusieurs points de vue et de choisir le plus approprié compte tenu de celles-ci (Clément, 2009). Ainsi, pour Rhéaume (2020), la flexibilité cognitive spontanée permet l'exercice d'un regard critique sur les procédures de résolution possibles, ce qui permet le discernement d'une procédure parmi d'autres.

Le contrôle sur les nombres et les opérations est une autre manifestation possible du contrôle opérationnel et il se traduit par « un engagement axé exclusivement sur le traitement des nombres et des écritures (opérations et manipulations des nombres) lors des calculs » (Rhéaume, 2020, p. 71-72). Ainsi, les nombres et les écritures sont décontextualisés, ce qui permet de concentrer l'attention sur l'analyse des relations entre les objets mathématiques (e.g. les nombres) indépendamment de leur signification dans le contexte du problème. Un parallèle peut donc être fait entre ce contrôle et le contrôle syntaxique de Saboya (2010), qui, selon cette dernière, est « lié à un travail sur l'écriture à travers l'utilisation, l'application de règles » (p. 412). Par exemple, dans le cas d'une résolution algébrique, après la mise en équation (requérant un contrôle sémantique), « le passage vers un autre type de contrôle est nécessaire, un contrôle syntaxique. L'élève doit dans ce cas quitter le contexte pour pouvoir opérer et résoudre » (Saboya et Rhéaume, 2015, p. 7). Rhéaume (2020) met de l'avant qu'un contrôle axé sur la justesse du calcul est parfois appelé une vérification des résultats, tel que le font les auteurs Focant et Grégoire (2008) : « La vérification des résultats est un contrôle basé sur les connaissances des procédures de calculs arithmétiques. L'individu recherche des erreurs survenues dans l'application des procédures » (p. 206). Cependant, pour Rhéaume (2020), cela relève d'un contrôle sur les nombres et opérations (et non d'une vérification), car il n'implique pas le contexte du problème, la dimension sémantique. Comme mentionné précédemment, pour Rhéaume (2020), la vérification s'exerce par l'évaluation de la vraisemblance d'un résultat, par un retour à la représentation ou à l'anticipation, ou par un retour à des fondements mathématiques afin de valider.

Finalement, le contrôle opérationnel peut s'exercer par un recours à des métaconnaissances. Ici, Rhéaume (2020) reprend directement la vision de Saboya (2010) sur la métaconnaissance. Ainsi, pour ces deux auteures, la métaconnaissance « repose sur le fait de porter un jugement réflexif quant à la pertinence et l'efficacité, les forces ou les limites de la mobilisation d'une connaissance précise pour une situation donnée » (Rhéaume, 2020, p. 74-75). De plus, le recours à des métaconnaissances peut concerner une réflexion de niveau *méta*, non seulement sur les connaissances de l'élève, mais sur les procédures mobilisées par celui-ci, et même sur ses capacités à effectuer ces dernières. À titre d'exemple, dans la recherche de

maîtrise de Morand²⁶ (2020), un des participants décide de recourir à des matrices afin de résoudre un système d'équations, mais affirme que c'est une procédure pendant laquelle il commet souvent des erreurs, ce qui l'amène à exercer un contrôle sur les nombres et opérations par le biais d'une vérification sur la justesse de ses calculs. Le tableau 2.7 rassemble les différentes composantes du contrôle opérationnel.

Tableau 2.7 Contrôle opérationnel au sens de Rhéaume (2020)

Contrôle opérationnel	
Anticipation	sur le résultat
	sur la planification de la résolution
Vérification	par l'évaluation de la vraisemblance d'un résultat
	par un retour sur la représentation ou l'anticipation du problème
	par un retour à des fondements mathématiques
Sensibilité à la contradiction	
Dépassement de la contradiction	par un rejet du résultat et identification de la source
	par un changement de cadre
	par un changement de point de vue
Discernement	
Contrôle sur les nombres et opérations	
Métaconnaissances	

À propos des contrôles structural et opérationnel, Rhéaume (2020) ajoutent qu'il peut y avoir la présence d'écarts dans leur mobilisation. Pour elle, le terme *écart* fait référence « aux limites ponctuelles de certains élèves devant la tâche qui viennent restreindre leur activité de contrôle » (p. 76). À titre d'exemple, si l'élève ne connaît pas de moyens de se vérifier, cela entrave forcément sa mobilisation de la composante vérification du contrôle opérationnel. Rhéaume (2020) mentionne également que plusieurs auteurs parlent plutôt de connaissances demeurant inertes, c'est-à-dire que des connaissances et habiletés sont possédées par l'élève, mais que celui-ci n'est pas en mesure de s'en rappeler ou de les mobiliser pour un certain problème.

2.2.2.3 Le contrôle restreignant

À l'opposé des contrôles structural et opérationnel – qui reposent sur un engagement réfléchi tout au long de la résolution de problèmes – le contrôle restreignant « traduit plutôt un engagement basé sur des croyances qui viennent restreindre l'activité intellectuelle nécessaire au processus de résolution » (Rhéaume, 2020, p. 77). Pour Rhéaume (2020), le terme croyance désigne « l'ensemble des conceptions, attentes

²⁶ Ce mémoire de recherche sera discuté un peu plus en détails dans la section 2.3 Un tour d'horizon des études portant sur le contrôle.

scolaires, habitudes, conduites et règles artificielles que l'élève a développées au sujet des mathématiques et plus particulièrement, au sujet de la résolution de problèmes » (p. 79). Plusieurs exemples de croyance sont donnés : un problème mathématique se résout d'une unique manière, un problème mathématique doit être résout en moins de 10 minutes, seulement les gens possédant la bosse des mathématiques sont en mesure de faire des mathématiques, la vérification est la responsabilité de l'enseignant (pas de l'élève), faire des mathématiques se limite à appliquer des règles (pas à comprendre) (Rhéaume, 2020). Ainsi, les croyances des élèves peuvent influencer leur manière de s'engager dans la résolution de problèmes et guider certaines de leurs actions au fil de celle-ci. Le tableau 2.8 présente la composition du contrôle restreignant.

Tableau 2.8 Contrôle restreignant au sens de Rhéaume (2020)

Contrôle restreignant
Croyances entravant l'activité mathématique

2.3 Un tour d'horizon des études portant sur le contrôle

Depuis l'établissement de la définition du contrôle par Saboya (2010), plusieurs chercheurs se sont intéressés à celui-ci. Faisant généralement partie de l'ancrage théorique des recherches, le contrôle a été adapté et utilisé avec divers types de problèmes et d'objectifs; ce qui a, en retour, aidé à élargir et enrichir la conceptualisation elle-même du contrôle. Notamment, la confrontation entre la conceptualisation du contrôle (cadre théorique) et l'analyse de données réelles a fait émerger des aspects du contrôle sur lesquels nous allons nous appuyer dans ce mémoire. D'abord, nous allons explorer l'interrelation entre les diverses composantes du contrôle qui sont mobilisées lors de la résolution d'un problème. Ensuite, nous allons nous tourner vers l'importance des caractéristiques du problème à résoudre sur la (non) sollicitation des composantes du contrôle lors de sa résolution. Enfin, nous allons détailler un exemple – particulièrement pertinent – de l'utilisation d'une représentation graphique comme un outil de contrôle lors de la résolution d'un problème mathématique de niveau collégial. À ces fins, plusieurs études où la notion de contrôle est exploitée seront abordées dans cette section. De surcroît, ces études permettront d'exemplifier comment les composantes du contrôle peuvent concrètement se manifester lors de la résolution de problèmes.

2.3.1 L'interrelation entre les composantes du contrôle

La conceptualisation du contrôle au sens de Saboya (2010) a été utilisée comme assise théorique dans plusieurs études, dont celle de Saboya, Bednarz et Hitt (2015), qui avait comme objectif « de cerner les manifestations du contrôle qui apparaissent chez les élèves » (p. 66). Dans ce but, des problèmes relevant

de l'algèbre ont été soumis à des élèves de troisième secondaire (élèves de 14-15 ans), afin que leurs productions écrites résultantes puissent être recueillies et analysées. À l'issue de leur analyse, un regard nouveau a été amené par les auteurs sur la conceptualisation du contrôle :

Notre analyse contribue tout d'abord à mettre en évidence le *caractère progressif et dynamique du contrôle* [...] et fait ressortir la profonde *imbrication*, dans le cas de la résolution algébrique, des *dimensions sémantique et syntaxique*, qui ne constituent pas deux dimensions disjointes l'une de l'autre. (Saboya et al., 2015, p. 88)

Afin d'illustrer ces aspects inédits du contrôle, nous allons reprendre une des résolutions algébriques du problème des trains (voir la figure 2.3 pour l'énoncé), dont l'analyse est présentée dans Saboya et al. (2015).

Figure 2.3 Énoncé du problème des trains (tiré de Saboya et al., 2015, p. 67)

Trains
Il y a 578 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places, et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que les deux trains ont le même nombre de wagons, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des 2 locomotives? Explique comment tu as fait pour trouver.

La résolution en question, à l'instar de plusieurs autres résolutions de participants, est constituée de différentes tentatives. Dans ce cas particulier, ce sont « des difficultés d'ordre syntaxique qui vont amener l'élève²⁷ à revenir sur sa résolution » (p. 76); ce qui résulte en quatre tentatives²⁸ de résolution, qui sont rassemblées dans le tableau 2.9.

Tableau 2.9 Reconstitution de la résolution d'un élève au problème des trains (tirée de Saboya et al., 2015, p. 76)

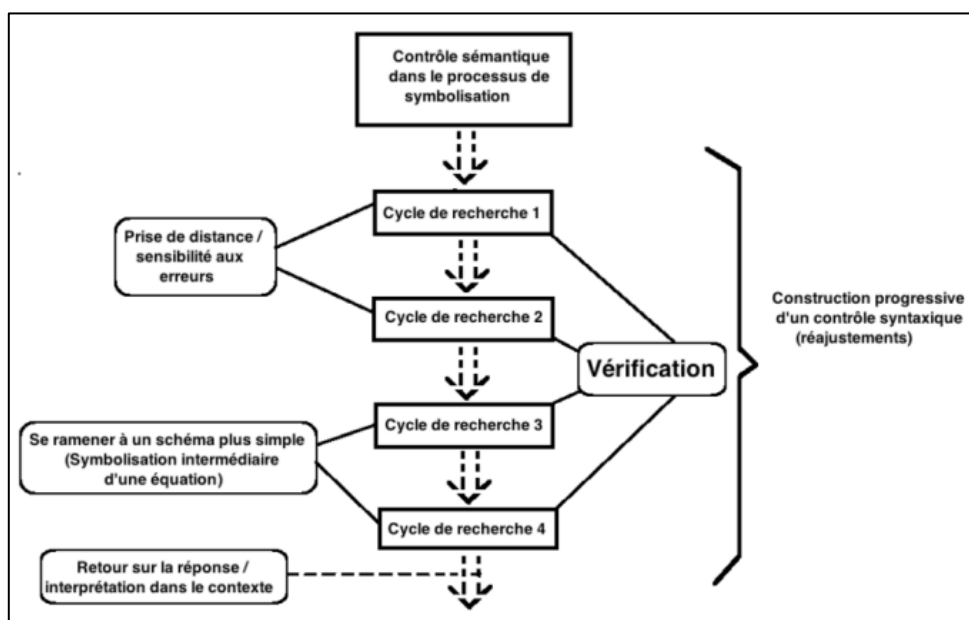
Première tentative	Deuxième tentative	Troisième tentative	Quatrième tentative
$12n + \frac{16n}{16} = \frac{578}{16}$ $\frac{12n}{12} = \frac{36,12}{12}$ $n = 3$ Vérification : $3 \times 12 + 3 \times 16 =$	$12n + \frac{16n}{16} = \frac{578}{16}$ $\frac{13n}{13} = \frac{36,12}{13}$ $n =$	Nb de wagons? 12 places = n 16 places = $n + 4$ $n + n + 4 = 578$ $-4 \quad -4$ $\frac{2n}{2} = \frac{574}{2}$ $n = 287$	Nb de wagons : n Passagers par wagon : 12 Passagers par wagon : 16 $12n + 16n = 578$ $\frac{28n}{28} = \frac{578}{28}$ $n = 20,64$ Réponse : chacun 21 wagons

²⁷ Le genre des élèves ne sont pas mentionnés dans Saboya et al. (2015); le masculin est utilisé pour tous les élèves.

²⁸ Dans Saboya et al. (2015), les tentatives de résolution sont parfois désignées comme des cycles de recherches.

Comme nous pouvons le voir, la première tentative comporte deux erreurs syntaxiques ($16n/16 = 0$; division d'un terme sur deux dans le membre gauche de l'équation), mais une réponse (erronée) est tout de même obtenue par l'élève. Une vérification de la réponse obtenue permet à l'élève de constater que cette dernière n'est pas correcte et l'amène ainsi à amorcer une deuxième tentative. L'élève semble reconnaître une des erreurs commises, puisqu'il interprète correctement $16n/16 = n$ cette fois-ci (la division reste inadéquate). Sans même finir la résolution de l'équation, l'élève constate que la réponse est incorrecte, probablement parce que cette dernière possède le même ordre de grandeur que la (mauvaise) réponse obtenue à la première tentative. La troisième tentative débute avec une équation ($n + n + 4 = 578$) différente des deux autres; une équation plus simple que les auteurs interprètent comme « lui servant de tremplin à la construction d'un contrôle syntaxique » (Saboya et al., 2015, p. 77). L'élève semble donc se rendre compte de la présence d'erreur(s) syntaxique(s) dans la deuxième tentative. Selon les auteurs, l'équation simple ne représente pas la situation décrite par le problème pour l'élève, mais lui sert à déterminer les transformations des expressions algébriques à faire afin de résoudre l'équation qui la représente ($12n + 16n = 578$), puisqu'il y revient dans la tentative suivante. Grâce à l'équation intermédiaire de la troisième tentative, l'élève est finalement en mesure de résoudre correctement l'équation utilisée dès la première tentative. Enfin, l'élève arrondit à l'entier supérieur le résultat obtenu (tout comme dans la première tentative) et l'interprète en contexte (un nombre de wagons). La figure 2.4 synthétise les manifestations du contrôle relevées lors de la reconstitution de la résolution de l'élève.

Figure 2.4 Manifestations du contrôle en action (tiré de Saboya et al., 2015, p. 78)



Tout au long de la résolution, l'élève manifeste un bon contrôle sémantique. Notamment, lors de la mathématisation du problème, l'élève montre un contrôle sémantique dans le processus de symbolisation des grandeurs en jeu et de leurs relations. La bonne emprise sémantique de l'élève se voit également dans l'arrondissement à l'entier supérieur des résultats, puisque, selon le contexte du problème, la réponse représente un nombre de wagons (un entier) qui doit être en mesure de contenir (au minimum) 578 passagers. Quant au contrôle syntaxique, l'élève le construit progressivement au fil de ses tentatives. Cependant, sa construction d'un contrôle **syntactique** s'appuie, s'ancre, sur la grande emprise **sémantique** qu'il possède sur le problème : il revient toujours à la même équation mathématisant adéquatement le problème ($12n + 16n = 578$), il repère ses erreurs syntaxiques selon le contexte du problème (trains devant accueillir minimalement 578 passagers) et il fait usage d'une équation intermédiaire – qu'il sait être inadéquate comme mathématisation du problème – afin de spécifiquement surpasser ses erreurs syntaxiques.

Cette imbrication des composantes du contrôle mobilisées lors de la résolution d'un problème a été d'abord soulevée – surprenant même les auteurs – par Saboya et al. (2015), pour ensuite être approfondie par Morand (2020), puisqu'elle a été directement le sujet de la recherche menée par ce dernier dans le cadre de son mémoire. Son objectif global était d'identifier les structururations possibles des composantes du contrôle lors de la résolution en équipe de problèmes algébriques et, s'il y a lieu, les éléments pouvant agir sur ces structururations. Afin de réaliser cet objectif, trois problèmes algébriques ont été proposés à des équipes de différents niveaux scolaires composées de deux, trois ou quatre personnes. La résolution des problèmes de chaque équipe a été enregistrée (audio et vidéo) et observée par Morand (2020), afin de permettre « d'observer la mobilisation en action des composantes du contrôle ainsi que la dynamique entre elles » (p. 63), c'est-à-dire qu'il souhaitait observer le « mouvement » des composantes entre les membres de l'équipe, et, entre elles-mêmes. Justement, due à la nature interreliée des composantes du contrôle, Morand (2020) a fait le choix d'organiser les structururations identifiées autour de certaines composantes classifiées de centrales :

Une composante peut être mise de l'avant afin d'observer comment les autres composantes sont mobilisées autour de celle-ci. De ce fait, ces structururations ne décrivent pas une idée globale d'une structururation du contrôle, mais plutôt au niveau local autour d'une composante.
(p. 179-180)

Certaines structururations sont ainsi abordées plusieurs fois selon une différente composante centrale. Les six composantes classifiées ainsi sont le contrôle sémantique, le choix éclairé, le contrôle sur les calculs (correspondant approximativement au contrôle syntaxique de Saboya (2010)), la sensibilité et le dépassement de la contradiction, les métaconnaissances, et, la vérification/validation. Tel que mentionné, les structururations du contrôle identifiées par Morand (2020) – ainsi que celles relevées par Saboya et al.

(2015) (e.g. figure 2.4) – sont issues de l’analyse de résolutions de problèmes; résolutions qui dépendent, bien évidemment, des problèmes à résoudre. L’impact des caractéristiques des problèmes sur les composantes du contrôle mobilisées lors de leur résolution sera discuté dans la section suivante.

2.3.2 L’importance des caractéristiques du problème sur les composantes du contrôle mobilisées

Globalement, les études faisant usage de la notion du contrôle mettent en œuvre de la résolution de problèmes. Dans ces études, la sélection – ou la construction – des problèmes exploités est d’une grande importance. Généralement, une analyse *a priori* est effectuée autour des composantes du contrôle que les auteurs s’attendent à être sollicitées lors de la résolution du problème; analyse qui est ancrée dans les caractéristiques dudit problème. Un exemple d’une telle analyse se trouve dans l’étude de Saboya et al. (2015) et porte sur le problème des trains abordé précédemment (voir la section 2.3.1). L’énoncé du problème des trains est rappelé dans le tableau 2.10, accompagné de l’analyse préalable réalisée par les auteurs sous l’angle du contrôle.

Tableau 2.10 Problème des trains (tiré de Saboya et al., 2015, p. 67)

<i>Trains</i> Il y a 578 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places, et l’autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que les deux trains ont le même nombre de wagons, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des 2 locomotives? Explique comment tu as fait pour trouver.
<i>Analyse préalable</i> <i>(raisons du choix du problème sous l’angle du contrôle)</i> Sollicite une interprétation du résultat au regard du contexte (celui-ci n’étant pas entier). Oblige à un retour au problème de départ (plusieurs stratégies possibles : arrondissement du résultat trouvé, interprétation dans le contexte, par exemple, un wagon ne sera pas plein, etc.)

Les auteurs préfacent la présentation de leur analyse²⁹ des manifestations du contrôle chez les élèves avec une remarque sur leur analyse *a priori* : « les différentes manifestations de contrôle, qui émergent de l’analyse des stratégies de résolution des élèves [...], dépassent considérablement [...] cette analyse préalable. » (Saboya et al., 2015, p. 68) Avec le problème des trains, les auteurs visaient globalement « un travail autour de la vérification, un retour la [sic] démarche, sur les calculs, sur la réponse,... » (p. 67) chez

²⁹ La section 2.3.1 contient un exemple d’analyse d’une résolution d’élève au problème des trains. Notamment, la figure 2.4 rassemble les éléments importants ressortant de l’analyse de la résolution présentée dans le tableau 2.9.

les élèves. Comme nous pouvons le voir, les raisons spécifiques derrière la sélection de ce problème – rassemblées dans le bas du tableau 2.10 – prennent racine dans ses caractéristiques. Une interprétation du résultat en regard au contexte est sollicitée **parce que** le problème demande la détermination du nombre de wagons, c'est-à-dire un nombre faisant partie de l'ensemble des entiers naturels ($\mathbb{N}$), **mais que** le résultat numérique obtenu à l'issue des calculs mathématiques ($\frac{578}{28}$) est un nombre faisant partie des rationnels ($\mathbb{Q}$). Ainsi, il est nécessaire que le résultat soit arrondi afin de donner une réponse plausible selon le contexte du problème. De plus, il faut que le résultat soit arrondi à l'entier supérieur, ce qui correspond à avoir des wagons qui ne seront pas entièrement occupés, obligeant donc un retour au problème de départ. Bref, ce sont les nombres utilisés dans le problème des trains, en conjonction avec le contexte de ce dernier, qui entraînent naturellement les élèves vers un travail de vérification basé sur l'interprétation en contexte du résultat et un retour au problème de départ.

L'étude de Saboya et Rhéaume (2015) est un autre exemple appuyant l'importance des caractéristiques du problème à résoudre sur les composantes du contrôle qui seront sollicitées lors de sa résolution. Dans cette étude, le contrôle est la lunette théorique utilisée afin de « mieux circonscrire l'action contrôlée manifestée par les élèves en arithmétique et plus particulièrement dans la résolution d'un problème portant sur la comparaison de fractions. » (p. 6) Notamment, les auteures ont ciblé quatre composantes du contrôle, soient l'engagement réfléchi, le discernement/choix éclairé (de procédures), le contrôle sémantique et le contrôle syntaxique. Pour ce faire, un problème de comparaison de fractions a été élaboré spécifiquement afin de favoriser la mobilisation de ces composantes chez les élèves débutant le secondaire. La figure 2.5 présente ce problème nommé *Les Olympiques*.

Figure 2.5 Énoncé du problème *Les Olympiques* (tiré de Saboya et Rhéaume, 2015, p. 10)

Lors des Olympiques scolaires de ton école, tu es responsable du classement des athlètes. Les résultats représentent, en fraction, la distance parcourue par l'athlète. À partir des résultats du saut en longueur, complète le tableau de la remise des médailles. Celui qui parcourt la plus grande distance gagne.

Luc : $\frac{3}{5}$ Paolo : $\frac{2}{7}$ Julien : $\frac{1}{2}$ Alex : $\frac{3}{8}$ Yvan : $\frac{6}{7}$

1 ^{ère} place (Or)	2 ^e place (Argent)	3 ^e place (Bronze)	4 ^e place	5 ^e place

Note : Étant donné la grande responsabilité de cette tâche, tu dois expliquer aux juges comment tu as fait. Laisse des traces de ta démarche.

Plusieurs décisions ont été prises par les auteures durant la construction du problème. À titre d'exemple, afin de s'assurer que les élèves puissent faire preuve de discernement (i.e. faire un choix éclairé), Saboya et Rhéaume (2015) se sont assurées que la situation soit ouverte sur un large éventail de procédures. À cette fin : la valeur du tout n'est pas inclus dans l'énoncé, il y a un plus grand nombre de fractions à comparer que dans les exemples travaillés en classe, les dénominateurs ne sont pas tous multiples les uns des autres, et, le plus petit commun multiple des dénominateurs est 280 – ce qui rend la procédure, habituellement favorisée, d'énumération des multiples de chaque dénominateur longue et ardue. Comme l'affirment les auteures, « le choix du problème ou d'un exercice mathématique n'est pas anodin quand nous poursuivons l'intention de développer une action contrôlée chez les élèves » (Saboya et Rhéaume, 2015, p. 23). En d'autres mots, elles soutiennent notre point que les caractéristiques d'un problème affectent l'action contrôlée – donc les manifestations du contrôle – générée lors de sa résolution. Assurément, d'autres facteurs que les caractéristiques des problèmes offerts ont un effet sur la mobilisation du contrôle lors de la résolution de problèmes. Dans Saboya et Rhéaume (2015), une analyse préalable (sous l'angle du contrôle) des avenues de résolution les plus probables a été effectuée, puisqu'utiliser différentes procédures peut entraîner la mobilisation de différentes composantes du contrôle et que les mêmes composantes du contrôle, lorsque mobilisées à travers plusieurs procédures, peuvent se manifester différemment chez chacune. Donc, même si le problème est construit dans un but précis en termes de contrôle, la mobilisation – et les manifestations – des diverses composantes du contrôle peuvent varier. Ce point est particulièrement pertinent dans le cadre de ce mémoire, puisque nous nous intéressons à des problèmes mathématiques à contexte physique, qui n'ont pas, en toute probabilité, été élaborés dans le but de développer un contrôle basé sur la présence d'unités de mesure.

Dans la mesure où la mise en commun de la notion de contrôle et des unités de mesure dans la résolution de problèmes mathématiques (à contexte physique) est complètement inédite, il semble pertinent, dans un premier temps, d'élargir la conceptualisation du contrôle afin de l'ancrer à la présence des unités de mesure³⁰. Il semble judicieux, dans un deuxième temps, de réaliser une analyse théorique approfondie sur les problèmes mathématiques à contexte physique afin d'identifier les opportunités qui y sont réellement présentes d'un contrôle par les unités de mesure. Ce type d'analyse peut déjà s'avérer riche en informations, comme le montre l'étude de Dufour et Jeannotte (2013), qui s'est soumise à l'exercice, mais avec la **représentation graphique** – plutôt que les unités de mesure – comme **outil de contrôle**. Cette étude sera détaillée dans la section suivante.

³⁰ Ce travail conceptuel est présenté dans la section 2.4.

2.3.3 La représentation graphique comme outil de contrôle

L'étude de Dufour et Jeannotte (2013) est, comme mentionné précédemment, particulièrement pertinente dans le cadre de ce mémoire pour deux raisons. Premièrement, et au contraire des autres études abordées dans les sections précédentes (2.3.1 et 2.3.2), elle conjugue la notion de contrôle avec des notions mathématiques de niveau collégial – le niveau scolaire nous intéressant – et fait intervenir des étudiants collégiaux. En effet, les auteures souhaitent « repérer des indices du contrôle exercé par les étudiants sur leur propre activité mathématique » (p. 29) lorsque ceux-ci tentent de résoudre une tâche non routinière de calcul différentiel. Par l'appellation *non routinière*, les auteures désignent une tâche qui « sollicite chez les étudiants la construction de leurs propres stratégies de résolution, c'est-à-dire une combinaison non apprise de différents concepts familiers (ou non) pour eux » (p. 29). La tâche non routinière qu'elles ont utilisée – présentée dans la figure 2.6 – consiste en une adaptation d'une tâche non routinière figurant dans Selden, Selden, Hauk et Mason (1999).

Figure 2.6 Tâche non routinière (tirée de Dufour et Jeannotte, 2013, p. 34)

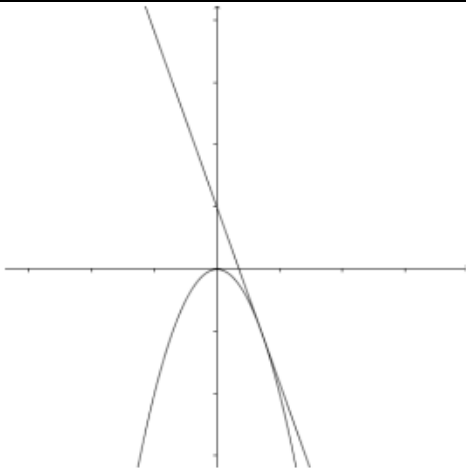
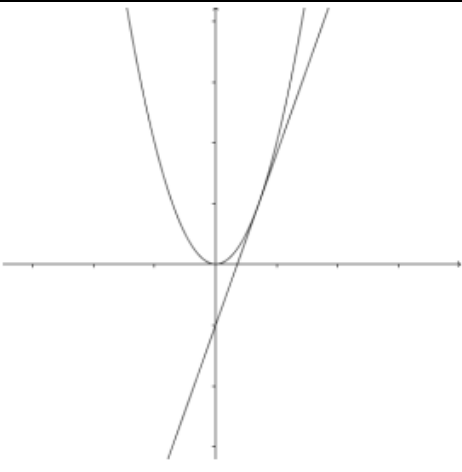
Trouve les valeurs de a et b pour que la droite $2x + 3y = a$ soit tangente au graphique de $f(x) = bx^2$ au point $x = 3$. Représente la situation graphiquement (à main levée).

La modification, apportée par Dufour et Jeannotte (2013), est l'addition de la demande de générer une représentation graphique de la situation. Cet ajout est délibéré de la part des auteures, car elles se sont inspirées de Eisenberg et Dreyfus (1991) qui suggèrent que « l'utilisation de représentations lors de la résolution de tâches non routinières peut s'avérer un élément important de réussite » (Dufour et Jeannotte, 2013, p. 34). En d'autres mots, les auteures ont cherché à susciter une action contrôlée chez les étudiants par le recours – qu'elles ont forcé par leur modification de la tâche – à une représentation graphique. Les auteures précisent cependant « [qu']il ne s'agit pas de vérifier si les étudiants décident de produire un graphique ou non, mais plutôt d'observer comment ils le feront et surtout la façon dont ils y auront recours » (p. 34). Ainsi, leur intérêt réside dans l'observation du (des) rôle(s) de la représentation graphique en tant qu'outil de contrôle sur l'activité mathématique des étudiants lors de la résolution d'une tâche non routinière de calcul différentiel. Deuxièmement, l'intérêt que les auteures ont envers un élément mathématique en tant qu'outil de contrôle se rapproche beaucoup de notre intérêt, d'où la pertinence de s'attarder à leur étude. Dans Dufour et Jeannotte (2013), la tâche employée est purement mathématique et l'outil de contrôle utilisé est également un élément mathématique (la représentation graphique). Dans ce mémoire, les tâches d'intérêt sont les problèmes mathématiques à contexte physique et l'outil de contrôle utilisé provient de ce contexte (les unités de mesure); il cherche à exploiter l'aspect extra-mathématique de ce type de problèmes. Ainsi,

la partie la plus intéressante de Dufour et Jeannotte (2013) pour réaliser l'objectif de la présente recherche consiste en l'analyse préalable, sous l'angle du contrôle, de la tâche non routinière effectuée par les auteures.

Ainsi, l'analyse de la tâche, sous la loupe du contrôle, présentée dans Dufour et Jeannotte (2013) consiste en une proposition « [d']une résolution possible de la tâche, suivant une certaine structure, afin d'illustrer comment des indicateurs possibles d'une activité de contrôle sont identifiées dans une solution » (p. 35). Puisqu'il s'agit d'une *possibilité*, les auteures précisent que les étudiants pourraient ne pas suivre l'ordre présenté ou même omettre des étapes (e.g. faire le graphique) dans leur résolution. Les auteures s'attendent à ce que l'étudiant débute la résolution par déterminer la pente de la droite ($2x + 3y = a$). Elles avancent que l'étudiant risque d'identifier la pente de la droite en réécrivant cette dernière sous la forme plus familière $y = -\frac{2}{3}x + \frac{a}{3}$; ce qui requiert du contrôle syntaxique (manipulation d'équation). Du contrôle sémantique est nécessaire afin que l'étudiant donne du sens au coefficient de x , ainsi qu'au signe négatif de ce coefficient, c'est-à-dire que la pente de la droite est négative. En ce qui concerne la fonction $f(x) = bx^2$, le signe du paramètre b est inconnu; il peut donc être négatif ou positif. S'il est négatif, la parabole représentant $f(x)$ s'ouvre vers le bas et, puisque la tangente touche cette dernière en $x = 3$, le point de contact se situe dans le quatrième quadrant; donc, le paramètre a est positif. S'il est positif, la parabole s'ouvre vers le haut et le point de contact se situe dans le premier quadrant; donc, le paramètre a est négatif. Les représentations graphiques de ces deux cas sont rassemblées dans le tableau 2.11 ci-dessous.

Tableau 2.11 Cas possibles selon les signes des inconnues a et b (tirés de Dufour et Jeannotte, 2013, p. 36)

Cas #1	Cas #2
	
Si b est négatif, a doit être positif et la pente de la tangente est négative.	Si b est positif, a doit être négatif et la pente de la tangente est positive.

Jumelée avec l'identification de la pente de la droite, la représentation graphique permet de déduire le cas représentant adéquatement la situation (cas #1, la pente de la tangente est négative) et d'ainsi anticiper le signe des deux inconnues (a est positif, b est négatif). Cependant, cette détermination demande « un très grand contrôle sémantique en plus de métaconnaissances », puisque l'étudiant doit être en mesure « d'articuler les différentes représentations du problème et d'en dégager des conclusions » (Dufour et Jeannotte, 2013, p. 36). En effet, l'articulation de beaucoup de connaissances est nécessaire, notamment des connaissances sur les paramètres de l'équation d'une droite et d'une fonction quadratique, sur le concept de tangente et sur la représentation graphique de tous ces éléments. Les auteures relèvent que « le graphique peut servir d'élément de contrôle à différents moments » (p. 36), puisque les étudiants peuvent également s'y référer afin de « vérifier que les solutions trouvées ont du sens » (p. 36). De plus, la présence d'un graphique peut permettre aux auteures de voir si l'étudiant est sensible à la contradiction : « si sa réponse [les valeurs de a et b] et la représentation graphique ne sont pas cohérentes, l'élève peut le remarquer et essayer de dépasser cette contradiction » (p. 36).

La résolution du problème peut se poursuivre par la détermination de la dérivée de la fonction quadratique en tout point ($\frac{df}{dx} = 2bx$) et au point d'intérêt $x = 3$ ($\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=3} = 6b$), ce qui demande un contrôle syntaxique. L'étudiant doit faire preuve de contrôle sémantique afin de poser l'équation $-\frac{2}{3} = 6b$, qui met en relation la pente de la tangente et la dérivée au point $x = 3$, et de contrôle syntaxique afin de la résoudre ($b = -\frac{1}{9}$). Ayant obtenu la valeur du paramètre b , il reste à l'étudiant à déterminer la valeur de a . Pour ce faire, il faut considérer le point de contact entre la fonction quadratique et la tangente en $x = 3$ afin de poser l'équation $f(3) = -\frac{1}{9}(3)^2 = -\frac{2}{3}(3) + \frac{a}{3}$, d'où $a = 3$. Cette étape demande à l'étudiant de « s'arrêter à la signification du point de tangence de la droite et de la fonction $f(x)$ (discernement, choix éclairé, contrôle sémantique) » (Dufour et Jeannotte, 2013, p. 37).

Dufour et Jeannotte (2013) concluent leur analyse de la tâche non routinière par cette remarque :

Le contrôle syntaxique ne sera pas suffisant pour arriver à résoudre ce problème parce qu'ici les algorithmes et les techniques ne sont que des outils. Si l'élève s'engage dans cette résolution, mais ne peut pas dégager les deux équations nécessaires pour trouver les deux inconnues, il ne pourra pas résoudre le problème. (p. 37)

Malheureusement, à l'issue de leur analyse des productions des étudiants, les auteures n'ont pu que constater que ces derniers exercent un contrôle minimal sur leur activité mathématique; une seule étudiante (sur huit) « réussit à élaborer une stratégie de résolution plus ou moins contrôlée [...] toutefois, sa réponse comporte

une contradiction » (p. 37). Cela amène les auteures, dans ce qui ressemble à un appel à des futures recherches, à s'interroger :

Ainsi, on peut se demander si l'enseignement prépare adéquatement les étudiants à mettre en place divers éléments de contrôle lors de la résolution de tâches mathématiques, qu'elles soient routinières ou non. En effet, on remarque que les solutions produites montrent un tel manque de contrôle (à l'exception du contrôle syntaxique) que l'on est en droit de se demander s'ils ont développé ce contrôle? (p. 41)

Puisque l'objectif de ce présent mémoire est d'explorer ce que les unités de mesure peuvent offrir comme opportunités de contrôle, il semble pertinent de s'attarder à des problèmes mathématiques à contexte physique *routiniers*, afin que le potentiel exploré soit le plus possible à la portée des étudiants (car relié aux problèmes de ce type qu'ils risquent de rencontrer le plus communément dans leurs études collégiales en *Sciences de la nature*).

Il est important de noter que Dufour et Jeannotte (2013) s'inscrit à la suite d'un grand nombre d'études portant sur le calcul différentiel en didactique des mathématiques. Grâce à ces études, les conceptions que possèdent les étudiants autour des notions de calcul différentiel – telles que la tangente, la dérivée, le taux de variation, etc. – ainsi que les difficultés qu'elles ont tendance à engendrer chez ceux-ci sont bien connues. L'analyse préalable sous l'angle du contrôle de la tâche non routinière effectuée par Dufour et Jeannotte (2013) pouvait donc s'ancrer dans ces éléments, leur permettant d'aller voir plutôt directement des étudiants. Cependant, dans notre cas, il n'y a pas d'études portant sur les unités de mesure comme outil de contrôle, ni sur la présence d'unités de mesure dans des problèmes mathématiques à contexte physique. En conséquence, la recherche réalisée dans le cadre de ce mémoire est grandement exploiratoire. Dans la section suivante, la conceptualisation du contrôle sera d'abord élargie afin de l'ancrer à la présence d'unités de mesure. Par la suite, des problèmes mathématiques à contexte physique routiniers seront l'objet d'une analyse approfondie afin d'identifier les opportunités d'un contrôle par les unités qui sont réellement présentes; ce qui constitue le cœur de ce mémoire.

2.4 Les unités de mesure comme outil de contrôle

L'union de la notion de contrôle avec les unités de mesure en résolution de problèmes à contexte amène à une conceptualisation inédite du contrôle. Les éléments composant cette conceptualisation, abordés dans cette section, proviennent de ma propre pratique d'enseignante de physique au collégial soutenue par des études issues de la didactique de la physique et de la didactique des mathématiques.

2.4.1 Les unités comme outil de contrôle structural

En posant un regard introspectif sur ma pratique d'enseignante de physique, je me suis rendue compte que je tentais d'améliorer le contrôle des étudiants lors de leur résolution de problème, avant même d'être introduite à ce concept et d'avoir connaissance des terminologies lui étant reliées. Suivant la lecture d'un problème, je conseillais à mes étudiants de prendre un moment afin de décortiquer l'énoncé et d'identifier les divers éléments qui y sont inclus; ce qui relève du **contrôle structural** de Rhéaume (2020). Notamment, je les encourageais à cerner les grandeurs physiques présentes dans l'énoncé et celle(s) devant être déterminée(s) – incluant leur unité. Porter attention aux unités peut aider à l'interprétation du problème, surtout lorsqu'il est question de grandeurs physiques exprimées sous la forme d'une valeur numérique accompagnée d'une unité, puisque l'unité relie le nombre à sa signification contextuelle (i.e. la grandeur physique qu'il représente). Cela peut également aider les étudiants à structurer leur représentation du problème, car les unités cohérentes peuvent permettre d'inférer sur la manière dont les grandeurs physiques peuvent se combiner, donc sur la manière dont elles peuvent être reliées. Ce point est amené et exemplifié dans l'étude, en didactique des mathématiques, de Rowland (2006), dont nous avons déjà discuté (voir la section 1.4.2) :

Given the volume flow rate of a salt mixture flowing into a tank and the concentration of the mixture, a consideration of units makes it easy to work out that the mass rate at which salt is added to the tank is given by volume rate by concentration. (Rowland, 2006, p. 553)

Dans cet extrait, Rowland (2006) affirme que considérer les unités de mesure, associées aux grandeurs physiques, permet de déterminer que le débit massique du sel (qui s'ajoute dans un bassin) correspond au débit volumique du mélange salé (qui se déverse dans le bassin) multiplié par la concentration en sel du mélange salé. Cependant, les unités elles-mêmes ne sont pas mentionnées dans l'extrait. Afin d'illustrer les propos de Rowland (2006), dans la figure 2.7, nous avons choisi l'ensemble cohérent des unités SI, spécifiquement, les unités dérivées cohérentes associées à un débit volumique (m^3/s), à un débit massique (kg/s) et à une concentration massique (kg/m^3).

Figure 2.7 Lien entre des unités cohérentes SI

$$\frac{\text{m}^3}{\text{s}} ; \frac{\text{kg}}{\text{s}} ; \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$
$$\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Puisque l'ensemble cohérent des unités SI a été utilisé, nous pouvons affirmer que les grandeurs physiques se comportent – sont liées – de la même manière que leurs unités le sont (voir la section 2.1). Cependant, l'ensemble cohérent des unités SI ne revêt vraisemblablement pas la même importance en mathématiques qu'en physique.

Une différence probable entre la résolution de problèmes en physique et la résolution de problèmes à contexte physique en mathématiques concerne les équations physiques. En physique, afin de résoudre un problème, les étudiants doivent généralement enchaîner plusieurs équations physiques qu'ils doivent aller chercher par eux-mêmes (dans leur notes de cours, manuel ou feuille aide-mémoire) ou dont ils doivent se souvenir. En mathématiques, il nous semble raisonnable de supposer que la ou les équations physiques nécessaire(s) à la résolution d'un problème à contexte physique soi(en)t fournie(s) dans son énoncé; puisque les équations doivent être physiquement correctes et qu'il ne s'agit pas d'étudiants en physique, mais en mathématiques. Bref, l'étudiant de physique peut se faire une idée à propos de la sélection d'équations physiques par le biais des unités présentes dans l'énoncé, car les unités reflètent la nature des grandeurs physiques en jeu. L'étudiant de mathématiques ou de physique peut également se faire une idée de l'enchaînement des équations physiques données ou sélectionnées par les manières possibles dont les unités peuvent se combiner. Ainsi, les étudiants peuvent amorcer la planification de leur résolution en considérant la manière dont les unités de mesure peuvent se combiner.

Émanant de la didactique de la physique, l'article de Van Heuvelen et Maloney (1999) aborde, d'une manière inusitée, l'importance des équations physiques et, surtout, de l'information contenue dans ces dernières³¹. Dans cet article, un nouveau format de problèmes de physique, basé sur le jeu télévisé américain *Jeopardy!* – où les participants se font donner la réponse d'une question particulière et doivent tenter d'énoncer ladite question – est présenté. Ce que les auteurs ont nommé un *Equation Jeopardy Problem* consiste donc à offrir aux étudiants une équation (e.g. $N - (60 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) = 0$)³², et ces derniers doivent travailler à l'envers afin de construire un schéma, un graphique ou une description en mots d'un phénomène physique cohérent avec l'équation fournie (il y a souvent plusieurs réponses possibles). Puisque dans ces problèmes « you reverse the normal process [of problem solving] » (p. 252), les *Equation Jeopardy Problems* semblent être l'inverse des problèmes routiniers de physique. Cependant, un parallèle peut être fait entre ces problèmes de physique inverses (qui sont proposés à des étudiants de physique) et les problèmes mathématiques à contexte physique proposés aux étudiants de mathématiques; puisque

³¹ Le contenu physique présent dans l'article correspond approximativement au niveau collégial du Québec.

³² Les symboles des unités de mesure doivent obligatoirement être composés de caractères droits. Les symboles représentant des grandeurs physiques sont généralement formés d'une seule lettre en italique (BIPM, 2019).

l'équation physique nécessaire à la résolution d'un problème mathématique à contexte physique risque fortement d'être incluse dans son énoncé, car s'adressant à des étudiants de mathématiques et non de physique. Ainsi, certains des éléments entourant les *Equation Jeopardy Problems* amenés par les auteurs sont également pertinents dans ces autres circonstances. Notamment, les auteurs affirment que les unités de mesure sont primordiales pour accéder à la profondeur conceptuelle (i.e. le sens physique) encodée dans une équation physique : « units become more meaningful since they become the key to determining what physical quantities are involved [...] they become useful sources of information » (p. 254). Donc, les unités sont la clef permettant aux étudiants d'exercer un contrôle sémantique sur l'équation fournie et permet d'atteindre – ou, du moins, d'approcher – le phénomène physique que décrit l'équation. À ce propos, Van Heuvelen et Maloney (1999) écrivent que « the equation description of a process is now regarded more as a short story about some aspect of life – about a physical process – and less as a set of symbols that must be solved numerically to answer a question » (p. 255). Ainsi, pour les étudiants de mathématiques, porter leur attention sur l'équation fournie et y exercer un contrôle sémantique par l'entremise des unités de mesure associées pourrait permettre d'approfondir leur appréhension du contexte physique des problèmes mathématiques (à contexte physique) qui leur sont offerts.

2.4.2 Les unités comme outil de contrôle opérationnel

Une fois que les étudiants ont bien saisi l'ensemble du problème (physique ou à contexte physique), le contrôle structural peut céder le pas au **contrôle opérationnel**, qui concerne « le savoir quand et comment utiliser les mathématiques lors de l'opérationnalisation » (Rhéaume, 2020, p. 54). Dans ma pratique enseignante, je conseillais d'abord aux étudiants d'anticiper, si possible, certaines caractéristiques du résultat. Notamment, avec une bonne connaissance du SI, les étudiants peuvent anticiper l'unité cohérente SI devant accompagner le résultat, c'est-à-dire celle qui est associée à la grandeur physique demandée par le problème. Par exemple, si le problème demande de déterminer la vitesse d'un objet quelconque, l'unité du résultat devrait être le mètre par seconde (m/s), puisqu'il s'agit de l'unité dérivée cohérente SI reliée à la vitesse. Comme mentionné précédemment, l'ensemble cohérent des unités SI est d'une plus grande importance en physique, ce qui permet cette anticipation directe. Cependant, même en mathématiques, les étudiants devraient savoir que l'unité d'une vitesse est constituée d'une unité de distance divisée par une unité de temps, telle que le kilomètre par heure par exemple (même s'il s'agit d'une unité dérivée qui ne fait pas partie du SI). L'ordre de grandeur du résultat est un autre caractéristique pouvant être anticipée à partir du contexte physique, puisque le résultat se doit d'être (physiquement) réaliste. L'unité de mesure accompagnant le résultat joue également un rôle sur l'ordre de grandeur de ce dernier, notamment en mathématiques où l'ensemble cohérent des unités SI n'est pas d'une aussi grande importance. Cela a pour effet d'augmenter la présence de multiples et sous-multiples décimaux d'unités en mathématiques, c'est-à-

dire que des puissances de 10 (de 10^{-30} à 10^{30}) sont intégrées à même l'unité. Par exemple, un kilomètre correspond à 10^3 mètres, et donc l'ordre de grandeur de la valeur numérique du résultat ne serait pas le même si le résultat s'exprime en mètres ou en kilomètres (il différerait d'un facteur 1000 dans ce cas précis). En considérant les unités de mesure, les étudiants peuvent dépasser l'anticipation de caractéristiques du résultat et aller jusqu'à anticiper la planification du processus de résolution, puisque la manière dont les unités de mesure peuvent se combiner informe sur la manière dont les grandeurs physiques (possédant ces unités) peuvent se combiner, et donc, par extension, comment les équations dans lesquelles ces dernières figurent peuvent s'enchaîner (i.e. l'ordre encore hypothétique dans lequel les équations seront utilisées).

La preuve d'unités

En ce qui concerne les manipulations arithmétiques et algébriques se trouvant au cœur de la résolution de problèmes, deux options étaient offertes aux étudiants de physique au cégep où j'ai travaillé : ils effectuent leurs calculs avec des valeurs numériques seulement et accompagnent leurs résultats intermédiaires et final d'une preuve d'unités **ou** ils effectuent leurs calculs avec les valeurs numériques accompagnées de leur unité, conservant ainsi les unités à chaque étape des calculs. Il est intéressant de noter que cette deuxième option correspond à une proposition faite dans l'étude de Dorko et Speer (2015) sur les unités d'aire et de volume (voir la section 1.4.1), puisque les auteures suggèrent qu'obliger les étudiants à conserver les unités pendant les calculs serait un bon moyen de renforcer chez eux les liens entre la dimensionalité, les règles des exposants et les unités. Afin d'illustrer les deux options offertes aux étudiants, le tableau 2.12 contient un exemple du calcul de l'effet Doppler sur la fréquence d'une onde sonore se propageant dans l'air (à une vitesse de 340 m/s), émise avec une fréquence de 1000 Hz par un émetteur qui s'éloigne du récepteur avec une vitesse de 60 m/s, et où le récepteur tente de s'approcher de l'émetteur avec une vitesse de 35 m/s.

Tableau 2.12 Options de résolution offertes aux étudiants de physique

Formule de l'effet Doppler dans cette situation	
$f' = \left(\frac{v_s + v_R}{v_s + v_E} \right) f$ où v_s : vitesse du son v_R : vitesse du récepteur v_E : vitesse de l'émetteur f : fréquence émise par l'émetteur f' : fréquence perçue par le récepteur	
Option avec conservation des unités	Option avec preuve d'unités

$f' = \left(\frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{340 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 60 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \right) 1000 \text{ Hz}$ $f' = \left(\frac{375 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{400 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \right) 1000 \text{ Hz}$ $f' = 0,9375 \cdot 1000 \text{ Hz}$ $\mathbf{f' = 937,5 \text{ Hz}}$	$f' = \left(\frac{340 + 35}{340 + 60} \right) 1000 = 937,5$ $[f'] = \left(\frac{[v_s] + [v_R]}{[v_s] + [v_E]} \right) [f]$ $[f'] = \left(\frac{\frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{\text{m}}{\text{s}}} \right) \text{Hz} = \left(\frac{\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\frac{\text{m}}{\text{s}}} \right) \text{Hz} = \text{Hz}$ $\mathbf{f' = 937,5 \text{ Hz}}$
--	--

Pour clarifier, lorsque des crochets [] sont mis autour d'une grandeur physique, cela signifie que nous faisons référence à l'unité de cette grandeur physique; $[f]$ se lit comme l'unité de la fréquence émise par l'émetteur, c'est-à-dire le hertz (Hz). Encore une fois, nous sommes confrontés au fait que le symbolisme physique est visuellement similaire au symbolisme mathématique, mais diffère grandement au niveau sémantique; f' désigne communément la dérivée d'une fonction f , tandis que, dans ce contexte physique, il représente la fréquence **modifiée** par l'effet Doppler de l'onde sonore émise.

La preuve d'unités met en lumière une complexité des équations physiques, puisque ces dernières mettent en relation les valeurs des grandeurs physiques et que « la valeur d'une grandeur est généralement exprimée sous la forme d'un produit d'un nombre par une unité » (BIPM, 2019, p. 15); ce que nous pouvons percevoir comme entraînant deux types d'égalités, une entre les valeurs numériques des grandeurs physiques (les nombres) et l'autre entre les unités associées aux grandeurs physiques. Ainsi, la preuve d'unités présentée dans la colonne droite du tableau 2.12 doit se comprendre comme suit : l'unité de f' est la même que l'unité résultante de la division de la somme des unités de v_s et de v_R par la somme des unités de v_s et de v_E , multipliée par l'unité de f . Cette preuve d'unités particulière peut se décortiquer en trois étapes. Premièrement, lorsque nous additionnons deux vitesses, nous obtenons une vitesse, c'est-à-dire que la somme de deux quantités possédant l'unité **m/s** possède également l'unité **m/s**. Deuxièmement, lorsque nous divisons deux quantités possédant la même unité, nous obtenons simplement un nombre sans unité (ou d'unité « un »³³). Troisièmement, lorsque nous multiplions deux quantités possédant des unités différentes, nous obtenons une quantité dont l'unité est le produit des différentes unités, c'est-à-dire que la multiplication de l'unité « un » avec l'unité Hz résulte en l'unité Hz. La conclusion de cette preuve est que l'unité de f'

³³ Pour plus d'informations, voir les pages 24 et 39 du BIPM (2019).

doit être le hertz (Hz); ce qui correspond bel et bien à l'unité cohérente SI d'une fréquence (voir tableau 2.3).

Il est important de noter que les symboles des unités ne sont pas régis par les règles algébriques habituelles dans la preuve d'unités; l'interprétation physique (la dimension sémantique) prend le dessus sur le formalisme mathématique. C'est la raison que $\mathbf{m/s + m/s = m/s}$ (la somme de deux vitesses est également une vitesse), plutôt que $\mathbf{m/s + m/s = 2\ m/s}$ (aucune valeur numérique n'est considérée dans la preuve d'unités). De plus, seulement des termes possédant la même unité peuvent être additionnés ou soustraits. Il s'agit d'un principe qui échappe à beaucoup d'étudiants, comme le montrent les études de Rowland et Jovanoski (2004) et Rowland (2006)³⁴. Dans ces études, les étudiants devaient déterminer l'interprétation physique associée à chaque variable et facteur d'une équation différentielle de premier ordre, mais aucun d'entre eux ne semblait être conscient du fait que l'unité globale de chaque terme de l'équation doit être la même, c'est-à-dire que les unités doivent être cohérentes entre les termes composant l'équation (voir figure 2.8).

Figure 2.8 Cohérence des unités à travers une équation

$$\frac{dD}{dt} = 100 \text{ mg h}^{-1} - 0,01 \text{ mg}^{-1} \text{ h}^{-1} D^2$$

où D est la quantité de drogue (mg) dans un patient t heures (h) après avoir été administrée

$$\left[\frac{dD}{dt} \right] = \frac{[dD]}{[dt]} = \frac{\text{mg}}{\text{h}} = \mathbf{mg\ h^{-1}}$$

$$[100] = \mathbf{mg\ h^{-1}}$$

$$[0,01\ D^2] = [0,01][D]^2 = (\text{mg}^{-1} \text{ h}^{-1})(\text{mg})^2 = \mathbf{mg\ h^{-1}}$$

$$\left[\frac{dD}{dt} \right] = [100] = [0,01D^2]$$

Les unités qui y sont en jeu – le milligramme, l'heure, et des combinaisons de ces dernières – ne font pas partie de l'ensemble cohérent des unités SI, mais sont tout de même cohérentes à travers l'équation, puisque chaque terme possède la même unité, les milligrammes par heure (mg/h). La preuve d'unités peut être considérée comme une manifestation d'un contrôle sur les nombres et opérations, si nous la voyons comme

³⁴ Voir la section 1.4.2.

se concentrant sur la manipulation de symboles algébriques respectant des règles particulières (mais légèrement différentes des règles algébriques habituelles, impliquant ainsi des métaconnaissances). De plus, lorsque cette option est prise par les étudiants, ces derniers font préalablement leurs calculs avec seulement des nombres, c'est-à-dire que leurs calculs sont décontextualisés, demandant ainsi un contrôle sur les nombres et opérations.

La vérification

Dans ma pratique enseignante, j'encourageais les étudiants à effectuer une vérification à l'issue de leur résolution d'un problème, et même d'une partie d'un problème. Lorsqu'un résultat est obtenu, les étudiants peuvent en évaluer la vraisemblance comme forme de vérification. Notamment, les problèmes à résoudre en physique et les problèmes à contexte physique en mathématiques doivent (*a priori*) respecter les lois de la physique, c'est-à-dire qu'ils doivent être physiquement réalistes, ce qui inclut le résultat recherché. N'oublions pas que, dans le devis ministériel du programme collégial *Sciences de la nature*, il y a justement un critère de performance à ce sujet, dans les trois cours de physique, qui exige la « manifestation d'un jugement critique à l'égard de la vraisemblance des résultats » (MES, 2022, p. 34, p. 36, p. 38) de la part des étudiants. C'est la valeur de la grandeur physique obtenue dont les étudiants doivent juger de la plausibilité, c'est-à-dire le produit de la valeur numérique et de l'unité de la grandeur physique. Comme mentionné précédemment, la puissance de 10 intrinsèque à l'unité d'une grandeur physique – notamment les unités qui ne sont pas cohérentes (e.g. kilomètre) – ont un effet sur l'ordre de grandeur de la valeur numérique de celle-ci. Puisque l'unité et l'ordre de grandeur de la valeur numérique sont des caractéristiques pouvant être anticipées à propos de la grandeur physique demandée par le problème, elles peuvent servir comme points de vérification. L'étudiant peut vérifier que l'unité et l'ordre de grandeur de la valeur de son résultat correspond à ce qu'il avait anticipé. Sans anticipation préalable, l'étudiant peut du tout de même effectuer un retour sur sa représentation du problème ou sur l'énoncé afin de vérifier si son résultat concorde avec ces éléments.

Une vérification sur l'énoncé du problème, ou plus précisément une vérification basée sur le contexte physique auquel l'énoncé fait référence, peut se voir dans l'étude de Meredith et Marrongelle (2008), en didactique de la physique, qui porte sur les ressources mathématiques que les étudiants de physique possèdent et mobilisent afin de s'aider à résoudre des problèmes d'électrostatique. L'énoncé d'un des problèmes utilisés va comme suit : « Consider [a] bar of charge with a charge density of $5 \mu\text{C/m}$ [microcoulomb by meter] and 0,5 m length. What is the electrical field 3 m directly to the left of the bar? » (p. 572). La résolution de ce problème requiert une intégration, afin d'additionner la contribution de chaque bout infinitésimal de la barre de charge au champ électrique (total) au point demandé. Plusieurs étudiants

ont pris comme intégrande l'expression³⁵ du champ électrique généré par une charge ponctuelle $\left(\frac{k q}{r^2}\right)$ et l'ont simplement multiplié par l'élément infinitésimal dr . Cependant, l'utilisation de cet intégrande $\left(\frac{k q}{r^2} dr\right)$ résulte en une réponse erronée, ce qui peut être constaté par une preuve d'unités, comme l'est illustré dans la figure 2.9.

