

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LE THÉORÈME DE TORELLI POUR LES SURFACES K3 KÄHLÉRIENNES

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

ALEX-ANTOINE CARON

FÉVRIER 2026

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.12-2023). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

Il me fut d'un plaisir immense d'être un étudiant de l'UQÀM pendant ces 5 dernières années. J'aimerais remercier mes professeurs qui, pendant mon baccalauréat jusqu'à la maîtrise, m'ont permis d'apprendre un nombre conséquent de nouvelles mathématiques.

Plus particulièrement, j'aimerais remercier mon professeur Julien Keller de m'avoir introduit au monde de la géométrie différentielle pendant les stages de premier cycle et pour son soutien pour le passage du baccalauréat vers les études graduées. J'aimerais également remercier mon superviseur de maîtrise, le professeur Steven Lu, pour m'avoir introduit et épaulé dans mes apprentissages de la géométrie complexe et de la géométrie algébrique. Son soutien et ses commentaires ont été une denrée précieuse tout au long de cette maîtrise. Je salue son soutien inconditionnel et le temps qu'il a consacré à ce projet. J'ai également pris beaucoup de plaisir à travailler avec lui et il restera à toujours un ami de confiance.

Je suis également reconnaissant aux mathématiciens Claire Voisin, Pierre Deligne, Misha Verbitsky, Daniel Huybrechts, Chris Peters, Phillip Griffiths et Carlos Simpsons. Dont les articles et ouvrages ont une influence importante sur mon sujet de mémoire et mes intérêts de recherche.

J'aimerais également remercier amis et collègues étudiants dont les souvenirs vécus pendant ces dernières années resteront gravés à toujours dans ma mémoire. J'aimerais, particulièrement, remercier Louis-Simon Cyr pour son amitié et sa collaboration agréable.

Finalement, et non les moindres, je tiens également à remercier mes parents et ma conjointe pour leurs soutient émotionnels inconditionnels.

## TABLE DES MATIÈRES

NOTATION .....	v
RÉSUMÉ .....	vi
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 VARIÉTÉS COMPLEXES ET VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES .....	4
1.1 Variétés complexes et Espaces complexes .....	4
1.1.1 Variétés complexes .....	4
1.1.2 Espaces complexes .....	6
1.2 Métriques hermitiennes et kählériennes .....	7
1.2.1 Formes différentielles .....	8
1.3 Cohomologie .....	10
1.3.1 Cohomologie et homologie singulière.....	10
1.3.2 Faisceaux.....	11
1.4 Théorie des surfaces compactes.....	19
1.5 Structures de Hodge .....	20
CHAPITRE 2 LES SURFACES K3 KÄHLÉRIENNES .....	23
2.1 Invariants topologiques et nombres de Hodge .....	23
2.2 Domaine des périodes et surfaces K3 marquées .....	28
2.3 Classes divisoriales et cônes positifs .....	30
CHAPITRE 3 LES 2-TORES ET LES STRUCTURES DE HODGE DE POIDS 2 .....	41
3.1 Définition et l'anneau de cohomologie.....	41
3.2 Torelli pour les structures de Hodge de poids 2 pour les 2-tores .....	42
CHAPITRE 4 TORELLI POUR LES SURFACES DE KUMMER .....	48

4.1	Les surfaces de Kummer .....	48
4.2	Le théorème de Torelli pour les surfaces de Kummer .....	52
4.3	Les surfaces de Kummer projectives .....	67
CHAPITRE 5 TORELLI LOCAL ET THÉORIE DE LA DÉFORMATION .....		72
5.1	Théorie des déformations d'une variété lisse compacte .....	72
5.2	Application des périodes et les théorèmes de Griffiths .....	75
5.3	Déformation des surfaces $K3$ .....	78
CHAPITRE 6 LE THÉORÈME DE DENSITÉ DES SURFACES $K3$ EXCEPTIONNELLES .....		80
6.1	Surface de Kummer exceptionnelle .....	80
CHAPITRE 7 LE CÔNE DE KÄHLER SOUS DÉFORMATION .....		91
CHAPITRE 8 ESPACE DES CYCLES .....		98
8.1	Résultat sur l'espace des cycles (Barlet) .....	98
8.1.1	Remarque dans le cas relatif .....	101
8.2	Application dans le cas du graphe d'un isomorphisme .....	101
CHAPITRE 9 LE THÉORÈME DE TORELLI POUR LES SURFACES $K3$ .....		108
9.1	Preuve des théorèmes principaux .....	108
9.2	Quelques applications .....	110
CONCLUSION .....		111
BIBLIOGRAPHIE .....		112

## NOTATION

### Géométrie analytique

$NS(X)$  Le groupe de Néron-Severi.

$Pic(X)$  Le groupe de Picard.

$c_i(E)$  Les classes de Cherns du fibré complexe  $E$ .

$C_X^+$  Le cône positif de  $X$ .

$\mathcal{K}_X$  Le cône de Kähler de  $X$ .

$\mathcal{P}^{p,k}$  L'application des périodes du  $k$ -ième groupe de cohomologie en degré  $p$ .

$\rho$  L'application de Kodaira-Spencer.

### Catégories et foncteurs

$C_X^\infty - Module$  Catégorie des modules lisse ( $C^\infty$ ) sur  $X$ .

$\mathcal{O}_X - Module$  Catégorie des modules holomorphes sur  $X$ .

$C_X^\Omega - Module$  Catégorie des modules analytique réel sur  $X$ .

$Ab_X$  Catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur  $X$ .

$QCoh(X)$  Catégorie des faisceaux quasi-cohérent sur  $X$ .

$Coh(X)$  Catégorie des faisceaux cohérent sur  $X$ .

$\Gamma$  Foncteur des sections globales.

$f_*$  Le foncteur image directe de faisceaux ou morphisme de Gysin.

$f^{-1}$  Le foncteur préimage de faisceau.

$f^*$  Le foncteur tiré en arrière.

### (Co)homologies

$R^k F$  Le  $k$ -ième foncteur dérivé du foncteur  $F$ .

$H^k(X, \mathcal{F})$  Groupe de cohomologie des faisceaux à valeur dans le faisceau  $\mathcal{F}$ .

$H^*(X, \mathcal{F})$  L'anneau de cohomologie des faisceaux à valeur dans le faisceau  $\mathcal{F}$ .

$H_k(X, A)$  Groupe d'homologie singulière à valeur dans le groupe  $A$ .

$H_{sing}^k(X, A)$  Groupe de cohomologie singulière à valeur dans le groupe  $A$ .

$\check{H}^k(X, \mathcal{F})$  Groupe de cohomologie de Čech à valeur dans le faisceau  $\mathcal{F}$ .

$H^{p,q}(X, E)$  Groupe de cohomologie de Dolbeault du fibré holomorphe  $E$ .

$Tor_k^A(\cdot, M)$  Le  $k$ -ième foncteur dérivé du foncteur  $\cdot \otimes_A M$ .

$Ext_A^k(\cdot, M)$  Le  $k$ -ième foncteur dérivé du foncteur  $\text{hom}_A(\cdot, M)$ .

## RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la classification des surfaces K3. Nous présentons une démonstration du théorème de Torelli pour les surfaces K3 kählériennes en suivant l'argument originellement donné par (Pjateckiĭ-Šapiro et Šafarevič, 1971) et (Burns et Rapoport, 1975). L'argument réside dans la densité des surfaces K3 de type Kummer dans le domaine des périodes, l'étude de la famille de Kuranishi d'une surface K3 et d'arguments limites dans l'espace des cycles de Barlet. Finalement, nous discutons brièvement de quelques conséquences immédiates.

**Mots-clés** — Géométrie complexe, surface K3, théorie de Hodge, variation des structures de Hodge, théorie des déformations, espaces des cycles de Barlet, espaces de modules

## INTRODUCTION

Les structures de Hodge de poids 1 et les tores complexes sont extrêmement liés. Soit  $H = (H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=1})$  une structure de Hodge de poids 1, c'est-à-dire un réseau  $H_{\mathbb{Z}}$  de rang  $2g$  dont la complexification possède la décomposition suivante :

$$H_{\mathbb{C}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = H^{1,0} \oplus H^{0,1}$$

où  $H^{1,0}$  et  $H^{0,1}$  sont des sous-espaces vectoriels complexes vérifiant  $\overline{H^{1,0}} = H^{0,1}$ , dont la conjugaison complexe est définie par la conjugaison habituelle sur le facteur  $\mathbb{C}$ . À une telle structure, nous pouvons associer un tore complexe de dimension  $g$  appelé la variété Albanese associée à  $H$  que nous notons  $Alb(H)$  (voir (Barth *et al.*, 2004, p 49)). De plus, cette construction est fonctorielle.

Pour n'importe quelle variété compacte Kählérienne  $X$ , nous avons une structure de Hodge de poids 1 induite par la décomposition de Hodge sur  $H^1(X)$ . Dans ce cas, la variété Albanese est notée  $Alb(X)$  et nous avons une application holomorphe  $q : X \rightarrow Alb(X)$  universelle dans le sens suivant : pour tout tore complexe  $T$  avec un point distingué  $0$  et une application holomorphe  $f : X \rightarrow T$ , il existe une unique application  $\tilde{f} : Alb(X) \rightarrow T$  vérifiant  $\tilde{f} \circ q = f$  (Voir (Barth *et al.*, 2004, p 46)). Dans le cas où  $X$  est elle-même un tore complexe, nous obtenons que  $T = Alb(X)$ . Cette correspondance nous permet de réduire la question de savoir quand ces deux tores sont biholomorphes à la question de savoir quand deux structures de Hodge sont isomorphes :

**Théorème 0.1 (Théorème de Torelli pour les tores complexes)** *Si  $T$  et  $T'$  sont deux tores complexes ayant des structures de Hodge de poids 1 isomorphes, alors  $T$  et  $T'$  sont biholomorphes.*

L'application la plus connue de ce type de résultat est probablement dans la construction de l'espace de modules des courbes elliptiques par la période modulo une action de  $SL(2, \mathbb{Z})$  (voir (Hain, 2014)).

Le théorème de Torelli pour les tores complexes admet de nombreuses généralisations. Une généralisation particulièrement récente et intéressante est celle du théorème de Torelli dans le cas hyperkählérien (Huybrechts, 2011).

Dans ce mémoire, nous nous intéressons au cas des surfaces K3 qui sont précisément les surfaces hyperkählériennes et les seules surfaces Kählériennes complexes compactes, hormis les tores complexes, dont

la première classe de Chern du fibré canonique est triviale (Calabi-Yau). Malheureusement, le seul groupe de cohomologie d'une surface K3 avec une structure de Hodge non triviale est le  $H^2$ . Dans ce contexte, la version la plus naïve du théorème de Torelli est la suivante :

**Théorème 0.2 (Théorème de Torelli faible pour les surfaces K3)** Soient  $S$  et  $S'$  deux surfaces K3 qui possèdent une isométrie de Hodge :

$$\phi^* : S' \rightarrow S$$

alors  $S$  et  $S'$  sont biholomorphes.

Cependant, différemment des tores complexes, la réalisation du morphisme  $\phi^*$  par un isomorphisme admet des obstructions évidentes. Par exemple,  $\phi^*$  devrait au moins envoyer les classes de Kähler de  $S'$  sur des classes de Kähler de  $S$ . Cette obstruction nous force à considérer des isométries de Hodge « effectives » préservant les classes de Kähler et certaines classes divisoriales. Dans ce cas, une version plus forte du théorème de Torelli est l'énoncé suivant :

**Théorème 0.3 (Théorème de Torelli pour les surfaces K3)** Soient  $X_0$  et  $Y_0$  deux surfaces K3 et  $\phi^* : H^2(Y_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X_0, \mathbb{Z})$  une isométrie de Hodge effective, alors il existe un isomorphisme  $f : S \rightarrow S'$  tel que  $f^* = \phi^*$ .

Dans ce mémoire, nous présentons une preuve donnée dans l'article (Looijenga et Peters, 1980) qui combine les résultats prouvés originellement dans les articles (Pjateckiĭ-Šapiro et Šafarevič, 1971) et (Burns et Rapoport, 1975). L'idée de la preuve est la suivante. Dans le chapitre 2, nous étudions le comportement du cône de Kähler et les classes effectives sous l'action des réflexions de Picard-Lefschetz. De plus, nous introduisons le domaine de périodes  $\Omega$  et la notion de surfaces K3 marquées. Dans le chapitre 3, nous prouvons une version particulière du théorème de Torelli pour les structures de Hodge de poids 2 sur un 2-tore complexe. Dans le chapitre 4, nous utilisons la construction de Kummer et lions la structure de Hodge des tores complexes avec celle d'une surface K3 de type Kummer. En particulier, nous obtenons une version spéciale du théorème de Torelli pour les surfaces de Kummer projectives (théorème 4.18). Dans le chapitre 5, nous utilisons la théorie des déformations de Kodaira-Spencer-Kuranishi avec la théorie de variation des structures de Hodge pour prouver le théorème de Torelli local 5.1. En particulier, nous montrons que l'application des périodes associée à la famille de Kuranishi d'une surface K3 est un isomorphisme local. Dans le

chapitre 6, nous prouvons le théorème de densité des surfaces K3 Kummer projectives et nous déduisons que chaque point de  $\Omega$  est réalisable par le marquage d'une surface K3. Dans le chapitre 7, nous étudions le cône de Kähler sous déformation. Dans le chapitre 8, nous utilisons l'espace des cycles de Barlet pour présenter un argument limite présenté dans l'article (Burns et Rapoport, 1975). Finalement, dans le chapitre 9, nous prouvons les théorèmes principaux et donnons quelques applications immédiates.

# CHAPITRE 1

## VARIÉTÉS COMPLEXES ET VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES

### 1.1 Variétés complexes et Espaces complexes

#### 1.1.1 Variétés complexes

La première approche pour définir une variété lisse complexe est de calquer la définition d'une variété  $C^\infty$  en remplaçant les transitions  $C^\infty$  par des transitions holomorphes.

**Définition 1.1 (Variété lisse complexe)** Une variété lisse complexe de dimension  $n$  est un espace topologique  $X$  paracompact, Hausdorff, connexe qui possède une base dénombrable avec un atlas holomorphe  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i \subset \mathbb{C}^n)_{i \in I}\}$  qui recouvre  $X$ .

Les atlas holomorphes compatibles sont ordonnés par l'inclusion, ce qui nous permet de parler d'élément maximal. Le résultat important est le suivant.

**Proposition 1.2** Soit  $X$  une variété complexe lisse avec un atlas  $\mathcal{A}$ , alors  $\mathcal{A}$  est contenue dans un unique atlas maximal.

Il est important de comprendre qu'étant donné un espace topologique  $X$ , chaque atlas maximal engendre une structure complexe sur  $X$  et qu'un espace topologique peut avoir différentes structures complexes différentes. Nous verrons plus tard que c'est notamment le cas des surfaces K3.

La structure complexe sur une variété lisse  $X$  induit naturellement une structure  $C^\infty$  compatible avec la structure complexe. Ainsi, nous pouvons également voir  $X$  comme une variété  $C^\infty$ .

Pour le reste de ce mémoire, quand nous disons une variété complexe, à moins d'un avis contraire, nous allons toujours faire référence à une variété complexe lisse. Si nous voulons parler d'une variété lisse  $C^\infty$ , nous dirons seulement une variété  $C^\infty$ .

Une autre approche pour définir une variété lisse est de commencer avec une variété différentielle  $X$  et de

lui rajouter une structure additionnelle sur son fibré tangent.

**Définition 1.3 (Variété presque complexe)** Une variété presque complexe est un couple  $(M, J)$  où  $M$  est une variété  $C^\infty$  avec une section  $J \in C^\infty(TX)$  qui vérifie  $J^2 = -Id$ .

Il est facile de vérifier que dans ce cas  $M$  est une variété orientable et réelle de dimension paire et que chaque fibre  $T_p M$  est un espace vectoriel complexe dont la multiplication complexe est donnée par :

$$(a + bi) \cdot v = av + bJv$$

La notion d'une variété complexe et celle d'une variété presque complexe sont étroitement liées. Dans un sens nous avons la construction suivante.

**Définition 1.4 (Structure presque complexe d'une variété complexe)** Soit  $X$  une variété complexe avec une carte  $(U_i, \varphi_i : U_i \subset X \rightarrow \tilde{U}_i \subset \mathbb{C}^n)$ . On peut définir  $J|_{U_i} \in C^\infty(U_i, TX)$  par la formule suivante :

$$J|_{U_i} = d(\varphi_i^{-1} \circ \cdot i \circ \varphi)$$

Il est clair que  $J|_{U_i}$  est une structure presque complexe sur  $U_i$ . On déduit également par le fait que les transitions de  $X$  sont holomorphes que  $J|_{U_i}$  se recollent pour donner une section globale  $J$  de  $C^\infty(TX)$ . Nous référons à cette structure presque complexe sur  $X$  comme étant la structure presque complexe induite par la structure complexe de  $X$ .

Naturellement, on est en droit de se poser la question : est-ce que toutes les structures presque complexes sont induites par un atlas holomorphe ? Dans le cas où une structure presque complexe  $J$  vient d'une structure complexe, nous disons que  $J$  est intégrable. Pour étudier la question, l'outil clef est le tenseur de Nijenhuis.

**Définition 1.5 (Tenseur de Nijenhuis)** Soit  $(M, J)$  une structure presque complexe. On peut définir le tenseur de Nijenhuis associé à  $J$  de la façon suivante :

$$N_J : C^\infty(TM) \times C^\infty(TM) \rightarrow C^\infty(TM)$$

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + J([JX, Y] + [X, JY]) - [JX, JY]$$

**Proposition 1.6** Si  $(M, J)$  est une structure presque complexe intégrable, alors  $N_J = 0$ .

*Preuve.* C'est un calcul de nature locale, ainsi nous pouvons considérer des coordonnées holomorphes  $z_1, \dots, z_n$  avec les coordonnées réelles  $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$  associées à  $z_k = x_k + iy_k$ . Dans ce cas,  $J$  nous donne les relations suivantes sur les champs de bases :

$$J \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \qquad J \frac{\partial}{\partial y_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}$$

En combinant cela avec le fait que les champs de bases sont sans torsion, nous concluons directement que  $N_J = 0$ .  $\square$

Il s'avère que l'autre implication est également vraie et elle est connue sous le nom du théorème de Newlander-Nirenberg.

**Théorème 1.7 (Newlander-Nirenberg)** Si  $(M, J)$  est une structure presque complexe avec  $N_J = 0$ , alors  $J$  est intégrable.

Voir (Voisin, 2002, p 50) pour une preuve du cas  $\mathbb{R}$ -analytique.

### 1.1.2 Espaces complexes

Il sera parfois nécessaire de considérer des espaces plus généraux. C'est notamment le cas dans le chapitre 5 traitant de la théorie des déformations où nous discutons d'espaces complexes.

**Définition 1.8 (Espaces complexes)** Un espace complexe est un espace localement annelé  $(X, \mathcal{O}_X)$  où  $X$  est un espace Hausdorff dont le faisceau structurel prend valeur dans les  $\mathbb{C}$ -algèbres. Nous voulons que notre  $(X, \mathcal{O}_X)$  soit localement isomorphe à des espaces modèles dont la forme est décrite de la façon suivante :

Considérons une boule de rayon  $r > 0$  que nous notons  $B_r \subset \mathbb{C}^n$ . Nous pouvons alors considérer un nombre fini de fonctions holomorphes  $f_1, f_2, \dots, f_k \in \mathcal{O}(B_r)$ . On peut alors former le lieu d'annulations commun de ces fonctions  $Z := V(f_1, \dots, f_k)$  et un faisceau d'idéal  $\mathcal{J}$  généré par les fonctions  $f_1, \dots, f_k$ . On obtient alors un espace localement annelé  $(Z, \mathcal{O}_Z := i^* \mathcal{O}_X / \mathcal{J})$ .

Plus explicitement, pour tout point  $p \in X$  il existe un voisinage ouvert  $U$  tel que  $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  soit isomorphe (comme espace localement annelé compatible avec la structure de  $\mathbb{C}$ -algèbre) à un espace  $(Z, \mathcal{O}_Z)$  décrit plus haut.

**Définition 1.9 (Fonctions holomorphes)** Une fonction holomorphe entre deux espaces complexes  $(X, \mathcal{O}_X)$  et  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  est tout simplement un morphisme d'espaces localement annelés qui préserve la structure de  $\mathbb{C}$ -algèbre

$$f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

## 1.2 Métriques hermitiennes et kählériennes

Dans cette section, nous rappelons les notions de base sur les métriques kählériennes.

**Définition 1.10 (Métrique / Métrique riemannienne)** Soient  $M$  une variété lisse et  $E$  un fibré vectoriel lisse. Une métrique sur  $E$  est une section  $g \in C^\infty(E^* \otimes E^*)$  telle que pour chaque  $p \in M$  nous avons que  $g_p : E_p^* \otimes E_p^*$  est une forme bilinéaire symétrique positive définie.

Dans le cas spécial où  $E = TM$ , on dit que  $g$  est une métrique riemannienne et  $(M, g)$  est une variété riemannienne.

**Définition 1.11 (Métrique compatible avec la structure presque complexe)** Soit  $(M, g)$ , une variété riemannienne avec une structure presque complexe  $J$ . On dit que  $J$  est compatible avec  $g$  si nous avons :

$$g(J\cdot, J\cdot) = g(\cdot, \cdot)$$

Nous allons faire référence à cette structure par le triplet  $(M, J, g)$ . On appelle aussi  $(M, J, g)$  une métrique hermitienne.

N'importe quel triplet  $(M, J, g)$  définit une 2-forme.

**Définition 1.12 (La forme fondamentale et le produit hermitien associé)** Soit  $(M, J, g)$  comme dans la dé-

finition précédente, alors on peut définir une 2-forme appelée la 2-forme fondamentale :

$$\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$$

Nous avons également un produit hermitien  $h$  sur  $(TM, J)$  vu comme un fibré vectoriel complexe.

$$h = g - i\omega$$

Si nous considérons l'inclusion de  $TM$  dans  $TM_{\mathbb{C}}$ , nous obtenons que  $\omega$  est une (1,1)-forme réelle. Nous avons le quadruplet  $(M, J, g, \omega)$ .

**Proposition 1.13** (Voisin, 2002, p 64,65) Dans le triplet  $(J, g, \omega)$ , n'importe quelle paire détermine la structure manquante par les formules suivantes :

$$g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$$

$$\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$$

$$J = h^{-1} \circ g$$

Ainsi, nous allons faire référence à notre quadruplet  $(M, J, g, \omega)$  par  $(M, J, g)$  ou  $(M, J, \omega)$ .

**Définition 1.14 (Variété kählérienne)** Une variété kählérienne  $(M, J, g, \omega)$  est une métrique hermitienne telle que nous avons :

1.  $J$  est intégrable.
2.  $\omega$  est une forme symplectique ( $d\omega = 0$ ).

En particulier,  $M$  est une variété complexe.

### 1.2.1 Formes différentielles

**Définition 1.15 (Formes différentielles)** Si  $X$  est une variété lisse, nous avons les faisceaux des  $k$ -formes différentielles réelles et complexes que nous définissons pour tout ouvert  $U$  de la façon suivante :

$$A_{\mathbb{R}}^k(U) := C^\infty \left( U, \bigwedge^k T^*X \right)$$

$$A^k(U) := C^\infty \left( U, \bigwedge^k T^*X \otimes \mathbb{C} \right)$$

La dérivée extérieure nous donne les complexes de De Rham suivants :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow A_{\mathbb{R}}^0 \rightarrow A_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \dots \\ 0 \rightarrow A^0 \rightarrow A^1 \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Dans le cas où  $X$  est complexe et muni d'une structure presque complexe  $J$  intégrable, nous pouvons diagonaliser  $J$  pour obtenir la décomposition  $TX \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$  où  $T^{1,0}X$  et  $T^{0,1}X$  sont les sous-fibrés donnés par les espaces propres de  $J$  :

$$T^{1,0}X = \ker(J - iId) \qquad T^{0,1}X = \ker(J + iId)$$

où  $i$  est la multiplication sur le facteur  $\mathbb{C}$ . Cela induit la décomposition suivante sur les puissances extérieures :

$$\bigwedge^k T^*X \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} T^{*p,q}X$$

où  $T^{*p,q}X := \bigwedge^p(T^{1,0}X)^* \otimes \bigwedge^q(T^{0,1}X)^*$ . De plus, nous avons les faisceaux suivants pour tout ouvert  $U$  de  $X$  :

$$A^{p+q}(U) := C^\infty \left( U, \bigwedge^k T^{*p,q}X \right)$$

Dans ce cas, la dérivée extérieure se brise en deux parties  $d = \partial + \bar{\partial}$  : vérifiant pour toute paire d'entiers  $(p, q)$

$$\begin{aligned} \partial : A^{p,q} \rightarrow A^{p+1,q} & \qquad \bar{\partial} : A^{p,q} \rightarrow A^{p,q+1} \\ \partial^2 = 0 & \qquad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0 & \qquad \bar{\partial}^2 = 0 \end{aligned}$$

Encore dans le cas où  $X$  est une variété complexe, nous pouvons également considérer le faisceau des  $k$ -formes différentielles holomorphes que nous notons  $\Omega^k$ . Dans le cas où  $k = \dim_{\mathbb{C}} X$ , nous le notons  $K_X$  et il s'agit du fibré en droites holomorphe appelé le fibré canonique.

**Définition 1.16 (L'opérateur  $\bar{\partial}_E$ )** Soit  $E$  un fibré en vectoriel holomorphe de rang  $r$  sur une variété complexe de  $X$ . Nous avons le faisceau des  $(p, q)$ -formes à valeur dans  $E$  défini de la façon suivante pour tout ouvert  $U$  de  $X$  :

$$A^{0,q}(E)(U) := C^\infty(U, T^{*0,q}X \otimes E)$$

En trivialisant  $E$  de façon holomorphe sur un ouvert  $U$   $E|_U \simeq U \times \mathbb{C}^r$ , nous pouvons identifier une section  $\omega \in A^{0,q}(U)$  comme application  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)$  où les  $\omega_i$  sont des formes  $C^\infty$  à valeur dans  $\mathbb{C}$ . Nous définissons alors l'opérateur  $\bar{\partial}_E$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_E : A^{0,q}(E)(U) &\rightarrow A^{0,q+1}(E)(U) \\ \bar{\partial}_E \omega &= (\bar{\partial}\omega_1, \dots, \bar{\partial}\omega_r)\end{aligned}$$

Il peut être montré (Voisin, 2002, p 58) que  $\bar{\partial}_E$  est indépendant du choix des trivialisations holomorphes. Il est facile de voir par la description locale que  $\ker \bar{\partial}_E : A^{0,0}(E) \rightarrow A^{0,1}(E)$  est exactement l'espace des sections holomorphes de  $E$  et que  $\bar{\partial}_E^2 = 0$ .

**Lemme 1.17 (Le lemme de Poincaré pour  $d, \bar{\partial}$  et  $\bar{\partial}_E$ )** (Voisin, 2002, p 56,57,59) Soit  $X$  une variété  $C^\infty$  (respectivement complexe). Si  $\omega$  est une forme différentielle sur un ouvert  $U$  de  $X$  qui est  $d$ -fermé (respectivement  $\bar{\partial}$ -fermé), alors  $\omega$  est localement  $d$ -exacte (respectivement  $\bar{\partial}$ -exacte).

Le même résultat reste valable, si nous remplaçons  $\bar{\partial}$  par  $\bar{\partial}_E$  où  $E$  est un fibré vectoriel holomorphe.

## 1.3 Cohomologie

### 1.3.1 Cohomologie et homologie singulière

Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  un anneau commutatif ou un groupe abélien. Nous notons respectivement par  $H_{\text{Sing}}^k(X)$ ,  $H_c^k(X, A)$  et  $H_k(X, A)$  la cohomologie singulière, la cohomologie à support compact et l'homologie singulière de  $X$ . Dans le cas de la cohomologie singulière et de la cohomologie à support compact, nous avons une structure d'anneau gradué dont le produit est donné par le cup-produit (Hatcher, 2002, Chapitre 2, Chapitre 3).

Les résultats importants pour nous sont les suivants :

**Théorème 1.18 (Dualité de Poincaré à support compact)** (Hatcher, 2002, p 250) Si  $X$  est une variété topologique orientable de dimension  $n$  et  $A$  est un corps ou  $A = \mathbb{Z}$ , alors la forme bilinéaire suivante donnée par le cup-produit

$$\cup : H^k(X, A) \times H_c^{n-k}(X, A) \rightarrow H^n(X, A) \simeq A$$

est non dégénérée. Nous avons un isomorphisme modulo les torsions :

$$D_X : H^k(X, A) \simeq (H_c^{n-k}(X, A))^* = \text{hom}_A(H^{n-k}(X, A))$$

Pour le prochain théorème, nous rappelons que nous avons une forme bilinéaire donnée par le cap-produit :

$$\cap : H_p(X, A) \times H^q(X, A) \rightarrow H_{p-q}(X, A)$$

**Théorème 1.19 (Dualité de Poincaré homologie)** (Hatcher, 2002, p 241) Si  $X$  est une variété compacte orientable de dimension  $n$  et  $[X] \in H^n(X, A)$  est sa forme fondamentale, nous avons alors un isomorphisme :

$$D_X : H^k(X, A) \rightarrow H_{n-k}(X, A)$$

$$\delta \mapsto [X] \cap \delta$$

**Théorème 1.20 (La formule de Künneth cohomologie)** (Hatcher, 2002, p 216) Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques, alors nous avons un isomorphisme modulo les torsions données par le cup-produit sur les projections  $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$  et  $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$  :

$$H^*(X, K) \otimes H^*(Y, K) \rightarrow H^*(X \times Y, K)$$

$$\alpha \otimes \beta \mapsto \pi_1^* \alpha \cup \pi_2^* \beta$$

**Théorème 1.21 (Changement de coefficients)** (Hatcher, 2002, p 192) Si  $C_*$  est un complexe de chaînes de groupes abéliens libres dont l'homologie est notée  $H_k(C_*)$  et  $G$  un groupe abélien, alors les groupes de cohomologies  $H^k(C_*, G)$ , définis comme étant la cohomologie du complexe  $H^k(\text{hom}(C_*, G))$ , vérifient la suite exacte courte pour tout entier  $k$ .

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{k-1}(C_*), G) \rightarrow H^k(C_*, G) \rightarrow \text{hom}(H_k(C_*), G) \rightarrow 0$$

De plus, cette suite exacte courte est scindée.

### 1.3.2 Faisceaux

**Définition 1.22 (Foncteurs dérivés)** (Weibel, 1994, Chapitre 2) Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , deux catégories abéliennes et  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur additif.

1. Si  $\mathcal{A}$  possède assez d'objets injectifs et  $\mathcal{F}$  est exacte à droite nous obtenons les foncteurs dérivés à droite pour  $i \geq 0$  :

$$R^i \mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

En fixant une résolution injective pour chaque objet  $A \in \mathcal{A}$  :

$$0 \rightarrow A \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow I^2 \rightarrow \dots$$

nous pouvons définir  $R^i \mathcal{F} A$  comme étant la cohomologie du complexe suivant :

$$0 \rightarrow \mathcal{F}I^0 \rightarrow \mathcal{F}I^1 \rightarrow \mathcal{F}I^2 \rightarrow \dots$$

Vérifiant  $R^0 \mathcal{F} \simeq \mathcal{F}$  et la propriété d'exactitude suivante : Pour toute suite exacte courte dans  $\mathcal{A}$

$$0 \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

nous avons la suite exacte longue :

$$0 \rightarrow \mathcal{F}A \rightarrow \mathcal{F}A' \rightarrow \mathcal{F}A'' \rightarrow R^1 \mathcal{F}A \rightarrow R^1 \mathcal{F}A' \rightarrow R^1 \mathcal{F}A'' \rightarrow \dots$$

2. Si  $\mathcal{A}$  possède assez d'objets projectifs et  $\mathcal{F}$  est exacte à droite, nous obtenons les foncteurs dérivés à gauche pour  $i \geq 0$  :

$$L_i \mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

En fixant une résolution projective pour chaque objet  $A \in \mathcal{A}$  :

$$\dots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

Nous pouvons définir  $L_i \mathcal{F} A$  comme étant l'homologie du complexe suivant :

$$\dots \rightarrow \mathcal{F}P_2 \rightarrow \mathcal{F}P_1 \rightarrow \mathcal{F}P_0 \rightarrow 0$$

Vérifiant  $L_0 \mathcal{F} \simeq \mathcal{F}$  et la propriété d'exactitude suivante : Pour toute suite exacte courte dans  $\mathcal{A}$

$$0 \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

nous avons la suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow L_1 \mathcal{F}A \rightarrow L_1 \mathcal{F}A' \rightarrow L_1 \mathcal{F}A'' \rightarrow \mathcal{F}A \rightarrow \mathcal{F}A' \rightarrow \mathcal{F}A'' \rightarrow 0$$

**Définition 1.23 (Objets acycliques)** Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux catégories abéliennes dont  $\mathcal{A}$  possède suffisamment d'objets injectifs respectivement projectifs et  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un foncteur additif qui est exact à gauche respectivement à droite. Nous disons qu'un objet  $A \in \mathcal{A}$  est  $\mathcal{F}$ -acyclique si nous avons respectivement pour tout  $i > 0$  :

$$R^i \mathcal{F}A = 0 \qquad L_i \mathcal{F}A = 0$$

Le résultat principal est alors que la (co)homologie se calcule à l'aide de résolutions acycliques.

**Théorème 1.24** (Voisin, 2002, p 102) Soient  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  comme dans la définition précédente. Si  $A \in \mathcal{A}$  et  $0 \rightarrow A \rightarrow M^* \rightarrow A \rightarrow 0$ , alors nous avons pour tout  $i \geq 0$   $R^i \mathcal{F}A$  respectivement  $L_i \mathcal{F}A$  est isomorphe à la cohomologie du complexe  $\mathcal{F}M^*$  respectivement l'homologie du complexe  $\mathcal{F}M_*$ .

Nous sommes principalement intéressés par les catégories abéliennes venant d'une catégorie de faisceaux :

1. La catégorie des faisceaux de groupes abéliens
2. La catégorie des modules  $C^\infty(\cdot, K)$  où  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$  et  $X$  une variété  $C^\infty$
3. La catégorie des modules  $C^0(\cdot, K)$  où  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$  et  $X$  une variété topologique
4. La catégorie des modules  $\mathcal{O}_X$  sur une variété complexe  $X$
5. La catégorie des faisceaux quasi-cohérents  $QCoh(X)$  sur une variété complexe  $X$
6. La catégorie des faisceaux cohérents  $Coh(X)$  sur une variété complexe  $X$

Dans toutes les catégories précédentes, nous avons un foncteur section globale  $\Gamma$  qui est exact à gauche et qui prend des valeurs dans une catégorie abélienne : des groupes abéliens, des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriel ou des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels dépendamment du contexte. Le théorème suivant nous dit que la cohomologie peut être calculée dans n'importe quelle des catégories 1 à 4 et le résultat dû à Godement nous dit que le résultat est indépendant de la catégorie choisie.

**Théorème 1.25 (Résolutions flasques et Godement)** (Voisin, 2002, p 103-104) Soit  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$  où  $\mathcal{C}$  est une des catégories de faisceaux 1 à 4. Nous disons que  $\mathcal{F}$  est flasque si les restrictions sont surjectives. Le résultat important est que n'importe quel faisceau flasque est  $\Gamma$ -acyclique. De, plus chaque faisceau  $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$  admet

une résolution flasque appelée la résolution de Godement qui est valide dans n'importe quelle des catégories 1 à 4.

Clairement, la condition d'être flasque est indépendante du choix de la catégorie dans laquelle nous travaillons. Conséquemment, la cohomologie des faisceaux peut être calculée dans n'importe quelle des catégories 1 à 4. Pour cette raison, nous utiliserons la notation  $H^k(X, \mathcal{F})$  pour la cohomologie des faisceaux que nous définissons comme le  $k$ -ième foncteur dérivé du foncteur section global  $\Gamma$  appliqué au faisceau  $\mathcal{F}$ .

Sur une variété  $C^\infty$  nous avons également des classes de faisceaux fins qui sont  $\Gamma$ -acycliques. L'exemple le plus important pour nous est le suivant :

**Proposition 1.26** (Voisin, 2002, p 104-105) Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau  $C^\infty$ , alors  $\mathcal{F}$  est fin. En particulier, nous avons que  $\mathcal{F}$  est  $\Gamma$ -acyclique.

**Définition 1.27 (Cohomologie de De Rham et Dolbeault)** Soit  $X$  une variété complexe, alors la cohomologie de De Rham complexe et réelle est définie de la façon suivante :

$$H_{DR}^k(X, \mathbb{R}) = \frac{\ker d : A_{\mathbb{R}}^k \rightarrow A_{\mathbb{R}}^{k+1}}{\text{Im } d : A_{\mathbb{R}}^{k-1} \rightarrow A_{\mathbb{R}}^k}$$

$$H_{DR}^k(X, \mathbb{C}) = \frac{\ker d : A^k \rightarrow A^{k+1}}{\text{Im } d : A^{k-1} \rightarrow A^k}$$

Nous avons également la cohomologie de Dolbeault qui peut être définie de façon analogue en utilisant l'opérateur  $\bar{\partial}_E$  :

$$H^{0,q}(X, E) := \frac{\ker \bar{\partial}_E : A^{0,q}(E) \rightarrow A^{0,q+1}(E)}{\text{Im } \bar{\partial}_E : A^{0,q-1}(E) \rightarrow A^{0,q}(E)}$$

Les lemmes de Poincaré 1.17 peuvent être reformulés en termes de résolutions de faisceaux.

**Théorème 1.28 (Dolbeault et De Rham)** *Pour une variété différentielle  $X$ , nous avons les résolutions acycliques suivantes de faisceaux pour tout  $p \geq 0$  :*

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{R}} \rightarrow A_{\mathbb{R}}^0 \xrightarrow{d} A_{\mathbb{R}}^1 \xrightarrow{d} \dots$$

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{C}} \rightarrow A^0 \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} \dots$$

*De plus, si  $X$  est une variété complexe, nous avons les résolutions acycliques :*

$$0 \rightarrow \Omega^p \rightarrow A^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(E) \rightarrow A^{0,0}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}} A^{0,1}(E) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots$$

*Conséquemment, nous avons pour tout  $k \geq 0$  et tout  $p, q \geq 0$  :*

$$H^k(X, \underline{\mathbb{R}}) \simeq H_{DR}^k(X, \mathbb{R}) \quad H^k(X, \underline{\mathbb{C}}) \simeq H_{DR}^k(X, \mathbb{C}) \quad H^q(X, \mathcal{O}_X(E)) \simeq H^{0,q}(X, E)$$

*Ces résultats sont connus sous le nom du théorème de De Rham et de Dolbeault.*

Les résultats qui suivent sont des conséquences de la théorie des formes harmoniques sur une variété compacte qui est présentée dans (Voisin, 2002, Section III, Chapitre 5).

**Théorème 1.29 (Représentants harmoniques)** *(Voisin, 2002, p 129,130) Si  $X$  est une variété orientable  $C^\infty$  munie d'une métrique riemannienne, il est possible de définir un adjoint à la dérivée extérieure  $d$  que nous noterons par  $d^*$ . Nous avons ainsi le laplacien agissant sur les  $k$ -formes :*

$$\Delta_d = dd^* + d^*d$$

*Nous avons alors les formes harmoniques :*

$$\mathcal{H}_{\Delta_d}^k = \ker \Delta_d$$

*De telles formes sont fermées. De plus, dans le cas où  $X$  est compacte, l'application  $\mathcal{H}_{\Delta_d}^k \rightarrow H_{DR}^k(X, \mathbb{R})$  qui associe une forme harmonique à sa classe de cohomologie est un isomorphisme.*

*De façon similaire, dans le cas où  $X$  est une variété complexe munie d'une métrique hermitienne et  $E$  un fibré vectoriel holomorphe muni également d'une métrique hermitienne, nous obtenons les laplaciens :*

$$\Delta_d$$

$$\Delta_{\partial}$$

$$\Delta_{\bar{\partial}}$$

$$\Delta_{\bar{\partial}_E}$$

Ce qui nous permet de définir les formes harmoniques comme le noyau de ces opérateurs respectifs :

$$\mathcal{H}^k(X) \quad \mathcal{H}_{\Delta_{\partial}}^k \quad \mathcal{H}_{\Delta_{\bar{\partial}}}^k \quad \mathcal{H}^{0,k}(E)$$

De plus, si  $X$  est compacte, nous avons que les morphismes qui associent une forme harmonique à sa classe de cohomologie respective sont des isomorphismes pour tout  $k$  et  $q$  :

$$\mathcal{H}^k(X) \simeq H_{DR}^k(X, \mathbb{C}) \quad \mathcal{H}^{0,q}(E) \simeq H^{0,q}(X, E)$$

Le théorème qui suit est une conséquence du fait que les laplaciens sont des opérateurs elliptiques et que tout opérateur elliptique sur une variété compacte est Fredholm (noyau et conoyau de dimension fini).

**Théorème 1.30 (Annulation et finitude de la cohomologie)** (Voisin, 2002, p 130) Soit  $X$  une variété compacte de dimension  $n$ , alors nous avons pour tout fibré holomorphe  $E$  :

1.  $H^k(X, \mathcal{O}_X(E)) = 0, \forall k > n$
2.  $H^k(X, \mathcal{O}_X(E))$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie

Ce qui rend la situation particulière dans le cas kählérien est ce théorème de comparaison des laplaciens.

**Théorème 1.31 (Comparaison des laplaciens)** (Voisin, 2002, p 137) Soit  $X$  une variété kählérienne, alors nous avons l'égalité suivante pour les laplaciens :

$$\frac{1}{2} \Delta_d = \Delta_{\partial} = \Delta_{\bar{\partial}}$$

**Théorème 1.32 (Décomposition de Hodge)** (Voisin, 2002, p 137) Soit  $X$  une variété compacte kählérienne, alors nous avons la décomposition suivante pour tout  $k$  :

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^q(X, \Omega^p)$$

où  $H^{p,q}(X)$  est le sous-espace vectoriel de  $H^k(X, \mathbb{C})$  dont les classes de cohomologies sont représentables par des classes de type  $(p, q)$ . De plus, nous avons un isomorphisme indépendant du choix de métrique kählérienne :

$$H^{p,q}(X) \simeq \mathcal{H}^{p,q} \simeq H^{0,q}(X, \mathcal{O}(\Omega^p)) \simeq H^q(X, \Omega^p)$$

où  $\mathcal{H}^{p,q}$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}^k(X)$  donné par des formes harmoniques de type  $(p, q)$ . Cette décomposition vérifie également la symétrie de Hodge  $\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X)$ .

**Théorème 1.33 (Comparaison avec la cohomologie singulière)** (Voisin, 2002, p 109) Si  $X$  est un espace localement contractible, alors nous avons un isomorphisme pour tout  $q$

$$H_{\text{sing}}^q(X, \mathbb{Z}) \simeq H^q(X, \mathbb{Z})$$

**Définition 1.34 (La suite exacte exponentielle et la première classe de Chern)** Soit  $X$  une variété topologique, alors nous avons la suite exacte courte de faisceaux de groupe abélien :

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}} \rightarrow C_{\mathbb{C}}^0 \xrightarrow{\text{exp}} C_{\mathbb{C}^*}^0 \rightarrow 0$$

où  $C_{\mathbb{C}}^0$  et  $C_{\mathbb{C}^*}^0$  sont les faisceaux des fonctions continues à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{C}^*$  respectivement. Il peut être montré que  $H^1(X, C_{\mathbb{C}^*}^0)$  (Voisin, 2002, p 276) représente le groupe des fibrés complexes topologiques de rang 1 jusqu'à isomorphisme et la structure de groupe abélien est donnée par le produit tensoriel de fibré en droit vectoriel. Dans ce cas, nous définissons la première classe de Chern comme étant le morphisme de connexion :

$$c_1 : H^1(X, C_{\mathbb{C}^*}^0) \rightarrow H^2(X, \underline{\mathbb{Z}})$$

par la suite exacte longue en cohomologie.

Nous donnons rapidement une définition axiomatique des classes de Chern.

**Définition 1.35 (Classes de Chern)** (Voisin, 2002, p 276) Soit  $E$  un fibré vectoriel complexe sur une variété topologique  $X$ , nous avons un unique polynôme de Chern

$$c(E) \in H^*(X, \mathbb{Z})[t]$$

vérifiant la liste d'axiomes suivants :

1. Si  $E$  est de rang 1, alors nous avons  $c(E) = 1 + c_1(E)t$  où  $c_1$  est définie par la définition précédente.
2. Si  $f : Y \rightarrow X$  est une application continue, alors nous avons :

$$c(f^*E) = f^*c(E)$$

3. Si  $E = F \oplus G$  où  $F$  et  $G$  sont des fibrés vectoriels complexes :

$$c(E) = c(F)c(G)$$

vus comme des éléments de  $H^*(X, \mathbb{Z})[t]$

Nous définissons les classes de Chern de  $E$  comme étant les coefficients du polynôme de Chern :

$$c(E) = 1 + \sum_{i=1}^m c_i(E)t^i$$

Si nous travaillons sur une variété complexe et  $E$  est un fibré holomorphe, il est également possible de déterminer les classes de Chern en regardant la courbure d'une connexion de Chern avec la théorie de De Rham (Bott et Tu, 1982, Chapitre IV). De plus, si  $X$  est Kähler compacte, la classe de Chern  $c_r(E)$  est un élément de  $H^{r,r}(X)$  dans la décomposition de Hodge (Voisin, 2002, p 279).

**Définition 1.36 (Cup-produit cohomologie des faisceaux)** (Voisin, 2002, p 130-133) Soient  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  deux faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique  $X$ . Nous avons un cup-produit pour tout  $p, q$  :

$$\cup : H^p(X, \mathcal{F}) \otimes H^q(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$$

**Théorème 1.37 (Dualité de Serre)** (Voisin, 2002, p 135-136) Soit  $X$  une variété compacte complexe de dimension complexe  $n$ . Nous avons un isomorphisme

$$\text{Trace} : H^n(X, K_X) \simeq \mathbb{C}$$

tel que la composition de cet isomorphisme avec le cup-produit induit une forme bilinéaire non dégénérée pour tout fibré vectoriel holomorphe  $E$  et pour tout entier  $k$  :

$$\cup : H^k(X, \mathcal{O}_X(E)) \otimes H^{n-k}(X, \mathcal{O}_X(E^*) \otimes K_X) \rightarrow H^n(X, K_X) \simeq \mathbb{C}$$

De plus, cette forme bilinéaire admet une représentation dans la cohomologie de Dolbeault donnée de la façon suivante pour  $\alpha \in A^{0,k}(E)$  et  $\beta \in A^{0,n-k}(E \otimes K_X)$  :

$$\alpha \otimes \beta \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta$$

où  $\alpha \wedge \beta \in A^{0,n}(K_X)$  est obtenue par contraction.

## 1.4 Théorie des surfaces compactes

Nous allons avoir besoin d'un certain nombre de résultats concernant la théorie des surfaces compactes kählériennes.

**Théorème 1.38 (Critère de projectivité de Kodaira)** (Kodaira, 1964) Soit  $S$  une surface compacte complexe admettant un fibré en droites holomorphe  $L \in \text{Pic}(S)$  vérifiant  $c_1(L)^2 > 0$ , alors  $S$  est projective.

Le théorème suivant s'applique pour les variétés projectives de dimension plus grande, mais nous spécialisons le résultat au cas des surfaces projectives.

**Théorème 1.39 (Nakai-Moishezon)** (Peter, 1995, p 77) Soit  $S$  une surface projective lisse. Un diviseur  $D$  est ample si et seulement si nous avons les conditions suivantes :

1.  $(D, D) > 0$
2. Pour toutes courbes  $C \subset S$  irréductibles, nous avons  $(D, C) > 0$

**Théorème 1.40 (Théorème de contraction de Castelnuovo)** (Peter, 1995, p 50) Soit  $S$  une surface projective lisse. Si  $C$  est une courbe  $(-1)$ , c'est-à-dire une courbe rationnelle telle que  $(C, C) = -1$ , alors il existe une surface projective  $S'$  et un point  $p \in S'$  tel que  $S$  est isomorphe à l'éclatement de  $p$  sur  $S'$  et le diviseur exceptionnel correspond à  $C$ .

Nous allons également avoir besoin du résultat suivant de classification de Enriques-Kodaira sur les surfaces compactes.

**Théorème 1.41 (Surface avec un fibré canonique trivial)** (Barth et al., 2004, p 244) Soit  $S$  une surface complexe compacte dont le fibré canonique  $K_S \simeq \mathcal{O}_S$ , alors nous avons deux cas possibles :

1.  $S$  est un tore complexe de dimension 2.
2.  $S$  est une surface K3.

**Théorème 1.42 (Formule de Noether et Riemann-Roch pour les surfaces)** (Barth et al., 2004, p 26) Soit  $S$  une surface kählérienne compacte. Nous avons la formule suivante pour la caractéristique d'Euler holomorphe :

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{c_1(S)^2 + c_2(S)}{12}$$

Si  $L$  est un fibré en droites holomorphe, la formule de Riemann-Roch pour les surfaces nous donne :

$$\chi(\mathcal{O}_S(L)) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{c_1(\mathcal{O}_S(L))^2 - (c_1(L), c_1(K_S))}{2}$$

**Théorème 1.43 (Théorème d'indice de Thom-Hirzebruch)** (Barth et al., 2004, p 22) Soit  $X$  une variété  $C^\infty$  compacte orientable de dimension 4. Nous avons la formule suivante pour calculer la signature de la forme d'intersection sur  $H^2(X, \mathbb{Z})$  :

$$\frac{c_1^2(X) - 2c_2(X)}{3}$$

## 1.5 Structures de Hodge

Les résultats de cette sections sont tirés de (Voisin, 2002, Partie II, Chapitre 7)

**Définition 1.44 (Structures de Hodge)** Une structure de Hodge (intégrale) de poids  $d$  sur  $\mathbb{Z}$  est un module libre  $H_{\mathbb{Z}}$  de type fini avec la décomposition suivante :

$$H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=d} H^{p,q}$$

Ici  $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$  est muni de la conjugaison usuelle sur le facteur  $\mathbb{C}$  qui satisfait pour tout  $p + q = d$  la symétrie dite de Hodge :

$$H^{q,p} = \overline{H^{p,q}}$$

Il sera utile lorsque nous parlerons de variations de structures de Hodge dans le chapitre 5 d'introduire la filtration décroissante suivante dite de Hodge :

$$F^p H_{\mathbb{C}} := \bigoplus_{k \geq p} H^{k, d-k}$$

La symétrie de Hodge implique directement pour tout  $p$  et  $k$  entiers :

$$H_{\mathbb{C}} = F^p H_{\mathbb{C}} \oplus \overline{F^{k-p+1} H_{\mathbb{C}}}$$

$$H^{p,q} = F^p H_{\mathbb{C}} \cap \overline{F^q H_{\mathbb{C}}}$$

Évidemment, n'importe quelle filtration décroissante de  $H_{\mathbb{C}}$  vérifiant les symétries précédentes détermine une structure de Hodge de poids  $d$  de façon évidente.

Nous avons également la notion de morphismes de Hodge entre structures de poids différents (Voisin, 2002, p 174).

**Définition 1.45 (Morphisme de structure de Hodge et isométrie de Hodge)** Soient  $H = (H_{\mathbb{Z}}, (H^{p,q})_{p+q=d})$  et  $H' = (H'_{\mathbb{Z}}, (H'^{p,q})_{d'})$  des structures de Hodge de poids  $d$  et  $d'$  respectivement. Si  $d' = d + 2r$  pour  $r \in \mathbb{Z}$  et si nous avons un morphisme  $\mathbb{Z}$ -linéaire :

$$\phi : H_{\mathbb{Z}} \rightarrow H'_{\mathbb{Z}}$$

dont l'extension  $\mathbb{C}$ -linéaire vérifie pour tout  $p, q = d$  l'égalité :

$$\phi(H^{p,q}) \subset H'^{p+r, q+r}$$

On dit que  $\phi$  est un morphisme de Hodge noté par  $\phi : H \rightarrow H'$ . De plus, si nous avons que  $H_{\mathbb{Z}}$  et  $H'_{\mathbb{Z}}$  sont munis d'une forme quadratique et que  $\phi : H_{\mathbb{Z}} \rightarrow H'_{\mathbb{Z}}$  est une isométrie, nous disons que  $\phi$  est une isométrie de Hodge.

Si  $X$  est une variété compacte Kähler, alors la décomposition de Hodge sur le  $k$ -ième groupe de cohomologie induit une structure de Hodge.

**Lemme 1.46** (Voisin, 2002, p 177) Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application holomorphe entre deux variétés kähleriennes compactes. Si  $k \geq 0$ , alors nous avons un morphisme de structure de Hodge de poids  $k$  donné par :

$$f^* : H^k(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(X, \mathbb{Z})$$

**Lemme 1.47** (Voisin, 2002, p 177) Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés compactes kählériennes avec un morphisme holomorphe  $f : X \rightarrow Y$  qui soit surjectif, alors pour tout entier  $k$  nous avons que  $f^* : H^k(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^k(X, \mathbb{Q})$  est injectif.

**Définition 1.48 (Le morphisme de Gysin)** (Voisin, 2002, p 178) Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre deux variétés compactes, orientables et de dimension réelle  $n$  et  $m$  respectivement avec  $n = m + r$ . Si  $n \geq k \geq 0$ , alors la dualité de Poincaré nous donne un isomorphisme modulo la torsion entre

$$D_X : H^{k+r}(X, A) \rightarrow H^{n-k}(X, A)^* := \text{Hom}_A(H^{n-k}(X, A), A)$$

$$D_Y : H^k(Y, A) \rightarrow H^{m-k}(Y, A)^*$$

Ici,  $A$  est un anneau commutatif usuellement  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Nous pouvons considérer le morphisme induit sur la cohomologie :

$$f^* : H^{n-k}(Y, A) \rightarrow H^{n-k}(X, A)$$

En dualisant ce morphisme et en composant avec l'isomorphisme de Poincaré nous obtenons le morphisme de Gysin  $f_* : H^{k+r}(X, A) \rightarrow H^k(Y, A)$  :

$$f_* = D_Y^{-1} \circ (f^*)^* \circ D_X$$

Explicitement, ce morphisme est déterminé par la formule de projection suivante pour tout  $\beta \in H^{m-k}(Y, A)$  et  $\omega \in H^{k+r}(X, A)$  :

$$(\beta, f_*\omega)_Y = (f^*\beta, \omega)_X$$

Ici,  $(\cdot, \cdot)_X$  et  $(\cdot, \cdot)_Y$  sont la forme d'intersection sur  $X$  et  $Y$  respectivement. Dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont toutes les deux Kähler compactes, nous avons que  $f_*$  est un morphisme de Hodge.

**Théorème 1.49 (Structure de Hodge sur l'éclatement d'un point sur une surface)** (Voisin, 2002, p 180) Soient  $S$  une surface compacte kählérienne et  $p \in S$  un point. Notons par  $\beta : \tilde{S} \rightarrow S$  l'éclatement du point  $p$  sur  $S$ . Nous avons alors des isomorphismes de structures de Hodge :

$$H^2(S, \mathbb{Z}) \oplus c_1(E) \rightarrow H^2(\tilde{S}, \mathbb{Z})$$

$$H^k(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(\tilde{S}, \mathbb{Z}) \text{ pour } k \neq 2$$

où  $E$  est la courbe exceptionnelle de  $p$  et  $c_1(E)$  est la première classe de Chern de  $E$  que l'on voit comme une structure de Hodge de poids 2 concentrée en degré  $(1, 1)$ .

## CHAPITRE 2

### LES SURFACES K3 KÄHLÉRIENNES

Dans ce chapitre, nous étudions la cohomologie et les classes divisoriales d'une surface K3.

Les énoncés de cette section correspondent pour la plus part avec ceux donnés dans (Looijenga et Peters, 1980, Section 1).

#### 2.1 Invariants topologiques et nombres de Hodge

**Définition 2.1** Une surface kählérienne lisse  $(S, \omega_K)$ , où  $\omega_K$  est une forme de Kähler, est dite une surface K3 si elle vérifie les propriétés suivantes :

1.  $S$  est une surface régulière i.e  $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ .
2.  $K_S$  est trivial.

Nous ne nous servons pas de ce fait, mais il est possible de montrer que n'importe quelle surface compacte qui vérifie les propriétés 1 et 2 est automatiquement kählérienne (Siu, 1983).

L'un des exemples les plus simples de surfaces K3 sont donnés par les hypersurfaces de degré 4 dans  $\mathbb{CP}^3$ .

**Lemme 2.2** Soit  $S$  une hypersurface lisse de  $\mathbb{CP}^3$  de degré 4, alors  $S$  est une surface K3. En particulier, la quartique de Fermat est une surface K3 :

$$X^4 + Y^4 + Z^4 + W^4 = 0$$

*Preuve.* Nous avons que  $S$  est donnée par une section non triviale de  $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^3}(4)$ . Notons par  $i : S \rightarrow \mathbb{CP}^3$  l'inclusion, alors la formule d'adjunction nous donne :

$$K_S = i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^3}(4) \otimes K_{\mathbb{CP}^3}) = i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^3})$$

ce qui montre que  $K_S \simeq \mathcal{O}_S$ . En utilisant le fait que  $I_S \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^3}(-4)$ , nous avons la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^3}(-4) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^3} \rightarrow i_*\mathcal{O}_S \rightarrow 0$$

En prenant la caractéristique d'Euler, nous obtenons que  $\chi(\mathcal{O}_S) = \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^3}(-4)) + \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^3}) = 2$ . En utilisant le fait que  $K_S$  est trivial avec dualité de Serre, nous obtenons que  $h^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ . Ce qui montre bien que  $S$  est une surface K3.  $\square$

Nous allons commencer par calculer les nombres de Hodge pour une surface K3 en utilisant des techniques cohomologiques standards pour les surfaces.

**Proposition 2.3 (Nombres de Hodge d'une surface K3)** Soit  $(S, \omega_K)$  une surface K3, alors la caractéristique d'Euler de  $S$  est de 24 et les nombres de Hodge sont :

$$h^{1,0} = 0 \qquad h^{2,0} = 1 \qquad h^{1,1} = 20$$

De plus, nous avons  $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$ .

*Preuve.* Pour la caractéristique d'Euler, nous commençons par calculer la caractéristique d'Euler holomorphe en utilisant la dualité de Serre :

$$h^2(\mathcal{O}_S) = h^0(K_S^*) = h^0(\mathcal{O}_S)$$

Ainsi, nous avons :

$$\chi(\mathcal{O}_S) = h^0(\mathcal{O}_S) + h^1(\mathcal{O}_S) + h^2(\mathcal{O}_S) = 1 + 0 + 1 = 2$$

En combinant cela avec le fait que  $K_S$  est trivial, nous obtenons que la formule de Noether devient :

$$2 = \frac{0 + \chi(S)}{12}$$

ce qui nous donne que la caractéristique d'Euler de  $S$  est bien 24.

Pour le reste, nous utilisons la suite exacte exponentielle couplée avec le fait que notre surface est compacte et régulière, ce qui nous donne la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow H^1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$$

Ceci nous donne que  $H^1(S, \mathbb{Z})$  est trivial, ce qui nous donne directement en appliquant la décomposition de Hodge que  $h^{(1,0)} = h^{(0,1)} = 0$ . En utilisant les symétries de Hodge, nous pouvons observer que la caractéristique d'Euler s'écrit de la façon suivante :

$$\chi(S) = 2 + 2h^1 + h^2 = 2 + 0 + h^2 = 24$$

Ainsi, nous avons  $h^2 = 22$ . En utilisant la décomposition de Hodge, nous trouvons :

$$h^2 = 2h^{2,0} + h^{1,1}$$

Puisque  $K_S$  est trivial, nous avons  $H^0(S, K_S) = \mathbb{C}$ , ce qui nous donne selon l'isomorphisme de Dolbeault que  $h^{2,0} = 1$ . Ceci nous permet de conclure que  $h^{1,1} = 20$ .  $\square$

**Proposition 2.4** Pour une surface K3  $(S, \omega_K)$ , le deuxième groupe de cohomologie est sans torsion ; ainsi nous avons que  $H^2(S, \mathbb{Z})$  est un  $\mathbb{Z}$ -module libre isomorphe à  $\mathbb{Z}^{22}$ .

*Preuve.* Nous savons par la proposition précédente que  $b = 22$ . Ainsi, il nous suffit de montrer que  $H^2(S, \mathbb{Z})$  est sans torsion. Pour ce faire, nous pouvons utiliser la dualité de Poincaré pour obtenir :

$$H^2(S, \mathbb{Z}) \simeq H_2(S, \mathbb{Z})$$

Nous allons maintenant montrer que  $\text{Ext}^1(H^1(S, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0$ , ce qui équivaut à dire que  $H_1$  est sans torsion. Dans le cas où  $H_1$  admet un élément de  $n$ -torsion, nous avons un revêtement  $X$  de degré  $n$  (Barth et al., 2004, p 55). Or, ce revêtement est encore une surface K3. Par la proposition précédente, nous avons que  $\chi(X) = \chi(S) = 24$ , ce qui nous donne  $n = 1$ . Donc  $H_1$  est sans torsion.

En utilisant le théorème de changement de coefficient universel avec le fait que  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H^1(S, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0$ , nous obtenons :

$$H^2(S, \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(S, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

Ainsi, nous obtenons que  $H_2(S, \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(S, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$  ce qui n'est possible que dans le cas où  $H_2$  est sans torsion.  $\square$

**Proposition 2.5** Soit  $(S, \omega_K)$  une surface compacte kählérienne avec un fibré canonique trivial, alors il existe une 2-forme holomorphe  $\omega \in H^0(S, K_S)$  qui n'admet aucun zéro et vérifie les relations suivantes :

$$\omega \cdot \omega = 0 \qquad \omega \cdot \bar{\omega} > 0$$

En particulier,  $\omega \cdot \bar{\omega}$  est un nombre réel. De plus, la forme  $\omega$  est unique jusqu'à multiplication par un élément de  $\mathbb{C}^*$  près.

*Preuve.* Puisque  $K_S \simeq \mathcal{O}_S$  et comme  $S$  est une variété compacte, nous avons que  $H^0(S, K_S) \simeq \mathbb{C}$  et les sections non nulles n'admettent pas de zéros. Prenons  $\omega \in H^0(S, K_S)$  telle qu'elle soit non nulle. Comme  $H^0(S, K_S)$  est un espace vectoriel de dimension 1, il est clair que toutes les sections non nulles sont un multiple de  $\omega$ .

La propriété  $\omega \cdot \omega = 0$  découle directement du fait que nous travaillons sur une surface. Pour  $\omega \cdot \bar{\omega} > 0$ , il suffit de montrer par définition que l'intégrale suivante est positive.

$$\omega \cdot \bar{\omega} = \int_S \omega \wedge \bar{\omega}$$

Pour ce faire, considérons des coordonnées locales  $z_1, z_2$ . Alors localement nous avons :

$$\omega = f dz_1 \wedge dz_2 \qquad \bar{\omega} = \bar{f} d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2$$

Ce qui nous donne :

$$\omega \wedge \bar{\omega} = |f|^2 \wedge dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2$$

Ce qui nous fait bien une forme réelle. De plus, comme notre section  $\omega$  n'est pas identiquement nulle, nous avons que  $|f|^2 > 0$ , ce qui montre bien que  $\omega \cdot \bar{\omega} > 0$ .  $\square$

**Corollaire 2.6** Si  $\omega \in H^0(S, \Omega^2)$  est une 2-forme holomorphe qui s'annule nulle part, alors nous avons l'isomorphisme de fibré vectoriel holomorphe suivant :

$$\begin{aligned} TS &\rightarrow \Omega_S \\ X &\mapsto i_X \omega \end{aligned}$$

Conséquemment, nous avons une application bilinéaire non dégénérée sur la cohomologie pour tout entier positif  $k$  :

$$int : H^k(S, TS) \otimes H^0(S, \Omega_S^2) \rightarrow H^k(S, \Omega_S)$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la forme quadratique sur  $H^2(S, \mathbb{Z})$  donnée par le produit d'intersection. En particulier, nous aurons besoin du résultat sur les formes quadratiques que nous citons ci-dessous. Nous rappelons qu'une forme quadratique  $q$  est dite paire si  $q(x)$  est pair pour tout  $x$ . Sinon elle sera dite impaire.

**Théorème 2.7 (Classification des formes quadratiques indéfinies)** (Serre, 1973, p 54) Deux formes quadratiques  $E, E'$  indéfinies sont isomorphes si et seulement si elles sont de même type (paire ou impaire), ont le même rang et ont la même signature.

**Proposition 2.8 (Caractérisation de la forme quadratique sur  $H^2$ )** Pour une surface K3  $(S, \omega_K)$ , la forme quadratique sur  $H^2(S, \mathbb{Z})$  donnée par la forme d'intersection est isomorphe à la forme quadratique donnée par :

$$L = -E_8 \oplus -E_8 \oplus H \oplus H \oplus H$$

Ici,  $H$  est la forme quadratique sur  $\mathbb{Z}^2$  associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Preuve.* Selon le théorème de classification des formes quadratiques indéfinies, il suffit de montrer que  $H^2(S, \mathbb{Z})$  avec la forme d'intersection est bien une forme quadratique indéfinie, de signature  $(3, 19)$  et de type paire.

Nous pouvons calculer la signature en utilisant le théorème d'indice d'Hirzebruch. Il nous dit que l'indice est donné par :

$$\frac{1}{3} (c_1(S)^2 - 2c_2(S)) = -\frac{48}{3} = -16$$

ce qui nous donne que la signature est  $(3, 19)$  et que notre quadratique est bien indéfinie.

Par la formule de Wu (Milnor et Stasheff, 2016), nous avons pour tout  $\alpha \in H^2(S, \mathbb{Z})$

$$\alpha \cdot \alpha \equiv \alpha \cdot c_1(X) \equiv 0 \text{ Mod } 2$$

ce qui montre bien que la forme quadratique sur  $H^2$  est isométrique à  $L$ .  $\square$

Nous avons une caractérisation des surfaces K3 en terme des nombres de Hodge.

**Proposition 2.9** Soit  $S$  une surface compacte kählérienne. Si  $S$  possède les nombres de Hodge d'une surface K3, alors  $S$  est une surface K3.

*Preuve.* Nous allons montrer que, sous ces hypothèses,  $S$  est une surface K3. En utilisant l'isomorphisme de Dolbeault, nous obtenons :

$$H^1(S, \mathcal{O}_S) \simeq H^{0,1}(S) = 0$$

Ainsi,  $S$  est régulière. Il nous reste à montrer que  $K_S$  est trivial. En utilisant la formule de Noether, nous avons :

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{(K_S)^2 + 24}{12}$$

Sous ces hypothèses et en utilisant le théorème de Dolbeault, nous tombons sur  $\chi(\mathcal{O}_S) = 2$ , ce qui nous donne que  $c_1(K_{X_2})^2 = 0$ . Nous avons que  $c_1(K_S)$  est de 2-torsion dans  $H^2$ . Selon le théorème de changement de coefficients universel, nous avons la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(H_1(S), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(S), \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

Ainsi, les torsions de  $H_1$  contrôlent les torsions de  $H^2$ . Si  $H_1$  admet un élément de 2-torsion, alors il existe un revêtement étale  $\pi : Y \rightarrow S$  de degré 2. Puisque ce revêtement est étale et fini, nous avons que  $K_Y = \pi^* K_X$  et  $\chi(Y) = 2\chi(S)$ . Ainsi, la formule de Noether nous donne :

$$\chi(\mathcal{O}_Y) = 4$$

En utilisant l'isomorphisme de Dolbeault, nous avons :

$$\chi(\mathcal{O}_Y) = 1 - h^{1,0} + h^{2,0}$$

Puisque  $K_Y = \pi^* K_S$ , nous avons que  $h^{2,0} = 1$ . Ainsi, nous avons que  $2 - h^{1,0} = 4$ , ce qui est impossible. Donc  $H^2(S, \mathbb{Z})$  ne possède pas d'élément de 2-torsion et donc  $c_1(K_S) = 0$ . Puisque  $S$  est régulière, nous avons que  $c_1 : \text{Pic}(S) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$  est injectif, ce qui montre que  $K_S$  est trivial et montre bien que  $S$  est une surface K3.  $\square$

## 2.2 Domaine des périodes et surfaces K3 marquées

**Définition 2.10 (Le domaine des périodes)** Nous allons fixer  $L$  une forme quadratique abstraite isomorphe à  $H^2(S, \mathbb{Z})$  muni de la forme d'intersection. Nous pouvons alors tensoriser  $L$  par  $\mathbb{C}$  pour obtenir un espace vectoriel complexe. La forme d'intersection devient une forme bilinéaire sur cet espace.

$$L_{\mathbb{C}} := L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

Nous pouvons considérer l'espace suivant :

$$\Omega := \{\omega \in L_{\mathbb{C}} \mid \omega \cdot \omega = 0, \omega \cdot \bar{\omega} > 0\} / \mathbb{C}^*$$

Cela nous définit un ouvert d'une quadrique dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2,2}$ .

**Lemme 2.11** Le domaine des périodes  $\Omega$  est une sous-variété lisse de  $\mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$ .