Figure 2.9 Preuve d'unités d'une équation erronée

$$E = \int \frac{k q}{r^2} dr$$

$$\frac{[k][q]}{[r]^2} [dr] = \frac{(N m^2 C^{-2}) C}{m^2} m = \frac{N m}{C}$$

$$[E] = \frac{N}{C} \neq \frac{N m}{C}$$

Les auteures remarquent que considérer les unités permet de remarquer que le sens physique de l'intégrande a été modifié³⁶ par la multiplication de l'élément infinitésimal dr (m). Elles soulèvent également une différence entre les disciplines physique et mathématiques autour des unités de mesure; réitérant nos propos amenés à la section 1.3.1.

In mathematics courses typically units are often not considered, however, in calculating the electric field, for example, it is essential to distinguish between charge and charge density; one gives the correct units and the other does not. (Meredith et Marrongelle, 2008, p. 576)

Ainsi, entre deux grandeurs physiques connexes (ici, la charge et la densité de charge), la grandeur physique correcte peut être déterminée en considérant les unités de mesure, tel que par la preuve d'unités.

³⁵ Dans laquelle k représente la constante de Coulomb ($N m^2 C^{-2}$), q représente la charge électrique (C) et r représente la distance entre la charge et un point de l'espace (m); le champ électrique est représenté par E .

³⁶ La manière appropriée d'utiliser l'expression d'un champ électrique émise par une charge ponctuelle dans le contexte du problème est de substituer la charge ponctuelle q par l'élément infinitésimal de charge dq , qui correspond à une densité linéique de charge – représentée par λ (C/m) – multipliée par un élément infinitésimal de longueur dr (m).

Cependant, nous tenons à préciser qu'il est possible que l'étudiant fasse une vérification sur de fausses prémisses, s'il s'appuie sur une anticipation inadéquate ou une représentation erronée du problème (et de son contexte physique).

La sensibilité à la contradiction

Reprenons l'exemple avec l'effet Doppler présenté dans le tableau 2.12, afin d'illustrer comment la présence des unités – peu importe l'option prise par les étudiants – peut permettre à ces derniers d'être sensibles à la contradiction, et par le fait même de percevoir des erreurs. Supposons qu'un étudiant fasse les manipulations algébriques suivantes (tableau 2.13) afin d'isoler la vitesse de l'émetteur (inconnue) avant d'y substituer les valeurs des grandeurs physiques.

Tableau 2.13 Manipulations fictives d'un étudiant

Formule de l'effet Doppler dans cette situation
$f' = \left(\frac{v_s + v_R}{v_s + v_E} \right) f$ où $v_s = 340 \text{ m/s}$ $v_R = 60 \text{ m/s}$ $v_E = ?$ $f = 1\,000 \text{ Hz}$ $f' = 937,5 \text{ Hz}$
Manipulations algébriques
$f' = \left(\frac{v_s + v_R}{v_s + v_E} \right) f$ $f' = \frac{(v_s + v_R)}{(v_s + v_E)} f$ $f' v_s + v_E = (v_s + v_R) f$ $v_E = (v_s + v_R) f - f' v_s$

Que l'étudiant opte pour la conservation des unités ou la preuve d'unités pour réaliser ses calculs – suivant les manipulations algébriques (d'une équation physique) effectuées – les deux options peuvent lui mettre de détecter des contradictions, lorsque l'unité résultante ne correspond pas à l'unité attendue. Une contradiction peut indiquer la présence d'une ou plusieurs erreurs, permettant donc de percevoir leur présence. Continuons ainsi avec notre exemple.

Tableau 2.14 Suite de la résolution fictive d'un étudiant (tableau 2.13)

Option avec conservation des unités	Option avec preuve d'unités
$v_E = \left(340 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) 1000 \text{ Hz} - 937,5 \text{ Hz} \cdot 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $v_E = \left(375 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) 1000 \text{ Hz} - 318\,750 \text{ Hz} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $v_E = 375\,000 \text{ Hz} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} - 318\,750 \text{ Hz} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $v_E = 56\,250 \text{ Hz} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $[v_E] = \frac{\text{m}}{\text{s}} \neq \text{Hz} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$[v_E] \stackrel{?}{=} ([v_s] + [v_R])[f] - [f][v_s]$ $\frac{\text{m}}{\text{s}} \stackrel{?}{=} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \text{Hz} - \text{Hz} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\frac{\text{m}}{\text{s}} \stackrel{?}{=} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{Hz} - \text{Hz} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\frac{\text{m}}{\text{s}} \neq \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{Hz}$

Un autre type de contradiction survient lorsque des unités différentes sont amenées à être additionnées ou soustraites, c'est-à-dire lorsque la cohérence des unités à travers une expression (ou équation) algébrique n'est pas respectée. Tel que mentionné précédemment, les études de Rowland et Jovanoski (2004) et de Rowland (2006) ont montré que les étudiants ne semblaient pas être conscients que les unités doivent être cohérentes à travers les termes d'une équation. Rowland (2006) ajoute que cette situation empêche l'utilisation de ce fait « to help them [the students] understand differential equations in modelling contexts » (Rowland, 2006, p. 557). La cohérence des unités à travers une équation – ou plutôt leur incohérence – peut également permettre de percevoir la présence d'erreurs : « while an equation can be wrong if the units are right, an equation **can't be right** if the units are wrong » (p. 553, notre accentuation). Être sensible à la contradiction ne garantit pas cependant d'être en mesure de la dépasser. Une manière de dépasser la contradiction consiste à rejeter le résultat ou l'anticipation du résultat et à identifier la source de la contradiction. Les unités faisant partie de l'ensemble cohérent des unités SI se comportent exactement comme les grandeurs physiques, donc identifier une incompatibilité entre ces unités peut conduire à l'identification des grandeurs physiques – ou des manipulations sur celles-ci – problématiques.

Le discernement

En physique, selon mon expérience, le discernement d'une procédure consiste communément en la sélection d'équations physiques et de leur enchaînement. Dans l'étude de Roorda, Vos et Goedhart (2013), issue de la didactique de la physique, se trouve un bel exemple où tenir compte des unités de mesure aurait permis à

une participante de discerner l'équation adéquate³⁷. Puisque l'étude visait à comprendre les mécanismes sous-jacents au transfert de connaissance entre les mathématiques et la physique (afin que les enseignants des deux disciplines puissent être en mesure d'offrir des opportunités aux étudiants de développer une compréhension plus interreliée des concepts), les problèmes qui ont été exploités font appel à des contextes physiques. Pendant la résolution d'un tel problème, portant sur la chute d'une balle sous l'effet de la gravité, une des étudiantes participant à l'étude – avec le pseudonyme de Elly – mentionne qu'elle n'arrive pas à reconstruire quelle équation est la bonne entre $v = s \cdot t$ et $s = v \cdot t$ (s : distance, v : vitesse, t : temps). Le tableau 2.15 illustre la manière dont la considération des unités, par le biais d'une preuve d'unités, aurait facilement permis à Elly de faire cette détermination.

Tableau 2.15 Preuve d'unités pour choisir entre deux équations

$v = s \cdot t$	$s = v \cdot t$
$[v] \stackrel{?}{=} [s][t]$ $\frac{\text{m}}{\text{s}} \stackrel{?}{=} \text{m} \cdot \text{s}$ $\frac{\text{m}}{\text{s}} \neq \text{m} \cdot \text{s}$	$[s] \stackrel{?}{=} [v][t]$ $\text{m} \stackrel{?}{=} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{s}$ $\text{m} \stackrel{\checkmark}{=} \text{m}$

Nous voyons bien que l'équation $v = s \cdot t$ manifeste une incohérence à travers les unités de mesure, ce qui signifie qu'il ne s'agit pas d'une équation (physiquement) valide. Au contraire, les unités présentes dans l'équation $s = v \cdot t$ sont cohérentes à travers celle-ci, soutenant ainsi sa validité. Les unités utilisées dans l'exemple du tableau 2.15 sont issues de l'ensemble cohérent des unités SI, mais d'autres unités de distance, temps et vitesse auraient également permis à Elly de reconstruire le lien entre ces grandeurs. Penser à l'unité de vitesse prépondérante dans la vie courante, les kilomètres par heure, aurait été suffisant pour reconnaître que la vitesse est le quotient d'une distance (ici en kilomètres) et d'une durée (ici en heures). Comme mentionné précédemment, porter attention à comment les unités peuvent se combiner peut permettre de se faire une idée sur les équations physiques pertinentes au problème et leur enchaînement probable. Une connaissance approfondie du SI, notamment de l'expression en unités de base (tableau 2.2) de l'ensemble cohérent des unités SI, facilite ce phénomène, puisque toutes les unités dérivées cohérentes sont des produits

³⁷ Aucune mention d'unités de mesure ne se trouve dans cette étude; c'est nous qui amenons l'idée que la présence d'unités aurait pu être utile.

de puissances d'unités de base avec un facteur numérique d'un (1). À titre d'exemple, connaître l'expression du newton (l'unité associée à la force), et celle du pascal (l'unité associée à la pression), en unités de base permet de déduire que, pour obtenir une **pression** à partir d'une **force**, il faut diviser cette dernière par une **aire** (dont l'unité est le mètre carré); ainsi une pression correspond à une force appliquée sur une surface.

Figure 2.10 Dédution du lien entre la force et la pression

$$\begin{aligned} \text{N} &= \text{kg m s}^{-2} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \\ \text{Pa} &= \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2} = \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2} \\ \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \div \text{m}^2 &= \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2} \\ \mathbf{N \div m^2 = Pa} \end{aligned}$$

Ce n'est pas seulement les unités de mesure qui peuvent nous renseigner sur les liens entre les grandeurs physiques; les grandeurs physiques peuvent nous renseigner sur les unités de mesure. En physique au collégial, une feuille aide-mémoire – contenant les équations physiques vues en classe – est généralement fournie aux étudiants lors de leurs examens. Puisque les unités cohérentes se comportent exactement comme les grandeurs physiques auxquelles elles sont associées, il est possible, par exemple, d'utiliser les équations fournies afin de reconstruire l'expression en unités de base de certaines unités dérivées cohérentes; la figure 2.11 en contient un exemple.

Figure 2.11 Expression en unités de base du newton

$$\begin{aligned} &(2^{\text{e}} \text{ loi de Newton}) \\ &F = m \cdot a \\ &[F] = [m][a] \\ &\text{N} = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Ce qui est montré dans la figure ci-dessus ajoute une nuance aux propos de Van Heuvelen et Maloney (1999) sur l'équation physique, puisque, non seulement elle décrit un phénomène physique (en y encodant les informations qui sont reliées au phénomène), elle peut également être utilisée afin d'obtenir des informations sur la construction d'unités dérivées (cohérentes).

2.4.3 Les unités et le contrôle restreignant

Les étudiants peuvent également posséder des croyances nuisibles au sujet des unités de mesure, ce qui est appelé le **contrôle restreignant** par Rhéaume (2020). Des études en didactique des mathématiques abordées dans la section 1.4, nous pouvons relever deux croyances de ce type. Dans Dorko et Speer (2015), plusieurs étudiants ont explicitement mentionné que l'unité présente dans la réponse doit être la même que celle mentionnée dans l'énoncé du problème. Dans Rowland et Jovanoski (2004) et Rowland (2006), plusieurs étudiants pensent que les unités n'ont pas besoin d'être cohérentes; que les différents termes, reliés par addition ou soustraction, d'une équation n'ont pas besoin d'avoir la même unité. Cet aspect du contrôle, au contraire des contrôles structural et opérationnel, possède une connotation intrinsèquement négative et il ne semble pas être pertinent de spéculer à son sujet, puisqu'il est entièrement dépendant des pensées – qui ne sont pas forcément logiques – des étudiants résolvant les problèmes.

2.5 Synthèse du chapitre

Le Système international d'unités, qui est d'intérêt dans ce mémoire, comprend « l'ensemble des unités cohérentes et les multiples et sous-multiples formés à l'aide de préfixes » (BIPM, 2019, p. 27). Cependant, l'utilisation de certaines unités en dehors du SI est tout de même acceptée avec celui-ci (tableau 2.5). En ce qui concerne un contrôle ancré dans les unités de mesure présentes dans les problèmes mathématiques à contexte physique, l'ensemble cohérent des unités SI est essentiel, car « le terme "cohérent" signifie que les équations reliant les valeurs numériques des grandeurs prennent exactement la même forme que les équations reliant les grandeurs proprement dites » (BIPM, 2019, p. 25). Prenant appui sur différentes études qui se sont attardées au contrôle en résolution de problèmes, nous avons pu dégager l'importance de ne pas considérer les composantes du contrôle comme étant des entités complètement séparées et indépendantes, mais comme étant interreliées et s'imbriquant les unes dans les autres lors de la résolution de problèmes. En outre, nous avons vu que les caractéristiques du problème à résoudre ont un effet notable sur les composantes du contrôle qui seront sollicitées pendant la résolution dudit problème. Cet aspect est crucial pour ce mémoire, puisque nous cherchons à étudier les opportunités qu'offrent les problèmes mathématiques à contexte physique d'un contrôle sur l'activité mathématique passant par les unités de mesure. Nous avons abouti à une conceptualisation théorique inédite d'un contrôle ancré dans les unités de mesure SI, qui s'appuie sur le contrôle au sens de Rhéaume (2020) et sur l'introspection de ma pratique d'enseignante de physique soutenue par des études relevant de la didactique des mathématiques et de la didactique de la physique. Le tableau 2.16 ci-dessous rassemble les déclinaisons potentielles du contrôle au sens de Rhéaume (2020) lorsque passant par les unités de mesure. Il est important de rappeler que le contrôle sémantique, une

composante du contrôle au sens de Saboya (2010), a été assimilée dans les composantes du contrôle structural par Rhéaume (2020).

Tableau 2.16 Le contrôle par les unités de mesure

Contrôle structural		
<i>Interprétation</i>		Les unités de mesure relient les valeurs numériques des grandeurs à leur signification physique (contextuelle), pouvant ainsi faciliter l'interprétation des grandeurs en jeu dans le contexte physique du problème.
<i>Structuration et opérationnalisation de la représentation</i>		Les relations entre les grandeurs physiques sont généralement pré-établies par les équations physiques (données ou à sélectionner) et les relations entre les grandeurs physiques se reflètent dans les relations entre leur unité de mesure (cohérente).
Contrôle opérationnel		
<i>Anticipation</i>	<i>sur le résultat</i>	L'unité de la grandeur physique recherchée peut être anticipée et a une influence sur l'ordre de grandeur possible de la valeur numérique de cette grandeur physique.
	<i>sur la planification de la résolution</i>	Les unités de mesure (cohérentes) permettent d'inférer la manière dont les grandeurs physiques peuvent se combiner et donc sur l'enchaînement des équations physiques (données ou à sélectionner).
<i>Vérification</i>	<i>par l'évaluation de la vraisemblance d'un résultat</i>	L'unité de mesure du résultat a une influence sur l'ordre de grandeur de sa valeur numérique et doit ainsi être considérée afin de porter un jugement sur le réalisme physique du résultat en contexte.
	<i>par un retour sur la représentation ou l'anticipation du problème</i>	L'unité de mesure obtenue à l'issue de la résolution peut être confrontée à celle anticipée; l'ordre de grandeur de la valeur numérique anticipé peut également être confronté à la valeur numérique du résultat obtenu.
	<i>par un retour à des fondements mathématiques</i>	-----
<i>Sensibilité à la contradiction</i>		La présence d'unités permet de veiller sur le processus de résolution en permettant de percevoir plus facilement les contradictions par le biais de la cohérence des unités à travers les différents termes des équations (ou expressions).
<i>Dépassement de la contradiction</i>	<i>par un rejet du résultat et identification de la source</i>	Les unités faisant partie de l'ensemble cohérent des unités SI se comportent exactement comme les grandeurs physiques, donc identifier une contradiction entre certaines unités entraîne l'identification des grandeurs problématiques (possédant ces unités).

	<i>par un changement de cadre</i>	-----
	<i>par un changement de point de vue</i>	-----
<i>Discernement</i>	En physique, discerner une procédure correspond fréquemment à sélectionner les équations (lois, formules) appropriées et leur enchaînement, ce qui peut être aidé par une connaissance des unités de mesure et de leur manière de se combiner.	
<i>Contrôle sur les nombres et opérations</i>	Dans le cas d'une preuve d'unités, les unités de mesure sont traitées comme des symboles algébriques respectant des règles particulières (e.g. seulement des unités identiques peuvent être additionnées/soustraites).	
<i>Métaconnaissances</i>	Une connaissance des expressions en unités de base des unités dérivées (cohérentes) facilite la détermination de la manière dont les unités peuvent se combiner.	
Contrôle restreignant		
<i>Croyances entravant l'activité mathématique</i>	(1) Les unités de mesure n'ont pas besoin d'être cohérentes à travers les termes d'équation physique. (2) L'unité de mesure de la réponse du problème est la même que celle présente dans l'énoncé.	

La conceptualisation d'un contrôle ancré à la présence d'unités de mesure élaborée à la section 2.4, dont la synthèse est présentée dans le tableau 2.16, nous servira à orienter notre analyse de problèmes mathématiques à contexte physique afin d'apporter des éléments de réponses aux questions de recherche suivantes :

- *Quelles opportunités de contrôle sur l'activité mathématique l'usage des unités de mesure offre-t-il lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique?*
- *Quel(s) type(s) de contrôle sera(ont) ainsi sollicité(s)?*

CHAPITRE 3

MÉTHODOLOGIE

Ce chapitre contient la description et la justification des éléments méthodologiques sélectionnés pour mener à bien la présente recherche, c'est-à-dire d'explorer les opportunités de contrôle sur l'activité mathématique qu'offrent la présence d'unités de mesure lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique. Une synthèse des chapitres précédents ouvre ce présent chapitre et mène à une reformulation des questions de recherche. Le dispositif méthodologique nous apparaissant le plus pertinent afin d'apporter des éléments de réponse aux nouvelles questions de recherche consiste à analyser un manuel de mathématiques. Le choix du manuel est ensuite justifié, suivi de la présentation de ce dernier. Puis, les opérations analytiques que nous avons choisies d'appliquer sur le manuel sont décrites, ainsi que la manière dont nous avons sélectionné le contenu à analyser au sein de ce manuel. Enfin, dans l'optique de répondre aux questions de recherche, l'application des opérations analytiques sur le contenu sélectionné du manuel est détaillée.

3.1 Retour sur les questions de recherche

Débutons ce chapitre par une synthèse de ce que nous avons vu jusqu'à présent. Nous avons commencé par dresser un portrait de la formation collégiale, ce qui nous a permis d'identifier que l'approche programme est un tenant principal de celle-ci. Dans le programme *Sciences de la nature* – revisité par le MES en 2021 – cette approche s'incarne par l'interdisciplinarité, ce qui nous a amené à explorer comment se manifeste cette dernière du côté des cours de mathématiques. Nous avons ainsi trouvé que les liens interdisciplinaires semblent les plus forts entre les cours de mathématiques et les cours de physique. Finalement, en approfondissant ces liens, nous avons réalisé que les cours de mathématiques font usage de problèmes possédant un contexte physique – c'est-à-dire des problèmes mathématiques à contexte physique – tandis que les cours de physique s'appuient sur le formalisme et la rigueur mathématique, notamment en ce qui concerne la résolution de problèmes. Suivant le constat de cette proximité entre la résolution de problèmes en mathématiques et en physique, nous nous sommes penchées sur les différences qui existent tout de même entre ces types de résolution. Entre autres, nous avons abordé la dimension sémantique des nombres et symboles algébriques, puisque, en physique, ces derniers sont imbus d'un sens physique indiquant leur dérivation du monde naturel qui se manifeste explicitement par la présence d'unités de mesure.

Cette constatation nous a donc amené à nous attarder à la présence d'unités de mesure au Québec, d'abord dans le milieu scolaire – dans les disciplines mathématiques et physique – puis dans la vie quotidienne. Nous avons poursuivi cette exploration des unités de mesure par la consultation d'études en didactique des

mathématiques. Sans surprise, nous avons vu que certaines difficultés ont été relevées autour des unités de mesure chez les étudiants de mathématiques dans ces études. Mais plus important encore, nous avons observé que les auteurs de ces études font allusion à l'utilité des unités de mesure pour favoriser une meilleure emprise – un meilleur *contrôle* – des étudiants sur leur activité mathématique lors de la résolution de problèmes. Cette veine nous est apparue intéressante, alors nous avons enchaîné en détaillant le Système international d'unités, qui est le système d'unités le plus prévalent dans le milieu scolaire québécois, ainsi que mondialement dans les disciplines STIM, avant nous concentrer sur la notion de *contrôle* (sur l'activité mathématique en résolution de problèmes). Nous avons donc d'abord détaillé la conceptualisation initiale du contrôle, telle qu'établie par Saboya (2010), puis la conceptualisation offerte par Rhéaume (2020) – qui se base sur celle de Saboya (2010) – qui constitue notre appui théorique principal. Effectuer ensuite un tour d'horizon des études utilisant la notion de contrôle nous a permis d'identifier d'autres aspects la concernant qui sont particulièrement pertinents dans le cadre de ce mémoire et d'aborder des exemples concrets d'analyses de résolution de problèmes menées sous l'optique du contrôle. Suite à notre solide compréhension du contrôle, nous nous sommes affairées à élargir sa conceptualisation pour l'ancrer à la présence d'unités de mesure, afin de pouvoir explorer l'utilité de ces dernières comme outil de contrôle lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique. Donc, par le biais de l'introspection de ma pratique d'enseignante de physique, soutenue par la consultation d'études en didactique de la physique et en didactique des mathématiques, nous avons formulé les déclinaisons possibles qu'un contrôle ancré dans la présence d'unités de mesure pourraient prendre (tableau 2.16); ce qui nous servira de point de départ lors de l'analyse du potentiel des unités comme outil de contrôle lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique.

Due à la nature exploratoire de notre recherche, il nous semble raisonnable de s'intéresser au cours de mathématiques habituellement suivi par les étudiants en premier dans le programme *Sciences de la nature*, c'est-à-dire le cours de calcul différentiel; d'autant plus qu'un grand manque de contrôle a été constaté chez des étudiants lors de la résolution d'un problème non routinier de calcul différentiel (Dufour et Jeannotte, 2013). Il nous semble donc préférable de se concentrer sur les problèmes mathématiques à contexte physique communément offerts aux étudiants suivant le cours de calcul différentiel. Ainsi, nous avons décidé d'analyser les problèmes mathématiques à contexte physique contenus dans un manuel du cours collégial de calcul différentiel, puisque « selon des travaux américains et européens (Alverman, 1989; Armento, 1986; Gentil et Verdon, 1995; Hummel, 1988; Zahorik, 1991), le manuel scolaire détermine, pour une large part, les activités réalisées en classe » (Lebrun et Niclot, 2009); ce qui nous amène à préciser nos questions de recherche.

- *Comment les unités apparaissent-elles dans les problèmes mathématiques à contexte physique offerts aux étudiants par un manuel du cours collégial Calcul différentiel?*
- *Quelles opportunités de contrôle (et de quels types) sur l'activité mathématique des étudiants l'usage des unités de mesure offre-t-il lors de la résolution de problèmes à contexte physique (routiniers de niveau collégial)?*

3.2 Choix et présentation du manuel sélectionné

Afin de répondre aux questions de recherche énoncées ci-haut, le manuel *Calcul différentiel : Charron-Parent*³⁸ des auteurs S. Fortin et G. Poliquin (2023) a été sélectionné. Plusieurs raisons ont motivé ce choix.

3.2.1 Justification du choix du manuel *Calcul différentiel : Charron-Parent*

Tel qu'établi précédemment, notre intérêt sur les problèmes mathématiques à contexte physique provient initialement du fait que l'approche programme est un tenant principal de la formation collégiale au Québec qui se manifeste par l'interdisciplinarité dans le programme *Sciences de la nature* (revisité en 2021). Le manuel *Calcul différentiel : Charron-Parent* traite explicitement, dans ses premières pages, de la manière dont l'approche programme y est incarnée.

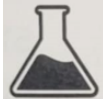
L'**approche programme** est incarnée dans les exemples, qui traitent de sujets variés, puis dans les exercices, qui touchent plusieurs champs d'études du domaine des sciences naturelles et des sciences humaines. Pour cette édition, la quantité d'applications des mathématiques abordées dans l'ouvrage a été bonifiée. Les domaines d'études ciblés sont l'administration, la biologie, la chimie, la géométrie, la physique et les sciences humaines. (Fortin et Poliquin, 2023, p. iii)

Comme nous pouvons le voir, leur vision de l'approche programme est cohérente avec l'élément de compétence « effectuer l'analyse [par l'application du calcul différentiel] de problèmes liés aux sciences de la nature » (MES, 2022, p. 24) contenu dans le devis ministériel du programme *Sciences de la nature*. En effet, ce manuel contient des exercices d'application des notions mathématiques abordées à travers celui-ci qui relèvent de six champs d'études du domaine des sciences naturelles et des sciences humaines. Un pictogramme spécifique est associé à chacun des champs d'études et accompagne les exercices s'y rapportant, permettant une identification rapide. Les pictogrammes en question et leur signification sont présentés dans le tableau 3.1. Deux pictogrammes supplémentaires sont également utilisés à travers le

³⁸ Les auteurs originaux du manuel *Calcul différentiel* sont G. Charron et P. Parent.

manuel lorsque les exercices nécessitent un outil technologique lors de leur résolution et lorsque les exercices demandent de démontrer un résultat (mathématique) abordé précédemment dans le chapitre.

Tableau 3.1 Pictogrammes utilisés dans *Calcul différentiel : Charron-Parent*

EXERCICE	PICTOGRAMME	
Champ d'application	Description	Image
Administration	Graphe de croissance	
Biologie	Feuille d'arbre	
Chimie	Erlenmeyer rempli de liquide	
Géométrie	Cube	
Physique	Deux rouages	
Sciences humaines	Trois silhouettes humaines	
Caractéristique	Description	Image
Exercice se réalisant à l'aide d'un outil technologique	Symbole de <i>Wi-Fi</i>	
Démonstration d'un résultat vu dans le chapitre	Flèche indiquant un retour	

La présence de pictogrammes identifiant le champ d'application des problèmes (mathématiques) contenus dans le manuel sélectionné pour l'analyse est pratique, puisqu'il suffit de repérer les deux rouages afin de facilement identifier tous les problèmes possédant un contexte physique. De plus, le manuel *Calcul différentiel : Charron-Parent* en est à neuvième édition, ce qui suggère qu'il s'agit d'un manuel prisé et en grande utilisation par les enseignants au niveau collégial.

3.2.2 Description du manuel

Le manuel *Calcul différentiel : Charron-Parent* est composé de neuf chapitres et d'un corrigé contenant les réponses de tous les exercices (à part quelques exceptions, dont la solution complète se retrouve sur leur plateforme numérique). Le premier chapitre du manuel – noté chapitre 0 – est consacré à « la révision de notions essentielles à l'étude du calcul différentiel » (Fortin et Poliquin, 2023, p. 3) et possède une structure légèrement différente des autres chapitres (voir tableau 3.2). Les chapitres 1 à 8 possèdent une structure identique. Chaque chapitre débute par une *perspective historique* portant sur une des notions abordées dans celui-ci. Il est ensuite divisé en sections (entre une et six selon le chapitre) et en sous-sections (entre zéro et cinq par section). Une série d'exercices se trouve à la fin de chacune des sections afin de « mettre en pratique individuellement les notions vues dans les différentes parties du chapitre » (Fortin et Poliquin, 2023, p. iii). La dernière partie de chaque chapitre est consacrée à des *activités d'apprentissage*. Il y a trois types d'activités : une révision des concepts – des notes trouées à remplir par les étudiants – des exercices récapitulatifs, et des problèmes de synthèse, qui permettent « de mettre plusieurs concepts en application » (Fortin et Poliquin, 2023, p. iii). Les auteurs font ainsi une distinction entre ce qu'ils considèrent un exercice (récapitulatif ou non) et un problème (de synthèse). Cependant, il est important de noter que nous utilisons le terme *problème* afin de désigner un exercice ou un problème, car cette distinction³⁹ importe peu pour la présente recherche. Dans le tableau 3.2 ci-dessous sont regroupés les numéros et titres des chapitres et sections composant le manuel.

Tableau 3.2 Structure du manuel *Calcul différentiel : Charron-Parent*

CHAPITRES		SECTIONS	
0	Notions algébriques et fonctions (p. 2-81)	0.1	Ensembles (p. 4-8)
		0.2	Exposants et radicaux (p. 9-14)
		0.3	Polynômes (p. 15-22)
		0.4	Fractions rationnelles (p. 22-26)
		0.5	Expressions algébriques (p. 26-28)
		0.6	Résolution d'équations et d'inéquations (p. 28-39)
		0.7	Fonctions algébriques et domaine (p. 39-45)
		0.8	Opérations sur les fonctions et fonctions réciproques (p. 46-48)
		0.9	Fonctions algébriques particulières et fonctions définies par parties (p. 48-58)
		0.10	Fonctions exponentielles et fonctions logarithmiques (p. 59-66)
		0.11	Fonctions trigonométriques et fonctions trigonométriques réciproques (p. 66-81)

³⁹ Plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques différencient un problème d'un exercice (e.g. voir les travaux de Fernando Hitt).

1	Limites et continuité (p. 82-155)	Perspective historique (p. 84)	
		1.1	Approches numérique, graphique et algébrique de la notion de limite finie (p. 85-102)
		1.2	Indétermination de la forme 0/0 (p. 102-108)
		1.3	Limite infinie, limite à l'infini et asymptotes (p. 108-131)
		1.4	Continuité (p. 132-142)
		Activités d'apprentissage (p. 143-155)	
2	Définition de la dérivée (p. 156-201)	Perspective historique (p. 158)	
		2.1	Taux de variation moyen (p. 159-168)
		2.2	Taux de variation instantané et dérivée d'une fonction en un point (p. 168-184)
		2.3	Fonction dérivée (p. 184-191)
		Activités d'apprentissage (p. 192-201)	
3	Dérivée de fonctions algébriques et dérivation implicite (p. 202-255)	Perspective historique (p. 204)	
		3.1	Dérivée de fonctions constantes, de la fonction identité et de fonctions de la forme x^r , où $r \in \mathbb{R}$ (p. 205-213)
		3.2	Dérivée de sommes, de différences, de produits et de quotients de fonctions (p. 213-228)
		3.3	Dérivée de fonctions composées et dérivées successives de fonctions (p. 229-238)
		3.4	Dérivation implicite (p. 239-247)
		Activités d'apprentissage (p. 248-255)	
4	Taux de variation (p. 256-305)	Perspective historique (p. 258)	
		4.1	Taux de variation instantanés (p. 259-281)
		4.2	Taux de variation liés (p. 281-290)
		Activités d'apprentissage (p. 291-305)	
5	Analyse d'une fonction algébrique et règle de L'Hospital (p. 306-409)	Perspective historique (p. 308)	
		5.1	Maximum, minimum, théorème des valeurs extrêmes et nombres critiques (p. 309-321)
		5.2	Théorèmes d'analyse pour les fonctions continues (p. 321-331)
		5.3	Croissance, décroissance et test de la dérivée première (p. 331-352)
		5.4	Concavité, points d'inflexion et test de la dérivée seconde (p. 353-370)
		5.5	Règle de L'Hospital (p. 371-380)
		5.6	Analyse d'une fonction algébrique (p. 380-394)
		Activités d'apprentissage (p. 395-409)	
6	Problèmes d'optimisation (p. 410-439)	Perspective historique (p. 412)	
		6.1	Résolution de problèmes d'optimisation (p. 413-430)
		Activités d'apprentissage (p. 431-439)	
7		Perspective historique (p. 442)	

8	Fonctions exponentielles et logarithmiques (p. 440-485)	7.1	Calcul de limites et dérivée des fonctions exponentielles (p. 443-453)
		7.2	Calcul de limites et dérivée des fonctions logarithmiques (p. 453-462)
		7.3	Applications de la dérivée à des fonctions exponentielles et logarithmiques (p. 463-475)
		Activités d'apprentissage (p. 476-485)	
	Fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques (p. 486-556)	Perspective historique (p. 488)	
		8.1	Calcul de limites et dérivée des fonctions sinus et cosinus (p. 489-501)
		8.2	Calcul de limites et dérivée des fonctions tangente, cotangente, sécante et cosécante (p. 502-513)
		8.3	Calcul de limites et dérivée des fonctions trigonométriques réciproques (p. 513-524)
		8.4	Applications de la dérivée à des fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques (p. 525-541)
		Activités d'apprentissage (p. 542-556)	

Deux types de rubriques parsèment les chapitres; les rubriques *Il y a environ...* et *Stratégie de résolution*. Les rubriques *Il y a environ...* portent sur certains mathématiciens du passé ou abordent « l'origine de l'utilisation de certains outils mathématiques » (Fortin et Poliquin, 2023, p. iii). Ces rubriques sont généralement constituées d'un paragraphe de texte accompagné (ou non) d'une image ou d'un schéma. Les rubriques *Stratégie de résolution* contiennent, comme son nom l'indique, des stratégies de résolution pouvant aider les étudiants à résoudre certains types de problèmes, telles que « des arbres décisionnels ou des listes d'étapes » (p. iii).

3.3 Choix méthodologiques

Afin de répondre aux questions de recherche⁴⁰, qui portent sur la manière dont certaines informations apparaissent dans un manuel scolaire et sur comment des informations du manuel peuvent être perçues par un lecteur, nous avons décidé de réaliser une analyse de contenu sur le manuel sélectionné *Calcul différentiel : Charron-Parent* (voir section 3.2). L'analyse de contenu, ainsi que les opérations analytiques découlant de cette dernière qui seront menées sur le manuel, sont décrites dans les prochaines sections.

⁴⁰ (1) Comment les unités apparaissent-elles dans les problèmes mathématiques à contexte physique offerts aux étudiants par un manuel du cours collégial *Calcul différentiel*? (2) Quelles opportunités de contrôle (et de quels types) sur l'activité mathématique des étudiants l'usage des unités de mesure offre-t-il lors de la résolution de problèmes à contexte physique (routiniers de niveau collégial)?

3.3.1 Analyse de contenu

Différents chercheurs ont proposé une définition de l'analyse de contenu. La définition la plus complète que nous avons trouvée est celle offerte par Bardin (2013), pour qui l'analyse de contenu désigne

un ensemble de techniques d'analyse des communications visant, par des procédures systématiques et objectives de description du contenu des messages, à obtenir des indicateurs (quantitatifs ou non) permettant l'inférence de connaissances relatives aux conditions de production/réception (variables inférées) de ces messages. (p. 47, en italique dans le texte)

Puisque le manuel scolaire est un type de communication écrite, le recours à l'analyse de contenu est un choix méthodologique pertinent. La totalité de la communication (le manuel) ne sera pas soumise à une analyse de contenu; seulement les énoncés des problèmes mathématiques à contexte physique seront analysés⁴¹. Bardin (2013) précise que la personne menant une analyse de contenu « a à sa disposition (ou crée) tout un jeu d'opérations analytiques, plus ou moins adaptées à la nature du matériau et au problème qu'[elle] cherche à résoudre » et qu'elle « peut en utiliser une ou bien plusieurs en complémentarité pour enrichir les résultats ou accroître leur validité, et ainsi prétendre à une interprétation finale fondée » (p. 47). Cependant, Bardin (2013) appuie que l'inférence de connaissances (les variables inférées) – à partir des opérations analytiques effectuées – est ce qui caractérise l'analyse de contenu; c'est ce qui la différencie de l'analyse documentaire par exemple⁴². Elle illustre ces propos grâce à une analogie entre une personne réalisant une analyse de contenu et un archéologue.

L'analyste est comme un archéologue. Il travaille sur des *traces* : les « documents » qu'il peut retrouver ou susciter [e. g. réponses à un sondage]. Mais ces traces sont la manifestation d'états, de données, de phénomènes. Il y a quelque chose à découvrir à travers et grâce à elles. (Bardin, 2013, p. 43)

Dans le cadre de notre recherche, l'attention est mise sur l'activité mathématique générée suite à la lecture de l'énoncé d'un problème mathématique à contexte physique, puisque nous cherchons à explorer les opportunités d'un contrôle par les unités de mesure s'y rattachant. En d'autres mots, nous cherchons à inférer des connaissances (les opportunités d'un contrôle par les unités) autour des conditions de réception (l'activité mathématique générée) d'un message (l'énoncé). Évidemment, les unités de mesure utilisées par les problèmes mathématiques à contexte physique et la manière dont elles apparaissent dans leur énoncé sont également pertinentes pour notre recherche.

⁴¹ La sélection des problèmes soumis à l'analyse sera abordée à la section 3.4.

⁴² Pour plus de détails, voir Bardin (2013), pages 50-51.

Selon Bardin (2013), les différentes phases de l'analyse de contenu s'organisent autour de trois pôles chronologiques : (1) la préanalyse, (2) l'exploitation du matériel et (3) le traitement des résultats, l'inférence et l'interprétation. La préanalyse contient typiquement « trois missions : *le choix des documents* à soumettre à l'analyse, la formulation [...] des *objectifs*, l'élaboration d'indicateurs sur lesquels s'appuiera l'interprétation terminale » (Bardin, 2013, p. 125-126, en italique dans le texte original). Dans notre cas, les objectifs de recherche ont été réitérés à la fin de la section 3.1 et le choix du document (manuel) à soumettre à l'analyse de contenu a été abordé à la section 3.2, tandis que le choix des problèmes mathématiques à contexte physique eux-mêmes sera traité à la section 3.4. Afin de réaliser nos objectifs et répondre aux questions de recherche, plusieurs opérations analytiques sont planifiées. La première opération analytique (détaillée dans la section 3.5) consiste en une description scrupuleuse des énoncés des problèmes sélectionnés qui sera menée autour de deux axes : (i) les notions mathématiques et physiques dont relèvent chaque problème et (ii) les unités de mesure utilisées et leur présentation. La deuxième opération consiste en une analyse catégorielle des sous-problèmes (les sous-questions des problèmes) selon la demande mathématique de chacun. La nature de l'analyse catégorielle sera abordée dans la section 3.3.2; son application dans le cadre de la présente recherche sera explicitée dans la section 3.6. La dernière opération consiste en une analyse *a priori* sous l'angle d'un contrôle par les unités de mesure de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique. La nature de l'analyse *a priori* sera abordée dans la section 3.3.3 et les indicateurs qui l'orienteront ont été élaborés lors du cadre conceptuel. En effet, nous avons préalablement fait le travail inédit d'élargir la conceptualisation du contrôle afin de l'ancrer à la présence d'unités de mesure lors de l'activité mathématique dans la section 2.4; ce qui nous servira de guide lors de l'analyse *a priori*. La phase d'exploitation du matériel ne consiste qu'en « l'administration systématique des décisions prises » (Bardin, 2013, p. 132) dans la phase de préanalyse, c'est-à-dire l'exécution des opérations analytiques planifiées durant la préanalyse. Dans le cas de la présente recherche, les phases de préanalyse et d'exploitation du matériel ont été réalisées en concomitance afin de bonifier les opérations analytiques planifiées par une confrontation continue avec le matériel à analyser. Bardin (2013) décrit la dernière phase – le traitement des résultats et l'interprétation – comme devant débiter par des épreuves de validité, tels que des tests statistiques, afin que l'analyste ait « à sa disposition des résultats significatifs et fiables » pour qu'il puisse ensuite « proposer des inférences et avancer des interprétations à propos des objectifs prévus ou concernant d'autres découvertes imprévues. » (p. 132) Dans notre cas, les épreuves de validité qui seront employées ne relèvent pas de tests statistiques. Cela sera abordé plus en détails dans le chapitre 5.

3.3.2 Analyse catégorielle

Comme mentionné dans la section précédente, l'analyse catégorielle est une opération analytique utilisée dans ce mémoire. Effectuer une analyse catégorielle nécessite d'établir des catégories dans lesquelles des

éléments de la communication seront classés; elle vise à « prendre en considération la totalité d'un "texte" pour le passer à la moulinette de la classification et du dénombrement par fréquence de présence (ou d'absence) d'items de sens » (Bardin, 2013, p. 40-41). Les critères que doivent respecter les catégories établies sont les suivants :

- homogènes : on ne mélange pas les « torchons avec les serviettes » pourrait-on dire;
 - exhaustives : épuiser la totalité du « texte »;
 - exclusives : un même élément du contenu ne peut être classé dans deux catégories différentes de manière aléatoire;
 - objectives : des codeurs différents doivent aboutir aux mêmes résultats;
 - adéquates ou pertinentes : c'est-à-dire adaptées au contenu et à l'objectif.
- (Bardin, 2013, p. 40)⁴³

Sabourin (2009) illustre le processus d'analyse catégorielle grâce à une analogie à un déménagement d'un logement à un autre.

Vous voulez minimiser vos efforts [lors du déménagement]. Pour ce faire, vous avez décidé de constituer des boîtes de déménagement dans lesquelles vous classerez systématiquement vos objets selon certaines de leurs caractéristiques afin de pouvoir les transporter dans la bonne pièce et au bon endroit de la pièce, c'est-à-dire au plus près de leur utilisation future. Afin d'être efficace, chacune de vos boîtes doit permettre de classer des objets selon des *critères explicites et homogènes* (p. ex., la boîte des instruments de cuisine).

Votre série de boîtes doit être *exhaustive* : il ne faut pas que vous fassiez de « boîte diverse », car vous devriez ouvrir toutes les boîtes diverses pour retrouver certains objets plutôt qu'une seule boîte. De plus, les critères définissant vos boîtes devront être *exclusifs* : il ne faut pas qu'un objet puisse être classé dans deux boîtes différentes [pour une raison similaire].

Vous voulez vous faire aider dans votre déménagement? Chaque personne qui vous aidera devra classer de la même façon les objets, afin que quelle que soit la personne qui classe, on puisse retrouver les objets pour les disposer dans le nouvel appartement.

Enfin, vous ne devez pas faire l'erreur de prendre des boîtes trop grandes. Il faut que celles-ci soient *adéquates*, que leur description « colle » à la fois aux principes généraux de disposition de vos objets dans votre appartement qui pourrait être une fonction par pièce et à la fois aux particularités des objets déménagés. Par exemple, si vous faites une boîte définie seulement par le critère cuisine, en plus d'être énorme, elle contiendra des objets très différents (livres de cuisine, ustensiles, vaisselle, aliments, petits électroménagers pour la cuisine). (p. 421-422)

Les détails de l'application de l'analyse catégorielle menée dans le cadre de cette recherche seront présentés dans la section 3.6.

⁴³ Le texte de Bardin (2013) suggère que cette dernière ne fait que réitérer les critères établis par Berelson (s. d.).

3.3.3 Analyse *a priori*

Comme mentionné précédemment, une des opérations analytiques qui sera utilisée dans la présente recherche consiste en l'analyse *a priori*, que nous avons empruntée à l'ingénierie didactique (Artigue, 1991). Puisqu'il s'agit d'un emprunt, certaines adaptations ont été nécessaires afin de servir mes objectifs de recherche. L'ingénierie didactique est une méthodologie de recherche s'intéressant aux « rapports entre la recherche et l'action sur le système d'enseignement » et au « rôle qu'il convient de faire jouer aux "réalisations didactiques" en classe » (Artigue, 1991, p. 1). Cette méthodologie comporte quatre phases : (I) les analyses préalables, (II) la conception et l'analyse *a priori* des situations didactiques, (III) l'expérimentation, (IV) l'analyse *a posteriori* et la validation. Avant de concevoir une réalisation didactique, des analyses préalables autour du sujet de cette dernière sont nécessaires. Le plus souvent, elles consistent en :

- l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement,
 - l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets,
 - l'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et obstacles qui marquent leur évolution,
 - l'analyse du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation didactique effective.
- (Artigue, 1991, p. 5)

La phase suivante englobe la conception de situations didactiques et l'analyse *a priori* de celles-ci. Une ou des situations didactiques sont d'abord conçues en s'appuyant sur les analyses préalables, ce qui est suivi par l'analyse *a priori* des situations didactiques fraîchement élaborées. L'objectif de l'analyse *a priori* est de « déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves et leur sens » (Artigue, 1991, p. 10). Entre autres, elle sert à « analyse[r] quel peut être l'enjeu de cette situation pour l'élève, en fonction en particulier des possibilités d'action, de choix, de décision, de contrôle et de validation dont il dispose » (p. 11). Une fois cette phase terminée, l'expérimentation a lieu, c'est-à-dire que les situations didactiques élaborées dans les phases antérieures sont mises en œuvre. La phase finale inclut une analyse dite *a posteriori* « qui s'appuie sur l'ensemble des données recueillies lors de l'expérimentation : observations réalisées des séances d'enseignement mais aussi productions des élèves en classe ou hors classe » (Artigue, 1991, p. 13). Le processus de validation des hypothèses émises lors de la conception des situations didactiques est essentiellement interne dans l'ingénierie didactique, puisqu'il réside dans la confrontation des analyses *a priori* et *a posteriori* de ces situations.

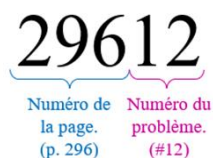
Dans le cas de la présente recherche, un parallèle peut être fait entre la phase d'analyses préalables de l'ingénierie didactique et le travail conceptuel que nous avons réalisé pour attacher la notion de contrôle aux unités de mesure (voir section 2.4). En ce qui concerne l'analyse *a priori*, de petits ajustements ont été nécessaires. D'une part, ce sont des problèmes mathématiques à contexte physique (routiniers) issus du

manuel *Calcul différentiel : Charron-Parent* qui seront le sujet d'analyse *a priori*, plutôt que des situations didactiques que nous avons élaborées dans un objectif précis en s'appuyant sur des analyses préalables. Nous nous intéressons aux possibilités d'une action contrôlée passant par les unités de mesure lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique selon les attributs possédés par ces derniers (plutôt que des choix délibérés cherchant à solliciter certains comportements chez les élèves). D'autre part, notre analyse *a priori* sera orientée par la conceptualisation inédite d'un contrôle passant par les unités de mesure. Nous cherchons à explorer spécifiquement les opportunités d'une telle action contrôlée qu'offrent la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique, plutôt que de prédire l'ensemble des actions potentielles d'élèves.

3.4 Sélection et codage du contenu pour l'analyse

Le manuel *Calcul différentiel : Charron-Parent* contient six pictogrammes pouvant accompagner les problèmes qu'ils proposent qui indiquent, le cas échéant, le champ d'application (administration, biologie, chimie, géométrie, **physique**⁴⁴, sciences humaines) dont ils relèvent (voir tableau 3.1). Afin de répondre à nos questions de recherche, qui portent sur des problèmes mathématiques à contexte physique, nous avons choisi de sélectionner les problèmes que les auteurs ont qualifiés comme étant des applications du calcul différentiel dans le champ de la physique. Pour ce faire, nous avons sélectionné les problèmes qui sont accompagnés du pictogramme associé à la physique (les deux rouages). Nous avons ainsi récolté 106 problèmes, répartis dans les neuf chapitres du manuel (0 à 8). En prévision de nos analyses, nous avons codé chacun des problèmes par un nombre à cinq chiffres; les trois premiers chiffres représentent le numéro de la page sur laquelle l'énoncé débute et les deux derniers représentent le numéro du problème tel que numéroté par les auteurs du manuel. Voici un exemple de la construction du codage :

Figure 3.1 Exemple du codage d'un problème



Un zéro a été ajouté au début des numéros de pages ne possédant que deux chiffres (e.g. p. 81 → 081) et des numéros de problème ne possédant qu'un chiffre (e.g. #1 → 01). Des 106 problèmes identifiés, huit proviennent du chapitre 0 du manuel. Puisqu'il s'agit d'un chapitre de révision dont les problèmes portent sur des notions **préalables** à l'introduction du calcul différentiel, nous avons décidé d'écarter ces problèmes

⁴⁴ Il s'agit du champ d'application pertinent pour ce mémoire.

de nos analyses. De plus, ils étaient très simples et donc peu intéressants pour cette recherche. Ainsi, nous avons obtenu un corpus de 98 problèmes mathématiques à contexte physique, répartis dans huit chapitres (1 à 8).

3.5 Description des énoncés des problèmes

La première opération analytique dont nous allons faire usage dans le cadre de ce mémoire consiste en une description scrupuleuse des énoncés du corpus de 98 problèmes mathématiques à contexte physique sélectionnés pour l'analyse. Cette opération analytique a comme objectif de récolter diverses informations sur les énoncés des problèmes, c'est-à-dire sur les messages eux-mêmes (plutôt que leur réception). Pour ce faire, l'énoncé complet sera pris en compte, ce qui inclue les sous-questions (e.g. la sous-question **a.i** d'un problème) le cas échéant. Notamment, elle sera menée autour de deux axes : (1) les notions mathématiques et physique dont relève chaque problème et (2) les unités de mesure mentionnées et leur présentation à travers l'énoncé. Avec ce premier axe, nous cherchons à dresser un portrait général des problèmes mathématiques à contexte physique offerts par le manuel *Calcul différentiel : Charron-Parent* selon les notions mathématiques qu'ils mettent en jeu et les champs physiques auxquels appartiennent les contextes. Avec ce deuxième axe, nous cherchons à répondre à notre première question de recherche – *Comment les unités apparaissent-elles dans les problèmes mathématiques à contexte physique offerts aux étudiants par un manuel du cours collégial Calcul différentiel?* Les sections suivantes abordent, respectivement, les deux axes de description. Afin d'illustrer nos propos, l'énoncé d'un problème mathématique à contexte physique sera utilisé comme exemple tout au long du chapitre.

3.5.1 Regard sur l'emplacement dans le manuel et le champ physique des problèmes

Afin de se renseigner sur les notions mathématiques mises en application dans les problèmes à contexte physique, nous allons considérer l'emplacement de ces problèmes dans le manuel *Calcul différentiel : Charron-Parent*. Les informations recueillies à ce propos sont les titres et les numéros du chapitre et de la section dans lesquels se trouve chacun des 98 problèmes mathématiques à contexte physique. Afin de se renseigner sur les champs physiques dont relèvent les contextes utilisés par ce corpus de problèmes, nous avons circonscrit les champs possibles à ceux vus et travaillés dans le programme *Sciences de la nature*, c'est-à-dire couverts dans un des (trois) cours de physique – *Mécanique, Électricité et magnétisme, Ondes et physique moderne*. Pour ce faire, nous nous sommes appuyées sur la collection de manuels de physique couramment utilisée *Physique XXI (tomes A, B et C)* de Séguin, Descheneau et Tardif (2010) de la maison d'édition ERPI. Les champs physiques correspondent ainsi aux tomes de la collection et les sous-champs physiques correspondent aux chapitres de chaque tome. Les champs et sous-champs physiques sont regroupés dans le tableau 3.3.

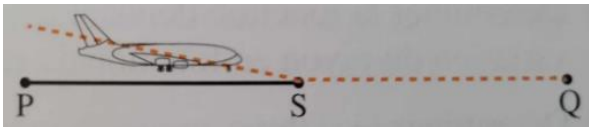
Tableau 3.3 Champs et sous-champs physiques tirés de la collection *Physique XXI* (2010)

CHAMPS	SOUS-CHAMPS
Mécanique (tome A)	Cinématique
	Dynamique
	Principes de conservation
	Mécanique des corps
Électricité et magnétisme (tome B)	Champ électrique
	Potentiel électrique
	Circuits électriques
	Force magnétique
	Induction électromagnétique
Ondes et physique moderne (tome C)	Oscillations et ondes mécaniques
	Optique géométrique
	Optique ondulatoire
	Relativité
	Physique quantique et nucléaire

Si certains problèmes mathématiques à contexte physique ne correspondent pas aux champs travaillés dans le cadre des cours collégiaux de physique⁴⁵, nous avons codé ces informations par **n/a** (non applicable).

Dans le but d'illustrer nos propos, le tableau 3.4 contient l'énoncé d'un problème mathématique à contexte physique (codé 29612) qui nous servira d'exemple. Les mentions d'unités de mesure ont été mises en bleu afin de les faire ressortir.

Tableau 3.4 Énoncé du problème 29612

PROBLÈME 29612	
Un avion, atterrissant sur une piste PQ longue de 1,5 km, touche le sol au point S. La distance x, en mètres, sur la piste entre l'avion et le point P est donnée par $x(t) = 900 + 75t - 2,5t^2$, où t est le temps, en secondes, écoulé depuis l'atterrissage jusqu'à l'immobilisation de l'appareil.	
a. Déterminer la distance : i. entre P et S; ii. parcourue par l'avion pendant les 4 premières secondes après qu'il a touché le sol.	
b. Démontrer qu'à partir du moment où l'avion atterrit, il ralentit.	
c. Déterminer la vitesse de l'avion, en kilomètres par heure (km/h), i. 2 secondes après l'atterrissage; ii. 8 secondes après l'atterrissage.	

⁴⁵ Par exemple, le contexte peut relever de notions de physique universitaires ou ne pas réellement relever de champs physiques.

- d. Déterminer la distance entre P et l'avion :
- i. lorsque l'avion a une vitesse de 54 km/h; ii. lorsque l'avion va s'immobiliser.
- e. Déterminer la distance maximale entre P et S pour que l'avion puisse s'arrêter avant d'atteindre l'extrémité Q de la piste.

Dans le tableau 3.5 ci-dessous sont regroupés les informations récoltées sur la notion mathématique mise en application dans le problème 29612 – son emplacement dans le manuel *Calcul différentiel : Charron-Parent* – et sur le contexte physique de celui-ci.

Tableau 3.5 Emplacement (mathématique) et contexte (physique) du problème 29612

EMPLACEMENT ET CONTEXTE	PROBLÈME 29612
Numéro et titre du chapitre de <i>Calcul différentiel : Charron-Parent</i>	4 Taux de variation
Numéro et titre de la section du chapitre de <i>Calcul différentiel : Charron-Parent</i>	3 Activités d'apprentissage
Champ physique	Mécanique
Sous-champ physique	Cinématique

3.5.2 Regard sur les unités mentionnées dans les problèmes

Afin de répondre à notre première question de recherche – *Comment les unités apparaissent-elles dans les problèmes mathématiques à contexte physique offerts aux étudiants par un manuel du cours collégial Calcul différentiel?* – nous allons poser notre regard sur les unités de mesure explicitement mentionnées dans l'énoncé des 98 problèmes mathématiques à contexte physique, ainsi que la manière dont elles y sont présentées, le cas échéant. Si l'énoncé ne fait pas mention d'unités de mesure, les informations que nous cherchons à récolter autour de celles-ci seront désignées par **n/a** (non applicable). Le tableau 3.6 rassemble les questions dont nous souhaitons obtenir les réponses au niveau de la présentation des unités dans l'énoncé des problèmes, ainsi que les différentes informations que nous allons recueillir sur le type d'unités de mesure présentes.

Tableau 3.6 Informations récoltées concernant les unités de mesure

MENTIONS D'UNITÉS DE MESURE		
Est-ce que des unités de mesure sont présentes?		(oui-non)
	le(s) symbole(s) algébrique(s)?	(oui-non-n/a)
	TOUS les symboles?	(oui-non-n/a)

Est-ce que des unités accompagnent ...	la (les) constante(s) numérique(s) d'équation(s)?		(oui-non-n/a)	
	TOUTES les constantes?		(oui-non-n/a)	
	le(s) nombre(s) dans le texte de l'énoncé?		(oui-non-n/a)	
	TOUS les nombres?		(oui-non-n/a)	
TYPE D'UNITÉS DE MESURE MENTIONNÉES				
UNITÉS	QUANTITÉ TOTALE		(nombre)	
	Unités SI	Quantité totale	(nombre)	
		Unités de base (cohérente)	Quantité (nombre)	Description (symboles)
		Multiples ou sous-multiples décimaux d'unités de base	Quantité (nombre)	Description (symboles)
		Unités dérivées cohérentes	Quantité (nombre)	Description (symboles)
		Multiples ou sous-multiples décimaux d'unités dérivées cohérentes	Quantité (nombre)	Description (symboles)
	Unités non-SI	Quantité totale	(nombre)	
		Acceptées avec le SI	Quantité (nombre)	Description (symboles)
		Rejetées avec le SI	Quantité (nombre)	Description (symboles)

En ce qui concerne les *mentions d'unités de mesure*, nous avons porté notre attention sur la manière dont elles apparaissent dans l'énoncé de problèmes mathématiques à contexte physique, c'est-à-dire envers les termes (symboles algébriques, constantes numériques d'équation et nombres parsemant le texte de l'énoncé) qui peuvent être accompagnés d'une unité – puisque pouvant représenter des grandeurs physiques. Par symbole algébrique, nous entendons un symbole (généralement une lettre de l'alphabet grec ou latin) désignant une grandeur physique; par exemple, dans la phrase « où t est le temps, en secondes, écoulé depuis l'atterrissage jusqu'à l'immobilisation de l'appareil » (voir tableau 3.4), nous considérons que l'unité **seconde** (s) accompagne le symbole algébrique t . Par constante numérique d'équation, nous entendons les nombres qui sont présents dans une équation; par exemple, dans l'équation $x(t) = 900 + 75t - 2,5t^2$, les nombres en question sont 900, 75 et 2,5 et ils ne sont pas accompagnés d'unités de mesure (voir tableau 3.4). Par nombre parsemant le texte de l'énoncé, nous entendons les nombres qui correspondent aux valeurs de grandeur physique; par exemple, dans la phrase « un avion, atterrissant sur une piste PQ longue de 1,5 km, touche le sol au point S » (voir tableau 3.4) le nombre 1,5 est accompagné d'une unité (km). Afin de couvrir toutes les éventualités, nous avons ajouté la nuance de vérifier si tous les termes de chaque type sont

présentés de la même manière. Le tableau 3.7 présente le codage des mentions d'unités de mesure pour l'énoncé du problème 29612 (voir tableau 3.4).