*Preuve.* Notons par  $Z$  le lieu d'annulation dans  $\mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$  de la quadrique donnée par la forme d'intersection sur  $L_{\mathbb{C}}$ . Clairement, il s'agit d'une hypersurface algébrique où  $\Omega$  est un ouvert. Ainsi, il est suffisant de montrer que  $Z$  est lisse. Pour ce faire, considérons l'application :

$$\begin{aligned} F : L_{\mathbb{C}} \setminus 0 &\rightarrow \mathbb{C} \\ F(v) &= \frac{1}{2} \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

La différentielle de  $F$  est donnée par  $d_v F(W) = \langle v, w \rangle$ , ce qui est surjectif. Ainsi,  $\tilde{Z} = F^{-1}(0)$  est une sous-variété de codimension 1 lisse dans  $L_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ . Clairement, l'action  $\mathbb{C}^*$  est libre, holomorphe et propre. La propriété vient du fait que  $\mathbb{C}^*$  agit proprement sur  $L_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$  couplé avec le fait que  $\tilde{Z}$  est un sous-ensemble fermé. Ainsi, le théorème du quotient nous dit que  $\tilde{Z}/\mathbb{C}^*$  est une variété complexe lisse. Or  $\tilde{Z}/\mathbb{C}^*$  est exactement  $Z$ .  $\square$

**Définition 2.12 (Marquage des surfaces K3)** Soit  $(S, \omega_K)$  une surface K3. Un marquage est donné par une isométrie.

$$\phi : H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow L$$

En complexifiant le tout, nous obtenons une isométrie au niveau :

$$\phi_{\mathbb{C}} : H^2(S, \mathbb{C}) \rightarrow L_{\mathbb{C}}$$

En considérant une 2-forme holomorphe  $\omega$  non nulle sur  $S$ , nous obtenons un point dans  $\Omega$ .

$$[\phi_{\mathbb{C}}(\omega)] \in \Omega$$

Ce point est indépendant du choix de  $\omega$ , car selon la proposition 2.1,  $\omega$  est unique jusqu'à multiplication par un élément de  $\mathbb{C}^*$ . De façon équivalente, nous avons  $\phi_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(S)) = [\phi_{\mathbb{C}}(\omega)]$ .

**Lemme 2.13** Soient  $S$  et  $S'$  deux surfaces K3 munies des marquages  $\alpha : H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow L, \beta : H^2(S', \mathbb{Z}) \rightarrow L$ . Si  $\alpha_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(S)) = \beta_{\mathbb{C}}(H^{2,0}(S'))$ , alors :

$$\phi^* = \alpha \circ \beta^{-1} : H^2(S', \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$$

est une isométrie de Hodge.

*Preuve.* Il suffit de montrer que la structure de Hodge est préservée. Nous avons par hypothèse que  $\phi_{\mathbb{C}}^*(H^{2,0}(S')) = H^{2,0}(S)$  et, par conjugaison, nous avons également que  $\phi_{\mathbb{C}}^*(H^{0,2}(S')) = H^{0,2}(S)$ . En utilisant le fait que  $\phi^*$  est une isométrie avec le fait que  $H^{1,1} = H^{2,0} \oplus H^{0,2}$ , nous obtenons également que  $\phi_{\mathbb{C}}^*(H^{1,1}(S', \mathbb{C})) = H^{1,1}(S, \mathbb{C})$ .  $\square$

### 2.3 Classes divisoriales et cônes positifs

**Proposition 2.14** Soient  $S$  une surface K3 et  $L \in \text{Pic}(S)$  un fibré en droites holomorphe, alors nous avons l'inégalité suivante :

$$h^0(\mathcal{O}(L)) + h^0(\mathcal{O}(L^*)) \geq 2 + \frac{1}{2}c_1(\mathcal{O}(L))^2$$

Conséquemment, si  $c_1(L)^2 \geq -2$ , nous avons que  $L$  ou  $L^*$  admet une section globale non triviale.

*Preuve.* Par Riemann-Roch pour les surfaces couplé avec le calcul de la proposition 2.3, nous avons la formule suivante :

$$\chi(\mathcal{O}(L)) = 2 + \frac{1}{2}c_1(\mathcal{O}(L))^2$$

En utilisant le fait que le fibré canonique est trivial avec la dualité de Serre, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\chi(\mathcal{O}(L)) = h^0(\mathcal{O}(L)) - h^1(\mathcal{O}(L)) + h^0(\mathcal{O}(-L))$$

Ce qui nous donne l'inégalité souhaitée :

$$h^0(\mathcal{O}(L)) + h^0(\mathcal{O}(L^*)) \geq 2 + \frac{1}{2}c_1(\mathcal{O}(L))^2$$

$\square$

**Proposition 2.15** Soient  $S$  une surface K3 et  $C$  une courbe rationnelle :  $C \simeq \mathbb{P}^1$ . Nous avons alors que  $C$  est une courbe  $-2$ , une courbe rationnelle d'auto-intersection  $-2$ .

*Preuve.* Par la formule d'adjunction,  $K_C = \mathcal{O}(D)|_C$ . Ainsi, nous avons l'équation suivante pour le degré :

$$\deg(K_C) = c_1(\mathcal{O}(C))^2$$

Or nous savons que le degré du fibré canonique d'une courbe rationnelle est  $-2$ .  $\square$

**Définition 2.16 (Classe de cohomologie divisoriale)** Si nous avons un diviseur  $D$  sur une surface lisse, compacte et complexe  $S$ , nous pouvons considérer la classe de cohomologie de cette dernière  $[S]$  dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$ . Une telle classe de cohomologie dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$  est dite divisoriale et nous adoptons la terminologie suivante :

1. Si  $S$  est un diviseur effectif, nous disons que  $[S]$  est une classe effective.
2. Si  $S$  est un diviseur irréductible, nous disons que  $[S]$  est une classe irréductible.
3. Si  $S$  est un diviseur d'une courbe  $-2$ , nous disons que  $[S]$  est une classe nodale.

De plus, nous disons qu'une classe effective  $[Z]$  dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$  est indécomposable si elle ne s'écrit pas comme la somme de deux classes effectives.

En général, une classe irréductible n'est pas toujours indécomposable. Par exemple, si  $C$  est une courbe irréductible de  $\mathbb{P}^2$  donnée par une équation homogène de degré  $d \geq 2$ , alors la classe de cohomologie  $[C]$  se décompose de la façon suivante :

$$[C] = c_1(\mathcal{O}(d)) = dc_1(\mathcal{O}(1))$$

Ainsi,  $[C]$  n'est pas indécomposable.

**Proposition 2.17** Soit  $S$  une surface kählérienne compacte et complexe. La classe de cohomologie d'une courbe irréductible est toujours non triviale. En particulier, toutes les classes indécomposables sont irréductibles. De plus, pour qu'une classe irréductible  $[C]$  soit indécomposable, il est suffisant que  $[C] \cdot [C] < 0$ .

*Preuve.* Si  $C$  est une courbe irréductible sur  $S$  et  $\omega_K$  est une forme de Kähler sur  $S$ , alors la restriction de  $\omega_K$  sur  $C_{lisse}$  nous donne une métrique de Kähler sur  $C_{lisse}$ . Le volume de  $C_{lisse}$  est alors donné par

$$\text{vol}_{C_{lisse}} = \int_{C_{lisse}} \omega_K|_{C_{lisse}}$$

L'intégrale est finie par le théorème de Lelong (Voisin, 2002, p 273). En regardant  $[C]$  comme le dual de Poincaré représentant l'intégration de formes à support compact sur  $C_{lisse}$ , nous obtenons :

$$\text{vol}_{C_{lisse}} = \int_{C_{lisse}} \omega_K|_{C_{lisse}} = \int_S \omega_K \wedge [C] = (\omega_K, [C])$$

ce qui montre bien que la classe de cohomologie  $[C]$  n'est pas triviale.

Pour la deuxième partie, on suppose que  $[C] = [D]$  où  $D$  est un diviseur effectif pas nécessairement irréductible. Sous notre hypothèse que l'intersection est négative, nous avons que  $(C, D) < 0$ , ce qui n'est possible que si les deux diviseurs possèdent des composantes en commun. Puisque  $C$  est irréductible, nous devons avoir que  $C$  est une composante de  $D$ , ce qui nous donne que  $D - C$  est un diviseur effectif. Or nous avons que  $[D - C] = [D] - [C] = 0$  ce qui, par la première partie, implique que  $D = C$ .  $\square$

**Proposition 2.18** Soit  $S$  une surface compacte kählérienne qui est une surface K3 ou un tore complexe de dimension 2. Nous pouvons considérer le sous-espace

$$H^{1,1}(S, \mathbb{R}) := H^{2,0}(S, \mathbb{C})^\perp \cap H^2(S, \mathbb{R})$$

La forme d'intersection restreinte à  $H^{1,1}(S, \mathbb{R})$  est de signature  $(1, 2 - h_1)$ , en d'autres termes de type hyperbolique. Conséquemment, nous avons que  $H^{1,1}(S, \mathbb{R})^\perp$  est positif défini ce qui nous donne :

$$H^2(S, \mathbb{R}) = H^{1,1}(S, \mathbb{R}) \oplus H^{1,1}(S, \mathbb{R})^\perp$$

*Preuve.* Premièrement, nous commençons par remarquer que la signature de la forme d'intersection sur  $H^2(S)$  dans le cas où  $S$  est un tore complexe de dimension 2 est de signature  $(3,3)$ . En effet, il est facile de voir en utilisant la formule de Künneth que  $h^2(S) = 6$ . De plus, nous pouvons calculer l'index en utilisant la formule de Hirzebruch couplée avec le fait que  $TS$  et  $K_S$  sont triviaux :

$$\frac{1}{3} (c_1(S)^2 - 2c_2(S)) = 0$$

Par la proposition 2.1, nous obtenons une 2-forme holomorphe  $\omega$  possédant aucun zéro. Cette forme se décompose en une partie réelle et imaginaire  $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ . Par la proposition 2.1, nous savons que  $\omega$  vérifie

$$(\omega, \omega) = 0 \qquad (\omega, \bar{\omega}) > 0$$

ce qui implique directement que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont orthogonaux et que la forme d'intersection restreinte à  $\mathbb{R} \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$  est positive définie. Par définition de  $H^{1,1}(S, \mathbb{R})$ , nous avons que :

$$H^{1,1}(S, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \langle \omega_1, \omega_2 \rangle^\perp$$

ce qui nous donne la décomposition suivante de  $H^2(S, \mathbb{R})$  :

$$H^2(S, \mathbb{R}) = H^{1,1}(S, \mathbb{R}) \oplus H^{1,1}(S, \mathbb{R})^\perp$$

Dans le cas où  $S$  est une surface K3 ou un tore complexe de dimension 2, la signature de la forme d'intersection sur  $H^2$  est de la forme  $(3, h^{1,1} - 1)$ . Ainsi, la forme d'intersection sur  $H^{1,1}(S, \mathbb{R})$  est de type hyperbolique.  $\square$

Nous rappelons le résultat élémentaire sur les formes quadratiques de type hyperbolique.

**Lemme 2.19** Soit  $(V, h)$  un espace vectoriel réel de dimension  $n \geq 2$  muni d'une forme bilinéaire symétrique  $h$  de type hyperbolique. Alors l'ensemble suivant

$$V_+ = \{x \in V \mid h(x, x) > 0\}$$

possède deux composantes connexes convexes. De plus,  $x, y \in V_+$  sont dans la même composante si et seulement si  $h(x, y) > 0$ .

*Preuve.* Si  $v \in V$  tel que  $h(v, v) > 0$ , on peut décomposer notre espace  $V$  de la façon suivante :

$$V = \mathbb{R} \langle v \rangle \oplus \{v\}^\perp$$

On pose alors les définitions suivantes :

$$C_1 = \{x \in V_+ \mid h(x, v) > 0\} \qquad C_2 = \{x \in V_+ \mid h(x, v) < 0\}$$

N'importe quel élément  $v \in V_+$  est dans exactement un de ces ensembles. En effet, sinon  $v \in \{v\}^\perp$  serait négatif défini. Il est facile de voir que les  $C_i$  sont convexes ce qui nous donne que  $C_1$  et  $C_2$  sont les composantes connexes de  $V$ . Remarquons que les ensembles  $C_i$  sont indépendants du choix de  $v$  puisqu'ils sont exactement les composantes connexes de  $V_+$ , ce qui implique directement la dernière partie.  $\square$

**Définition 2.20 (Cône positif et cône de Kähler)** Encore une fois, assumons que  $S$  est une surface K3 ou un tore complexe de dimension 2. Par la proposition 2.18, nous savons que la forme d'intersection est de type hyperbolique sur  $H^{1,1}(S, \mathbb{R})$ . Considérons l'ensemble suivant :

$$H_+^{1,1} := \{c \in H^{1,1}(S, \mathbb{R}) \mid (c, c) > 0\}$$

Très clairement, n'importe quelle forme de Kähler  $\omega_K$  est un élément de ce dernier. Par le lemme 2.19, nous avons deux composantes connexes. Nous appelons le connexe positif  $C_S^+$  la composante contenant une forme de Kähler. Remarquons que cette définition est indépendante du choix de classe de Kähler puisque l'ensemble des classes de Kähler forme un ensemble convexe de  $H^2(S, \mathbb{R})$ . Nous posons également le sous-ensemble suivant que nous appelons le cône de Kähler :

$$\mathcal{K}_S = \{c \in C_S^+ \mid (c, d) > 0 \text{ pour toutes classes effectives } d\}$$

Clairement cet ensemble est convexe.

**Lemme 2.21** Soit  $S$  une surface K3 et  $x$  une classe effective irréductible telle que  $(x, x) < 0$ , alors  $x$  est nodale.

*Preuve.* Par hypothèse, nous avons que  $x = [C]$  où  $C$  est une courbe irréductible. Nous pouvons considérer la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S(-C) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow i_*\mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

Nous obtenons alors  $\chi(\mathcal{O}_C) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C))$ . En utilisant Riemann-Roch, nous obtenons que  $\chi(\mathcal{O}_S(-C)) = \frac{1}{2}(C, C)$ . En combinant ce fait avec le calcul de la proposition 2.3, nous avons que  $\chi(\mathcal{O}_S) = -\frac{1}{2}(C, C)$ . Ainsi, le genre arithmétique de  $C$  est donné par :

$$p_a(C) = 1 + \frac{1}{2}(C, C)$$

Dans notre cas  $(C, C) < 0$ , nous devons avoir que  $(C, C) = -2$  et  $p_a(C) = 0$ , ce qui ne peut être qu'une courbe rationnelle lisse. En appliquant la proposition 2.15, alors  $C$  est une courbe  $-2$ .  $\square$

Nous allons maintenant caractériser les classes effectives.

**Proposition 2.22** Soit  $S$  une surface K3. Nous notons par  $E_S$  le monoïde des classes effectives dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$ . Nous avons que  $E_S$  est engendré par les classes nodales et  $\overline{C_S^+} \cap H^2(S, \mathbb{Z})$ .

*Preuve.* Nous allons montrer la double inclusion. Premièrement, considérons  $C$  une courbe irréductible sur  $S$ . Nous distinguons deux cas possibles :

$$(C, C) \geq 0 \qquad (C, C) < 0$$

Dans le premier cas, il est clair que  $C \in \overline{C_S^+}$ . Le deuxième cas découle du lemme 2.21.

Dans l'autre direction, il est évident que les classes nodales sont effectives. Il nous reste alors à montrer que  $c \in \overline{C_S^+} \cap H^2(S, \mathbb{Z})$ , alors  $c$  est effective. Puisque  $\overline{C_S^+}$  est dans  $H^{1,1}(S, \mathbb{C})$ , nous avons par le théorème de Lefschetz sur les classes  $(1, 1)$  que  $c$  doit être divisoriale. Puisque  $(c, c) > 0$  la borne de la proposition 2.14 nous dit que  $c$  ou  $-c$  est effective. Cependant,  $-c$  doit intersecter négativement une classe de Kähler, ce qui nous dit que  $c$  est effective.  $\square$

**Corollaire 2.23** Soit  $S$  une surface K3 Si  $w \in \mathcal{K}_S$ , alors le monoïde engendré par

$$\{c \in H^2(S, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(S, \mathbb{C}) \mid (c, w) > 0 \text{ et } (c, c) \geq -2\}$$

dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$  est exactement l'ensemble des classes effectives.

*Preuve.* Il est clair par la proposition 2.22 que les classes effectives sont contenues dans cet ensemble. Pour l'autre direction, il suffit d'utiliser la proposition 2.14 avec le fait que l'intersection avec un élément du cône de Kähler est strictement positive.  $\square$

Dans les chapitres qui suivent, nous allons être intéressés à étudier les morphismes de structures de Hodge qui préservent les classes effectives.

**Définition 2.24 (Isométrie effective de Hodge)** Soient  $S$  et  $S'$  des surfaces compactes kählériennes. Nous disons que  $\phi^* : H^2(S', \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$  est une isométrie de Hodge effective si nous avons les propriétés suivantes :

1.  $\phi^*$  est un morphisme de structure de Hodge.
2.  $\phi^*$  est une isométrie.
3.  $\phi^*$  se restreint à une bijection sur les classes effectives de  $S$  et  $S'$ .
4.  $\phi^*(C_{S'}^+) \subset C_S^+$

Dans le cas général, nous avons cette caractérisation :

**Lemme 2.25** Soient  $S$  et  $S'$  des surfaces K3 et  $\phi^*$  un morphisme de Hodge qui est également une isométrie. Nous avons que  $\phi^*$  est une isométrie de Hodge effective si et seulement si  $\phi^*$  induit une bijection entre les cônes de Kähler de  $S'$  et  $S$ .

*Preuve.* Pour la direction  $\implies$ , nous pouvons utiliser le fait que  $\phi^*$  est une isométrie avec le fait qu'un seul élément du cône positif est suffisant pour reconstruire ce dernier par le lemme 2.19. Ainsi,  $\phi^*$  est une bijection entre les cônes positifs de  $S$  et  $S'$ . Conséquentment, nous avons que  $\phi^*$  induit une bijection en les cônes de Kähler parce que ce dernier est complètement déterminé par la forme d'intersection, les classe effectives et le cône positif.

La direction opposée est une application du corollaire 2.23.  $\square$

La prochaine proposition nous permet de reformuler cette conditions dans le cas projectif.

**Proposition 2.26** Soient  $S$  et  $S'$  deux surfaces K3 projectives et  $\phi^* : H^2(S', \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$  une isométrie préservant la structure de Hodge. Les énoncés suivants sont équivalents :

1.  $\phi^*$  est une bijection sur les classes effectives.
2.  $\phi^*$  est une bijection sur les classes amples.
3.  $\phi^*$  est une bijection sur le cône de Kähler.
4.  $\phi^*$  envoie un élément du cône de Kähler de  $S'$  sur le cône de Kähler de  $S$ .

En particulier, vérifier n'importe quelle de ces propriétés implique que  $\phi^*$  est une isométrie de Hodge effective.

*Preuve.* L'implication  $1 \implies 2$  est une conséquence directe du critère Nakai-Moishezon qui nous dit, dans le cas d'une surface, qu'un diviseur  $D$  est ample si et seulement si on a  $(D, C) > 0$  pour toutes les courbes  $C$  et  $(D, D) > 0$ .

Pour montrer  $2 \implies 3$ , nous remarquons que  $\phi^*$  est une isométrie qui préserve la structure de Hodge. Nous avons que  $\phi^*$  induit une bijection entre  $H^{1,1}(S', \mathbb{R})$  et  $H^{1,1}(S, \mathbb{R})$ . De plus, en utilisant qu'une classe ample fait partie du cône positif, nous savons que  $\phi^*$  doit induire une bijection entre les cônes positifs. Le reste découle facilement du corollaire 2.23.

L'implication  $3 \implies 4$  est triviale.

L'implication  $3 \implies 4$  est une application du corollaire 2.23.  $\square$

**Proposition 2.27** Soient  $S$  une surface K3 et  $I$  un ensemble fini indexant les paires de courbes  $C_i, D_i$ . Nous définissons le morphisme  $\phi : H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$  :

$$\phi(x) = x + \sum_{i \in I} (x, [C_i])[D_i]$$

Si  $\phi$  est une isométrie de Hodge effective, alors  $I = \emptyset$  et  $\phi = Id$ .

*Preuve.* Soit  $\omega_K$  une classe de Kähler. Le lemme 2.25 nous dit que  $\phi(\omega_K)$  est également dans le cône de Kähler. Par convexité du cône, nous avons que  $\phi(\omega_K) + \omega_K$  est dans le cône de Kähler. Considérons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= (\phi(\omega_K) - \omega_K, \phi(\omega_K) + \omega_K) \\ &= \sum_{i \in I} (\omega_K, C_i)(D_i, \phi(\omega_K) + \omega_K) \end{aligned}$$

Or un élément du cône de Kähler intersecte strictement positivement n'importe quelle courbe. Conséquent, nous avons  $I = \emptyset$ , ce qui montre le résultat souhaité.  $\square$

**Définition 2.28** Nous allons définir les réflexions de Picard-Lefschetz. Soient  $S$  une surface K3 et  $N \in H^2(S, \mathbb{Z})$  une classe nodale. Nous allons considérer l'isométrie suivante sur  $H^2(S, \mathbb{Z})$  :

$$r_N(x) := x + (x, N)N$$

**Proposition 2.29** Soit  $S$  une surface K3. Notons par  $N_S$  l'ensemble des classes nodales. Pour  $N \in N_S$ , on note  $H_N$  les points fixes de la réflexion  $r_N$ . Nous considérons l'ouvert suivant :

$$U = C_S^+ \setminus \left( \bigcup_{N \in N_S} H_N \right)$$

Le sous-ensemble suivant est une composante et c'est exactement le cône de Kähler de  $S$  :

$$V = \{x \in C_S^+ \mid (x, N) > 0 \forall N \in N_S\}$$

*Preuve.* Puisque les éléments du cône de Kähler intersectent strictement positivement les classes effectives, nous avons que le cône de Kähler est contenu dans  $V$ . Il est également facile de voir que  $V$  est convexe et est également un sous-ensemble ouvert et fermé de  $U$ , ce qui montre que  $U$  est bien une composante connexe de  $V$ .

Pour finir la démonstration, il nous reste à montrer que  $V$  est contenu dans le cône de Kähler, ce qui découle directement de la proposition 2.22.  $\square$

La proposition suivante sera utilisée pour obtenir des isométries de Hodge effectives à partir de simple isométrie de Hodge. Nous l'utiliserons dans le chapitre 4 et 9 pour déduire des théorèmes de Torelli « faibles ».

**Proposition 2.30** Soient  $S$  une surface K3 et  $W_S$  le sous-groupe de  $\text{Aut}(H^2(S, \mathbb{Z}), (\cdot, \cdot, \cdot))$  généré par les réflexions de Picard-Lefschetz. Le cône positif  $C_S^+$  est invariant sur les réflexions de Picard-Lefschetz. De plus, l'action de  $W_S$  est propre et discontinue sur  $C_S^+$  et un domaine fondamental de cette action sur  $C_S^+$  est le cône de Kähler  $\mathcal{K}_S$ .

*Preuve.* Très clairement, l'ensemble des éléments positifs est invariant par des isométries. Premièrement, nous allons montrer qu'une réflexion envoie un élément de  $C_S^+$  sur  $C_S^+$ .

Soient  $x \in \mathcal{K}_S$  et  $r_N$  une réflexion de Picard-Lefschetz. Puisque la forme d'intersection est de type hyperbolique, le lemme 2.19 nous dit qu'il est suffisant de montrer  $(x, r_N(x)) > 0$ , ce qui découle facilement du calcul suivant avec le fait que  $x \in \mathcal{K}_S$  :

$$(x, r_N(x)) = (x, x + (x, N)N) = (x, x) + (x, N)(x, N) > 0$$

Nous avons  $O^+(1, 19)$  le sous-groupe de  $\text{Aut}(H^2(S, \mathbb{Z}), (\cdot, \cdot))$  préservant le cône positif. Si nous fixons  $H = Z(x \mapsto h(x, x) - 1)$ , nous obtenons une hypersurface lisse de  $H^{1,1}(S, \mathbb{R})$ . Si  $x, y \in H$ , alors nous pouvons trouver deux ensembles de bases orthonormales  $H^{1,1}(S, \mathbb{R})$  :

$$x, b_1, b_2, \dots, b_{19}$$

$$y, e_1, e_2, \dots, e_{19}$$

Nous obtenons une application  $F$  définie par extension sur les bases  $F(x) = y$  et  $F(b_i) = e_i$  pour tout  $i$ , ce qui nous donne un élément de  $O^+(1, 19)$ . Conséquemment, l'action de  $O^+(1, 19)$  est transitive sur  $H$ . Si  $x \in H$ , nous pouvons prendre une base orthonormale :

$$x, b_1, b_2, \dots, b_{19}$$

Si  $\phi \in \text{Stab}_x$ , alors la représentation matrice de  $\phi$  dans cette base est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

où  $A \in O(19)$ . En particulier, nous avons que  $H$  est réalisé comme un espace homogène :

$$H \simeq O^+(1, 19)/O(19)$$

Conséquemment, l'action de  $O^+(1, 19)$  est propre sur  $H$ . Si nous considérons la projection :

$$P : C_S^+ \rightarrow H$$

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{h(x, x)}}$$

il est facile de voir que  $P$  est  $O^+(1, 19)$ -équivariant. Conséquemment, l'action de  $O^+(1, 19)$  est propre sur  $C_S^+$ . Puisque  $W_S$  est un sous-groupe discret de  $O^+(1, 19)$ , nous obtenons que l'action est propre et discontinue. La deuxième partie est obtenue par les exercices 12 et 13 dans (Bourbaki, 2007, chapitre V, p 132, 133) qui

nous dit qu'un groupe de réflexion discret sur un espace hyperbolique a toujours un domaine fondamental donné par les composantes connexes :

$$U = C_S^+ \setminus \left( \bigcup_{N \in N_S} H_N \right)$$

Conséquemment, le résultat découle du lemme 2.29 qui nous dit que le cône de Kähler est l'une des composantes connexes de  $U$ .  $\square$

### CHAPITRE 3

#### LES 2-TORES ET LES STRUCTURES DE HODGE DE POIDS 2

Dans ce chapitre, nous parlons des structures de Hodge de poids 2 sur un tore complexe dimension 2. Nous prouvons une version «faible» du théorème de Torelli pour structures de poids 2 en utilisant des méthodes de géométrie projective classique sur un corps commutatif.

Les énoncés principaux de ce chapitre correspondent aux pages (Looijenga et Peters, 1980, p 14,15).

#### 3.1 Définition et l'anneau de cohomologie

**Définition 3.1 (2-tore complexe)** *Un 2-tore complexe  $T$  est l'espace quotient  $\mathbb{C}^2$  par l'action d'un réseau  $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$  de rang maximal.*

$$T := \mathbb{C}^2 / \Gamma$$

*Puisque l'action est libre et la forme de Kähler sur  $\mathbb{C}^2$  est invariante sur l'action  $\Gamma$ , nous obtenons que  $T$  est une variété kählérienne compacte. Du point de vue topologique,  $T$  est homéomorphe à  $(S^1)^4$ . Nous déduisons de la formule de Künneth en cohomologie que l'anneau de cohomologie singulière est donné par :*

$$H^*(T, \mathbb{Z}) \simeq \wedge^* H^1(T, \mathbb{Z})$$

*Par dualité de Poincaré, nous avons également que  $H_k(T, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{\binom{4}{k}}$ . Nous pouvons également faire l'identification  $H_1(T, \mathbb{Z}) = \Gamma$ . En effet, notons  $e_1, \dots, e_4$  une base pour notre réseau  $\Gamma$ . Nous pouvons alors considérer les chemins suivants pour  $1 \leq i \leq 4$  :*

$$\begin{aligned} \gamma_i &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^2 \\ t &\mapsto te_i \end{aligned}$$

*Au passage au quotient, cela nous définit des lacets dont la classe d'homotopie donne une base de  $\pi_1(T)$  et donc, selon le théorème de Hurewicz, nous obtenons également une base de  $H_1(T, \mathbb{Z})$ .*

Pour le reste de cet exposé, quand nous utilisons le terme « 2-tore », il sera toujours question de 2-tore complexe.

### 3.2 Torelli pour les structures de Hodge de poids 2 pour les 2-tores

Le théorème de Torelli pour les  $k$ -tores complexes nous dit que ces derniers sont complètement déterminés par leur structure de Hodge de poids 1 donnée par la décomposition de Hodge.

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux structures de Hodge de poids 2.

Le passage aux structures de poids 2 engendre une perte d'informations sur la structure complexe. Le résultat principal de cette section consiste à donner des conditions suffisantes pour que les structures de Hodge de poids 2 déterminent la structure complexe d'un 2-tore.

**Théorème 3.2** *Soit  $\phi : H^2(T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(T', \mathbb{Z})$  une isométrie de Hodge entre deux 2-tores. Nous supposons qu'il existe  $\psi_2 : H^1(T, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(T', \mathbb{F}_2)$  tel que la réduction mod 2 de  $\phi$  est donnée par  $\phi \equiv \psi_2 \wedge \psi_2 \pmod{2}$ . Sous ces hypothèses, nous avons qu'il existe un isomorphisme  $f : T' \rightarrow T$  qui induit  $\pm\phi$ .*

Pour prouver ce résultat, nous allons avoir besoin de quelques notions de géométrie projective classique.

**Définition 3.3 (Collinéation)** *Soient  $k$  un corps commutatif quelconque et  $V$  et  $W$  deux  $k$ -espaces vectoriels de même dimension. On suppose également que leurs dimensions est d'au moins 2. On note par  $D(V)$  et  $D(W)$  les espaces sous-linéaires de  $V$  et  $W$  respectivement. Une application  $F : D(V) \rightarrow D(W)$  est alors appelée une collinéation si  $F$  induit une bijection préservant les inclusions entre les sous-espaces linéaires de  $V$  et  $W$ . Observons que nous pouvons également identifier  $F$  à une bijection entre les sous-espaces linéaires de  $P(V)$  et  $P(W)$ , ici  $P(V)$  et  $P(W)$  sont les espaces projectifs associés. Si  $V = W$  on parle alors d'homographie.*

Les exemples les plus simples de collinéation sont donnés par des isomorphismes linéaires ou semi-linéaires entre  $V$  et  $W$ . Malheureusement, ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, si  $V = W = K^2$ , alors n'importe quelle auto-bijection de  $K^2 \setminus \{0\}$  induit une collinéation. Cependant, ce genre de phénomène ne peut qu'arriver en basse dimension. C'est le contenu du théorème fondamental de la géométrie projective.

**Définition 3.4 (Application semi-linéaire)** *Rappelons qu'une application additive  $F : V \rightarrow W$  entre deux  $k$ -espaces vectoriels est appelée semi-linéaire. Si il existe  $\varphi$  un automorphisme de  $k$  tel que nous avons pour*

tout  $\lambda \in K$  et  $v \in V$  :

$$F(\lambda v) = \varphi(\lambda)F(v)$$

**Théorème 3.5 (Théorème fondamental de la géométrie projective)** (Putman, , p 3)

Soit  $V$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie de dimension d'au moins 3. Alors toute homographie est induite par une application semi-linéaire bijective  $f : V \rightarrow V$ . Plus généralement, nous avons que si  $F : D(V) \rightarrow D(W)$  est une collinéation et  $\dim_k V \geq 3$ , alors il existe une application semi-linéaire bijective  $f : V \rightarrow W$  qui l'induit.

**Définition 3.6** Une orientation pour un réseau de rang 4  $\Gamma$  est un choix d'un isomorphisme.

$$\det : \bigwedge^4 \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$$

Sous cette hypothèse, nous avons une forme bilinéaire symétrique induite sur  $\bigwedge^2 \Gamma$  qui est définie de la façon suivante :

$$\langle x, y \rangle := \det(x \wedge y)$$

**Lemme 3.7** Soient  $\Gamma, \Gamma'$  deux réseaux orientés de rang 4 munis de la forme bilinéaire donnée par la définition précédente. De plus, supposons que nous avons une isométrie

$$\phi : \bigwedge^2 \Gamma \rightarrow \bigwedge^2 \Gamma'$$

et un isomorphisme sur  $\mathbb{F}_2$

$$\psi_2 : \Gamma/2\Gamma \rightarrow \Gamma'/2\Gamma'$$

de telle sorte que nous avons  $\psi_2 \wedge \psi_2 \equiv \phi \pmod{2}$ . Alors nous avons un isomorphisme  $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$  tel que  $\phi = \pm \psi \wedge \psi$ .

*Preuve.* Soit  $k$  un corps commutatif quelconque, alors nous pouvons appliquer le foncteur  $\cdot \otimes_{\mathbb{Z}} k$  sur  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  et tous les objets qui en découlent. Nous les noterons par un «  $k$  souscrit », par exemple  $L_k := L \otimes k$ ,  $\phi_k := \phi \otimes id$ , etc.

Rappelons que le plongement de Plücker est donné par l'expression suivante :

$$P_L : Gr(1, \mathbb{P}(L_k)) \rightarrow \mathbb{P} \left( \bigwedge^2 L_k \right)$$

$$\Pi_{u,v} \mapsto [u \wedge v]$$

Ici,  $\Pi_{u,v}$  est la droite dans  $\mathbb{P}(L_k)$  engendrée par deux vecteurs linéaires indépendants  $u$  et  $v$ . De plus, l'image de  $P_L$  correspond exactement aux classes d'équivalence des bivecteurs décomposables. Ainsi,  $\omega \in \mathbb{P} \left( \bigwedge^2 L_k \right)$  est équivalent au fait que

$$\langle \omega, \omega \rangle = \det(\omega \wedge \omega) = 0$$

En utilisant l'hypothèse que  $\phi$  est une isométrie, nous obtenons l'isomorphisme suivant induit sur les espaces projectifs.

$$\mathbb{P}(\phi_k) : \mathbb{P} \left( \bigwedge^2 L_k \right) \rightarrow \mathbb{P} \left( \bigwedge^2 L'_k \right)$$

induit ainsi une bijection entre

$$P_G : Gr(1, \mathbb{P}(L_k)) \rightarrow Gr(1, \mathbb{P}(L'_k))$$

Nous allons maintenant essayer de satisfaire les hypothèses du théorème fondamental de la géométrie projective dans le but de conclure que  $P_G$  est induite par une application linéaire (pour  $k = \mathbb{Q}$ ).

Il est possible d'étendre  $P_G$  à une application de  $D(L_k) \rightarrow D(L'_k)$  en utilisant la notion de faisceaux de droites.

Un faisceau de droites dans  $\mathbb{P}(L_k)$  est une famille de droites  $\mathcal{F}$  dans  $Gr(1, \mathbb{P}(L_k))$  telle que l'image sous le plongement de Plücker correspond à un plan dans  $\mathbb{P} \left( \bigwedge^2 L_k \right)$ .

Il existe deux types de faisceaux de droites dans  $\mathbb{P}(L_k)$ .

1. Type I : un faisceau de droites donné par toutes les droites passant par un  $p \in \mathbb{P}(L_k)$
2. Type II : un faisceau de droites donné par les droites dans un plan  $\Pi$  dans  $\mathbb{P}(L_k)$

Puisque  $P_G$  est induite par l'isomorphisme  $\mathbb{P}(\phi_k)$ , nous devons avoir que  $P_G$  envoie un faisceau de droites sur un faisceau de droites, ce qui permet d'étendre  $P_G$  à une application entre  $D(L_k)$  et  $D(L'_k)$ .

Nous pouvons également observer que  $P_G$  préserve les types de faisceaux ou les inverses. En effet, cela découle du fait que l'intersection de deux faisceaux distincts de même type est un point dans  $\mathbb{P}(\wedge^2 L_k)$  et que l'intersection de deux faisceaux de types différents dans  $\mathbb{P}(\wedge^2 L_k)$  est soit vide ou une droite.

En spécialisant au cas  $k = \mathbb{Q}$  et en utilisant l'hypothèse que la réduction de  $\phi$  modulo 2 est donnée par  $\psi_2 \wedge \psi_2$ , nous concluons que  $P_G$  préserve les types des faisceaux de droites. Ainsi, par le théorème fondamental de la géométrie projective, il existe une application  $\mathbb{Q}$  semi-linéaire

$$\psi_{\mathbb{Q}} : L_{\mathbb{Q}} \rightarrow L'_{\mathbb{Q}}$$

qui induit  $P_G$ . En utilisant le fait que  $\mathbb{Q}$  n'a pas d'automorphisme non trivial, nous avons que  $\psi_{\mathbb{Q}}$  est linéaire. En multipliant par un entier  $n \neq 0$ , nous pouvons supposer que nous avons  $n\psi_{\mathbb{Q}}(L_k) \subset L'_k$ .

En utilisant les variétés sur  $n\psi_{\mathbb{Q}}(L_k)$ , il est possible de trouver un  $\mu \in \mathbb{Q}$  tel que nous avons  $\psi := \mu\psi_{\mathbb{Q}}$  qui vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\psi \wedge \psi = \lambda\phi, \lambda \in \mathbb{Q}$
2.  $\psi(L) \subset L'$
3.  $\psi(L)$  contient un vecteur primitif dans  $L'$  donné par  $\psi(e_1)$  avec  $e_1$  primitif dans  $L$

Nous voulons maintenant établir que  $\lambda = \pm 1$  et  $\psi(L) = L'$ .

Commençons par la première assertion. Puisque  $e_1$  est primitif, il est possible de compléter  $e_1$  en une base de  $L$ . Notons les éléments de cette base  $e_1, \dots, e_4$ . Puisque  $\phi$  est une isométrie, nous avons donc que  $\phi(e_i \wedge e_j)$  est primitif dans  $\wedge^2 L'$ . Nous pouvons alors considérer l'équation suivante :

$$\psi(e_1) \wedge \psi(e_i) = \lambda\phi(e_1 \wedge e_i) \tag{3.1}$$

Puisque  $\psi(e_1)$  et  $\phi(e_1 \wedge e_i)$  sont primitifs et  $\psi(L) \subset L'$ , nous avons que  $\lambda \in \mathbb{Z}$ .

En utilisant le fait que  $\psi(e_1)$  est primitif dans  $L'$ , nous pouvons alors obtenir une base  $\psi(e_1), b_2, b_3, b_4$  de  $L'$ .

Nous pouvons alors écrire pour  $i > 1$  :

$$\psi(e_i) = a_{1,i}\psi(e_1) + \sum_{k>1} a_{k,i}b_k$$

Nous pouvons remplacer les éléments  $e_2, e_3, e_4$  par  $e'_2, e'_3, e'_4$  :

$$e'_k := e_k - a_{1,k}e_1$$

ce qui nous donne une base  $L$  dont l'image par  $\psi$  est :

$$\psi(e'_i) = \sum_{k>1} a_{k,i} b_k$$

Ainsi, nous avons

$$\psi(e_1) \wedge \psi(e'_i) = \sum_{k>1} a_{k,i} \psi(e_1) \wedge b_k = \lambda \phi(e_1 \wedge e'_i)$$

Puisque les  $\psi(e_1) \wedge b_k$  sont primitifs et  $e_1 \wedge e'_i$  l'est aussi, l'égalité implique que les  $a_{k,i}$  sont divisibles par  $\lambda$ , ce qui nous donne  $\psi(e'_i) \in \lambda L'$ . En appliquant l'équation 3.1, nous avons donc pour  $i \neq j$  :

$$\psi(e'_i) \wedge \psi(e'_j) \in \lambda \phi(e'_i \wedge e'_j) \in \lambda^2 \bigwedge^2 L'$$

Puisque  $\phi(e'_i \wedge e'_j)$  est primitif, cela nous donne que  $\lambda = \pm 1$ .

Il nous reste à montrer que  $\psi(L) = L'$ . En utilisant la mise sur forme diagonale, il existe une base de  $L$  :  $b_1, \dots, b_4$  et une base de  $L'$   $e_1, \dots, e_4$  telles que  $\psi(b_i) = d_i e_i$  où  $d_1 | d_2 | d_3 | d_4$ . Par l'équation 3.1, nous obtenons alors :

$$\phi(b_i \wedge b_j) = \pm d_i d_j e_i \wedge e_j$$

Or  $\phi$  est un isomorphisme, ainsi, nous avons que  $d_i \in \{1, -1\}$ . Ainsi,  $\psi$  est un isomorphisme, ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

Nous cherchons à appliquer le résultat précédent à  $L = H^1(T, \mathbb{Z})$  et  $L' = H^1(T', \mathbb{Z})$ . Pour ce faire, nous devons faire le lien entre une orientation de  $T$  et la forme d'intersection sur  $H^2(T)$ .

**Définition 3.8 (L'orientation naturelle d'un 2-tore)** Soit  $T = \mathbb{C}^2/\Gamma$  un 2-tore. Nous pouvons considérer la forme volume standard sur  $\mathbb{C}^2$ . Dans ce cas, la formule est tout simplement le déterminant  $\det : \bigwedge_{\mathbb{R}}^4 \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . En prenant une base  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  de  $\Gamma$  qui est positivement orientée :  $\det(\gamma_1, \dots, \gamma_n) > 0$ . Cette quantité est indépendante du choix de notre base puisqu'une base de  $\Gamma$  diffère par un élément de  $SL(\Gamma, \mathbb{Z})$ . Observons que  $\det(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  est exactement le volume de  $T$  muni de la métrique induite par la métrique euclidienne. Ainsi, nous obtenons une orientation  $\det_{\Gamma} : \bigwedge^4 \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$  de  $\Gamma$  donnée par :

$$\det_{\Gamma} := \det / \text{Vol}(T)$$

Nous pouvons maintenant prouver le théorème 3.2.

*Preuve.* Nous utilisons l'identification sur les anneaux de cohomologie :

$$H^*(T, \mathbb{Z}) = \bigwedge^* \text{hom}(\Gamma, \mathbb{Z})$$
$$H^*(T', \mathbb{Z}) = \bigwedge^* \text{hom}(\Gamma', \mathbb{Z})$$

Observons que le morphisme d'évaluation sur  $H^4$  contre la classe fondamentale de  $T$  et  $T'$  respectivement détermine une forme bilinéaire sur  $H^2$  donnée par la définition 3.6. Ceci n'est rien d'autre que la forme d'intersection usuelle sur  $H^2$ .

Selon le lemme 3.7, il existe un isomorphisme  $\psi : H^1(T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(T', \mathbb{Z})$  qui vérifie  $\pm\phi = \psi \wedge \psi$ . Il est clair du fait que  $\phi$  préserve la structure de Hodge de poids 2 que  $\psi$  préserve la structure de Hodge de poids 1 sur  $H^1$ . Ainsi, le théorème de Torelli pour les tores complexes nous dit qu'il existe un  $f : T' \rightarrow T$  qui induit  $\psi$  et donc  $\pm\phi$  sur les  $H^2$ .  $\square$

## CHAPITRE 4

### TORELLI POUR LES SURFACES DE KUMMER

Dans ce chapitre, nous parlons d'une famille spéciale de surfaces K3 venant de tore complexes appelé les surface de Kummer. Nous prouvons un théorème de Torelli pour les surface K3 en utilisant les résultats établis dans le chapitre 3.

Les énoncés présentés dans ce chapitre correspondent à (Looijenga et Peters, 1980, section 3).

#### 4.1 Les surfaces de Kummer

**Définition 4.1 (La construction de Kummer)** Soit  $T$  un 2-tore complexe. Nous avons une involution  $i : T \rightarrow T$  qui est donnée par le passage au quotient de l'application  $z \mapsto -z$  définie sur  $\mathbb{C}^2$ . Il est facile de voir que cette action fixe 16 points dans  $T$  qui correspondent au réseau  $\frac{1}{2}\Gamma$ . Nous noterons ces points par  $p_1, \dots, p_{16}$ .

Nous pouvons alors considérer l'espace quotient de  $T$  par l'action de  $i$  que nous appellerons  $Y$  et  $\pi : T \rightarrow Y$  la projection canonique.

Nous allons également considérer l'éclatement de  $T$  sur les 16 points fixes que nous noterons  $\tilde{T}$ . Donc la projection sera notée par  $\beta : \tilde{T} \rightarrow T$ . Évidemment, l'involution  $i$  s'étend naturellement au quotient  $\tilde{i} : \tilde{T} \rightarrow \tilde{T}$  dont la forme locale au voisinage autour d'un point peut être décrite par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{i} : \tilde{\mathbb{C}}^2 &\rightarrow \tilde{\mathbb{C}}^2 \\ (p, L) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1 &\mapsto (-p, L) \end{aligned}$$

L'action de  $\tilde{i}$  fixe les courbes exceptionnelles  $E_k := \beta^{-1}(p_k)$ . Nous notons par  $X$  l'espace  $\tilde{T}$  quotient par l'action de  $\tilde{i}$  et la projection canonique sera notée  $\tilde{\pi} : \tilde{T} \rightarrow X$ . De plus, nous noterons l'image des courbes exceptionnelles par  $N_k = \tilde{\pi}(E_k)$ .

En utilisant la propriété universelle du quotient sur l'application  $\pi \circ \beta : \tilde{T} \rightarrow Y$ , nous obtenons une unique application continue de  $\tilde{\beta} : X \rightarrow Y$  qui fait commuter le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{T} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & X \\
\downarrow \beta & & \downarrow \tilde{\beta} \\
T & \xrightarrow{\pi} & Y
\end{array}$$

L'espace topologique  $X$  construit est appelé une surface de Kummer.

Nous allons maintenant montrer dans la proposition suivante que la construction de Kummer nous donne bien une surface  $K3$ .

**Proposition 4.2** *La construction de Kummer nous donne bien une surface compacte kählérienne dont la forme de Kähler est obtenue de la façon suivante.*

Premièrement, nous pouvons noter  $\omega_T$  la forme de Kähler standard sur  $\mathbb{C}^2$  qui descend sur  $T$ . Nous pouvons observer que  $\omega_T$  est invariant sous l'involution. Ainsi, nous avons que  $\beta^*\omega_T$  est invariant sur l'action de  $\tilde{i}$ . Nous pouvons alors la passer au quotient pour obtenir une forme  $\omega'_T$ . En général,  $\omega'_T$  ne nous donne qu'une  $(1,1)$ -forme réelle strictement positive en dehors de l'image des courbes exceptionnelles. Pour obtenir une forme positive définie sur l'entière de  $X$ , nous pouvons prendre un  $\epsilon > 0$  suffisamment petit :

$$\omega_X := \omega'_T + \epsilon\lambda$$

où  $\lambda$  est  $(1,1)$ -forme fermée réelle qui est strictement positive sur les courbes exceptionnelles et zéro en dehors d'un voisinage compacte de ces dernières (Voisin, 2002, p 81).

*Preuve.* Puisque notre action est lisse, sans points fixes et complètement déconnectée en dehors des courbes exceptionnelles, il suffit de vérifier que le quotient est lisse dans le voisinage des courbes exceptionnelles.

Il s'agit d'un problème de nature locale. Ainsi, nous pouvons nous restreindre au cas de l'éclatement de  $\mathbb{C}^2$  à l'origine ( $\mathcal{O}(-1)$ ) quotienté par l'involution.

Notons par  $U_0$  l'ouvert affine de  $\mathbb{P}^1$  donné par  $z_0 \neq 0$ . Ainsi, nous avons la carte suivante pour  $\mathcal{O}(-1)$  défini sur l'ouvert  $U = U_0 \times \mathbb{P}^1 \cap \mathcal{O}(-1)$  : et  $r : U \rightarrow \mathbb{C}^2$ .

$$r([1 : Z], (w, zw)) = (z, w)$$

En utilisant ces coordonnées, l'involution devient  $(z, w) \mapsto (z, -w)$ .

On peut alors considérer l'application  $q : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  définie par la formule suivante :

$$q(z, w) = (z, w^2)$$

La fibre de cette application est précisément donnée par les orbites de notre action par involution. Ainsi, par la propriété universelle du quotient, nous obtenons une unique application continue  $r' : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}^2$  qui fait commuter le diagramme commutatif carré suivant.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{r} & \mathbb{C}^2 \\ \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow q \\ \tilde{U} & \xrightarrow{r'} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

Ici,  $\tilde{U}$  est  $U$  quotienté par l'involution. Il est facile de voir que  $r'$  est une bijection et même un homéomorphisme.

Il est également clair de cette construction que les transitions sont holomorphes et que la projection canonique  $\pi : U \rightarrow \tilde{U}$  est un revêtement ramifié le long de la courbe exceptionnelle.  $\square$

Nous allons maintenant établir que les surfaces de Kummer sont bien des surfaces K3. De plus, nous avons un monomorphisme de  $H^2(T)$  dans  $H^2(S)$ . Ici,  $T$  est un 2-Tore complexe et  $S$  est la surface de Kummer associée.

**Lemme 4.3** Soit  $S$  une surface de Kummer, alors il existe un monomorphisme  $\alpha : H^2(T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$  donné par :

$$\alpha = \tilde{\pi}_* \circ \beta^*$$

De plus, ce morphisme jouit de la propriété suivante

$$(\alpha x, \alpha y) = 2(x, y)$$

pour tout  $x, y \in H^2(T, \mathbb{Z})$ .

*Preuve.* Puisque  $\beta$  est un morphisme de degré 1 entre deux variétés kählériennes compactes, nous savons que  $\beta^*$  est injectif et préserve la forme d'intersection. Ainsi, il est suffisant de vérifier que  $\tilde{\pi}_*$  multiplie la forme d'intersection par 2.

Nous allons maintenant montrer que pour tout  $[\tau] \in H^2(S, \mathbb{Z})$ , nous avons :

$$\tilde{\pi}_* \tilde{\pi}^* \tau = 2\tau$$

Soit  $[\tau'] \in H^2(S, \mathbb{Z})$  une classe arbitraire. Puisque  $\tilde{\pi}$  est de degré 2, nous avons que  $(\tilde{\pi}^* \tau', \tilde{\pi}^* \tau) = 2(\tau', \tau) = (\tau', 2\tau)$ . En utilisant l'adjonction entre  $\tilde{\pi}_!$  et  $\tilde{\pi}^*$ , nous avons :

$$(\tilde{\pi}^* \tau', \tilde{\pi}^* \tau) = (\tau', \tilde{\pi}_* \tilde{\pi}^* \tau)$$

En comparant nos deux égalités, nous obtenons que :

$$(\tau', \tilde{\pi}_* \tilde{\pi}^* \tau) = (\tau', 2\tau)$$

Puisque  $\tau'$  est arbitraire et la forme d'intersection est non dégénérée, nous obtenons l'égalité souhaitée :  $\tilde{\pi}_! \tilde{\pi}^* \tau = 2\tau$ .

Pour finir l'argument, il suffit de remarquer que toutes les classes  $[\omega_i] \in H^2(\tilde{T}, \mathbb{Z})$  admettent un représentant invariant par involution. Ainsi, il existe  $[\tau_i] \in H^2(S, \mathbb{Z})$

$$\tilde{\pi}^* \tau_i = \omega_i$$

Par le résultat précédent, nous obtenons que

$$(\tilde{\pi}_* \omega_i, \tilde{\pi}_* \omega_j) = 2(\omega_i, \omega_j)$$

ce qui est exactement le résultat souhaité.  $\square$

**Proposition 4.4** Toutes les surfaces de Kummer sont des surfaces K3.

*Preuve.* Par la proposition 2.9, il est suffisant de montrer que  $S$  possède les nombres de Hodge d'une surface K3.

Premièrement, en utilisant que  $\tilde{\pi}$  est une application surjective entre deux variétés kählériennes, nous avons que  $\tilde{\pi}^* : H^2(S, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(\tilde{T}, \mathbb{C})$  est injectif, ce qui nous donne une borne sur la dimension  $\dim H^2(S, \mathbb{C}) \leq \dim H^2(\tilde{T}, \mathbb{C})$ .

Par la proposition précédente, nous savons que le morphisme de Gysin  $\tilde{\pi}_1$  multiplie la forme d'intersection par 2. En particulier, ce morphisme est injectif, ainsi en utilisant notre borne sur la dimension nous obtenons que  $\dim H^2(S, \mathbb{C}) = \dim H^2(\tilde{T}, \mathbb{C})$ . Si nous utilisons le fait que le morphisme de Gysin préserve la décomposition de Hodge, nous trouvons que pour tout  $p, q$  qui vérifie  $p + q = 2$  nous avons :

$$h^{p,q}(\tilde{T}) = h^{p,q}(S)$$

Les nombres de Hodge pour  $\tilde{T}$  sont les mêmes que pour  $T$  à l'exception de  $h^{1,1}$  pour lequel nous devons ajouter les courbes exceptionnelles. Ainsi, nous avons :

$$h^{1,1}(\tilde{T}) = h^{1,1}(T) + 16$$

Pour  $S$  nous avons alors les nombres de Hodge suivants :

$$h^{2,0}(S) = 1 \qquad h^{1,1}(S) = 20 \qquad h^{0,2}(S) = 1$$

Ainsi, pour prouver le résultat, il est suffisant de montrer que  $h^{1,0}(S) = h^{0,1}(S)$  s'annule.

Considérons une 1-forme holomorphe  $\omega \in H^1(S, \mathbb{C})$ , alors  $\tilde{\pi}^*\omega$  est une 1-forme invariante sur l'involution. Si nous considérons  $E^c = \tilde{T} \setminus E$  le complément des courbes exceptionnelles et nous utilisons le fait que  $E$  est de codimension 2 réelle, nous trouvons que la restriction sur  $H^1$  est injective :

$$i^* : H^1(\tilde{T}, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(E^c, \mathbb{C})$$

En utilisant le fait que  $\beta$  est un isomorphisme en dehors des courbes exceptionnelles et des points fixes de l'involution sur  $T$  et en utilisant Hartog  $(\beta^*)^1 \tilde{\pi}^*\omega$ , nous obtenons une 1-forme holomorphe sur  $T$  qui est invariante par involution. Or la seule 1-forme holomorphe sur  $T$  est triviale. En utilisant le fait que  $\tilde{\pi}^* : H^1(S, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(\tilde{T}, \mathbb{C})$  est injective, nous déduisons que  $\omega$  est trivial, ce qui montre bien que  $h^{1,0}(S) = 0$ .  
□

## 4.2 Le théorème de Torelli pour les surfaces de Kummer

Le but de cette section est de prouver une version du théorème de Torelli pour les surfaces de Kummer.

**Théorème 4.5 (Torelli pour les surfaces de Kummer)** Soient  $S, S'$  deux surfaces de Kummer de telle sorte qu'il existe une isométrie effective de Hodge qui préserve les 16 classes nodales et les classes effectives. De plus, demandons que le 2-tore  $T'$  associé à  $S'$  possède une classe divisoriale non triviale. Il existe alors un isomorphisme entre  $S \rightarrow S'$  qui induit cette isométrie.

La stratégie employée ici est d'établir un résultat similaire pour les 2-tores et d'utiliser le monomorphisme donné par le lemme 4.3 pour faire descendre une isométrie effective de Hodge entre les surfaces de Kummer à une isométrie effective de Hodge au niveau des 2-tores. Nous allons commencer par prouver quelques lemmes préliminaires.

**Définition 4.6 (La structure d'espace  $\mathbb{F}_2$ -affine des classes nodales)** Rappelons que l'image des courbes exceptionnelles par l'application quotient est par  $N_K$  dans la surface de Kummer  $S$ . Il est facile de voir que ces courbes sont des courbes rationnelles dont l'auto-intersection est  $-2$  et ainsi correspondent à des classes nodales dans  $H^2(T, \mathbb{Z})$ . Nous notons l'ensemble de ces courbes  $N$ .  $N$  possède la structure d'un espace  $\mathbb{F}_2$ -affine de dimension 4 dont la structure est donnée par  $\frac{1}{2}\Gamma/\Gamma$  ce qui correspond aux 16 points fixes de l'involution. Nous noterons  $N$  muni de cette structure affine par  $N_{\mathbb{F}_2}$ .

**Définition 4.7 (Réseau induit par les classes nodales et réseau primitif)** Nous allons noter par  $W = \mathbb{Z}\langle N \rangle$  le réseau généré par les classes nodales dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$ . Nous pouvons également considérer le plus petit sous-réseau primitif dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$  qui contient  $W$ . Nous le noterons par  $M$ .

En utilisant le fait que  $(N_i, N_j) = -2\delta_{ij}$ , nous concluons que  $W$  et  $M$  sont tous les deux de rang 16. De plus, nous avons les inclusions suivantes :

$$W \subset M \subset M^* \subset W^* = \frac{1}{2}W$$

Ici,  $M^*, W^*$  représente les réseaux duals dans  $M \otimes \mathbb{Q}$  :

$$M^* = \{v \in M \otimes \mathbb{Q} \mid e \in M, (e, v) \in \mathbb{Z}\}$$

$$W^* = \{v \in M \otimes \mathbb{Q} \mid e \in W, (e, v) \in \mathbb{Z}\}$$

Notons par  $R$  l'application quotient :

$$R : \frac{1}{2}W \rightarrow \frac{1}{2}W/W$$

Puisque les classes nodales sont toutes libres dans  $H^2$ , nous pouvons les identifier avec  $W = \mathbb{Z}^N$  et  $W = \frac{1}{2}\mathbb{Z}^n$ . Le quotient  $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^N/\mathbb{Z}^N$  s'identifie de façon évidente avec  $\mathbb{F}_2^N$ .

Plus explicitement, si  $A \subset N_{\mathbb{F}_2}$  est un sous-ensemble, la fonction caractéristique de  $A$  (notée par  $\chi_A$ ) est donnée par :

$$R\left(\sum_{a \in A} \frac{1}{2} N_a\right) = \chi_A$$

Une idée clé pour prouver le théorème 4.4 est de lier  $Im \alpha$  avec nos 16 classes nodales. C'est ce qui est discuté dans la proposition suivante.

**Proposition 4.8** *Sous les notations introduites précédemment :*

1.  $Im \alpha = N^\perp$
2.  $R(M)$  sont exactement les fonctions polynomiales  $deg \leq 1$  sur  $N_{\mathbb{F}_2}$  à valeurs dans  $\mathbb{F}_2$
3.  $R(M^*)$  sont exactement les fonctions polynomiales  $deg \leq 2$  sur  $N_{\mathbb{F}_2}$  à valeurs dans  $\mathbb{F}_2$

Avant de prouver cette proposition, nous allons avoir besoin de quelques lemmes de géométrie affine sur  $\mathbb{F}_2$ .

**Lemme 4.9** (Looijenga et Peters, 1980, p 161) *Soit  $V$  un espace  $\mathbb{F}_2$ -affine dont la dimension est d'au moins 2. Si nous avons  $U \subset \mathbb{F}_2^V$  un sous-espace vectoriel des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{F}_2$  qui soit invariant sur le groupe d'automorphismes (affines)  $Aut_{\mathbb{F}_2}(V)$ , alors les trois cas suivants sont possibles :*

1.  $U$  est exactement les fonctions constantes.
2.  $U$  est exactement les polynômes de degré  $\leq 1$ .
3.  $U$  contient toutes les fonctions caractéristiques des sous-espaces affines de codimension 2.

La proposition qui suit nous dit que tous les automorphismes de  $N_{\mathbb{F}_2}$  sont réalisables par une isométrie de  $H^2(S, \mathbb{Z})$

**Lemme 4.10** Pour tout  $\phi \in \text{Aut}_{\mathbb{F}_2}(N_{\mathbb{F}_2})$ , il existe une isométrie  $h : H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$  qui vérifie que pour tout  $k$

$$h(N_k) = N_{\phi(k)}$$

*Preuve.* Soit  $e_1, \dots, e_4$  une base de  $\Gamma$ . Ceci nous donne la  $\mathbb{F}_2$ -base  $b_1 = \frac{e_1}{2}, b_2 = \frac{e_2}{2}, \dots, b_4 = \frac{e_4}{2}$  de l'espace  $\frac{1}{2}\Gamma/\Gamma$ .

L'isomorphisme entre  $\frac{1}{2}\Gamma/\Gamma$  et  $N_{\mathbb{F}_2}$  associe tout simplement  $b_k$  à la courbe nodale  $N_k$  correspondante dans  $S$ . Ainsi, les automorphismes  $N_{\mathbb{F}_2}$  peuvent être identifiés à ceux de  $\frac{1}{2}\Gamma/\Gamma$ . Considérons  $\phi$  un automorphisme de  $\frac{1}{2}\Gamma/\Gamma$ .

Cet automorphisme s'écrit dans notre base de la façon suivante :

$$\phi(b_j) = \sum_i a_{ij} b_i + r$$

de telle sorte que  $\phi = A + r$  où  $A$  est une application linéaire dont la représentation matricielle dans la base  $b_1, \dots, b_n$  est donnée par les coefficients  $a_{ij}$ . Les  $a_{ij}$  sont des éléments du corps  $\mathbb{F}_2$ , cependant nous pouvons les « relever » à des coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de manière à obtenir une matrice  $\bar{A}$  qui soit à coefficients entiers. En utilisant l'identité

$$\det \bar{A} \equiv \det A \pmod{2\mathbb{Z}}$$

nous déduisons que  $\det \bar{A} \neq 0$ . De plus, en jouant sur les signes des coefficients  $a_{ij}$ , nous pouvons supposer que  $\det \bar{A} > 0$ . Ainsi, nous avons l'automorphisme  $\mathbb{R}$ -affine sur  $\mathbb{C}^2$  :

$$T_0(x) = \bar{A}(x) + \tilde{r}$$

Ici,  $\tilde{r}$  est un relèvement de  $r$  à  $\mathbb{C}^2$ .

Il est clair que  $T_0 \circ i = i \circ T_0$  modulo  $\Gamma$ .

Nous aimerions que l'isométrie sur  $H^2(S, \mathbb{Z})$  soit induite par extension de  $T_0$  sur  $\tilde{T}$  suivie par le passage quotient. Cependant, nous ne pouvons pas garantir qu'une telle application préserve l'orientation des classes nodales ou de façon équivalente l'orientation des diviseurs exceptionnels dans  $\tilde{T}$ . Ainsi, notre objectif sera de changer  $T_0$  de telle sorte que l'orientation de ces classes soit préservée.

Dans un premier temps, nous allons montrer qu'il existe une métrique sur  $\mathbb{C}^2$  invariante par translation telle que  $T_0$  soit une isométrie. Pour ce faire, nous pouvons utiliser le fait que  $A$  est un automorphisme sur un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{F}^2$  pour obtenir qu'il existe un entier  $n > 0$  tel que  $A^n = Id$ . Nous en déduisons alors que  $\bar{A}$  vérifie :

$$\bar{A}^n = Id_{\mathbb{C}^2} \quad \text{mod } \Gamma$$

En d'autres termes,  $\bar{A}^n$  est l'identité sur  $T$ . En fixant un point  $p \in \mathbb{C}^2$  et en utilisant la dérivation en chaîne nous obtenons :

$$d_p(\bar{A}^n - \bar{A}^n(p)) = Id_{T_p\mathbb{C}^2}$$

Ainsi,  $\bar{A}^n$  est l'identité sur  $\mathbb{C}^2$ . Nous pouvons alors considérer le produit euclidien suivant sur  $\mathbb{C}^2$  :

$$g(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} g_{std}(\bar{A}^k x, \bar{A}^k y)$$

Ici,  $g_{std}$  est le produit euclidien standard sur  $\mathbb{C}^2$ . Il est clair que  $\bar{A}$  est un élément de  $\bar{A} \in SO(\mathbb{C}^2, g)$  et donc  $T_0$  est une isométrie sur  $\mathbb{C}^2$ .

Considérons un  $\epsilon > 0$  assez petit de telle sorte que les boules  $\{B(\gamma, \epsilon)\}_{\gamma \in \frac{1}{2}\Gamma}$  soient toutes disjointes. Pour  $\gamma \in \frac{1}{2}\Gamma$  nous avons deux isométries  $T_\gamma, F_\gamma : B(\gamma, \epsilon) \rightarrow B(\phi(\gamma), \epsilon)$ . La première est tout simplement la restriction de  $T_0$  sur  $B(\gamma, \epsilon)$  et la seconde est une translation :

$$F_\gamma(x) := x + \phi(\gamma) - \gamma$$

Ces deux applications sont homotopes. Nous pouvons donner une homotopie par la formule suivante :

$$H_\gamma : B(\gamma, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow B(\phi(\gamma), \epsilon)$$

$$H_\gamma(x, t) = (1 - t)T_\gamma(x) + tF_\gamma(x)$$

Nous pouvons maintenant considérer la fonction à support compact (lisse)  $\psi(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  qui vaut 1 sur l'intervalle  $[-\epsilon/2, \epsilon/2]$  et dont le support est contenu dans l'intervalle  $[-3\epsilon/4, 3\epsilon/4]$ . Puisque nos boules  $B(\gamma\epsilon)$  sont toutes disjointes, nous pouvons recoller les  $H_\gamma$  pour obtenir l'application :

$$H : \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B(\gamma, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B(\gamma, \epsilon)$$

Pour obtenir l'application souhaitée, nous pouvons considérer l'application suivante :

$$T : \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B(\gamma, \epsilon) \rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B(\gamma, \epsilon)$$

$$T(x) = H \left( x, \sum_{\gamma \in \Gamma} \psi(\|\gamma - x\|) \right)$$

Puisque le support de  $\psi$  est contenu dans  $[-3\epsilon/2, 3\epsilon/2]$ , nous avons que  $T$  admet une extension sur  $\mathbb{C}^2$  que nous noterons également par  $T$  vérifiant les propriétés suivantes :

1.  $T \circ i = i \circ T$
2.  $T = T_0$  en dehors de l'ensemble  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B(\gamma, \epsilon)$
3.  $T = F_\gamma$  sur les boules de  $B(\gamma, \epsilon/2)$

De cette construction il est clair que  $T$  admet une extension sur  $\tilde{T}$  et descend sur  $S$  tout en préservant l'orientation des classes nodales et en induisant l'isomorphisme voulu sur  $H^2(S, \mathbb{Z})$ .  $\square$

Nous pouvons commencer la preuve de la proposition 4.8. *Preuve.* Nous allons décomposer la preuve en plusieurs étapes.

### Étape 1

Nous allons montrer que

$$d(M) \leq 2^6$$

Nous avons  $Im \alpha \subset N^\perp$ , ce qui nous donne également  $Im \alpha \subset \frac{1}{2}N^\perp$ . Ainsi, par les inclusions  $N \subset M \subset \frac{1}{2}N$ , nous concluons que :

$$Im \alpha \subset M^\perp$$

Observons que les deux modules sont tous les deux de rang 6, donc l'indice  $[M^\perp : Im \alpha]$  est fini et nous avons :

$$d(M^\perp)[M^\perp : Im \alpha]^2 = d(Im \alpha)$$

En utilisant la dualité de Poincaré, nous savons que  $d(H^2(T, \mathbb{Z})) = 1$ . Or  $\alpha$  multiplie par 2 la forme d'intersection. Ainsi, nous avons  $d(Im \alpha) = 2^6$ , ce qui nous donne la borne supérieure :

$$d(M^\perp) \leq 2^6$$

En utilisant le fait que  $M$  est primitif et  $H^2(S, \mathbb{Z})$  est unimodulaire, nous concluons que  $d(M) = d(M^\perp)$ , ce qui nous donne la borne souhaitée.

Étape 2

Nous allons montrer que  $R(M)$  correspond exactement aux polynômes de degrés  $\leq 1$  dans  $N_{\mathbb{F}_2}$ . En particulier, cela implique que nous avons :

$$[M : W] = 2^5$$

et donc

$$d(M) = [M : W]^{-2} d(N) = 2^{-10} \cdot 2^{16} = 2^6$$

Nous allons commencer par trouver un estimé sur l'indice  $[M : W]$ . En utilisant l'étape 1, nous obtenons la borne inférieure

$$[M : W]^2 = d(W) \cdot d(M)^{-1} \geq 2^{16} \cdot 2^{-6} = 2^{10}$$

ce qui nous donne  $[M : W] \geq 2^5$ . En particulier,  $R(M) = M/W$  est de cardinalité d'au moins  $2^5$ . Nous allons maintenant essayer d'appliquer la proposition 4.9 pour établir le résultat souhaité. Nous devons dans un premier temps établir que  $R(M)$  est bien invariant sous le groupe d'automorphisme  $\text{Aut}_{\mathbb{F}_2}(N)$ . Cela découle directement du lemme 4.10 et du fait que  $M$  est le plus petit sous-réseau primitif contenant  $N$ . Ainsi, nous avons 3 cas possibles :

1.  $R(M)$  est exactement les fonctions constantes.
2.  $R(M)$  est exactement les polynômes de degrés  $\leq 1$
3.  $R(M)$  contient toutes les fonctions caractéristiques des sous-espaces de codimension 2.

Nous pouvons déjà enlever le premier cas en raison de la borne  $R(M) \geq 2^5$ . Il nous reste alors à éliminer le troisième cas. Supposons que  $R(M)$  tombe dans le troisième cas. Alors  $R(M)$  contient toutes les fonctions caractéristiques de codimension 2. Dans ce cas, nous pouvons choisir deux espaces  $W$  et  $W'$  de codimension 2 de telle sorte que l'intersection soit un point  $N_p \in W \cap W'$ . Les fonctions caractéristiques de  $W$  et  $W'$  sont donc données par :

$$R\left(\sum_{w \in W} \frac{1}{2} N_w\right) = \chi_W \qquad R\left(\sum_{w' \in W'} \frac{1}{2} N_{w'}\right) = \chi_{W'}$$

Ainsi, nous avons

$$\left( \sum_{w \in W} \frac{1}{2} N_w, \sum_{w' \in W'} \frac{1}{2} w' \right) = \frac{1}{4} (N_p, N_p) = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

ce qui est une contradiction, donc  $R(M)$  est précisément les fonctions affines sur  $N_{\mathbb{F}_2}$ .