Tableau 3.7 Mentions d'unités de mesure dans le problème 29612

MENTIONS D'UNITÉS DE MESURE		
Est-ce que des unités de mesure sont présentes?		oui
Est-ce que des unités accompagnent ...	le(s) symbole(s) algébrique(s)?	oui
	TOUS les symboles?	oui
	la (les) constante(s) numérique(s) d'équation(s)?	non
	TOUTES les constantes?	n/a
	le(s) nombre(s) dans le texte de l'énoncé?	oui
	TOUS les nombres?	oui

En ce qui concerne le *type d'unités de mesure mentionnées*, nous avons dirigé notre attention sur les unités de mesure elles-mêmes, c'est-à-dire sur combien sont présentes dans l'énoncé et lesquelles (qui sont décrites par leur symbole). De plus, tel qu'abordé dans la problématique (chapitre 1), le système impérial et le SI cohabitent au Québec et l'utilisation de ce dernier n'est pas forcément de mise dans les cours de mathématiques (au contraire de la physique). Ainsi, nous nous sommes intéressées aux différentes catégories d'unités de mesure du SI (de base, dérivées cohérentes, multiples et sous-multiples de ces deux dernières) et aux unités en dehors du SI (dont l'usage peut être accepté ou non avec celui-ci⁴⁶). Nous avons également pris soin de noter la quantité d'unités de chaque catégorie, ainsi que toutes catégories confondues, explicitement mentionnées dans l'énoncé des problèmes mathématiques à contexte physique. Le tableau 3.8 présente les informations récoltées sur le type d'unités mentionnées dans le problème 29612 (voir tableau 3.4 pour l'énoncé).

Tableau 3.8 Type d'unités de mesure mentionnées dans le problème 29612

TYPE D'UNITÉS DE MESURE MENTIONNÉES				
UNITÉS	QUANTITÉ TOTALE			4
	Unités SI	Quantité totale	3	
		Unités de base (cohérente)	Quantité 2	Description m, s
		Multiples ou sous-multiples décimaux d'unités de base	Quantité 1	Description km

⁴⁶ Les unités externes au SI mais acceptées avec celui-ci sont recensées aux pages 33-34 de BIPM (2019).

		Unités dérivées cohérentes	Quantité 0	Description n/a
		Multiples ou sous-multiples décimaux d'unités dérivées cohérentes	Quantité 0	Description n/a
	Unités non-SI	Quantité totale	1	
		Acceptées avec le SI	Quantité 1	Description km/h
		Rejetées avec le SI	Quantité 0	Description n/a

La récolte des informations autour des unités de mesure des 98 problèmes mathématiques à contexte physique, illustrée dans les tableaux 3.7 et 3.8 avec le problème 29612, va permettre d'amener des éléments de réponse à la première question de recherche – *Comment les unités apparaissent-elles dans les problèmes mathématiques à contexte physique offerts aux étudiants par un manuel du cours collégial Calcul différentiel?* – en plus de permettre d'évaluer la quantité d'unités de mesure différentes mentionnées à travers le corpus et celles qui sont le plus utilisées.

3.6 Catégorisation des sous-problèmes

L'opération analytique descriptive détaillée précédemment s'appuie sur l'entière de l'énoncé des problèmes mathématiques à contexte physique. Pour l'analyse catégorielle (voir section 3.3.2), nous allons distinguer chacun des sous-problèmes présents dans un problème; chaque sous-question consistera en un sous-problème. Ce sont ces sous-problèmes qui seront sujets à une analyse catégorielle selon leur demande mathématique. En d'autres mots, nous cherchons à catégoriser ce que les sous-problèmes requièrent comme activité mathématique lors de leur résolution. À l'intérieur d'un même problème, l'ordre des sous-problèmes est pris en compte et les sous-problèmes antérieurs sont considérés comme résolus. Par exemple, si le premier sous-problème (e.g. **a**) demande aux étudiants de déterminer la fonction dérivée d'une fonction donnée, et que le deuxième sous-problème (e.g. **b**) nécessite le recours à cette fonction dérivée, nous considérons que, pour ce deuxième sous-problème, la fonction dérivée a été construite précédemment. Les catégories de demandes mathématiques (pour les sous-problèmes) sont regroupées dans le tableau 3.9.

Tableau 3.9 Catégorisation des sous-problèmes par leur demande mathématique

Catégorisation des sous-problèmes	
T	Transformation d'une ou plusieurs expressions algébriques données ou construites précédemment

S	Substitution de valeur(s) (explicite(s) ou implicite(s)) à partir d'une équation/fonction donnée ou construite précédemment
R	Résolution d'une équation donnée ou construite précédemment (à partir d'une valeur explicite ou implicite)
DP	Dérivation d'une fonction/équation donnée ou construite précédemment en un ou plusieurs points
DF	Dérivation d'une fonction/équation donnée ou construite précédemment (fonction dérivée)
L	Évaluation d'une ou plusieurs limites (explicites ou implicites) à partir d'une fonction/équation donnée ou construite précédemment
A	Analyse d'une fonction/équation donnée ou construite précédemment
CÉ	Construction d'une équation à partir d'un contexte donné
D	Démonstration d'une équation ou d'un résultat donné
CGà	Construction d'un graphique à l'aide d'une ou des expressions algébriques
CGs	Construction d'un graphique sans l'aide d'expression algébrique
IQn	Interprétation quantitative (numérique) d'un graphique
IQl	Interprétation qualitative d'un graphique

Par souci de clarté, nous allons décrire certaines des catégories⁴⁷ présentées dans le tableau 3.9. La demande mathématique « Transformation d'une ou plusieurs expressions algébriques données ou construites précédemment » implique qu'une ou plusieurs expressions algébriques doivent être manipulées algébriquement afin de résoudre le sous-problème. La demande « Résolution d'une équation donnée ou construite précédemment (à partir d'une valeur explicite ou implicite) » implique que le sous-problème se résout en isolant une grandeur physique apparaissant dans l'équation lorsque la valeur de cette dernière est donnée, implicitement ou explicitement. La demande mathématique « Substitution de valeur(s) (explicite.s ou implicite.s) à partir d'une équation/fonction donnée ou construite précédemment » implique plutôt que la valeur d'une ou plusieurs grandeurs physiques soit donnée, implicitement ou explicitement, et doive être insérée dans l'équation de départ afin d'obtenir la valeur de l'équation complète. La demande « Analyse d'une fonction/équation donnée ou construite précédemment » fait référence à l'analyse de différentes caractéristiques d'une fonction telles que son domaine, son apparence (e.g. croissance et décroissance), ses points critiques (e.g. extrema et point.s d'inflexion).

⁴⁷ Nous reviendrons sur chacune de ces catégories en les exemplifiant dans le chapitre 5 – Analyse et résultats : deuxième question de recherche.

Les catégories établies afin de classer les sous-problèmes par demande mathématique doivent respecter les cinq critères énoncés dans la section 3.3.2 sur l'analyse catégorielle, c'est-à-dire qu'elles doivent être homogènes, exclusives, objectives, adéquates/pertinentes et exhaustives. Afin de rendre les catégories homogènes et exclusives, nous avons considéré l'essence de ce qui est demandé par les sous-problèmes. Il est nécessaire de ne tenir compte que de la demande mathématique se trouvant au cœur de la résolution, car les problèmes mathématiques à contexte physique analysés relèvent du calcul différentiel et possèdent donc une complexité intrinsèque; même un sous-problème peut comporter plusieurs étapes.⁴⁸ De plus, l'approche de se concentrer sur l'essence de la demande mathématique est pertinente pour l'exploration des opportunités d'un contrôle par les unités de mesure lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique, puisque les composantes du contrôle qui seront sollicitées dépendent de l'activité mathématique qui sera réalisée pour résoudre le (sous-)problème. Cette approche va donc nous permettre d'explorer, pour chacune des demandes mathématiques identifiées (voir tableau 3.9), les manifestations d'un contrôle par les unités qu'elles peuvent engendrer; c'est-à-dire que nous pourrions repérer des manifestations du contrôle spécifiques aux différentes demandes mathématiques. Les catégories de demandes mathématiques sont également exhaustives puisqu'elles permettent le classement de tous les sous-problèmes⁴⁹ (associés aux 98 problèmes à contexte physique). Dans le tableau 3.10 ci-dessous est présentée la catégorisation des sous-problèmes du problème 29612 (voir tableau 3.4 pour l'énoncé).

Tableau 3.10 Catégorisation des sous-problèmes du problème 29612

SOUS-PROBLÈMES (29612)		a) i)	a) ii)	b)	c) i)	c) ii)	d) i)	d) ii)	e)
T	Transformation d'une ou plusieurs expressions algébriques données ou construites précédemment								
S	Substitution de valeur(s) (explicite(s) ou implicite(s)) à partir d'une équation/fonction donnée ou construite précédemment	X	X		X	X			
R	Résolution d'une équation donnée ou construite précédemment (à partir d'une valeur explicite ou implicite)						X	X	X

⁴⁸ À des fins de corroboration, mon comité d'encadrement a été consulté pour plusieurs catégorisations afin de permettre l'obtention d'un consensus et l'assurance de l'objectivité des catégories.

⁴⁹ Il y a une exception, un sous-problème demandant d'identifier les unités de mesure d'une grandeur physique nouvellement définie dans l'énoncé du problème. Nous n'avons pas trouvé utile de créer une catégorie supplémentaire pour un seul cas. Nous reviendrons sur ce problème dans le chapitre 5 – Analyse et résultats : deuxième question de recherche.

DP	Dérivation d'une fonction/équation donnée ou construite précédemment en un ou plusieurs points								
DF	Dérivation d'une fonction/équation donnée ou construite précédemment (fonction dérivée)								
L	Évaluation d'une ou plusieurs limites (explicites ou implicites) à partir d'une fonction/équation donnée ou construite précédemment								
A	Analyse d'une fonction/équation donnée ou construite précédemment								
CÉ	Construction d'une équation à partir d'un contexte donné								
D	Démonstration d'une équation ou d'un résultat donné			X					
CGà	Construction d'un graphique à l'aide d'une ou des expressions algébriques								
CGs	Construction d'un graphique sans l'aide d'expression algébrique								
IQn	Interprétation quantitative (numérique) d'un graphique								
IQl	Interprétation qualitative d'un graphique								

Lors de la réalisation des opérations analytiques, un journal de recherche sera maintenue, afin de noter mes observations sur d'autres aspects des problèmes mathématiques à contexte physique, telles que la nécessité d'un recours à des notions physiques externes à l'énoncé pour sa résolution et l'exigence d'une conversion d'unités.

En bref, afin de répondre aux questions de recherche⁵⁰ nous avons décidé de réaliser une analyse de contenu sur un corpus de 98 problèmes mathématiques à contexte physique issus du manuel *Calcul différentiel : Charron-Parent* par le biais de trois opérations analytiques : la description scrupuleuse des énoncés autour des unités de mesure, l'analyse des sous-problèmes (sous-questions des problèmes) selon leur demande mathématique et l'analyse *a priori* d'un nombre restreint de problèmes représentant le corpus (car couvrant

⁵⁰ (1) Comment les unités apparaissent-elles dans les problèmes mathématiques à contexte physique offerts aux étudiants par un manuel du cours collégial *Calcul différentiel*? (2) Quelles opportunités de contrôle (et de quels types) sur l'activité mathématique des étudiants l'usage des unités de mesure offre-t-il lors de la résolution de problèmes à contexte physique (routiniers de niveau collégial)?

toutes les demandes mathématiques). La manière dont la description des énoncés autour des unités de mesure amène des éléments de réponses à la première question de recherche sera discutée dans le prochain chapitre. La manière dont l'analyse catégorielle des sous-problèmes a servi à la sélection des problèmes mathématiques à contexte physique soumis à une analyse *a priori* sera discuté dans le chapitre suivant (chapitre 6), dans lequel figurera également les analyses elles-mêmes, ainsi que les éléments de réponses qu'elles amènent à la deuxième question de recherche.

CHAPITRE 4

ANALYSE ET RÉSULTATS : PREMIÈRE QUESTION DE RECHERCHE

Ce chapitre débute par le dressage d'un portrait du manuel *Calcul différentiel : Charron-Parent* basé sur la description des problèmes mathématiques à contexte physique selon leur emplacement dans ce dernier et selon le contexte physique dont ils relèvent. Il se poursuit par l'analyse des unités de mesure figurant dans les énoncés du corpus de problèmes. Il est finalement question de souligner les résultats importants pouvant être dégagés de cette analyse, ce qui amène des éléments de réponse à la première question de recherche *Comment les unités apparaissent-elles dans les problèmes mathématiques à contexte physique offerts aux étudiants par un manuel du cours collégial Calcul différentiel?*

4.1 Portrait du manuel en termes de l'emplacement des problèmes et de leur contexte physique

Dressons d'abord un portrait général des problèmes mathématiques à contexte physique se retrouvant dans le manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*. Tel que mentionné précédemment, il y a un total de 108 problèmes possédant le pictogramme des deux rouages les identifiant comme relevant de la physique à travers les neuf chapitres du manuel; leur distribution est présentée dans le tableau 4.1. Cependant, le premier chapitre du manuel – chapitre 0 sur les notions algébriques et les fonctions – est une **révision** de notions supposées apprises et importantes pour l'apprentissage du calcul différentiel. Nous avons donc fait le choix d'exclure les problèmes issus de ce chapitre puisque notre intérêt porte sur le calcul différentiel (et non les notions **préalables** au calcul différentiel). Ainsi, nous obtenons un corpus de 98 problèmes mathématiques à contexte physique de calcul différentiel.

Tableau 4.1 Distribution des problèmes mathématiques à contexte physique dans le manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*

CHAPITRE		QTÉ	98
0	Notions algébriques et fonctions (révision)	8	
1	Limites et continuité	5	
2	Définition de la dérivée	13	
3	Dérivée de fonctions algébriques et dérivation implicite	3	
4	Taux de variation	32	
5	Analyse d'une fonction algébrique et règle de L'Hospital	5	
6	Problèmes d'optimisation	10	
7	Fonctions exponentielles et logarithmiques	7	
8	Fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques	23	

Comme nous pouvons le voir dans le tableau ci-dessus, le chapitre 4 – *Taux de variation* contient le plus grand nombre de problèmes mathématiques à contexte physique du manuel *Calcul différentiel : Charron-Parent*, c’est-à-dire environ un tiers (32/98). Notamment, on y retrouve le problème 29612 (chapitre 4 – *Taux de variation*), qui a été utilisé comme exemple tout au long du chapitre 3 – Méthodologie (voir tableau 3.4 pour l’énoncé).

Tel qu’abordé précédemment (voir section 3.5.1), nous avons recueilli et classer les différents contextes physiques de notre corpus de problèmes selon les trois tomes de la collection *Physique XXI* de Séguin, Descheneau et Tardif (2010) de la maison d’édition ERPI. Les champs physiques correspondent aux tomes de la collection et les sous-champs physiques correspondent aux chapitres de chaque tome (voir tableau 3.3). La distribution des contextes physiques issus de notre corpus de 98 problèmes est présentée dans le tableau 4.2.

Tableau 4.2 Champs et sous-champs physiques dont relèvent les problèmes mathématiques à contexte physique

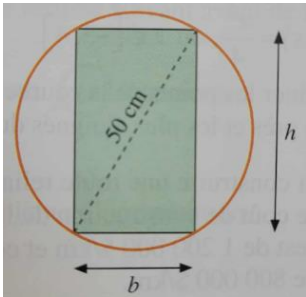
CHAMPS	QTÉ	≈ %	SOUS-CHAMPS	QTÉ	≈ %
Mécanique	63	64,29	Cinématique	61	62,24
			Dynamique	2	2,04
			Principes de conservation	---	---
			Mécanique des corps	---	---
Électricité et magnétisme	10	10,20	Champ électrique	1	1,02
			Potentiel électrique	2	2,04
			Circuits électriques	6	6,12
			Force magnétique	---	---
			Induction électromagnétique	1	1,02
Ondes et physique moderne	11	11,22	Oscillations et ondes mécaniques	5	5,10
			Optique géométrique	4	4,08
			Optique ondulatoire	---	---
			Relativité	1	1,02
			Physique quantique et nucléaire	1	1,02
Autres	14	14,29	-----	14	14,29

Comme nous pouvons le voir dans le tableau 4.2, la majorité (≈ 62,24%) des contextes porte sur la cinématique, un sous-champ de la mécanique. Ceci n’est pas réellement suprenant, puisque le premier cours de physique porte sur la mécanique et est généralement suivi en concomitance avec le cours de calcul différentiel⁵¹. Les autres contextes physiques sont distribués plutôt également dans le reste des catégories.

⁵¹ Il se peut qu’il s’agisse de l’intention des auteurs, cherchant à favoriser le rapprochement entre le cours de mathématique de calcul différentiel et le cours de physique sur la mécanique, mais il est impossible de se prononcer

De plus, 14 problèmes mathématiques à contexte physique ($\approx 14,29\%$) possèdent un contexte ne relevant pas des catégories sélectionnées. Certains de ces contextes sont désignés « autres » car ils ne relèvent pas directement d'un champ physique mais plutôt simplement d'une situation impliquant le monde réel, tandis que les autres impliquent des contextes physiques mettant en œuvre des notions de physique de niveau universitaire.

Tableau 4.3 Exemples de contextes « autres »

PROBLÈME 42911	PROBLÈME 40428
La coupe transversale d'une poutre en bois est un rectangle dont la hauteur est de h cm et la base est de b cm. Si une poutre est débitée d'un billot cylindrique de 50 cm de diamètre, [sous-questions : a) à d)] 	La fonction énergie potentielle U qui correspond à la force agissant entre deux atomes dans une molécule diatomique est définie par : $U(x) = \frac{c}{x^9} - \frac{d}{x}$ où c et d sont des constantes positives et x est la distance entre les atomes. [sous-questions : a) et b)]
Situation impliquant le monde réel	Contexte impliquant des notions physiques de niveau universitaire

4.2 Portrait du manuel en termes des unités de mesure présentes dans l'énoncé des problèmes

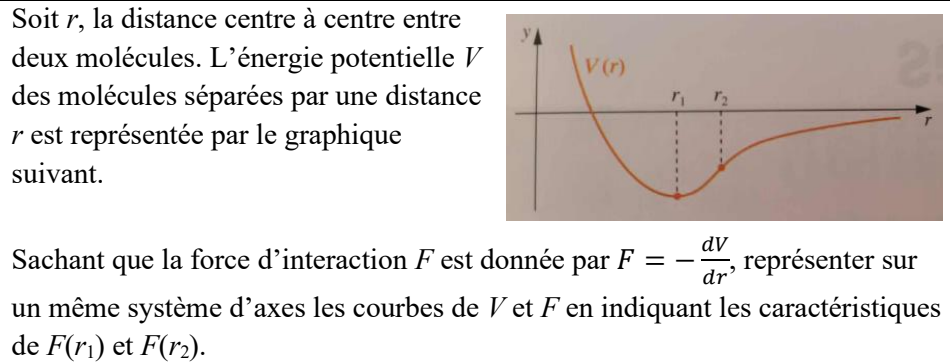
Afin de répondre à notre première question de recherche – *Comment les unités apparaissent-elles dans les problèmes mathématiques à contexte physique offerts aux étudiants par un manuel du cours collégial Calcul différentiel?* – nous avons posé notre regard sur les unités de mesure explicitement mentionnées dans l'énoncé des 98 problèmes mathématiques à contexte physique, ainsi que la manière dont elles y sont présentées, le cas échéant⁵². Si l'énoncé n'avait aucune mention d'unités de mesure, les informations que nous avons cherché à récolter autour de celles-ci ont été désignées par **n/a** (non applicable). Des unités de mesure sont mentionnées dans l'énoncé de 89 problèmes sur le corpus de 98 problèmes, c'est-à-dire que des unités sont présentes dans approximativement 90,82% des problèmes mathématiques à contexte physique du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*. Donc, la présence d'un contexte physique ne garantit pas

à ce propos; surtout que plusieurs des grandeurs physiques fondamentales du cours de mécanique (e.g. la vitesse et l'accélération) sont basées sur la notion de dérivée ($v_x(t) = \frac{dx}{dt}$; $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$).

⁵² Voir la section 3.5.2.

la présence d'unités, puisque 9 problèmes mathématiques à contexte physique du corpus ($\approx 9,18\%$) ne mentionnent aucune unité; la figure 4.1 en contient un exemple.

Figure 4.1 Énoncé du problème 40826 (contexte physique sans unité de mesure)



Lorsque des unités de mesure sont présentes, elles peuvent accompagner différents termes dans l'énoncé d'un problème, c'est-à-dire les symboles algébriques (généralement une lettre de l'alphabet grec ou latin désignant une grandeur physique), les constantes numériques d'équation(s) et les nombres parsemant le texte de l'énoncé.

4.2.1 Unités de mesure et symboles algébriques

Le tableau 4.4 regroupe les combinaisons de réponses autour des unités accompagnant les symboles algébriques et la quantité de problèmes correspondant à chaque combinaison. Ainsi, des unités de mesure accompagnent **tous** les symboles algébriques dans 27 problèmes du corpus ($\approx 27,55\%$), des unités accompagnent **certains** des symboles algébriques dans 26 problèmes ($\approx 26,53\%$) et des unités n'accompagnent **aucun** symbole algébrique dans 15 problèmes ($\approx 15,31\%$).

Tableau 4.4 Unités et symboles algébriques

Est-ce que les unités accompagnent les symboles algébriques présents dans l'énoncé?	oui	oui	Non	n/a	
Tous les symboles algébriques?	oui	non	n/a	n/a	
<i>Quantité de problèmes</i>	27	26	15	30	98
Pourcentage ($\approx \%$)	27,55	26,53	15,31	30,61	

De plus, 30 problèmes du corpus ($\approx 30,61\%$) ne mentionnent aucune unité (9 problèmes; $\approx 9,18\%$) ou de unités, mais aucun symbole algébrique (21 problèmes; $\approx 21,43\%$); la figure 4.2 contient un problème ne mentionnant aucun symbole algébrique.

Figure 4.2 Énoncé du problème 16813 (sans symbole algébrique)

Andre de Grasse, athlète sprinteur canadien, a remporté la médaille d'or aux Jeux Olympiques de 2020 (Tokyo) à l'épreuve du 200 m. Sachant qu'il a accompli ce exploit en un temps de 19,62 s, calculer :

- sa vitesse moyenne;
- sa vitesse scalaire moyenne.

Ainsi, dans les problèmes mathématiques à contexte physique qui mentionnent des unités de mesure et contiennent également des symboles algébriques dans leur énoncé (68 problèmes), il y a une quantité similaire de ces problèmes où les unités accompagnent **tous** les symboles algébriques et où les unités n'accompagnent que **certains** des symboles algébriques (27 et 26 problèmes respectivement). De plus, dans 15 problèmes qui mentionnent des unités et contiennent des symboles algébriques, les unités de ces symboles algébriques ne sont, cependant, pas précisées.

4.2.2 Unités de mesure et constantes numériques

Le tableau 4.5 regroupe les combinaisons de réponses autour des unités accompagnant les constantes numériques d'équation(s) et la quantité de problèmes correspondant à chaque combinaison. Ainsi, des unités de mesure accompagnent **toutes** les constantes numériques d'équation(s) dans un problème du corpus ($\approx 1,02\%$), des unités accompagnent **certaines** des constantes numériques d'équation(s) dans aucun problème et des unités n'accompagnent **aucune** constante numérique d'équation(s) dans 40 problèmes ($\approx 40,82\%$). De plus, 57 problèmes du corpus ($\approx 58,16\%$) ne mentionnent aucune unité (9 problèmes; $\approx 9,18\%$) ou ne contiennent, soit aucune équation, soit aucune constante numérique dans l'équation (48 problèmes; $\approx 48,98\%$).

Tableau 4.5 Unités et constantes numériques

Est-ce que les unités accompagnent les constantes numériques d'équation(s)?	oui	Oui	Non	n/a	
Toutes les constantes numériques?	oui	Non	n/a	n/a	
<i>Quantité de problèmes</i>	1	0	40	57	98
Pourcentage ($\approx \%$)	1,02	0,00	40,82	58,16	

Ainsi, dans les problèmes mathématiques à contexte physique qui mentionnent des unités de mesure et contiennent également au moins une équation (41 problèmes), à part exception (un problème), les constantes numériques présentes dans les équations ne sont pas accompagnées d'unités (40 problèmes).

4.2.3 Unités de mesure et nombres parsemant le texte de l'énoncé

Le tableau 4.6 regroupe les combinaisons de réponses autour des unités accompagnant les nombres parsemant le texte de l'énoncé et la quantité de problèmes correspondant à chaque combinaison. Ainsi, des unités de mesure accompagnent **tous** les nombres parsemant le texte de l'énoncé de 66 problèmes du corpus ($\approx 67,35\%$), des unités accompagnent **certains** des nombres parsemant le texte de l'énoncé d'un seul problème ($\approx 1,02\%$) et des unités n'accompagnent **aucun** nombre parsemant le texte de l'énoncé de zéro problème. De plus, 31 problèmes du corpus ($\approx 31,63\%$) ne mentionnent aucune unité (9 problèmes; $\approx 9,18\%$) ou aucun nombre ne parseme leur énoncé (22 problèmes; $\approx 22,45\%$).

Tableau 4.6 Unités et nombres dans l'énoncé

Est-ce que les unités accompagnent les nombres parsemant le texte de l'énoncé?	oui	Oui	Non	n/a	
Tous les nombres?	oui	Non	n/a	n/a	
<i>Quantité de problèmes</i>	66	1	0	31	98
Pourcentage ($\approx \%$)	67,35	1,02	0,00	31,63	

Ainsi, dans les problèmes mathématiques à contexte physique qui mentionnent des unités et contiennent des nombres dans le texte de leur énoncé (67 problèmes), à part exception (un problème), lesdits nombres sont accompagnés de leur unité (66 problèmes).

4.2.4 Unités de mesure apparaissant dans le corpus des problèmes

Outre les informations recueillies autour de la manière dont les unités apparaisse dans l'énoncé des problèmes mathématiques à contexte physique, nous avons amassé des informations sur les unités mentionnées elles-mêmes, c'est-à-dire leur type (unités de base SI, multiples et sous-multiples d'unités de base SI, unités dérivées cohérentes SI, multiples et sous-multiples d'unités dérivées cohérentes SI, unités hors du SI dont l'usage est accepté avec celui-ci, unités hors du SI dont l'usage est refusé avec celui-ci) et leur symbole. Ces informations sont rassemblées dans le tableau 4.7.

Tableau 4.7 Unités apparaissant dans le corpus des problèmes mathématiques à contexte physique

Type d'unités	Qté	Description
Unités de base (SI)	4	m, s, kg, A
Multiples et sous-multiples décimaux d'unités de base (SI)	4	pm, cm, km, ms
Unités dérivées cohérentes (SI)	15	$\frac{m}{s}$, $\frac{m}{s^2}$, m^2 , m^3 , N, $\frac{N}{m}$, $\frac{N \cdot m^2}{C^2}$, C, V, Ω , H, F, W, rad, $\frac{rad}{s}$

Multiples et sous-multiples décimaux d'unités dérivées cohérentes (SI)	2	$\frac{\text{cm}}{\text{s}}$, mC
Unités hors du SI dont l'usage est accepté avec celui-ci	10	min, h, an, $\frac{1}{\text{min}}$, $\frac{\text{m}}{\text{min}}$, $\frac{\Omega}{\text{min}}$, $\frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$, $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $^\circ\text{C}$, $^\circ$
Unités hors du SI dont l'usage est refusé avec celui-ci	1	Bar
	36	

Un total de 36 unités différentes sont explicitement mentionnées à travers le corpus de 98 problèmes mathématiques à contexte physique du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*. Il y a 19 unités mentionnées qui font partie de l'ensemble cohérent des unités SI (unités de base et unités dérivées cohérentes), tandis que 6 unités mentionnées sont des multiples ou sous-multiples de ces unités. Un total de 10 unités exclues du SI mais dont l'usage est accepté avec celui-ci sont mentionnées à travers les 98 problèmes. Une seule unité hors du SI dont l'usage n'est pas accepté avec celui-ci est mentionnée, c'est-à-dire le bar, une unité de pression qui correspond approximativement à la pression atmosphérique terrestre.

De plus, sur les **89** problèmes mathématiques à contexte physique qui mentionnent explicitement des unités de mesure, les trois qui sont le plus communes sont le **mètre** – qui apparaît dans 56 problèmes ($\approx 62,92\%$) – la **seconde** – qui apparaît dans 35 problèmes ($\approx 39,33\%$) – et le **mètre par seconde** – qui apparaît dans 22 problèmes ($\approx 24,72\%$). Toutes les autres unités sont mentionnées dans un maximum de 11 problèmes ($\approx 12,36\%$). Un total de 27 problèmes sur 89 ($\approx 30,34\%$) mentionnent **au moins** une unité hors du SI dont l'utilisation est acceptée avec celui-ci. Un total de 24 problèmes sur 89 ($\approx 26,97\%$) contiennent une unité de temps autre que la seconde ou ses multiples/sous-multiples décimaux comme unité de temps, incluant dans la constitution d'unités dérivées (e.g. km/h).

4.3 Réponse à la première question de recherche

Afin de tenter de répondre à notre question de recherche – *Comment les unités apparaissent-elles dans les problèmes mathématiques à contexte physique offerts aux étudiants par un manuel du cours collégial Calcul différentiel?* – nous avons analysé, suivant la méthodologie développée au chapitre 3 (section 3.5.2), un corpus de 98 problèmes mathématiques à contexte physique, issus du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*, autour des unités de mesure explicitement mentionnées dans leur énoncé. D'abord, la présence d'un contexte physique ne garantit pas la présence d'unités de mesure, même si des unités sont présentes dans la grande majorité de ces problèmes ($> 90\%$). Ensuite, pour un problème mathématique à contexte physique, lorsque des unités de mesure sont présentes, elles peuvent accompagner soit des symboles algébriques, soit des constantes numériques apparaissant dans des équations, soit des nombres parsemant le texte de son énoncé. À part exception, l'unité de mesure d'une constante numérique d'équation n'est **jamais** précisée

(voir tableau 4.5). Il est possible que cette absence répétée d'unités renforce la conception (erronée) que les constantes numériques se trouvant dans les équations ne peuvent pas posséder d'unités. En effet, les étudiants restent généralement dans un mode de lecture spontanée des symboles, c'est-à-dire qu'ils attribuent la signification la plus fréquente du symbole à ce dernier, sans tenir compte du contexte dans lequel ce symbole est utilisé, qui peut différer du contexte le plus commun (Ouarzeddine et Benseghir, 2007). À part exception, l'unité de mesure d'un nombre présent à même le texte est **toujours** précisée (voir tableau 4.6). Selon nous, cela appuie l'importance de l'unité de mesure comme véhicule de sens (contextuel)⁵³. Dans le cas de problèmes mathématiques à contexte physique, l'unité de mesure véhicule le sens physique que revêt le nombre; c'est-à-dire sa signification contextuelle. Dans le cas où les problèmes mathématiques à contexte physique contiennent des symboles algébriques et mentionnent des unités de mesure : dans près du deux-cinquièmes des problèmes, l'unité de mesure de **tous** les symboles algébriques est présente; dans près du deux-cinquièmes des problèmes, l'unité de mesure de **certains** des symboles algébriques est présente; l'unité de mesure d'aucun symbole algébrique n'est pas précisée dans près d'un cinquième des problèmes (voir tableau 4.4).

Enfin, de manière à compléter notre réponse à la question de recherche mentionnée ci-haut, nous nous sommes intéressées à quelles unités de mesure apparaissent dans les problèmes mathématiques à contexte physique. À travers les problèmes mentionnant des unités de mesure, nous retrouvons la mention de 36 unités différentes (voir tableau 4.7). Notons premièrement qu'un peu plus de la moitié des unités mentionnées proviennent de l'ensemble cohérent des unités SI; ce qui peut indiquer qu'il ne revêt pas la même importance en mathématiques qu'en physique (où toutes les équations s'expriment avec l'ensemble cohérent des unités SI). Nous associons ce phénomène à une possible faiblesse au niveau de l'interdisciplinarité mathématiques-physique visée par la directive d'analyser des problèmes à contexte physique au courant de l'apprentissage de notions mathématiques (dans le devis ministériel encadrant le programme *Sciences de la nature*; voir section 1.2.2). Une manière de rapprocher les problèmes mathématiques à contexte physique aux problèmes physiques pourrait être d'utiliser davantage d'unités de mesure provenant de l'ensemble cohérent des unités SI. Deuxièmement, la majorité des unités mentionnées qui ne font pas partie du SI, mais qui sont acceptées avec celui-ci, possède un aspect temporel exprimé avec une autre unité de temps que la seconde (e.g. la minute). L'usage d'unités associés aux unités de temps qui ne font pas partie du SI (la minute, l'heure et le jour) n'est pas surprenant, car il est reconnu que ces dernières sont des « unités en dehors du SI [qui] sont très utilisées et [qui] continueront selon toute vraisemblance à l'être pendant de nombreuses années » (BIPM, 2019, p. 33; tableau 8). Il y a une seule unité qui ne fait pas

⁵³ L'importance des unités de mesure comme véhicules de sens (contextuel) sera mise de l'avant dans le chapitre 5 – Analyse et résultats : deuxième question de recherche.

partie du SI, en plus que son usage ne soit pas accepté avec celui-ci : le bar, une unité mesurant la pression qui équivaut à 100 000 Pa et qui correspond approximativement à la pression terrestre au niveau de la mer⁵⁴. Puisque, même en physique, il arrive que les unités de temps utilisés soient autres que la seconde dans l'énoncé de problèmes, nous pensons que réaliser un travail plus important, surtout en mathématique, sur la conversion de ces unités serait un atout pour les deux disciplines et favoriserait possiblement leur rapprochement. Ainsi, à part exception, les unités de mesure mentionnées à travers le corpus de problèmes mathématiques à contexte physique proviennent du SI (la majorité) ou sont des unités dont l'usage est accepté avec le SI; dont environ la moitié proviennent de l'ensemble cohérent des unités.

⁵⁴ La valeur de cette pression généralement utilisée est 101,3 kPa (101 300 Pa). À notre avis, l'utilisation de l'unité bar est superflue; il serait préférable d'utiliser directement les pascals ou kilopascals. Nous ne pouvons cependant pas nous prononcer sur l'importance en chimie (qui aborde la pression des gaz plus que la physique au niveau collégial) de cette unité.

CHAPITRE 5

ANALYSE ET RÉSULTATS : DEUXIÈME QUESTION DE RECHERCHE

Ce chapitre débute par le dressage d'un portrait du manuel *Calcul différentiel : Charron-Parent* basé sur la catégorisation des demandes mathématiques des (sous-)problèmes mathématiques à contexte physique. Il se poursuit en abordant les raisons derrière notre décision de sélectionner un nombre restreint de problèmes comme représentants du corpus et la manière dont nous avons fait usage de l'analyse catégorielle des sous-problèmes. Le chapitre continue par la présentation des informations récoltées sur les problèmes mathématiques à contexte physique sélectionnés et des analyses *a priori* réalisées sur ces derniers. Le chapitre s'attarde ensuite au traitement des actions contrôlées relevant des contrôles structural et opérationnel, ce qui amène des éléments de réponses à notre deuxième question de recherche *Quelles opportunités de contrôle (et de quels types) sur l'activité mathématique des étudiants l'usage des unités de mesure offre-t-il lors de la résolution de problèmes à contexte physique?* Puis, les limitations et les aspects interdisciplinaires soulevés par l'exercice d'un contrôle par les unités de mesure sont abordés. Le chapitre se conclut par une mise en lumière des avancées conceptuelles autour du contrôle passant par les unités.

5.1 Portrait du manuel en termes des demandes mathématiques (des sous-problèmes)

Afin de pouvoir étudier les opportunités d'un contrôle passant par les unités de mesure lors de la résolution des problèmes mathématiques à contexte physique issus du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*, nous avons voulu nous assurer de couvrir toutes les demandes mathématiques offertes par ce corpus de problèmes⁵⁵. Ainsi, nous avons classé les sous-problèmes (i.e. chaque sous-question) selon la demande mathématique au cœur de leur résolution. Le corpus de 98 problèmes contient un total de 329 sous-problèmes. Il y a un total de cinq sous-problèmes qui n'entrent dans aucune des catégories établies (voir tableau 5.1), car la résolution de quatre d'entre eux nécessite un ordinateur et que l'autre demande l'identification de l'unité d'une grandeur physique nouvellement définie. La distribution des 329 sous-problèmes du corpus est présentée dans le tableau 5.1.

Tableau 5.1 Distribution des sous-problèmes du corpus des problèmes mathématiques à contexte physique

Catégorisation des sous-problèmes		Qté	≈ %
S	Substitution de valeur(s) (explicite(s) ou implicite(s)) à partir d'une équation/fonction donnée ou construite précédemment	82	24,924

⁵⁵ Voir la section 3.6.

CÉ	Construction d'une équation à partir d'un contexte donné	68	20,669
R	Résolution d'une équation donnée ou construite précédemment (à partir d'une valeur explicite ou implicite)	55	16,717
L	Évaluation d'une ou plusieurs limites (explicites ou implicites) à partir d'une fonction/équation donnée ou construite précédemment	30	9,119
DF	Dérivation d'une fonction/équation donnée ou construite précédemment (fonction dérivée)	21	6,383
DP	Dérivation d'une fonction/équation donnée ou construite précédemment en un ou plusieurs points	15	4,559
CGà	Construction d'un graphique à l'aide d'une ou des expressions algébriques	14	4,255
IQn	Interprétation quantitative (numérique) d'un graphique	11	3,343
D	Démonstration d'une équation ou d'un résultat donné	8	2,432
A	Analyse d'une fonction/équation donnée ou construite précédemment	7	2,128
IQl	Interprétation qualitative d'un graphique	6	1,824
CGs	Construction d'un graphique sans l'aide d'expression algébrique	4	1,216
T	Transformation d'une ou plusieurs expressions algébriques données ou construites précédemment	3	0,912
Autres		Qté	≈ %
Résolution nécessitant un ordinateur		4	1,216
Identification de l'unité d'une nouvelle grandeur		1	0,304
		329	

Ainsi, l'analyse catégorielle des sous-problèmes selon leur demande mathématique nous a permis de sélectionner un nombre restreint de problèmes pouvant représenter notre corpus de 98 problèmes mathématiques à contexte physique car couvrant l'ensemble des demandes mathématiques recensées à travers celui-ci. Les critères généraux guidant cette sélection de problèmes seront abordés dans la section suivante.

5.2 Choix de problèmes pour l'analyse *a priori*

Pour tenter de répondre à notre deuxième question de recherche - *Quelles opportunités de contrôle (et de quels types) sur l'activité mathématique des étudiants l'usage des unités de mesure offre-t-il lors de la résolution de problèmes à contexte physique?* – nous avons choisi de sélectionner un petit nombre de problèmes représentant le corpus des problèmes mathématiques à contexte physique issus du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent* afin de les soumettre à une analyse *a priori*⁵⁶ orientée par notre conceptualisation⁵⁷ d'un contrôle (sur l'activité mathématique) par les unités de mesure. Dans le but de représenter fidèlement le corpus entier par une dizaine de problèmes, nous nous sommes assurées de respecter plusieurs critères. D'abord, les problèmes sélectionnés doivent obligatoirement couvrir l'ensemble des demandes mathématiques (voir tableau 5.1) à travers leurs sous-problèmes. Ensuite, nous avons tenté de sélectionner des problèmes possédant une variété de caractéristiques (e.g. équation, schéma, graphique), puisque les caractéristiques d'un problème ont une influence sur les composantes du contrôle qui seront sollicitées lors de sa résolution, tel qu'abordé à la section 2.3.2. Enfin, nous avons également tenté de choisir des problèmes provenant de différents chapitres du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*, afin de toucher à diverses notions du calcul différentiel et à multiples moments dans son apprentissage.

Les critères énumérés précédemment encadrent la sélection de problèmes autour de la représentation fidèle du corpus entier et concernent ainsi le profil mathématique des problèmes mathématiques à contexte physique. Évidemment, tel que son nom l'indique, ce type de problèmes possèdent un aspect physique important. Nous avons donc aussi porté notre attention sur le profil physique des problèmes lors de la sélection. À travers les divers problèmes répondant aux critères mathématiques, nous avons tenté de sélectionner ceux qui semblaient offrir un travail riche autour des unités de mesure, notamment en termes d'une action contrôlée. L'évaluation de cette richesse s'est déroulée en concomitance avec l'analyse catégorielle des problèmes, puisque la détermination de la demande mathématique des 329 sous-problèmes a nécessité une résolution rapide des 98 problèmes du corpus. Pendant ces résolutions, un journal de recherche a été maintenu dans lequel a été consigné mes observations sur la richesse que j'ai aperçue autour du travail sur les unités et du possible contrôle par ces dernières, telles que la nécessité d'une conversion d'unités par exemple. D'autres observations ont également été notées autour de l'aspect physique des (sous-)problèmes, telles que la nécessité de recourir à une notion physique externe à l'énoncé lors de la

⁵⁶ Voir chapitre 3, section 3.3.3.

⁵⁷ Voir chapitre 2, sections 2.4 et 2.5, notamment le tableau 2.16.

résolution. Nous avons également voulu sélectionner, si possible, des problèmes relevant d'une variété de contextes (champs) physiques.

Au final, nous avons sélectionné 13 problèmes mathématiques à contexte physique qui seront soumis à une analyse *a priori* afin d'explorer les opportunités de contrôle sur l'activité mathématique qu'offrent l'usage d'unités de mesure lors de leur résolution. Le tableau 5.2 présente les codes identifiant les problèmes choisis, les chapitres du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent* desquels ils proviennent, ainsi que les champs et sous-champs physiques desquels ils relèvent.

Tableau 5.2 Emplacement mathématique et contexte physique des problèmes sélectionnés

Problème	Chapitre	Champ	Sous-champ
10705	1 Limites et continuité	Mécanique	Cinématique
18413	2 Définition de la dérivée	Mécanique	Cinématique
19506	2 Définition de la dérivée	Mécanique	Cinématique
19910	2 Définition de la dérivée	Mécanique	Cinématique
27904	4 Taux de variation	Mécanique	Dynamique
28907	4 Taux de variation	Mécanique	Cinématique
29511	4 Taux de variation	Électricité et magnétisme	Circuits électriques
29612	4 Taux de variation	Mécanique	Cinématique
29613	4 Taux de variation	Électricité et magnétisme	Circuits électriques
29823	4 Taux de variation	Mécanique	Cinématique
29927	4 Taux de variation	Mécanique	Cinématique
43930	6 Problèmes d'optimisation	Mécanique	Cinématique
47412	7 Fonctions exponentielles et logarithmiques	Électricité et magnétisme	Induction électromagnétique

Comme nous pouvons le voir, la majorité des problèmes sélectionnés présentent un contexte physique sur la cinématique, c'est-à-dire sur la branche de la physique qui s'intéresse à « décrire le mouvement d'une particule à l'aide des notions de position, de déplacement, de vitesse et d'accélération » (Séguin *et al.*, 2010a, p. 7). Cela n'est pas surprenant, considérant qu'approximativement 62,24% des problèmes du corpus relèvent de ce sous-champ physique. Plusieurs des problèmes sélectionnés sont issus du chapitre 4 – *Taux de variation* du manuel, en cohérence avec le fait qu'il contient le plus grand nombre de problèmes mathématiques à contexte physique du manuel (32 problèmes sur 98; $\approx 32,65\%$). Le contexte d'un seul problème relève du champ physique de la mécanique et du sous-champ de la dynamique, c'est-à-dire une branche de la physique qui s'intéresse à l'utilisation « des trois lois de Newton afin d'analyser le mouvement d'un objet sous l'effet de la force gravitationnelle et de diverses forces de contact » (Séguin *et al.*, 2010a,

p. 181). Le contexte de deux problèmes relève du champ de l'électricité et magnétisme et porte, plus précisément, sur les circuits électriques et les divers éléments les composant, tels qu'un condensateur ou une résistance. Le contexte d'un seul problème relève du champ de l'électricité et du magnétisme et porte, plus précisément, sur l'induction électromagnétique, c'est-à-dire la production d'un courant électrique dans un conducteur soumis à un flux de champ magnétique variable.

Le tableau 5.3 permet de voir que le critère principal de sélection est respecté, c'est-à-dire que toutes les demandes mathématiques sont couvertes par au moins un sous-problème (sous-question) des 13 problèmes choisis.

Tableau 5.3 Classification par demandes mathématiques des sous-questions des 13 problèmes sélectionnés⁵⁸

Demandes mathématiques	10705	18413	19506	19910	24904	28907	29511	29612	29613	29823	29927	43930	47412
Transformation d'une ou plusieurs expressions algébriques données ou construites précédemment [T]									b)				
Substitution de valeur(s) (explicite(s) ou implicite(s)) à partir d'une équation/fonction donnée ou construite précédemment [S]	a.i) a.ii) a.iii)			b.i)	d)	b.i) b.ii) b.iii)		a.i) a.ii) c.i) c.ii)	a.i) a.ii) d) e)	b) c)			a.i) a.ii) a.iii)
Résolution d'une équation donnée ou construite précédemment (à partir d'une valeur explicite ou implicite) [R]					b) e)			d.i) d.ii) e)					
Dérivation d'une fonction/équation donnée ou construite précédemment en un ou plusieurs points [DP]					a)				c)				
Dérivation d'une fonction/équation donnée ou construite précédemment (fonction dérivée) [DF]						a)							
Évaluation d'une ou plusieurs limites (explicites ou implicites) à partir d'une fonction/équation donnée ou construite précédemment [L]	c)			a) b.ii)									
Analyse d'une fonction/équation donnée ou construite précédemment [A]													b)
Construction d'une équation à partir d'un contexte donné [CÉ]	b)				c)					a)		a)	
Démonstration d'une équation ou d'un résultat donné [D]								b)				b)	
Construction d'un graphique à l'aide d'une ou des expressions algébriques [CGà]				c)			c)						
Construction d'un graphique sans l'aide d'expression algébrique [CGs]		b)											

⁵⁸ Comme mentionné dans le chapitre 3 – Méthodologie, la sous-question a) du problème 29927 demande de déterminer l'unité d'une grandeur définie dans son énoncé; ce qui correspond au seul sous-problème du corpus ne relevant pas des 13 demandes mathématiques établies.

Interprétation quantitative (numérique) d'un graphique [IQn]			a) b) c) d)				a.i) a.ii) a.iii) b)				c.i) c.ii) c.iii)		
Interprétation qualitative d'un graphique [IQl]		a.i) a.ii) a.iii)									b)		

Comme nous pouvons le constater, beaucoup de sous-problèmes demandent de la substitution de valeurs – la demande mathématique la plus fréquente du corpus (82 sous-problèmes sur 329; $\approx 24,924\%$). L'analyse *a priori*, orientée par notre conceptualisation du contrôle par les unités de mesure, des 13 problèmes choisis comme représentants du corpus est présentée dans la section suivante.

5.3 Analyse *a priori* des 13 problèmes en termes du potentiel des unités comme outil de contrôle

Une fois ayant finalisée la sélection des 13 problèmes représentant le corpus de 98 mathématiques à contexte physique issus du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*, nous avons soumis ces derniers à une analyse *a priori* orientée par la conceptualisation du contrôle par les unités de mesure que nous avons développée dans le chapitre 2 – Cadre conceptuel (voir tableau 2.16 pour une synthèse). Ces analyses *a priori* nous permettront ainsi d'explorer le potentiel des unités de mesure comme outils de contrôle sur l'activité mathématique pendant la résolution de problèmes de calcul différentiel à contexte physique, c'est-à-dire d'amener des éléments de réponses à la (deuxième) question de recherche *Quelles opportunités de contrôle (et de quels types) sur l'activité mathématique des étudiants l'usage des unités de mesure offre-t-il lors de la résolution de problèmes à contexte physique (routiniers de niveau collégial)?* Les sections suivantes présentent les analyses *a priori* des 13 problèmes sélectionnés selon leur ordre d'apparition dans le manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*. Chaque section porte sur un seul problème. L'emplacement du problème dans l'apprentissage des notions de calcul différentiel prévu par le manuel est d'abord discuté, suivi de l'énoncé dudit problème et de la catégorisation – selon la demande mathématique – des sous-questions de ce dernier. Ensuite, les raisons précises derrière le choix du problème comme un représentant du corpus sont abordées. Puis, l'analyse *a priori* du problème est présentée. Enfin, un tableau regroupant les manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure soulevées par l'analyse *a priori* du problème conclut la section. Les analyses *a priori*, qui portent sur un contrôle de l'activité mathématique passant par les unités de mesure, nécessitent de résoudre le problème, c'est-à-dire de réaliser cette activité mathématique afin d'explorer le contrôle (par les unités) pouvant être exercé sur celle-ci. Ainsi, des extraits de résolution parsèment les analyses *a priori*. Nous avons fait le choix de présenter ces extraits de résolution en incluant les unités de mesure – même s'il ne s'agit pas d'une pratique mathématique – car notre intérêt réside sur les opportunités de contrôle offertes par l'usage des unités lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique.

5.3.1 Problème 10705

Le premier problème soumis à une analyse *a priori* se trouve dans la section 1.2 – *Indétermination de la forme $\frac{0}{0}$* du chapitre 1 – *Limites et continuité* du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*. Jusqu’à présent, les étudiants ont travaillé différentes approches (numérique, graphique et algébrique) de la notion de limite finie et ont appris diverses manipulations (algébriques) pouvant leur permettre d’évaluer une limite présentant une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$. Le contexte du problème 10705 – dont l’énoncé est présenté à la figure 5.1 – relève du champ physique de la mécanique, notamment du sous-champ de la cinématique.

Figure 5.1 Énoncé du problème 10705 (tiré du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*, 2023, p. 107)

Un train avance en ligne droite à une vitesse de 72 km/h, soit 20 m/s. Il se met à décélérer de manière constante à raison de 4 m/s². La position du train, en mètres, est ainsi donnée par $s(t) = -2t^2 + 20t$ si $t \in [0 \text{ s}, 5 \text{ s}]$.

- a) Sachant que la vitesse moyenne du train sur un intervalle de temps $[t_0, t_1]$ est donnée par $v_{moy} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$, calculer la vitesse moyenne du train
- i) sur $[0 \text{ s}, 2 \text{ s}]$;
 - ii) sur $[2 \text{ s}, 4 \text{ s}]$;
 - iii) sur $[0 \text{ s}, 5 \text{ s}]$.
- b) Déterminer f en fonction de t permettant de calculer la vitesse moyenne sur l’intervalle $[t \text{ s}, 2 \text{ s}]$ si $t < 2$ et $[2 \text{ s}, t \text{ s}]$ si $t > 2$. Préciser les unités de $f(t)$.
- c) Évaluer $\lim_{t \rightarrow 2} f(t)$. Interpréter le résultat.

Les demandes mathématiques apparaissant dans ce problème sont la substitution de valeurs (**a.i** à **a.iii**), la construction d’une équation (**b**) et le calcul d’une limite à partir d’une équation construite à la sous-question précédente (**c**).

Justification du choix du problème 10705

Le problème 10705 a été sélectionné puisqu’il est typique des problèmes mathématiques à contexte physique du début du manuel et du travail sur la vitesse moyenne et qu’il contient trois demandes mathématiques différentes, dont l’évaluation d’une limite (une demande moins fréquente). De plus, ce problème a attiré notre œil car une attention particulière est mise sur les unités de mesure et la dimension sémantique : on demande de préciser les unités de la fonction nouvellement construite dans la sous-question **b**) et on demande d’interpréter (en contexte, donc en terme du sens physique) le résultat d’une limite dans la sous-question **c**).

Analyse a priori du problème 10705

Suivant la lecture de la mise en situation initiale, c'est-à-dire la première partie de l'énoncé qui précède les sous-questions, il est nécessaire d'exercer un contrôle structural permettant la construction d'une représentation de cette situation initiale en sélectionnant et organisant les informations présentes dans cette partie d'énoncé : « Un train avance en ligne droite à une vitesse de 72 km/h, soit 20 m/s. Il se met à décélérer de manière constante à raison de 4 m/s^2 . La position du train, en mètres, est ainsi donnée par $s(t) = -2t^2 + 20t$ si $t \in [0 \text{ s}, 5 \text{ s}]$ » (Fortin et Poliquin, 2023, p. 107).

Il est intéressant de noter que la variable t n'est pas explicitement définie dans l'énoncé et que c'est l'exercice d'un contrôle sémantique sur les unités de mesure qui permet de déduire sa signification. Nous savons que la variable $s(t)$ représente la position d'un train avançant en ligne droite avec une vitesse initiale et une décélération constante s'exprimant en mètres, mais la seule information que nous avons sur t est l'intervalle de son domaine. Cependant, le symbole s, de l'unité seconde, accompagne les bornes de cet intervalle; ce qui nous permet d'inférer que la variable t représente un temps. Puisque l'intervalle commence à 0 s, il est raisonnable de supposer que t représente le temps écoulé depuis le début de la décélération du train (la décélération commence à $t = 0 \text{ s}$). L'apparition d'unités dans l'intervalle du domaine de t est une conséquence du contexte physique sur la notation mathématique; et dans ce cas précis, c'est cette conséquence sur la notation mathématique qui permet d'accéder au contexte physique (puisque la signification physique de t n'est pas explicite dans l'énoncé, mais peut être déduite grâce à cette information).

Un contrôle sémantique peut s'exercer sur les autres unités de mesure, ce qui nous permet de remarquer la présence de deux unités de mesure différentes de même nature : une vitesse est exprimée à la fois en km/h et en m/s. On remarque également que c'est la valeur exprimée en mètres par seconde qui est la plus pertinente dans ce problème, puisque la position du train est exprimée en m, que l'accélération est exprimée en m/s^2 et que le temps écoulé est exprimé en s. Une conversion d'unités peut être réalisée afin de valider l'équivalence des valeurs données de la vitesse initiale du train $\left(72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{72 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{72\,000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$. Effectuer une conversion d'unités demande un bon contrôle sémantique, pour l'équivalence des grandeurs de même nature (e.g. $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$), en conjonction avec un bon contrôle sur les nombres et opérations, pour la réalisation des bonnes opérations mathématiques.

La considération des unités de mesure peut permettre l'exercice d'un contrôle sémantique sur l'équation donnée dans la mise en situation initiale, $s(t) = -2t^2 + 20t$, qui représente la position d'un train en fonction du temps. Par le recours à la cohérence des unités – stipulant que seulement des termes possédant la même

unité peuvent être additionnés ou soustraits – nous pouvons accéder à la signification contextuelle des nombres présents dans l'équation. Puisque l'unité de $s(t)$ est le mètre, les termes $-2t^2$ et $20t$ doivent également s'exprimer en mètres. Cela, jumelé à la connaissance que l'unité de t est la seconde, permet de déduire que le facteur -2 possède l'unité m/s^2 et que le facteur 20 possède l'unité m/s ; ce qui est illustré à la figure 5.2. Pour clarifier, lorsque des crochets⁵⁹ [] sont mis autour d'une grandeur physique, cela signifie que nous faisons référence à l'unité de cette grandeur physique; $[s(t)]$ se lit comme l'unité de la position du train.

Figure 5.2 Contrôle sémantique sur l'équation $s(t) = -2t^2 + 20t$

$$\begin{array}{lcl}
 s(t) = -2t^2 + 20t & & s(t) = -2t^2 + 20t \\
 [s(t)] = [-2t^2] = [-2][t]^2 & & [s(t)] = [20t] = [20][t] \\
 [s(t)] = [-2][t]^2 & & [s(t)] = [20][t] \\
 \parallel & & \parallel \\
 m = \left(\frac{m}{s^2}\right) s^2 & & m = \left(\frac{m}{s}\right) s \\
 \\
 s(t) = -(2 \frac{m}{s^2}) t^2 + (20 \frac{m}{s}) t & &
 \end{array}$$

Puisque le facteur 20 s'exprime en mètres par seconde, nous savons qu'il s'agit d'une vitesse grâce au sens physique que véhicule l'unité m/s . Cela est cohérent avec l'information que la vitesse initiale du train (avant qu'il se mette à décélérer) est de 20 m/s (ou 72 km/h). Puisque le facteur -2 s'exprime en mètres par seconde au carré, nous savons qu'il est lié à l'accélération (qui est négative puisque le train décélère). Nous savons qu'il ne représente pas directement l'accélération, puisque cette information nous est donnée dans l'énoncé : l'accélération (constante) du train est de -4 m/s^2 . Cette différence (d'un facteur 2) est due à la dérivation d'un polynôme de degré 2; il s'agit cependant d'une notion qui n'a pas encore été travaillée avec les étudiants⁶⁰. Malgré cette nuance, l'exercice d'un contrôle sémantique sur l'équation $\left[s(t) = -\left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t^2 + \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)t\right]$ permet d'accéder au phénomène physique encodé par celle-ci [position = accélération $\cdot$ temps² + vitesse (initiale) $\cdot$ temps].

⁵⁹ Il s'agit d'une pratique issue de la physique.

⁶⁰ Il est à la personne enseignante de sélectionner le moment et la manière d'approcher cette nuance selon leurs objectifs didactiques. Par exemple, ce problème pourrait être donné ou revisité après l'enseignement de la dérivée, plutôt qu'avant, pour éviter de mélanger les étudiants. Il pourrait également être modifié en retirant la valeur de l'accélération du train, afin de rendre essentiel le décodage de l'équation pour l'obtention de cette information.

Deux remarques sur le symbolisme s'imposent. L'utilisation de la lettre s pour symboliser la variable position est une notation provenant du domaine de la physique. Généralement, cette lettre est utilisée pour représenter un déplacement ou une distance parcourue. Le choix de ce symbole soulève une nuance intéressante, car la même lettre est utilisée comme symbole de l'unité seconde. Cependant, notamment dans le cas d'un texte dactylographié, les symboles (uniques) des unités doivent obligatoirement être imprimés en caractères droits, tandis que les symboles des grandeurs (physiques) (généralement des lettres de l'alphabet grec ou latin) sont imprimés en italique (BIPM, 2019, p. 18).

Lorsque la résolution du problème débute, par la lecture de la première sous-question, le contrôle structural cède le pas au contrôle opérationnel, c'est-à-dire un contrôle « orienté cette fois vers le savoir quand et comment utiliser les mathématiques lors de l'opérationnalisation » (Rhéaume, 2020, p. 54). Pour les sous-questions **a.i)** à **a.iii)**, la demande mathématique est la même, c'est-à-dire la substitution de valeurs, puisque la formule permettant d'obtenir la vitesse moyenne – la grandeur recherchée – du train à partir de sa fonction position est donnée. Le tableau 5.4 contient la résolution de la sous-question **a.i)**⁶¹. Dans cette résolution, nous avons mis à profit l'équation de position du train enrichie précédemment par l'exercice d'un contrôle sémantique : $s(t) = -\left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t^2 + \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)t$.

Tableau 5.4 Résolution de la sous-question **a.i)** du problème 10705

Sous-problème 10705 a.i)	
a) Sachant que la vitesse moyenne du train sur un intervalle de temps $[t_0, t_1]$ est donnée par $v_{\text{moy}} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$, calculer la vitesse moyenne du train :	
i) sur $[0 \text{ s}, 2 \text{ s}]$;	
Résolution	
$v_{\text{moy}} \text{ sur } [0 \text{ s}, 2 \text{ s}]$ $v_{\text{moy}} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} \quad ; \quad v_{\text{moy}} = \frac{s(2 \text{ s}) - s(0 \text{ s})}{2 \text{ s} - 0 \text{ s}} \quad ; \quad s(t) = -2t^2 + 20t$ $s(t) = -\left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t^2 + \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)t$ $s(2 \text{ s}) = -\left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(2 \text{ s})^2 + \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(2 \text{ s})$ $= -\left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(4 \text{ s}^2) + \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(2 \text{ s})$ $= -8 \text{ m} + 40 \text{ m}$ $= 32 \text{ m}$ $s(0 \text{ s}) = -\left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0 \text{ s})^2 + \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(0 \text{ s})$ $= -\left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0 \text{ s}^2) + \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(0 \text{ s})$ $= 0 \text{ m}$	

⁶¹ La résolution des sous-questions **a.ii)** et **a.iii)** est très similaire et ne sera donc pas illustrée.

$$v_{\text{moy}} = \frac{32 \text{ m} - 0 \text{ m}}{2 \text{ s} - 0 \text{ s}} = \frac{32 \text{ m}}{2 \text{ s}} = \boxed{16 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$[v_{\text{moy}}] = \left[\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} \right] = \frac{[s(t_1) - s(t_0)]}{[t_1 - t_0]} = \frac{\overbrace{[s(t)]}^{\text{m}}}{\underbrace{[t]}_s} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Comme la sous-question demande de calculer la *vitesse* moyenne du train pour un certain intervalle de temps, nous pouvons anticiper que l'unité de notre résultat devrait être le mètre par seconde (le rapport d'une unité de distance et d'une durée), surtout que nous avons précédemment établi que la vitesse présente dans l'équation de position est exprimée en m/s. Comme nous pouvons voir, conserver les unités pendant la résolution permet de valider, à l'issue des calculs, que l'unité de notre résultat est belle et bien le mètre par seconde. De plus, conserver les unités de mesure pendant les calculs permet de surveiller notre résolution, puisqu'être amené à additionner ou soustraire des termes possédant une unité différente contredit la cohérence des unités; et que la présence d'une telle contradiction peut indiquer qu'une erreur est survenue pendant la résolution. La conservation des unités n'est pas la seule manière de valider notre anticipation – que l'unité de notre résultat (la vitesse moyenne) est le m/s – puisque nous pouvons faire une preuve d'unités sur la formule de la vitesse moyenne (voir le bas du tableau 5.4).

La sous-question **b)**, quant à elle, demande la construction d'une nouvelle fonction permettant de calculer la vitesse moyenne du train sur certains intervalles, et de préciser l'unité de cette nouvelle fonction. La demande portant directement sur les unités de mesure nous intéresse grandement. Pour nous, cette dernière permet de sonner une clochette de vigilance chez les étudiants de porter une certaine attention aux unités de mesure (un élément rarement important ou même présent dans les problèmes purement mathématiques).

Tableau 5.5 Résolution de la sous-question **b)** du problème 10705

Sous-problème 10705 b)	
b) Déterminer f en fonction de t permettant de calculer la vitesse moyenne sur l'intervalle $[t \text{ s}, 2 \text{ s}]$ si $t < 2$ et $[2 \text{ s}, t \text{ s}]$ si $t > 2$. Préciser les unités de $f(t)$.	
Résolution	
$f(t) \text{ t.q. } f(t) = \begin{cases} v_{[1, 2 \text{ s}]} & 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ v_{[2 \text{ s}, t]} & 2 \text{ s} < t < 5 \text{ s} \end{cases}$	
$v_{[1, 2 \text{ s}]} = \frac{s(2 \text{ s}) - s(t)}{2 \text{ s} - t}$	$s(t) = -\left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t^2 + \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)t \quad v_{[2 \text{ s}, t]} = \frac{s(t) - s(2 \text{ s})}{t - 2 \text{ s}}$

$$\begin{aligned}
 V_{[t, 2s]} &= \frac{-\left(2\frac{m}{s^2}\right)(2s)^2 + (20\frac{m}{s})(2s) + \left(2\frac{m}{s^2}\right)t^2 - (20\frac{m}{s})t}{2s - t} \\
 &= \frac{-8m + 40m + \left(2\frac{m}{s^2}\right)t^2 - (20\frac{m}{s})t}{2s - t} \\
 &= \frac{\left(2\frac{m}{s^2}\right)t^2 - (20\frac{m}{s})t + 32m}{2s - t} \\
 &= \frac{-\left(2\frac{m}{s^2}\right)t^2 + (20\frac{m}{s})t - 32m}{t - 2s} \\
 V_{[2s, t]} &= \frac{-\left(2\frac{m}{s^2}\right)t^2 + (20\frac{m}{s})t + \left(2\frac{m}{s^2}\right)(2s)^2 - (20\frac{m}{s})(2s)}{t - 2s} \\
 &= \dots = \frac{-\left(2\frac{m}{s^2}\right)t^2 + (20\frac{m}{s})t - 32m}{t - 2s}
 \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{-\left(2\frac{m}{s^2}\right)t^2 + (20\frac{m}{s})t - 32m}{t - 2s} \quad t \in [0s, 5s] \setminus \{2s\}$$

$$\begin{aligned}
 [f(t)] &= \frac{\left[2\frac{m}{s^2}\right][t]^2}{[t - 2s]} = \frac{\left[20\frac{m}{s}\right][t]}{[t - 2s]} = \frac{[32m]}{[t - 2s]} \\
 &\quad \begin{array}{ccc}
 \parallel & \parallel & \parallel \\
 \frac{\left(\frac{m}{s^2}\right)(s)^2}{s} & \frac{\left(\frac{m}{s}\right)(s)}{s} & \frac{m}{s} \\
 \parallel & \parallel & \\
 m/s & m/s &
 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$[f(t)] = \frac{m}{s}$$

Dans la sous-question **b)**, lorsque les intervalles sont présentés, une seule restriction est présente sur le temps t (soit $t < 2s$ ou $t > 2s$). Cependant, par le domaine de la fonction position $s(t)$, $t \in [0s, 5s]$, qui est utilisée dans la construction de $f(t)$, nous pouvons compléter les restrictions sur t . Ainsi, nous obtenons les intervalles $[t, 2s]$ où $0s < t < 2s$ et $[2s, t]$ où $2s < t < 5s$. Après avoir manipuler les expressions de $v_{[t, 2s]}$ où $0s < t < 2s$ et $v_{[2s, t]}$ où $2s < t < 5s$, nous pouvons constater quelles sont égales lorsque $t \in [0s, 5s] \setminus \{2s\}$. Maintenant, que la fonction $f(t)$ est construite, nous pouvons préciser son unité par une preuve d'unités (voir le bas du tableau 5.5). Évidemment, nous pouvions également anticiper son unité dès le début, puisqu'elle représente la vitesse moyenne du train sur un certain intervalle de temps. Puisque nous avons travaillé dès le début avec l'unité des facteurs numériques de $s(t)$ dans la construction de $f(t)$, nous obtenons naturellement l'unité pour chacun des facteurs numériques de $f(t)$. Nous pouvons également vérifier que la cohérence des unités à travers $f(t)$ est respectée, car, comme le dit Rowland (2006), « while an equation can be wrong if the units are right, an equation can't be right if the units are wrong » (p. 553).

Une remarque autour des différences entre le symbolisme en mathématiques et le symbolisme en physique est nécessaire. En physique, l'unité d'une grandeur physique est implicitement contenue dans la représentation de cette dernière par un symbole algébrique; par exemple, le symbole t représente une quantité de **secondes** (une valeur numérique accompagnée de l'unité seconde). Cependant, il semble qu'en mathématiques ce n'est pas le cas, car le manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent* utilise une notation où

le symbole de la variable ne représente que la valeur numérique; par exemple, l'intervalle $[t \text{ s}, 2 \text{ s}]$ est présent dans l'énoncé de la sous-question **b)** du problème 10705 (voir tableau 5.5).

En ce qui concerne la sous-question **c)**, l'évaluation d'une limite est demandée (voir tableau 5.6). En termes d'un contrôle opérationnel, nous pouvons d'abord anticiper l'unité du résultat (la limite), puisqu'elle devrait être celle de la fonction elle-même (ici m/s). Cette anticipation peut être vérifiée en conservant les unités des facteurs numériques lors de la simplification de l'expression algébrique de la fonction $f(t)$ – nécessaire afin d'éviter l'indétermination de la forme $\frac{0}{0}$ – et lors de l'évaluation de la limite, comme illustré dans le tableau 5.6. Une telle considération des unités requiert un bon contrôle sur les nombres et opérations en conjonction avec un contrôle sémantique; puisque les règles encadrant les opérations sur les unités⁶² diffèrent des règles algébriques standard.

Tableau 5.6 Résolution de la sous-question **c)** du problème 10705

Sous-problème 10705 c)
c) Évaluer $\lim_{t \rightarrow 2} f(t)$. Interpréter le résultat.
Résolution
$\lim_{t \rightarrow 2 \text{ s}} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2 \text{ s}} \left[\frac{-(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})t^2 + (20 \frac{\text{m}}{\text{s}})t - 32 \text{ m}}{t - 2 \text{ s}} \right]$ $f(t) = \frac{-(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})t^2 + (20 \frac{\text{m}}{\text{s}})t - 32 \text{ m}}{t - 2 \text{ s}} = \frac{(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(t^2 - 10 \text{ s } t + 16 \text{ s}^2)}{t - 2 \text{ s}}$ $= \frac{(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(t^2 - 8 \text{ s } t - 2 \text{ s } t + 16 \text{ s}^2)}{t - 2 \text{ s}} = \frac{(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(t(t - 8 \text{ s}) - 2 \text{ s}(t - 8 \text{ s}))}{t - 2 \text{ s}}$ $= (-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \frac{(t - 8 \text{ s})(\cancel{t - 2 \text{ s}})}{(\cancel{t - 2 \text{ s}})} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (t - 8 \text{ s})$ $\lim_{t \rightarrow 2 \text{ s}} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2 \text{ s}} \left[\frac{-(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})t^2 + (20 \frac{\text{m}}{\text{s}})t - 32 \text{ m}}{t - 2 \text{ s}} \right] = \lim_{t \rightarrow 2 \text{ s}} \left[-2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (t - 8 \text{ s}) \right]$ $= -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (2 \text{ s} - 8 \text{ s}) = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (-6 \text{ s}) = \boxed{12 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$ La vitesse instantanée du train est de 12 m/s lorsque $t = 2 \text{ s}$.

⁶² Telles que l'addition et la soustraction ne peuvent être réalisées qu'avec la même unité et que la somme ou la différence possède également cette unité.

Une partie intéressante de la sous-question **c)** est la demande supplémentaire d’interpréter le résultat (la limite évaluée). Cette demande reflète directement le critère de performance « interprétation juste des résultats » (MES, 2022, p. 24) associé à l’énoncé de compétence « effectuer l’analyse de problèmes liés aux sciences de la nature » (p. 24) du cours de calcul différentiel, tel qu’écrit dans le devis ministériel encadrant le programme *Sciences de la nature*. L’interprétation du résultat en contexte, donc ici avec sa signification physique (c’est-à-dire la grandeur physique que le résultat représente) passe par son unité, puisque nous pouvons reconnaître, par l’exercice d’un contrôle sémantique, que le mètre par seconde (m/s) est l’unité dérivée SI associée à la vitesse. L’aspect « instantané » de la vitesse est dû à la présence de la limite qui est évaluée à l’instant $t = 2$ s. La vitesse instantanée du train lorsque $t = 2$ s peut être obtenue (ou validée) en raisonnant sur le contexte physique. La vitesse initiale du train est de 20 m/s et il décélère de 4 m/s^2 pendant 2 s; ainsi sa vitesse (après 2 s) a diminué de $(4 \text{ m/s}^2)(2 \text{ s}) = 8 \text{ m/s}$ et est maintenant de $(20 - 8) \text{ m/s} = 12 \text{ m/s}$. Dans ce raisonnement – s’appuyant sur l’exercice d’un contrôle sémantique – les unités permettent d’explicitier les liens entre les grandeurs en jeu (et leur valeur), puisqu’elles font le pont entre les nombres et leur signification contextuelle (physique). De cette façon, l’exercice d’un contrôle sémantique sur la situation et la demande mathématique de la sous-question peut servir comme une forme de validation (physique) d’un résultat obtenu mathématiquement (évaluation d’une limite).

Synthèse de l’analyse a priori du problème 10705

Le tableau 5.7 ci-dessous présente la synthèse de l’analyse *a priori* du problème 10705 en regroupant les différentes manifestations d’un contrôle par les unités de mesure qu’elle a permis de relever au fil de la résolution du problème en question. Chaque analyse *a priori* (pour les 13 problèmes mathématiques à contexte physique) sera suivie d’un tableau synthèse similaire. Afin de faciliter la lecture de ces tableaux, les différentes parties le composant seront décrites imminemment. La section du haut regroupe les caractéristiques du problème (présence d’une équation, d’un schéma ou d’un graphique) et la demande mathématique de chaque sous-problème. La section du milieu, le corps du tableau, rassemble les manifestations d’un contrôle structural et d’un contrôle opérationnel passant par les unités de mesure pouvant être sollicitées pendant la résolution du problème. Les manifestations relevées s’appuient sur la conceptualisation d’un contrôle par les unités de mesure élaborée au chapitre 2 (voir tableau 2.16 pour une synthèse). Nous avons trouvé plus pertinent d’organiser ces manifestations autour d’actions contrôlées liées aux unités de mesure qui mettent en œuvre une ou plusieurs composantes du contrôle dans un but précis. Les actions contrôlées sont écrites en italique dans le tableau synthèse (e.g. *anticipation d’unité*). La (ou les) composante(s) associée(s) à une action contrôlée sont mentionnée(s) dans les colonnes extérieures du tableau, écrite(s) verticalement (e.g. anticipation sur le résultat et contrôle sémantique). La (ou les) manifestation(s) de l’action contrôlée se trouve(nt) dans la case encadrée par le nom de l’action et la (ou les)

composante(s) du contrôle associée à cette dernière (e.g. l'unité de la grandeur recherchée peut être anticipée). Dans le cas du contrôle opérationnel, la ou les demandes mathématiques ayant sollicitée(s) une manifestation d'un contrôle par les unités de mesure est (sont) incluse(s) dans la même case que la manifestation. La section du bas (facultative) contient d'autres éléments que jugeons importants, le cas échéant, autour de la résolution du problème – notamment autour des unités de mesure – mais qui ne concerne pas directement un contrôle sur l'activité mathématique passant par les unités.

Tableau 5.7 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 10705

Problème 10705			
L'énoncé initial contient une équation. a.i), a.ii), a.iii) : substitution de valeurs b) : construction d'une équation c) : évaluation d'une limite			
	Contrôle structural	Contrôle opérationnel	
	<i>Contrôle sur les unités</i>	<i>Anticipation d'unité</i>	
Contrôle sémantique	Permet de déduire la signification contextuelle d'une grandeur non définie.	L'unité de la grandeur recherchée peut être anticipée. [substitution de valeurs, construction d'une équation, évaluation d'une limite]	Anticipation sur le résultat et contrôle sémantique
	<i>Conversion d'unités</i>	<i>Conservation des unités</i>	
Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations	Permet de valider l'équivalence d'une grandeur exprimée avec deux unités différentes de même nature.	Permet d'augmenter la sensibilité à la contradiction (et la perception d'erreurs) et de vérifier l'unité anticipée (de la grandeur recherchée). [substitution de valeurs, construction d'une équation, évaluation d'une limite] Permet d'obtenir directement l'unité des facteurs numériques d'une nouvelle équation. [construction d'une équation]	Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations
	<i>Contrôle sur l'équation</i>	<i>Vérification par le contexte physique</i>	
Contrôle sémantique	Permet (avec la cohérence des unités) de déterminer l'unité des facteurs numériques et d'accéder au phénomène physique encodé.	Les unités permettent d'explicitier les liens entre les grandeurs (et leur valeur numérique) et donc de raisonner sur le contexte physique. [évaluation d'une limite]	Vérification par un retour à la représentation et contrôle sémantique
Remarques			

Symbolisme :

- Une notation physique est utilisée dans ce problème ($s(t)$).
- Une confusion est possible, car le même symbole est utilisé pour désigner une grandeur (caractère en italique; symbole suggéré) et une unité (caractère droit; symbole obligatoire).
- En physique, l'unité est implicitement incluse dans la représentation d'une grandeur par un symbole algébrique; au contraire des mathématiques.

Demandes sur les unités :

- Une sous-question demande explicitement de préciser l'unité d'une nouvelle grandeur.
- Une sous-question demande d'interpréter un résultat, impliquant ainsi l'unité du résultat, car cette dernière relie la valeur numérique du résultat à sa signification contextuelle (i.e. son sens physique).

5.3.2 Problème 18413

Le deuxième problème soumis à une analyse *a priori* se trouve dans la section 2.2 – *Taux de variation instantané et dérivée d'une fonction en un point* du chapitre 2 – *Définition de la dérivée* du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*. Jusqu'à présent, les étudiants ont travaillé les notions suivantes : limite finie et indétermination de la forme $\frac{0}{0}$; limite infinie, limite à l'infini et asymptotes (indéterminations de la forme $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ et $\pm\infty \mp \infty$); continuité (en un point, sur un intervalle); taux de variation moyen sur un intervalle; vitesse moyenne et pente d'une droite sécante; taux de variation instantané, dérivée en un point et continuité en un point; vitesse instantanée et pente de la droite tangente. Le contexte du problème 18413 – dont l'énoncé est présenté à la figure 5.3 – relève du champ de la mécanique et du sous-champ de la cinématique (à l'instar du problème 10705).

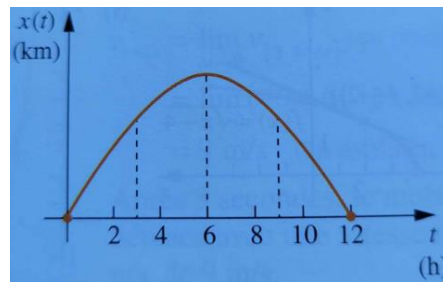
Figure 5.3 Énoncé du problème 18413 (tiré du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*, 2023, p. 184)

Voici un graphique illustrant la position x d'un mobile suivant une trajectoire rectiligne en fonction du temps t , où $t \in [0 \text{ h}, 12 \text{ h}]$.

a) Compléter les expressions suivantes par « < 0 », par « $= 0$ » ou par « > 0 » en justifiant la réponse.

- i) $v_{t=3 \text{ h}}$
- ii) $v_{t=6 \text{ h}}$
- iii) $v_{t=9 \text{ h}}$

b) Donner une esquisse possible du graphique de la fonction vitesse.



Les demandes mathématiques apparaissant dans ce problème sont l'interprétation qualitative d'un graphique (**a.i** à **a.iii**) et la construction d'un graphique sans l'aide d'expression algébrique (**b**).

Justification du choix du problème 18413

Le problème 18413 a été sélectionné puisqu'il est typique des problèmes mathématiques à contexte physique mettant de l'avant les liens qualitatifs entre la pente de la droite tangente et la vitesse instantanée. Ce problème contient également deux demandes mathématiques moins communes, c'est-à-dire l'interprétation qualitative d'un graphique et la construction d'un graphique sans l'aide d'expression algébrique. De plus, ce problème a attiré notre œil, car l'unité des grandeurs position et temps sont contenues à l'intérieur d'autres éléments (dans un intervalle (h) et sur l'axe vertical (km) du graphique); et que ces unités ne sont pas les unités de base SI associées à ces grandeurs (m pour la position et s pour le temps).

Analyse a priori du problème 18413

Suivant la lecture de la mise en situation initiale, c'est-à-dire la première partie de l'énoncé qui précède les sous-questions, il est nécessaire d'exercer un contrôle structural permettant la construction d'une représentation de cette situation initiale en sélectionnant et organisant les informations présentes dans cette partie d'énoncé : « Voici un graphique illustrant la position x d'un mobile suivant une trajectoire rectiligne en fonction du temps t , où $t \in [0 \text{ h}, 12 \text{ h}]$ » (Fortin et Poliquin, 2023, p. 184). Nous pouvons d'abord déduire que le temps t s'exprime en heures, puisque cette unité apparaît dans les bornes de l'intervalle auquel il appartient. Cette information, ainsi que l'unité associée à la position, peut être déduite par l'exercice d'un contrôle sémantique sur les axes du graphique illustrant la position d'un mobile – car le titre de l'axe vertical est $\frac{x(t)}{(\text{km})}$ – en fonction du temps – car le titre de l'axe horizontal est $\frac{t}{(\text{h})}$. L'exercice d'un contrôle sémantique sur la courbe présentée dans le graphique, en conjonction avec la première partie de l'énoncé, permet de l'interpréter en contexte. D'abord, nous savons que le mobile suit une **trajectoire rectiligne**, c'est-à-dire que le mobile ne peut qu'avancer ou reculer en une ligne droite. Puis, la courbe illustre la **position** du mobile par rapport à un certain point de départ, et non la **distance parcourue**, puisque cette dernière serait représentée par une courbe croissante, même si le mobile recule. Ensuite, nous pouvons déduire le mouvement du mobile en fonction du temps : puisque la courbe est croissante sur $[0 \text{ h}, 6 \text{ h}]$, le mobile s'éloigne de son point de départ pendant les 6 premières heures; puisque la courbe est décroissante sur $[6 \text{ h}, 12 \text{ h}]$, cela indique que le mobile se met ensuite à reculer pendant les 6 dernières heures, jusqu'à retourner à son point de départ. Enfin, nous pouvons aller plus loin et remarquer que la courbe est symétrique par rapport à $t = 6 \text{ h}$, ce qui indique que l'éloignement et le rapprochement sont symétriques. Une remarque

s'impose, car une confusion est possible entre le tracé de la courbe illustrée dans le graphique et entre la trajectoire (le mouvement) réalisée par le mobile; ce qui résulte par l'assomption (incorrecte) que le mobile suit une trajectoire parabolique. Cela rejoint les propos de Passaro et DeBlois (2020) :

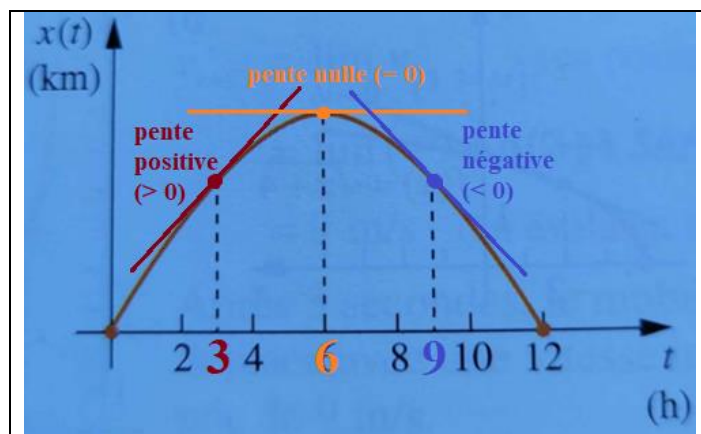
Les travaux de Saboya et Bednarz (2008), de même que ceux de Janvier (1993), illustrent comment certains élèves considèrent le graphique comme un dessin, ce qui les conduit à privilégier une description du tracé plutôt qu'une interprétation de la relation entre les deux grandeurs représentée par le tracé. (p. 23)

Cette assomption peut possiblement s'expliquer par le fait que le mouvement d'un ballon lancé avec un certain angle aigu sous la force gravitationnelle décrit une trajectoire parabolique semblable à la courbe illustrée dans le graphique. Comme le soulève Passaro et DeBlois (2020), « certaines situations comme celle du lancer d'un ballon créant une parabole sont particulièrement propices à la confusion entre ces deux représentations visuelles [tracé d'une trajectoire et représentation graphique] » (p. 24). Cependant, tout le sens physique (en contexte) auquel nous avons accédé par l'exercice d'un contrôle sémantique sur le graphique (et l'énoncé) permet d'éviter ou de dépasser cette confusion. Notamment, une contradiction émerge entre l'assomption erronée et l'énoncé, puisqu'il est explicitement mentionné dans ce dernier que le mobile suit une trajectoire rectiligne (et non parabolique!); ainsi l'interprétation en contexte, qui s'appuie sur les unités de mesure, permet de dépasser cette contradiction.

Pour les sous-questions **a.i)** à **a.iii)** (voir tableau 5.8), le contrôle opérationnel peut s'exercer par l'anticipation que la résolution nécessite le recours à la connaissance que la vitesse instantanée correspond à la valeur de la pente de la droite tangente à la position du mobile à cet instant. Un contrôle sur le graphique peut ensuite se mettre en place en esquissant les droites tangentes aux points mis en valeur par les traits pointillés dans le graphique ($t \in \{3 \text{ h}, 6 \text{ h}, 9 \text{ h}\}$).

Tableau 5.8 Résolution des sous-questions **a.i)** à **a.iii)** du problème 18413

Sous-problèmes 18413 a.i) à a.iii)
a) Compléter les expressions suivantes par « < 0 », par « $= 0$ » ou par « > 0 » en justifiant la réponse. i) $v_{t=3 \text{ h}}$ ii) $v_{t=6 \text{ h}}$ iii) $v_{t=9 \text{ h}}$
Résolution

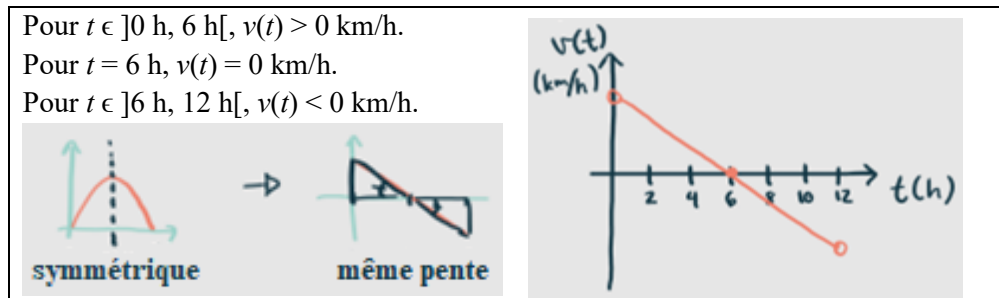


La représentation visuelle des droites tangentes permet de déterminer aisément si leur pente – et donc la valeur de la vitesse instantanée – est positive (droite croissante), nulle (droite constante) ou négative (droite décroissante). L'exercice d'un contrôle sémantique sur la vitesse et les unités associées à la position (km) et le temps (h) permet de déterminer que la vitesse s'exprime en km/h (la vitesse est le rapport d'une différence de position et d'une durée). Ainsi, nous pouvons compléter les réponses : **a.i)** $v_{t=3\text{ h}} > 0$ km/h, **a.ii)** $v_{t=6\text{ h}} = 0$ km/h, **a.iii)** $v_{t=9\text{ h}} < 0$ km/h.

Pour la sous-question **b)**, qui demande la construction d'un graphique, nous devons connaître l'unité des grandeurs physiques qui sont les variables indépendante et dépendante afin de compléter les axes du graphique. Puisqu'on demande une possible esquisse du graphique de la fonction vitesse (par rapport au temps en h), nous pouvons déterminer qu'elle s'exprime en km/h, tel que raisonné précédemment. L'esquisse résultante, telle que présentée dans le tableau 5.9, devrait contenir deux points vides, puisque la dérivée d'une fonction n'est pas définie aux bornes du domaine de cette fonction. Cependant, au stade où se trouve les étudiants, nous nous attendons à ce qu'ils utilisent plutôt des points pleins; c'est-à-dire qu'ils résolvent la sous-question sans aborder cette nuance autour du domaine de la fonction vitesse (i.e. la fonction dérivée de la position $x(t)$).

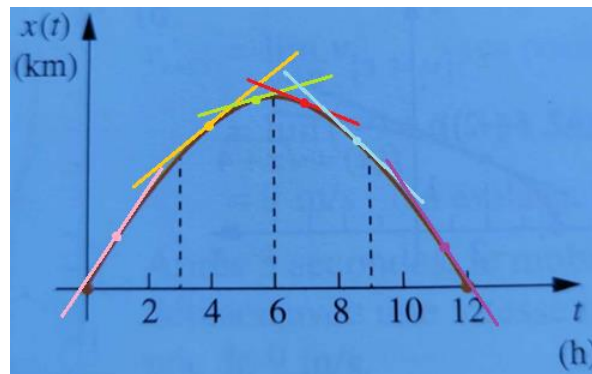
Tableau 5.9 Résolution de la sous-question **b)** du problème 18413

Sous-problème 18413 b)
b) Donner une esquisse possible du graphique de la fonction vitesse.
Résolution



La réponse de la sous-question **a.i)** – que la vitesse instantanée à l’instant $t = 3 \text{ h}$ est plus grande que 0 km/h – peut être étendue aux 6 premières heures, c’est-à-dire que la vitesse du mobile est plus grande que 0 km/h (positive) pendant l’intervalle de temps où le mobile s’éloigne de son point de départ. Un raisonnement similaire permet de déduire que la vitesse du mobile est plus petite que 0 km/h (négative) pendant l’intervalle de temps (les 6 dernières heures) où le mobile se rapproche (en reculant) de son point de départ. Évidemment, nous savons déjà que la vitesse à l’instant $t = 6 \text{ h}$ est de 0 km/h . De plus, la symétrie de la courbe illustrant la position du mobile en $t = 6 \text{ h}$ permet de déduire que la fonction vitesse est une droite à pente négative. Cette déduction peut être validée par l’exercice d’un contrôle sémantique sur le graphique position par l’esquisse de plusieurs droites tangentes (voir figure 4.6).

Figure 5.4 Esquisses de droites tangentes



Nous pouvons constater que la pente de la droite tangente **rose** est plus grande que la pente de la droite tangente **ocre** qui est plus grande que la pente de la droite tangente **verte**, c’est-à-dire que $v(t_1) > v(t_2) > v(t_3) > 0 \text{ km/h}$. Un raisonnement similaire permet de déduire que $0 \text{ km/h} > v(t_4) > v(t_5) > v(t_6)$. Bref, la fonction vitesse du mobile est (une droite)⁶³ décroissante (due à la symétrie de sa courbe position).

⁶³ Il semble implicite que la courbe présente dans le graphique est une parabole.

Tableau 5.10 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 18413

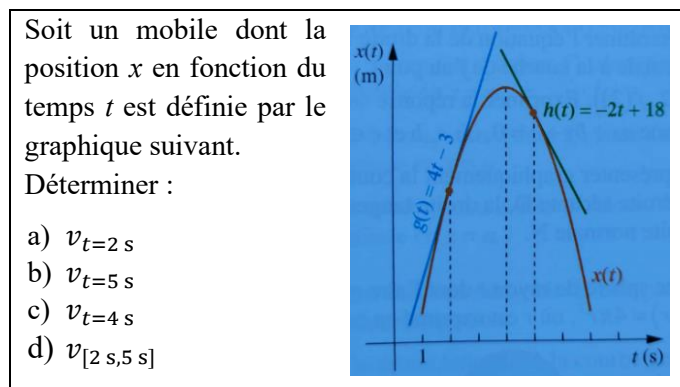
Problème 18413			
L'énoncé initial contient un graphique. a.i), a.ii), a.iii) : interprétation qualitative d'un graphique b) : construction d'un graphique sans l'aide d'expression algébrique			
Contrôle structural		Contrôle opérationnel	
	<i>Contrôle sur le graphique</i>	<i>Contrôle sur les unités</i>	
Contrôle sémantique	Permet de faire plusieurs déductions et d'améliorer la compréhension du graphique et du phénomène qu'il représente.	Permet de déduire, à partir des unités (des grandeurs) présentes, l'unité d'une grandeur connexe. [interprétation qualitative d'un graphique]	Contrôle sémantique
		<i>Contrôle sur le graphique</i> Permet d'ajouter des éléments pertinents à la résolution sur le graphique. L'unité des grandeurs (indépendante et dépendante) est nécessaire pour l'identification des axes. [construction d'un graphique sans l'aide d'expression algébrique]	Contrôle sémantique
Remarques			
▪ Une confusion est possible entre la description du tracé (dans une représentation graphique) et l'interprétation de la relation entre les deux grandeurs représentée par le tracé. Cette confusion peut entraîner l'émergence d'une contradiction et l'exercice d'un contrôle sur le graphique permet de dépasser cette dernière grâce à l'obtention d'une meilleure compréhension de la représentation graphique. ▪ Sans impliquer ouvertement les unités de mesure, le contrôle opérationnel peut passer par une anticipation sur la planification de la résolution : la nécessité d'avoir recours à une connaissance reliant les registres graphique et algébrique peut être anticipée [interprétation qualitative d'un graphique].			

5.3.3 Problème 19506

Le troisième problème soumis à une analyse *a priori* se trouve dans la section *Activités d'apprentissage* de la fin du chapitre 2 – *Définition de la dérivée* du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*. Jusqu'à présent, les étudiants ont travaillé les notions suivantes : limite finie et indétermination de la forme $\frac{0}{0}$; limite infinie, limite à l'infini et asymptotes (indéterminations de la forme $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ et $\pm\infty \mp \infty$); continuité (en un

point, sur un intervalle); taux de variation moyen sur un intervalle; vitesse moyenne et pente d'une droite sécante; taux de variation instantané, dérivée en un point et continuité en un point; vitesse instantanée et pente de la droite tangente; fonction dérivée (définie comme $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$). Le contexte du problème 19506 – dont l'énoncé est présenté à la figure 5.5 – relève du champ de la mécanique et du sous-champ de la cinématique (à l'instar des problèmes 10705 et 18413).

Figure 5.5 Énoncé du problème 19506 (tiré du manuel *Calcul différentiel*: Charron-Parent, 2023, p. 195)



Les quatre sous-questions (**a**, **b**, **c**, **d**) du problème ont la même demande mathématique, c'est-à-dire l'interprétation quantitative (donc faisant intervenir des nombres) d'un graphique.

Justification du choix du problème 19506

Le problème 19506 a été sélectionné puisqu'il est typique des problèmes mathématiques à contexte physique mettant de l'avant les liens entre la droite tangente et la vitesse instantanée à la fois dans le registre algébrique et dans le registre graphique, en plus de toucher la droite sécante et la vitesse moyenne. Ce problème a attiré notre œil, car l'unité des grandeurs position et temps est seulement présente dans le graphique (les axes vertical et horizontal). De plus, le graphique contient l'équation de deux droites tangentes à la courbe dont le sens physique n'est pas abordé; ce qui semble ouvrir la porte à l'utilisation des unités de mesure (attachées au graphique) comme façon d'approcher cette signification contextuelle.

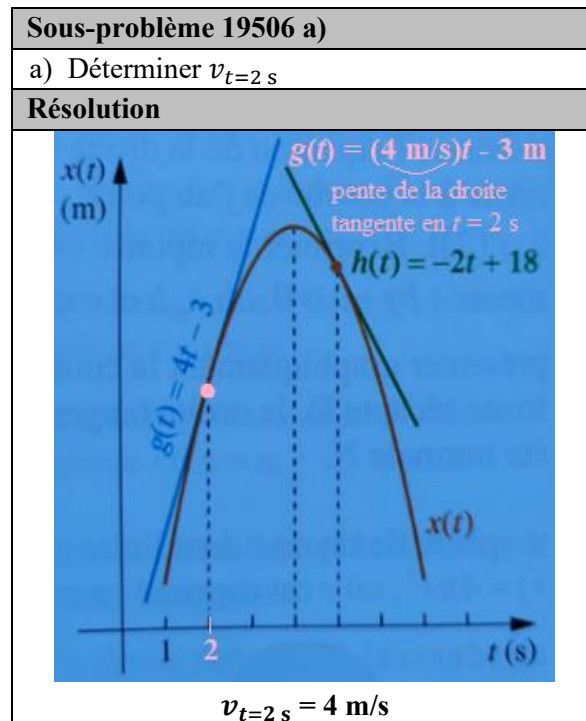
Analyse a priori du problème 19506

Suivant la lecture de la mise en situation initiale, c'est-à-dire la première partie de l'énoncé qui précède les sous-questions, il est nécessaire d'exercer un contrôle structural permettant la construction d'une représentation de cette situation initiale en sélectionnant et organisant les informations présentes dans cette partie d'énoncé : « Soit un mobile dont la position x en fonction du temps t est définie par le graphique

suivant » (Fortin et Poliquin, 2023, p. 195). Comme dans le problème 18413, il faut exercer un contrôle sémantique sur les axes du graphique afin de déterminer que la position $x(t)$ s'exprime en mètre et que le temps t s'exprime en seconde. En plus de la courbe $x(t)$, le graphique contient l'équation de deux droites (tangentes à cette courbe) : $g(t) = 4t - 3$ et $h(t) = -2t + 18$. Un contrôle sémantique sur ces équations peut être exercé – basé sur la cohérence des unités (comme illustré dans la figure 4.4 associé au problème 10705) – ce qui permet de déterminer l'unité des facteurs numériques des deux équations. Puisque l'unité de $g(t)$ et $h(t)$ est la même que $x(t)$ (m) – les trois fonctions sont illustrées dans le même graphique (donc avec les mêmes axes) – nous obtenons les équations suivantes : $g(t) = (4 \text{ m/s})t - 3 \text{ m}$ et $h(t) = -(2 \text{ m/s})t + 18 \text{ m}$.

Pour la sous-question a) (voir tableau 5.11), le contrôle opérationnel peut se manifester par l'anticipation que la résolution nécessite la connaissance que la vitesse instantanée correspond à la valeur de la pente de la droite tangente à la position du mobile à cet instant. Puisque l'équation algébrique ($g(t) = 4t - 3$) de la droite tangente à la position du mobile en $t = 2 \text{ s}$ est donnée (en plus d'être illustrée dans le graphique) et a précédemment été le sujet d'un contrôle sémantique, nous pouvons utiliser la version enrichie (par la présence d'unités de mesure) de cette équation.

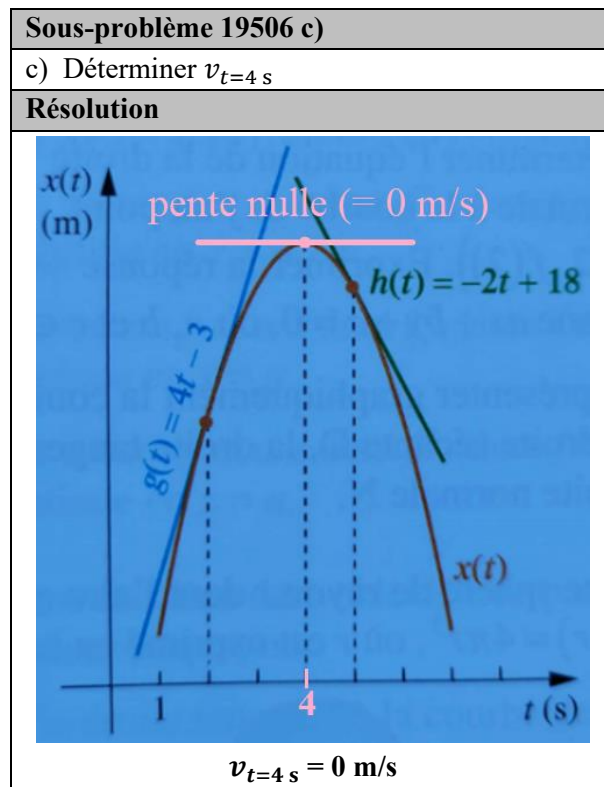
Tableau 5.11 Résolution de la sous-question a) du problème 19506



Avec la connaissance mentionnée ci-haut et l'équation enrichie $g(t) = (4 \text{ m/s})t - 3 \text{ m}$, nous pouvons déduire que la vitesse instantanée en $t = 2 \text{ s}$ est de 4 m/s . La présence de l'unité m/s associée à la pente de la droite tangente permet de vérifier que la réponse obtenue est cohérente avec le fait que nous cherchions à déterminer une vitesse, puisque le mètre par seconde est l'unité dérivée SI associée à la vitesse. Nous pouvions également anticiper que la réponse doit s'exprimer en m/s , puisque la vitesse correspond au rapport d'une différence de position (ici exprimée en m) et d'une durée (ici exprimée en s), pour ensuite confronter cette anticipation à l'unité obtenue à l'issue de la résolution. La résolution de la sous-question **b)** est très similaire à celle de la sous-question **a)** et ne sera donc pas abordée.

Pour la sous-question **c)** (voir tableau 5.12), à l'instar de la sous-question **a)**, le contrôle opérationnel peut se manifester par l'anticipation que la résolution nécessite la connaissance que la vitesse instantanée correspond à la valeur de la pente de la droite tangente à la position du mobile à cet instant. Un contrôle sémantique peut s'exercer sur le graphique afin d'ajouter la droite tangente en $t = 4 \text{ s}$, puisqu'elle n'est y est pas illustrée – au contraire des droites tangentes associées aux sous-questions **a)** et **b)**.

Tableau 5.12 Résolution de la sous-question **c)** du problème 19506



La représentation visuelle de la droites tangente en $t = 4$ s permet de déterminer aisément que sa pente – et donc la valeur de la vitesse instantanée – est nulle (droite constante). Un travail similaire a été réalisé lors de la résolution du sous-problème 18413 **a.ii**) (voir tableau 5.8).

Ce qui est particulièrement intéressant dans la résolution de la sous-question **a**) du problème 19506 est que l'utilisation de l'équation enrichie de la droite tangente peut permettre d'éviter une erreur parfois commise par les étudiants, c'est-à-dire de penser que la valeur de la vitesse instantanée (donc la valeur de la dérivée de la position à un instant) correspond au **terme complet** où apparaît la pente dans l'équation de la droite tangente (le produit de la pente et de l'instant), plutôt que **la valeur de la pente** elle-même (e.g. Dufour et Jeannotte, 2013).

Figure 5.6 Manipulation erronée possible

$$q(t) = 4t - 3$$

↳ correspond à la vitesse instantanée $v_{t=2s}$ lorsqu'il est évalué en $t = 2$ s

} erreur possible

$$q(t) = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)t - 3 \text{ m}$$

où $t = 2$ s

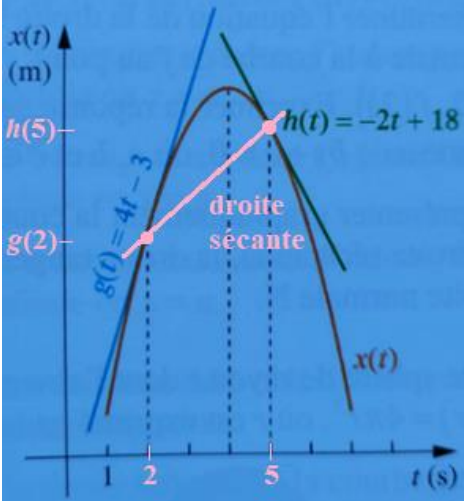
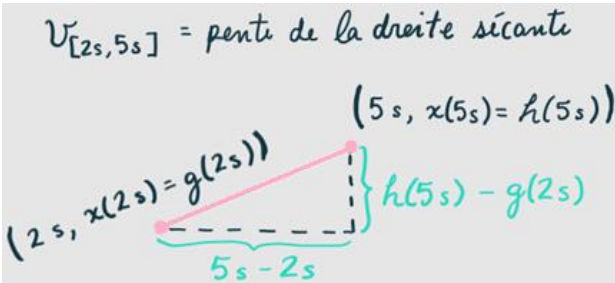
$$v_{t=2s} = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(2s) = 8 \text{ m} \quad \triangle !$$

Tout comme illustré à la figure 5.6, la conservation des unités pendant l'évaluation du terme $4t$ permet de constater que l'unité obtenue est le mètre (une unité exprimant une position/longueur); ce qui entre en contradiction avec notre recherche d'une vitesse (devant ici s'exprimer en mètre par seconde). Donc, la présence d'unités de mesure permet d'être plus sensible à la contradiction et d'ainsi percevoir la présence d'une erreur (la prise en compte superflue de $t = 2$ s). La présence d'unités de mesure peut également permettre de dépasser cette contradiction grâce au constat que le facteur 4 s'exprime avec l'unité m/s (une unité associée à la vitesse) et qu'il s'agit de sa multiplication par $t = 2$ s qui entraîne une unité résultante problématique.

Pour la sous-question **d**) (voir tableau 5.13), le contrôle opérationnel peut se manifester par l'anticipation que la résolution nécessite la connaissance que la vitesse moyenne sur un certain intervalle correspond à la valeur de la pente de la droite sécante à la position du mobile croisant la courbe aux instants bornant cet

intervalle. Un contrôle sur le graphique peut ensuite se mettre en place afin d'y ajouter la droite sécante liée à la vitesse moyenne demandée par la sous-question. Un schéma peut être réalisé afin de lier les registres graphique et algébrique, ce qui permet d'obtenir aisément la manière algébrique de calculer la vitesse moyenne.

Tableau 5.13 Résolution de la sous-question d) du problème 19506

Sous-problème 19506 d)	
d) Déterminer $v_{[2\text{ s}, 5\text{ s}]}$	
Résolution	
	$v_{[2\text{ s}, 5\text{ s}]} = \text{pente de la droite sécante}$  $v_{[2\text{ s}, 5\text{ s}]} = \frac{h(5\text{ s}) - g(2\text{ s})}{5\text{ s} - 2\text{ s}}$
	$h(t) = -\left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)t + 18\text{ m}$ $h(t = 5\text{ s}) = -\left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(5\text{ s}) + 18\text{ m} = -10\text{ m} + 18\text{ m} = 8\text{ m}$ $g(t) = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)t - 3\text{ m}$ $g(t = 2\text{ s}) = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(2\text{ s}) - 3\text{ m} = 8\text{ m} - 3\text{ m} = 5\text{ m}$
	$v_{[2\text{ s}, 5\text{ s}]} = \frac{h(5\text{ s}) - g(2\text{ s})}{5\text{ s} - 2\text{ s}} = \frac{8\text{ m} - 5\text{ m}}{5\text{ s} - 2\text{ s}} = \frac{3\text{ m}}{3\text{ s}} = \boxed{1 \text{ m/s}}$

Nous pouvons anticiper l'unité de la réponse, c'est-à-dire le mètre par seconde puisque nous cherchons une vitesse. Cette anticipation peut être confrontée à l'unité du résultat que nous obtenons à la suite des calculs effectués en conservant les unités comme moyen de vérification. Comme mentionné dans l'analyse *a priori* du problème 10705, réaliser des opérations mathématiques en conservant les unités demandent un contrôle sémantique en conjonction avec un contrôle sur les nombres et opérations.

Tableau 5.14 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 19506

Problème 19506			
L'énoncé initial contient un graphique et deux équations. a), b), c), d) : interprétation quantitative d'un graphique			
Contrôle structural	Contrôle opérationnel		
	Contrôle sur le graphique	Anticipation d'unité	
Contrôle sémantique	Permet de faire plusieurs déductions et d'améliorer la compréhension du graphique et du phénomène qu'il représente.	L'unité de la grandeur recherchée peut être anticipée. [interprétation quantitative d'un graphique]	Anticipation sur le résultat et contrôle sémantique
	Contrôle sur l'équation	Vérification	
Contrôle sémantique	Permet (avec la cohérence des unités) de déterminer l'unité des facteurs numériques et d'accéder au phénomène physique encodé.	L'unité de la grandeur obtenue peut être confrontée à celle anticipée. [interprétation quantitative d'un graphique]	Vérification par un retour à l'anticipation
		Contrôle sur le graphique	
		Permet d'ajouter des éléments pertinents à la résolution sur le graphique. [interprétation quantitative d'un graphique]	Contrôle sémantique
		Conservation d'unités	
		Permet d'augmenter la sensibilité à la contradiction (et la perception d'erreurs) et de vérifier l'unité anticipée (de la grandeur recherchée). [interprétation quantitative d'un graphique]	Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et
	Remarques		

- Les équations enrichies (par la présence d'unités) peuvent permettre d'éviter une erreur connue en calcul différentiel (penser que la valeur de la dérivée en un point correspond au produit de la pente de la droite tangente et de la variable indépendante en ce point plutôt qu'à la valeur de la pente tangente).
- Sans impliquer ouvertement les unités de mesure, le contrôle opérationnel peut passer par une anticipation sur la planification de la résolution : la nécessité d'avoir recours à une connaissance reliant les registres graphique et algébrique peut être anticipée [interprétation quantitative d'un graphique].

5.3.4 Problème 19910

Le quatrième problème soumis à une analyse *a priori* se trouve exactement dans la même section que le problème 19506, c'est-à-dire la section *Activités d'apprentissage* de la fin du chapitre 2 – *Définition de la dérivée* du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*. Ainsi, jusqu'à présent, les étudiants ont travaillé les notions suivantes : limite finie et indétermination de la forme $\frac{0}{0}$; limite infinie, limite à l'infini et asymptotes (indéterminations de la forme $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ et $\pm\infty \mp \infty$); continuité (en un point, sur un intervalle); taux de variation moyen sur un intervalle; vitesse moyenne et pente d'une droite sécante; taux de variation instantané, dérivée en un point et continuité en un point; vitesse instantanée et pente de la droite tangente; fonction dérivée (définie comme $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$). Le contexte du problème 19910 – dont l'énoncé est présenté à la figure 5.7 – relève du champ de la mécanique et du sous-champ de la cinématique (à l'instar des problèmes 10705, 18413 et 19506).

Figure 5.7 Énoncé du problème 19910 (tiré du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*, 2023, p. 199)

- La position x d'un mobile en fonction du temps t est donnée par $x(t) = \frac{k}{t^2}$, où k est constante, x est exprimée en mètres et $t \in [1 \text{ s}, 5 \text{ s}]$.
- Déterminer la valeur de k si $v_{t=2 \text{ s}} = -1 \text{ m/s}$.
 - En utilisant la valeur de k trouvée en a), calculer:
 - $v_{[2 \text{ s}, 4 \text{ s}]}$
 - $v_{t=4 \text{ s}}$
 - Représenter graphiquement la courbe de la fonction x et les droites associées à b) i) et ii).

Les demandes mathématiques apparaissant dans ce problème sont l'évaluation d'une limite implicite (**a**, **b.ii**), la substitution de valeurs (**b.i**) et la construction d'un graphique à l'aide d'expressions algébriques (**c**).

Justification du choix du problème 19910

Le problème 19910 a été sélectionné puisqu'il est typique des problèmes mathématiques à contexte physique travaillant algébriquement la vitesse moyenne et la vitesse instantanée. Il met également de l'avant un changement de registre, puisque, suivant le travail algébrique en **b.i**) et **b.ii**), il est demandé de représenter graphiquement les droites associées à ces deux sous-questions. De plus, ce problème fait intervenir une constante (nommée k) sans sens physique apparent; ce qui touche la conception (erronée) que les constantes (représentées par un nombre ou un symbole algébrique) sont des nombres purs ne possédant donc pas d'unités (Rowland, 2006). Ainsi, il semble possible qu'un travail sur les unités menant à la détermination de l'unité de k puisse faire évoluer cette conception chez les étudiants.

Analyse a priori du problème 19910

Suivant la lecture de la mise en situation initiale, c'est-à-dire la première partie de l'énoncé qui précède les sous-questions, il est nécessaire d'exercer un contrôle structural permettant la construction d'une représentation de cette situation initiale en sélectionnant et organisant les informations présentes dans cette partie d'énoncé : « La position x d'un mobile en fonction du temps t est donnée par $x(t) = \frac{k}{t^2}$, où k est constante, x est exprimée en mètres et $t \in [1 \text{ s}, 5 \text{ s}]$ » (Fortin et Poliquin, 2023, p. 199). Un contrôle sémantique peut être exercé sur l'équation, afin de déterminer l'unité de la constante (inconnue) k . Puisque la position $x(t)$ s'exprime en m et que le temps t s'exprime en s, par la cohérence des unités, l'unité de k est $\text{m} \cdot \text{s}^2$ (le mètre seconde carrée). Cependant, cette unité dérivée SI ne correspond pas à une grandeur physique dérivée particulière. Ici, l'exercice d'un contrôle sémantique sur l'équation permet de déterminer l'unité de la constante algébrique qui y figure, ce qui contredit directement la conception étudiante que les constantes numériques ou algébriques (présentes dans les équations) sont toujours des nombres purs (sans unité de mesure). Ainsi, il se pourrait que l'exercice d'un tel contrôle sur l'équation (passant par les unités) permette de faire évoluer cette conception, car les constantes peuvent effectivement posséder des unités⁶⁴. Nous voyons ici un potentiel d'intervention de la personne enseignante, qui pourrait utiliser cet exercice pour déclencher une réflexion sur cette conception justement.

Pour la sous-question **a**) (voir tableau 5.15), le contrôle opérationnel peut passer par l'exercice d'un contrôle sémantique et d'un contrôle sur les nombres et opérations afin de conserver les unités tout au long des opérations algébriques ponctuant la résolution.

⁶⁴ Évidemment, il arrive que des constantes n'aient pas d'unité.