Étape 3

Nous allons maintenant établir

$$Im \alpha = N^\perp$$

Puisque  $M$  est primitif à l'intérieur d'un réseau unimodulaire, nous avons que  $d(M) = d(M^\perp)$ . Ainsi, nous avons par l'étape 2 que  $d(M^\perp) = 2^6$ . Ce qui nous donne

$$[M^\perp : Im \alpha]^2 = d(Im \alpha) \cdot d(M^\perp)^{-1} = 2^6 \cdot 2^{-6} = 1$$

Ainsi,  $M^\perp / Im \alpha = 0$  ce qui établit  $Im \alpha = M^\perp$ . En utilisant le fait que  $M$  soit le plus petit sous-réseau primitif contenant  $W$ , nous obtenons  $Im \alpha = N^\perp$ .

Étape 4

Nous allons établir que  $R(M^*)$  est exactement les polynômes dont le degré  $\leq 2$ .

Nous avons  $R(M) \subset R(M^*)$ , ce qui nous donne l'expression suivante pour les cardinalités :

$$\#R(M^*) = \#R(M) \cdot \# \left( \frac{R(M^*)}{R(M)} \right)$$

Puisque  $W \subset M \subset M^*$ , nous avons l'isomorphisme canonique de  $\mathbb{Z}$ -module

$$\frac{R(M)^*}{R(M)} = \frac{M^*/W}{M/W} \simeq \frac{M^*}{M}$$

En utilisant cet isomorphisme et le fait que  $M^*$  est unimodulaire et  $M$  est négatif définie, nous concluons que :

$$\# \left( \frac{R(M^*)}{R(M)} \right) = \#R \left( \frac{M^*}{M} \right) = [M^* : M] = d(M)$$

ce qui nous donne

$$\#R(M^*) = \#R(M) \cdot d(M)$$

Par l'étape 2 et 3, ceci nous donne  $\#R(M^*) = 2^5 \cdot 2^6 = 2^{11}$ .

Puisque  $M$  est invariant sur l'action  $\text{Aut}_{\mathbb{F}_2}(N)$ , il en va de même pour  $M^*$ . Ainsi, nous sommes sous les hypothèses de la proposition 4.9. Puisque  $\#R(M^*) = 2^{11}$  nous avons que  $R(M^*)$  contient toutes les fonctions caractéristiques des espaces de codimension 2. Or les fonctions caractéristiques dans  $N_{\mathbb{F}_2}$  sont exactement les fonctions polynômiales de degré  $\leq 2$ . De plus, il y a exactement  $2^{11}$  telles fonctions. Ainsi, nous obtenons le résultat voulu.  $\square$

**Proposition 4.11** Soit  $V$  un espace affine de dimension  $n$  sur  $\mathbb{F}_2$ . Notons par  $T_V$  l'espace vectoriel des translations sur  $V$ . Notons par  $U_k$  l'ensemble des fonctions polynomiales de  $V$  à valeurs dans  $\mathbb{F}_2$  de degrés au plus  $k$ . Fixons un  $v \in V$ . Nous avons l'application suivante :

$$Q : U_2 \rightarrow \mathbb{F}_2^{V \times V}$$

$$Q(g)(s, t) = g(f_v(s + t)) + g(v) + g(f_v(s)) + g(f_v(t))$$

Ici,  $f_v(w) = w + c$ . Clairement,  $Q$  est linéaire. Nous voulons que  $Q$  prenne des valeurs dans  $\bigwedge^2 \text{hom}(T_V, \mathbb{F}_2)$  ne dépendant pas de  $v$ , que le noyau soit exactement  $U_1$  et que l'application induite sur le quotient soit un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$Q : U_2/U_1 \rightarrow \bigwedge^2 \text{hom}(T_V, \mathbb{F}_2)$$

De plus, cet isomorphisme est fonctoriel dans le sens suivant : si  $F : V \rightarrow V'$  est un isomorphisme affine entre deux espaces affines sur  $\mathbb{F}_2$ , alors nous avons une application induite sur l'espace des translations  $T_F : T_V \rightarrow T_{V'}$ . De plus, nous avons la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} U_2^{V'}/U_1^{V'} & \xrightarrow{Q_{V'}} & \bigwedge^2 \text{hom}(T_{V'}, \mathbb{F}_2) \\ \downarrow F^* & & \downarrow T_F^* \wedge T_F^* \\ U_2^V/U_1^V & \xrightarrow{Q_V} & \bigwedge^2 \text{hom}(T_V, \mathbb{F}_2) \end{array}$$

*Preuve. Commençons par montrer que  $U_1$  est contenue dans le noyau. Si  $g \in U_1$ , alors  $g = A + v'$  où  $A$  est linéaire et  $v'$  est un vecteur. Dans ce cas, nous vérifions facilement que nous avons :*

$$Q(g) \equiv Q(A) + 4v' \equiv Q(a) \pmod{2}$$

*Ainsi, nous pouvons assumer que  $g$  est linéaire, ce qui nous donne pour tout  $s, t \in V$*

$$Q(g)(s, t) \equiv 2g(s, t) + 4g(v) \equiv 0 \pmod{2}$$

*ce qui montre bien que  $U_1$  est dans le noyau de  $Q$ . Ainsi, nous pouvons remplacer  $Q$  par l'application induite sur le quotient :*

$$Q : U_2/U_1 \rightarrow \mathbb{F}_2^{V \times V}$$

*Si nous fixons des coordonnées affines sur  $x_1, \dots, x_n$  sur  $V$ , il est clair que  $U_2/U_1$  est au moins engendré par les monômes de la forme  $x_i x_j$  pour  $i < j$ . Nous allons maintenant montrer que  $Q$  est indépendant du choix de  $v$ . Fixons  $g = x_i x_j$  pour  $i < j$  et considérons le calcul suivant :*

$$Q(g)(s, t) = (s_i + t_i + v_i)(s_j + t_j + v_j) + v_i v_j + (s_i + v_i)(s_j + v_j) + (t_i + v_i)(t_j + v_j)$$

*Il est facile en développant et en comptant le nombre de termes contenant des  $v_i$  et  $v_j$  que ces termes apparaissent un nombre pair de fois, ce qui nous laisse avec*

$$Q(g)(s, t) = (s_i + t_i)(s_j + t_j) + s_i s_j + t_i t_j = s_i t_j + s_j t_i$$

*ce qui montre l'indépendance de  $v$ . Il est également facile de voir maintenant que  $Q$  est bilinéaire et alternée. Ainsi, nous avons :*

$$Q : U_2/U_1 \rightarrow \bigwedge^2 \text{hom}(T_V, \mathbb{F}_2)$$

*Il est également clair que nos générateurs  $x_i x_j$  se font envoyer sur les 2-formes  $x_i^* \wedge x_j^*$  puisque ces dernières forment une base. Nous avons donc montré que  $Q$  est alors un isomorphisme.*

*La commutativité du diagramme est évidente et découle directement du fait que  $Q$  est indépendant du choix de  $v$ .  $\square$*

Nous avons cette proposition élémentaire de géométrie affine.

**Lemme 4.12** Soient  $k$  un corps commutatif et deux espaces affines  $V$  et  $W$  de dimension finie sur  $k$ . Si  $F : V \rightarrow W$  est une application entre nos deux espaces affines telle que nous avons

$$\forall g \in \text{hom}_{\text{Aff}}(W, k), g \circ F \in \text{hom}_{\text{Aff}}(V, k)$$

alors  $F$  est affine. Conséquemment, si  $V$  et  $W$  sont deux structures affines sur un ensemble  $S$  tel que  $\text{hom}_{\text{Aff}}(W, k) = \text{hom}_{\text{Aff}}(V, k)$  dans  $k^S$ , alors ces deux structures sont les mêmes.

*Preuve.* Pour la première partie, nous pouvons fixer une origine sur  $V$  et  $W$  de telle sorte que  $V$  et  $W$  soient des espace vectoriels et  $F$  préserve l'origine. Il est ainsi suffisant de montrer que  $F$  est linéaire. Sous nos hypothèses, nous avons que  $F$  préserve les applications linéaires, ce qui induit une application linéaire sur le dual :

$$\begin{aligned} F^* : W^* &\rightarrow V^* \\ g &\mapsto g \circ F \end{aligned}$$

Puisque  $V$  et  $W$  sont de dimensions finies, nous pouvons utiliser la naturalité du bidual pour obtenir une application linéaire  $F^{**} : V \rightarrow W$ . Il est clair en inspectant les isomorphismes naturels  $V \simeq V^{**}$  et  $W \simeq W^{**}$  que  $F^{**} = F$ .

Pour la deuxième partie, il est suffisant de montrer que l'identité est affine, ce qui découle directement de la première partie et du fait que  $\text{hom}_{\text{Aff}}(W, k) = \text{hom}_{\text{Aff}}(V, k)$ .  $\square$

**Lemme 4.13** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n \geq 3$  sur  $\mathbb{F}_2$ , alors le morphisme de groupe

$$\begin{aligned} GL(V) &\rightarrow GL\left(\bigwedge^2 V\right) \\ \phi &\mapsto \phi \wedge \phi \end{aligned}$$

est injectif.

*Preuve.* Soit  $e_1, \dots, e_n$  une base de  $V$  avec  $\phi \in GL(V)$  qui vérifie  $\phi \wedge \phi = Id$ . Nous avons donc pour tout  $1 \leq j \leq n$

$$Ae_j = \sum_i a_{ij} e_i$$

ce qui nous donne pour tout  $1 \leq l < k \leq n$

$$Ae_l \wedge Ae_k = \sum_{i < j} (a_{il}a_{jk} + a_{jl}a_{ik}) e_i \wedge e_j$$

Nous avons donc pour  $i \neq l$  ou  $j \neq k$  l'égalité suivante :

$$a_{il}a_{jk} = a_{jl}a_{ik} \quad (4.1)$$

Et si  $i = l$  et  $j = k$  :

$$a_{\ell\ell}a_{kk} + a_{k\ell}a_{\ell k} = 1 \quad (4.2)$$

Nous avons donc deux cas possibles :

$$a_{\ell\ell} = a_{kk} = 1 \quad \text{et} \quad a_{k\ell} = 0 \text{ ou } a_{\ell k} = 0$$

$$a_{\ell\ell} = 0 \text{ ou } a_{kk} = 0 \quad \text{et} \quad a_{k\ell} = a_{\ell k} = 1$$

Nous allons montrer que le deuxième cas est impossible. Considérons la formule 4.1 avec  $j = \ell$  et  $i = r \neq k$ , nous avons que

$$a_{r\ell}a_{\ell k} = a_{\ell\ell}a_{rk} = 0$$

ce qui nous donne que  $a_{r\ell} = 0$  pour tout  $r \neq k$ . Puisque  $n \geq 3$ , nous pouvons trouver un  $r \neq \ell, k$ . L'équation 4.2 devient alors :

$$a_{rr}a_{\ell\ell} + a_{r\ell}a_{\ell r} = 1$$

Or le côté gauche de l'égalité est nul ce qui nous donne une contradiction. Ainsi, nous avons pour tout  $1 \leq i, j \leq n$   $a_{ij} = \delta_{ij}$ , ce qui montre bien que  $\phi$  est l'identité.  $\square$

Nous résumons les résultats par le corollaire suivant.

**Corollaire 4.14** Soit  $L$  une forme quadratique munie d'une isométrie

$$\phi : L \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$$

où  $S$  est une surface K3. Supposons que nous avons un sous-ensemble  $N' \subset L$  dont l'image est exactement les classe nodales de  $S$ . Nous notons par  $W' = \mathbb{Z}\langle N' \rangle$  et  $M'$  le plus petit sous-réseau primitif dans  $L$  contenant  $W'$ . Nous avons alors l'inclusion :

$$W' \subset M' \subset M'^* \subset W'^* = \frac{1}{2}W'$$

Encore une fois, nous identifions  $\frac{1}{2}W'/W'$  par  $\mathbb{F}_2^{N'}$  et l'application quotient est notée  $R' : \frac{1}{2}W' \rightarrow \mathbb{F}_2^{N'}$ .

Nous avons les assertions suivantes :

1.  $R'(M')$  détermine une unique structure affine sur  $N'$  telle que  $R'(M') = \text{hom}_{\text{aff}}(N', \mathbb{F}_2)$ .
2. Sous cette structure, nous avons un isomorphisme entre  $M'^{\perp}/2M'^{\perp}$  et  $\bigwedge^2 \text{hom}(T_{N'}, \mathbb{F}_2)$ .

*Preuve.* Pour la première assertion, en utilisant la proposition 4.8 (2) couplée avec l'isométrie  $\phi : L \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$ , il est clair que  $R'(M')$  est un sous-espace vectoriel de dimension 5. De plus, il contient le sous-espace de dimension 1.  $C$  correspond aux fonctions constantes sur  $N'$ . Considérons la décomposition suivante :

$$R'(M') = P \oplus C$$

où  $P$  est un sous-espace vectoriel de dimension 4. Considérons le morphisme d'évaluation suivant :

$$F : N' \rightarrow P^*$$

$$F(n) = (g \mapsto g(n))$$

Clairement, ce morphisme est injectif et, par la cardinalité, nous obtenons même qu'il est bijectif, ce qui donne une structure d'espace vectoriel sur  $N'$ . Il est clair de cette construction que  $\text{hom}_{\text{Aff}}(N', \mathbb{F}_2) = R'(M')$ . L'unicité de la structure affine est une application directe du lemme 4.12.

Pour la deuxième assertion, en utilisant la proposition 4.8 (1) avec le fait que  $M'$  est le plus petit sous-réseau primitif de  $L$  contenant  $N'$ , nous avons que  $(M')^{\perp}$  est l'image d'un réseau unimodulaire dont la forme a été multipliée par 2. Ce réseau correspond à  $\text{Im } \alpha$  sous l'isométrie  $\phi$ . Conséquemment, nous avons que  $(M'^{\perp})^* = \frac{1}{2}M'^{\perp}$ . En utilisant cette information, nous pouvons considérer les isomorphismes évidents suivants :

$$M'^{\perp}/2M'^{\perp} \simeq \frac{1}{2}M'^{\perp}/M'^{\perp} \simeq (M'^{\perp})^*/M'^{\perp} \simeq M'^*/M'$$

Observons que par définition couplée avec le théorème des isomorphismes, nous avons l'isomorphisme suivant :

$$M'^*/M' \simeq (M'^*/W')/(M'/W') = R'(M'^*)/R'(M')$$

Or par la proposition 4.8,  $R'(M')$  et  $R'(M'^*)$  correspondent respectivement aux polynômes de degrés d'au plus 1 et d'au plus 2 sur  $N'$ . Ainsi, en appliquant l'isomorphisme de la proposition 4.11, nous obtenons un isomorphisme entre  $M'^\perp/2M^\perp$  et  $\bigwedge^2 \text{hom}(T_{N'}, \mathbb{F}_2)$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant donner une démonstration du théorème de Torelli pour les surfaces de Kummer.  
4.2 :

*Preuve.* Soient deux surfaces K3 de type Kummer  $S$  et  $S'$ . Notons  $T$  et  $T'$  les 2-tores associés. Nous avons également une isométrie

$$\Phi^* : H^2(S', \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$$

Cette isométrie préserve la structure de Hodge et les classes nodales de  $S$  et  $S'$  que nous notons par  $N$  et  $N'$  respectivement.

Premièrement, nous allons construire un morphisme  $\phi^*$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^2(T', \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\phi^*} & H^2(T, \mathbb{Z}) \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ H^2(S', \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\Phi^*} & H^2(S, \mathbb{Z}) \end{array}$$

Nous pouvons remarquer que puisque  $\Phi^*$  préserve les classes nodales, la proposition 4.8 (1) nous dit que  $\Phi^*$  préserve  $\text{Im} \alpha$  et  $\text{Im} \alpha'$ . Puisque  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont des isomorphismes sur leur image et multiplient la forme d'intersection par 2, nous pouvons définir  $\phi^*$  de la façon suivante :

$$\phi^* = (\alpha^{-1})|_{\text{Im} \alpha} \circ \Phi^* \circ \alpha'$$

Clairement,  $\phi^*$  est une isométrie et doit préserver la structure de Hodge puisqu'elle est obtenue par composition des morphismes préservant des structures de Hodge. En utilisant la proposition 4.8 (1), nous avons

que  $\text{Im} \alpha = M^\perp$  et  $\text{Im} \alpha' = M'^\perp$ . Par le corollaire 4.14 nous obtenons les isomorphismes suivants :

$$H^2(T, \mathbb{F}_2) \simeq \text{Im} \alpha / 2\text{Im} \alpha \simeq \bigwedge^2 \text{hom}(T_N, \mathbb{F}_2)$$

$$H^2(T', \mathbb{F}_2) \simeq \text{Im} \alpha' / 2\text{Im} \alpha' \simeq \bigwedge^2 \text{hom}(T_{N'}, \mathbb{F}_2)$$

Notons que puisque l'isométrie  $\Phi^*$  préserve les classes nodales, nous avons un isomorphisme d'espace affine entre  $\chi : N' \rightarrow N$ , ce qui induit un isomorphisme d'espace vectoriel sur les translations :

$$T_\chi : T_{N'} \rightarrow T_N$$

Par la functorialité de la proposition 4.11, nous avons que

$$(\phi_{\mathbb{F}_2}^*)^{-1} = T_\chi^* \wedge T_\chi^*$$

Ici,  $\phi_{\mathbb{F}_2}^*$  est la réduction modulo 2 de  $\phi^*$ .

Sous les identifications  $T_N = H_1(T, \mathbb{F}_2)$  et  $T_{N'} = H_1(T', \mathbb{F}_2)$ , nous pouvons appliquer le théorème de Torelli pour les structures de Hodge de poids 2 sur un 2-tore (théorème 3.2), ce qui nous donne l'existence d'un isomorphisme

$$\phi : T \rightarrow T'$$

tel que le morphisme induit en  $H^2$  est  $\pm\phi^*$ . Puisque  $\phi^*$  est effective et couplée avec le fait que  $T'$  admet une classe effective, nous déduisons que nous sommes dans le cas positif.

Quitte à faire des translations, nous assumerons que  $\phi$  commute avec l'involution sur  $T$  et  $T'$  et vérifie pour au moins une classe nodale  $N'(p_0) \in N'$  associée au point fixe  $p_0 \in T'$ . Nous avons donc :

$$\Phi^*(N'(P_0)) = N(\phi^{-1}(0))$$

Dans ce cas, nous obtenons un isomorphisme  $\psi : S \rightarrow S'$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^2(T', \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\phi^*} & H^2(T, \mathbb{Z}) \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ H^2(S', \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\Psi^*} & H^2(S, \mathbb{Z}) \end{array}$$

Conséquent, nous avons  $\Phi^* = \Psi^*$  sur  $Im\alpha'$  et  $N'(P_0)$ . De plus, puisque nous avons  $(\phi_{\mathbb{F}_2}^*)^{-1} = T_X^* \wedge T_X^*$ , les isomorphismes induits par  $\Phi^*$  et  $\Psi^*$  entre  $\wedge^2 \text{hom}(T_{N'}, \mathbb{F}_2)$  et  $\wedge^2 \text{hom}(T_N, \mathbb{F}_2)$  sont les mêmes, ce qui nous donne par le lemme 4.13 que  $\Phi^*$  et  $\Psi^*$  induisent le même isomorphisme entre  $T_{N'}$  et  $T_N$ . En utilisant le fait que nous avons  $\Phi^*(N'(P_0)) = N(\phi^{-1}(0))$ , nous obtenons que  $\Phi^*$  et  $\psi^*$  concordent sur  $N'$ . Ceci nous donne par la proposition 4.8 (1) que  $\Psi^* = \Phi^*$ .  $\square$

### 4.3 Les surfaces de Kummer projectives

**Proposition 4.15** Soient  $D_1, D_2, \dots, D_N$  des hypersurfaces lisses d'une variété complexe lisse  $X$ . Supposons que  $D_i$  sont deux à deux disjointes. De plus, demandons qu'il existe un fibré en droites  $L \in Pic(X)$  tel que pour un  $k > 0$  nous avons :

$$\mathcal{O}_X \left( \sum_i D_i \right) \simeq L^{\otimes k}$$

Il existe alors une variété complexe lisse  $Y$  et un revêtement ramifié de degré  $k$   $f : Y \rightarrow X$  tels que le diviseur de ramification soit exactement  $\mathcal{O}_X(\sum_i D_i)$ . Notons par  $q$  la restriction de  $f$  restreinte au complément des points de ramification. Nous avons que  $q$  est étale de degré  $k$  et galoisienne, et le groupe d'automorphisme du revêtement est  $Aut(q) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ . De plus,  $Aut(q)$  est la restriction d'automorphismes de  $Y$  préservant la fibre de  $f$ .

*Preuve.* Notons par  $p : L \rightarrow X$  la projection de notre fibré en droites holomorphes et  $D = \sum_i D_i$ . Puisque les  $D_i$  sont lisses et disjointes, nous avons qu'il existe une section  $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$  s'annulant exactement sur nos  $D_i$  et  $ds$  n'est jamais 0 le long de ces dernières. Puisque  $\mathcal{O}_X(D) \simeq L^{\otimes r}$ , nous identifions  $s$  à une section globale de  $L^{\otimes r}$ . Nous pouvons considérer le diagramme commutatif de produit fibré suivant :

$$\begin{array}{ccc} p^* L^{\otimes r} & \longrightarrow & L^{\otimes r} \\ \downarrow & & \downarrow p \\ L & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

Par définition, nous avons que  $p^* L$  est la diagonale. Ainsi, nous avons une section tautologique  $\Delta \in H^0(L, p^* L)$  définie comme :

$$\Delta(\ell) = (\ell, \ell)$$

Nous considérons la section

$$v = p^*s - \Delta^{\otimes r} \in H^0(L, p^*L^{\otimes r})$$

En trivialisant  $L|_U \simeq U \times \mathbb{C}$  avec les coordonnées  $(z, \omega)$ , nous avons que  $v$  s'écrit :

$$v(z, \omega) = s(z) - \omega^r$$

La différentielle de  $v$  est alors

$$\begin{pmatrix} s'(z) & -r\omega^{r-1} \end{pmatrix}$$

En utilisant le fait que  $ds$  ne s'annule pas quand  $s(z) = 0$ , nous avons que la différentielle est de rang 1. Posons  $Y = Z(v)$ , ce qui montre bien que  $Z$  est lisse. Si nous posons que  $f = p|_Z$ , il est facile de voir par le calcul précédent que  $f$  est un revêtement ramifié de degré  $k$  dont le diviseur de ramification est exactement  $D$ .

Pour la deuxième partie, nous considérons une  $k$ -racine primitive de l'unité  $\xi$ . Nous avons alors une action de  $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$  agissant sur  $L$  donnée par multiplication  $\xi^\ell$  le long des fibres. La forme locale de notre section  $p^*s - \Delta^{\otimes r}$  montre que cette section est invariante et agit transitivement sur les fibres de  $f$ . Nous avons donc que la restriction de  $f$  en dehors des ramifications  $q$  est de degré  $k$  et est un revêtement galoisien. Ainsi, par cardinalité et le fait que  $q$  est de degré  $k$ , nous avons que notre action de  $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$  contient tous les automorphismes de  $q$ .  $\square$

**Proposition 4.16** Soit  $S$  une surface K3 projective admettant 16 courbes (-2) :  $C_1, \dots, C_{16}$  deux à deux disjointes. Notons  $C = \sum_i C_i$  le diviseur associé. Si  $C$  est divisible par 2 dans le groupe de Picard, alors  $S$  est isomorphe à une surface de Kummer dont les  $C_i$  sont exactement les 16 classes nodales fixées par l'involution.

*Preuve.* Nous pouvons appliquer la proposition 4.15 pour obtenir un revêtement ramifié de degré 2

$$f : S' \rightarrow S$$

dont le diviseur de ramification est exactement  $C$ . Posons  $C_i = f^{-1}(D_i)$ . En utilisant le fait que le degré de  $q$  est 2, nous trouvons que les  $C_i$  sont des courbes (-1). Notons par  $C = \sum_i C_i$  le diviseur associé. La formule

du fibré canonique pour un revêtement ramifié (Barth et al., 2004, p 53) nous donne :

$$K_{S'} = f^* K_S + C = C$$

Puisque  $S$  est projectif et qu'il est clair par la construction de la proposition 4.16 que  $S'$  l'est aussi, nous pouvons appliquer le théorème de contraction de Castenuovo. Nous pouvons contracter les courbes  $-1$  pour obtenir une surface  $T$  telle que  $S'$  est l'éclatement de 16 points sur  $T$  dont les courbes exceptionnelles sont les  $C_i$ . En utilisant la formule pour le fibré canonique d'un éclatement, nous avons que  $K_T$  est trivial. En particulier,  $T$  est minimal. Nous voulons maintenant connaître la caractéristique d'Euler de  $T$ . Pour ce faire, nous appliquons la formule de Riemann-Hurwitz avec la formule de la caractéristique d'Euler de l'éclatement pour obtenir :

$$\chi(T) = \chi(S') - 16 = 2(\chi(S) - 16) - 16 = 2(24 - 8) - 16 = 0$$

En utilisant la classification des surfaces projective ayant un fibré canonique trivial, nous obtenons que  $T$  est un 2-tore complexe.

Il nous reste à montrer que l'involution sur  $T$  peut être choisie de telle sorte que les  $C_i$  correspondent aux 16 points fixes de cette dernière. La deuxième partie de la proposition 4.15 nous dit que  $S'$  admet une involution fixant les courbes  $(-1)$ . En utilisant le fait que  $S'$  et  $T$  sont isomorphes en dehors des courbes exceptionnelles couplé avec Hartog, nous obtenons une involution sur  $T$  compatible avec celle de  $S'$ . En utilisant que les classes invariantes sur l'involution dans  $H^1(S', \mathbb{Q})$  sont isomorphes à  $H^1(S, \mathbb{Q})$  qui est nul, nous avons que la seule valeur propre de l'involution est  $-1$  sur  $H^1(S', \mathbb{Q})$ . Cela implique que l'involution agit comme  $-Id$  sur  $H^1(S', \mathbb{Q})$ . Puisque l'application induite par l'éclatement d'un point sur une surface  $\beta : S' \rightarrow T$  est un isomorphisme pour  $H^1(\cdot, \mathbb{Q})$  rationnelle, l'involution agit également comme  $-Id$  sur  $H^1(T, \mathbb{Q})$ . En utilisant le fait que  $T = H^1(T, \mathbb{C})/H^1(T, \mathbb{Z})$ , le reste en découle facilement.  $\square$

**Proposition 4.17** Soit  $S$  une surface de Kummer avec  $T$  le 2-tore complexe associé. Pour que  $S$  soit projectif il est nécessaire et suffisant que  $T$  soit une variété abélienne (un tore complexe projectif).

*Preuve.* Si  $T$  est une variété abélienne, nous avons une classe ample  $x \in NS(T)$ . Évidemment,  $(x, x) > 0$ . De plus, nous savons que  $\alpha$  multiple la forme d'intersection, ce qui nous donne que  $(\alpha(x), \alpha(x)) > 0$  et divisoriale. Ainsi, par le théorème de Kodaira, nous avons que  $S$  est projective.

Dans l'autre direction, nous utilisons la proposition 4.8 pour décomposer le groupe de Néron-Severi de  $S$  de la façon suivante :

$$NS(S) = ((N_S)^\perp)^\perp \oplus \alpha(NS(T))$$

Ici,  $((N_S)^\perp)^\perp$  n'est rien d'autre que le plus petit réseau primitif contenant  $N_S$ . Si  $x$  est une classe ample de  $S$ , alors nous pouvons décomposer  $x$  avec la décomposition précédente :

$$x = e + \alpha(y)$$

En utilisant le fait que  $(x, x) > 0$  et  $(e, e) \leq 0$  couplé avec le fait que  $\alpha$  multiplie par 2 la forme d'intersection, nous avons que  $y$  est une classes divisoriale vérifiant  $(y, y) > 0$ . Le théorème de Kodaira nous permet de conclure que  $T$  est projective.  $\square$

**Théorème 4.18 (Théorème de Torelli pour les surfaces Kummer projectives)** Soient  $S'$  une surface K3 de type Kummer projective et  $S$  une surface K3. Supposons que nous avons une isométrie de Hodge  $\phi^* : H^2(S') \rightarrow H^2(S)$  qui induit un isomorphisme sur les classes effectives, alors il existe un isomorphisme  $f : S \rightarrow S'$  qui l'induit.

*Preuve.* Premièrement, le fait que  $S'$  est projective nous permet de considérer une classe ample  $d$ . Puisque  $\phi^*$  préserve la structure de Hodge, nous pouvons utiliser le théorème de Lefschetz sur les classes (1,1) pour obtenir que  $\phi(d)$  est une classe divisoriale de norme positive. Ainsi, par le théorème de Kodaira sur la projectivité d'une surface, nous avons que  $S$  est projective.

Soit  $N \in N(S')$  une classe nodale. En utilisant le fait que  $\phi^*$  préserve les classes effectives et est une isométrie, nous avons que  $\phi^*$  est une classe effective indécomposable, ce qui, en appliquant la proposition 2.17, nous dit que cette classe est irréductible. Nous concluons par la proposition 2.21 que  $\phi^*(N)$  est nodale. Si nous notons  $N_S$  l'image de nos 16 classes nodales distinguée de  $S'$ , nous avons que  $N_S$  est alors constituée de 16 classes nodales. Soit  $N, N' \in N_S$ , nous savons que si  $N$  et  $N'$  sont distinctes, alors  $(N, N') = 0$ . Si nous combinons cela avec le fait que l'auto-intersection d'une classe nodale est non nulle, nous obtenons que les classes nodales de  $S$   $N_1, \dots, N_{16}$  sont représentables par des courbes  $(-2) C_1, \dots, C_{16}$  toutes deux-à-deux disjointes. En appliquant la proposition 4.16, nous obtenons que  $S$  a la structure d'une surface de Kummer dont le 2-tore associé est noté par  $T$ . La proposition 4.17 nous dit que  $T$  est une variété abélienne. En particulier,  $T$  admet une classe ample, ce qui nous permet d'appliquer le théorème 4.2.  $\square$

**Théorème 4.19 (Théorème de Torelli faible pour les surfaces de Kummer projectives)** *Supposons que  $S'$  est une surface de Kummer projective et  $S$  est une surface K3. Si nous avons une isométrie de Hodge  $\phi^* : H^2(S', \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$ , alors  $S'$  et  $S$  sont biholomorphes.*

*Preuve.* Puisque  $\phi^*$  est une isométrie,  $\phi^*$  préserve les éléments positifs. Conséquemment,  $\phi^*$  envoie le cône de Kähler  $C_{S'}^+$  sur  $C_S^+$  ou  $-C_S^+$ . Quite à composer  $\phi$  avec  $-Id$ , nous pouvons supposer que nous sommes dans le premier cas. La proposition 2.30 nous dit que nous pouvons trouver un élément  $g \in W_S$  tel que  $g \circ \phi^*$  préserve le cône de Kähler. Conséquemment, la proposition 2.25 nous dit que  $g \circ \phi^*$  est une isométrie de Hodge et nous pouvons appliquer le théorème 4.18 précédent pour obtenir que  $S'$  et  $S$  sont biholomorphes.

□

## CHAPITRE 5

### TORELLI LOCAL ET THÉORIE DE LA DÉFORMATION

Dans ce chapitre, nous discutons de la théorie des déformations pour une variété complexe compacte. Dans un premier temps, nous nous contentons d'exposer les principaux résultats en suivant (Barth *et al.*, 2004).

Dans un deuxième temps, nous exposons la théorie générale de l'application des périodes en suivant (Voisin, 2002, Partie III).

Finalement, nous allons spécialiser cette théorie générale au cas des surfaces  $K3$ . Nous en déduisons le théorème de Torelli local dont la formulation développée dans le langage est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 5.1 (Torelli-local)** *Soit  $X_0$  une surface  $K3$  et notons  $p : X \rightarrow S$  la famille de Kuranishi. Celle-ci est lisse et universelle pour tout point dans un petit voisinage de 0 dans  $S$ . De plus, toutes les fibres sont des surfaces  $K3$ . Si nous marquons la fibre centrale, nous pouvons voir l'application des périodes comme étant une application à valeurs dans  $\Omega$  :*

$$\mathcal{P}^{2,2} : S \rightarrow \Omega$$

*Sous cette identification, l'application des périodes est un isomorphisme local.*

#### 5.1 Théorie des déformations d'une variété lisse compacte

**Définition 5.2 (Déformation)** *Soit  $X_0$  une variété lisse complexe compacte. Une déformation de  $X_0$  est le quadruplet suivant  $\mathcal{X} = (X, S, p : X \rightarrow S, 0)$  satisfaisant les conditions suivantes :*

1.  $X$  et  $S$  sont des espace complexes connexes.
2.  $p$  est holomorphe, surjectif, propre, plat et toutes les fibres sont des variétés lisses.
3.  $0 \in S$  tel que  $p^{-1}(0) = X_0$ .

*Dans le cas où  $S$  et  $X$  sont toutes les deux des variétés complexes lisses, alors la condition de platitude revient à dire que  $p$  est une submersion. Dans ce cas, nous appelons  $\mathcal{X}$  une déformation lisse.*

Dans le cas d'une déformation lisse, le résultat suivant de géométrie différentielle nous sera très utile.

**Théorème 5.3 (Théorème d'Ehresmann)** (Voisin, 2002, p 220) Soit  $p : X \rightarrow Y$  une submersion propre entre deux variétés  $C^\infty$ . Sous ces hypothèses, nous avons que  $p$  est une fibration  $C^\infty$ , c'est-à-dire que pour tout  $y \in Y$ , il existe un voisinage ouvert de  $y$   $U \subset Y$  tel que  $p^{-1}(U) \simeq p^{-1}(y) \times U$ .

**Définition 5.4 (L'application de Kodaira-Spencer)** Soit  $p : \mathcal{X} \rightarrow S$  une famille de variétés compactes complexes. Notons par  $\mathcal{X}_0$  la fibre centrale. Nous avons alors la suite exacte de fibrés vectoriels sur  $\mathcal{X}_0$  :

$$0 \rightarrow T\mathcal{X}_0 \rightarrow T\mathcal{X}|_{\mathcal{X}_0} \rightarrow T_0S \rightarrow 0$$

Ainsi, nous avons le morphisme de connexion dans la suite exacte longue de cohomologie :

$$\rho : T_0S \rightarrow H^1(\mathcal{X}_0, T\mathcal{X}_0)$$

L'application  $\rho$  est appelée l'application de Kodaira-Spencer. Dans le cas où notre déformation n'est pas lisse, nous devons utiliser l'espace tangent de Zariski.

De façon plus concrète, nous pouvons comprendre ce morphisme en utilisant la cohomologie de Čech. En utilisant le théorème du rang, nous pouvons couvrir  $\mathcal{X}$  par des ouverts  $U_i$  tels que nous avons des coordonnées locales sur  $\mathcal{X}$  et  $S$  dont la projection  $p$  s'écrit :

$$p(z_1^i, \dots, z_n^i, \omega_1^i, \dots, \omega_r^i) = (\omega_1^i, \dots, \omega_r^i)$$

Si  $v \in T_0S$ , nous pouvons « relever » ce vecteur pour obtenir des champs de vecteurs  $v_i \in \Gamma(U_i, T\mathcal{X})$  vérifiant la condition  $dp(v_i) = v$ . L'exactitude de la suite

$$0 \rightarrow T\mathcal{X}_0 \rightarrow T\mathcal{X}|_{\mathcal{X}_0} \rightarrow T_0S \rightarrow 0$$

nous dit que  $v_{ij} = v_i - v_j$  nous définit un cocycle dans  $\check{H}^1(\mathcal{X}_0, T\mathcal{X}_0)$ , ce qui correspond à « dériver » les fonctions de transitions entre les coordonnées  $z_i$  et  $z_j$  par rapport à notre vecteur  $v$ .

**Proposition 5.5 (Fonctorialité de Kodaira-Spencer)** (Barth et al., 2004, p 38) Soit  $X_0$  une variété lisse compacte. Si  $f : S' \rightarrow S$  est un morphisme entre deux variétés analytiques et  $p : X \rightarrow S$  une déformation de  $X_0$ , alors  $f^*X$  est encore une déformation de  $X_0$ . De plus, nous avons l'égalité suivante sur le morphisme de Kodaira-Spencer :

$$\rho_{S'} = \rho_s \circ f_*, 0'$$

où  $f_* : T_0S' \rightarrow T_0S$  est le morphisme induit sur les espaces tangents de Zariski.

**Définition 5.6 (Déformations complètes, universelles et versales)** Une déformation  $p : X \rightarrow S$  de  $X_0$  est dite complète en 0 si, pour toutes autres déformations  $p' : X' \rightarrow S'$  de  $X_0$  avec  $0'$  comme point de base, nous avons un morphisme  $f : S' \rightarrow S$  préservant les points de base tels que  $f^*X = X'$  au niveau des germes.

1. Dans le cas où  $f$  est uniquement déterminé par  $X'$ , nous disons que  $p : X \rightarrow S$  est une déformation universelle.
2. Dans le cas où  $f$  a sa dérivée en  $0'$  déterminée par  $X'$ , nous disons que  $p : X \rightarrow S$  est une déformation versale.

**Théorème 5.7 (Théorème de Kuranishi)** (Barth et al., 2004, p 37) Soit  $X_0$  une variété compacte lisse, alors  $X$  admet une déformation  $\mathcal{X}$  versale que nous appellerons la déformation de Kuranishi. Si, dans un voisinage ouvert  $U$  de 0, nous avons une constante  $h^1$  telle que pour tout  $s \in U$

$$h^1(X_s, TX_s) = h^1$$

la restriction de la famille Kuranishi à une déformation de  $X_s$  est complète et versale. De plus, nous avons les assertions suivantes :

1. Si  $H^2(X_0, TX_0) = 0$ , alors  $X$  admet une déformation versale lisse.
2. Si  $H^0(X, TX_0) = 0$ , alors  $X$  admet une déformation universelle.
3. S'il existe une déformation universelle, alors toutes les déformations versales sont isomorphes à cette déformation.

Un autre théorème important est donné par Kodaira-Spencer.

**Théorème 5.8 (Caractérisation de la complétude)** (Barth et al., 2004, p 38) Pour qu'une déformation soit complète, il est suffisant et nécessaire que l'application de Kodaira-Spencer soit surjective.

Finalement, nous déduisons le résultat suivant.

**Lemme 5.9** Soit  $p : X \rightarrow S$  une déformation lisse de  $X_0$ . Si cette déformation est universelle, alors l'application de Kodaira-Spencer est un isomorphisme.

*Preuve.* Nous savons par le théorème de Kodaira-Spencer précédent que  $\rho_S$  est au moins surjectif. Si nous considérons la suite exacte longue en cohomologie définissant l'application de Kodaira-Spencer, nous avons alors la suite exacte courte d'espaces vectoriels :

$$0 \rightarrow \ker \rho_S \rightarrow T_0S \rightarrow H^1(X_0, TX_0) \rightarrow 0$$

Puisque nous travaillons au niveau des germes, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $S$  est un ouvert convexe de  $\mathbb{C}^n$ . Nous pouvons dans ce cas identifier  $T_0S$  avec  $\mathbb{C}^n$ . Dans ce cas, nous pouvons décomposer  $\mathbb{C}^n = \ker \rho_S \oplus W$  et considérer  $S' = W \cap S$ . Notons par  $X|_{S'}$  la restriction de  $X$  sur  $S'$  et  $\rho_{S'}$  l'application de Kodaira-Spencer associée. Par functorialité de l'application, nous avons que  $\rho_{S'} : T_0S' \rightarrow H^1(X_0, TX_0)$  est un isomorphisme. Ainsi, par le théorème de Kodaira-Spencer, nous avons que  $X|_{S'}$  est une déformation complète. Or l'universalité de  $X$  nous dit que  $X = X|_S$ , ce qui montre bien que  $\rho_S$  est un isomorphisme.  $\square$

**Théorème 5.10 (Déformation d'une variété kählérienne)** (Voisin, 2002, p 236) Soit  $\mathcal{X}$  une déformation lisse d'une variété kählérienne  $X_0$ , alors dans un voisinage ouvert assez petit de 0 toutes les fibres  $X_t$  sont également des variétés kählériennes. De plus, les nombres de Hodge sont constants.

## 5.2 Application des périodes et les théorèmes de Griffiths

Dans cette section, nous résumons la théorie générale de l'application des périodes. Nous utilisons le livre de Voisin comme citation principale.

Dans ce qui suit, nous assumerons que  $p : X \rightarrow S$  est une déformation lisse de la fibre centrale  $X_0$  qui est kählérienne. et  $S$  est suffisamment petit tel que toutes fibres sont Kählériennes et  $S$  est contractible. Quitte à restreindre  $S$ , nous pouvons assumer par le théorème 5.3 d'Ehresmann que  $X$  est un fibré  $C^\infty$  trivial  $X_0 \times S$ . Dans ce cas, l'image directe supérieure  $R^k p_* \mathbb{C}$  est un système local sur  $S$ . Plus concrètement, nous avons que  $R^k p_*$  est la faisicification du préfaisceau suivant :

$$U \mapsto H^2(p^{-1}(U), \mathbb{C}|_U)$$

En particulier, les fibres s'identifient à  $H^2(X_s, \mathbb{C})$  (Voisin, 2002, p 231).

Puisque  $S$  est contractible, le système local  $R^k p_* \mathbb{C}$  doit être trivial. En particulier, nous avons un isomorphisme avec le système local trivial à valeurs dans  $H^k(X_0, \mathbb{C})$  que nous noterons  $\underline{H^k(X_0, \mathbb{C})}$ .

**Définition 5.11 (Connexion plate sur un système local)** En général, si  $L$  est un système local d'espaces vectoriels complexes sur une variété complexe lisse  $S$ , nous pouvons poser  $L \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S$  le fibré vectoriel holomorphe muni d'une connexion holomorphe plate  $\nabla$ . Considérons des sections  $s_1, s_2, \dots, s_n$  trivialisant localement le système local  $L$ . Ces sections nous donnent également par extension une trivialisatation du faisceau  $L \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S$ . Si  $s = \sum f_i s_i$  est une section locale de  $L \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S$ , alors :

$$\nabla(s) = \sum_i s_i \otimes df_i$$

Il peut être montré en utilisant que les transition sont constantes que  $\nabla$  est bien défini globalement et que cette connexion est plate.

Introduisons la notation  $\mathcal{H}^k = R^k p_* \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S$ . Ces fibrés holomorphes sont appelés les fibrés de Hodge.

Pour revenir au cadre précédent, si nous regardons  $(\mathcal{H}^k, \nabla)$  et  $(\underline{H^k(X_0, \mathbb{C})}, \nabla)$  munis des connexions plates, alors l'isomorphisme de système local décrit plus haut est plat.

**Définition 5.12 (L'application des périodes)** En utilisant l'isomorphisme entre  $\mathcal{H}^k$  et  $\underline{H^k(X_0, \mathbb{C})}$ , Si  $1 \leq p \leq k$ , l'application des périodes  $\mathcal{P}^{k,p}$  est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{k,p} : S &\rightarrow Gr(b_{k,p}, H^k(X_0, \mathbb{C})) \\ s &\mapsto [F^p H^k(X_s, \mathbb{C})] \end{aligned}$$

Ici,  $Gr(b_{k,p}, H^k(X_0))$  est la grassmannienne et  $b_{k,p} = \dim_{\mathbb{C}} F^p H^k(X_0)$ .

**Théorème 5.13 (Holomorphicité)** (Voisin, 2002, p 244) L'application des périodes varie de façon holomorphe pour  $p \geq k$  :

$$\mathcal{P}^{k,p} : S \rightarrow Gr(b_{k,p}, H^k(X_0))$$

Une autre reformulation utile est de dire que

$$\mathcal{F}^p \mathcal{H}^k = \bigcup_{s \in S} F^p H^k(X_s)$$

est un sous-fibré vectoriel holomorphe de  $\mathcal{H}^k$ .

Avant de citer le théorème de transversalité, nous avons besoin de rappeler quelques concepts sur les grassmanniennes.

**Définition 5.14 (Espace tangent de la grassmannienne)** (Voisin, 2002, p 242) Soient  $V$  un espace vectoriel complexe de dimension  $n$  et  $1 \leq k \leq n$  un entier. Si  $P$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  de dimension  $k$ , alors nous voulons expliciter un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$T_P G(k, V) \simeq \text{hom}(P, V/P).$$

Nous nous contentons ici de décrire cet isomorphisme. Les détails sont donnés dans le livre de Voisin. Premièrement, nous rappelons que nous pouvons construire des cartes sur  $Gr(k, V)$  de la façon suivante. Considérons  $W$  un espace vectoriel supplémentaire à  $P$  :  $V = W \oplus P$ . Nous avons alors l'ensemble :

$$G_W = \{P' \in Gr(k, V) \mid V = W \oplus P'\}$$

Notons par  $\pi_P : V \rightarrow P$  et  $\pi_W : V \rightarrow W$  les projections induites par la décomposition  $V = W \oplus P$ .

Si  $P' \in G_W$ , il suit de la décomposition  $V = W \oplus P'$  que  $\pi_P|_{P'} : P' \rightarrow P$  est un isomorphisme. Nous pouvons alors construire l'application  $h_{V'} : P \rightarrow V$  définie par

$$h_{V'} = \pi_W \circ (\pi_P|_{P'})^{-1}$$

Nous avons alors l'application biholomorphe

$$\Phi : G_W \rightarrow \text{hom}(P, V)$$

$$\Phi(v') = h_{v'}$$

ce que nous voyons comme étant un morphisme de fibrés vectoriels triviaux  $Gr(k, V) \times P$  et  $Gr(k, v)G_W \times V$  restreints à notre ouvert  $G_W$ . Nous avons le fibré vectoriel tautologique :

$$\mathcal{S} = \{(P', v) \in Gr(k, V) \times V \mid v \in P'\}$$

Nous pouvons voir  $\mathcal{S}|_{G_W} = \text{im}(i + \Phi)$  où  $i$  est l'inclusion de  $P$  dans  $V$ . Si  $b_1, \dots, b_k \in P$  est une base, nous pouvons « relever » cette base pour obtenir des sections locales  $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k$  de  $\mathcal{S}$  vérifiant  $\tilde{b}_i(P) = b_i$  pour tout  $i$ . L'identification souhaitée est alors donnée par l'application :

$$T_P Gr(k, V) \rightarrow \text{hom}(P, V/P)$$

$$v \mapsto (b_i \mapsto v(\tilde{b}_i))$$

Il est montré dans Voisin que ce morphisme est indépendant du choix de notre base de  $P$  et du relèvement choisi.

Par la construction précédente, la différentielle de l'application des périodes devrait prendre des valeurs dans  $\text{hom}(F^p H^k(X_s), H^k/F^p H^k(X_s))$ . Cependant, le théorème de transversalité de Griffiths nous dit que l'image est beaucoup plus petite.

**Théorème 5.15 (Transversalité)** (Voisin, 2002, p 246) *La différentielle de l'application des périodes est une application :*

$$d\mathcal{P}^{p,k} : T_s S \rightarrow \text{hom}(F^p H^k(X_s), F^{p-1} H^k(X_s)/F^p H^k(X_s))$$

**Théorème 5.16 (Différentielle de l'application des périodes)** (Voisin, 2002, p 253) *Soient  $v \in T_0 S$  et  $k, p, q$  des entiers positifs tels que  $k = p + q$ . La différentielle de l'application des périodes*

$$d_0 \mathcal{P}^{p,k}(v) : H^q(\mathcal{X}_0, \Omega_{\mathcal{X}_0}^p) \rightarrow H^{q+1}(\mathcal{X}_0, \Omega_{\mathcal{X}_0}^{p-1})$$

est donnée par la formule suivante

$$d_0 \mathcal{P}^{p,k}(v)(\omega) = \text{int}(\rho(v) \cup \omega)$$

où  $\rho$  est l'application de Kodaira-Spencer.  $\cup$  est le cup-produit sur la cohomologie

$$\cup : H^1(\mathcal{X}_0, TX_0) \otimes H^q(\mathcal{X}_0, \Omega_{\mathcal{X}_0}^p) \rightarrow H^{q+1}(\mathcal{X}_0, TX_0 \otimes \Omega_{\mathcal{X}_0}^p)$$

et  $\text{int}$  est le morphisme induit sur la cohomologie par le produit intérieur :

$$\text{int} : TX_0 \otimes \Omega_{\mathcal{X}_0}^p \rightarrow \Omega_{\mathcal{X}_0}^{p-1}$$

### 5.3 Déformation des surfaces K3

Nous allons maintenant utiliser la théorie précédente pour prouver le théorème de Torelli local.

*Preuve.*

Premièrement, pour vérifier que la famille de Kuranishi est lisse et universelle, il suffit de montrer selon le théorème de Kuranishi 5.7 que  $H^2(X_0, TX_0) = H^0(X, TX_0) = 0$ .

Dans le cas où  $X_0$  est une surface K3, nous avons par dualité de Serre et par l'isomorphisme de Dolbeault :

$$H^2(X_0, TX_0) \simeq H^0(X_0, \Omega_{X_0}) \simeq H^{1,0}(X_0) = 0$$

$$H^0(X_0, TX_0) \simeq H^2(X_0, \Omega_{X_0}) \simeq H^{1,2}(X_0) = 0$$

Le fait que  $H^{1,0}$  et  $H^{1,2}$  sont zéros vient du calcul des nombres de Hodge dans le chapitre 2.

Considérons un voisinage ouvert  $U$  de 0 tel que nous sommes dans la situation du théorème 5.10. Ainsi, pour tout  $s \in U$ , nous avons que  $X_s$  est une surface kählérienne avec les nombres de Hodge d'une surface K3. La proposition 2.9 nous dit que  $X_s$  est une surface K3.

Pour la deuxième partie, considérons la composante  $\mathcal{P}^{2,2}$  de l'application des périodes :

$$\mathcal{P}^{2,2} : S \rightarrow \mathbb{P}(H^2(X_0, \mathbb{C}))$$

Nous savons par le théorème de Griffiths sur l'holomorphie de la période 5.13 que cette application est holomorphe et, par le théorème de transversalité 5.15, nous savons que la différentielle vérifie :

$$d_0 \mathcal{P}^{2,2} : T_0 S \rightarrow \text{hom}(H^{2,0}(X_0), H^{1,1}(X_0))$$

Ici, nous utilisons  $H^{1,1}(X_0) = F^1 H^2(X_0) / F^2 H^2(X_0)$ . Nous souhaitons montrer que cette application est un isomorphisme. Pour ce faire, nous utilisons le théorème 5.16 pour calculer la différentielle pour un vecteur  $v \in T_0 S$  :

$$d_0 \mathcal{P}^{2,2}(V)(\omega) = \text{int}(\rho(v) \cup \omega)$$

Nous savons par la proposition 5.9 que l'application de Kodaira-Spencer  $\rho : T_0 S \rightarrow H^1(X_0, TX_0)$  est un isomorphisme. Par le corollaire 2.6, nous savons que le morphisme « int » est une forme bilinéaire non-dégénérée. Ainsi, il est suffisant de montrer que  $\cup : H^1(X_0, TX_0) \otimes H^0(X_0, K_{X_0}) \rightarrow H^1(X_0, TX_0 \otimes K_{X_0})$  est non-dégénérée. Ceci est clair puisque  $K_{X_0}$  est trivial. Ainsi,  $d_0 \mathcal{P}^{2,2} : T_0 S \rightarrow \text{hom}(H^{2,0}(X_0), H^{1,1}(X_0))$  est un isomorphisme. Si nous marquons la fibre centrale  $\phi : H^2(X_0, \mathbb{Z}) \rightarrow L$ , nous avons alors un isomorphisme induit entre  $\mathbb{P}(H^2(X_0, \mathbb{C})) \simeq \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$ , ce qui nous permet de voir l'application des périodes comme un morphisme à valeurs dans  $\Omega$ . Puisque  $\dim T_0 S = \dim H^1(X_0, TX_0) = 20$  et que  $\dim \Omega = 20$  couplés avec le fait que  $d_0 \mathcal{P}^{2,2} : T_0 S \rightarrow \text{hom}(H^{2,0}(X_0), H^{1,1}(X_0))$  est un isomorphisme, nous concluons que  $\mathcal{P}^{2,2} : S \rightarrow \Omega$  est un isomorphisme local par le théorème des fonctions inverses.  $\square$

## CHAPITRE 6

### LE THÉORÈME DE DENSITÉ DES SURFACES K3 EXCEPTIONNELLES

Dans cette section, nous allons étudier les surfaces K3 de Kummer dites exceptionnelles. Le résultat principal sera le théorème de densité.

Les énoncés principaux de ce chapitre correspondent (Looijenga et Peters, 1980, section 6)

**Théorème 6.1 (Théorème de densité)** *Les périodes des surfaces K3 de type Kummer exceptionnelles marquées forment un ensemble dense dans le domaine des périodes  $\Omega$ .*

Une conséquence immédiate de ce théorème et du théorème de Torelli local 5.1 est que l'application des périodes pour les surfaces K3 marquées est surjective dans  $\Omega$ . Plus précisément, nous avons l'énoncé suivant.

**Corollaire 6.2 (Surjectivité de la période)** *Chaque point  $\omega \in \Omega$  correspond à la période d'une surface K3 marquée.*

#### 6.1 Surface de Kummer exceptionnelle

**Définition 6.3** *Soit  $S$  une surface compacte kählérienne. On dit que cette surface est exceptionnelle si le rang du groupe de Néron-Servri est de rang maximal. En d'autres termes, nous avons :*

$$\text{rang } NS(S) = h^{1,1}$$

*Ici, nous avons  $h^{1,1} = \dim_{\mathbb{C}} H^{1,1}(S)$ . De plus, nous notons par  $E(S) = NS(S) \perp_{\mathbb{C}} H^2(S, \mathbb{Z})$  le réseau transcendantal.*

**Lemme 6.4** *Si  $S$  est une surface K3 exceptionnelle, nous avons que  $S$  est projective.*

*Preuve.* Si  $S$  est exceptionnelle, nous avons par le rang que  $H^{1,1}(S, \mathbb{R}) = NS(S) \otimes \mathbb{R}$ . Or nous savons que la forme d'intersection sur  $H^{1,1}(S, \mathbb{R})$  est de type hyperbolique par la proposition 2.18. Conséquemment,

nous avons une classe divisoriale  $x$  vérifiant  $(x, x) > 0$  ce qui, par le théorème de Kodaira, implique que  $S$  est projective.  $\square$

**Proposition 6.5** Soit  $S$  une surface compacte kählérienne. Pour que  $S$  soit exceptionnelle, il est nécessaire et suffisant que  $H^{2,0}(S) \oplus H^{0,2}$  soit rationnellement défini.

*Preuve.* Dans le cas où  $S$  est exceptionnelle, nous avons que  $NS(S) \otimes \mathbb{C} = H^{1,1}(S, \mathbb{C})$ . Conséquentment,  $NS(S)^\perp$  est un sous-réseau de rang  $h^{2,0} + h^{0,2}$  contenu strictement dans  $H^{2,0}(S) \oplus H^{0,2}$ . Ainsi, par le rang, nous avons que  $NS(S)^\perp \otimes \mathbb{C} = H^{2,0}(S) \oplus H^{0,2}(S)$ , ce qui montre la première implication.

Réciproquement, si  $H^{2,0}(S) \oplus H^{0,2}(S) = M \otimes \mathbb{C}$  où  $M$  est un sous-espace vectoriel rationnel de  $H^2(S, \mathbb{Q})$ , nous avons que  $H^{2,0}(S) \oplus H^{0,2}(S)$  contient un sous-réseau  $N \subset H^2(S, \mathbb{Z})$  de rang  $h^{2,0} + h^{0,2}$ . Conséquentment, son complément orthogonal est contenu dans  $H^{1,1}(S)$ . Or, par le théorème de Lefschetz sur les classes  $(1, 1)$ , nous avons que  $N^\perp \subset NS(S)$ . Ceci constitue un sous-réseau de rang  $h^{1,1}$ , ce qui montre bien que  $\text{rang} NS(S) = h^{1,1}$ . Donc  $h^{1,1}$  est exceptionnelle.  $\square$

**Proposition 6.6** Si  $S$  est une surface Kummer et  $T$  le 2-tore associé, nous avons que  $S$  est exceptionnelle si et seulement si  $T$  est exceptionnelle.

*Preuve.* Dans le cas d'une surface de Kummer, nous savons par la proposition 4.8 que nous avons la décomposition suivante :

$$NS(S) = (N_S^\perp)^\perp \oplus \alpha(NS(T))$$

Conséquentment,  $\text{rang} NS(S) = h^{1,1}(S) = 20$  si et seulement si  $\text{rang} NS(T) = 4$ . Or  $h^{1,1}(T) = 4$ , ce qui implique directement le résultat.  $\square$

**Proposition 6.7** Soit  $T$  un sous-réseau de rang 2 dans  $L$  qui vérifie les conditions suivantes :

1.  $(, )|_T > 0$ .
2. Pour tout  $x \in T$ , nous avons  $(x, x) \in 4\mathbb{Z}$ .

Sous ces hypothèses, nous avons qu'il existe une surface de Kummer  $S$  avec un marquage  $\phi : H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow L$  qui envoie  $E_S$  sur  $T$ .

Avant de donner la démonstration, nous devons introduire quelques résultats sur les réseaux.

**Théorème 6.8** (Barth et al., 2004, p 18) Soit  $L$  un réseau pair et unimodulaire qui contient une copie de  $H^k$  où  $H$  est le réseau hyperbolique donné par la forme quadratique :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit  $\Gamma$  un réseau pair, alors nous avons les assertions suivantes :

1. Si  $\text{rang } \Gamma \leq k$ , alors il existe un plongement primitif de  $\Gamma$  dans  $H^k$ .
2. Si  $\text{rang } \Gamma \leq k - 1$ , alors ce plongement est unique à une isométrie de  $L$  près.

Il est important de remarquer que, sous ces hypothèses, un sous-réseau hyperbolique est toujours primitif.

**Lemme 6.9** Si  $L$  vérifie les hypothèses du théorème précédent, alors tout plongement de  $H^k$  est primitif dans  $L$ .

*Preuve.* Considérons une base standard  $e_i, f_j$  pour la  $H^k$  vérifiant  $(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ . Soit  $\ell \in L$  un élément arbitraire, alors nous avons les décompositions suivantes :

$$\begin{aligned} x(\ell) &= \ell - \sum_i ((\ell, e_i)f_i + (\ell, f_i)e_i) \\ y(\ell) &= \sum_i ((\ell, e_i)f_i + (\ell, f_i)e_i) \end{aligned}$$

Nous avons  $\ell = x(\ell) + y(\ell)$ . Il est facile de voir que  $(x(\ell), y(\ell)) = 0$ . Conséquemment, nous avons la décomposition :

$$L = H^k \oplus (H^k)^\perp$$

Donc  $L/H^k \simeq (H^k)^\perp$ , ce qui montre bien que  $H^k$  est un sous-réseau primitif.  $\square$

**Corollaire 6.10** *Si nous sommes sous les hypothèses du théorème précédent avec  $\text{rang } \Gamma \leq 3$ , alors le plongement de  $\Gamma$  est primitif dans  $L$ .*

Revenons à la proposition 6.7.

*Preuve.* Nous allons construire un 2-tore complexe  $Y$  qui vérifie :

$$E(Y) \simeq \frac{1}{2}T$$

Considérons  $\Gamma$  un réseau de rang 4 avec une orientation  $\det : \wedge^4 \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ . Nous avons alors la forme quadratique sur  $(\wedge^2 \Gamma, (\cdot, \cdot))$  définie par :

$$(x, y) := \det(x \wedge y)$$

Nous savons que cette forme quadratique est isomorphe à  $H^3$ . En particulier, elle est unimodulaire et paire. Ainsi, nous pouvons utiliser le théorème 6.8 pour obtenir que  $\frac{1}{2}T$  se plonge primitivement dans  $\wedge^2 \Gamma$ . Nous allons noter l'image de ce plongement par  $T'$ .

En travaillant sur  $\wedge^2 \Gamma \otimes \mathbb{R}$ , nous pouvons trouver une base orthonormale  $t_1, t_2, \dots, t_6$  qui jouit des propriétés suivantes :

1.  $t_1, t_2$  forme une base de  $T' \otimes \mathbb{R}$ .
2.  $t_3, \dots, t_6$  forme une base du complément orthogonal de  $T' \otimes \mathbb{R}$ .

L'existence d'une telle base nous est garantie par le fait que la forme quadratique sur  $T$  est strictement positive.

En voyant  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\wedge^2 \Gamma \otimes \mathbb{R}, \mathbb{C})$  comme un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ , il est possible de lui donner la  $\mathbb{C}$ -base « duale »  $t_1^*, \dots, t_6^*$  où les formes  $t_k^*$  vérifient la propriété usuelle :

$$t_i^*(t_j) = \delta_{ij}$$

Remarquons que la forme quadratique sur  $\wedge^2 \Gamma$  induit un  $\mathbb{C}$ -isomorphisme « d'évaluation » défini par ex-

tension :

$$\Phi : \bigwedge^2 \Gamma \otimes \mathbb{C} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}} \left( \bigwedge^2 \Gamma \otimes \mathbb{R}, \mathbb{C} \right)$$

$$\ell \otimes z \mapsto (t \mapsto (\ell, t)z)$$

Cet isomorphisme induit une forme bilinéaire sur  $\text{Hom}_{\mathbb{R}} \left( \bigwedge^2 \Gamma \otimes \mathbb{R}, \mathbb{C} \right)$  qui vérifie la propriété suivante pour tout  $\omega_1, \omega_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{R}} \left( \bigwedge^2 \Gamma \otimes \mathbb{R}, \mathbb{C} \right)$  :

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (\omega_1, \omega_2) \det$$

Nous pouvons alors considérer la forme  $\omega = t_1^* + it_2^*$ .

$$(\omega, \omega) = (t_1^*, t_1^*) - (t_2^*, t_2^*) = 0$$

$$(\omega, \bar{\omega}) = (t_1^*, t_1^*) + (t_2^*, t_2^*) = 2$$

Ceci nous donne  $\omega \wedge \omega = 0$  et  $\omega \wedge \bar{\omega} = 2 \det$ . Ainsi, nous avons  $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2$  pour  $\omega_1, \omega_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{C})$ .

Nous obtenons ainsi une application de  $\Gamma \rightarrow \mathbb{C}^2$  donnée par la formule suivante :

$$\Gamma \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$\gamma \mapsto (\omega_1(\gamma), \omega_2(\gamma)) = (z_1, z_2)$$

La condition  $\omega \wedge \bar{\omega} = 2 \det$  nous donne que cette application est injective. Ainsi,  $\Gamma$  est un sous-réseau de rang maximal, donc nous avons le tore  $Y = \mathbb{C}^2 / \Gamma$ . Cette application nous définit un isomorphisme :

$$\psi : \Gamma \rightarrow H_1(T, \mathbb{Z})$$

En complexifiant, nous trouvons

$$\psi^* : H^1(T, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\Gamma \otimes \mathbb{R}, \mathbb{C})$$

qui vérifie pour tout  $i$  la propriété  $\psi^* d_z = \omega_i$ , ce qui nous donne une isométrie au niveau du  $H^2$  :

$$\psi^* \wedge \psi^* : H^T(T, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigwedge^2 \Gamma, \mathbb{Z})$$

En complexifiant, l'application

$$\psi^* \wedge \psi^* : H^2(T, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}} \left( \bigwedge^2 \Gamma \otimes \mathbb{R}, \mathbb{C} \right)$$

envoie  $dz_1 \wedge dz_2$  sur la forme  $\omega$ . Puisque  $\omega = t_1^* + it_2^*$  et les  $t_i$  sont des éléments de  $T' \otimes \mathbb{R}$ , nous concluons que  $H^{2,0}(T) \oplus H^{0,2}(T)$  est rationnellement défini. Notons par  $S$  la surface de Kummer associée à  $T$ . Nous avons donc par la proposition 6.6 que  $S$  est exceptionnelle. En considérant le monomorphisme de la proposition 4.3

$$\alpha : H^2(T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$$

et en utilisant le fait que  $\alpha$  multiplie la forme d'intersection par 2 et le fait que  $\alpha_{\mathbb{C}}(H^{2,0}) \subset H^{2,0}$ , nous trouvons que  $E(S)$  est isomorphe à  $T$ . En fixant un marquage  $\phi : H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow L$ , nous obtenons un plongement primitif de  $T$  dans  $L$ . Ainsi, en utilisant la deuxième assertion du théorème 6.8, nous pouvons supposer que  $\phi(E(S))$  est envoyé sur  $T$ .  $\square$

**Proposition 6.11** La collection des plans  $\Pi \subset L \otimes \mathbb{R}$  rationnellement définis qui satisfait la condition pour tout  $\ell \in L \cap \Pi$

$$(\ell, \ell) \in 4\mathbb{Z}$$

est dense dans  $Gr(2, L \otimes \mathbb{R})$ .

La preuve utilisera le lemme suivant.

**Lemme 6.12** Soient  $m, n \in \mathbb{N}$  et  $M$  un réseau qui contient un vecteur primitif  $e_0 \in M$  tel que nous avons l'égalité suivante

$$(e_0, e_0) \equiv m \pmod{n}$$

alors les droites de  $M \otimes \mathbb{R}$  engendrées par un vecteur primitif  $e \in M$  vérifiant

$$(e, e) \equiv m \pmod{n}$$

forment un ensemble dense dans  $\mathbb{P}(M \otimes \mathbb{R})$ .

*Preuve.* Considérons un ouvert  $U$  de  $\mathbb{P}(M \otimes \mathbb{R})$  non-vide. Pour montrer le lemme, il est suffisant de montrer qu'il existe un point  $U$  engendré par un vecteur primitif  $e$  vérifiant  $(e, e) \equiv m \pmod{n}$ . Par densité des

rationnelles, nous savons qu'il existe un point dans  $U$  qui est donné par la droite générée par un vecteur primitif  $e'$ .

Dans le cas où  $e_0$  et  $e'$  sont linéairement dépendants, nous avons fini. Ainsi, nous pouvons supposer que  $e_0, e'$  sont linéairement indépendants. Dans ce cas, nous pouvons considérer le sous-réseau de  $M$  que nous définissons par :

$$L = (\mathbb{R}e_0 + \mathbb{R}e') \cap M$$

Ce réseau est clairement de rang 2 et primitif comme sous-réseau de  $M$  et donc  $e_0, e'$  sont primitifs dans  $L$ , ce qui nous permet de trouver une base de  $L$  donnée par  $e', f$  où  $f \in L$ . Ainsi, nous pouvons écrire  $e_0$  dans cette base :

$$e_0 = ae' + bf$$

En utilisant le fait que  $e_0$  est également primitif, nous avons que  $\gcd(a, b) = 1$ . Soit  $k \in \mathbb{Z}$  arbitraire, nous pouvons former le vecteur suivant :

$$e_k = e_0 + kbe' = (a + kb)e' + bf$$

En utilisant la division euclidienne, nous obtenons que  $\gcd(a + kb, b) = \gcd(a, b) = 1$ , ce qui montre bien que  $e_k$  est primitif dans  $L$ . En prenant  $k \in n\mathbb{Z}$ , nous avons :

$$(e_k, e_k) \equiv (e_0, e_0) + 2kb(e_0e') + (kb)^2(e', e') \equiv (e_0, e_0) \pmod{n}$$

En observant que la droite engendrée par  $e_k$  se réécrit comme  $\mathbb{R}(e' + \frac{e_0}{kb})$ , nous pouvons choisir  $k \in n\mathbb{Z}$  de magnitude assez grande de telle sorte que la droite engendrée par  $e_k$  soit contenue dans  $U$ . Ainsi, en posant  $e = e_k$ , nous obtenons exactement le résultat souhaité.  $\square$

Nous avons également besoin de la proposition suivante.

**Proposition 6.13** Soient  $k = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $V$  un espace vectoriel de dimension au moins 2.

$$S = \{(\ell, P) \in \mathbb{P}(V) \times Gr(2, V) \mid \ell \subset P\}$$

Si nous considérons les projections  $\pi_1 : S \rightarrow \mathbb{P}(V)$  et  $\pi_2 : S \rightarrow Gr(2, V)$ , alors  $S$  est un fibré  $C^\infty$  (respectivement holomorphe) sur  $Gr(2, V)$  dont la fibre est  $\mathbb{P}^1$ . De plus,  $\pi_1$  est une submersion.