Tableau 5.15 Résolution de la sous-question a) du problème 19910

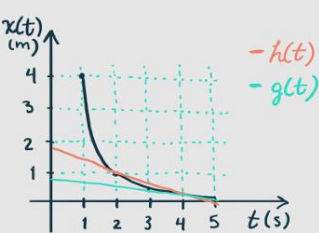
Sous-problème 19910 a)
a) Déterminer la valeur de k si $v_{t=2s} = -1 \text{ m/s}$.
Résolution
$v_{t=2s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0s} \left(\frac{x(2s + \Delta t) - x(2s)}{\Delta t} \right) = -1 \text{ m/s}$ $\frac{1}{\Delta t} \left(x(2s + \Delta t) - x(2s) \right) = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{k}{(2s + \Delta t)^2} - \frac{k}{(2s)^2} \right) = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{4s^2 \cdot k}{4s^2(2s + \Delta t)^2} - \frac{k(2s + \Delta t)^2}{4s^2(2s + \Delta t)^2} \right)$ $= \frac{k}{\Delta t} \left(\frac{4s^2 - (4s^2 + \Delta t^2 + 4s \cdot \Delta t)}{4s^2(2s + \Delta t)^2} \right) = \frac{k}{\Delta t} \left(\frac{\Delta t(-\Delta t - 4s)}{4s^2(2s + \Delta t)^2} \right) = \frac{-k\Delta t}{4s^2(2s + \Delta t)^2} - \frac{4sk}{4s^2(2s + \Delta t)^2}$ $= \frac{-k\Delta t}{4s^2(2s + \Delta t)^2} - \frac{k}{1s(2s + \Delta t)^2}$ $v_{t=2s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0s} \left[\frac{-k\Delta t}{4s^2(2s + \Delta t)^2} - \frac{k}{1s(2s + \Delta t)^2} \right] = \frac{-k}{1s(2s + 0s)^2} = \frac{-k}{1s(4s^2)} = \frac{-k}{4s^3}$ $v_{t=2s} = -\frac{k}{4s^3} = -1 \text{ m/s}$ $\frac{+k}{4s^3} = +1 \text{ m/s}$ $k = \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (4 \text{ s}^3) = \boxed{4 \text{ m s}^2}$

Encore une fois, la conservation des unités permet d'augmenter la sensibilité à la contradiction puisque la cohérence des unités doit toujours être respectée. De plus, elle permet également de vérifier que l'unité du résultat ($k = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^2$) correspond à l'unité déterminée par un contrôle sur l'équation $x(t) = \frac{k}{t^2}$. Cependant, conserver les unités peut alourdir les calculs par l'ajout de symboles supplémentaires à traiter, en plus d'offrir de nouvelles possibilités d'erreurs (e.g. $(4 \text{ s})/(4 \text{ s}^2) \neq 1$; $(4 \text{ s})/(4 \text{ s}^2) = 1 \text{ s}^{-1}$).

La sous-question **b.i)**, demandant de la substitution de valeurs, sollicite les mêmes manifestations du contrôle opérationnel que lors de la substitution de valeurs du sous-problème 10705 **a.i)** (voir tableau 5.4), c'est-à-dire que la conservation des unités (nécessitant les contrôles sémantique et sur les nombres et opérations) permet d'augmenter la sensibilité à la contradiction et de vérifier l'unité du résultat en la confrontant à celle anticipée ou déterminée précédemment. Ces manifestations sont les mêmes que celles associées à la sous-question **a)** abordée précédemment. De plus, la sous-question **b.ii)** demande le calcul d'une limite similaire à celle travaillée en **a)**; ce qui entraîne les mêmes manifestations de contrôle.

La sous-question **c)** demande la construction d'un graphique dans lequel est représenté la courbe $x(t)$ – dont l'équation algébrique est donnée dans l'énoncé – et les droites (sécante et tangente) – dont la valeur de la pente a été déterminée en **b.i)** et **b.ii)** respectivement. Ainsi, cette sous-question travaille le passage du registre algébrique au registre graphique. Dans le tableau 5.16 se trouve la réponse des sous-questions **b.i)** et **b.ii)** et la résolution de la sous-question **c)**.

Tableau 5.16 Résolution de la sous-question **c)** du problème 19910

Sous-problème 19910 c)													
c) Représenter graphiquement la courbe de la fonction x et les droites associées à b) i) et ii).													
Résolution													
b.i) $v_{[2s,4s]} = -\frac{3}{8} \text{ m/s}$ } pente d'une droite sécante b.ii) $v_{t=4s} = -\frac{1}{8} \text{ m/s}$ } pente d'une droite tangente c) $t \in [1 \text{ s}, 5 \text{ s}]$ $x(t) = \frac{4 \text{ ms}^2}{t^2}$ <table border="1"> <thead> <tr> <th>t (s)</th><th>x (m)</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td><td>4</td></tr> <tr> <td>2</td><td>1</td></tr> <tr> <td>3</td><td>$4/9$</td></tr> <tr> <td>4</td><td>$1/4$</td></tr> <tr> <td>5</td><td>$4/25$</td></tr> </tbody> </table>  $-h(t)$ $-g(t)$ <u>Droite tangente</u> $g(t) = v_{t=4s} \cdot t + C_1$ $g(4s) = x(4s)$ $(-\frac{1}{8} \frac{\text{m}}{\text{s}})(4s) + C_1 = \frac{1}{4} \text{ m}$ $-\frac{1}{2} \text{ m} + C_1 = \frac{1}{4} \text{ m}$ $C_1 = \frac{1}{2} \text{ m} + \frac{1}{4} \text{ m} = \frac{3}{4} \text{ m}$ $g(t) = (-\frac{1}{8} \frac{\text{m}}{\text{s}})t + \frac{3}{4} \text{ m}$ <u>Droite sécante</u> $h(t) = v_{[2s,4s]} \cdot t + C_2$ $h(2s) = x(2s)$ $h(4s) = x(4s)$ $h(t) = (-\frac{3}{8} \frac{\text{m}}{\text{s}})t + \frac{7}{4} \text{ m}$ Points : (0 s, $3/4$ m) (2 s, 1 m) (4 s, $1/4$ m) Points : (0 s, $3/4$ m) (4 s, $1/4$ m)		t (s)	x (m)	1	4	2	1	3	$4/9$	4	$1/4$	5	$4/25$
t (s)	x (m)												
1	4												
2	1												
3	$4/9$												
4	$1/4$												
5	$4/25$												

Puisque seulement la pente des droites a été déterminée en **b.i)** et **b.ii)**, leur règle algébrique doit être complétée (par le calcul de l'ordonnée à l'origine). Afin de représenter graphiquement la courbe $x(t)$, une table de valeurs peut être construite. Lors de la construction du graphique et de la table de valeurs, il est important de respecter le domaine de la courbe $x(t)$, ainsi que les unités des grandeurs physiques (notamment pour l'identification des colonnes et axes). Un certain contrôle sémantique est donc nécessaire. Pour l'ajout des droites associées à **b.i)** et **b.ii)**, le calcul de leur ordonnée à l'origine permet d'obtenir un deuxième (ou troisième) point afin de les tracer adéquatement (à la main). Encore une fois, les unités peuvent être conservées pendant les calculs (contrôles sémantique et sur les nombres et opérations), permet d'être sensible à la contradiction et de vérifier la cohérence entre les unités anticipées (ou déterminées précédemment) et obtenues.

Tableau 5.17 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 19910

Problème 19910			
L'énoncé initial contient une équation. a), b.ii) : évaluation d'une limite (implicite) b.i) : substitution de valeurs c) : construction d'un graphique à l'aide d'expressions algébriques			
Contrôle structural		Contrôle opérationnel	
	Contrôle sur l'équation	Anticipation d'unité	
Contrôle sémantique	Permet (avec la cohérence des unités) de déterminer l'unité des facteurs numériques et d'accéder au phénomène physique encodé.	L'unité de la grandeur recherchée peut être anticipée. [évaluation d'une limite, substitution de valeurs, construction d'un graphique à l'aide d'expressions algébriques]	Anticipation sur le résultat et contrôle sémantique
		Conservation d'unités	
Permet d'augmenter la sensibilité à la contradiction (et la perception d'erreurs) et de vérifier l'unité anticipée (de la grandeur recherchée). [évaluation d'une limite, substitution de valeurs, construction d'un graphique à l'aide d'expressions algébriques]		Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations	
Contrôle sur le graphique			
	L'unité des grandeurs (indépendante et dépendante) est nécessaire pour l'identification des axes. [construction d'un graphique à l'aide d'expressions algébriques]	Contrôle sémantique	
Remarques			
<u>Constante algébrique :</u> ■ L'exercice d'un contrôle sur l'équation permet de remettre en question la conception (erronée) que les constantes algébriques ne possèdent jamais d'unité. ■ Une constante peut ne pas correspondre à une grandeur physique définie. <u>Conservation des unités pendant les calculs :</u> ■ Il se peut que conserver les unités de mesure alourdisse les calculs et entraîne donc des difficultés. <u>Anticipation d'une connaissance :</u>			

■ Sans impliquer ouvertement les unités, le contrôle opérationnel peut passer par une anticipation sur la planification de la résolution : la nécessité d’avoir recours à une connaissance reliant les registres graphique et algébrique peut être anticipée [construction d’un graphique à l’aide d’expressions algébriques].

5.3.5 Problème 27904

Le cinquième problème soumis à une analyse *a priori* se trouve dans la section 4.1 – *Taux de variation instantanés* du chapitre 4 – *Taux de variation* du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*. Jusqu’à présent, les étudiants ont travaillé les notions suivantes : les limites finie, infinie et à l’infini; la continuité; les taux de variation moyen (vitesse moyenne) et instantané (vitesse instantanée); la fonction dérivée; la dérivée des fonctions de la forme x^r , où $r \in \mathbb{R}$; la dérivée de sommes, différences, produits et quotients de fonctions, la dérivée de fonctions de la forme $[f(x)]^r$, où $r \in \mathbb{R}$; la règle de la dérivation en chaîne; les dérivées successives; la dérivation implicite; la relation entre la fonction et le signe de sa dérivée; les taux de variation en physique $\left(v(t) = \frac{dx}{dt}; a_{[t_i, t_f]} = \frac{v(t_f) - v(t_i)}{t_f - t_i}; a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\right)$, en chimie et en économie. Le contexte du problème 27904 – dont l’énoncé est présenté à la figure 5.8 – relève du champ physique de la mécanique, notamment du sous-champ de la dynamique.

Figure 5.8 Énoncé du problème 27904 (tiré du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*, 2023, p. 279)

Dans un entrepôt industriel, un coffre dont la masse est de 3000 kg est tiré par un treuil. La position du coffre est donnée par $x(t) = \frac{t^3}{300} + \frac{t^2}{200}$, où $t \in [0 \text{ s}, 40 \text{ s}]$ et x est exprimée en mètres.

- Déterminer la position, la vitesse et l’accélération du coffre lorsque $t = 25 \text{ s}$.
- Déterminer l’accélération du coffre au moment où sa vitesse est de 8,7 m/s.
- Déterminer la fonction F donnant la force appliquée sur le coffre en fonction du temps.
- Calculer la force transmise par le treuil lorsque $t = 15 \text{ s}$.
- Déterminer la position du coffre lorsque le treuil applique une force de 390 N.

Les demandes mathématiques apparaissant dans ce problème sont la dérivation d’une fonction donnée ou construite précédemment en un point (**a**), la résolution d’une équation construite précédemment (**b**, **e**), la construction d’une équation (**c**) et la substitution de valeurs (**d**).

Justification du choix du problème 27904

Le problème 27904 a été sélectionné puisqu'il est typique des problèmes mathématiques à contexte physique travaillant les fonctions position, vitesse et accélération d'un objet en mouvement. De plus, le contexte physique semble jouer un rôle assez important dans la résolution de ce problème, puisqu'il nécessite le recours à une notion physique qui n'est pas comprise dans l'énoncé (la deuxième loi de Newton qui relie l'accélération d'un objet et la force exercée sur celui-ci). Il nous semble également possible qu'un travail intéressant sur les unités puisse avoir lieu suivant l'utilisation de cette notion physique externe à l'énoncé.

Analyse a priori du problème 27904

Suivant la lecture de la mise en situation initiale, c'est-à-dire la première partie de l'énoncé qui précède les sous-questions, il est nécessaire d'exercer un contrôle structural permettant la construction d'une représentation de cette situation initiale en sélectionnant et organisant les informations présentes dans cette partie d'énoncé : « Dans un entrepôt industriel, un coffre dont la masse est de 3000 kg est tiré par un treuil.

La position du coffre est donnée par $x(t) = \frac{t^3}{300} + \frac{t^2}{200}$, où $t \in [0 \text{ s}, 40 \text{ s}]$ et x est exprimée en mètres » (Fortin et Poliquin, 2023, p. 279). Un contrôle sémantique peut être exercé sur l'équation afin de déterminer l'unité des facteurs numériques y figurant. Nous obtenons ainsi $300 \text{ s}^3/\text{m}$ (seconde cube par mètre) et $200 \text{ s}^2/\text{m}$ (seconde carrée par mètre). Cependant, ces unités dérivées SI ne correspondent pas des grandeurs physiques dérivées particulières.

Pour la sous-question a) (voir tableau 5.18), le contrôle opérationnel peut d'abord passer par l'anticipation de l'unité des deux nouvelles grandeurs physiques demandées (vitesse et accélération); l'unité de la position $x(t)$ est mentionnée dans l'énoncé initial. Puisque le temps est exprimé en seconde et la position en mètre, nous pouvons anticiper que l'unité de la vitesse sera le mètre par seconde et que l'unité de l'accélération sera le mètre par seconde carrée.

Tableau 5.18 Résolution de la sous-question a) du problème 27904

Sous-problème 27904 a)
a) Déterminer la position, la vitesse et l'accélération du coffre lorsque $t = 25 \text{ s}$.
Résolution
$x(t) = \frac{t^3}{300 \text{ s}^3/\text{m}} + \frac{t^2}{200 \text{ s}^2/\text{m}}$ $x(t = 25 \text{ s}) = \frac{(25 \text{ s})^3}{300 \text{ s}^3/\text{m}} + \frac{(25 \text{ s})^2}{200 \text{ s}^2/\text{m}} = \frac{15\,625 \text{ s}^3}{300 \text{ s}^3/\text{m}} + \frac{625 \text{ s}^2}{200 \text{ s}^2/\text{m}} = \boxed{55,208\bar{3} \text{ m}}$

$$\begin{aligned}
 v(t=25\text{ s}) &= \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=25\text{ s}} = \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{t^3}{300\text{ s}^3/\text{m}} + \frac{t^2}{200\text{ s}^2/\text{m}} \right) \right|_{t=25\text{ s}} = \left. \left(\frac{3t^2}{300\text{ s}^3/\text{m}} + \frac{2t}{200\text{ s}^2/\text{m}} \right) \right|_{t=25\text{ s}} \\
 &= \left. \left(\frac{t^2}{100\text{ s}^3/\text{m}} + \frac{t}{100\text{ s}^2/\text{m}} \right) \right|_{t=25\text{ s}} = \frac{(25\text{ s})^2}{100\text{ s}^3/\text{m}} + \frac{25\text{ s}}{100\text{ s}^2/\text{m}} = \frac{625\text{ s}^2}{100\text{ s}^3/\text{m}} + \frac{25\text{ s}}{100\text{ s}^2/\text{m}} \\
 &= \boxed{6,5\text{ m/s}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a(t=25\text{ s}) &= \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=25\text{ s}} = \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{t^2}{100\text{ s}^3/\text{m}} + \frac{t}{100\text{ s}^2/\text{m}} \right) \right|_{t=25\text{ s}} = \left. \left(\frac{2t}{100\text{ s}^3/\text{m}} + \frac{1}{100\text{ s}^2/\text{m}} \right) \right|_{t=25\text{ s}} \\
 &= \left. \left(\frac{t}{50\text{ s}^3/\text{m}} + \frac{1}{100\text{ s}^2/\text{m}} \right) \right|_{t=25\text{ s}} = \frac{25\text{ s}}{50\text{ s}^3/\text{m}} + \frac{1}{100\text{ s}^2/\text{m}} = \boxed{0,51\text{ m/s}^2}
 \end{aligned}$$

Comme est illustré ci-haut, un contrôle sémantique et un contrôle sur les nombres et opérations peuvent être exercés afin de conserver les unités tout au long des opérations algébriques de substitution de valeur ($x(t=25\text{ s})$) et de dérivation en un point $\left(\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=25\text{ s}} ; \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=25\text{ s}} \right)$. Conserver les unités permet d'être sensible à la contradiction (car la cohérence des unités doit toujours être respectée) et l'unité du résultat, obtenue de cette manière, peut être confrontée à celle anticipée comme vérification.

La sous-question **b)** (voir tableau 5.19) demande de déterminer une accélération (en m/s^2) à partir d'une vitesse donnée ($8,7\text{ m/s}$). Puisqu'il n'y a d'équation comprenant une dépendance directe entre ces deux grandeurs physiques, l'enchaînement (minimum) de deux équations est nécessaire; ce qui peut être plus facilement discerné par la considération des unités de mesure de ces grandeurs (plutôt que par les grandeurs elles-mêmes). À partir de la vitesse en mètres par seconde, nous pouvons discerner que l'équation reliant la vitesse (en m/s) au temps écoulé (en s) doit d'abord être utilisée, afin de déterminer l'instant où le coffre possède cette vitesse; résoudre l'équation $v(t) = 8,7\text{ m/s}$ – pouvant être déduite à partir de la résolution de la sous-question **a)** – permet d'obtenir une grandeur exprimée en s (un temps) à partir d'une grandeur en m/s (une vitesse). Avec cette information, nous pouvons discerner que l'équation reliant le temps (en s) à l'accélération (en m/s^2) – pouvant être déduite à partir de la résolution de la sous-question **a)** – doit être ensuite utilisée, afin d'obtenir l'accélération du coffre à cet instant; substituer une grandeur exprimée en s (un temps) dans l'équation $a(t)$ permet d'obtenir une grandeur en m/s^2 (une accélération). Ainsi, considérer l'enchaînement des unités ($\text{m/s} \rightarrow \text{s} \rightarrow \text{m/s}^2$) – plutôt que les grandeurs elles-mêmes (vitesse $\rightarrow$ temps $\rightarrow$ accélération) – peut permettre de discerner plus facilement l'enchaînement des équations.

Tableau 5.19 Résolution de la sous-question **b)** du problème 27904

Sous-problème 27904 b)	
b) Déterminer l'accélération du coffre au moment où sa vitesse est de 8,7 m/s.	
Résolution	
L'équation de la vitesse $v(t)$ peut être déduite à partir de la résolution de la sous-question a).	
$v(t) = \frac{t^2}{100 \text{ s}^2/\text{m}} + \frac{t}{100 \text{ s}^2/\text{m}} = (0,01 \text{ m/s}^2)t^2 + (0,01 \text{ m/s}^2)t$	
$v(t=?) = 8,7 \text{ m/s}$	
$8,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} = (0,01 \text{ m/s}^2)t^2 + (0,01 \text{ m/s}^2)t$ $\frac{8,7 \text{ m/s}}{0,01 \text{ m/s}^2} = t^2 + (1 \text{ s})t$ $870 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{s}^2}{\text{m}} \right) = t^2 + (1 \text{ s})t$ $870 \text{ s}^2 = t^2 + (1 \text{ s})t$ $t^2 + (1 \text{ s})t - 870 \text{ s}^2 = 0$	formule quadratique $t_{1,2} = \frac{-(1 \text{ s}) \pm \sqrt{(1 \text{ s})^2 - 4(1)(-870 \text{ s}^2)}}{2(1)}$ $= \frac{-(1 \text{ s}) \pm \sqrt{3481 \text{ s}^2}}{2} = \frac{-(1 \text{ s}) \pm 59 \text{ s}}{2}$ $t_1 = \frac{-1 \text{ s} - 59 \text{ s}}{2} = -30 \text{ s} \quad \text{À rejeter : } t_1 \notin]0 \text{ s}, 40 \text{ s}[$ $t_2 = \frac{-1 \text{ s} + 59 \text{ s}}{2} = 29 \text{ s} \quad \checkmark \quad t_2 \in]0 \text{ s}, 40 \text{ s}[$
L'équation de l'accélération $a(t)$ peut être déduite à partir de la résolution de la sous-question a).	
$a(t) = \frac{t}{50 \text{ s}^2/\text{m}} + \frac{1}{100 \text{ s}^2/\text{m}} = (0,02 \text{ m/s}^2)t + 0,01 \text{ m/s}^2$	
$a(t = 29 \text{ s}) = (0,02 \text{ m/s}^2)(29 \text{ s}) + 0,01 \text{ m/s}^2$ $= 0,59 \text{ m/s}^2$	

Puisque la résolution de l'équation $v(t) = 8,7 \text{ m/s}$ implique de déterminer les racines d'une fonction quadratique, nous obtenons deux possibles solutions ($t_1 = -30 \text{ s}$; $t_2 = 29 \text{ s}$). La racine $t_1 = -30 \text{ s}$ doit être rejetée, car cet instant est exclu du domaine⁶⁵ de $v(t)$; il s'agit d'une justification mathématique. Cependant, l'exercice d'un contrôle sémantique sur ce que les racines représentent (des instants) permet de justifier physiquement le rejet de la racine $t_1 = -30 \text{ s}$, puisque le temps est une grandeur physique nulle ou positive et que l'une des racines obtenues est négative (contradiction). Selon nous, le rejet de la racine s'apparente à la forme de vérification qui passe par la (l'in)vraisemblance du résultat dans la réalité physique, puisqu'il est invraisemblable d'obtenir un temps négatif (la réalité physique ne le permet pas). Évidemment, le domaine de l'équation $x(t) - t \in [0 \text{ s}, 40 \text{ s}]$ – fait du sens physiquement puisqu'il ne contient pas de valeurs négatives.

En ce qui concerne la sous-question **c)** (voir tableau 5.20), le recours à une notion physique externe à l'énoncé peut être anticipé, car il est demandé de construire l'équation d'une nouvelle grandeur physique

⁶⁵ Le domaine de $v(t) = \frac{dx}{dt}$ est le même domaine que celui de $x(t)$ avec les bornes exclues, c'est-à-dire $t \in]0 \text{ s}, 40 \text{ s}[$, puisque $x(t)$ n'est pas dérivable aux bornes de son domaine.

– la force appliquée sur le coffre – sans lien explicite avec les grandeurs physiques travaillées précédemment (la position, la vitesse et l'accélération du coffre), hors leur dépendance commune au temps. Une connaissance (physique) est donc nécessaire afin de lier la force à l'une ou l'autre des grandeurs physiques déjà abordées; il s'agit de la deuxième loi de Newton. Cette notion physique est abordée dans la même section (4.1) du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent* que le problème 27904.

Tableau 5.20 Résolution de la sous-question c) du problème 27904

Sous-problème 27904 c)
c) Déterminer la fonction F donnant la force appliquée sur le coffre en fonction du temps.
Résolution
L'équation de l'accélération $a(t)$ peut être déduite à partir de la résolution de la sous-question a). $a(t) = \frac{t}{50 \text{ s}^3/\text{m}} + \frac{1}{100 \text{ s}^2/\text{m}} = (0,02 \text{ m/s}^3)t + 0,01 \text{ m/s}^2$ Deuxième loi de Newton $F(t) = m \cdot a(t) \quad \begin{cases} F(t): \text{force exercée sur l'objet} \\ m: \text{masse de l'objet} \\ a(t): \text{accélération de l'objet} \end{cases}$ $F(t) = (3000 \text{ kg})[(0,02 \text{ m/s}^3)t + 0,01 \text{ m/s}^2] = (60 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^3})t + 30 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$ $= (60 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{s}})t + 30 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = (60 \text{ N/s})t + 30 \text{ N} \quad (1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N})$ $F(t) = (60 \text{ N/s})t + 30 \text{ N}$

L'utilisation de la deuxième loi de Newton ouvre la porte à un travail intéressant autour des unités, notamment si nous les conservons pendant la construction de $F(t)$. Comme nous pouvons le constater (voir tableau 5.20), nous obtenons d'abord cette forme de l'équation : $F(t) = (60 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^3})t + 30 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$. Un contrôle sémantique sur les unités elles-mêmes peut être ensuite mis en place. Ce contrôle passe par la reconnaissance de l'expression de l'unité newton en unités de base ($\text{N} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$), suivant l'anticipation que le newton est l'unité dérivée SI associée à la force. Ce changement entre des expressions équivalentes d'unités facilite la lecture et la compréhension de l'équation, qui possède maintenant la forme suivante : $F(t) = (60 \text{ N/s})t + 30 \text{ N}$ [force = taux de variation de la force · temps écoulé + force initiale]. Selon nous, cette forme est beaucoup plus parlante que la forme initiale de $F(t)$.

La sous-question d), demandant de la substitution de valeurs, sollicite les mêmes manifestations du contrôle opérationnel que lors de la substitution de valeurs du sous-problème 10705 a.i) (voir tableau 5.4), c'est-à-

dire que la conservation des unités (nécessitant les contrôles sémantique et sur les nombres et opérations) permet d'augmenter la sensibilité à la contradiction et de vérifier l'unité du résultat en la confrontant à celle anticipée ou déterminée précédemment. Pendant la résolution de la sous-question **e)**, demandant la résolution d'une équation, porter attention aux unités des grandeurs physiques (plutôt que les grandeurs elles-mêmes) permet de discerner plus facilement quelles équations doivent être enchaînées et dans quel ordre; à l'instar de la sous-question **b)** (voir tableau 5.19), sans l'exclusion d'une solution.

Synthèse de l'analyse a priori du problème 27904

Tableau 5.21 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 27904

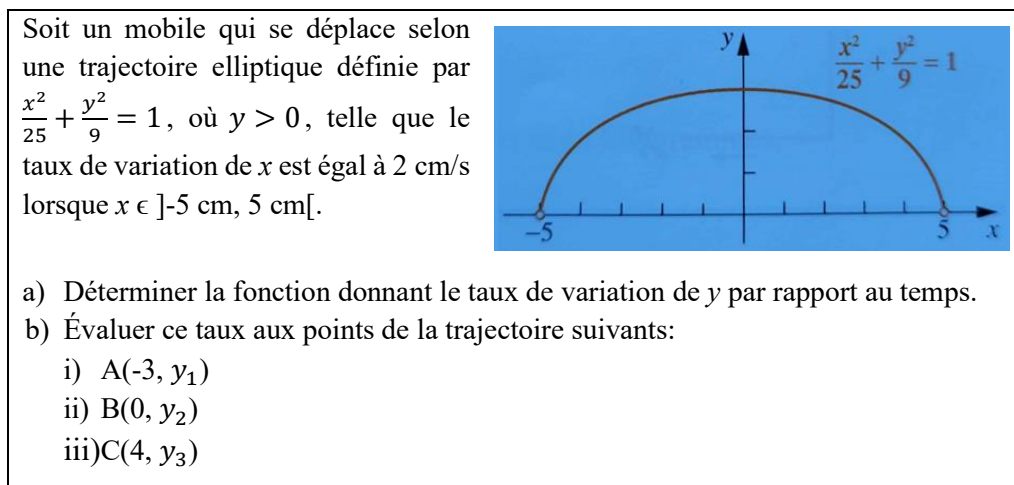
Problème 27904			
L'énoncé initial contient une équation. a) : dérivation d'une fonction donnée en un point b), e) : résolution d'une équation construite précédemment c) : construction d'une équation d) : substitution de valeurs			
Contrôle structural		Contrôle opérationnel	
<i>Contrôle sur l'équation</i>		<i>Anticipation d'unité</i>	
Contrôle sémantique	Permet (avec la cohérence des unités) de déterminer l'unité des facteurs numériques et d'accéder au phénomène physique encodé.	L'unité de la grandeur recherchée peut être anticipée. [dérivation d'une fonction donnée en un point, résolution d'une équation, substitution de valeurs]	Anticipation sur le résultat et contrôle sémantique
		<i>Conservation d'unités</i>	
		Permet d'augmenter la sensibilité à la contradiction (et la perception d'erreurs) et de vérifier l'unité anticipée (de la grandeur recherchée). [dérivation d'une fonction donnée en un point, résolution d'une équation, construction d'une équation, substitution de valeurs]	Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations
		<i>Enchaînement d'équations</i>	
		Considérer l'enchaînement des unités – plutôt que les grandeurs elles-mêmes – peut permettre de discerner plus facilement l'enchaînement des équations. [résolution d'une équation]	Discernement et anticipation sur la planification de la résolution
		<i>Vérification par le contexte physique</i>	

		La considération de la réalité physique entraîne le rejet d'un résultat, car il est invraisemblable dans ce contexte. [résolution d'une équation]	Vérification par l'évaluation de la vraisemblance d'un résultat
		Contrôle sur les unités	
		Permet de faciliter la lecture d'une équation grâce à l'équivalence d'unités. [construction d'une équation]	Contrôle sémantique
		Métaconnaissance	
		La connaissance du SI est nécessaire à la reconnaissance de l'expression en unités de base d'une unité dérivée avec un symbole et nom spéciaux. [construction d'une équation]	Métaconnaissances
	Remarques		
	- On réalise qu'une constante peut ne pas correspondre à une grandeur physique définie. - Sans impliquer ouvertement les unités de mesure, le contrôle opérationnel peut passer par une anticipation sur la planification de la résolution : la nécessité d'avoir recours à une connaissance physique externe à l'énoncé peut être anticipée [construction d'une équation].		

5.3.6 Problème 28907

Le sixième problème soumis à une analyse *a priori* se trouve dans la section 4.2 – *Taux de variation liés* du chapitre 4 – *Taux de variation* du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*. Jusqu'à présent, les étudiants ont travaillé les notions suivantes : les limites finie, infinie et à l'infini; la continuité; les taux de variation moyen (vitesse moyenne) et instantané (vitesse instantanée); la fonction dérivée; la dérivée des fonctions de la forme x^r , où $r \in \mathbb{R}$; la dérivée de sommes, différences, produits et quotients de fonctions, la dérivée de fonctions de la forme $[f(x)]^r$, où $r \in \mathbb{R}$; la règle de la dérivation en chaîne; les dérivées successives; la dérivation implicite; la relation entre la fonction et le signe de sa dérivée; les taux de variation en physique ($v(t) = \frac{dx}{dt}$; $a_{[t_i, t_f]} = \frac{v(t_f) - v(t_i)}{t_f - t_i}$; $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$), en chimie et en économie; les taux de variation liés. Le contexte du problème 28907 – dont l'énoncé est présenté à la figure 5.9 – relève du champ de la mécanique et du sous-champ de la cinématique (à l'instar des problèmes 10705, 18413, 19506 et 19910).

Figure 5.9 Énoncé du problème 28907 (tiré du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*, 2023, p. 289)



Les demandes mathématiques apparaissant dans ce problème sont la dérivation d'une équation donnée (**a**) et la substitution de valeurs (**b.i**, **b.ii**, **b.iii**).

Justification du choix du problème 28907

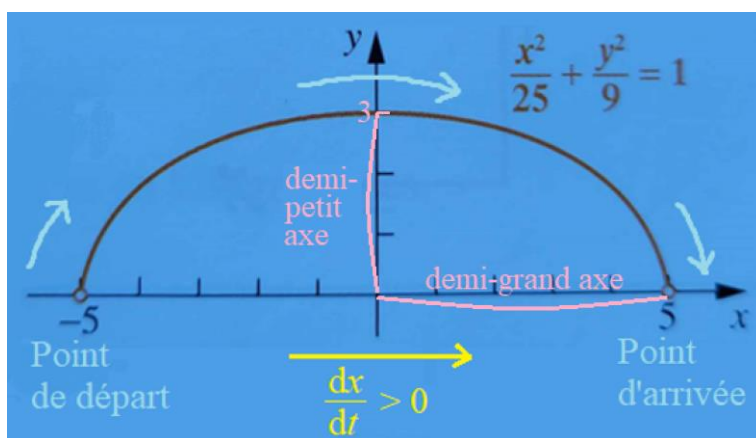
Le problème 28907 a été sélectionné puisqu'il est typique des problèmes mathématiques à contexte physique travaillant la dérivation implicite (et les taux de variation liés). Ce problème a attiré notre œil, car la dépendance au temps des variables x et y est implicite (dans l'énoncé et dans le graphique) et peut être déduite grâce à l'unité du taux de variation de x (cm/s). De plus, le graphique représente la trajectoire (en 2D) tracé par un mobile en mouvement; au contraire des graphiques plus communs représentant une position (horizontale ou verticale) en fonction du temps (voir les figures 5.3 et 5.5 pour des exemples). Il nous semble donc possible que différentes composantes du contrôle soient sollicitées autour de ce graphique, surtout que l'unité de x et y n'apparaît pas dans l'identification des axes.

Analyse a priori du problème 28907

Suivant la lecture de la mise en situation initiale, c'est-à-dire la première partie de l'énoncé qui précède les sous-questions, il est nécessaire d'exercer un contrôle structural permettant la construction d'une représentation de cette situation initiale en sélectionnant et organisant les informations présentes dans cette partie d'énoncé : « Soit un mobile qui se déplace selon une trajectoire elliptique définie par $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, où $y > 0$, telle que le taux de variation de x est égal à 2 cm/s lorsque $x \in]-5 \text{ cm}, 5 \text{ cm}[$ » (Fortin et Poliquin, 2023, p. 289). Un contrôle sémantique peut s'exercer autour des grandeurs physiques et unités en jeu afin de déterminer que l'unité de x est le cm (puisque'elle est incluse dans l'intervalle) et que cette grandeur

représente donc la position horizontale du mobile. Puisque le mobile suit une trajectoire elliptique, nous pouvons déduire que y représente sa position verticale et s'exprime en cm. De plus, dans l'énoncé, le taux de variation de x est exprimé en centimètres par seconde, ce qui indique que x (en cm) peut être dérivé par rapport au temps (en s) et donc que la grandeur x dépend du temps ($x(t)$ est la position horizontale du mobile en fonction du temps). Similairement, la grandeur $y = y(t)$ dépend également du temps et représente la position verticale du mobile en fonction du temps. Un contrôle sémantique peut également être exercé sur l'équation $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ afin de déterminer l'unité des facteurs numériques y figurant par le respect de la cohérence des unités. Pour ce faire, il faut savoir que le nombre 1 ne possède pas d'unités par définition de l'équation d'une ellipse centrée en $(0, 0)$, car les dénominateurs (ici 25 et 9) correspondent au carré des demi-axes de l'ellipse; ce qui nous permet d'obtenir l'équation suivante $1 = \frac{x^2(t)}{25 \text{ cm}^2} + \frac{y^2(t)}{9 \text{ cm}^2} = \frac{x^2(t)}{(5 \text{ cm})^2} + \frac{y^2(t)}{(3 \text{ cm})^2}$. Ainsi, la racine des dénominateurs (ici 5 cm et 3 cm) correspondent respectivement au demi-grand axe et au demi-petit axe de l'ellipse; ce que nous pouvons constater dans le graphique représentant la trajectoire elliptique du mobile (illustrés en rose dans la figure 5.10). Un contrôle sémantique peut également se mettre en place autour du graphique. Nous avons préalablement déduit que les positions $x(t)$ et $y(t)$ dépendent du temps, c'est-à-dire que le mobile se déplace sur la trajectoire elliptique au fil du temps. Cependant, il n'est pas explicitement indiqué dans quel sens (sur l'ellipse) le mobile se déplace. Nous pouvons déduire cette information grâce au fait que le taux de variation de $x(t)$ est de 2 cm/s (positif), ce qui signifie que la position $x(t)$ augmente au fil du temps, c'est-à-dire qu'elle revêt des valeurs de plus en plus grandes et donc que le mobile se déplace vers la droite (illustré en jaune dans la figure 5.10).

Figure 5.10 Graphique enrichi du problème 28907



Ainsi, puisque le mobile se déplace vers la droite, le mobile suit la trajectoire elliptique dans le sens horaire, tel qu'illustré en bleu pâle dans la figure 5.10. L'exercice de ce contrôle sémantique sur le graphique, qui

relient des informations présentes dans l'énoncé, nous permet donc d'atteindre une compréhension plus profonde de celui-ci. Selon nous, il est probable que les étudiants assument (par défaut) que le mouvement du mobile est de gauche à droite, sans réfléchir sur la véracité de leur assumption ou sur la raison derrière.

Pour la sous-question **a)** (voir tableau 5.22), le contrôle opérationnel peut se manifester par un contrôle sémantique et un contrôle sur les nombres et opérations lors de la conservation des unités pendant les calculs afin d'obtenir la fonction donnant le taux de variation de $y(t)$ par rapport au temps avec l'unité du facteur numérique y figurant $\left(\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{18 \text{ cm}}{25 \text{ s}}\right) \frac{x(t)}{y(t)}\right)$. Encore une fois, conserver les unités permet également d'augmenter la sensibilité à la contradiction (par biais de la cohérence des unités). Un contrôle sémantique peut être mis en place sur cette nouvelle équation. Ceci nous permet de vérifier que $\frac{dy}{dt}$ s'exprime en cm/s à l'instar de $\frac{dx}{dt}$ (ce que nous pouvions anticiper). En effet, le rapport $\frac{x(t)}{y(t)}$ possède l'unité **un** (cm/cm = 1) et est multiplié par un facteur numérique possédant l'unité cm/s.

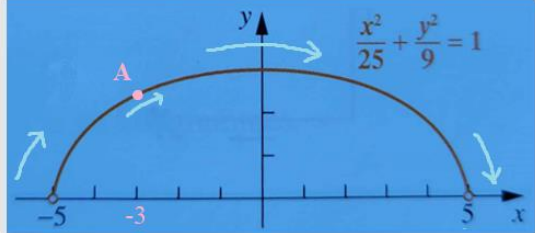
Tableau 5.22 Résolution de la sous-question **a)** du problème 28709

Sous-problème 28907 a)		
a) Déterminer la fonction donnant le taux de variation de y par rapport au temps.		
Résolution		
$1 = \frac{x^2(t)}{25 \text{ cm}^2} + \frac{y^2(t)}{9 \text{ cm}^2} \quad \frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/s} \quad \frac{dy}{dt} = ?$		
$\frac{d}{dt}(1) = \frac{d}{dt} \left(\frac{x^2(t)}{25 \text{ cm}^2} + \frac{y^2(t)}{9 \text{ cm}^2} \right)$		
$0 = \frac{1}{25 \text{ cm}^2} \frac{d}{dt}(x^2(t)) + \frac{1}{9 \text{ cm}^2} \frac{d}{dt}(y^2(t))$		
$0 = \frac{1}{25 \text{ cm}^2} (2x(t) \frac{dx}{dt}) + \frac{1}{9 \text{ cm}^2} (2y(t) \frac{dy}{dt})$		
		$\frac{1}{9 \text{ cm}^2} y(t) \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{25 \text{ cm}^2} x(t) \frac{dx}{dt}$
		$\frac{dy}{dt} = -\frac{9 \text{ cm}^2}{25 \text{ cm}^2} \frac{x(t)}{y(t)} \left(2 \text{ cm/s} \right)$
		$\boxed{\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{18 \text{ cm/s}}{25}\right) \frac{x(t)}{y(t)}}$

Pour la sous-question **b.i)** (voir tableau 5.23), par l'exercice d'un contrôle sur le graphique nous pouvons y représenter le point d'intérêt $A(-3, y_1)$, ce qui nous permet d'anticiper que le taux de variation de $y(t)$ par rapport au temps à ce point sera positif; puisque la position verticale $y(t)$ du mobile augmente au fil du temps à ce point (et dans tout le deuxième quadrant). L'illustration du mouvement (au fil du temps) du mobile sur la trajectoire elliptique (indiqué par les flèches bleues pâles) sur le graphique facilite grandement cette anticipation et permet de mieux visualiser l'aspect dynamique du phénomène physique, puisque le graphique original ne représente que la trajectoire (statique) suivie par le mobile. Notamment, cela peut

éclairer une possible confusion entre le taux de variation de $y(t)$ **par rapport au temps** et le taux de variation de $y(t)$ **par rapport à $x(t)$** : puisque le graphique original (voir figure 5.9) illustre la dépendance de y par rapport à x de la trajectoire elliptique, si les étudiants tente de représenter la droite tangente au point A et de raisonner sur le taux de variation de y de cette manière, ils raisonneront actuellement sur $\frac{dy}{dx}$ plutôt que sur $\frac{dy}{dt}$. Cependant, dans ce sous-problème, raisonner sur $\frac{dy}{dx}$ amène la même anticipation qu'avec $\frac{dy}{dt}$.

Tableau 5.23 Résolution de la sous-question **b.i)** du problème 28709

Sous-problème 28907 b.i)	
b) Évaluer ce taux aux points de la trajectoire suivants: i) $A(-3, y_1)$	
Résolution	
$A(-3, y_1) = A(\underbrace{x_1 = x(t_1)}_{-3 \text{ cm}}, y_1 = y(t_1))$ Le mobile se situe au point A à un certain instant t_1. $1 = \frac{x^2(t)}{25 \text{ cm}^2} + \frac{y^2(t)}{9 \text{ cm}^2}$ $1 = \frac{(-3 \text{ cm})^2}{25 \text{ cm}^2} + \frac{y^2(t_1)}{9 \text{ cm}^2}$ $1 = \frac{9}{25} + \frac{y^2(t_1)}{9 \text{ cm}^2}$ $\frac{16}{25} = \frac{y^2(t_1)}{9 \text{ cm}^2}$ $y(t_1) = \sqrt{\frac{16}{25} (9 \text{ cm}^2)} = \sqrt{\frac{144}{25} \text{ cm}^2} = \frac{12}{5} \text{ cm}$ $A(-3 \text{ cm}, \frac{12}{5} \text{ cm}) \leftrightarrow t_1$	$\left. \frac{dy}{dt} \right _{A(-3, y_1)} = ?$  $\left. \frac{dy}{dt} \right _{t=t_1} = - \left(\frac{18 \text{ cm/s}}{25} \right) \frac{x(t_1)}{y(t_1)}$ $= + \left(\frac{18 \text{ cm/s}}{25} \right) \frac{(+3 \text{ cm})}{(12/5 \text{ cm})}$ $= \boxed{0,9 \text{ cm/s}}$

Cette version enrichie du graphique facilite la déduction que le mobile se trouve au point A à un certain instant – que nous avons nommé t_1 – c'est-à-dire que $x(t_1) = -3 \text{ cm}$ et $y_1 = y(t_1) = ?$. Puisque les positions horizontale et verticale sont liées par l'équation de la trajectoire elliptique, $y(t)$ dépend de $x(t)$; et donc nous pouvons déterminer $y(t_1)$ à partir de $x(t_1)$ avec la résolution de cette équation. Nous pouvons ensuite substituer ces informations dans l'équation du taux de variation de $y(t)$ en fonction du temps obtenue en **a)** afin de déterminer ce taux de variation à l'instant t_1 (donc lorsque le mobile se trouve au point A). Ce résultat $\left(\frac{dy}{dt} \right|_{t=t_1} = 0,9 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \right)$ peut être confronté à notre anticipation $\left(\frac{dy}{dt} \right|_{t=t_1} > 0 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \right)$ comme moyen de

vérification. La résolution des sous-questions **b.ii)** et **b.iii)** est similaire et ne sera pas abordée, car les mêmes composantes du contrôle opérationnel sont sollicitées.

Synthèse de l'analyse a priori du problème 28907

Tableau 5.24 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 28907

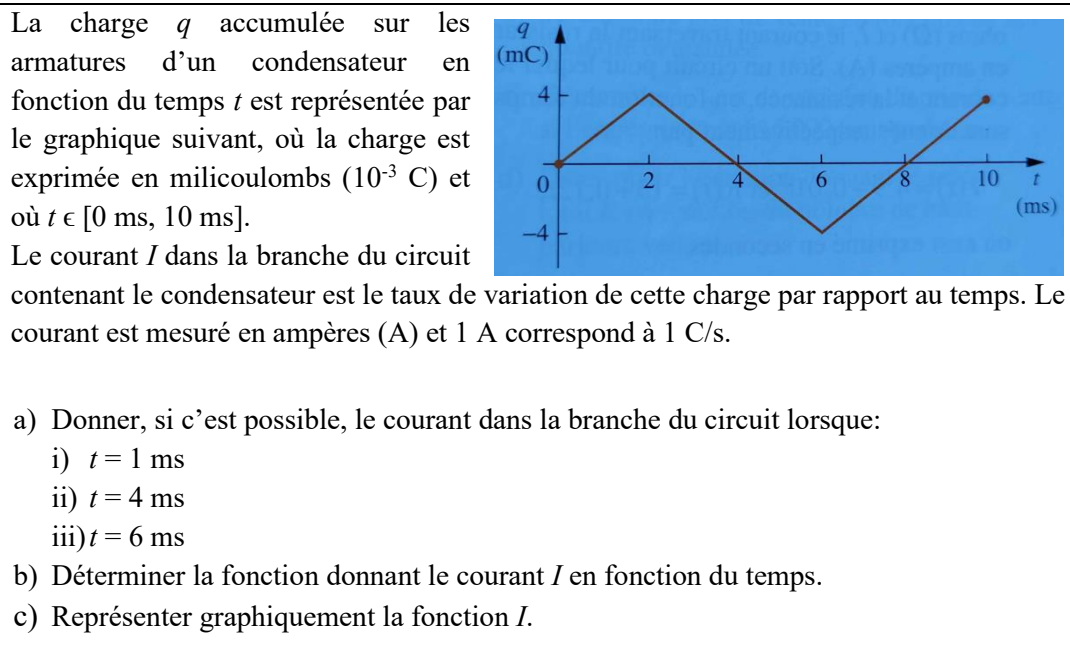
Problème 28907			
L'énoncé initial contient une équation et un graphique. a) : dérivation d'une équation donnée b.i), b.ii), b.iii) : substitution de valeurs			
	Contrôle structural	Contrôle opérationnel	
	<i>Contrôle sur les unités</i>	<i>Conservation d'unités</i>	
Contrôle sémantique	Permet d'identifier la dépendance (non indiquée) d'une grandeur.	Permet d'augmenter la sensibilité à la contradiction (et la perception d'erreurs) et de vérifier l'unité anticipée (de la grandeur recherchée). [dérivation d'une équation donnée, substitution de valeurs]	Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations
	<i>Contrôle sur l'équation</i>	<i>Contrôle sur l'équation</i>	
Contrôle sémantique	Permet (avec la cohérence des unités) de déterminer l'unité des facteurs numériques et d'accéder au phénomène physique encodé.	Permet (avec la cohérence des unités) de déterminer l'unités des facteurs numériques et d'accéder au phénomène physique encodé. [dérivation d'une équation donnée]	Contrôle sémantique
	<i>Contrôle sur le graphique</i>	<i>Contrôle sur le graphique</i>	
Contrôle sémantique	Permet de faire plusieurs déductions et d'améliorer la compréhension du graphique et du phénomène qu'il représente.	Permet de faire plusieurs déductions et d'améliorer la compréhension du graphique et du phénomène qu'il représente. Permet d'ajouter des éléments pertinents à la résolution sur le graphique. [substitution de valeurs]	Contrôle sémantique
		<i>Anticipation d'unité</i>	
		L'unité de la grandeur recherchée peut être anticipée. [substitution de valeurs]	Anticipation sur le résultat et contrôle sémantique
Remarques			

- L'exercice d'un contrôle sur l'équation (de la trajectoire elliptique) doit passer par une connaissance mathématique (l'ellipse).
- L'exercice d'un contrôle sur le graphique permet d'accéder à l'aspect dynamique qu'il possède, puisque le mobile se déplace au fil du temps sur la trajectoire (statique) illustrée dans le graphique.
- Une confusion possible (au niveau des taux de variation) peut être évitée par l'exercice d'un contrôle sur les unités (variation par rapport au temps).

5.3.7 Problème 29511

Le septième problème soumis à une analyse *a priori* se trouve dans la section *Activités d'apprentissage* de la fin du chapitre 4 – *Taux de variation* du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*. Jusqu'à présent, les étudiants ont travaillé les notions suivantes : les limites finie, infinie et à l'infini; la continuité; les taux de variation moyen (vitesse moyenne) et instantané (vitesse instantanée); la fonction dérivée; la dérivée des fonctions de la forme x^r , où $r \in \mathbb{R}$; la dérivée de sommes, différences, produits et quotients de fonctions, la dérivée de fonctions de la forme $[f(x)]^r$, où $r \in \mathbb{R}$; la règle de la dérivation en chaîne; les dérivées successives; la dérivation implicite; la relation entre la fonction et le signe de sa dérivée; les taux de variation en physique, en chimie et en économie; les taux de variation liés. Le contexte du problème 29511 – dont l'énoncé est présenté à la figure 5.11 – relève du champ de l'électricité et magnétisme et porte, plus précisément, sur les circuits électriques (un condensateur est un élément pouvant faire partie d'un circuit électrique).

Figure 5.11 Énoncé du problème 29511 (tiré du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*, 2023, p. 295)



Les demandes mathématiques apparaissant dans ce problème sont l'interprétation quantitative d'un graphique (**a.i**, **a.ii**, **a.iii**, **b**) et la construction d'un graphique à partir d'une équation algébrique construite précédemment (**c**).

Justification du choix du problème 29511

Le problème 29511 a été sélectionné puisqu'il est typique des problèmes mathématiques à contexte physique demandant l'interprétation quantitative d'un graphique et que le contexte y figurant ne relève pas du champ physique de la mécanique, au contraire de la majorité des problèmes du corpus ($\approx 64,29\%$; voir tableau 4.2). De plus, les unités de mesure figurant dans le graphique sont des sous-multiples décimaux d'unités SI (ms, mC), tandis que l'énoncé mentionne des unités de base et dérivées SI (s, C, A) et une expression alternative d'une unité de base ($A = C/s$); ce qui nous semble ouvrir la porte à un travail intéressant sur les unités.

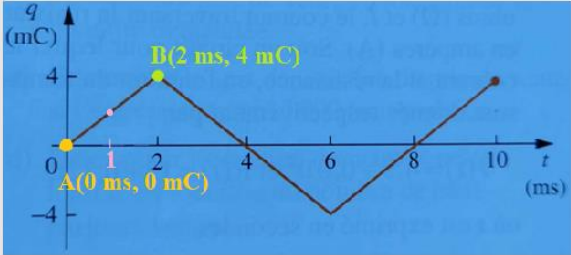
Analyse a priori du problème 29511

Suivant la lecture de la mise en situation initiale, c'est-à-dire la première partie de l'énoncé qui précède les sous-questions, il est nécessaire d'exercer un contrôle structural permettant la construction d'une représentation de cette situation initiale en sélectionnant et organisant les informations présentes dans cette partie d'énoncé : « La charge q accumulée sur les armatures d'un condensateur en fonction du temps t est représentée par le graphique suivant, où la charge est exprimée en milicoulombs (10^{-3} C) et où $t \in [0 \text{ ms}, 10 \text{ ms}]$. Le courant I dans la branche du circuit contenant le condensateur est le taux de variation de cette charge par rapport au temps. Le courant est mesuré en ampères (A) et 1 A correspond à 1 C/s » (Fortin et Poliquin, 2023, p. 295). Un contrôle sémantique peut s'exercer autour des équivalences entre unités présentes dans cette partie d'énoncé, c'est-à-dire $1 \text{ mC} = 10^{-3} \text{ C}$ et $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$. Puisque le rapport C/s est mentionné, nous pouvons anticiper que le rapport entre une charge (exprimée en C) et un temps (exprimé en s) jouera un rôle dans la résolution du problème; cependant, les unités de t et $q(t)$ sont **ms** et **mC** respectivement (des sous-multiples décimaux de s et C respectivement). L'équivalence $1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s}$ n'est pas donnée dans l'énoncé, mais peut être déduite par la définition du préfixe mili (symbole m) qui correspond au facteur 10^{-3} . Nous pouvons mettre en commun toutes ses informations ($1 \text{ mC} = 10^{-3} \text{ C}$; $1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s}$; $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$) afin de calculer le rapport mC/ms : $\frac{\text{mC}}{\text{ms}} = \frac{10^{-3} \text{ C}}{10^{-3} \text{ s}} = \frac{\text{C}}{\text{s}} = \text{A}$. Cela nous permet d'anticiper qu'une conversion d'unités risque de ne pas être nécessaire pendant la résolution du problème, puisque mC/ms correspond à A.

Pour la sous-question **a.i**) (voir tableau 5.25), le contrôle opérationnel peut se manifester par un contrôle sémantique autour du graphique afin d'y extraire les données pertinentes à la résolution. Nous cherchons à

déterminer le courant $I(t)$ à un certain instant ($t = 1 \text{ ms}$), c'est-à-dire le taux de variation de $q(t)$ à cet instant, ce qui correspond à la pente de la droite tangente à la courbe en ce point (illustré en rose). Puisque la courbe est constituée de segments de droites, la pente de la droite tangente en $t = 1 \text{ ms}$ est la même que celle du segment de droite sur lequel est situé le point (rose). Ainsi, nous pouvons sélectionner deux points de la courbe dont les valeurs sont lisibles sur le graphique (que nous avons nommé A et B; illustrés en jaune et vert respectivement) afin de calculer la valeur de cette pente, qui correspond à la valeur recherchée $I(t = 1 \text{ ms})$. Un contrôle sémantique et sur les nombres et opérations peut être exercé en conservant les unités pendant le calcul de la pente, ce qui nous permet de vérifier que l'unité résultante est bien l'unité de la grandeur physique calculée (A).

Tableau 5.25 Résolution de la sous-question **a.i)** du problème 29511

Sous-problème 29511 a.i)	
a) Donner, si c'est possible, le courant dans la branche du circuit lorsque:	
i) $t = 1 \text{ ms}$	
Résolution	
	$I(t = 1 \text{ ms}) = \left. \frac{dq}{dt} \right _{t=1 \text{ ms}} = ?$ $\left(\frac{\text{mC}}{\text{ms}} = \frac{10^{-3} \text{ C}}{10^{-3} \text{ s}} = \frac{\text{C}}{\text{s}} = \text{A} \right)$ Pente $\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{4 \text{ mC} - 0 \text{ mC}}{2 \text{ ms} - 0 \text{ ms}} = \frac{4 \text{ mC}}{2 \text{ ms}} = 2 \text{ A}$ $I(t = 1 \text{ ms}) = \left. \frac{dq}{dt} \right _{t=1 \text{ ms}} = 2 \text{ A}$

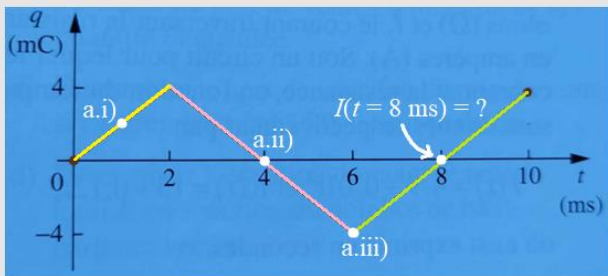
La résolution de la sous-question **a.ii)** est très similaire à **a.i)** et sollicite les mêmes manifestations du contrôle opérationnel ($I(t = 4 \text{ ms}) = -2 \text{ A}$). La sous-question **a.iii)**, quant à elle, diffère un peu, car le point d'intérêt (6 ms, -4 mC) est un pic et donc la dérivée à ce point n'existe pas ($I(t = 6 \text{ ms}) \nexists$).