*Preuve.* Soit  $P$  un plan de  $V$ . Nous pouvons donner  $V$  une base de telle sorte que  $P$  soit un élément de l'ouvert affine  $U_{01}$  de  $Gr(2, V)$ , c'est-à-dire que les éléments de  $U_{01}$  sont donnés par les plans engendrés par les lignes d'une matrice de la forme suivante

$$P_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{11} & \dots & a_{1n-2} \\ 0 & 1 & a_{21} & \dots & a_{2n-2} \end{pmatrix}$$

où les coefficients  $a_{ij}$  sont arbitraires et  $n = \dim V$ . Clairement, les droites contenues dans le plan engendré par  $P_A$  sont de la forme

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 \end{pmatrix} P_A = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{11} & \dots & a_{1n-2} \\ 0 & 1 & a_{21} & \dots & a_{2n-2} \end{pmatrix}$$

modulo multiplication par  $k^*$ . Ainsi, il est clair par construction de  $S$  que les projections  $\pi_1, \pi_2$  sont surjectives. Donc nous déduisons que  $S$  est un fibré  $C^\infty$  (respectivement holomorphe) sur  $Gr(2, V)$  dont la fibre est  $\mathbb{P}^1$ . En prenant les ouverts affines usuels sur  $\mathbb{P}^1$ , par exemple  $U_0$ , nous obtenons que  $\pi_1$  s'écrit de la façon suivante en coordonnées affines  $U_0 \times U_{01}$  :

$$\pi_1 \left( (1, s_1), \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{11} & \dots & a_{1n-2} \\ 0 & 1 & a_{21} & \dots & a_{2n-2} \end{pmatrix} \right) = [1, s_1, a_{11} + s_1 a_{21}, \dots, a_{1n-2} + s_1 a_{2n-2}]$$

Clairement, cette application est une submersion, ce qui montre le résultat souhaité.  $\square$

Nous pouvons alors prouver la proposition 6.11.

*Preuve.* Soit  $U$  un ouvert non vide de  $Gr(2, L \otimes \mathbb{R})$ . Nous cherchons à montrer que  $U$  contient un plan  $\Pi$  rationnellement défini tel que pour tout  $\ell \in L \cap \Pi$  nous avons que :

$$(\ell, \ell) \in 4\mathbb{Z}$$

Puisque  $L$  contient une copie du réseau hyperbolique  $H$ , nous pouvons trouver un vecteur primitif  $v$  dans  $H$  dont la norme au carré est 4 (par exemple  $v = (1, 2)$ ). Puisque  $H$  est primitif dans  $L$ , nous avons que  $v$  l'est également. Par le lemme 6.12, l'ensemble des droites engendrées par un vecteur primitif  $v$  vérifiant

$$(v, v) \equiv 4 \pmod{8} \tag{6.1}$$

forme un ensemble dense de  $\mathbb{P}(V \otimes \mathbb{R})$ . Par la proposition 6.13 et par le fait que  $\pi_1, \pi_2$  sont des submersions, nous avons que  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont des applications ouvertes. Nous déduisons alors que l'ensemble des plans contenant un vecteur primitif vérifiant l'égalité 6.1 est dense dans  $Gr(2, V)$ .

Ainsi, nous pouvons choisir un plan  $P$  dans  $U$  qui contient un vecteur primitif  $e_0$  vérifiant 6.1.

Notons par  $M$  le complément orthogonal de  $e$ . Puisque  $L = -E_8 \oplus -E_8 \oplus H \oplus H \oplus H$ , nous déduisons que  $M$  contient une copie de  $H$ . Encore une fois,  $H$  contient un vecteur primitif  $v'$  dont la norme au carré est 64 (par exemple  $(1, 32)$ ). Ainsi,  $v'$  est primitif dans  $M$ . En appliquant le lemme 6.12 et la proposition 6.13, nous trouvons que les plans contenant un vecteur primitif  $w$  vérifiant

$$(w, w) \equiv 0 \pmod{64} \quad (6.2)$$

forment un ensemble dense de  $Gr(2, V)$ . Ainsi, en choisissant une boule suffisamment proche de  $P$ , nous pouvons trouver un vecteur primitif  $e_1 \in M$  vérifiant 6.2 tel que le plan  $P' = \mathbb{R}e_0 + \mathbb{R}e_1$  soit contenu dans  $U$ .

Nous allons maintenant montrer que  $P'$  possède les propriétés recherchées. Soit  $f \in P' \cap L$ . Nous allons considérer l'équation :

$$r = (e_1, e_1)f - (e_1, f)e_1$$

Le calcul suivant montre que  $r$  et  $e_1$  sont orthogonales.

$$(r, e_1) = (e_1, e_1)(f, e_1) - (e_1, f)(e_1, e_1) = 0$$

Donc  $r = ae_2$ . Nous obtenons alors l'égalité suivante :

$$(e_1, e_1)f = (e_1, f)e_1 + ae_2$$

En évaluant la norme au carré de chaque côté, nous trouvons :

$$(e_1, e_1)^2(f, f) = (e_1, f)^2(e_1, e_1) + a^2(e_2, e_2)$$

En prenant la valuation 2-adic  $v_2$  et en utilisant le fait que  $e_1$  satisfait 6.1 et  $e_2$  satisfait 6.2, nous trouvons :

$$v_2((e_1, e_1)^2(f, f)) = 4 + v_2((f, f)) \geq 5$$

$$v_2((e_1, f)^2(e_1, e_1)) = 2v_2((e_1, f)) + 2$$

$$v_2(a^2(e_2, e_2)) \geq 6$$

La première inégalité vient du fait que  $L$  est un réseau pair. En utilisant les propriétés d'une valuation, nous trouvons :

$$v_2((e_1, e_1)^2(f, f)) \geq \min\{v_2((e_1, f)^2(e_1, e_1)), v_2(a^2(e_2, e_2))\}$$

Nous obtenons que  $v_2((f, f)) \geq 2$ , ce qui montre bien que  $(f, f) \in 4\mathbb{Z}$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant prouver le théorème de densité 6.1.

*Preuve.* Nous notons par  $Gr^+(2, L \otimes \mathbb{R})$  la grassmannienne orientée. Rappelons que nous avons un revêtement de degré 2  $p : Gr^+(2, L \otimes \mathbb{R}) \rightarrow Gr(2, L \otimes \mathbb{R})$  qui est tout simplement donné en « oubliant » l'orientation. Nous avons un sous-ensemble  $U \subset Gr(2, L \otimes \mathbb{R})$  l'ensemble des plans dont la restriction de  $(\cdot, \cdot)$  de la forme quadratique sur  $L \otimes \mathbb{R}$  est positif défini. Il est facile de voir que  $U$  est un ouvert de  $Gr(2, L \otimes \mathbb{R})$ . En effet, si nous considérons sans perte de généralité l'ouvert affine  $U_{01}$ , nous obtenons les coordonnées standards :

$$\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{11} & \dots & a_{1, 18} \\ 0 & 1 & a_{21} & \dots & a_{2, 18} \end{pmatrix}$$

Nous obtenons un plan  $P$  engendré par les vecteurs  $v_1, v_2$ . La condition que la forme quadratique sur  $L \otimes \mathbb{R}$  est positive définie est équivalente au fait que la matrice suivante est positive définie

$$G(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) \\ (v_1, v_2) & (v_2, v_2) \end{pmatrix}$$

ce qui est clairement une condition ouverte. Il suffit de vérifier que les mineurs principaux sont strictement positifs, ce qui montre bien que  $U$  est un ouvert.

Notons par  $G_2^+ = p^{-1}(U)$  l'ouvert correspondant dans  $Gr^+(2, L \otimes \mathbb{R})$ . Nous avons clairement une application continue :

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega &\rightarrow G_2^+ \\ [\omega] &\mapsto P\{\operatorname{Re} \omega, \operatorname{Im} \omega\} \end{aligned}$$

Il est facile de voir que  $\Phi$  admet un inverse. Si nous avons un plan  $P(v_1, v_2) \in G_2^+$  avec  $v_1$  et  $v_2$  une base orthonormale, nous pouvons alors poser  $\omega = v_1 + iv_2$  et considérer le calcul suivant

$$\begin{aligned} (\omega, \omega) &= (v_1, v_1) - (v_2, v_2) = 0 \\ (\omega, \bar{\omega}) &= (v_1, v_1) + (v_2, v_2) = 2 \end{aligned}$$

ce qui nous détermine un élément de  $\Omega$ . De plus, notre base  $v_1, v_2$  est unique jusqu'à multiplication par  $SO(2)$ , ce qui correspond à multiplier  $\omega$  par un élément de  $S^1 \subset \mathbb{C}$ . Ainsi, l'application inverse  $\Phi^{-1} : G_2^+ \rightarrow$

$\Omega$

$$\Phi^{-1}(P(v_1, v_2)) = [v_1 + iv_2]$$

est bien définie. En utilisant le fait que l'application  $p$  est une application surjective ouverte couplé avec la proposition 6.11 et le fait que  $G_2^+$  est un ouvert, nous déduisons que l'ensemble des plans rationnellement définis vérifiant l'équation de 6.11 est dense dans  $G_2^+$ . En utilisant le fait que  $\Phi$  est un isomorphisme et la proposition 6.7, nous obtenons que l'ensemble des périodes des surfaces K3 exceptionnelles de type Kummer est dense dans  $\Omega$ .  $\square$

## CHAPITRE 7

### LE CÔNE DE KÄHLER SOUS DÉFORMATION

Nous sommes intéressés à étudier le cône de Kähler sous déformation. Le résultat principal de cette section sera la proposition suivante.

**Proposition 7.1** *Soient  $p : \mathcal{X} \rightarrow S$  et  $p' : \mathcal{X}' \rightarrow S$  deux déformations lisses de surfaces K3. De plus, nous allons supposer qu'il existe un isomorphisme de systèmes locaux*

$$\Phi : R^2 p'_* \mathbb{Z} \rightarrow R^2 p_* \mathbb{Z}$$

*de telle sorte que quand nous tensorisons par le faisceau  $\mathbb{C}$  et nous regardons les fibres en chaque point  $s \in S$ , nous avons une isométrie de Hodge :*

$$\Phi_{\mathbb{C},s} : H^2(\mathcal{X}'_s, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{C})$$

*Si  $U_k$  dénote l'ensemble des points de  $S$  tel que  $\Phi_{\mathbb{C}}$  envoie le cône de Kähler de  $\mathcal{X}'_s$  sur le cône de Kähler de  $\mathcal{X}_s$ , alors  $U_k$  est un ouvert de  $S$ .*

Les énoncés principaux de ce chapitre suivent (Looijenga et Peters, 1980, section 8).

Nous introduisons l'espace suivant.

#### Définition 7.2

$$K\Omega = \{(K, [\omega_1 + i\omega_2]) \in L_{\mathbb{R}} \times \Omega \mid (K, K) > 0 \text{ et } K \perp \omega_1, \omega_2\}$$

*Il est clair que  $K\Omega$  est une sous-variété  $C^\infty$  fermée de  $L_{\mathbb{R}} \times \Omega$ . Si  $(k, [\omega]) \in K\Omega$  où  $\omega$  s'écrit de la façon suivante :*

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2$$

*où les  $\omega_i \in L_{\mathbb{R}}$ , nous avons alors une action de  $O((\cdot, \cdot), L_{\mathbb{R}}) = O(3, 19)$  sur  $K\Omega$  dont l'action est donnée explicitement par la formule suivante :*

$$g \cdot (K, [\omega = \omega_1 + i\omega_2]) = (gk, [g\omega_1 + ig\omega_2])$$

En utilisant le fait que  $(\omega, \omega) = 0$  et  $(\omega, \bar{\omega}) > 0$ , il est facile de voir que cette action est indépendante du choix du représentant  $\omega$ .

En suivant les notations de la section précédente, nous définissons l'ensemble.

**Définition 7.3**

$$G_3^+ = \{P \in Gr^+(3, L_{\mathbb{R}}) \mid (\cdot, \cdot)|_P \text{ soit positif définie}\}$$

Un argument similaire donné dans la preuve de 6.1 montre que c'est un ouvert de  $Gr^+(3, L_{\mathbb{R}})$ .

Il est également facile de voir que l'action naturelle de  $O(3, 19)$  sur  $L_{\mathbb{R}}$  s'étend de façon évidente à  $G_3^+$ .

**Lemme 7.4** Posons l'application

$$\begin{aligned} \Pi : K\Omega &\rightarrow G_3^+ \\ \Pi(K, [\omega_1 + i\omega_2]) &= P(K, \omega_1, \omega_2) \end{aligned}$$

où  $P(K, \omega_1, \omega_2)$  est le sous-espace orienté par les vecteurs  $K, \omega_1, \omega_2$ . Cette application donne à  $K\Omega$  une structure d'un fibré dont la fibre est isomorphe à  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  et dont le groupe de structures est  $SO(3)$ . De plus,  $\Pi$  est équivariant sur les actions de  $O(3, 19)$  données plus haut et l'action de  $O(3, 19)$  sur  $K\Omega$  est propre.

Pour prouver ce lemme, nous allons avoir besoin de rappeler quelques notions sur les actions propres et les espaces homogènes.

**Proposition 7.5** (Lee, 2012, p 543) Soit  $G$  un groupe de Lie agissant de façon lisse sur  $M$  une variété de classes  $C^\infty$ . Les énoncés suivants sont équivalents :

1. L'action de  $G$  sur  $M$  est propre.
2. L'application suivante est propre :

$$\begin{aligned} G \times M &\rightarrow M \times M \\ (g, p) &\mapsto (g \cdot p, p) \end{aligned}$$

3. Pour toutes séquences  $g_n$  dans  $G$  et  $p_n$  dans  $M$ , si nous avons que  $g_n \cdot p_n \rightarrow p$ , alors  $g_n$  admet une sous-suite convergente.
4. Si  $K \subset M$  est un sous-ensemble compact, alors l'ensemble suivant est relativement compact dans  $G$  :

$$\{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$$

**Proposition 7.6** (Lee, 2012, p 554) Soit  $G$  un groupe de Lie agissant de façon transitive sur un ensemble  $S$ . Si, pour un point  $s \in S$ , le stabilisateur de  $s$  (noté par  $G_s$ ) est fermé, alors  $S$  admet une unique structure  $C^\infty$  qui rend cette action lisse. De plus, l'application suivante est un difféomorphisme qui préserve la structure de  $G$ -espace :

$$F : G/G_s \rightarrow S$$

$$F(g G_s) = g \cdot s$$

Également, nous rappelons que l'application quotient  $\pi : G \rightarrow G/G_s$  est une submersion.

**Lemme 7.7** Soit  $G$  un groupe de Lie agissant sur l'espace homogène  $M = G/H$  où  $H$  est un sous-groupe compact de  $G$ , alors l'action de  $G$  sur  $M = G/H$  est propre.

*Preuve.* Selon la proposition 7.5, il est suffisant de montrer que pour toutes suites  $g_n$  dans  $G$  et  $p_n$  dans  $M$  telles que  $p_n \rightarrow p$  et  $g_n \cdot p_n \rightarrow p'$ , alors la suite  $g_n$  admet une sous-suite convergente.

Supposons que  $p_n \rightarrow p$  et  $g_n \cdot p_n \rightarrow p'$ . De plus, notons  $q_n$  un « relèvement » de la suite  $p_n$  à  $G$ , c'est-à-dire que nous avons pour tout  $n$   $\pi(q_n) = p_n$  où  $\pi$  est l'application quotient. En utilisant la compacité de  $pH$  et  $p'H$ , il est possible de couvrir ces deux ensembles par des petites boules de manière à obtenir deux ouverts relativement compacts  $U$  et  $U'$  contenant respectivement  $pH$  et  $p'H$ . En utilisant le fait que l'application  $\pi$  est une submersion, nous avons que  $\pi$  est une application ouverte, que les ouverts  $\pi(U)$  et  $\pi(U')$  contiennent respectivement les points  $pH$  et  $p'H$  dans l'espace quotient  $M$  et que  $U$  et  $U'$  sont relativement compacts, nous obtenons que  $q_n$  et  $g_n \cdot q_n$  admettent une sous-suite convergente dans  $G$ . En utilisant le fait que l'action de  $G$  sur lui-même est toujours propre, nous avons par la proposition 7.5 que  $g_n$  admet une sous-suite convergente, ce qui montre le résultat souhaité.  $\square$

**Lemme 7.8** *Supposons que  $G$  est un groupe de Lie et  $M$  est une variété de classe  $C^\infty$  munie d'une action lisse et propre de  $G$ . Si  $q : B \rightarrow M$  est un fibré de classe  $C^\infty$   $G$ -équivariant, c'est-à-dire que  $B$  est munie d'une action lisse de  $G$  et que l'application  $p$  est  $G$ -équivariant, nous obtenons que l'action de  $G$  sur  $B$  est également propre.*

*Preuve.* Selon la proposition 7.5, il est suffisant de montrer que pour toutes suites  $g_n$  dans  $G$  et  $p_n$  dans  $B$  telles que  $p_n$  converge et  $g_n \cdot p_n$ , alors la suite  $g_n$  admet une sous-suite convergente. En utilisant le fait que  $q$  est  $G$ -équivariant et la continuité de  $q$ , nous avons que  $g_n q(p_n)$  et  $q(p_n)$  sont convergentes dans  $M$ . En utilisant le fait que l'action de  $G$  sur  $M$  est propre avec la proposition 7.5, nous avons que  $g_n$  admet une sous-suite convergente, ce qui montre le résultat souhaité.  $\square$

Nous pouvons maintenant donner la preuve du lemme 7.4.

*Preuve.* La première partie est évidente par la construction. Selon le lemme 7.8, pour montrer que l'action de  $O(3, 19)$  est propre sur  $K\Omega$ , il est suffisant de montrer que l'action est propre sur la base. Il est clair que le groupe  $O(3, 19)$  agit transitivement sur  $G_3^+$ . Nous allons alors calculer le stabilisateur d'un 3-plan  $P \in G_3^+$ . Puisque la forme quadratique est positive définie sur  $P$ , nous pouvons trouver une base orthonormale  $b_1, b_2, b_3$  de  $P$  et  $L_{\mathbb{R}} = P \oplus P^\perp$ . En utilisant le fait que la forme quadratique est de signature  $(3, 19)$ , nous devons avoir que sa restriction sur  $P^\perp$  est négative définie. Ainsi, nous pouvons trouver une base orthonormale  $f_1, f_2, \dots, f_{19}$ , ce qui nous donne une base  $L_{\mathbb{R}}$  donnée par  $b_1, b_2, b_3, f_1, \dots, f_{19}$ . Considérons un élément arbitraire  $g \in O(3, 19)$  qui fixe  $P$ . Un tel  $g$  doit être stable sur les sous-espaces  $P$  et  $P^\perp$ . Ainsi, la représentation matricielle de  $g$  dans notre base est donnée par une matrice par blocs de la forme suivante

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où  $A \in SO(3)$  et  $B \in O(19)$ . Ce calcul montre que le stabilisateur de  $P$  est isomorphe à  $SO(3) \times O(19)$ , ce qui est un groupe compact. Ainsi, nous avons par la proposition 7.7 que l'action de  $O(3, 19)$  est propre sur  $G_3^+$ .  $\square$

**Corollaire 7.9** *Le sous-ensemble suivant est un ouvert de  $K\Omega$  :*

$$K\Omega^0 = \{(k, [\omega]) \in K\Omega \mid (k, d) \neq 0 \ \forall d \in \Delta_\Omega\}$$

Ici,  $\Delta_\omega$  est l'ensemble des « classes nodales » associées à  $\omega$ . Nous le définissons par :

$$\Delta_\omega = \{d \in L \mid (d, d) = -2 \text{ et } (d, \omega) = 0\}$$

*Preuve.* Soit  $\Delta = \bigcup_{[\omega] \in \Omega} \Delta_\omega$ . Pour un élément de  $d \in \Delta$ , nous pouvons définir une « réflexion de Picard-Lefschetz » associée par la formule usuelle :

$$r_d(x) = x + (x, d)d$$

Nous notons par  $G$  le groupe des automorphismes de  $Aut(L)$  généré par les éléments de la forme  $H_d$  pour  $d \in \Delta$ . Puisque  $Aut(L)$  est un sous-groupe discret de  $Aut(L_{\mathbb{R}})$ , il en est de même pour  $G$ . Considérons un point  $p \in K\Omega^0$  et  $U$  un ouvert relativement compact contenant  $p$ . Par la proposition 7.4, nous avons que l'ensemble

$$\{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\}$$

est relativement compact. En utilisant le fait que  $G$  est discret, nous déduisons qu'il existe un nombre fini d'automorphismes  $r_d$  ayant des points fixes dans  $U$ .

En particulier, si nous notons par  $H_d$  les points fixes de  $r_d$ , nous avons que  $U \setminus \bigcup_{d \in D} H_d$  est un voisinage ouvert de  $p$  contenu dans  $K\Omega^0$ .  $\square$

**Lemme 7.10** Soit  $p : \mathcal{X} \rightarrow S$  une déformation lisse localement universelle d'une surface  $K3$ . De plus, nous supposons que  $S$  est contractible. Nous avons les assertions suivantes :

1. La construction suivante

$$\mathcal{H}^{1,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R}) := \bigcup_{s \in S} H^{1,1}(\mathcal{X}_s, \mathbb{R})$$

est un sous-fibré vectoriel analytique réel du fibré vectoriel associé au faisceau  $\mathcal{H}^2(\mathcal{X}, \mathbb{R}) = R^2p_*\mathbb{R} \otimes C_S^\Omega$ . Ici,  $C_S^\Omega$  dénote le faisceau des fonctions  $\mathbb{R}$ -analytiques.

2. L'union des cônes de Kähler dans  $\mathcal{H}^{1,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$  forme un ouvert.

*Preuve.* Commençons par la première assertion. Nous savons par Griffiths que  $\mathcal{H}^{2,0}(\mathcal{X}) = \bigcup_{s \in S} H^{2,0}(\mathcal{X}_s)$  est un sous-fibré holomorphe de  $\mathcal{H}^2(\mathcal{X}, \mathbb{C}) = R^2p_*\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_S$ . Puisque notre base  $S$  est contractible, nous

avons que  $\mathcal{H}^{2,0}(\mathcal{X})$  et  $\mathcal{H}^2(\mathcal{X}, \mathbb{C})$  sont tous les deux triviaux et que le second est isomorphe à  $L_{\mathbb{C}} \times S$ . En particulier, nous pouvons complexifier la forme bilinéaire sur  $L$  pour obtenir une extension  $\mathbb{C}$ -bilinéaire sur  $\mathcal{H}^2(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ . Si nous prenons  $\sigma$  une section trivialisante globale holomorphe de  $\mathcal{H}^{2,0}(\mathcal{X})$ , alors nous pouvons poser l'application de fibrés vectoriels holomorphes suivante :

$$F : \mathcal{H}^2(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \rightarrow S \times \mathbb{C}$$

$$F(s, v) = (s, (v, \sigma(s)))$$

Le fait que notre forme quadratique n'est pas dégénérée nous donne que  $F$  est de rang 1. Il est clair que le noyau est indépendant de notre trivialisant et que cette dernière est tout simplement  $\mathcal{H}^{2,0}(\mathcal{X})^{\perp}$ . Ainsi,  $\mathcal{H}^{2,0}(\mathcal{X})^{\perp}$  est un sous-fibré holomorphe. Nous avons par définition :

$$\mathcal{H}^{1,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R}) = \mathcal{H}^{2,0}(\mathcal{X}, \mathbb{C})^{\perp} \cap \mathcal{H}^2(\mathcal{X}, \mathbb{R})$$

Ainsi,  $\mathcal{H}^{1,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$  varie de façon  $\mathbb{R}$ -analytique.

Pour la deuxième assertion, considérons un point  $s_0 \in S$ . Donnons-nous également un élément  $k$  du cône de Kähler de  $\mathcal{X}_{s_0}$ , que nous noterons  $\mathcal{K}_{s_0}$ , avec une classe de Kähler  $k_0$ . Puisque le cône de Kähler est convexe, le segment  $[k, k_0]$  est contenu dans  $\mathcal{K}_{s_0}$ . Puisque notre famille est localement universelle, nous savons par Torelli local que l'application des périodes est localement un isomorphisme. Ainsi, quitte à restreindre  $S$  suffisamment, nous pouvons supposer que l'application des périodes  $\tau : S \rightarrow \Omega$  est un isomorphisme sur son image. Nous posons l'application suivante :

$$K\Omega \rightarrow \mathcal{H}^{1,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$$

$$(k, \omega) \mapsto (k, \tau^{-1}(\omega))$$

Cette application est un homéomorphisme sur son image qui est tout simplement l'union des classes  $[\omega] \in H^{1,1}(\mathcal{X}_s, \mathbb{R})$  telle que  $(\omega, \omega) > 0$ . En particulier, le corollaire 7.9 nous permet d'identifier  $K\Omega^0$  comme un ouvert de  $\mathcal{H}^{1,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ . Nous pouvons alors choisir un ouvert  $V$  contenu dans  $K\Omega^0$  contenant notre interval  $[k, k_0]$ . Par compacité de notre intervalle, nous pouvons supposer que l'intersection

$$V \cap H^{1,1}(\mathcal{X}_s, \mathbb{R}) \times \{s\}$$

est connexe pour tout  $s \in S$ . Par le résultat de Kodaira-Spencer (Kodaira et Spencer, 1960), l'union des classes de Kähler  $W$  est un ouvert de  $\mathcal{H}^{1,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ . En utilisant le fait que  $V$  contient une classe de Kähler, l'intersection de  $V \cap W$  est non vide. L'image de la projection  $p : \mathcal{H}^{1,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \rightarrow S$  de  $V \cap W$  sur  $S$  nous

donne un ouvert  $U$  de  $S$ . L'intersection  $p^{-1}(U) \cap V$  est un ouvert de  $\mathcal{H}^{1,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$  dans lequel l'intersection avec les fibres  $H^{1,1}(\mathcal{X}_s, \mathbb{R}) \times \{s\}$  est connexe et contient une classe de Kähler. En particulier, par la définition de  $K\Omega^0$  et la caractérisation du cône de Kähler comme étant la composante connexe de

$$C_{\mathcal{X}_s}^+ \setminus \bigcup_{d \in \Delta_s} H_d$$

contenant une classe de Kähler, nous déduisons que  $p^{-1}(U) \cap V$  est contenue dans l'union des cônes de Kähler.  $\square$

Nous pouvons maintenant donner une preuve de la proposition 7.1.

*Preuve.*  $\Phi$  induit un isomorphisme  $\Phi_{\mathbb{R}}$  de fibrés  $\mathbb{R}$ -analytiques entre  $\mathcal{H}^{1,1}(\mathcal{X}', \mathbb{R})$  et  $\mathcal{H}^{1,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ . Nous notons par  $\mathcal{K}_{\mathcal{X}'}$  et  $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$  l'union des cônes de Kähler dans  $\mathcal{H}^{1,1}(\mathcal{X}', \mathbb{R})$  et  $\mathcal{H}^{1,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$  respectivement. Par le lemme 7.10, nous savons que ces derniers sont des ouverts. Posons l'ouvert suivant :

$$U = p'(\mathcal{K}_{\mathcal{X}'} \cap (\Phi_{\mathbb{R}}^*)^{-1}(\mathcal{K}_{\mathcal{X}}))$$

Par construction,  $U$  correspond aux points  $s \in S$  tels que  $\Phi_{\mathbb{R}, s}^*$  envoie un élément du cône de Kähler de  $\mathcal{X}'_s$  sur le cône de Kähler de  $\mathcal{X}_s$ . Pour montrer la proposition, il est suffisant de montrer que, pour tout  $s \in U$ ,  $\Phi_{\mathbb{R}, s}^*$  est une bijection entre les cônes de Kähler. Le corollaire 2.23 nous dit que les classes effectives sont déterminées par un élément du cône de Kähler et la forme d'intersection. Ainsi,  $\Phi_{\mathbb{R}, s}^*$  induit une bijection sur les classes effectives. Nous pouvons dire la même chose pour le cône positif. Puisque le cône de Kähler est complètement déterminé par les classes effectives et le cône positif, nous avons que  $\Phi_{\mathbb{R}, s}^*$  est une bijection entre les cônes de Kähler.  $\square$

## CHAPITRE 8

### ESPACE DES CYCLES

Dans ce chapitre, nous commençons par résumer les résultats principaux concernant l'espace des cycles de Barlet. Nous nous utiliserons les livres de Barlet et Magnússon (Barlet et Magnússon, 2019; Barlet et Magnússon, 2025) comme références principales.

Dans un deuxième temps, nous présentons un argument de Burns-Rapoport (Burns et Rapoport, 1975) permettant de construire des isomorphismes de surfaces  $K3$  générales à l'aide d'un argument limite sur l'espace des cycles de Barlet.

Dans ce chapitre, nous supposerons les hypothèses suivantes.  $p : \mathcal{X} \rightarrow S$  et  $q : \mathcal{Y} \rightarrow S$  sont deux familles lisses de surfaces  $K3$  où la base  $S$  est un polydisque centré à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ . Nous assumerons également un isomorphisme de systèmes locaux

$$\Phi : R^2 q_* \mathbb{Z} \rightarrow R^2 p_* \mathbb{Z}$$

jouissant des propriétés suivantes :

1. Pour tout  $s \in S$  le morphisme induit sur la fibre  $\Phi_s : H^2(\mathcal{Y}_s, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Z})$  est une isométrie.
2. Nous nous munissons d'une suite  $(s_n)$  dans  $S$  qui converge vers 0.
3. Nous demandons pour tout  $n \in \mathbb{N}$  qu'il existe un isomorphisme entre  $f_n : \mathcal{X}_{s_n} \rightarrow \mathcal{Y}_{s_n}$  qui vérifie  $\Phi_{s_n} = f_n^*$ .

La proposition principale de ce chapitre est la suivante.

**Proposition 8.1** *Sous les hypothèses citées plus haut, il existe un isomorphisme entre  $X_0$  et  $Y_0$ . De plus, si  $\Phi_0$  est une isométrie de Hodge effective, alors il existe un isomorphisme  $f : X_0 \rightarrow Y_0$  tel que  $\Phi_0 = f^*$ .*

#### 8.1 Résultat sur l'espace des cycles (Barlet)

Nous rappelons la notion de cycles analytiques et parlons de l'espace des cycles introduit par Barlet. Pendant cette section, nous assumerons que  $X$  est une variété complexe lisse pas forcément compacte. Nous utiliserons (Barlet et Magnússon, 2019; Barlet et Magnússon, 2025) comme référence principale.

**Définition 8.2 (Sous-ensemble analytique)** Un sous-ensemble  $Z$  de  $X$  est un sous-ensemble analytique s'il existe un recouvrement d'ouverts  $U_i$  de  $X$  tel que  $Z \cap U_i = V(f_1, f_2, \dots, f_N)$  où  $V$  est le lieu d'annulation de  $N$  fonctions holomorphes définies sur  $U_i$ .

Tout sous-ensemble analytique admet une décomposition  $Z = Z_{\text{lisse}} \amalg Z_1$  où  $Z_{\text{lisse}}$  est un ouvert dense de  $Z$  qui est également une variété lisse (pas nécessairement connexe) et  $Z_1$  est un ensemble analytique dense nulle part.

Dans le cas où  $Z_{\text{lisse}}$  est connexe, on dit que  $Z$  est irréductible et la dimension complexe de  $Z$  est par définition la dimension complexe de  $Z_{\text{lisse}}$ .

**Définition 8.3 (n-cycles analytiques compacts)** Soit  $n \in \mathbb{N}$  un entier fixé. Un  $n$ -cycle analytique compact  $Z$  est une somme formelle à support fini de sous-ensembles analytiques irréductibles compacts de dimension  $n$ , c'est-à-dire que  $Z$  s'écrit comme

$$Z = \sum_i n_i Z_i$$

pour  $n_i \in \mathbb{N}$ . Nous définissons le support de  $Z$  comme :

$$|Z| = \bigcup_{i, n_i \neq 0} Z_i$$

Nous notons l'espace des  $n$ -cycles analytiques compacts sur  $X$  par  $C_n(X)$ .

L'espace des  $n$ -cycles  $C_n(X)$  admet la structure d'un espace topologique dont la topologie est appelée la topologie de Barlet. Le premier résultat important concernant la topologie de cet espace est le théorème de compacité de Bishop.

**Théorème 8.4 (Compacité de Bishop)** (Barlet et Magnússon, 2019, p 438) Soit  $\mathcal{A}$  une partie de  $C_n(X)$ . Pour que  $\mathcal{A}$  soit relativement compact, il est nécessaire et suffisant que les conditions suivantes soient vérifiées :

1. Il existe un sous-ensemble compact  $K$  de  $X$  tel que pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,  $|A| \subset K$ .
2. Pour une métrique hermitienne  $h$  sur  $X$ , il existe une constante  $M$  telle que pour tout  $A \in \mathcal{A}$  nous avons  $\text{vol}_h(A) \leq M$ .

Ici,  $\text{vol}_h(A)$  est le volume induit par la métrique sur la partie lisse de  $A$ .

Le second résultat concerne les composantes connexes de cette espace, mais avant nous devons rappeler la classe de cohomologie d'un sous-ensemble analytique irréductible compact.

**Définition 8.5 (La classe cohomologique d'un n-cycles à support compact)** (Voisin, 2002, p 270) Soit  $Z$  un sous-ensemble analytique irréductible compact de  $X$  de codimension complexe  $r$ , alors il existe une classe de cohomologie de  $[Z] \in H^{2r}(X, \mathbb{Z})$ . Pour ce faire, commençons par décomposer  $Z = Z_{\text{lisse}} \amalg Z_1$ . Maintenant,  $Z \setminus Z_1$  est une sous-variété lisse de  $X \setminus Z_1$ . De plus, nous savons que le morphisme de restriction

$$H^{2r}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2r}(X \setminus Z_1, \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme. Notons par  $NZ$  le fibré normal de  $Z \setminus Z_1$  dans  $X \setminus Z_1$ . Nous avons l'isomorphisme de Tom :

$$T : H^0(Z \setminus Z_1, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2r}(NZ, NZ \setminus 0, \mathbb{Z})$$

En utilisant le théorème de voisinage tubulaire couplé avec le théorème d'excision, nous obtenons le morphisme suivant :

$$\alpha : H^{2r}(NZ, NZ \setminus 0, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2r}(X \setminus Z_1, Z \setminus Z_1, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2r}(X \setminus Z_1)$$

Ici, le dernier morphisme est le morphisme de restriction en cohomologie relative. Dans ce cas, la classe de  $Z$  est définie par :

$$[Z] = \alpha \circ T(1_{Z \setminus Z_1})$$

Dans le cas où  $Z$  est un élément général de  $C_r(X)$  dont sa décomposition en composantes irréductibles est donnée par

$$Z = \sum_i n_i Z_i$$

nous définissons la classe de  $Z$  par extension linéaire :  $[Z] = \sum_i n_i [Z_i]$ .

**Théorème 8.6 (Composantes connexes dans la topologie de Barlet)** (Barlet et Magnússon, 2025, p 214)

Soient  $Z_1, Z_2 \in C_r(X)$  deux cycles contenus dans la même composante connexe de  $C_n(X)$ , alors  $[Z_1] = [Z_2]$  dans  $H^{2r}(X, \mathbb{Z})$ .

### 8.1.1 Remarque dans le cas relatif

**Définition 8.7** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application holomorphe entre deux variétés lisses. Un  $n$ -cycle relatif à  $f$ ,  $Z$ , est un  $n$ -cycle de  $M$  tel qu'il existe un  $y \in N$  tel que  $|Z| \subset f^{-1}(y)$ . Dans cas, nous avons également que  $Z \in C_n(f^{-1}(y))$ . La collection de tous les  $n$ -cycles relatifs à  $f$  est notée par  $C_n(f)$ .