Lors de la résolution de la sous-question **b)** (voir tableau 5.26), un contrôle sémantique sur le graphique peut également être exercé, permettant de constater que la courbe illustrée est constituée de trois segments de droites et donc que $I(t)$ sera une fonction par parties, où chaque partie est une constante qui correspond à la valeur de la pente de chaque segment. Il est important d'exclure les bornes des segments – $t \in \{0 \text{ ms}, 2 \text{ ms}, 6 \text{ ms}, 10 \text{ ms}\}$ – puisqu'en ces points la dérivée $\frac{dq}{dt}$ ($= I(t)$) n'existe pas; ce qui est dû à la présence de pics et des bornes du domaine de $q(t)$. Avec les réponses aux sous-questions **a.i)** et **a.ii)** ($I(t = 1 \text{ ms}) = 2 \text{ A}$; $I(t = 4 \text{ ms}) = -2 \text{ A}$), nous avons déjà les constantes pour les deux premières parties de $I(t)$. Il faut donc faire une

résolution similaire à la sous-question **a.i)** (voir tableau 5.25) afin de calculer la pente du dernier segment de droite; ce qui entraîne la sollicitation des contrôles sémantique et sur les nombres et opérations si les unités sont conservées pendant le calcul. Ainsi, avec cette valeur, nous obtenons :

$$I(t) = \begin{cases} 2 \text{ A} & 0 \text{ ms} < t < 2 \text{ ms} \\ -2 \text{ A} & 2 \text{ ms} < t < 6 \text{ ms} \\ 2 \text{ A} & 6 \text{ ms} < t < 10 \text{ ms} \end{cases}$$

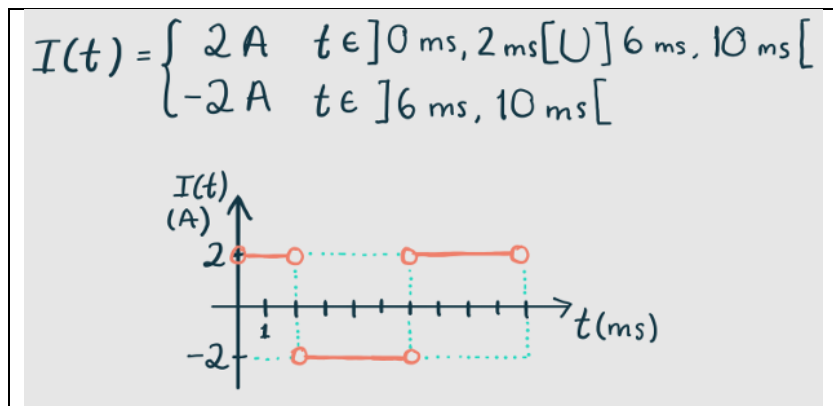
Tableau 5.26 Résolution de la sous-question **b)** du problème 29511

Sous-problème 29511 b)	
b) Déterminer la fonction donnant le courant I en fonction du temps.	
Résolution	
 3 sections : $t \in]0 \text{ ms}, 2 \text{ ms}[$ $t \in]2 \text{ ms}, 6 \text{ ms}[$ $t \in]6 \text{ ms}, 10 \text{ ms}[$ Les bornes sont exclues, car $I(t) = \frac{dq}{dt}$ n'existe pas pour $t \in \{0 \text{ ms}, 2 \text{ ms}, 6 \text{ ms}, 10 \text{ ms}\}$ (pics et bornes du domaine de $q(t)$)	Réponses aux sous-questions a.ii) et a.iii) : $I(t = 4 \text{ ms}) = -2 \text{ A}$ $I(t = 6 \text{ ms})$ ~~A~~ (présence d'un pic) $I(t = 8 \text{ ms}) = ?$ Pente $\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{4 \text{ mC} - (-4 \text{ mC})}{10 \text{ ms} - 6 \text{ ms}} = 2 \text{ A}$ $I(t) = \begin{cases} 2 \text{ A} & 0 \text{ ms} < t < 2 \text{ ms} \\ -2 \text{ A} & 2 \text{ ms} < t < 6 \text{ ms} \\ 2 \text{ A} & 6 \text{ ms} < t < 10 \text{ ms} \end{cases}$

Pour la sous-question **c)** (voir tableau 5.27), qui demande la construction d'un graphique, nous devons connaître l'unité des grandeurs physiques qui sont les variables indépendante (t) et dépendante ($I(t)$) afin de compléter les axes du graphique. Il faut également représenté adéquatement l'exclusion de certains points par des points vides.

Tableau 5.27 Résolution de la sous-question **c)** du problème 29511

Sous-problème 29511 c)
c) Représenter graphiquement la fonction I .
Résolution



Synthèse de l'analyse a priori du problème 29511

Tableau 5.28 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 29511

Problème 29511			
L'énoncé initial contient un graphique et des équivalences d'unités. a.i), a.ii), a.iii), b) : interprétation quantitative d'un graphique c) : construction d'un graphique à l'aide d'une expression algébrique			
Contrôle structural		Contrôle opérationnel	
Contrôle sur les unités		Contrôle sur le graphique	
Contrôle sémantique	Permet, grâce à la présence d'équivalences d'unités, d'obtenir une nouvelle équivalence d'unités et d'anticiper qu'une conversion d'unités n'est pas nécessaire (contrairement aux premiers abords).	Permet de faire plusieurs déductions et d'améliorer la compréhension du graphique. Permet d'ajouter des éléments pertinents à la résolution sur le graphique. [interprétation quantitative d'un graphique] L'unité des grandeurs (indépendante et dépendante) est nécessaire pour l'identification des axes. [construction d'un graphique à l'aide d'une expression algébrique]	Contrôle sémantique
		Anticipation d'unité	Anticipation sur le résultat et contrôle sémantique
		L'unité de la grandeur recherchée peut être anticipée. [interprétation quantitative d'un graphique]	
		Conservation des unités	

		Permet d'augmenter la sensibilité à la contradiction (et la perception d'erreurs) et de vérifier l'unité anticipée (de la grandeur recherchée). [interprétation quantitative d'un graphique]	Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations
	Remarque		
	Sans impliquer ouvertement les unités de mesure, le contrôle opérationnel peut passer par une anticipation sur la planification de la résolution : la nécessité d'avoir recours à une connaissance reliant les registres graphique et algébrique peut être anticipée [interprétation quantitative d'un graphique].		

5.3.8 Problème 29612

Le huitième problème soumis à une analyse *a priori* se trouve dans la même section que le problème 29511, c'est-à-dire la section *Activités d'apprentissage* de la fin du chapitre 4 – *Taux de variation* du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*. Jusqu'à présent, les étudiants ont travaillé les notions suivantes : les limites finie, infinie et à l'infini; la continuité; les taux de variation moyen (vitesse moyenne) et instantané (vitesse instantanée); la fonction dérivée; la dérivée des fonctions de la forme x^r , où $r \in \mathbb{R}$; la dérivée de sommes, différences, produits et quotients de fonctions, la dérivée de fonctions de la forme $[f(x)]^r$, où $r \in \mathbb{R}$; la règle de la dérivation en chaîne; les dérivées successives; la dérivation implicite; la relation entre la fonction et le signe de sa dérivée; les taux de variation en physique, en chimie et en économie; les taux de variation liés. Le contexte du problème 29612 – dont l'énoncé est présenté à la figure 5.12 – relève du champ de la mécanique et du sous-champ de la cinématique (à l'instar des problèmes 10705, 18413, 19506, 19910 et 28907).

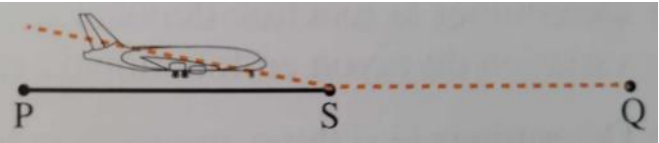
Figure 5.12 Énoncé du problème 29612 (tiré du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*, 2023, p. 296)

Un avion, atterrissant sur une piste PQ longue de 1,5 km, touche le sol au point S. La distance x , en mètres, sur la piste entre l'avion et le point P est donnée par $x(t) = 900 + 75t - 2,5t^2$, où t est le temps, en secondes, écoulé depuis l'atterrissage jusqu'à l'immobilisation de l'appareil.

a) Déterminer la distance:

- entre P et S;
- parcourue par l'avion pendant les 4 premières secondes après qu'il a touché le sol.

b) Démontrer qu'à partir du moment où l'avion atterrit, il ralentit.



- c) Déterminer la vitesse de l'avion, en kilomètres par heure (km/h):
 - i) 2 secondes après l'atterrissage;
 - ii) 8 secondes après l'atterrissage.
- d) Déterminer la distance entre P et l'avion:
 - i) lorsque l'avion a une vitesse de 54 km/h;
 - ii) lorsque l'avion va s'immobiliser.
- e) Déterminer la distance maximale entre P et S pour que l'avion puisse s'arrêter avant d'atteindre l'extrémité Q de la piste.

Les demandes mathématiques apparaissant dans ce problème sont la substitution de valeurs (**a.i**, **a.ii**, **c.i**, **c.ii**), la démonstration d'un résultat (**b**) et la résolution d'une équation (**d.i**, **d.ii**, **e**).

Justification du choix du problème 29612

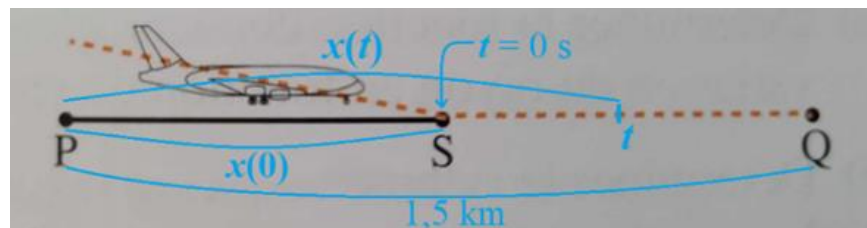
Le problème 29612 a été sélectionné puisqu'il est typique des problèmes mathématiques à contexte physique travaillant les fonctions position, vitesse et accélération d'un objet en mouvement. Comme un bon nombre de ces problèmes, un schéma illustrant l'objet en mouvement accompagne l'énoncé. De plus, la présence d'un tel schéma ouvre la porte à une activité contrôlée pouvant être réalisée afin de mettre en relation le schéma, le contexte physique et l'équation présente dans l'énoncé. Ce problème a également attiré notre œil car l'énoncé initial contient deux unités différentes de même nature, c'est-à-dire le mètre et le kilomètre (deux unités exprimant une distance), ce qui soulève la possibilité d'une conversion d'unités. Enfin, il contient une des demandes mathématiques les plus rares, c'est-à-dire la démonstration d'un résultat.

Analyse a priori du problème 29612

Suivant la lecture de la mise en situation initiale, c'est-à-dire la première partie de l'énoncé qui précède les sous-questions, il est nécessaire d'exercer un contrôle structural permettant la construction d'une représentation de cette situation initiale en sélectionnant et organisant les informations présentes dans cette partie d'énoncé : « Un avion, atterrissant sur une piste PQ longue de 1,5 km, touche le sol au point S. La distance x , en mètres, sur la piste entre l'avion et le point P est donnée par $x(t) = 900 + 75t - 2,5t^2$, où t est le temps, en secondes, écoulé depuis l'atterrissage jusqu'à l'immobilisation de l'appareil » (Fortin et Poliquin, 2023, p. 296). D'abord, un contrôle sémantique peut s'exercer autour des unités présentes dans cet extrait, c'est-à-dire sur la seconde, le mètre et le kilomètre (km) : présence du mètre et du kilomètre comme unités de mesure de distance permet d'anticiper la nécessité d'une conversion entre ces dernières à un moment où l'autre de la résolution. Une lecture des sous-questions (**c**, **d.i**) soutient cette nécessité, car des vitesses sont exprimées en kilomètres par heure plutôt qu'en mètres par seconde. Ensuite, un contrôle sémantique peut s'exercer sur le schéma lors du décodage de ses éléments et de leur association aux

informations contenues dans l'énoncé initial. Dans ce schéma (voir figure 5.12), la ligne pointillée représente la trajectoire générale qui sera suivie par l'avion lors de son atterrissage sur la piste PQ. La mise en commun de la phrase « le temps, en secondes, écoulé depuis l'atterrissage jusqu'à l'immobilisation de l'appareil » et de la phrase « un avion [...] touche le sol au point S » permet de comprendre que le temps commence à s'écouler au point S (voir figure 5.13) ; c'est-à-dire qu'à $t = 0$ s, l'avion se trouve au point S, et que $x(t = 0 \text{ s}) = m\overline{PS}$. Ainsi, pour un certain moment $t > 0$ s, l'avion se trouve sur la piste d'atterrissage entre les points S et Q, ce qui nous permet de représenter la grandeur $x(t)$, soit la distance entre le point P et l'endroit sur la trajectoire (ligne pointillée) où l'avion se situe à cet instant. La longueur de la piste peut également être ajoutée au schéma (voir figure 5.13). Bref, l'inclusion des unités dans le schéma permet de bien se l'approprier par la saisie rapide des grandeurs en jeu (distance et temps).

Figure 5.13 Schéma enrichi du problème 29612



Enfin, les unités de mesure peuvent permettre l'exercice d'un contrôle sémantique sur l'équation donnée dans l'énoncé initial, et l'établissement de liens entre cette dernière et la schématisation du problème. Par le recours à la cohérence des unités⁶⁶, nous pouvons accéder à la signification contextuelle des nombres présents dans l'équation $x(t) = 900 + 75t - 2,5t^2$. Puisque l'unité de x est le mètre, le 900 représente également des mètres, indiquant qu'il s'agit d'une distance. Nous pouvons aller plus loin en constatant qu'au temps initial ($t = 0$ s), nous obtenons $x(0) = 900$ m, ce qui représente, en contexte, la distance entre P et S où l'avion touche initialement le sol. En outre, par la cohérence des unités, le terme $75t$ doit également s'exprimer en mètres, ce qui, combiné avec le fait que t s'exprime en secondes, implique que 75 représente des mètres par seconde, indiquant qu'il s'agit d'une vitesse. Afin d'arriver à cette conclusion, il faut évidemment savoir qu'une vitesse consiste en le rapport d'une distance par la durée prise pour la parcourir. Par un argument similaire, nous pouvons déduire que 2,5 représente des mètres par seconde carrée, indiquant qu'il est lié à l'accélération, qui est négative dans ce cas (décélération). Cependant, il faut connaître le lien entre les mètres par seconde carrée et l'accélération; l'accélération consiste au rapport d'une vitesse par une durée, c'est-à-dire le rapport d'une distance par une durée au carré. Ainsi, l'exercice d'un contrôle

⁶⁶ Elle stipule que seulement des termes possédant la même unité peuvent être additionnés ou soustraits.

sémantique sur l'équation permet d'accéder au phénomène physique encapsulé par celle-ci (distance parcourue = distance initiale + vitesse (initiale) · temps + accélération · temps²).

La résolution des sous-questions **a.i)** et **a.ii)** demande de la substitution de valeurs. Comme abordé lors de l'analyse *a priori* de problèmes précédents, l'exercice d'un contrôle sémantique et d'un contrôle sur les nombres et opérations (comme composantes du contrôle opérationnel) est nécessaire afin de conserver les unités (ce qui augmente la sensibilité à la contradiction) pendant les calculs suivant la substitution de valeurs. Pour la sous-question **b)** (voir tableau 5.29), les unités peuvent être conservées pendant les deux dérivations ($v(t) = \frac{dx}{dt}$ et $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$) de l'équation $x(t) = 900 \text{ m} + \left(75 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)t - \left(2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t^2$, sollicitant donc les mêmes contrôles. De plus, l'exercice d'un contrôle sémantique sur les équations obtenues ainsi, $v(t) = 75 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t$ et $a(t) = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, permet d'accéder à leur signification en contexte, c'est-à-dire que la vitesse de l'avion à un certain instant correspond à une **vitesse initiale** ($v(t = 0 \text{ s}) = 75 \text{ m/s}$) additionné de l'**accélération** de l'avion (-5 m/s^2) multiplié par le **temps** écoulé depuis l'atterrissage de l'avion (en s) et que l'**accélération** de l'avion est négative et constante (-5 m/s^2) à tous les instants ($t > 0 \text{ s}$).

Tableau 5.29 Résolution de la sous-question **b)** du problème 29612

Sous-problème 29612 b)	
b) Démontrer qu'à partir du moment où l'avion atterrit, il ralentit.	
Résolution	
$x(t) = 900 \text{ m} + \left(75 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)t - \left(2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t^2 \quad t \geq 0 \text{ s}$	
$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(900 \text{ m} + \left(75 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)t - \left(2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t^2 \right) = 75 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \left(2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t = 75 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \underbrace{\left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t}_{\text{vitesse initiale} \quad \text{accélération}}$	
$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(75 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t \right) = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (\text{constante } \forall t)$	
$v(t) = 75 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t$	Lorsque t augmente, $v(t)$ diminue, c'est-à-dire que la vitesse de l'avion diminue après qu'il touche le sol (l'avion ralentit).
$a(t) = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	L'accélération est négative à tous moments ($\forall t$), donc l'avion ralentit après qu'il touche le sol.
$t > 0 \text{ s}$	

Donc, l'exercice d'un contrôle sémantique sur les équations permet de montrer que l'avion ralentit après qu'il touche sol, car nous pouvons constater que la vitesse de l'avion diminue au fil du temps et que

l'accélération est négative et constante au fil du temps; ce qui entraîne le ralentissement de l'avion au fil du temps (qui commence à s'écouler lorsque l'avion touche initialement le sol).

Pour la sous-question **c.i)** (similairement pour **c.ii)**, le contrôle opérationnel peut se manifester par l'anticipation qu'une conversion d'unités sera nécessaire vers la fin de la résolution (voir tableau 5.30). Cette anticipation passe par un contrôle sémantique sur les unités de mesure (à l'instar d'une des composantes du contrôle structural), c'est-à-dire par la reconnaissance que l'équation de la vitesse $v(t)$ (calculée en **b)** met en jeu le m/s et le m/s², comme unité de vitesse et d'accélération respectivement, tandis qu'il est demandé d'exprimer la vitesse recherchée en km/h. La substitution de valeurs (faite en conservant les unités) et la conversion d'unités requièrent les mêmes contrôles, c'est-à-dire un contrôle sémantique et un contrôle sur les nombres et opérations. Lors de la conversion d'unités, ces contrôles se mobilisent afin d'associer les valeurs numériques adéquates entre les grandeurs équivalentes de même nature (e.g. 1 km = 10³ m; 1 m = 10⁻³ km) et de réaliser les opérations appropriées pour obtenir la grandeur convertie dans l'unité voulue. Il y a plusieurs manières de faire une conversion d'unités; deux sont illustrées dans le tableau 5.30.

Tableau 5.30 Résolution de la sous-question **c.i)** du problème 29612

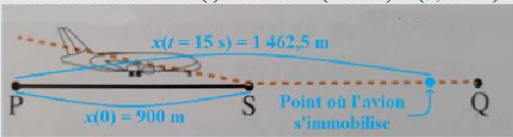
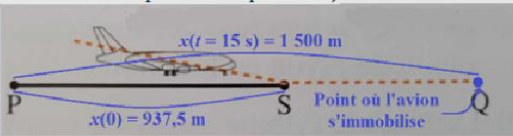
Sous-problème 29612 c.i)	
c) Déterminer la vitesse de l'avion, en kilomètres par heure (km/h): i) 2 secondes après l'atterrissage;	
Résolution	
$v(t = 2 \text{ s}) = ? \text{ exprimé en km/h}$ $v(t) = 75 \frac{\text{m}}{\text{s}} - (5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})t$ $v(t = 2 \text{ s}) = 75 \frac{\text{m}}{\text{s}} - (5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(2 \text{ s}) = 75 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 65 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $65 \frac{\text{m}}{\text{s}} = ? \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad \begin{array}{l} 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} \\ 1 \text{ m} = 10^{-3} \text{ km} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \text{ h} = 60^2 \text{ s} \\ 1 \text{ s} = 60^{-2} \text{ h} \end{array}$ $\frac{65 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \frac{65(10^{-3} \text{ km})}{60^{-2} \text{ h}} = 234 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad \boxed{v(t = 2 \text{ s}) = 234 \frac{\text{km}}{\text{h}}}$ $\frac{65 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \frac{65 \cdot 60^2 \text{ m}}{60^2 \text{ s}} = \frac{234\,000 \text{ m}}{1 \text{ h}} = \frac{234 \times 10^3 \text{ m}}{1 \text{ h}} = \frac{234 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 234 \frac{\text{km}}{\text{h}}$	

Pour les sous-questions **d.i)** et **d.ii)**, qui demandent la résolution d'une équation, les composantes du contrôle opérationnel sollicitées sont les mêmes que celles lors de la résolution du sous-problème 27904 **b)** (illustrée dans le tableau 5.19): $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \xrightarrow{v(t)} \text{s} \xrightarrow{x(t)} \text{m}\right)$ l'enchaînement de deux équations peut être plus facilement

discerné par la considération des unités plutôt que les grandeurs physiques elles-mêmes (vitesse → temps → distance). Pour la sous-question **d.i)**, une conversion d'unités est nécessaire au début de la résolution, puisque la vitesse donnée est exprimée en km/h et que les unités présentes dans $v(t)$ sont le m/s et le m/s^2 . La conversion d'unités sollicite les mêmes contrôles que ceux abordés précédemment (sous-question **c.i)**).

Pour la sous-question **e)** (voir tableau 5.31), un contrôle sémantique doit être mobilisé. Il faut comprendre implicitement que toutes les conditions (vitesse initiale, accélération, durée de l'atterrissage) de cette nouvelle situation restent les mêmes que celles de la situation initiale (voir figure 5.12), à l'exception de la distance entre les points P et S (i.e. $x(t = 0 \text{ s})$), que nous cherchons à maximiser, de telle manière que l'avion s'immobilise à l'extrémité Q de la piste (au lieu de s'arrêter entre les points S et Q). Un contrôle sémantique peut s'exercer sur le schéma présentée à la figure 5.13 afin d'y ajouter des informations gagnées pendant la résolution des sous-questions **a.i)** et **d.ii)** et d'illustrer l'endroit où l'avion s'immobilise sur la piste d'atterrissage PQ ($x(t = 15 \text{ s}) = 1462,5 \text{ m}$). Nous pouvons également modifier le schéma pour représenter la nouvelle situation décrite par la sous-question **e)** et le comparer à celui représentant la situation initiale.

Tableau 5.31 Résolution de la sous-question **e)** du problème 29612

Sous-problème 29612 e)	
e) Déterminer la distance maximale entre P et S pour que l'avion puisse s'arrêter avant d'atteindre l'extrémité Q de la piste.	
Résolution	
$m\overline{PS}$ maximale = ? tel que l'avion au point Q Situation initiale $x(t) = 900 \text{ m} + (75 \text{ m/s})t - (2,5 \text{ m/s}^2)t^2$  Selon la sous-question a.i): $m\overline{PS} = x(t = 0 \text{ s}) = 900 \text{ m}$ Selon la sous-question d.ii): L'avion s'immobilise à $x(t) = 1462,5 \text{ m}$ lorsque $t = 15 \text{ s}$. Les conditions de la nouvelle situation (décrite en e)) restent les mêmes que celles de la situation initiale (vitesse initiale, accélération, durée de l'atterrissage), à l'exception de la distance initiale (que nous voulons maximiser). Situation décrite par la sous-question e)  $1,5 \text{ km} = 1,5(10^3 \text{ m}) = 1500 \text{ m}$	

$$x(t = 15 \text{ s}) = 1500 \text{ m} \quad (\text{au lieu de } 1462,5 \text{ m})$$

$$x(t = 15 \text{ s}) = m\overline{PS}_{\max} + \left(75 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(15 \text{ s}) - (2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(15 \text{ s})^2 = 1500 \text{ m}$$

$$m\overline{PS}_{\max} = 1500 \text{ m} - 1125 \text{ m} + 562,5 \text{ m} = \boxed{937,5 \text{ m}}$$

Équation décrivant la sous-question e)

$$x(t) = 937,5 \text{ m} + (75 \text{ m/s})t - (2,5 \text{ m/s}^2)t^2$$

De surcroît, l'équation $x(t)$ décrivant la situation initiale peut être modifiée afin d'obtenir l'équation reflétant la nouvelle situation, c'est-à-dire que la distance initiale (entre les points P et S) passe de 900 m à 937,5 m telle que l'avion s'immobilise à l'extrémité Q de la piste après un atterrissage de 15 s, plutôt que plusieurs mètres avant cette extrémité. Il existe une résolution alternative ancrée dans la compréhension du contexte physique du problème. Puisque, dans la situation initiale, l'avion s'immobilise à une distance de 1462,5 m après un atterrissage de 15 s et que nous voulons que l'avion s'immobilise plutôt à une distance de 1500 m (à l'extrémité Q de la piste) après un atterrissage de 15 s, c'est-à-dire que l'avion s'immobilise, et donc touche le sol, $(1500 \text{ m} - 1462,5 \text{ m}) = 37,5 \text{ m}$ plus loin; ce qui correspond à l'augmentation de 37,5 m de la distance initiale $(900 \text{ m} + 37,5 \text{ m} = \mathbf{937,5 \text{ m}})$.

Synthèse de l'analyse a priori du problème 29612

Tableau 5.32 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 29612

Problème 29612			
L'énoncé initial contient une équation et un schéma. a.i), a.ii), c.i), c.ii) : substitution de valeurs b) : démonstration d'un résultat d.i), d.ii), e) : résolution d'une équation			
Contrôle structural		Contrôle opérationnel	
	Contrôle sur les unités	Anticipation d'unité	
Contrôle sémantique	Permet d'anticiper la nécessité éventuelle d'une conversion d'unités par la reconnaissance d'unités différentes de même nature.	L'unité de la grandeur recherchée peut être anticipée. [substitution de valeurs, résolution d'équations]	Anticipation sur le résultat et contrôle sémantique
	Contrôle sur le schéma	Conservation des unités	

Contrôle sémantique	Permet de décoder les éléments y figurant et d'y ajouter les grandeurs en jeu, facilitant l'appropriation du phénomène physique représenté.	Permet d'augmenter la sensibilité à la contradiction (et la perception d'erreurs) et de vérifier l'unité anticipée (de la grandeur recherchée). [substitution de valeurs, démonstration d'un résultat, résolution d'équations]	Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations
	<i>Contrôle sur l'équation</i>	<i>Contrôle sur l'équation</i>	
Contrôle sémantique	Permet (avec la cohérence des unités) de déterminer l'unité des facteurs numériques et d'accéder au phénomène physique encodé.	Permet (avec la cohérence des unités) de déterminer l'unités des facteurs numériques et d'accéder au phénomène physique encodé. [démonstration d'un résultat, résolution d'équations]	Contrôle sémantique
		<i>Contrôle sur les unités</i>	
		Permet d'anticiper la nécessité, pendant la résolution, d'une conversion d'unités par la reconnaissance d'unités différentes de même nature (demandées ou fournies). [substitution de valeurs, résolution d'équations]	Contrôle sémantique
		<i>Conversion d'unités</i>	
		Permet d'exprimer des grandeurs équivalentes avec des unités différentes de même nature. [substitution de valeurs, résolution d'équations]	Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations
		<i>Enchaînement d'équations</i>	
		Considérer l'enchaînement des unités – plutôt que les grandeurs elles-mêmes – peut permettre de discerner plus facilement l'enchaînement des équations. [résolution d'équations]	Discernement et anticipation sur la planification de la résolution
		<i>Contrôle sur le schéma</i>	
		Permet de modifier le schéma original afin de représenter une nouvelle situation en y ajoutant les (nouveaux) éléments pertinents. [résolution d'équations]	Contrôle sémantique

		<i>Vérification par le contexte physique</i>	Vérification par un retour à la représentation et contrôle sémantique
		Les unités permettent d’expliciter les liens entre les grandeurs (et leur valeur numérique) et donc de raisonner sur le contexte physique. [résolution d’équations]	
	Remarque		
	Un certain instinct physique est nécessaire lors de la sous-question e) afin de comprendre que les conditions de la situation initiale ne changent pas à l’exception de la distance initiale.		

5.3.9 Problème 29613

Le neuvième problème soumis à une analyse *a priori* se trouve dans la même section que les problèmes 29511 et 29612, c'est-à-dire la section *Activités d'apprentissage* de la fin du chapitre 4 – *Taux de variation* du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*. Jusqu'à présent, les étudiants ont travaillé les notions suivantes : les limites finie, infinie et à l'infini; la continuité; les taux de variation moyen (vitesse moyenne) et instantané (vitesse instantanée); la fonction dérivée; la dérivée des fonctions de la forme x^r , où $r \in \mathbb{R}$; la dérivée de sommes, différences, produits et quotients de fonctions, la dérivée de fonctions de la forme $[f(x)]^r$, où $r \in \mathbb{R}$; la règle de la dérivation en chaîne; les dérivées successives; la dérivation implicite; la relation entre la fonction et le signe de sa dérivée; les taux de variation en physique, en chimie et en économie; les taux de variation liés. Le contexte du problème 29613 – dont l'énoncé est présenté à la figure 5.14 – relève du champ de l'électricité et magnétisme et porte, plus précisément, sur les circuits électriques (à l'instar du problème 29511).

Figure 5.14 Énoncé du problème 29613 (tiré du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*, 2023, p. 296)

Selon la loi d'Ohm, la tension V aux bornes d'une résistance R d'un circuit est donnée par $V = RI$, où V est exprimée en volts (V), R, en ohms (Ω) et I, le courant traversant la résistance, en ampères (A). Soit un circuit pour lequel le courant et la résistance, en fonction du temps t, sont donnés respectivement par $I(t) = 4,9 - 0,01t^2$ et $R(t) = 15 + 0,12t$, où t est exprimé en secondes. a) Évaluer: i) $I(3)$ et $I'(3)$; ii) $R(3)$ et $R'(3)$. b) Déterminer la fonction donnant la tension aux bornes de la résistance en fonction du temps.
--

- c) Déterminer le taux de variation de la tension aux bornes de la résistance lorsque $t = 3$ s.
- d) Vérifier que $V'(3) \neq R'(3) I'(3)$. Expliquer le résultat.
- e) Vérifier que $V'(3) = R'(3) I(3) + R(3) I'(3)$. Expliquer le résultat.

Les demandes mathématiques apparaissant dans ce problème sont la substitution de valeurs (**a.i**, **a.ii**, **d**, **e**), la transformation d'une expression algébrique (**b**) et la dérivation d'une équation en un point (**c**).

Justification du choix du problème 29613

Le problème 29613 a été sélectionné puisqu'il met en jeu des unités moins fréquemment utilisées dans le corpus des problèmes mathématiques à contexte physique. Puisque l'énoncé initial contient trois équations différentes, nous soupçonnons la possibilité d'un travail intéressant autour de celles-ci. La sous-question **d**) nous semble riche en termes du contrôle, car elle sollicite directement la composante sensibilité à la contradiction en demandant de vérifier une fausse égalité.

Analyse a priori du problème 29613

Suivant la lecture de la mise en situation initiale, c'est-à-dire la première partie de l'énoncé qui précède les sous-questions, il est nécessaire d'exercer un contrôle structural permettant la construction d'une représentation de cette situation initiale en sélectionnant et organisant les informations présentes dans cette partie d'énoncé : « Selon la loi d'Ohm, la tension V aux bornes d'une résistance R d'un circuit est donnée par $V = RI$, où V est exprimée en volts (V), R , en ohms (Ω) et I , le courant traversant la résistance, en ampères (A). Soit un circuit pour lequel le courant et la résistance, en fonction du temps t , sont donnés respectivement par $I(t) = 4,9 - 0,01t^2$ et $R(t) = 15 + 0,12t$, où t est exprimé en secondes » (Fortin et Poliquin, 2023, p. 296). Un contrôle sémantique peut s'exercer autour des trois équations données ($V = R \cdot I$; $R(t)$; $I(t)$). Pour les équations $R(t)$ et $I(t)$, le contrôle sémantique suit la même procédure que celle illustrée à la figure 4.4 (problème 10705), ce qui nous permet de déterminer l'unité des facteurs numériques et d'obtenir les équations (enrichies) suivantes : $R(t) = 15 \Omega + \left(0,12 \frac{\Omega}{s}\right) t$; $I(t) = 4,9 \text{ A} - \left(0,01 \frac{\text{A}}{s^2}\right) t^2$. Cependant, le contrôle sémantique exercé sur l'équation $V = R \cdot I$ revêt une forme différente, puisqu'il nous permet d'obtenir directement le lien entre le volt, l'ohm et l'ampère (voir figure 5.15), des unités moins fréquemment rencontrées par les étudiants⁶⁷ (que le mètre, la seconde, le mètre par seconde, le mètre par

⁶⁷ Comme mentionné dans le chapitre 1 - Problématique, les étudiants du programme *Sciences de la nature* suivent généralement le cours de mathématique *Calcul différentiel* et le cours de physique *Mécanique* de manière concomitante; le cours *Électricité et magnétisme* est le deuxième cours de physique.

seconde carrée, par exemple). Le lien entre les unités prend la même forme que le lien entre les grandeurs physiques elles-mêmes, car ce sont les unités (de base et dérivées) faisant partie de l'ensemble cohérent des unités SI associées à ces grandeurs (voir BIMP, 2019, p. 25).

Figure 5.15 Relation entre les unités V, Ω et A

$$\begin{aligned} V &= R \cdot I \\ [V] &= [R][I] \\ \underbrace{V} &= \underbrace{\Omega} \underbrace{A} \\ V &= \Omega \cdot A \end{aligned}$$

Il est intéressant de noter qu'une confusion est possible au niveau du symbolisme (semblable à celle du problème 10705), puisque le même symbole – soit en caractère droit, soit en italique – est utilisée à la fois pour représenter la grandeur physique (la tension V) et l'unité dérivée cohérente SI associée à cette grandeur (le volt **V**).

La résolution des sous-questions **a.i)** et **a.ii)** ne sera pas abordée, car la substitution de valeurs – et les composantes du contrôle opérationnel qu'elle sollicite (anticipation, contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations, sensibilité à la contradiction) – ont déjà été vues plusieurs fois. La sous-question **b)** (voir tableau 5.33), qui demande la manipulation d'expressions algébriques, peut être résolue en conservant les unités de mesure dans les équations de $R(t)$ et $I(t)$, ce qui permet d'obtenir directement l'équation $V(t)$ avec l'unité des facteurs numériques y figurant. Encore une fois, la conservation des unités requièrent l'exercice d'un contrôle sémantique et d'un contrôle sur les nombres et opérations. L'utilisation de la déduction que $V = \Omega \cdot A$ facilite la lecture de l'équation $V(t)$ et en permet une meilleure compréhension.

Tableau 5.33 Résolution de la sous-question **b)** du problème 29613

Sous-problème 29613 b)
b) Déterminer la fonction donnant la tension aux bornes de la résistance en fonction du temps.
Résolution

$$V = R \cdot I$$

$$\begin{aligned} V(t) &= R(t) \cdot I(t) = (15 \, \Omega + (0,12 \, \frac{\Omega}{s})t) (4,9 \, A - (0,01 \, \frac{A}{s^2})t^2) \\ &= (15 \, \Omega)(4,9 \, A) - (15 \, \Omega)(0,01 \, \frac{A}{s^2})t^2 + (0,12 \, \frac{\Omega}{s})t(4,9 \, A) - (0,12 \, \frac{\Omega}{s})t(0,01 \, \frac{A}{s^2})t^2 \\ &= 73,5 \, \Omega \cdot A - (0,15 \, \frac{\Omega \cdot A}{s^2})t^2 + (0,588 \, \frac{\Omega \cdot A}{s})t - (0,0012 \, \frac{\Omega \cdot A}{s^3})t^3 \end{aligned}$$

$$V(t) = 73,5 \, V + (0,588 \, \frac{V}{s})t - (0,15 \, \frac{V}{s^2})t^2 - (0,0012 \, \frac{V}{s^3})t^3$$

$$V = \Omega \cdot A$$

La sous-question **d)** (voir tableau 5.34) est abordée, car la substitution de valeurs demandée – ici, la vérification de la fausseté d’une égalité – entraîne un travail intéressant autour du contrôle et des unités. Le constat que les deux membres de l’« égalité » ne sont pas égaux nécessite une sensibilité à la contradiction; c’est-à-dire que cette composante du contrôle opérationnel est directement sollicitée par la sous-question.

Tableau 5.34 Résolution de la sous-question **d)** du problème 29613

Sous-problème 29613 d)	
d) Vérifier que $V'(3) \neq R'(3) I'(3)$. Expliquer le résultat.	
Résolution	
$V'(t=3s) \neq R'(t=3s) I'(t=3s)$ $\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right _{t=3s} &= \left. \frac{d}{dt} \left(73,5 \, V + (0,588 \, \frac{V}{s})t - (0,15 \, \frac{V}{s^2})t^2 - (0,0012 \, \frac{V}{s^3})t^3 \right) \right _{t=3s} \\ &= \left(0,588 \, \frac{V}{s} - (0,3 \, \frac{V}{s^2})t - (0,0036 \, \frac{V}{s^3})t^2 \right) \Big _{t=3s} \\ &= 0,588 \, \frac{V}{s} - (0,3 \, \frac{V}{s^2})(3s) - (0,0036 \, \frac{V}{s^3})(3s)^2 \\ &= 0,588 \, \frac{V}{s} - 0,9 \, \frac{V}{s} - 0,0324 \, \frac{V}{s} = -0,3444 \, \frac{V}{s} \end{aligned}$	
Réponses issues des sous-questions a.i) et a.ii) :	$\begin{cases} I'(t=3s) = -0,06 \, \frac{A}{s} \\ R'(t=3s) = 0,12 \, \frac{\Omega}{s} \end{cases}$
$I'(t=3s) R'(t=3s) = (-0,06 \, \frac{A}{s})(0,12 \, \frac{\Omega}{s}) = -0,0072 \, \frac{\Omega \cdot A}{s^2} = -0,0072 \, \frac{V}{s^2}$	
$V(t=3s) = -0,3444 \, \frac{V}{s} \neq -0,0072 \, \frac{V}{s^2} = I'(t=3s) \cdot R'(t=3s)$	
$-0,3444 \neq -0,0072 \quad \frac{V}{s} \neq \frac{V}{s^2}$	

Preuve d'unités

$$\underbrace{[V'(t)]}_{\frac{V}{s}} \stackrel{?}{=} \underbrace{[I'(t)]}_{\frac{A}{s}} \underbrace{[R(t)]}_{\Omega} = \frac{V}{s} \stackrel{?}{=} \frac{A}{s} \cdot \Omega = \frac{V}{s^2}$$

$$\frac{V}{s} = \frac{\Omega \cdot A}{s} = \left(\frac{\Omega}{s}\right) A = \left(\frac{A}{s}\right) \Omega$$

$[V'(t)] \neq [I'(t)][R(t)]$

La contradiction peut se constater à deux niveaux : avec les nombres ($-0,3444 \neq -0,0072$) et avec les unités ($\frac{V}{s} \neq \frac{V}{s^2}$). Elle peut également se voir par une preuve d'unités ($\frac{V}{s} \neq \frac{A}{s} \cdot \Omega = \frac{V}{s^2}$), car, comme le dit Rowland (2006), « while an equation can be wrong, if the units are right, an equation can't be right if the units are wrong » (p. 553). De plus, l'exercice d'un contrôle sémantique sur les unités impliquées dans la contradiction permet d'aller plus loin et d'avancer vers le dépassement de cette dernière en identifiant sa source. Puisque l'unité de $V'(t)$ est le V/s , il y a une seconde (s) de trop au dénominateur de l'unité du membre de droite de l'« égalité » (V/s^2), c'est-à-dire qu'il y a une division par le temps de « trop ». L'unité voulue est le $\frac{V}{s}$ qui correspond à $\frac{\Omega}{s} \cdot A$ et/ou $\frac{A}{s} \cdot \Omega$; ce qui nous place sur la bonne voie pour dépasser la contradiction, puisque cela nous indique que le membre de droite de l'« égalité » devrait avoir une forme s'approchant de $\frac{dR}{dt} \cdot I \left(\frac{\Omega}{s} \cdot A\right)$ et/ou $\frac{dI}{dt} \cdot R \left(\frac{A}{s} \cdot \Omega\right)$. Ces déductions nous rapprochent de la **correcte** forme de la dérivée d'un produit de fonctions ($\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(R(t) \cdot I(t)) = \frac{dR}{dt} \cdot I(t) + \frac{dI}{dt} \cdot R(t)$).

La sous-question e) (voir tableau 5.35) est une continuité directe du travail effectué en d) (voir tableau 5.34) et nous permet de vérifier nos déductions précédentes. Tel qu'illustré ci-dessous, la nouvelle égalité est vraie et contient la correcte forme de la dérivée de $V(t) = R(t) \cdot I(t)$.

Tableau 5.35 Résolution de la sous-question e) du problème 29613

Sous-problème 29613 e)
e) Vérifier que $V'(3) = R'(3) I(3) + R(3) I'(3)$. Expliquer le résultat.
Résolution
$V'(t=3s) = R'(t=3s) I(t=3s) + R(t=3s) I'(t=3s)$ Réponses à la sous-question a.i): $I(t=3s) = 4,81 A$; $I'(t=3s) = -0,06 \frac{A}{s}$ Réponses à la sous-question a.ii): $R(t=3s) = 15,36 \Omega$; $R'(t=3s) = 0,12 \frac{\Omega}{s}$ Résultat obtenu pendant la résolution de la sous-question d): $V'(t=3s) = -0,3444 \frac{V}{s}$ $R'(t=3s) I(t=3s) + R(t=3s) I'(t=3s) = (0,12 \frac{\Omega}{s})(4,81 A) + (15,36 \Omega)(-0,06 \frac{A}{s})$ $= 0,5772 \frac{\Omega \cdot A}{s} - 0,9216 \frac{\Omega \cdot A}{s}$ $\textcircled{=} -0,3444 \frac{V}{s} = V'(t=3s) \quad \checkmark$

Preuve d'unités

$$\underbrace{[V'(t)]}_{\frac{V}{s}} \stackrel{?}{=} \underbrace{[R'(t)]}_{\frac{\Omega}{s}} \underbrace{[I(t)]}_A \stackrel{?}{=} \underbrace{[R(t)]}_{\Omega} \underbrace{[I'(t)]}_{\frac{A}{s}}$$

$\frac{V}{s} = \frac{V}{s} = \frac{V}{s}$

$\Omega \cdot A = V$

Comme lors de la résolution de la sous-question **d)**, nous pouvons constater la véracité de l'égalité à deux niveaux : avec les nombres ($-0,3444 = -0,3444$) et avec les unités ($V/s = V/s + V/s$). Cependant, il faut faire attention à l'utilisation d'une preuve d'unités seule, car même si les unités des termes d'une équation sont cohérentes entre-elles, cette dernière peut tout de même être fausse.

Synthèse de l'analyse a priori du problème 29613

Tableau 5.36 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 29613

Problème 29613			
L'énoncé initial contient trois équations. a.i), a.ii), d), e) : substitution de valeurs b) : transformation d'une expression algébrique c) : dérivation d'une équation en un point			
Contrôle structural		Contrôle opérationnel	
Contrôle sur l'équation		Anticipation d'unité	
Contrôle sémantique	Permet (avec la cohérence des unités) de déterminer l'unité des facteurs numériques et d'accéder au phénomène physique encodé. Permet d'obtenir directement le lien entre les unités des grandeurs présentes dans l'équation.	L'unité de la grandeur recherchée peut être anticipée. [substitution de valeurs]	Anticipation sur le résultat et contrôle sémantique
		<i>Conservation des unités</i> Permet d'augmenter la sensibilité à la contradiction (et la perception d'erreurs) et de vérifier l'unité anticipée (de la grandeur recherchée). [substitution de valeurs] Permet d'obtenir directement l'unité des facteurs numériques d'une nouvelle équation. [transformation d'une expression algébrique]	Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations

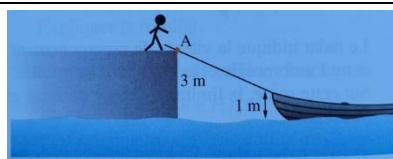
		<i>Vérification d'une (fausse) égalité</i>	
		Les deux membres de la (fausse) égalité sont différents, au niveau de leur valeur numérique et de leur unité (qui n'est pas de même nature). [substitution de valeurs]	Sensibilité à la contradiction
		<i>Contrôle sur les unités</i>	
		Permet d'identifier les grandeurs problématiques grâce à l'identification des unités problématiques et d'avancer vers un dépassement de la contradiction. [substitution de valeurs]	Dépassement de la contradiction par l'identification de sa source et contrôle sémantique
	Remarque		
	Une confusion est possible, car le même symbole est utilisé pour désigner une grandeur (caractère en italique; symbole suggéré) et son unité SI (caractère droit; symbole obligatoire).		

5.3.10 Problème 29823

Le dixième problème soumis à une analyse *a priori* se trouve dans la même section que les problèmes 29511, 29612 et 29613, c'est-à-dire la section *Activités d'apprentissage* de la fin du chapitre 4 – *Taux de variation* du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*. Jusqu'à présent, les étudiants ont travaillé les notions suivantes : les limites finie, infinie et à l'infini; la continuité; les taux de variation moyen (vitesse moyenne) et instantané (vitesse instantanée); la fonction dérivée; la dérivée des fonctions de la forme x^r , où $r \in \mathbb{R}$; la dérivée de sommes, différences, produits et quotients de fonctions, la dérivée de fonctions de la forme $[f(x)]^r$, où $r \in \mathbb{R}$; la règle de la dérivation en chaîne; les dérivées successives; la dérivation implicite; la relation entre la fonction et le signe de sa dérivée; les taux de variation en physique, en chimie et en économie; les taux de variation liés. Le contexte du problème 29823 – dont l'énoncé est présenté à la figure 5.16 – relève du champ de la mécanique et du sous-champ de la cinématique (à l'instar des problèmes 10705, 18413, 19506, 19910, 28907 et 29613).

Figure 5.16 Énoncé du problème 29823 (tiré du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*, 2023, p. 298)

François tire un bateau vers un quai à l'aide d'un câble dont le point d'appui A est à 3 m au-dessus du niveau de l'eau.



- Si la longueur du câble joignant le point d'appui et le bateau diminue à une vitesse de 6 m/min, déterminer à quelle vitesse le bateau s'avance vers le quai lorsqu'il est à 5 m du quai.
- Si le bateau s'approche du quai à la vitesse de 5 m/min, déterminer la vitesse à laquelle la longueur du câble joignant le point d'appui et le bateau varie lorsqu'il est à 7 m du quai.
- Déterminer la distance entre le quai et le bateau lorsque celui-ci s'approche deux fois plus rapidement du quai que du point d'appui.

Les demandes mathématiques apparaissant dans ce problème sont la construction d'une équation (a) et la substitution de valeurs (b, c).

Justification du choix du problème 29823

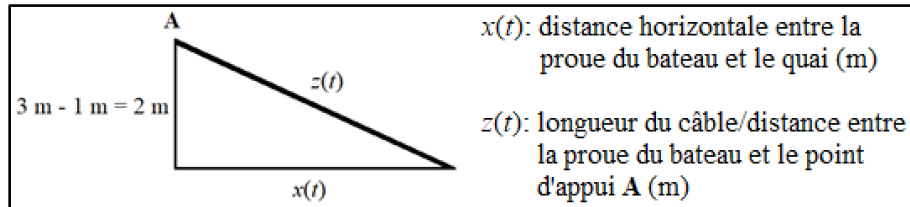
Le problème 29823 a été sélectionné puisqu'il est typique des problèmes mathématiques à contexte physique sur les taux de variation liés et demandant la construction d'une équation à partir du contexte de l'énoncé. Ce problème a attiré notre œil, car l'image accompagnant l'énoncé est une illustration figurative de la situation plutôt qu'un schéma mathématique, ce qui donne l'opportunité aux étudiants de générer leur propre version de ce schéma. De plus, le problème met en jeu une unité de base du SI (le mètre) et une unité ne faisant pas partie du SI dont l'utilisation est tolérée avec celui-ci (le mètre par minute), une unité rarement utilisée et qui n'est pas utilisée en physique.

Analyse a priori du problème 29823

Suivant la lecture de la mise en situation initiale, c'est-à-dire la première partie de l'énoncé qui précède les sous-questions, il est nécessaire d'exercer un contrôle structural permettant la construction d'une représentation de cette situation initiale en sélectionnant et organisant les informations présentes dans cette partie d'énoncé : « François tire un bateau vers un quai à l'aide d'un câble dont le point d'appui A est à 3 m au-dessus du niveau de l'eau » (Fortin et Poliquin, 2023, p. 298). Un contrôle sémantique peut s'exercer autour de l'illustration afin de produire un schéma mathématique de la situation (voir figure 5.17). Cette représentation schématique permet, selon nous, d'identifier les grandeurs (variables) pertinentes de la

situation générale et leur signification, en plus de faciliter la reconnaissance du lien entre elles, c'est-à-dire le théorème de Pythagore (les grandeurs forment un triangle rectangle).

Figure 5.17 Schéma de la situation initiale du problème 29823



Pour la sous-question a) (voir tableau 5.37), le contrôle opérationnel peut se manifester par l'anticipation que l'unité de la grandeur recherchée – la vitesse (horizontale) du bateau $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ – est le m/min, tout comme le taux de variation de la longueur du câble $\left(\frac{dz}{dt}\right)$. Un contrôle sémantique peut être exercé sur le schéma mathématique afin de représenter la situation précise décrite par la sous-question $\left(\frac{dz}{dt} = -6 \frac{\text{m}}{\text{min}} \forall t; x(t_1) = 5 \text{ m}\right)$, ce qui permet de bien saisir la situation et de voir facilement les liens entre les différentes grandeurs. Encore une fois, les unités peuvent être conservées pendant les calculs, ce qui permet de vérifier l'unité anticipée (m/min).

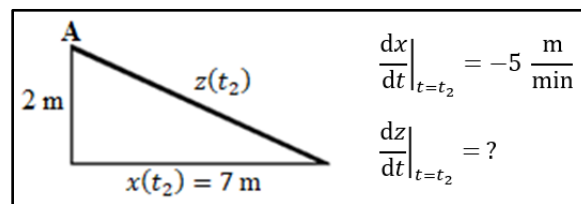
Tableau 5.37 Résolution de la sous-question a) du problème 29823

Sous-problème 29823 a)	
a) Si la longueur du câble joignant le point d'appui et le bateau diminue à une vitesse de 6 m/min, déterminer à quelle vitesse le bateau s'avance vers le quai lorsqu'il est à 5 m du quai.	
Résolution	
$\left.\frac{dz}{dt}\right _{t=t_1} = -6 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ la longueur du câble diminue	$x(t_1) = 5 \text{ m}$ } le bateau se trouve à 5 m du quai à un certain instant t_1
$\left.\frac{dx}{dt}\right _{t=t_1} = ?$ la vitesse du bateau correspond au rythme de diminution de la distance horizontale entre le bateau et le quai	
$x^2(t) + (2 \text{ m})^2 = z^2(t)$ $x^2(t) = z^2(t) - 4 \text{ m}^2$ $\left.\frac{d}{dt}(x^2(t))\right _{t_1} = \left.\frac{d}{dt}(z^2(t) - 4 \text{ m}^2)\right _{t_1}$	

$$\begin{aligned}
 2x(t_1) \frac{dx}{dt} \Big|_{t_1} &= 2z(t_1) \frac{dz}{dt} \Big|_{t_1} & x^2(t_1) + (2\text{ m})^2 &= z^2(t_1) \\
 \frac{dx}{dt} \Big|_{t_1} &= \frac{z(t_1)}{x(t_1)} \frac{dz}{dt} \Big|_{t_1} & (5\text{ m})^2 + (2\text{ m})^2 &= z^2(t_1) \\
 & & z(t_1) &= \sqrt{25\text{ m}^2 + 4\text{ m}^2} = \sqrt{29}\text{ m} \\
 \frac{dx}{dt} \Big|_{t_1} &= \frac{\sqrt{29}\text{ m}}{5\text{ m}} \left(-6 \frac{\text{m}}{\text{min}} \right) = \boxed{-\frac{6\sqrt{29}}{5} \frac{\text{m}}{\text{min}}}
 \end{aligned}$$

La résolution de la sous-question **b)** est similaire à celle de la sous-question **a)**, mais elle met en jeu différentes valeurs. La situation est illustrée à la figure 5.18.

Figure 5.18 Schéma de la situation décrite par la sous-question **b)** du problème 29823



Pour la sous-question **c)** (voir tableau 5.38), le contrôle opérationnel peut se manifester par l'anticipation que l'unité de la grandeur recherchée – la distance (horizontale) entre le bateau et le quai ($x(t)$) – est le m, puisque la distance est exprimée en mètres dans l'énoncé. Un contrôle sémantique peut être exercé sur le schéma mathématique afin de représenter la situation précise décrite par la sous-question, ce qui permet de bien saisir la situation et de voir facilement les liens entre les différentes grandeurs. Une remarque s'impose, puisque l'interprétation du phénomène nécessite un détachement de la situation réelle qui, à première vue, semble incomplète pour résoudre. Les unités peuvent, encore une fois, être conservées pendant les calculs, ce qui permet de vérifier l'unité anticipée (m). La différence entre la sous-question **c)** et les sous-questions **a)** et **b)** est qu'une relation entre les vitesses (à un certain instant t_3) est donnée $\left(\frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_3} = 2 \frac{dz}{dt} \Big|_{t=t_3} \right)$ plutôt que la valeur numérique d'une des deux vitesses $\left(\frac{dz}{dt} \Big|_{t=t_2} = -6 \frac{\text{m}}{\text{min}} \text{ ou } \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_2} = -5 \frac{\text{m}}{\text{min}} \right)$. Cela a pour conséquence que nous obtenons une relation entre la distance horizontale entre la proue du bateau et le quai et la distance entre la proue du bateau et le point d'appui **A** au même instant t_3 ($z(t_3) = 2x(t_3)$).

Tableau 5.38 Résolution de la sous-question **c)** du problème 29823

Sous-problème 29823 c)
c) Déterminer la distance entre le quai et le bateau lorsque celui-ci s'approche deux fois plus rapidement du quai que du point d'appui.

Résolution

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_3} = 2 \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=t_3} ; \quad x(t_3) = ?$$

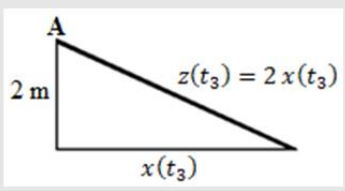
Équation provenant de la sous-question a):

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_3} = \frac{z(t_3)}{x(t_3)} \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_3}$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_3} = 2 \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=t_3}$$

$$2 \cancel{\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_3}} = \frac{z(t_3)}{x(t_3)} \cancel{\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_3}}$$

$$z(t_3) = 2 x(t_3)$$



$$z^2(t_3) = x^2(t_3) + (2 \text{ m})^2$$

$$(2 x(t_3))^2 = x^2(t_3) + 4 \text{ m}^2$$

$$4 x^2(t_3) = x^2(t_3) + 4 \text{ m}^2$$

$$3 x^2(t_3) = 4 \text{ m}^2$$

$$x(t_3) = \sqrt{\frac{4}{3}} \text{ m} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ m}$

Synthèse de l'analyse a priori du problème 29823

Tableau 5.39 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 29823

Problème 29823			
L'énoncé initial contient un schéma (figuratif).			
a) : construction d'une équation			
b), c) : substitution de valeurs			
Contrôle structural		Contrôle opérationnel	
Contrôle sur le schéma (figuratif)		Anticipation d'unité	
Contrôle sémantique	Permet de décoder les éléments y figurant et de créer une version mathématique du schéma, facilitant l'appropriation (mathématique) du phénomène physique représenté.	L'unité de la grandeur recherchée peut être anticipée. [construction d'une équation, substitution de valeurs]	Anticipation sur le résultat et contrôle sémantique
		Contrôle sur le schéma	
		Permet de modifier le schéma original afin de représenter une nouvelle situation en y ajoutant les (nouveaux) éléments pertinents. [construction d'une équation, substitution de valeurs]	Contrôle sémantique

		<i>Conservation des unités</i>	Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations
		Permet d'augmenter la sensibilité à la contradiction (et la perception d'erreurs) et de vérifier l'unité anticipée (de la grandeur recherchée). [construction d'une équation, substitution de valeurs]	
	Remarque		
	Un détachement de la situation réelle est nécessaire lors de l'interprétation (mathématique du phénomène physique) préalable à la résolution du sous-problème; ce qui se manifeste par la nécessité de produire un schéma mathématique à partir d'un schéma figuratif.		

5.3.11 Problème 29927

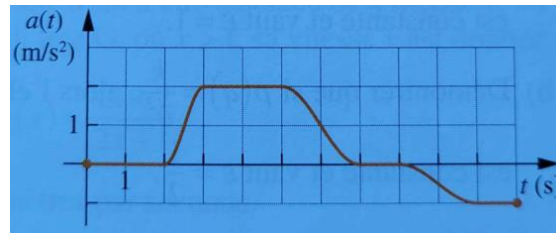
Le onzième problème soumis à une analyse *a priori* se trouve dans la même section que les problèmes 29511, 29612, 29613 et 29823, c'est-à-dire la section *Activités d'apprentissage* de la fin du chapitre 4 – *Taux de variation* du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*. Jusqu'à présent, les étudiants ont travaillé les notions suivantes : les limites finie, infinie et à l'infini; la continuité; les taux de variation moyen (vitesse moyenne) et instantané (vitesse instantanée); la fonction dérivée; la dérivée des fonctions de la forme x^r , où $r \in \mathbb{R}$; la dérivée de sommes, différences, produits et quotients de fonctions, la dérivée de fonctions de la forme $[f(x)]^r$, où $r \in \mathbb{R}$; la règle de la dérivation en chaîne; les dérivées successives; la dérivation implicite; la relation entre la fonction et le signe de sa dérivée; les taux de variation en physique, en chimie et en économie; les taux de variation liés. Le contexte du problème 29927 – dont l'énoncé est présenté à la figure 5.19 – relève du champ de la mécanique et du sous-champ de la cinématique (à l'instar des problèmes 10705, 18413, 19506, 19910, 28907, 29613 et 29823).

Figure 5.19 Énoncé du problème 29927 (tiré du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*, 2023, p. 299)

Pour un mobile en déplacement, une variation de l'accélération peut provoquer une secousse. Par exemple, en voiture, nous ressentons cette secousse lorsque nous freinons ou accélérons brusquement. En physique mécanique, la fonction secousse j est définie par le taux de variation de l'accélération par rapport du temps:

$$j(t) = \frac{da}{dt} = a'(t)$$

Soit un mobile empruntant une trajectoire rectiligne pour laquelle la fonction accélération a est représentée de la façon suivante:



- a) Déterminer l'unité de mesure de la fonction secousse.
- b) Déterminer les moments où aucune secousse n'est ressentie.
- c) Pour chacun des moments suivants, estimer la secousse.
 - i) $t = 2,5$ s
 - ii) $t = 6$ s
 - iii) $t = 9$ s

Les demandes mathématiques apparaissant dans ce problème sont l'interprétation qualitative d'un graphique (**b**) et l'interprétation quantitative d'un graphique (**c.i**, **c.ii**, **c.iii**). La sous-question **a**) demande de déterminer l'unité de la grandeur physique $j(t)$ nouvellement définie dans l'énoncé et, tel que mentionné précédemment, il s'agit du seul sous-problème ne relevant pas des 13 demandes mathématiques établies au chapitre 3 – Méthodologie (voir section 3.6, tableau 3.9).

Justification du choix du problème 29927

Le problème 29927 a été sélectionné puisqu'il s'appuie sur une grandeur physique nouvellement définie dans l'énoncé (la secousse). Par définition, la secousse $j(t)$ correspond à la troisième dérivée de la position du mobile par rapport au temps ($j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{d^3x}{dt^3}$); une dérivée qui est rarement travaillée. De plus, ce problème contient une demande mathématique moins commune, l'interprétation qualitative d'un graphique (sous-question **b**). Enfin, ce problème contient une demande physique plutôt que mathématique qui concerne directement les unités de mesure, c'est-à-dire que la sous-question **a**) demande de déterminer l'unité de la nouvelle grandeur physique $j(t)$. Il s'agit du seul sous-problème du corpus des 98 problèmes mathématiques à contexte physique qui ne peut pas être catégorisé dans les 13 demandes mathématiques établies (voir tableau 3.9). En outre, les unités des grandeurs physiques en jeu dans ce problème ne sont pas mentionnées dans l'énoncé, mais accompagnent les axes du graphique.

Analyse a priori du problème 29927

Suivant la lecture de la mise en situation initiale, c'est-à-dire la première partie de l'énoncé qui précède les sous-questions, il est nécessaire d'exercer un contrôle structural permettant la construction d'une représentation de cette situation initiale en sélectionnant et organisant les informations présentes dans cette

partie d'énoncé : « Pour un mobile en déplacement, une variation de l'accélération peut provoquer une secousse. Par exemple, en voiture, nous ressentons cette secousse lorsque nous freinons ou accélérons brusquement. En physique mécanique, la fonction secousse j est définie par le taux de variation de l'accélération par rapport du temps: $j(t) = \frac{da}{dt} = a'(t)$. Soit un mobile empruntant une trajectoire rectiligne pour laquelle la fonction accélération a est représentée de la façon suivante: [voir graphique] » (Fortin et Poliquin, 2023, p. 299). Un contrôle sémantique peut s'exercer autour du graphique, afin d'identifier les unités des grandeurs physiques en jeu (le temps t et l'accélération $a(t)$) qui accompagnent les axes (s et m/s²) et le domaine de l'accélération ($t \in [0 \text{ s}, 11 \text{ s}]$).

La sous-question **a)** (voir tableau 5.40) concerne directement les unités de mesure, car il est demandé de déterminer l'unité de la grandeur physique $j(t)$ nouvellement définie dans l'énoncé initial du problème 29927. Essentiellement, la résolution de ce sous-problème consiste en l'exercice d'un contrôle sur l'équation $j(t) = \frac{da}{dt}$ ou la réalisation d'une preuve d'unités.

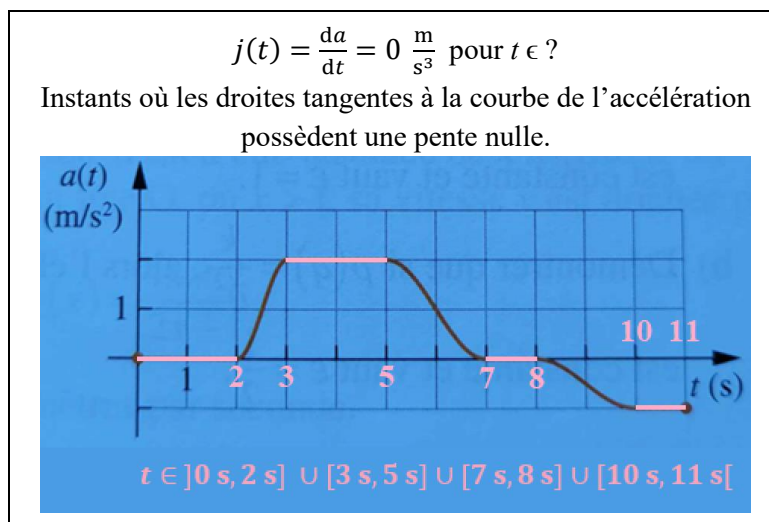
Tableau 5.40 Résolution de la sous-question **a)** du problème 29927

Sous-problème 29927 a)
a) Déterminer l'unité de mesure de la fonction secousse.
Résolution
$[j(t)] = ?$ $[j(t)] = \left[\frac{da}{dt} \right] = \frac{[da]}{[dt]} = \frac{\text{m/s}^2}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^3}$

Pour la sous-question **b)** (voir tableau 5.41), le contrôle opérationnel peut se manifester par l'anticipation que la résolution nécessite le recours à la connaissance que la dérivée d'une certaine fonction correspond à la valeur de la pente de la droite tangente à la courbe la représentant. Nous cherchons les instants où aucune secousse n'est ressentie, c'est-à-dire les instants où la dérivée de l'accélération est nulle; donc les instants où la pente des droites tangentes est nulle. Ainsi, cette connaissance, appliquée dans le contexte du problème 29927, permet de lier les registres algébrique ($a'(t \in ?) = 0 \text{ m/s}^3$) et graphique (pente nulle des droites tangentes). Un contrôle sur le graphique peut ensuite s'exercer afin d'y illustrer les points sur la courbe où la pente des droites tangentes est nulle, c'est-à-dire les points où la fonction $a(t)$ est constante.

Tableau 5.41 Résolution de la sous-question **b)** du problème 29927

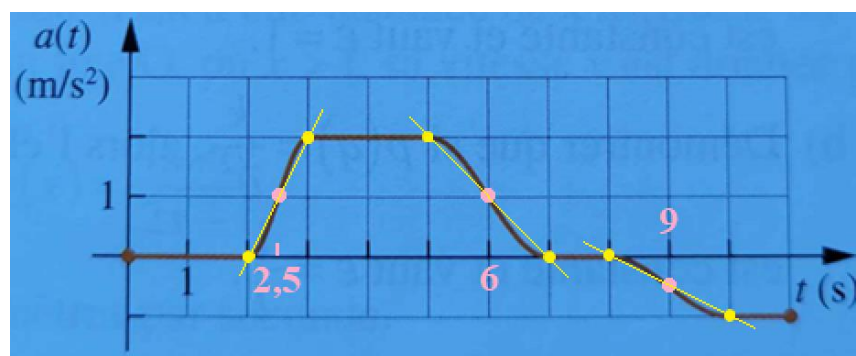
Sous-problème 29927 b)
b) Déterminer les moments où aucune secousse n'est ressentie.
Résolution



Il est important de se rappeler qu'une fonction n'est pas dérivable aux bornes fermées de son domaine; il faut donc exclure $t \in \{0 \text{ s}, 11 \text{ s}\}$ du domaine de $a(t)$ pour obtenir le domaine de $j(t)$, $t \in]0 \text{ s}, 11 \text{ s}[$.

La résolution des sous-questions **c.i)** à **c.iii)**, qui demandent l'interprétation quantitative d'un graphique, est similaire à celle des sous-questions **a.i)** à **a.iii)** du problème 29511 (voir tableau 5.24), à l'exception qu'ici (problème 29927) la courbe n'est pas composée de segments de droites et donc nous ne pouvons qu'**estimer** le taux de variation de l'accélération $a(t)$ en fonction du temps (la secousse $j(t)$) aux points $t \in \{2,5 \text{ s}; 6 \text{ s}; 9 \text{ s}\}$, plutôt qu'en déterminer la valeur exacte. L'exercice d'un contrôle sémantique sur le graphique permet d'y extraire les données pertinentes pour l'estimation, tel qu'illustré dans la figure 5.20 ci-dessous.

Figure 5.20 Graphique enrichi pour les sous-questions **c.i)** à **c.iii)** du problème 29927



De plus, un contrôle sémantique et sur les nombres et opérations peut être exercé en conservant les unités pendant le calcul des pentes, ce qui nous permet de vérifier que l'unité résultante est bien l'unité de la grandeur physique calculée (m/s^3) et d'être plus sensible à la contradiction.

Tableau 5.42 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 29927

Problème 29927			
L'énoncé initial contient la définition d'une nouvelle grandeur et un graphique. a) : identification d'une unité b) : interprétation qualitative d'un graphique c.i), c.ii), c.iii) : interprétation quantitative d'un graphique			
Contrôle structural		Contrôle opérationnel	
	Contrôle sur le graphique	Preuve d'unités	
Contrôle sémantique	Permet de faire plusieurs déductions et d'améliorer la compréhension du graphique.	Permet de déterminer l'unité d'une nouvelle grandeur à partir de sa définition. [identification d'une unité]	Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations
		Contrôle sur le graphique	
		Permet d'ajouter des éléments pertinents à la résolution sur le graphique. [interprétation qualitative d'un graphique, interprétation quantitative d'un graphique]	Contrôle sémantique
		Permet d'extraire les données pertinentes à la résolution à partir du graphique. [interprétation quantitative d'un graphique]	
		Anticipation d'unité	
		L'unité de la grandeur recherchée peut être anticipée. [interprétation quantitative d'un graphique]	Anticipation sur le résultat et contrôle sémantique
		Conservation des unités	
		Permet d'augmenter la sensibilité à la contradiction (et la perception d'erreurs) et de vérifier l'unité anticipée (de la grandeur recherchée). [interprétation quantitative d'un graphique]	Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations
Remarque			

Sans impliquer ouvertement les unités de mesure, le contrôle opérationnel peut passer par une anticipation sur la planification de la résolution : la nécessité d'avoir recours à une connaissance reliant les registres graphique et algébrique peut être anticipée [interprétation qualitative d'un graphique].

5.3.12 Problème 43930

Le douzième problème soumis à une analyse *a priori* se trouve dans la section *Activités d'apprentissage* de la fin du chapitre 6 – *Problèmes d'optimisation* du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*. Jusqu'à présent, les étudiants ont travaillé les notions suivantes : les limites finie, infinie et à l'infini; la continuité; les taux de variation moyen et instantané; la fonction dérivée; la dérivée des fonctions de la forme x^r , où $r \in \mathbb{R}$; la dérivée de sommes, différences, produits et quotients de fonctions, la dérivée de fonctions de la forme $[f(x)]^r$, où $r \in \mathbb{R}$; la règle de la dérivation en chaîne; les dérivées successives; la dérivation implicite; la relation entre la fonction et le signe de sa dérivée; les taux de variation en physique, en chimie et en économie; les taux de variation liés; le maximum, le minimum, le théorème des valeurs extrêmes et les nombres critiques; les théorèmes d'analyse pour les fonctions continues (de Rolle, des accroissements finis, de Cauchy); la croissance, la décroissance et le test de la dérivée première (tableau de variation relatif à la dérivée première); la concavité, les points d'inflexion et le test de la dérivée seconde; la règle de L'Hospital (indéterminations de la forme $\frac{0}{0}$ et $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$); l'analyse d'une fonction algébrique (tableau de variation relatif aux dérivées première et seconde); la résolution de problèmes d'optimisation. Le contexte du problème 43930 – dont l'énoncé est présenté à la figure 5.21 – relève du champ de la mécanique et du sous-champ de la cinématique (à l'instar des problèmes 10705, 18413, 19506, 19910, 28907, 29613, 29823 et 29927).

Figure 5.21 Énoncé du problème 43930 (tiré du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*, 2023, p. 439)

Une moto est située à 25 km à l'ouest d'un vélo et les deux véhicules se déplacent à vitesse constante.

a) Si la moto se dirige vers l'est à la vitesse de 54 km/h et que le vélo se dirige vers le sud à la vitesse de 18 km/h, déterminer le moment où la distance qui les sépare est minimale. Donner cette distance minimale.

b) Démontrer que si la vitesse de la moto est le triple de la vitesse du vélo, alors la distance séparant la moto et le vélo est minimale lorsque $t = \frac{15}{2v}$, où v est la vitesse du vélo. Vérifier que dans de telles circonstances, la distance minimale vaut toujours $\frac{5\sqrt{10}}{2}$ km peu importe la vitesse du vélo.

Les demandes mathématiques apparaissant dans ce problème sont la construction d'une équation à partir d'un contexte **(a)** et la démonstration d'un résultat donné **(b)**.

Justification du choix du problème 43930

Le problème 43930 a été sélectionné puisqu'il est typique des problèmes d'optimisation possédant un contexte physique et se basant sur les taux de variation liés. Contrairement à beaucoup de ce type de problèmes, aucun schéma n'accompagne l'énoncé; ouvrant donc la porte à l'activité contrôlée de création d'un schéma représentant la situation. Selon nous, ce problème particulier sollicite la création d'un schéma, car plusieurs indications sur la position et les mouvements de la moto et du vélo passent par les points cardinaux. De plus, ce problème demande la démonstration d'un résultat donné; une demande mathématique comptant pour seulement approximativement 2,432% (8/329) des sous-problèmes (voir tableau 5.1).

Analyse a priori du problème 43930

Suivant la lecture de la mise en situation initiale, c'est-à-dire la première partie de l'énoncé qui précède les sous-questions, il est nécessaire d'exercer un contrôle structural permettant la construction d'une représentation de cette situation initiale en sélectionnant et organisant les informations présentes dans cette partie d'énoncé : « Une moto est située à 25 km à l'ouest d'un vélo et les deux véhicules se déplacent à vitesse constante » (Fortin et Poliquin, 2023, p. 439). Un schéma de la situation initiale (voir figure 5.22) peut être créé par l'exercice d'un contrôle sémantique, en donnant du sens à l'indication cardinale du placement de la moto (par rapport au vélo). Cette représentation visuelle de la situation pourra être modifiée afin de décrire les situations des sous-questions et d'y inclure les grandeurs en jeu (d'y relier le registre algébrique).

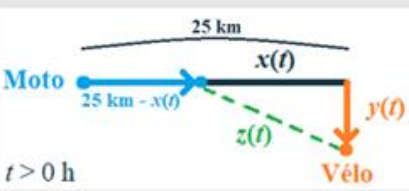
Figure 5.22 Schéma de la situation initiale du problème 43930



Pour la sous-question **a)** (voir tableau 5.43), le contrôle opérationnel peut se manifester par l'exercice d'un contrôle sémantique sur l'unité de mesure mentionnée, c'est-à-dire le km/h (associé à la vitesse) afin de déduire que la distance s'exprime en km (ce qui est confirmé par la distance de 25 km présente dans l'énoncé initial) et que le temps s'exprime en h. Par extension, cela nous permet d'anticiper l'unité de la réponse (km), car nous cherchons une distance (minimale entre la moto et le vélo). Le contrôle opérationnel peut

également se manifester par l'exercice d'un contrôle sémantique sur le schéma afin de représenter la nouvelle situation et les grandeurs en jeu. Cependant, dans ce problème, nous devons nous-mêmes définir les grandeurs pertinentes à la situation. Selon nous, l'identification des grandeurs pertinentes semble être facilitée par la représentation schématique de la situation, puisque nous voyons apparaître un triangle rectangle dont l'hypothénuse est la distance entre la moto et le vélo (mentionnée dans la sous-question); ce qui entraîne la nécessité de définir les grandeurs associées aux cathètes du triangle rectangle. Le schéma, où nous pouvons y représenter ces grandeurs, permet ainsi de bien s'approprier la situation et de la saisir rapidement, puisqu'il marie les registres algébrique et schématique.

Tableau 5.43 Résolution de la sous-question a) du problème 43930

Sous-problème 43930 a)	
a) Si la moto se dirige vers l'est à la vitesse de 54 km/h et que le vélo se dirige vers le sud à la vitesse de 18 km/h, déterminer le moment où la distance qui les sépare est minimale. Donner cette distance minimale.	
Résolution	
 $x(t)$: distance entre la moto et le point de départ du vélo $y(t)$: distance entre le vélo et son point de départ $z(t)$: distance entre la moto et le vélo $z^2(t) = x^2(t) + y^2(t) \quad t \geq 0 \text{ h}$ $z(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \quad t \geq 0 \text{ h}$ $\frac{dz}{dt} = 0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ pour $t \in ?$ tel que $\frac{d^2z}{dt^2} > 0 \frac{\text{km}}{\text{h}^2}$ (minimum) $\frac{dx}{dt} = -54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ la moto s'approche du point de départ du vélo, donc la distance $x(t)$ diminue $\frac{dy}{dt} = +18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ le vélo s'éloigne de son point de départ, donc la distance $y(t)$ augmente $x(t) = \underbrace{25 \text{ km}}_{\text{distance initiale (km)}} + \underbrace{(-54 \frac{\text{km}}{\text{h}})}_{\text{vitesse de diminution de la distance } (\frac{\text{km}}{\text{h}})} t$ temps écoulé (h) $y(t) = \underbrace{(18 \frac{\text{km}}{\text{h}})}_{\text{vitesse d'augmentation de la distance } (\frac{\text{km}}{\text{h}})} t$ temps écoulé (h)	

$z^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$ $\frac{d}{dt}(z^2(t)) = \frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t))$ $2z(t) \frac{dz}{dt} = 2x(t) \frac{dx}{dt} + 2y(t) \frac{dy}{dt}$ $z(t) \frac{dz}{dt} = x(t) \frac{dx}{dt} + y(t) \frac{dy}{dt} = (-54 \frac{\text{km}}{\text{h}})x(t) + (18 \frac{\text{km}}{\text{h}})y(t)$ $0 \frac{\text{km}^2}{\text{h}} = (-54 \frac{\text{km}}{\text{h}})x(t) + (18 \frac{\text{km}}{\text{h}})y(t)$	$(54 \frac{\text{km}}{\text{h}})x(t) = (18 \frac{\text{km}}{\text{h}})y(t)$ $\left(\frac{54 \frac{\text{km}}{\text{h}}}{18 \frac{\text{km}}{\text{h}}}\right)x(t) = y(t)$ $3x(t) = y(t)$ $3(25 \text{ km} - (54 \frac{\text{km}}{\text{h}})t) = (18 \frac{\text{km}}{\text{h}})t$ $75 \text{ km} - (162 \frac{\text{km}}{\text{h}})t = (18 \frac{\text{km}}{\text{h}})t$ $75 \text{ km} = (180 \frac{\text{km}}{\text{h}})t$ $t = \frac{75 \text{ km}}{180 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{15}{36} \text{ h} = \frac{5}{12} \text{ h}$
Minimum ? $\left. \frac{d}{dt} \left(z(t) \frac{dz}{dt} \right) \right _{t=\frac{5}{12} \text{ h}} = \left. \frac{d}{dt} \left((-54 \frac{\text{km}}{\text{h}})x(t) + (18 \frac{\text{km}}{\text{h}})y(t) \right) \right _{t=\frac{5}{12} \text{ h}}$ $\left(\frac{dz}{dt} \right)_{t=\frac{5}{12} \text{ h}}^2 + z(t=\frac{5}{12} \text{ h}) \frac{d^2z}{dt^2} = (-54 \frac{\text{km}}{\text{h}}) \frac{dx}{dt} + (18 \frac{\text{km}}{\text{h}}) \frac{dy}{dt}$ $z(t=\frac{5}{12} \text{ h}) \frac{d^2z}{dt^2} \Big _{t=\frac{5}{12} \text{ h}} = 2916 \frac{\text{km}^2}{\text{h}^2} + 324 \frac{\text{km}^2}{\text{h}^2} = 3240 \frac{\text{km}^2}{\text{h}^2}$ $\frac{d^2z}{dt^2} \Big _{t=\frac{5}{12} \text{ h}} = \frac{3240 \frac{\text{km}^2}{\text{h}^2}}{z(t=\frac{5}{12} \text{ h})} > 0 \frac{\text{km}}{\text{h}^2}$ donc la distance $z(t)$ est minimale en $t = \frac{5}{12} \text{ h}$	Distance $z(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ $z(t=\frac{5}{12} \text{ h}) = \sqrt{x^2(t=\frac{5}{12} \text{ h}) + y^2(t=\frac{5}{12} \text{ h})}$ $x(t=\frac{5}{12} \text{ h}) = 25 \text{ km} - (54 \frac{\text{km}}{\text{h}})(\frac{5}{12} \text{ h}) = 25 \text{ km} - \frac{45}{2} \text{ km} = \frac{5}{2} \text{ km}$ $y(t=\frac{5}{12} \text{ h}) = (18 \frac{\text{km}}{\text{h}})(\frac{5}{12} \text{ h}) = \frac{15}{2} \text{ km}$ $z(t=\frac{5}{12} \text{ h}) = \sqrt{(\frac{5}{2} \text{ km})^2 + (\frac{15}{2} \text{ km})^2}$ $= \sqrt{\frac{250}{4} \text{ km}^2} = \sqrt{\frac{25 \cdot 10}{4}} \text{ km}$ $= \frac{5\sqrt{10}}{2} \text{ km}$

Un bon contrôle sémantique est nécessaire afin de construire les équations des distances $x(t)$ et $y(t)$ que nous avons définies. Puisque nous construisons ces équations, nous pouvons inclure directement l'unité des facteurs numériques. De plus, les unités peuvent être conservées pendant les calculs, ce qui demande de bons contrôles sémantique et sur les nombres et opérations et permet de surveiller la résolution en augmentant la sensibilité à la contradiction et de vérifier l'unité résultante avec l'unité anticipée de la grandeur recherchée. Évidemment, pour mener à bien cette résolution, il faut connaître qu'une fonction (e.g. $z(t)$) possède un minimum (relatif) en t si $\frac{dz}{dt} = 0$ et $\frac{d^2z}{dt^2} > 0$ à ce point. Ces connaissances permettent de discerner les étapes de la résolution : (1) isoler le (ou les) instant(s) t tel que $\frac{dz}{dt} = 0$, (2) déterminer si $\frac{d^2z}{dt^2} > 0$ à cet (ou ces) instant(s) et, si c'est bel et bien le cas, (3) calculer la valeur de la distance $z(t)$ à cet (ou ces) instant(s).

Pour la sous-question **b)** (voir tableau 5.44), un contrôle sémantique est nécessaire afin de bien interpréter les informations données dans son énoncé et les lier aux grandeurs que nous avons définies précédemment.

Notamment, il est important de noter que selon nos définitions, la grandeur $x(t)$ diminue et donc $\frac{dx}{dt} > 0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ainsi, la mention que la vitesse de la moto est le triple de la vitesse du vélo doit être comprise comme suit : la valeur absolue (la norme) de la vitesse de la moto est le triple de la valeur absolue (la norme) de la vitesse du vélo (qui est positive selon nos définitions). Cette connaissance (des vecteurs) est requise afin de maintenir la cohérence des signes des grandeurs en jeu lors du changement de notation entraîné par la présence d'une notation précise dans l'énoncé de la sous-question **b)**. Ce changement est probablement nécessaire, car aucune notation n'est présente dans l'énoncé initial et celui de la sous-question **a)**; donc la notation choisie par l'étudiant – puisque laissée à sa discrétion – risque de ne pas correspondre à celle utilisée dans l'énoncé de la sous-question **b)**.

Tableau 5.44 Résolution de la sous-question **b)** du problème 43930

Sous-problème 43930 b)
b) Démontrer que si la vitesse de la moto est le triple de la vitesse du vélo, alors la distance séparant la moto et le vélo est minimale lorsque $t = \frac{15}{2v}$, où v est la vitesse du vélo. Vérifier que dans de telles circonstances, la distance minimale vaut toujours $\frac{5\sqrt{10}}{2}$ km peu importe la vitesse du vélo.
Résolution
si $\left \frac{dx}{dt} \right = 3 \left \frac{dy}{dt} \right$ alors $z(t)$ est minimale en $t = \frac{15}{2v}$ et $z\left(t = \frac{15}{2v}\right) = \frac{5\sqrt{10}}{2} \text{ km } \forall v$ où v: vitesse du vélo $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ $\triangle \frac{dx}{dt}$ est négatif : soit $v_H = \left \frac{dx}{dt} \right$ et $v = \left \frac{dy}{dt} \right$; $v_H = 3v$ $< 0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (la distance $x(t)$ diminue) $> 0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (la distance $y(t)$ augmente) $x(t) = 25 \text{ km} + \left(\frac{dx}{dt}\right)t = 25 \text{ km} - v_H t$ $y(t) = \left(\frac{dy}{dt}\right)t = v t$

$z'(t) = x'(t) + y'(t)$ $z(t) \frac{dz}{dt} = x(t) \frac{dx}{dt} + y(t) \frac{dy}{dt}$ $(15 \text{ km}) \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad 0 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad -v_M \quad v$ $0 \frac{\text{km}^2}{\text{h}^2} = (25 \text{ km} - v_M t)(-v_M) + (vt)(v)$ $= -(25 \text{ km})v_M + v_M^2 t + v^2 t$ $= -(25 \text{ km})(3v) + (3v)^2 t + v^2 t$ $= -(75 \text{ km})v + 9v^2 t + v^2 t$ $0 \frac{\text{km}^2}{\text{h}^2} = -(75 \text{ km})v + 10v^2 t \quad \text{ou } [v] = \frac{\text{km}}{\text{h}} \text{ et } [t] = \text{h}$ $(75 \text{ km})v = 10v^2 t$ $t = \frac{75 \text{ km}}{10v} = \frac{15 \text{ km}}{2v} \quad \left\{ [t] = \frac{[15 \text{ km}]}{[2][v]} = \frac{\text{km}}{(1)(\frac{\text{km}}{\text{h}})} = \text{h} \right\}$	Minimum ? $\left. \frac{d}{dt} \left(z(t) \frac{dz}{dt} \right) \right _{t = \frac{15 \text{ km}}{2v}} = \left. \frac{d}{dt} \left((-v_M)x(t) + (v)y(t) \right) \right _{t = \frac{15 \text{ km}}{2v}}$ $\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + z(t) \frac{d^2 z}{dt^2} = (-v_M) \frac{dx}{dt} + (v) \frac{dy}{dt}$ $0 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad \frac{dz}{dt} \quad -v_M \quad v$ $z(t = \frac{15 \text{ km}}{2v}) \frac{d^2 z}{dt^2} = +v_M^2 + v^2$ $\frac{d^2 z}{dt^2} \Big _{t = \frac{15 \text{ km}}{2v}} = \frac{v_M^2 + v^2}{z(t = \frac{15 \text{ km}}{2v})} > 0 \frac{\text{km}}{\text{h}^2}$ $v_M^2 + v^2 > 0 \frac{\text{km}^2}{\text{h}^2}$ $z(t = \frac{15 \text{ km}}{2v}) > 0 \text{ km}$ par définition donc la distance $z(t)$ est minimale en $t = \frac{15 \text{ km}}{2v}$
Distance $z(t = \frac{15 \text{ km}}{2v}) = \sqrt{x^2(t = \frac{15 \text{ km}}{2v}) + y^2(t = \frac{15 \text{ km}}{2v})}$ $x(t = \frac{15 \text{ km}}{2v}) = 25 \text{ km} - (3v) \left(\frac{15 \text{ km}}{2v} \right) = 25 \text{ km} - \frac{45}{2} \text{ km} = \frac{5}{2} \text{ km}$ $y(t = \frac{15 \text{ km}}{2v}) = v \left(\frac{15 \text{ km}}{2v} \right) = \frac{15}{2} \text{ km}$ $z(t = \frac{15 \text{ km}}{2v}) = \sqrt{\left(\frac{5}{2} \text{ km} \right)^2 + \left(\frac{15}{2} \text{ km} \right)^2} = \sqrt{\frac{250}{4} \text{ km}^2} = \sqrt{\frac{25 \cdot 10}{4}} \text{ km} = \frac{5\sqrt{10}}{2} \text{ km}$	

Comme nous pouvons le constater, la résolution de la sous-question **b)** (voir tableau 5.43) suit les mêmes étapes que la sous-question **a)** (voir tableau 5.43) : (1) isoler le (ou les) instant(s) t tel que $\frac{dz}{dt} = 0$, (2) déterminer si $\frac{d^2 z}{dt^2} > 0$ à cet (ou ces) instant(s) et, si c'est bel et bien le cas, (3) calculer la valeur de la distance $z(t)$ à cet (ou ces) instant(s). Encore une fois, les unités peuvent être conservées pendant les calculs, ce qui demandent de bons contrôles sémantique et sur les nombres et opérations et permet de surveiller la résolution en augmentant la sensibilité à la contradiction et de vérifier l'unité résultante avec l'unité de la grandeur recherchée que nous pouvions anticiper. Cependant, dans le cas du sous-problème 43930 **b)**, la conservation des unités ne semble pas être aussi utile que dans les problèmes précédents, car il y a un mélange d'unités explicites et implicites. Autrement dit, nous devons travailler avec des facteurs numériques possédant une unité explicite (e.g. 15 km) **et** avec des symboles algébriques (v_M, v) représentant des grandeurs physiques dont l'unité est implicite, puisque le symbole « remplace » un nombre accompagné d'une unité. Ce mélange d'unités explicites et implicites demande une lecture plus attentive, car nous pouvons obtenir une grandeur dont l'unité (complète) n'est pas explicite, telle que $t = \frac{15 \text{ km}}{2v}$, dont l'unité est l'heure $\left([t] = \frac{[15 \text{ km}]}{[2][v]} = \frac{\text{km}}{(1)(\frac{\text{km}}{\text{h}})} = \text{h} \right)$, mais dont l'unité visible est le kilomètre. Selon nous, cela

pourrait amener de la confusion plutôt que du soutien (à l'activité mathématique), se rapprochant ainsi du contrôle restreignant⁶⁸.

Synthèse de l'analyse a priori du problème 43930

Tableau 5.45 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 43930

Problème 43930			
L'énoncé initial ne contient que du texte. a) : construction d'une équation b) : démonstration d'un résultat donné			
Contrôle structural		Contrôle opérationnel	
	<i>Contrôle sur le schéma</i>	<i>Contrôle sur les unités</i>	
Contrôle sémantique	Permet d'organiser les éléments pertinents de l'énoncé et de générer une représentation visuelle, facilitant l'appropriation du phénomène physique.	Permet de déduire, à partir des unités (des grandeurs) présentes, l'unité d'une grandeur connexe. [construction d'une équation]	Contrôle sémantique
		<i>Contrôle sur le schéma</i>	
		Permet de modifier le schéma original afin de représenter une nouvelle situation en y ajoutant les (nouveaux) éléments pertinents. [construction d'une équation]	Contrôle sémantique
		<i>Anticipation d'unité</i>	
		L'unité de la grandeur recherchée peut être anticipée. [construction d'une équation]	Anticipation sur le résultat et contrôle sémantique
		<i>Conservation des unités</i>	
		Permet d'augmenter la sensibilité à la contradiction (et la perception d'erreurs) et de vérifier l'unité anticipée (de la grandeur recherchée). [construction d'une équation, démonstration d'un résultat donné]	Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations

⁶⁸ Cependant, le contrôle restreignant selon Rhéaume (2020) est constitué des croyances et conceptions **tenues par les étudiants** qui entravent leur activité mathématique. Puisque la présente recherche n'implique pas d'étudiants, nous ne pouvons nous prononcer définitivement, mais il s'agit d'une voie intéressante pour une possible continuation.

Remarques
■ L'utilisation des points cardinaux comme indications de position encourage la création d'un schéma afin d'y donner (visuellement) du sens. ■ Un changement de notation est nécessaire, car la notation est laissée à la discrétion de l'étudiant pour la résolution du premier sous-problème, mais forcée pour celle du deuxième sous-problème. <u>Conservation des unités :</u> ■ La conservation des unités facilite la construction d'équations puisque les unités relient les nombres à leur signification physique. ■ La conservation des unités peut entraîner une possible confusion autour des unités lorsqu'il y a un mélange de facteurs numériques avec unités explicites et de symboles algébriques avec unités implicites.

5.3.13 Problème 47412

Le treizième et dernier problème soumis à une analyse *a priori* se trouve dans la section 7.3 – *Applications de la dérivée à des fonctions exponentielles et logarithmiques* du chapitre 7 – *Fonctions exponentielles et logarithmiques* du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*. Jusqu'à présent, les étudiants ont travaillé les notions suivantes : les limites finie, infinie et à l'infini; la continuité; les taux de variation moyen et instantané; la fonction dérivée; la dérivée des fonctions de la forme x^r , où $r \in \mathbb{R}$; la dérivée de sommes, différences, produits et quotients de fonctions, la dérivée de fonctions de la forme $[f(x)]^r$, où $r \in \mathbb{R}$; la règle de la dérivation en chaîne; les dérivées successives; la dérivation implicite; la relation entre la fonction et le signe de sa dérivée; les taux de variation en physique, en chimie et en économie; les taux de variation liés; le maximum, le minimum, le théorème des valeurs extrêmes et les nombres critiques; les théorèmes d'analyse pour les fonctions continues; la croissance, la décroissance et le test de la dérivée première (tableau de variation relatif à la dérivée première); la concavité, les points d'inflexion et le test de la dérivée seconde; la règle de L'Hospital; l'analyse d'une fonction algébrique (tableau de variation relatif aux dérivées première et seconde); la résolution de problèmes d'optimisation; le calcul de limites et la dérivée des fonctions exponentielles et logarithmiques; les applications de la dérivée à des fonctions exponentielles et logarithmiques (problèmes de taux liés et d'optimisation, l'évaluation de limites et l'analyse de ces fonctions). Le contexte du problème 47412 – dont l'énoncé est présenté à la figure 5.23 – relève du champ de l'électricité et du magnétisme et porte, plus précisément, sur l'induction électromagnétique.

Figure 5.23 Énoncé du problème 47412 (tiré du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*, 2023, p. 474)

Le courant électrique I , en ampères, circulant dans un circuit comportant une bobine et une résistance, est donné par $I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L})$, où t est le temps, en secondes, qui

s'est écoulé depuis la fermeture de l'interrupteur. Sachant que $V = 12$ volts, $R = 3$ ohms et $L = 0,1$ henry,

a) déterminer le courant circulant dans le circuit après:

i) 0,01 seconde;

ii) 0,1 seconde;

iii) 0,5 seconde.

b) analyser la fonction I , où $t \in [0, +\infty[$.

Les demandes mathématiques apparaissant dans ce problème sont la substitution de valeurs (**a.i**, **a.ii**, **a.iii**) et l'analyse d'une fonction (**b**).

Justification du choix du problème 47412

Le problème 47412 a été sélectionné puisqu'il est typique des problèmes mathématiques à contexte physique cherchant à travailler la fonction exponentielle. De plus, ce problème demande d'analyser une fonction. Il s'agit d'une des demandes mathématiques les plus rares : cinq problèmes sur un corpus de 98 ont cette demande mathématique comme sous-problème et seulement deux d'entre eux contiennent des unités de mesure. Ce problème particulier a été choisi car il met en jeu des unités moins fréquemment utilisées dans les problèmes mathématiques à contexte physique (e.g. le henry (H)).

Analyse a priori du problème 47412

Suivant la lecture de la mise en situation initiale, c'est-à-dire la première partie de l'énoncé qui précède les sous-questions, il est nécessaire d'exercer un contrôle structural permettant la construction d'une représentation de cette situation initiale en sélectionnant et organisant les informations présentes dans cette partie d'énoncé : « Le courant électrique I , en ampères, circulant dans un circuit comportant une bobine et une résistance, est donné par $I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-Rt/L})$, où t est le temps, en secondes, qui s'est écoulé depuis la fermeture de l'interrupteur. Sachant que $V = 12$ volts, $R = 3$ ohms et $L = 0,1$ henry » (Fortin et Poliquin, 2023, p. 474). Un contrôle sémantique peut être exercé sur les unités. Une remarque s'impose : le nom des unités – ampère, seconde, volt, ohm, henry – est utilisé plutôt que leur symbole – A, s, V, Ω , H. Donc, si nous souhaitons travailler avec les unités, tel que les conserver pendant les calculs, une connaissance du SI est nécessaire pour déterminer certains des symboles, surtout que ce sont des unités de mesure avec lesquelles les étudiants sont moins familiers (e.g. le henry (H)). Un contrôle sémantique peut également être exercé sur l'équation, qui permet de faire des déductions autour des unités de mesure et d'enrichir l'équation par la suite. D'abord, l'argument de l'exponentielle $(-Rt/L)$ doit être sans unité (i.e. d'unité « un »); ce qui

nous permet de déduire que le henry équivaut au ohm seconde (voir la partie supérieure gauche de la figure 5.24). Il faut faire attention, car le terme contenant l'exponentielle peut avoir une unité, puisqu'il peut contenir un facteur numérique « 1 » qui possède une unité. Puis, grâce à une connaissance du SI, nous pouvons savoir qu'un volt équivaut à un ampère ohm ($V = A \cdot \Omega$)⁶⁹; ce qui permet de déduire que les termes inclus dans la paranthèse $(1 - e^{-Rt/L})$ ne possèdent pas d'unité puisque l'unité du rapport $\frac{V}{R}$ est la même que celle de $I(t)$ (voir la partie supérieure droite de la figure 5.24). Enfin, avec ces informations en main, les valeurs de V , R et L données dans l'énoncé peuvent être substituées dans l'équation de $I(t)$ et simplifiées (les nombres et les unités) afin d'obtenir l'équation enrichie $I(t) = (4 \text{ A})(1 - e^{-(30 \text{ s}^{-1})t})$ (voir la partie inférieure de la figure 5.24).

Figure 5.24 Contrôle sémantique autour de l'équation $I(t)$ et des unités de mesure

$[Rt] = [L]$ $\underbrace{[R]}_{\Omega} \underbrace{[t]}_s = \underbrace{[L]}_H \quad H = \Omega \cdot s$	$\left[\frac{V}{R} \right] = \frac{[V]}{[R]} = \frac{V}{\Omega} = \frac{A \cdot \cancel{\Omega}}{\cancel{\Omega}} = A = [I]$
$I(t) = \frac{12 \text{ V}}{3 \Omega} \left(1 - e^{-\frac{(3 \cdot \Omega)t}{0,1 \text{ H}}} \right) = (4 \text{ A}) \left(1 - e^{-(30 \text{ s}^{-1})t} \right) \quad \frac{V}{\Omega} = A; \frac{\Omega}{H} = \frac{1}{s} = \text{s}^{-1}$	

Évidemment, les déductions autour des unités peuvent être confirmées par une bonne connaissance ou une consultation du Système international d'unités.

Les sous-questions **a.i)** à **a.iii)** demandent la substitution de valeurs, sollicitant un contrôle sémantique et un contrôle sur les nombres et opérations si les unités sont conservées, et permettant de surveiller la résolution en augmentant la sensibilité à la contradiction et de vérifier l'unité résultante avec l'unité anticipée de la grandeur recherchée. La sous-question **b)** (voir tableau 5.46), qui demande l'analyse d'une fonction, nécessite la réalisation, d'abord, du tableau de variation relatif aux dérivées première et seconde de cette fonction et, ensuite, de l'esquisse graphique de cette dernière. Évidemment, afin de construire le tableau de variation, les dérivées première et seconde de $I(t)$ doivent être travaillées. Encore une fois, les unités, initialement présentes dans $I(t) = (4 \text{ A})(1 - e^{-(30 \text{ s}^{-1})t})$, peuvent être conservées pendant les dérivations (sollicitant les mêmes contrôles et possédant les mêmes avantages).

⁶⁹ Ce lien – entre V , A et Ω – a pu être déduit lors de l'exercice d'un contrôle structural sur le problème 29613; voir la figure 5.15 de la section 5.3.9.

Tableau 5.46 Résolution de la sous-question **b)** du problème 47412

Sous-problème 47412 b)

b) analyser la fonction I , où $t \in [0, +\infty[$.

Résolution

Analyser $I(t) = (4 \text{ A})(1 - e^{-(30 \text{ s}^{-1})t}) \quad t \geq 0 \text{ s}$

$\frac{dI}{dt} = 0 \frac{\text{A}}{\text{s}}$ pour $t \in ?$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -(4 \text{ A}) \frac{d}{dt} (e^{-(30 \text{ s}^{-1})t}) \\ &= + (4 \text{ A})(30 \text{ s}^{-1}) e^{-(30 \text{ s}^{-1})t} \\ &= \underbrace{(120 \frac{\text{A}}{\text{s}})}_{> 0 \frac{\text{A}}{\text{s}}} \underbrace{e^{-(30 \text{ s}^{-1})t}}_{> 0} > 0 \frac{\text{A}}{\text{s}} \quad t > 0 \text{ s} \end{aligned}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(30 \text{ s}^{-1})t} = 0$ donc $\frac{dI}{dt} = 0 \frac{\text{A}}{\text{s}}$ lorsque $t \rightarrow \infty \text{ (s)}$

$\frac{d^2 I}{dt^2} ? 0 \frac{\text{A}}{\text{s}^2}$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left((120 \frac{\text{A}}{\text{s}}) e^{-(30 \text{ s}^{-1})t} \right) \\ &= (120 \frac{\text{A}}{\text{s}})(-30 \text{ s}^{-1}) e^{-(30 \text{ s}^{-1})t} \\ &= \underbrace{-(3600 \frac{\text{A}}{\text{s}^2})}_{< 0 \frac{\text{A}}{\text{s}^2}} \underbrace{e^{-(30 \text{ s}^{-1})t}}_{> 0} < 0 \frac{\text{A}}{\text{s}^2} \quad t > 0 \text{ s} \end{aligned}$$

$I(t=0 \text{ s}) = (4 \text{ A})(1 - e^{-(30 \text{ s}^{-1})(0 \text{ s})})$

$= (4 \text{ A})(1 - 1) = 0 \text{ A}$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (4 \text{ A})(1 - e^{-(30 \text{ s}^{-1})t}) \\ &= 4 \text{ A} - \lim_{t \rightarrow \infty} (4 \text{ A}) e^{-(30 \text{ s}^{-1})t} \\ &= 4 \text{ A} \end{aligned}$$

t	0		∞
$I'(t)$		+	
$I''(t)$		-	
$I(t)$	0 A	$\nearrow$	4 A
Esquisse graphique	(0 s, 0 A)	$\curvearrowright$	$\dashrightarrow$
A. H. $I(t) = 4 \text{ A}$			

Une fois le tableau de variation complété, nous pouvons esquisser le graphique de $I(t)$; en n'oubliant pas d'indiquer le nom et l'unité des grandeurs physiques sur les axes de ce dernier.

Synthèse de l'analyse a priori du problème 47412

Tableau 5.47 Manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure pour le problème 47412

Problème 47412	
L'énoncé initial contient une équation.	
a.i), a.ii), a.iii) : substitution de valeurs	
b) : analyse d'une fonction	
Contrôle structural	Contrôle opérationnel

	<i>Anticipation d'une connaissance</i>	<i>Conservation des unités</i>	
Anticipation sur la planification de la résolution	Seulement le nom des unités de mesure est mentionné dans l'énoncé, donc une connaissance du symbole associé est nécessaire pour travailler (efficacement) avec celles-ci.	Permet d'augmenter la sensibilité à la contradiction (et la perception d'erreurs) et de vérifier l'unité anticipée (de la grandeur recherchée). [substitution de valeurs, analyse d'une fonction]	Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations
	<i>Contrôle sur l'équation</i>	<i>Contrôle sur le graphique</i>	
Contrôle sémantique	Permet (avec la cohérence des unités) de déterminer l'unité des facteurs numériques et d'accéder au phénomène physique encodé. Permet de déduire les liens entre les unités des grandeurs présentes dans l'équation.	L'unité des grandeurs (indépendante et dépendante) est nécessaire pour l'identification des axes. [analyse d'une fonction]	Contrôle sémantique
	<i>Métaconnaissance</i>		
Métaconnaissances	Une bonne connaissance du SI est nécessaire afin de confirmer les liens (déduits) entre les unités.		
	Remarque		
	Sans impliquer ouvertement les unités de mesure, le contrôle opérationnel peut passer par une anticipation sur la planification de la résolution et le discernement : la nécessité d'avoir recours à une connaissance reliant les registres langagier et mathématique peut être anticipée, permettant de discerner les étapes de la résolution [analyse d'une fonction].		

5.4 Actions contrôlées liées aux unités de mesure dans les problèmes mathématiques à contexte physique

Afin de tenter de répondre à notre deuxième question de recherche - *Quelles opportunités de contrôle (et de quels types) sur l'activité mathématique des étudiants l'usage des unités de mesure offre-t-il lors de la résolution de problèmes à contexte physique (routiniers de niveau collégial)?* – nous avons soumis 13 problèmes (représentants du corpus des 98 problèmes mathématiques à contexte physique issus du manuel

Calcul différentiel: Charron-Parent) à une analyse *a priori* (voir section 3.3.3) orientée par la conceptualisation du contrôle (sur l'activité mathématique) par les unités de mesure développée à la section 2.4 (voir tableau 2.16 pour une synthèse). À la lumière de ces analyses (voir sections 5.3.1 à 5.3.13), nous avons trouvé plus pertinent d'organiser ces manifestations autour d'actions contrôlées liées aux unités de mesure qui mettent en œuvre, de manière concertée, une ou plusieurs composantes du contrôle dans un but précis. Une composante du contrôle peut donc être agencée à d'autres composantes et accolée à diverses actions contrôlées liées aux unités. L'exercice d'actions contrôlées dépend également des caractéristiques du problème – notamment pour le contrôle structural – et de la nature de la demande mathématique des sous-problèmes – pour le contrôle opérationnel. Il est important de rappeler que le contrôle structural s'exerce suite à la lecture de la première partie de l'énoncé du problème mathématique à contexte physique décrivant la situation initiale, tandis que le contrôle opérationnel se met en place suite à la lecture de chaque sous-question, à l'amorce de la résolution de chaque sous-problème. Cette séparation des contrôles et des énoncés est un choix méthodologique fait à des fins d'analyse. Notamment, nous avons opté pour cette linéarité artificielle autour du contrôle sur l'activité mathématique, car nos analyses ne font pas intervenir d'étudiants. Ce choix rend l'aspect dynamique (dans le temps) du contrôle non pertinent. De plus, puisque, dans le cadre du présent mémoire nous cherchons à identifier les opportunités qu'offre la présence d'unités de mesure pour l'exercice d'un contrôle sur l'activité mathématique, l'ordre de sollicitation des actions contrôlées ne nous semble pas d'une grande importance.

Les analyses *a priori* des 13 problèmes, sélectionnés comme représentants du corpus des problèmes mathématiques à contexte physique issus du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*, ont mises en lumière 13 actions contrôlées liées aux unités de mesure (voir tableau synthèse en annexe); ce qui correspond à l'identification des opportunités de contrôle offertes par les unités de mesure lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique. Sur ces 13 actions, six d'entre elles relèvent de l'exercice d'un contrôle structural **et** de l'exercice d'un contrôle opérationnel : l'exercice d'un contrôle sur les unités, l'exercice d'un contrôle sur l'équation, l'exercice d'un contrôle sur le graphique, l'exercice d'un contrôle sur le schéma, la conversion d'unités, le recours à des métaconnaissances. Sur les 13 actions contrôlées liées aux unités, sept d'entre elles sont exclusives à l'exercice d'un contrôle opérationnel : la conservation des unités, l'enchaînement d'équations, l'anticipation de l'unité, la vérification de l'unité, la vérification par le contexte physique, la vérification d'une (fausse) égalité, la preuve d'unités. Les actions contrôlées sont abordées dans les deux sections suivantes.

5.4.1 Actions contrôlées relevant de l'exercice d'un contrôle structural

La sollicitation des actions contrôlées basées sur les unités de mesure – que nous avons identifiées lors des analyses *a priori* – peut être liée aux caractéristiques du problème et aux demandes mathématiques exigées par celui-ci. Puisque l'exercice du contrôle structural concerne la première partie de l'énoncé (sans les sous-questions) d'un problème, les actions contrôlées dont il relève ne peuvent être liées qu'aux caractéristiques de ce dernier. Notamment, dans le cadre d'un contrôle structural passant par les unités, trois actions contrôlées (voir tableau 5.48) s'appuient un contrôle sémantique qui peut s'exercer sur divers éléments pouvant être possédés par un problème mathématique à contexte physique, c'est-à-dire une équation, un graphique ou un schéma.

Tableau 5.48 Actions contrôlées liées aux caractéristiques du problème (contrôle structural)

Exercice d'un contrôle sémantique passant par les unités de mesure sur ...		
l'équation	le graphique	le schéma
La détermination de l'unité de mesure (par la cohérence des unités) des grandeurs physiques présentes dans une équation permet de faire des déductions autour de celles-ci et d'accéder au phénomène physique encodé.	La déduction d'informations grâce à la considération des unités de mesure permet d'approfondir la compréhension du graphique et du phénomène y étant illustré.	Le décodage des éléments du schéma et l'ajout des grandeurs physiques (avec leur unité) dans celui-ci, ou la création d'une version mathématique de celui-ci, facilite l'appropriation du phénomène physique représenté.

Donc, la présence d'unités de mesure dans un problème mathématique à contexte physique possédant une équation, un graphique ou un schéma offre l'opportunité d'exercer un contrôle sémantique – c'est-à-dire un contrôle basé sur le sens des nombres en contexte (ici physique) – sur cette équation, ce graphique ou ce schéma. Ainsi, l'interdisciplinarité entre les mathématiques et la physique se manifeste clairement dans ces actions contrôlées puisqu'elles permettent une meilleure saisie du phénomène physique en jeu dans le problème mathématique (qui vise l'application de notions de calcul différentiel en apprentissage).

Dans le cadre d'un contrôle structural passant par les unités, trois actions contrôlées (voir tableau 5.49) s'exercent sur les unités de mesure elles-mêmes et s'appuient sur différentes composantes du contrôle (dernière ligne du tableau 5.49). Ces actions contrôlées dépendent de la présence d'unités dans l'énoncé d'un problème mathématique à contexte physique; ce que l'on peut considérer comme une de ces caractéristiques. Notamment, c'est la présence de deux unités de mesure différentes de même nature qui permet l'anticipation d'une conversion d'unité de mesure ou la réalisation d'une telle conversion. Parfois, selon la manière dont les unités sont présentées dans l'énoncé, des déductions sont possibles sur celles-ci;

déductions pouvant être validées par un recours à une bonne connaissance du SI (telle que l'expression en unités de base d'une unité dérivée ayant un nom et symbole spéciaux).

Tableau 5.49 Actions contrôlées s'exerçant sur les unités de mesure elles-mêmes (contrôle structural)

Exercice d'un contrôle sur les unités de mesure	Conversion d'unités de mesure	Recours à des métaconnaissances
Permet de déduire la signification contextuelle d'une grandeur physique et d'anticiper la nécessité ou non d'une conversion d'unités (entre deux unités différentes de même nature).	Permet de valider une équivalence donnée d'une grandeur physique exprimée avec deux unités différentes de même nature.	Une bonne connaissance du SI permet la confirmation de liens déduits entre les unités.
<i>Contrôle sémantique</i>	<i>Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations</i>	<i>Métaconnaissances</i>

Ainsi, les unités de mesure elles-mêmes se retrouvant dans l'énoncé d'un problème mathématique à contexte physique peuvent solliciter trois actions contrôlées, dont leurs manifestations sont rassemblées dans le tableau 5.49. Dans l'exercice d'un contrôle structural, la conversion d'unités et le recours à des métaconnaissances ne sont pas très communs, puisque ces deux actions sont sollicitées dans des cas assez particuliers (au niveau des unités de mesure présentes). L'interdisciplinarité mathématiques-physique se manifeste dans les trois actions contrôlées par le sens physique véhiculé par les unités de mesure, car il s'agit de la signification contextuelle que revêt maintenant les nombres (et les variables algébriques) suite à l'apparition d'un contexte physique dans un problème mathématique.

5.4.2 Actions contrôlées relevant de l'exercice d'un contrôle opérationnel

Dans le cadre du contrôle opérationnel – qui s'exerce suite à la lecture des sous-questions – la sollicitation des actions contrôlées basées sur les unités de mesure peut être liée, à la fois, aux caractéristiques du problème, et, aux demandes mathématiques exigées par les sous-questions de celui-ci. Notamment, les trois mêmes actions contrôlées – attachées respectivement à la présence d'une équation, d'un graphique ou d'un schéma – relevant du contrôle structural (s'exerçant sur la première partie de l'énoncé) peuvent également relever du contrôle opérationnel. Puisque ces mêmes actions contrôlées relèvent de deux contrôles différents, qui s'exercent sur des parties distinctes de l'énoncé, leurs manifestations diffèrent. Les actions contrôlées relevant du contrôle opérationnel et leurs manifestations sont rassemblées dans le tableau 5.50.

Tableau 5.50 Actions contrôlées liées aux caractéristiques du problème (contrôle opérationnel)

Exercice d'un contrôle sémantique passant par les unités de mesure sur ...		
l'équation	le graphique	le schéma

Permet (par la cohérence des unités) de déterminer les grandeurs physiques présentes dans une équation et d'accéder au phénomène physique encodé.	Permet d'extraire les données nécessaires (pour la résolution) d'un graphique, d'ajouter des éléments pertinents (pour la résolution) dans un graphique et de construire adéquatement un graphique.	Permet de modifier un schéma original (bonifié lors de l'exercice d'un contrôle structural ou non) afin de représenter une (nouvelle) situation décrite par une sous-question du problème.
---	---	--

Ces actions contrôlées, qui relèvent de l'exercice d'un contrôle opérationnel, dépendent également des caractéristiques du problème – présence d'une équation, d'un graphique ou d'un schéma – tout comme lorsqu'elles relèvent du contrôle structural. Cependant, cette dépendance passe ici par les demandes mathématiques des sous-problèmes qui peuvent découler des caractéristiques des problèmes. Par exemple, le problème doit posséder un graphique pour qu'une sous-question demande l'interprétation (qualitative ou quantitative) du graphique. De plus, c'est parfois la demande mathématique qui entraîne l'apparition d'un élément (équation, graphique ou schéma) sur lequel on réalise ensuite une action contrôlée (exercice d'un contrôle sur l'équation, le graphique ou le schéma). Ce phénomène est une particularité du contrôle opérationnel, car ce dernier s'exerce pendant la phase de résolution elle-même, et non pendant la phase de représentation de la situation (qui relève du contrôle structural).

Les mêmes trois actions contrôlées s'exerçant sur les unités de mesure elles-mêmes qui relèvent du contrôle structural (voir tableau 5.49) peuvent également relever du contrôle opérationnel (voir tableau 5.51). Les mêmes composantes du contrôle sont mobilisées dans les deux versions des actions contrôlées, sauf dans le cas de l'exercice d'un contrôle sur les unités de mesure où apparaît une subtilité. Notamment, dans la sous-question **e**) du problème 29613 (voir section 5.3.9), l'exercice d'un contrôle (sémantique) sur les unités de mesure permet d'avancer vers un dépassement de la contradiction, car les grandeurs problématiques sont identifiées par le biais de leurs unités (qui sont contradictoires).

Tableau 5.51 Actions contrôlées s'exerçant sur les unités de mesure elles-mêmes (contrôle opérationnel)

Exercice d'un contrôle sur les unités de mesure	Conversion d'unités de mesure	Recours à des métaconnaissances
Permet de faire des déductions autour de la signification contextuelle des grandeurs physiques, d'anticiper la nécessité d'une conversion d'unités et de faciliter la lecture d'équation grâce à l'équivalence d'unités.	Permet d'exprimer des grandeurs équivalentes avec des unités différentes de même nature.	La connaissance du SI est nécessaire à la reconnaissance de l'expression en unités de base d'une unité dérivée avec un symbole et nom spéciaux.
Permet d'identifier les grandeurs problématiques grâce à l'identification des unités problématiques.		