Nous aurons besoin du résultat suivant.

**Théorème 8.8** (Barlet et Magnússon, 2019, p 413) Si  $f : M \rightarrow N$  est une application holomorphe entre deux variétés lisses, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n(f)$  est un sous-ensemble fermé de  $C_n(X)$ .

### 8.2 Application dans le cas du graphe d'un isomorphisme

Puisque la proposition 8.1 est de nature locale sur  $S$ , quitte à restreindre  $S$  à un plus petit polydisque, nous pouvons assumer en utilisant le théorème d'Ehresmann que  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  et  $\mathcal{X} \times_S \mathcal{Y}$  sont tous les trois des fibrés  $C^\infty$  triviaux. Nous notons également par  $h : \mathcal{X} \times_S \mathcal{Y} \rightarrow S$  la projection. Il est facile de voir que  $h$  doit être également propre en raison du fait que  $p$  et  $q$  sont propres.

**Définition 8.9 (Décomposition de Künneth)** Rappelons que si  $X$  et  $Y$  sont deux variétés lisses, compactes et orientables de dimensions  $n$  et  $m$  respectivement, alors nous avons la décomposition suivante sur  $H^m(X \times Y)$  modulo torsion :

$$\begin{aligned} \bigoplus_{k=0}^m \text{hom}(H^k(Y), H^k(X)) &\simeq \bigoplus_{k=0}^m H^k(Y)^* \otimes H^k(X) \\ &\simeq \bigoplus_{k=0}^m H^{m-k}(Y) \otimes H^k(X) \\ &\simeq H^m(X \times Y) \end{aligned}$$

Le deuxième isomorphisme est obtenu par dualité de Poincaré et le troisième est donné par la formule de Künneth. Nous appelons cet isomorphisme la décomposition de Künneth et appelons les éléments de  $\text{hom}(H^k(Y), H^k(X))$  les éléments de degré  $k$ . Une description explicite de cette décomposition pour un

élément  $[\tau] \in H^m(X \times Y)$  est donnée par la formule suivante pour tout  $k$  :

$$\begin{aligned} [\tau]^* &: H^k(Y) \rightarrow H^k(X) \\ [\gamma] &\mapsto p_*(q^*[\gamma] \cup [\tau]) \end{aligned}$$

Ici,  $p : X \times Y \rightarrow X$  et  $q : X \times Y \rightarrow Y$  sont les projections et  $p_*$  est le morphisme de Gysin. Dans le cas où  $[\Gamma_f]$  est le graphe d'une application continue  $f$ , nous trouvons que  $[\Gamma_f]^* = f^*$ .

**Proposition 8.10 (Limite de cycles)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $f_n : X_{s_n} \rightarrow Y_{s_n}$  nous notons  $\Gamma_n$  le 4-cycle associé au graphe dans  $X_{s_n} \times Y_{s_n}$  du morphisme  $f_n$ . Par définition, nous avons que  $\Gamma_n \in C_4(h)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Sous ces hypothèses, nous avons qu'il existe une sous-suite  $\Gamma_n$  qui converge vers un cycle  $\Gamma_\infty$  contenu dans  $C_4(X_0 \times Y_0)$ .

*Preuve.* Par un résultat dû à Kodaira-Spencer (Kodaira et Spencer, 1960), nous pouvons trouver une métrique hermitienne  $H$  sur  $\mathcal{X} \times_S \mathcal{Y}$  telle que la forme fondamentale  $\omega$  restreinte aux fibres  $\omega_s := \omega|_{h^{-1}(s)}$  est une forme de Kähler variant de façon  $C^\infty$  sur la base.

Nous allons maintenant vérifier les hypothèses du théorème de compacité de Bishop 8.4. Puisque  $s_n$  est une suite convergente, nous avons que l'ensemble  $K = \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{0\}$  est un compact. En utilisant le fait que  $h$  est propre, nous obtenons que  $h^{-1}(K)$  est compact. Ainsi, nous avons

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} |\Gamma_n| \subset h^{-1}(K)$$

ce qui montre la première condition. Pour la deuxième condition, nous utilisons la formule de Wirtinger pour obtenir pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\text{Vol}_H(\Gamma_n) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_n} \omega_n^2|_{\Gamma_n} = \frac{1}{2} \int_{X_{s_n} \times Y_{s_n}} \omega_n^2 \wedge [\Gamma_n] \quad (8.1)$$

Ici,  $[\Gamma_n]$  est la classe de Poincaré duale de  $\Gamma_n$ . Soit  $s \in S$ , nous avons par notre isomorphisme de systèmes locaux un morphisme induit sur la fibre  $\Phi_s : H^2(Y_s, \mathbb{R}) \rightarrow H^2(X_s, \mathbb{R})$  qui nous permet d'obtenir un élément de  $H^4(X_s \times Y_s, \mathbb{R})$  par la décomposition de Künneth. De plus, nous avons l'égalité suivante

$$[\Gamma_n] = [\Phi_{s_n}] + p_{s_n}^*[\alpha_{s_n}] + q_{s_n}^*[\beta_{s_n}]$$

où les  $p_s$  et  $q_s$  sont la restriction de  $p$  et  $q$  sur la fibre  $X_s$  et  $Y_s$  respectivement et  $\alpha_s$  et  $\beta_s$  sont des générateurs pour  $H^4(\mathcal{X}_s)$  et  $H^4(\mathcal{Y}_s)$ . En utilisant le fait que  $\mathcal{X} \times_S \mathcal{Y}$  est trivial, nous pouvons trouver une trivialisatation  $C^\infty$

$$F : S \times X_0 \times Y_0 \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{Y}$$

induisant un difféomorphisme entre  $F_s : X_0 \times Y_0 \rightarrow X_s \times Y_s$  pour tout  $s \in S$ . Considérons l'application  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$  définie par la formule suivante :

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{1}{2} \int_{X_0 \times Y_0} F_s^* (\omega_s^2 \wedge ([\Phi_s] + p_s^*[\alpha_{s_n}] + q_s^*[\beta_{s_n}])) \\ &= \frac{1}{2} \int_{X_0 \times Y_0} F_s^* \omega_s^2 \wedge F_s^* [\Phi_s] + F_s^* \omega_s^2 \wedge (p_0^*[\alpha_0] + q_0^*[\beta_0]) \end{aligned}$$

Clairement, l'application  $g$  varie de façon  $C^\infty$  et par la formule 8.1 nous avons que  $g(s_n) = \text{vol}_H(\Gamma_n)$  pour tout  $n$ . En utilisant le fait que  $s_n \rightarrow 0$ , nous concluons que le volume des  $\Gamma_n$  est uniformément borné.

Ainsi, le théorème de Bishop nous permet d'extraire une sous-suite convergente qui converge vers un 4-cycle  $\Gamma_\infty$ . Le fait que  $\Gamma_\infty$  est dans  $C_4(X_0 \times Y_0)$  est une application directe du théorème 8.1.1.  $\square$

**Corollaire 8.11** Nous avons que  $[\Gamma_\infty]^*$  est un isomorphisme d'anneaux et concorde avec  $\Phi_0$  en degré 2.

*Preuve.* Pour un  $n_0$  assez grand, nous avons que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\Gamma_n$  est dans la même composante connexe que  $\Gamma_\infty$ . En particulier, nous pouvons appliquer le théorème 8.1 pour obtenir que  $\Gamma_n$  et  $\Gamma_\infty$  sont dans la même classe de cohomologie dans  $H^4(X \times Y)$ . En utilisant le fait que  $[\Gamma_n]^* = f^* = \Phi_{s_n}$  couplé avec le fait que  $H^4(X \times Y) \simeq H^4(X_s \times Y_n)$ , nous déduisons que  $[\Gamma_\infty]^*$  est un isomorphisme et concorde avec  $\Phi_0$ .  $\square$

Le point crucial de l'argument résulte dans la proposition suivante qui est une adaptation de la preuve donnée dans l'article de Burns et Rapoport (Burns et Rapoport, 1975, p 248) :

**Proposition 8.12** Le cycle  $\Gamma_\infty$  se décompose de la façon suivante

$$\Gamma_\infty = \Delta_f + \sum_i C_i \times D_i$$

où  $\Delta_f$  est le graphe d'un isomorphisme entre  $X_0$  et  $Y_0$  et les  $C_i$  et  $D_i$  sont des courbes sur  $X_0$  et  $Y_0$  respectivement. De plus, nous avons que les classes  $C_i \times C_j$  agissent de la façon suivante en  $H^2$  :

$$[C_i \times D_i]^* : H^2(Y_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X_0, \mathbb{Z})$$

$$[C_i \times D_i]^* \omega = (\omega, D_i) C_i$$

*Preuve.* Considérons la décomposition  $\Gamma_\infty = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6$  dont les composantes irréductibles se projettent sur  $X_0$  et  $Y_0$  selon le tableau suivant :

Composantes irréductibles $Z_i$	projection sur $X_0$	projection sur $Y_0$
Composantes irréductibles $Z_1$	$X_0$	$Y_0$
Composantes irréductibles $Z_2$	courbe	courbe
Composantes irréductibles $Z_3$	point	$Y_0$
Composantes irréductibles $Z_4$	$X_0$	point
Composantes irréductibles $Z_5$	$X_0$	courbe
Composantes irréductibles $Z_6$	courbe	$Y_0$

Nous noterons par  $1_X$  et  $1_Y$  l'élément neutre de l'anneau de cohomologie de  $H^*(X_0)$  et  $H^*(Y_0)$  respectivement. De plus,  $\alpha_X$  et  $\alpha_Y$  sont des générateurs compatibles avec l'orientation de  $H^4(X_0)$  et  $H^4(Y_0)$ , ce qui nous donne que  $\alpha_{X \times Y} = \alpha_X \cup \alpha_Y$  est un générateur de  $H^8(X_0 \times Y_0)$ . Notons par  $Z \subset Z_i$  une composante irréductible, nous allons maintenant faire une analyse cas par cas sur  $i$ . Rappelons que :

$$[Z]^* : H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$$

$$[Z]^* \omega = q_*([Z] \cup p^* \omega)$$

De plus, nous fixons un  $\omega \in H^*(Y_0)$  que nous décomposons par le degré  $\omega = \omega_0 + \omega_2 + \omega_4$  où  $\omega_k \in H^k(Y_0)$ .

Cas  $Z \subset Z_1$

Notons  $n \neq 0$  et  $m \neq 0$  les degrés de projection de  $Z$  sur  $X_0$  et  $Y_0$  respectivement. Ceci nous revient à dire cohomologiquement que  $[Z] \cup p^* \alpha_X = n \alpha_{X \times Y}$  et  $[Z] \cup q^* \alpha_Y = m \alpha_{X \times Y}$ . En utilisant la définition du morphisme de Gysin, nous obtenons

$$\int_{X_0} p_* \alpha_{X \times Y} = \int_{X_0 \times Y_0} \alpha_{X \times Y} = 1$$

ce qui nous donne que  $p_*\alpha_{X \times Y} = \alpha_X$ . Nous avons également

$$\int_{X_0} p_*[Z] \wedge \alpha_X = \int_{X_0 \times Y_0} [Z] \wedge p^*\alpha_X = \int_{X_0 \times Y_0} \alpha_{X \times Y} = n$$

ce qui montre que  $p_*[Z] = n1_X$ . De ces deux calculs, nous déduisons :

$$[Z]^*(1_Y) = p_*([Z]) = n1_X$$

$$[Z]^*(\alpha_Y) = p_*([Z] \cup q^*\alpha_Y) = p_*(m\alpha_{X \times Y}) = m\alpha_X$$

Cas  $Z \subset Z_2$

Dans ce cas, nous avons  $Z = C \times C'$  et  $[Z] = p^*[C] \cup q^*[C']$ . Pour des raisons de dimension, il est facile de voir que  $[Z]^*\omega_0 = 0$  et  $[Z]^*\omega_4 = 0$ . Pour un  $\tau \in H^2(X_0)$ , nous avons le calcul suivant, en utilisant Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{X_0} p_*(p^*[C] \wedge q^*[C'] \wedge q^*\omega_2) \wedge \tau &= \int_{X_0 \times Y_0} p^*([C] \wedge \tau) \wedge q^*([C'] \wedge \omega_2) \\ &= \left( \int_{X_0} [C] \wedge \tau \right) \left( \int_{Y_0} [C'] \wedge \omega_2 \right) \end{aligned}$$

ce qui montre :

$$[Z]^*\omega = ([C'], \omega_2)[C]$$

Cas  $Z \subset Z_3$

Dans ce cas, nous avons que  $Z = pt \times Y_0$ , ce qui nous donne  $[Z] = p^*\alpha_X \cup q^*1_Y = p^*\alpha_X$ . Pour des raisons de dimension, il est facile de voir que  $[Z]^*\omega_0 = 0$  et  $[Z]^*\omega_2 = 0$ . Considérons le calcul suivant :

$$[Z]^*(\alpha_Y) = p_*(p^*\alpha_X \cup q^*\alpha_Y) = p_*(\alpha_{X \times Y}) = \alpha_X$$

Ainsi, nous avons

$$[Z]^*(\omega) = deg(\omega_4)\alpha_X$$

où  $deg(\omega_4) = \int_{Y_0} \omega_4$ .

Cas  $Z \subset Z_4$

Dans ce cas, nous avons que  $Z = X_0 \times \text{pt}$ , ce qui nous donne  $[Z] = p^*1_X \cup q^*\alpha_Y = q^*\alpha_Y$ . Pour des raisons de dimension, il est facile de voir que  $[Z]^*\omega_4 = 0$  et  $[Z]^*\omega_2 = 0$ . Considérons le calcul suivant :

$$[Z]^*1_Y = p_*(q^*\alpha_Y) = \alpha_X$$

Conséquent, nous avons

$$[Z]^*\omega = \text{deg}(\omega_0)\alpha_X$$

où  $\text{deg}(\omega_0) = \int_{Y_0} \omega_0 \wedge \alpha_Y$ .

Cas  $Z \subset Z_5$

Dans ce cas,  $Z$  est projeté de degré  $n$  sur  $X_0$  sur une courbe  $C'$  dans  $Y_0$ , ce qui nous donne cohomologiquement que  $[Z] \cup p^*\alpha_X = n\alpha_{X \times Y}$  et  $[Z] \cup q^*\alpha_Y = 0$ . Ainsi, nous avons :

$$[Z]^*1_Y = p_*([Z] \cup q^*\alpha_Y) = n1_X$$

Puisque  $q(Z) \subset C$ , nous pouvons choisir un représentant de la forme  $\alpha_Y$  dont son support est dans le complément de  $C$ , ce qui nous donne que  $[Z] \cup q^*\alpha_Y = 0$ . Ainsi, nous avons :

$$[Z]^*\alpha_Y = 0$$

De plus, la condition que  $q(Z) \subset C'$  implique également que si  $\omega \in H^2(Y_0)$  vérifie  $(\omega, [C]) = 0$ , alors  $q^*\omega = 0$ . Conséquent, nous avons que  $(\omega, [C]) = 0$  implique que  $[Z]^*\omega = 0$ .

Cas  $Z \subset Z_6$

Nous avons que  $Z$  est projeté sur une courbe  $C$  dans  $X_0$  et projeté de degré  $m$  sur  $Y_0$ , ce qui nous donne  $[Z] \cup q^*\alpha_Y = m\alpha_{X \times Y}$ . Nous avons donc :

$$[Z]^*\alpha_Y = p_*([Z] \cup q^*\alpha_Y) = m\alpha_X$$

Puisque  $p(Z) \subset C$ , nous pouvons représenter  $\alpha_X$  par une forme dont le support est dans le complément de  $C$ , ce qui nous donne :

$$\int_{X_0} p_*([Z] \wedge 1_Y) \wedge \alpha_X = \int_{X_0 \times Y_0} [Z] \wedge \alpha_Y = 0$$

Ceci montre que  $[Z]^*1_Y = 0$ . De plus, la condition que  $p(Z) \subset C$  implique également que pour tout  $\omega \in H^2(X_0 \times Y_0)$ ,  $p_*([Z] \cup \omega) \in \mathbb{Z}[C]$ . Conséquent, nous avons que  $[Z]^*\omega \in \mathbb{Z}[C]$ .

Par l'analyse précédente, toutes les formes  $\omega \in H^{2,0}(Y_0)$  se font annuler par  $[Z_2]^*, \dots [Z_6]^*$ . En utilisant le fait que  $[\Gamma_\infty]^*$  est un isomorphisme en  $H^2$ , nous avons que  $Z_1 \neq 0$ . De plus, puisque  $\Gamma_\infty$  induit un isomorphisme entre  $H^4(Y, \mathbb{Z})$  et  $H^4(X, \mathbb{Z})$ , nous avons que  $Z_1$  est irréductible,  $Z_3 = Z_6 = 0$  et la restriction  $q|_{Z_1} : Z_1 \rightarrow Y_0$  est biméromorphe. Un argument similaire en  $H^0$  nous donne que  $Z_4 = Z_5 = 0$  et la projection  $p|_{Z_1} : Z_1 \rightarrow X_0$  est biméromorphe. Conséquemment,  $Z_1$  induit est le graphe d'une application biméromorphe  $f : X_0 \rightarrow Y_0$ . Or ce sont des surfaces absolument minimales donc  $Z_1$  doit être le graphe d'un isomorphisme, ce qui montre la décomposition souhaitée :

$$[\Gamma_\infty] = \Delta_f + \sum_i C_i \times D_i$$

□

Nous pouvons maintenant donner la preuve de la proposition principale 8.1.

*Preuve.* Par la proposition 8.10, quitte à remplacer par une sous-suite, nous avons  $\text{Graphe}(f_n) = \Gamma_n \rightarrow \Gamma_\infty$  convergent vers un cycle  $\Gamma_\infty$  de dimension 2 pure, ce qui induit  $[\Gamma_\infty]^*$  un isomorphisme d'anneaux sur les anneaux de cohomologies et concorde avec  $\Phi_0$  sur en  $H^2$  par le corollaire 8.11. La proposition de 8.12 nous dit que nous avons la décomposition suivante

$$\Gamma_\infty = \Delta_f + \sum_i C_i \times D_i$$

où  $f$  est un isomorphisme. Nous posons  $C'_i = (f^*)^{-1}(C_i)$  et  $D'_i = (f^*)^{-1}(D_i)$  et considérons :

$$\begin{aligned} \psi &:= (f^*)^{-1} \circ [\Gamma_\infty]^* : H^2(S', \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S', \mathbb{Z}) \\ \psi(x) &= x \sum_i (x, C'_i)[D_i] \end{aligned}$$

Puisque  $\Phi_0 = [\Gamma]^*$  en degré et que  $\Phi_0$  est une isométrie de Hodge effective, nous avons également que  $\psi$  l'est aussi par composition. Ainsi, par la proposition 2.27, nous avons que  $\Gamma_\infty = \Delta_f$  et  $f^* = \Phi_0$  en degré 2. □

## CHAPITRE 9

### LE THÉORÈME DE TORELLI POUR LES SURFACES K3

#### 9.1 Preuve des théorèmes principaux

Nous pouvons maintenant prouver le théorème de Torelli dans toute sa généralité.

**Théorème 9.1 (Théorème de Torelli pour les surfaces K3)** Soient  $X_0$  et  $Y_0$  deux surfaces K3 et  $\phi^* : H^2(Y_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X_0, \mathbb{Z})$  une isométrie de Hodge effective, alors il existe un isomorphisme  $f : S \rightarrow S'$  tel que  $f^* = \phi^*$ .

*Preuve.* Quitte à faire des restrictions, nous pouvons supposer que les familles de Kuranishi (théorème 5.1) sont remplacées par des familles localement universelles  $p : \mathcal{X} \rightarrow S_X$  et  $q : \mathcal{Y} \rightarrow S_Y$ . Celles-ci sont sur une même base  $S_X = S_Y$  qui est un petit polydisque centré à l'origine de  $\mathbb{C}^{20}$ . L'isométrie  $\phi^* : H^2(Y_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X_0, \mathbb{Z})$  s'étend à un isomorphisme de systèmes locaux

$$\Phi^* : R^2q_*\mathbb{Z} \rightarrow R^2p_*\mathbb{Z}$$

induisant une isométrie sur toutes les fibres. Si nous marquons la fibre  $X_0$ , nous obtenons un marquage pour la famille  $\mathcal{X}$

$$\alpha : R^2p_*\mathbb{Z} \rightarrow \underline{L}$$

ce qui nous donne le marquage  $\alpha \circ \Phi^* : R^2q_*\mathbb{Z} \rightarrow \underline{L}$  pour la famille  $\mathcal{Y}$ . Nous obtenons les applications des périodes  $\tau_X : S_X \rightarrow \Omega$  et  $\tau_Y : S_Y \rightarrow \Omega$  respectivement. Puisque  $\phi^*$  préserve la structure de Hodge, nous avons que  $\tau_Y(0) = \tau_X(0)$ . En appliquant le théorème de Torelli local 5.1, nous savons que  $\tau_X : S_X \rightarrow \Omega$  et  $\tau_Y : S_Y \rightarrow \Omega$  sont des isomorphismes locaux. Ainsi, en considérant des restrictions appropriées sur les ouverts  $S_X$  et  $S_Y$  au voisinage de l'origine, nous pouvons supposer que l'application suivante est biholomorphe :

$$h := \tau_Y^{-1} \circ \tau_X : S_X \rightarrow S_Y$$

Nous avons alors le diagramme commutatif suivant de produits fibrés :

$$\begin{array}{ccc} h^*\mathcal{Y} & \xrightarrow{h^*} & \mathcal{Y} \\ \downarrow q' & & \downarrow q \\ S_X & \xrightarrow{h} & S_Y \end{array}$$

En considérant l'isomorphisme de systèmes locaux

$$\Psi^* = \Phi^* \circ (h^*)^{-1} : R^2 q'_* \mathbb{Z} \rightarrow R^2 p_* \mathbb{Z}$$

et le marquage induit  $\alpha \circ \Psi$ , nous obtenons par construction que l'application des périodes de  $h^* \mathcal{Y}$  et  $\mathcal{X}$  est la même pour tout point de  $S_X$  et que  $\Psi_0^* = \phi^*$ . En utilisant le fait que  $\phi^*$  est une isométrie de Hodge effective, le lemme 2.25 nous dit que  $\Psi_0^*$  induit une bijection entre le cône de Kähler de  $Y_0$  et  $X_0$ . En appliquant la proposition 7.1, nous savons que l'ensemble des  $s \in S_X$ , tel que  $\Phi_s^*$  induit une bijection entre les cônes de Kähler de  $h^* Y_s$  et  $X_s$ , est un ouvert. Conséquemment, nous pouvons remplacer  $S_X$  par un voisinage ouvert de l'origine vérifiant cette propriété. Par le lemme 2.25, nous avons que  $\Psi_s^*$  est maintenant une isométrie de Hodge effective. Par le théorème de densité 6.1, nous savons qu'il existe une suite  $s_n \rightarrow 0$  telle que la période de  $q^* \mathcal{Y}_{s_n}$  et  $\mathcal{X}_{s_n}$  est celle d'une surface de Kummer projective exceptionnelle. Par le lemme 2.13, nous avons que  $\mathcal{X}_{s_n}$  et  $\mathcal{Y}_{s_n}$  ont une isométrie de Hodge avec une surface de Kummer K3 projective. Conséquemment, en appliquant le théorème de Torelli faible 4.19, nous avons que ces surfaces sont biholomorphes à des surfaces de Kummer projectives. En utilisant le fait que  $\Psi_{s_n}^*$  est une isométrie de Hodge effective, nous pouvons appliquer le théorème de Torelli pour les surfaces de Kummer projectives 4.18 pour obtenir que  $\Psi_{s_n}^*$  est réalisé par un isomorphisme :

$$f_n : \mathcal{X}_{s_n} \rightarrow h^* \mathcal{Y}_{s_n}$$

Conséquemment, le résultat de Burns-Rapoport 8.1 nous dit qu'il existe un isomorphisme  $f : X_0 \rightarrow Y_0$  qui réalise  $\phi^*$   $\square$

**Théorème 9.2 (Torelli faible pour les surfaces K3)** Soient  $S$  et  $S'$  deux surfaces K3 qui possèdent une isométrie de Hodge

$$\phi^* : S' \rightarrow S$$

alors  $S$  et  $S'$  sont biholomorphes.

La preuve est essentiellement la même que pour le théorème 4.19.

*Preuve.* Puisque  $\phi^*$  est une isométrie,  $\phi^*$  préserve les éléments positifs. Conséquemment,  $\phi^*$  envoie le cône de Kähler  $C_{S'}^+$  sur  $C_S^+$  ou  $-C_S^+$ . Quitte à composer  $\phi$  avec  $-Id$ , nous pouvons supposer que nous sommes

dans le premier cas. La proposition 2.30 nous dit que nous pouvons trouver un élément  $g \in W_S$  tel que  $g \circ \phi^*$  préserve le cône de Kähler. Conséquemment, la proposition 9.1 nous dit que  $g \circ \phi^*$  est une isométrie de Hodge et nous pouvons appliquer le théorème précédent pour obtenir que  $S'$  et  $S$  sont biholomorphes.  $\square$

## 9.2 Quelques applications

**Corollaire 9.3** *Un point  $\omega \in \Omega$  correspond à une unique surface K3 kählérienne  $S$  marquée.*

Une application que nous pouvons faire de cela est que toutes les surfaces K3 sont difféomorphes.

**Proposition 9.4** *Toutes les surfaces K3 sont difféomorphes en tant que variétés différentielles de dimension 4.*

*Preuve.* En utilisant le théorème de Torelli local 5.1 et le corollaire 9.3, nous savons que n'importe quel point  $\omega \in \Omega$  admet un voisinage ouvert  $U$  donné par une famille de Kuranishi. Par Ereshmann, toutes les surfaces dans cette famille de Kuranishi sont difféomorphes. Conséquemment, le corollaire 9.3 nous dit que toutes les surfaces K3 marquées dont la période est dans  $U$  sont difféomorphes. Le résultat suit alors du fait que  $\Omega$  est connexe.  $\square$

**Corollaire 9.5** *Toutes les surfaces K3 sont simplement connexes.*

*Preuve.* Nous savons que la quartique de Fermat est une surface K3 2.2 :

$$x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 0$$

De plus, elle est simplement connexe par le théorème de Lefschetz sur les hyperplans. Le résultat découle alors de la proposition précédente 9.4.  $\square$

## CONCLUSION

La preuve que nous avons donnée du théorème de Torelli pour les surfaces K3 se base sur les articles originaux de (Pjateckiĭ-Šapiro et Šafarevič, 1971) et (Burns et Rapoport, 1975). Cependant, de nouvelles approches ont été découvertes depuis. Une preuve particulièrement intéressante reformule le théorème de Torelli en un énoncé sur les groupes d'holonomie d'une surface K3. Cette preuve est notamment donnée dans le livre (Huybrechts, 2011).

Une autre avenue intéressante à explorer est celle du cas des variétés hyper-kählériennes. Ces variétés sont caractérisées par l'existence d'une 2-forme holomorphe symplectique. L'énoncé naïf du théorème de Torelli serait un énoncé de la forme suivante :

Soient  $X$  et  $X'$  deux variétés hyper-kählériennes. S'il existe une isométrie de structures de Hodge de poids 2 vérifiant des conditions de compatibilité avec la forme holomorphe symplectique, alors  $X$  et  $X'$  sont isomorphes.

Cependant, un tel énoncé est trop optimiste et il est possible de construire des contre-exemples dans le cas holomorphe (Debarre, 1984) et même dans le cas biméromorphe (Namikawa, 2002). Malgré cela, les structures de Hodge de poids 2 ont quand même un rôle à jouer sur l'étude des variétés hyper-kählériennes. Le théorème de Torelli obtenu dans (Verbitsky, 2013) est de façon informelle un énoncé sur l'injectivité générique de l'application des périodes

$$\mathcal{P} : \mathcal{M}_\Gamma \rightarrow \Omega_\Gamma$$

où  $\mathcal{M}_\Gamma$  est un espace de modules des variétés hyper-kählériennes marquées dont  $H^2$  est isomorphe au réseau  $\Gamma$  et  $\Omega_\Gamma$  est le domaine des périodes associé (Huybrechts, 2011, Section 1.2). En particulier, une question intéressante est de se demander comment le théorème de Verbitsky se relie au théorème de Torelli classique sur les surfaces K3, ce qui est discuté brièvement dans l'article de Huybrechts (Huybrechts, 2011, Section 6.3).

## BIBLIOGRAPHIE

- Barlet, D. et Magnússon, J. (2019). *Complex Analytic Cycles I : Basic Results on Complex Geometry and Foundations for the Study of Cycles*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Cham : Springer International Publishing. ISSN : 0072-7830, 2196-9701, <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-31163-6>. Récupéré le 2025-07-23 de <https://link.springer.com/10.1007/978-3-030-31163-6>
- Barlet, D. et Magnússon, J. (2025). *Complex Analytic Cycles II : The Cycle Space*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Cham : Springer Nature Switzerland. ISSN : 0072-7830, 2196-9701, <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-031-84845-2>. Récupéré le 2025-07-23 de <https://link.springer.com/10.1007/978-3-031-84845-2>
- Barth, W. P., Hulek, K., Peters, C. A. M. et Van de Ven, A. (2004). *Compact Complex Surfaces*, volume 4 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-57739-0>. Récupéré le 2023-09-28 de <https://link.springer.com/10.1007/978-3-642-57739-0>
- Bott, R. et Tu, L. W. (1982). *Differential Forms in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY : Springer New York. ISSN : 0072-5285, <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-3951-0>. Récupéré le 2025-07-23 de <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4757-3951-0>
- Bourbaki, N. (2007). *Groupes et algèbres de Lie*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-34491-9>. Récupéré le 2025-07-23 de <http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-34491-9>
- Burns, D. et Rapoport, M. (1975). On the Torelli problem for kählerian  $K3$  surfaces. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 8(2), 235-273. <http://dx.doi.org/10.24033/asens.1287>. Récupéré le 2025-07-23 de <https://www.numdam.org/articles/10.24033/asens.1287/>
- Debarre, O. (1984). Un contre-exemple au théorème de Torelli pour les variétés symplectiques irréductibles. *C. R. Acad. Sci*, 299(14), 681-684. Récupéré le 2025-07-27 de <https://perso.imj-prg.fr/olivier-debarre/wp-content/uploads/debarre-pub/2.pdf>
- Hain, R. (2014). Lectures on Moduli Spaces of Elliptic Curves. arXiv :0812.1803 [math], <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.0812.1803>. Récupéré le 2025-07-24 de <http://arxiv.org/abs/0812.1803>
- Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology*. Cambridge ; New York : Cambridge University Press.
- Huybrechts, D. (2011). A global Torelli theorem for hyperkaehler manifolds (after Verbitsky). arXiv :1106.5573 [math]. Récupéré le 2023-09-28 de <http://arxiv.org/abs/1106.5573>
- Kodaira, K. (1964). On the Structure of Compact Complex Analytic Surfaces, I. *American Journal of Mathematics*, 86(4), 751. Publisher : JSTOR, <http://dx.doi.org/10.2307/2373157>. Récupéré le 2025-07-23 de <https://www.jstor.org/stable/2373157?origin=crossref>

- Kodaira, K. et Spencer, D. C. (1960). On Deformations of Complex Analytic Structures, III. Stability Theorems for Complex Structures. *The Annals of Mathematics*, 71(1), 43. Publisher : JSTOR, <http://dx.doi.org/10.2307/1969879>. Récupéré le 2025-07-23 de <https://www.jstor.org/stable/1969879?origin=crossref>
- Lee, J. M. (2012). *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY : Springer New York. ISSN : 0072-5285, <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>. Récupéré le 2025-07-23 de <https://link.springer.com/10.1007/978-1-4419-9982-5>
- Looijenga, E. et Peters, C. (1980). Torelli theorems for Kähler K3 surfaces. *Compositio Mathematica*, 42(2), 145–186. Récupéré le 2025-07-23 de [https://www.numdam.org/item/?id=CM\\_1980\\_\\_42\\_2\\_145\\_0](https://www.numdam.org/item/?id=CM_1980__42_2_145_0)
- Milnor, J. W. et Stasheff, J. D. (2016). *Characteristic Classes : AM-76*. Numéro 76 de Annals of Mathematics Studies. Princeton, NJ : Princeton University Press. <http://dx.doi.org/10.1515/9781400881826>
- Namikawa, Y. (2002). Counter-example to global Torelli problem for irreducible symplectic manifolds. arXiv :math/0110114, <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.math/0110114>. Récupéré le 2025-07-27 de <http://arxiv.org/abs/math/0110114>
- Peter, C. (1995). An introduction to complex algebraic geometry with emphasis on the theory of surfaces - Volume (1995) no. 23. Récupéré le 2025-07-23 de [https://www.numdam.org/item/CIF\\_1995\\_\\_23\\_/](https://www.numdam.org/item/CIF_1995__23_/)
- Pjateckiĭ-Šapiro, I. I. et Šafarevič, I. R. (1971). A TORELLI THEOREM FOR ALGEBRAIC SURFACES OF TYPE K 3. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 5(3), 547–588. <http://dx.doi.org/10.1070/IM1971v005n03ABEH001075>. Récupéré le 2025-07-27 de <https://www.mathnet.ru/eng/im2021>
- Putman, A. The fundamental theorem of projective geometry. Récupéré de <https://academicweb.nd.edu/~andyp/notes/FunThmProjGeom.pdf>
- Serre, J.-P. (1973). *A Course in Arithmetic*, volume 7 de *Graduate Texts in Mathematics*. New York, NY : Springer New York. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4684-9884-4>. Récupéré le 2025-07-28 de <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4684-9884-4>
- Siu, Y. T. (1983). Every k3 surface is kähler. *Inventiones Mathematicae*, 73(1), 139–150. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01393829>. Récupéré le 2025-07-27 de <http://link.springer.com/10.1007/BF01393829>
- Verbitsky, M. (2013). A global Torelli theorem for hyperkahler manifolds. arXiv :0908.4121 [math], <http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.0908.4121>. Récupéré le 2025-07-27 de <http://arxiv.org/abs/0908.4121>
- Voisin, C. (2002). *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I*, volume 1 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge : Cambridge University Press. <http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511615344>. Récupéré le 2023-09-28 de <https://www.cambridge.org/core/books/hodge-theory-and-complex-algebraic-geometry-i/>

A6E52939BA107FFCB5A901D5B5D88025

Weibel, C. A. (1994). *An Introduction to Homological Algebra* (1 éd.). Cambridge University Press.  
<http://dx.doi.org/10.1017/cbo9781139644136>. Récupéré le 2025-07-23 de  
<https://www.cambridge.org/core/product/identifiser/9781139644136/type/book>