<i>Contrôle sémantique [Dépassement de la contradiction par l'identification de sa source]</i>	<i>Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations</i>	<i>Métaconnaissances</i>
--	--	--------------------------

La conversion d'unités relevant du contrôle opérationnel – au contraire du contrôle structural – est sollicitée par **nécessité** lors de la résolution (e.g. une vitesse est exprimée en km/h tandis que l'équation devant être utilisée est construite pour des grandeurs exprimées en m, s, m/s et m/s²) et sert à exprimer une quantité connue, initialement exprimée avec une certaine unité de mesure, dans une autre unité de même nature. Dans le cas du contrôle structural, une conversion a pu avoir lieu seulement car une équivalence entre deux grandeurs était présente dans la première partie de l'énoncé. De plus, pour les contrôles structural et opérationnel, une bonne connaissance du SI est importante, notamment lorsque des unités dérivées ayant un nom et symbole spéciaux sont en jeu.

Sur les 13 actions contrôlées identifiées lors des analyses *a priori* (voir section 5.3), nous venons de voir les six actions contrôlées communes à l'exercice des contrôles structural et opérationnel. Il reste ainsi les sept actions contrôlées qui relèvent exclusivement d'un contrôle opérationnel. Trois d'entre elles sont plutôt indépendantes des demandes mathématiques, car elles peuvent être mobilisées à travers une multitude de demandes (tant qu'y figurent des calculs numériques), et ne sont liées à aucune caractéristique particulière du problème. Ces actions contrôlées et leurs manifestations sont regroupées dans le tableau 5.52.

Tableau 5.52 Actions contrôlées indépendantes des demandes mathématiques (contrôle opérationnel)

Anticipation de l'unité	Conservation des unités	Vérification de l'unité
L'unité de la grandeur recherchée peut être anticipée.	Permet d'augmenter la sensibilité à la contradiction (et la perception d'erreurs), d'obtenir directement l'unité des facteurs numériques d'une nouvelle équation et de vérifier l'unité anticipée.	L'unité de la grandeur obtenue peut être confrontée à celle anticipée.
<i>Anticipation sur le résultat et contrôle sémantique</i>	<i>Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations</i>	<i>Vérification par un retour à l'anticipation</i>

Non seulement ces trois actions contrôlées sont indépendantes des demandes mathématiques, elles se présentent fréquemment ensemble. De manière générale, l'unité de la grandeur physique recherchée est d'abord anticipée, puis les unités sont conservées tout au long des calculs numériques, ce qui permet d'obtenir à leur issue un résultat numérique accompagné d'une unité, qui, enfin, peut être confrontée à celle anticipée. De plus, pendant les calculs, il est plus facile de percevoir une erreur par les unités que par les valeurs numériques. Il est plus facile de voir que nous ne pouvons pas faire l'addition suivante (5 m + 2 s) par le fait que nous ne pouvons pas additionner des mètres avec des secondes, que par l'addition de 5 et 2.

C'est le contexte physique, se manifestant par les unités de mesure, qui permet de rejeter des opérations mathématiquement valides (telles que $5 + 2 = 7$); mettant à profit l'interdisciplinarité mathématiques-physique. Selon nous, ce bloc de trois actions contrôlées est un cas parlant pour l'utilité des unités de mesure comme outil de contrôle sur l'activité mathématique dans la résolution de problèmes de calcul différentiel à contexte physique.

Les trois actions contrôlées présentées dans le tableau 5.52 sont aussi exclusives à l'exercice d'un contrôle opérationnel, mais leur sollicitation est dépendante de la demande mathématique⁷⁰. Par cette dépendance, les actions contrôlées peuvent être liées aux caractéristiques du problème. L'enchaînement d'équations est une action contrôlée sollicitée lors de la résolution du sous-problème qui nécessite la résolution de deux équations consécutives (i.e. la grandeur isolée à partir de la première équation est utilisée pour résoudre la deuxième équation). Ainsi, soit l'énoncé du problème contient une ou plusieurs équations, soit la résolution de sous-questions antérieures a généré des équations. La vérification d'une égalité est sollicitée par la demande de prouver la fausseté d'une égalité dans une sous-question particulière (voir section 5.3.9, tableau 5.34) en substituant les symboles algébriques par leur valeur numérique accompagnée de leur unité. Cependant, le fait que la fausseté d'une égalité peut être constatée par les unités des membres de l'égalité qui diffèrent reste valide indépendamment de la demande mathématique.

Tableau 5.53 Actions contrôlées liées à des demandes mathématiques particulières (contrôle opérationnel)

Enchaînement d'équations	Preuve d'unités	Vérification d'une égalité
Considérer l'enchaînement des unités – plutôt que les grandeurs elles-mêmes – permet de discerner plus facilement l'enchaînement des équations.	Correspond approximativement à la conservation des unités de mesure (le calcul d'unités est réalisé en parallèle du calcul numérique), mais permet de déterminer l'unité d'une nouvelle grandeur à partir de sa définition.	Les deux membres de la (fausse) égalité sont différents en termes de leur valeur numérique et de leur unité.
Résolution	Identification de l'unité	Substitution
<i>Discernement et anticipation sur la planification de la résolution</i>	<i>Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations</i>	<i>Sensibilité à la contradiction</i>

La preuve d'unités est un cas particulier, car – telle qu'abordée au chapitre 2 (voir section 2.4.2) – elle revêt une fonction similaire à la conservation des unités; elle permet d'augmenter la sensibilité à la contradiction et la percevoir des erreurs puisque les calculs numériques et les calculs d'unités sont séparés, mais réalisés

⁷⁰ La demande mathématique – dont dépend l'action contrôlée – apparaît à la troisième ligne du tableau.

en parallèle. De plus, la réalisation d'une preuve d'unités est une réponse au seul sous-problème demandant de déterminer l'unité d'une grandeur physique nouvellement définie dans l'énoncé (voir section 5.3.11, tableau 5.40).

Une seule action contrôlée, aussi exclusive au contrôle opérationnel, est directement liée au contexte physique, c'est-à-dire la vérification par le contexte physique. Cette action se décline en deux versions qui s'appuient sur des composantes différentes du contrôle opérationnel, qui agissent de concert avec le contrôle sémantique (voir tableau 5.54). La prise en considération de la réalité physique, grâce aux unités de mesure véhiculant la signification contextuelle des grandeurs en jeu, permet de s'éloigner de l'activité mathématique et de raisonner sur le contexte physique; ce qui peut mener au rejet d'un résultat pour le non respect de cette réalité.

Tableau 5.54 Action contrôlée liée au contexte physique (contrôle opérationnel)

Vérification par le contexte physique	
Les unités permettent d'expliciter les liens entre les grandeurs (et leur valeur numérique) et donc de raisonner sur le contexte physique (sans forcément réaliser une activité mathématique).	La considération de la réalité physique entraîne le rejet d'un résultat, car il est invraisemblance dans ce contexte.
<i>Vérification par un retour à la représentation et contrôle sémantique</i>	<i>Vérification par l'évaluation de la vraisemblance d'un résultat et contrôle sémantique</i>

Bref, six actions contrôlées, relevant de l'exercice d'un contrôle opérationnel passant par les unités de mesure lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique, sont attachées aux caractéristiques du problème, c'est-à-dire à la présence d'une équation, d'un graphique ou d'un schéma, ou aux unités apparaissant dans son énoncé. Ces actions sont communes à l'exercice d'un contrôle structural, mais leurs manifestations diffèrent. Des sept actions contrôlées exclusives au contrôle opérationnel, trois d'entre elles sont indépendantes des demandes mathématiques et sont fortement imbriquées les unes dans les autres, trois sont liées à des demandes mathématiques particulières et une s'appuie directement sur le contexte physique.

5.5 Limitations et interdisciplinarité autour des actions contrôlées liées aux unités de mesure

Dans les analyses *a priori* des 13 problèmes mathématiques à contexte physique, plusieurs remarques ce sont imposées au fil de l'identification d'actions contrôlées liées aux unités et leurs manifestations (voir tableau synthèse en annexe). La majorité de ces remarques concernent les limitations ou les aspects interdisciplinaires soulevés par l'exercice d'un contrôle par les unités de mesure que nous avons rencontrés

lors de la résolution des problèmes sélectionnés comme représentants du corpus des problèmes mathématiques à contexte physique issus du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*. Ces deux aspects sont traités, respectivement, dans les deux prochaines sections.

5.5.1 Aspects limitants de l'exercice d'un contrôle par les unités de mesure

Lors des analyses *a priori*, certaines limitations ont émergé autour d'un contrôle par les unités de mesure. L'utilisation d'unités de mesure peut entraîner deux confusions au niveau du symbolisme. Une première confusion est possible lorsqu'un même symbole est utilisé pour représenter une grandeur physique et une unité, notamment lorsqu'il s'agit de l'unité même de la grandeur. Cette confusion est moindre lorsqu'on parle d'une écriture dactylographiée, puisque les lettres symbolisant des grandeurs physiques doivent être en italique et que les lettres symbolisant des unités de mesure doivent être des caractères droits, permettant ainsi de les distinguer. Cependant, cette différence visuelle est perdue lorsqu'on parle d'une écriture manuscrite, facilitant la confusion entre les deux. Une deuxième confusion est possible lorsqu'il y a un mélange de facteurs numériques avec unités explicites et de symboles algébriques avec unités implicites (car incluses dans la représentation par les symboles algébriques), si les unités sont conservées pendant les calculs. De plus, conserver les unités de mesure peut alourdir les calculs et possiblement entraîner des difficultés, notamment lorsque la complexité des calculs est élevée. Un rapprochement peut être fait entre ce phénomène et le contrôle restreignant, car il pourrait venir « restreindre l'activité intellectuelle nécessaire au processus de résolution » (Rhéaume, 2020, p. 79). Cependant, pour Rhéaume (2020), le contrôle restreignant provient de croyances individuelles, c'est-à-dire de « l'ensemble des conceptions, attentes scolaires, habitudes, conduites et règles artificielles que l'élève a développées au sujet des mathématiques et plus particulièrement, au sujet de la résolution de problèmes » (p. 79). Comme la présente recherche n'implique pas d'étudiants, nous ne pouvons que spéculer sur cet aspect⁷¹.

5.5.2 Aspects interdisciplinaires soulevés par l'exercice d'un contrôle par les unités de mesure

D'un côté, les analyses *a priori* ont soulevé plusieurs éléments positifs concernant l'interdisciplinarité entre les mathématiques et la physique. Selon nos analyses, l'interdisciplinarité est mise de l'avant directement dans l'énoncé de problèmes mathématiques à contexte physique lorsque : une notation issue de la physique est utilisée, une sous-question exige de déterminer l'unité d'une grandeur physique nouvellement définie et une sous-question exige l'interprétation (physique) d'un résultat (où l'unité relie la valeur numérique au sens physique qu'elle revêt). Ces différents éléments sonnent une clochette de vigilance sur les nouveaux

⁷¹ Une possible future recherche sur le sujet impliquant des étudiants pourrait mener à un élargissement du contrôle restreignant au sens de Rhéaume (2020), ce qui sera abordé dans le chapitre 6 – Discussion.

aspects amenés par l'ajout d'un contexte physique à un problème mathématique, notamment la présence d'unités de mesure (car les variables en jeu sont maintenant des grandeurs physiques). D'autres aspects positifs autour l'interdisciplinarité mathématiques-physique émergent de l'exercice d'un contrôle par les unités de mesure. L'exercice d'un contrôle sur l'équation permet de remettre en question une conception émanant ou étant soutenue par les pratiques en mathématiques – les constantes numériques et algébriques ne possèdent jamais d'unités – mais qui perd sa véracité en physique – puisque les paramètres ou facteurs (algébriques ou numériques) d'équations possèdent généralement des unités. Il est également possible que l'exercice d'un contrôle sur l'équation passe sur une connaissance mathématique, notamment lorsque l'équation décrivant un élément physique – la trajectoire elliptique d'un mobile – s'appuie sur l'équation d'une notion mathématique – l'ellipse. Selon nous, ces deux cas illustrent respectivement un rapprochement et un chevauchement des disciplines physique et mathématiques. De plus, un instinct physique est parfois requis pour interpréter convenablement une nouvelle situation (décrite par une sous-question) par rapport à la situation initiale (décrite par l'énoncé initial) afin de réaliser l'activité mathématique adéquate à la résolution du sous-problème. Selon nous, l'interdisciplinarité mathématiques-physique est mise à profit dans ce problème, car la résolution du sous-problème nécessite une fusion (cohérente) de ces disciplines.

D'un autre côté, les analyses *a priori* ont soulevé certains éléments plus négatifs concernant l'interdisciplinarité entre les mathématiques et la physique. En physique, l'unité est implicitement incluse dans la représentation d'une grandeur par un symbole algébrique, au contraire des mathématiques. Cette différence peut entraîner, telle qu'abordée à la section 5.5.1, une confusion au niveau du symbolisme lors de l'exercice d'un contrôle par les unités de mesure dans la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique. Cela illustre, selon nous, une faiblesse dans l'interdisciplinarité mathématiques-physique souhaitée, car le mélange du symbolisme des deux disciplines génère de la confusion. De plus, il faut parfois se détacher de la situation réelle lors de l'interprétation mathématique du phénomène physique préalable à la résolution d'un problème mathématique à contexte physique. Dans ce cas, s'éloigner du contexte physique du problème est requis par sa résolution; réduisant ainsi la pertinence de l'interdisciplinarité mathématiques-physique par le rejet nécessaire de la participation de la physique dans celle-ci.

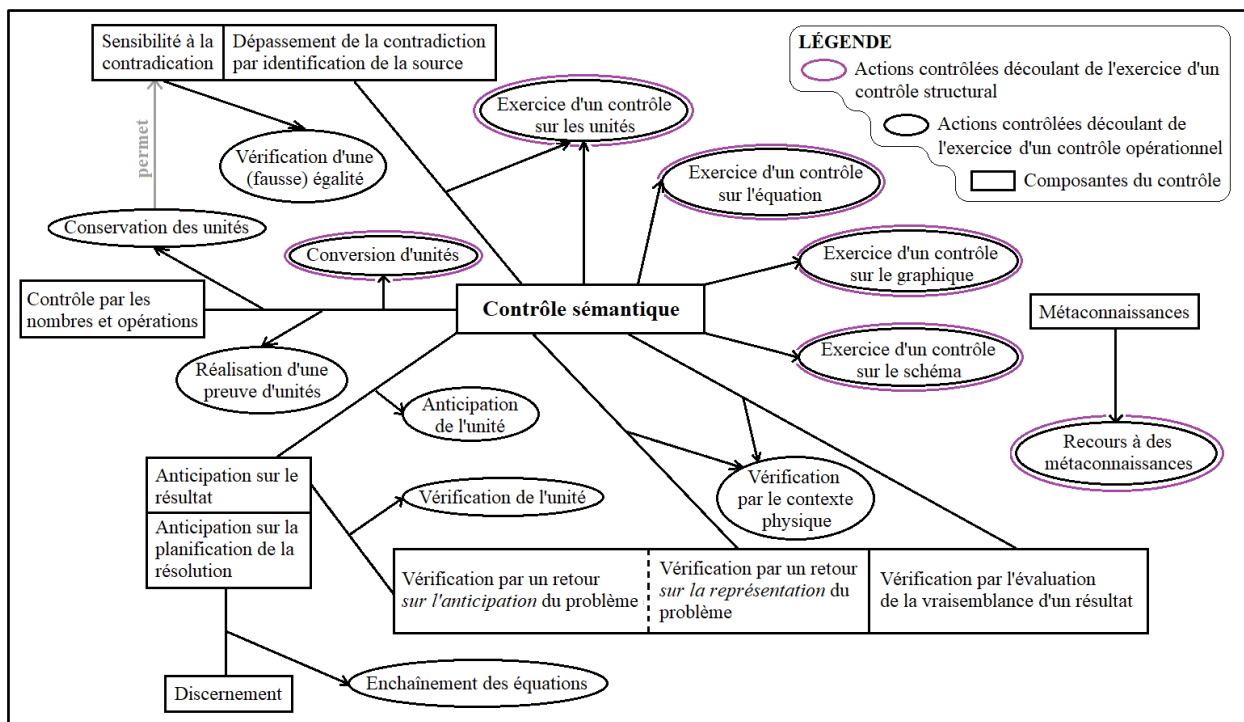
5.6 Avancées sur la conceptualisation d'un contrôle passant par les unités de mesure

Comme éléments de réponses à notre deuxième question de recherche – *Quelles opportunités de contrôle (et de quels types) sur l'activité mathématique des étudiants l'usage des unités de mesure offre-t-il lors de la résolution de problèmes à contexte physique (routiniers de niveau collégial)?* – nous avons identifié, par les analyses *a priori*, 13 actions contrôlées, ancrées aux unités de mesure, sollicitées lors de la résolution des problèmes mathématiques à contexte physique choisis comme représentants du manuel *Calcul*

différentiel : Charron-Parent. Ces actions contrôlées mettent en œuvre, de manière concertée, une ou plusieurs composantes du contrôle dans un but précis. Une composante du contrôle peut donc être agencée à d'autres composantes et accolée à diverses actions contrôlées liées aux unités. Ainsi, une même combinaison de composantes du contrôle peut mener à des actions contrôlées différentes, lorsque le but diffère. Nous avons décidé de porter un regard complémentaire sur les actions contrôlées et les composantes du contrôle mobilisées à travers celles-ci en générant un schéma mettant en lumière leurs liens et en omettant les manifestations des actions contrôlées.

Dans le schéma (voir figure 5.25), les flèches partent des composantes du contrôle et pointent vers les actions contrôlées en découlant. Lorsque deux composantes du contrôle s'agencent pour créer une action contrôlée, un trait plein relie ces composantes et une flèche en émerge pour pointer vers l'action contrôlée en question. Si le même agencement mène à plusieurs actions contrôlées, une flèche émerge du trait reliant les composantes du contrôle pour chacune des actions.

Figure 5.25 Structuration des composantes du contrôle (liées aux unités) et des actions contrôlées qu'elles génèrent



Comme nous pouvons le voir dans le schéma ci-dessus, le contrôle sémantique occupe une place prédominante; c'est la composante centrale autour de laquelle se structure les autres. Cela n'est pas étonnant, puisque notre intérêt porte sur les unités de mesure (comme outil de contrôle) et que ces dernières véhiculent

le sens physique, la signification contextuelle, des nombres et symboles algébriques en jeu dans les problèmes mathématiques à contexte physique. La présente recherche souligne ainsi l'importance de la dimension sémantique dans la conceptualisation d'un contrôle passant par les unités de mesure et le besoin d'y élargir sa présence. En effet, le contrôle sémantique est intégré – mais limité par le fait même – au contrôle structural dans la conceptualisation du contrôle au sens de Rhéaume (2020).

Toutes les composantes du contrôle sont reliées, par le biais des actions contrôlées, sauf en ce qui a trait aux métaconnaissances et au recours à celles-ci. Évidemment, cette composante et cette action contrôlée restent connectées aux autres par les unités de mesure, puisqu'elles concernent le SI et ses unités. Au fil des analyses *a priori* (voir sections 5.3.1 à 5.3.13) des problèmes mathématiques à contexte physique, nous avons relevé le recours à diverses paires de connaissances et métaconnaissances liées aux unités de mesure. Avant tout, l'utilisation des unités de mesure nécessite une connaissance des symboles utilisés pour représenter les unités de mesure, et leur nom, dans le SI, incluant les symboles des préfixes permettant de générer les multiples et sous-multiples décimaux des unités (e.g. le mètre est représenté par la lettre « m »; le préfixe kilo est représenté par la lettre « k »). La métaconnaissance qui va de paire avec cette connaissance est l'association des unités de l'ensemble cohérent SI aux grandeurs physiques principales, c'est-à-dire de connaître que le mètre (m) est l'unité de l'ensemble cohérent des unités SI mesurant la longueur, que le mètre par seconde (m/s) est l'unité de cet ensemble mesurant la vitesse, etc. Selon l'analyse du corpus de problèmes du manuel *Calcul différentiel : Charron-Parent*, les grandeurs physiques principales présentes sont celles issues du champ physique de la mécanique. En effet, près de 65% des problèmes mathématiques à contexte physique (voir tableau 4.2) présentent un contexte relevant de ce champ physique, dont les grandeurs principales sont la position/longueur (m), la durée/temps (s), la vitesse (m/s), l'accélération (m/s^2) et la force (N). Conséquemment, les trois unités présentes dans le plus grand nombre de problèmes sont le mètre, la seconde et le mètre par seconde (voir section 4.2.4).

Après quoi, l'utilisation des unités de mesure pour l'exercice d'un contrôle requiert une connaissance de la manière dont les unités de mesure peuvent se combiner et former des produits de puissance, dont certains se font attitrer un nom et symbole spéciaux (à connaître également). La métaconnaissance associée est celle de l'expression en unités de base des unités dérivées possédant un nom et un symbole et des liens entre ces diverses unités (voir tableau 2.3); liens qui peuvent être constatés par la comparaison de leur expression en unités de base. À titre d'exemple, un volt correspond à un ohm multiplié par un ampère : $1 \text{ V} = (1 \Omega)(1 \text{ A})$. L'équivalence peut se voir par les expressions en unités de base de l'ohm ($\text{kg m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ A}^{-2}$) et du volt ($\text{kg m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ A}^{-1}$) : $1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ A}^{-1} = 1 \text{ V} = (1 \Omega)(1 \text{ A}) = (1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ A}^{-2})(1 \text{ A})$.

Enfin, une connaissance cruciale à l'exercice d'un contrôle par les unités de mesure est la cohérence des unités de mesure, qui stipule que seulement des termes possédant la même unité peuvent être additionnés ou soustraits. Cette cohérence des unités se manifeste dans l'activité mathématique par des règles qui régissent la manipulation des symboles des unités qui diffèrent légèrement des règles algébriques habituelles, car la soustraction et l'addition de symboles (d'unités) différents sont interdites (e.g. $1\text{ m} + 1\text{ s} \nrightarrow$). Ces métaconnaissances sont ainsi essentielles pour traiter adéquatement des unités de mesure de manière générale. Elles sont particulièrement importantes pour les actions contrôlées de la conservation des unités, du contrôle sur l'équation, de la conversion d'unités, et de la perception d'erreur grâce à la sensibilité à la contradiction. En effet, l'apparition d'une addition ou soustraction de termes ne possédant pas la même unité au fil des calculs contredit la cohérence des unités et peut donc indiquer une erreur. De plus, identifier les grandeurs problématiques grâce aux unités problématiques permet de faire un premier pas vers le dépassement de la contradiction par identification de la source. Puisque les métaconnaissances portent sur les unités de mesure SI et permet leur traitement approprié à travers les diverses actions contrôlées, nous avons fait le choix de représenter la composante métaconnaissances et l'action contrôlée recours aux métaconnaissances sans liens explicites entre elles et le reste des actions contrôlées et composantes, afin de ne pas obscurcir la lecture du schéma.

Bref, la figure 5.25 rassemble les actions contrôlées, ancrées à la présence des unités de mesure, qui ont été sollicitées lors de la résolution des problèmes mathématiques à contexte physique en illuminant la structuration – où le contrôle sémantique est central – des composantes du contrôle sur lesquelles ces actions s'appuient.

CHAPITRE 6

DISCUSSION

Dans ce chapitre, il est question de poursuivre la discussion sur les résultats dégagés des analyses dans les chapitres précédents.

Le principe de cohérence des unités de mesure, stipulant que seulement des termes exprimés avec la même unité peuvent être additionnés ou soustraits, et sa manifestation dans l'activité mathématique par l'interdiction d'additionner ou soustraire des symboles d'unités différents, sont des métaconnaissances importantes pour l'exercice d'un contrôle par les unités (voir section 5.6). Selon nous, il s'agit d'un bel exemple du mariage entre la physique et les mathématiques, puisque la présence d'unités découle du contexte physique du problème et que la cohérence de ces unités se manifeste dans l'activité mathématique. Redish (2021) tient des propos similaires, mais sur l'utilisation des mathématiques dans les sciences : « in science we blend our physical knowledge with our knowledge of math » (p. 314). Même si ces propos sont tenus du point de vue de la physique, nous les trouvons pertinents, car ce mélange origine essentiellement du fait que « symbolic quantities in science represent physical measurements rather than numbers » (p. 314), ce qui est également le cas dans les problèmes mathématiques ayant un contexte physique. Redish (2021) poursuit qu'apprendre à travailler avec ce mélange de physique et du langage mathématique plutôt que simplement calculer « involves a number of general scientific thinking skills that are often taken for granted » (p. 314). Redish (2021) met de l'avant qu'il est important que ces habiletés soient rendues explicites par les personnes enseignantes, afin que les étudiants puissent les développer. Cependant, il ne propose pas d'enseigner ces habiletés comme un contenu supplémentaire à ajouter à celui du cours, mais plutôt d'enseigner autrement le contenu actuel du cours, car « these new learning goals [...] appear in all contents, identifying strategies that have general utility » (p. 315).

Par similarité, le contrôle par les unités de mesure, qui peut s'exercer à travers différentes notions (demandes) mathématiques, devrait être rendu explicite par la personne enseignante. De ce fait, un enrichissement de l'activité mathématique par l'exercice explicite d'un contrôle par les unités devrait être fait tout au long de l'apprentissage des notions du calcul différentiel. Par exemple, la personne enseignante pourrait résoudre des problèmes mathématiques à contexte physique à l'avant à différents moments dans son enseignement, tout en rendant explicites les diverses actions contrôlées qu'elle met en œuvre pendant la résolution ou en posant des questions explicites aux étudiants afin d'encourager des actions contrôlées précises chez ces derniers. Il est important de noter que les actions contrôlées présentées dans ce mémoire (voir figure 5.25) ont été travaillées et identifiées avec un point de vue d'expert dans l'optique de déterminer un maximum

des opportunités d'un contrôle par les unités offertes par les problèmes mathématiques à contexte physique. Cependant, un contrôle par les unités de mesure peut s'amorcer avec quelques actions contrôlées relevant d'abord d'un contrôle structural, puis d'un contrôle opérationnel.

D'abord, suite à la présentation de l'énoncé d'un problème, la personne enseignante pourrait exercer un contrôle structural sur ce dernier par l'exercice d'un contrôle sémantique sur l'équation, le graphique ou le schéma (si un de ces éléments y apparaît; voir tableau 5.48) en explicitant le processus et en précisant les avantages de celui-ci. Due à l'importance du registre algébrique dans le calcul différentiel, sélectionner un problème où une équation est présente semble un bon point de départ. De plus, le contrôle sur l'équation passe par la cohérence des unités, permettant de travailler explicitement ce principe essentiel tôt. Ensuite, après la lecture de chaque sous-question du problème, la personne enseignante pourrait mettre en place un contrôle opérationnel. Nous pensons qu'il serait préférable de se concentrer sur les actions contrôlées *anticipation de l'unité*, *conservation des unités* et *vérification de l'unité* (voir tableau 5.52) pour amorcer le développement d'un contrôle opérationnel passant par les unités de mesure, car elles sont indépendantes des demandes mathématiques des sous-questions et sont donc les plus versatiles. En plus d'être indépendantes des demandes mathématiques, ces actions contrôlées se présentent fréquemment ensemble et s'agencent très bien : l'unité de la grandeur physique recherchée peut être anticipée et confrontée à celle obtenue à l'issue des calculs numériques à travers lesquels les unités ont été conservées. En outre, la conservation des unités pendant les calculs permet d'être plus sensible à la contradiction et donc de possiblement percevoir des erreurs plus facilement (lorsque la cohérence des unités de mesure n'est pas respectée). Ainsi, la personne enseignante pourrait expliciter cette chaîne d'actions contrôlées lors de la résolution de sous-questions et en préciser les avantages, amorçant le développement d'un contrôle opérationnel par les unités de mesure indépendant des notions mathématiques. Les autres actions contrôlées relevées dans ce mémoire (voir tableaux 5.49, 5.50, 5.51, 5.53 et 5.54) pourraient être introduites par la suite de manière graduelle à des moments opportuns dans l'enseignement et apprentissage du calcul différentiel.

Évidemment, ce que nous venons d'avancer ne sont que des suggestions. Il revient à la personne enseignante d'utiliser son expertise et jugement professionnels envers celles-ci, selon les différents objectifs qu'elle poursuit au fil de son enseignement. À ce propos, une continuation de la recherche actuelle pourrait faire usage du travail théorique présenté dans ce mémoire pour le confronter à la réalité enseignante, possiblement avec une recherche collaborative impliquant des enseignants de mathématiques et de physique. Il pourrait être intéressant de consulter la pratique d'enseignants de physique autour des unités de mesure, notamment lors de la résolution de problèmes, et d'étudier ses possibles implications sur la pratique d'enseignants de mathématiques. En effet, plusieurs enseignants de physique de ma connaissance traitent ou utilisent, dans

différentes mesures, les unités lorsqu'ils résolvent des problèmes à l'avant de la classe et possèdent des exigences autour du traitement (à travers le formalisme mathématique) des unités dans les démarches d'étudiants (e.g. dans les devoirs ou examens). Ce mélange de sens physique (véhiculé par les unités de mesure) avec le formalisme mathématique est considéré comme une partie nécessaire de l'enseignement par Redish et Kuo (2015) : « we [instructors] must [...] provide instruction and practice in blending in physical interpretation on the mathematical formalism » (p. 588). Dans une perspective d'interdisciplinarité, offrir plus de pratique aux étudiants à ce niveau pourrait passer par la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique dans les cours de mathématiques; qui serait (idéalement) soutenue par une pratique des enseignants de mathématiques en cohérence avec celles des enseignants de physique.

À l'instar de la sphère enseignante, la sphère étudiante n'est pas abordée dans la présente recherche. Ce faisant, nous pensons que s'intéresser à cet aspect en serait une continuation pertinente. Mener une recherche impliquant des étudiants permettrait, d'une part, de concrétiser le travail théorique mis de l'avant dans le présent mémoire autour d'un contrôle passant par les unités de mesure. D'autre part, mener une telle recherche pourrait permettre de faire des avancées sur la notion du contrôle restreignant, puisque ce contrôle est intimement lié à l'étudiant lui-même. En effet, le contrôle restreignant est « basé sur des croyances qui viennent restreindre l'activité intellectuelle nécessaire au processus de résolution » (Rhéaume, 2020, p. 77), c'est-à-dire sur des « conceptions, attentes scolaires, habitudes, conduites et règles artificielles **que l'élève a développées** au sujet des mathématiques et plus particulièrement, au sujet de la résolution de problèmes » (p. 79, notre accentuation). Tel que mentionné à la section 5.5.1, certaines limitations de l'exercice autour d'un contrôle par les unités de mesure ont été relevées lors des analyses *a priori*, notamment des confusions autour du symbolisme. Cela fait écho aux propos tenus par Redish et Kuo (2015) autour de la difficulté des étudiants d'utiliser efficacement les outils mathématiques dans leurs cours de physique : « we suspect that often the issue [...] has to do with students having difficulty in translating the way symbology is used to make meaning differently in math and science classes » (p. 562). Ainsi, nous pensons qu'une avenue intéressante à explorer serait l'inclusion des difficultés étudiantes pouvant émerger des similarités et différences entre les symbolismes des deux disciplines à la notion de contrôle restreignant au sens de Rhéaume (2020).

CONCLUSION

À l'instar du mouvement international STIM (Freeman et al., 2019), un accent est mis sur l'interdisciplinarité dans le devis ministériel (revisité en fin 2021) du programme collégial *Sciences de la nature*. Dans le cours de calcul différentiel, c'est par le recours à la physique, entres autres, comme source de contexte pour l'application des notions mathématiques en apprentissage, que l'interdisciplinarité se manifeste. Non seulement la présence d'unités de mesure découle du contexte physique, mais leur considération est nécessaire à l'acquisition de certains éléments de compétence. Le peu d'études qui ont abordé l'effet d'unités de mesure sur l'activité mathématique montrent que leur présence entraîne des difficultés chez les étudiants (Dorko et Speer, 2015; Rowland et Jovanoski, 2004; Rowland, 2006). Néanmoins, certains éléments de ces études ont soulevé la possibilité que les unités de mesure puissent aider les étudiants à contrôler leur activité mathématique, ce qui nous a amené à vouloir explorer le potentiel des unités comme outil de contrôle (Rhéaume, 2020) lors de la résolution de problèmes de calcul différentiel possédant un contexte physique. Ainsi, nous avons tenter de répondre aux questions de recherches suivantes : *Comment les unités apparaissent-elles dans les problèmes mathématiques à contexte physique offerts aux étudiants par un manuel du cours collégial Calcul différentiel? Quelles opportunités de contrôle (et de quels types) sur l'activité mathématique des étudiants l'usage des unités de mesure offre-t-il lors de la résolution de problèmes à contexte physique (routiniers de niveau collégial)?* Pour ce faire, nous nous sommes appuyées sur la notion de contrôle sur l'activité mathématique (Saboya, 2010; Réhaume, 2020) comme cadre conceptuel. Nous avons d'abord élargi la conceptualisation du contrôle afin de l'ancrer à la présence d'unités de mesure, grâce à l'introspection de ma pratique en tant qu'enseignante collégiale de physique et la consultation d'études en didactique de la physique et des mathématiques. Cette nouvelle conceptualisation d'un contrôle par les unités a orientée les analyses *a priori* (Artigue, 1991) que nous avons réalisées sur 13 problèmes sélectionnés comme représentants du corpus des problèmes mathématiques à contexte physique issus du manuel *Calcul différentiel : Charron-Parent*. Cette sélection a été basée sur une analyse catégorielle des demandes mathématiques figurant dans l'ensemble de ce corpus.

Pour avoir une vue globale de la manière dont les unités de mesure apparaissent dans les énoncés des problèmes, nous les avons recensées à travers le corpus entier. Ainsi, nous avons pu faire quelques constats. La présence d'un contexte physique dans une problème mathématique ne garantit pas la présence d'unités de mesure. Lorsque le problème mentionne des unités, à part exception, l'unité des constantes d'équations n'est **jamais** précisée et l'unité des nombres parsemant le texte de l'énoncé l'est **toujours**. Dans le cas où les problèmes mentionnent des unités de mesure et contiennent des symboles algébriques : dans près du deux-cinquièmes des problèmes, l'unité de mesure de **tous** les symboles algébriques est présente; dans près

du deux-cinquièmes des problèmes, l'unité de mesure de **certains** des symboles algébriques est présente; l'unité de mesure d'aucun symbole algébrique n'est pas précisée dans près d'un cinquième des problèmes. De plus, à part exception, les unités de mesure mentionnées à travers le corpus de problèmes mathématiques à contexte physique proviennent du SI (la majorité) ou sont des unités dont l'usage est accepté avec le SI; dont environ la moitié provient de l'ensemble cohérent des unités SI. Selon nous, l'utilisation en mathématiques de plus d'unités issues de l'ensemble cohérent des unités SI – prédominant en physique – pourrait favoriser un rapprochement entre les deux disciplines.

Les analyses *a priori* ont permis d'identifier les opportunités de contrôle sur l'activité mathématique offertes par l'usage des unités de mesure lors de la résolution des problèmes mathématiques à contexte physique, par ce que nous avons nommé des actions contrôlées. Notamment, treize actions contrôlées (liées aux unités), mobilisant une ou plusieurs composantes du contrôle (structural ou opérationnel) dans un but précis selon les caractéristiques du problème ou l'activité mathématique demandée par celui-ci, ont été relevées. Au niveau de l'exercice d'un contrôle structural (sur la première partie de l'énoncé), nous avons identifié trois actions contrôlées qui dépendent des caractéristiques du problème et permettent de mieux saisir le phénomène physique représenté à travers ces dernières – l'exercice d'un contrôle sur l'équation, l'exercice d'un contrôle sur le graphique et l'exercice d'un contrôle sur le schéma – et trois actions contrôlées qui dépendent des unités mentionnées dans l'énoncé – l'exercice d'un contrôle sur les unités elles-mêmes, la conversion d'unités et le recours à des métaconnaissances. Ainsi, selon nous, les unités de mesure peuvent être considérées comme une variable didactique dans les problèmes à contexte physique puisque leur présence et présentation affectent le contrôle pouvant être sollicité. Ces six actions contrôlées, relevant du contrôle structural, relèvent également du contrôle opérationnel. Puisque ce dernier s'exerce suite à la lecture des sous-questions du problème – et dans le but d'une mise en action plutôt que dans un but de représentation de la situation – les actions contrôlées se manifestent différemment selon s'ils relèvent du contrôle opérationnel ou du contrôle structural. Sept actions contrôlées sont exclusives au contrôle opérationnel. Trois d'entre elles sont indépendantes des demandes mathématiques et forment un bloc d'actions imbriquées qui se présentent généralement ensemble, puisque l'unité de la grandeur recherchée peut être anticipée (anticipation de l'unité), que les unités peuvent ensuite être conservées pendant les calculs (conservation des unités) jusqu'à l'obtention de la grandeur voulue et de son unité, qui peut enfin être confrontée à celle anticipée (vérification de l'unité). Trois d'entre elles sont liées à une demande mathématique spécifique : l'enchaînement d'équations (associé à la résolution d'équations), la preuve d'unités (associée à l'identification d'une unité) et la vérification d'une égalité (associé à la substitution de valeurs). La dernière action contrôlée qui relève du contrôle opérationnel s'appuie directement sur le contexte physique, car il s'agit d'une vérification passant par le contexte physique.

La recherche présentée au fil de ce mémoire possède des retombées pour les didacticiens des mathématiques et pour les enseignants de mathématiques. Comme contribution au domaine de la didactique des mathématiques, ce mémoire offre une conceptualisation inédite d'un contrôle sur l'activité mathématique passant par les unités de mesure dans le cadre de résolution de problèmes mathématiques à contexte physique. Cette conceptualisation a été mise en application lors de l'analyse des problèmes, entraînant son étoffement et raffinement. Nous sommes passées d'une vision axée sur les composantes du contrôle à une vision axée sur les actions contrôlées issues de la mobilisation (concertée) d'une ou de plusieurs composantes du contrôle dans un but précis. De la mobilisation des mêmes composantes peut découler différentes actions contrôlées lorsque le but diffère. Ce changement de vision a permis de mettre en lumière la structuration – centrée autour de contrôle sémantique – des composantes d'un contrôle passant par les unités de mesure lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique. La place cruciale occupée par le contrôle sémantique n'est pas surprenante puisque nous nous sommes intéressées au contrôle ancré aux unités de mesure et que ces dernières sont porteuses du sens physique des grandeurs en jeu, c'est-à-dire de leur signification contextuelle. Nous avons fait le choix à des fins d'analyses d'attribuer l'exercice d'un contrôle structural à la première partie de l'énoncé du problème et d'attribuer l'exercice d'un contrôle opérationnel aux sous-questions du problème (voir section 5.4). Nous avons opté pour cette linéarité artificielle autour du contrôle sur l'activité mathématique, car la présente recherche ne fait pas intervenir d'étudiants, rendant l'aspect dynamique du contrôle (voir section 2.3.1) non pertinent. De ce fait, une limitation de la présente recherche est de ne pas avoir traité de cet aspect connu du contrôle.

Comme contribution à l'enseignement des mathématiques, ce mémoire offre des exemples concrets de ce qui peut être fait à partir d'une ressource essentielle pour les enseignants, le manuel scolaire (Lebrun et Nielot, 2009), pour soutenir l'activité mathématique par le contexte physique. L'interdisciplinarité entre les mathématiques et la physique est ainsi mise de l'avant, en utilisant les unités de mesure comme outil de contrôle, sans effectuer de modification au matériel original, facilitant ainsi sa possible mise en application en classe. Nous avons tout de même relevé certaines circonstances favorisant l'interdisciplinarité dans les problèmes mathématiques à contexte physique lorsque : une notation issue de la physique est utilisée, une sous-question exige de déterminer l'unité d'une grandeur physique nouvellement définie et une sous-question exige l'interprétation (physique) d'un résultat (où l'unité relie la valeur numérique au sens physique qu'elle revêt). Selon nous, ces différents éléments sonnent une clochette de vigilance sur les nouveaux aspects amenés par l'ajout d'un contexte physique à un problème mathématique, notamment la présence d'unités de mesure (car les variables en jeu sont maintenant des grandeurs physiques). Si un enseignant de mathématiques souhaite faire un travail sur les unités de mesure semblable à ce qui a été avancé dans ce mémoire, même sans modification du matériel de base, des efforts doivent tout de même

être investis, surtout pour l'apprentissage du Système international des unités. Tel qu'abordé dans la discussion, des continuations de la recherche menée dans le cadre de ce mémoire pourraient être d'utiliser ce travail théorique pour le confronter à la réalité étudiante et enseignante. L'élaboration de matériel interdisciplinaire mettant à profit les unités de mesure comme façon de soutenir l'activité mathématique et de favoriser le contrôle des étudiants serait un but intéressant à poursuivre, puisqu'il s'aligne parfaitement avec la perspective interdisciplinaire mise de l'avant par le MES.

ANNEXE A

TABLEAU SYNTHÈSE DES ANALYSES *A PRIORI*

Le tableau ci-dessous constitue la mise en commun des 13 tableaux⁷² regroupant les points saillants et les remarques importantes de l'analyse *a priori* des problèmes sélectionnés pour représenter le corpus des 98 problèmes mathématiques à contexte physique issus du manuel *Calcul différentiel: Charron-Parent*.

Tableau A.1 Synthèse des manifestations possibles d'un contrôle par les unités de mesure lors de la résolution de problèmes mathématiques à contexte physique

	CONTRÔLE STRUCTURAL	CONTRÔLE OPÉRATIONNEL	
	<i>Contrôle sur les unités</i>		
Contrôle sémantique	Permet de déduire la signification contextuelle d'une grandeur non définie. Permet d'identifier la dépendance (non indiquée) d'une grandeur. Permet d'anticiper la nécessité éventuelle d'une conversion d'unités par la reconnaissance d'unités différentes de même nature. Permet, grâce à la présence d'équivalences d'unités, d'obtenir une nouvelle équivalence d'unités et d'anticiper qu'une conversion d'unités n'est pas nécessaire (contrairement aux premiers abords).	Permet de déduire, à partir des unités (des grandeurs) présentes, l'unité d'une grandeur connexe. [IQI, CÉ] Permet de faciliter la lecture d'une équation grâce à l'équivalence d'unités. [CÉ] Permet d'anticiper la nécessité, pendant la résolution, d'une conversion d'unités par la reconnaissance d'unités différentes de même nature (demandées ou fournies). [S, R]	Contrôle sémantique
		Permet d'identifier les grandeurs problématiques grâce à l'identification des unités problématiques et d'avancer vers un dépassement de la contradiction. [S]	Dépassement de la contradiction par l'identification de sa source
	<i>Contrôle sur l'équation</i>		

⁷² Ce sont les tableaux 5.7, 5.10, 5.14, 5.17, 5.21, 5.24, 5.28, 5.32, 5.36, 5.39, 5.42, 5.45 et 5.47.

Contrôle sémantique	Permet (avec la cohérence des unités) de déterminer l'unité des facteurs numériques et d'accéder au phénomène physique encodé. Permet d'obtenir directement ou de déduire le lien entre les unités des grandeurs présentes dans l'équation.	Permet (avec la cohérence des unités) de déterminer l'unités des facteurs numériques et d'accéder au phénomène physique encodé. [DF, R, D]	Contrôle sémantique
	<i>Conversion d'unités</i>		
Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations	Permet de valider l'équivalence d'une grandeur exprimée avec deux unités différentes de même nature.	Permet d'exprimer des grandeurs équivalentes avec des unités différentes de même nature. [S, R]	Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations
	<i>Contrôle sur le schéma</i>		
Contrôle sémantique	Permet de décoder les éléments y figurant et d'y ajouter les grandeurs en jeu, facilitant l'appropriation du phénomène physique représenté. (<i>figuratif</i>) Permet de décoder les éléments y figurant et de créer une version mathématique du schéma, facilitant l'appropriation (mathématique) du phénomène physique représenté.	Permet de modifier le schéma original afin de représenter une nouvelle situation en y ajoutant les (nouveaux) éléments pertinents. [R, S, CÉ]	Contrôle sémantique
	<i>Contrôle sur le graphique</i>		
Contrôle sémantique	Permet de faire plusieurs déductions et d'améliorer la compréhension du graphique et du phénomène qu'il représente.	Permet de faire plusieurs déductions et d'améliorer la compréhension du graphique et du phénomène qu'il représente. [S, IQn] Permet d'extraire les données pertinentes à la résolution à partir du graphique.	Contrôle sémantique

		[IQn] Permet d'ajouter des éléments pertinents à la résolution sur le graphique. [CGs, IQn, S, IQI] L'unité des grandeurs (indépendante et dépendante) est nécessaire pour l'identification des axes. [CGs, CGà, A]	
	<i>Métaconnaissance</i>		
Métaconnaissances	Une bonne connaissance du SI est nécessaire afin de confirmer les liens (déduits) entre les unités.	La connaissance du SI est nécessaire à la reconnaissance de l'expression en unités de base d'une unité dérivée avec un symbole et nom spéciaux. [CÉ]	Métaconnaissances
		<i>Conservation des unités</i>	
		Permet d'augmenter la sensibilité à la contradiction (et la perception d'erreurs) et de vérifier l'unité anticipée (de la grandeur recherchée). [S, CÉ, L, IQn, CGà, DP, R, DF, D] Permet d'obtenir directement l'unité des facteurs numériques d'une nouvelle équation. [CÉ, T]	Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations
		<i>Enchaînement d'équations</i>	
		Considérer l'enchaînement des unités – plutôt que les grandeurs elles-mêmes – peut permettre de discerner plus facilement l'enchaînement des équations. [R]	Discernement et anticipation sur la planification de la résolution
		<i>Anticipation d'unité</i>	

		L'unité de la grandeur recherchée peut être anticipée. [S, CÉ, L, IQn, CGà, DP, R]	Anticipation sur le résultat et contrôle sémantique
		<i>Vérification de l'unité</i>	
		L'unité de la grandeur obtenue peut être confrontée à celle anticipée. [IQn]	Vérification par un retour à l'anticipation
		<i>Vérification par le contexte physique</i>	
		Les unités permettent d'explicitier les liens entre les grandeurs (et leur valeur numérique) et donc de raisonner sur le contexte physique. [L, R]	Vérification par un retour à la représentation et contrôle sémantique
		La considération de la réalité physique entraîne le rejet d'un résultat, car il est invraisemblance dans ce contexte. [R]	Vérification par l'évaluation de la vraisemblance d'un résultat et contrôle sémantique
		<i>Vérification d'une (fausse) égalité</i>	
		Les deux membres de la (fausse) égalité sont différents, au niveau de leur valeur numérique et de leur unité (qui n'est pas de même nature). [S]	Sensibilité à la contradiction
		<i>Preuve d'unités</i>	

		Permet de déterminer l'unité d'une nouvelle grandeur à partir de sa définition. [identification d'une unité]	Contrôle sémantique et contrôle sur les nombres et opérations
	REMARQUES		

Symbolisme :

- Une notation physique est utilisée dans un problème (e.g. $s(t)$).
- Une confusion est possible, car le même symbole est utilisé pour désigner une grandeur (caractère en italique; symbole suggéré) et une unité (caractère droit; symbole obligatoire).
- En physique, l'unité est implicitement incluse dans la représentation d'une grandeur par un symbole algébrique; au contraire des mathématiques.

Demandes sur les unités :

- Une sous-question demande explicitement de préciser l'unité d'une nouvelle grandeur.
- Une sous-question demande d'interpréter un résultat, impliquant ainsi l'unité du résultat, car cette dernière relie la valeur numérique du résultat à sa signification contextuelle (i.e. son sens physique).

Anticipation d'une connaissance:

- Sans impliquer ouvertement les unités de mesure, le contrôle opérationnel peut passer par une anticipation sur la planification de la résolution (en conjonction ou non avec le discernement), car la nécessité d'avoir recours à une connaissance liant divers registres (e.g. langagier, graphique, algébrique), ou provenant de la physique, peut être anticipée (ce qui peut permettre de discerner les étapes de la résolution).

Représentation graphique :

- Une confusion est possible entre la description du tracé (dans une représentation graphique) et l'interprétation de la relation entre les deux grandeurs représentée par le tracé. Cette confusion peut entraîner l'émergence d'une contradiction et l'exercice d'un contrôle sur le graphique permet de dépasser cette dernière grâce à l'obtention d'une meilleure compréhension de la représentation graphique.
- L'exercice d'un contrôle sur le graphique permet d'accéder à l'aspect dynamique qu'il possède (e.g. le mobile se déplace au fil du temps sur la trajectoire (statique) illustrée dans le graphique).

Perception d'erreur :

- Les équations enrichies (par la présence d'unités) peuvent permettre d'éviter une erreur connue en calcul différentiel (e.g. penser que la valeur de la dérivée en un point correspond au produit de la pente de la droite tangente et de la variable indépendante en ce point plutôt qu'à la valeur de la pente tangente).

Constante algébrique :

- L'exercice d'un contrôle sur l'équation permet de remettre en question la conception (erronée) que les constantes algébriques ne possèdent jamais d'unité.
- On réalise qu'une constante peut ne pas correspondre à une grandeur physique définie.

Conservation des unités pendant les calculs :

- Il se peut que conserver les unités de mesure alourdisse les calculs et entraîne donc des difficultés.

- La conservation des unités peut entraîner une possible confusion autour des unités lorsqu'il y a un mélange de facteurs numériques avec unités explicites et de symboles algébriques avec unités implicites.
- La conservation des unités facilite la construction d'équations puisque les unités relient les nombres à leur signification physique.

Contrôle sur l'équation :

- L'exercice d'un contrôle sur l'équation (e.g. de la trajectoire elliptique) peut parfois passer par une connaissance mathématique (e.g. l'ellipse).

Contrôle sur les unités :

- Une confusion possible (au niveau des taux de variation) peut être évitée par l'exercice d'un contrôle sur les unités (variation par rapport au temps).

Déduction par la physique :

- Un certain instinct physique est nécessaire afin de comprendre que les conditions de la situation initiale ne changent pas à l'exception d'une grandeur (statique) particulière (e.g. la distance initiale).

Contrôle sur le schéma (figuratif) :

- Un détachement de la situation réelle est nécessaire lors de l'interprétation (mathématique du phénomène physique) préalable à la résolution d'un sous-problème; ce qui se manifeste par la nécessité de produire un schéma mathématique à partir d'un schéma figuratif.

Création d'un schéma :

- L'utilisation des points cardinaux comme indications de position encourage la création d'un schéma afin d'y donner un sens (visuel).

RÉFÉRENCES

- Artigue, M. (1991). Ingénierie didactique en mathématiques. *Publications de l'Institut de recherche mathématique de Rennes*, 5(2), 1-22.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.
- Bardin, L. (2013). *L'analyse de contenu* (2^e éd.). Presses Universitaires de France.
- Bureau international des poids et mesures. (2019). *Le Système international d'unités* (ISO/IEC 80000). <https://www.bipm.org/documents/20126/41483022/SI-Brochure-9.pdf/fcf090b2-04e6-88cc-1149-c3e029ad8232>
- Clément, E. (2009). *La résolution de problème : à la découverte de la flexibilité cognitive*. Paris : Armand Colin.
- Conseil supérieur de l'éducation (2000). *La formation du personnel enseignant du collégial : un projet collectif enraciné dans le milieu*, Sainte-Foy, Le Conseil.
- Conseil supérieur de l'éducation (2004). *Regard sur les programmes de formation technique et la sanction des études : poursuivre le renouveau collégial*, Sainte-Foy, Le Conseil.
- Dorko, A., et Speer, N. (2015). Calculus Students' Understanding of Area and Volume Units. *Investigations in Mathematics Learning*, 8(1), 23-46. <https://doi.org/10.1080/24727466.2015.11790346>
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Dufour, S., et Jeannotte, D. (2013). La tâche non routinière sous l'angle du contrôle : un exemple en calcul différentiel. *Bulletin AMQ (Association mathématique du Québec)*, 53(4), 29-43.
- Eisenberg, T., et Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. Dans W. Zimmermann et S. Cunningham (dir.), *Visualization in teaching and learning mathematics*. États-Unis : MAA Series. 25-37.
- Fédération des cégeps, Commission des affaires pédagogiques (1988). Cadre de référence pour les concepts de programme, approche-programme et gestion des programmes. *Pédagogie collégiale*, 2(2), 31-35.
- Focant, J., et Grégoire, J. (2008). Les stratégies d'autorégulation cognitive : une aide à la résolution de problèmes arithmétiques. Dans M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte et J. Grégoire (éd.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques?* Bruxelles : De Boeck Supérieur, 201-221.
- Fortin, S., et Poliquin, G. (2023). *Calcul différentiel : Charron-Parent* (9^e éd.). Chenelière Éducation.

- Freeman, B., Marginson, S., et Russell, T. (2019). An international view of STEM education. Dans A. Sahin et M. Mohr-Schroeder (ed.), *STEM education 2.0 : myths and truths – what K-12 STEM education research taught us ?* Deakin University's Research Repository, 350-363.
- Gosselin, S. (2021). Formation ordinaire : Portrait de la formation collégiale, *Études et recherches*, Québec, Conseil supérieur de l'éducation.
- Julo, J. (1995). Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. *Collection Psychologies*. Presses Universitaires de Rennes.
- Lebrun, J., et Nicolt, N. (2009). Les manuels scolaires : réformes curriculaires, développement professionnel et apprentissage des élèves. *Revue des sciences de l'éducation*, 35(2), 7-14.
- Meredith, D., et Marrongelle, K. (2008). How Students use Mathematical Resources in an Electrostatics Context. *American Journal of Physics*, 76(6), 570-578.
- Ministère de l'Enseignement supérieur (2022). *Sciences de la nature (200.B1) – Programme d'études préuniversitaires*. Gouvernement du Québec.
- Morand, B. (2020). *Étude des structurations du contrôle déployées lors de la résolution en équipe de problèmes algébriques*. [Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal]. <http://archipel.uqam.ca/id/eprint/13933>
- Office québécois de la langue française (2012). *Définition de l'approche-programme* (25 mai 2024).
- Ouarzeddine, A. et Benseghir, A. (2007). Symbolisme des grandeurs physiques : statut sémantique et perception des élèves. *Disdaskalia*, 30, 67-88. <https://doi.org/10.4267/2042/23966>
- Passaro, V., et DeBlois, L. (2020). Pistes pour susciter la sensibilité des élèves sur le passage d'un registre de représentation à un autre. *Envol*, 176, 22-27.
- Redish, E. F. (2021). Using Math in Physics: Overview. *The Physics Teacher*, 59(5), 314-318. <https://doi.org/10.1119/5.0021129>
- Redish, E. F., et Kuo, E. (2015). Language of Physics, Language of Math: Disciplinary Culture and Dynamic Epistemology. *Science & Education*, 24, 561-590. <https://doi.org/10.1007/s11191-015-9749-7>
- Rhéaume, S. (2020). *Les prises de décision des élèves du 3^e cycle du primaire lors de la résolution de problèmes de proportion : une analyse des contrôles mobilisés*. [Thèse de doctorat, Université Laval]. <https://corpus.ulaval.ca/entities/publication/2640cd0f-26da-4035-a437-52057da24677>
- Roorda, G., Vos, P., et Goedhart, M. J. (2013). An actor-oriented transfer perspective on high school students' development of the use of procedures to solve problems on rate of change. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(4), 863-889. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9501-1>
- Rowland, D. R. (2006). Student difficulties with units in differential equations in modelling contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(5), 553-558.

- Rowland, D. R., et Jovanoski, Z. (2004). Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(4), 503-516.
- Sabourin, P. (2009). L'analyse de contenu. Dans B. Gauthier (dir.), *Recherche sociale : de la problématique à la collecte des données* (5^e éd.). Presses de l'Université du Québec. 415-444.
- Saboya, M. (2010). *Élaboration et analyse d'une intervention didactique coconstruite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire* [Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal].
<http://archipel.uqam.ca/id/eprint/3107>
- Saboya, M., Bednarz, N., et Hitt, F. (2015). Le contrôle exercé en algèbre : analyse de ses manifestations chez les élèves, éclairage sur sa conceptualisation. Partie 1 : La résolution de problèmes. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 20, 61-100.
- Saboya, M., et Rhéaume, S. (2015). Quel contrôle exercent les élèves lors de la résolution d'un problème de comparaison de fractions? *Revue Petit x*, 99, 5-31.
- Séguin, M., Descheneau, J., et Tardif, B. (2010a). *Physique XXI tome A : Mécanique*. ERPI.
- Séguin, M., Descheneau, J., et Tardif, B. (2010b). *Physique XXI tome B : Électricité et magnétisme*. ERPI.
- Séguin, M., Descheneau, J., et Tardif, B. (2010c). *Physique XXI tome C : Ondes et physique moderne*. ERPI.
- Selden, A., Selden J., Hauk, S., et Mason, J. (1999). Do calculus students eventually learn to solve non-routine problems? *Technical Report no. 1999-5*.
- Sokolowski, A. (2021). *Understanding Physics Using Mathematical Reasoning: A Modeling Approach for Practitioners and Researchers*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-80205-9>
- Van Heuvelen, A., et Maloney, D. P. (1999). Playing Physics Jeopardy. *American Journal of Physics*, 67(3), 252-256.