

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

STRATÉGIE CORPORATIVE OPTIMALE D'UNE COMPAGNIE PAYANT DES DIVIDENDES ET POSSÉDANT DEUX  
PLANS D'INVESTISSEMENT

MÉMOIRE  
PRÉSENTÉ  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR  
ALICE MOUKOUELLE

DÉCEMBRE 2025

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.12-2023). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier monsieur Jean-François Renaud, professeur à l'Université du Québec à Montréal, pour avoir supervisé ce mémoire. Je remercie également le personnel et les enseignants que j'ai pu côtoyer dans le Département de Mathématiques. Enfin, je dédie ce travail à ma petite famille.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES .....	v
LISTE DES TABLEAUX .....	vi
RÉSUMÉ .....	vii
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 RAPPELS SUR LE PROBLÈME CLASSIQUE D'OPTIMISATION DE DIVIDENDES .....	3
1.1 Dividende croissant et continu .....	3
1.2 Lemme de vérification .....	4
1.3 Construction de la fonction valeur optimale et solution au problème .....	5
1.4 Dividende absolument continu avec un taux borné .....	7
1.5 Lemme de vérification .....	8
1.6 Construction de la fonction valeur optimale et solution au problème .....	9
CHAPITRE 2 STRATÉGIE OPTIMALE LORSQUE LE DIVIDENDE EST CONTINU .....	11
2.1 Lemme de vérification .....	12
2.2 Construction de la fonction valeur optimale .....	15
2.3 Solution du problème d'optimisation .....	19
2.4 Preuve du théorème .....	21
2.5 Réconciliation avec le cas où il n'y a qu'un seul plan d'investissement .....	27
2.6 Algorithme pour calculer les paramètres de la stratégie optimale .....	27
2.7 Test de sensibilité de la stratégie optimale par rapport aux paramètres d'investissement .....	28
2.7.1 Sensibilité par rapport à $\mu_2$ .....	29
2.7.2 Sensibilité par rapport à $\mu_1$ .....	31
2.7.3 Sensibilité par rapport à $\sigma_1^2$ .....	33

2.7.4	Sensibilité par rapport à $\sigma_2^2$ .....	35
CHAPITRE 3 STRATÉGIE OPTIMALE LORSQUE LE DIVIDENDE EST ABSOLUMENT CONTINU AVEC UN		
	TAUX BORNÉ .....	37
3.1	Lemme de vérification .....	38
3.2	Caractéristiques de la fonction valeur optimale .....	39
3.3	Construction de la fonction valeur optimale .....	40
3.4	Solution du problème d'optimisation .....	43
3.5	Réconciliation avec le cas où le dividende est continu .....	47
3.6	Test de sensibilité de la stratégie optimale par rapport aux paramètres d'investissement .....	49
CONCLUSION .....		55
ANNEXE A RÉOLUTION D'UNE EDO .....		56
BIBLIOGRAPHIE .....		57

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Stratégie optimale lorsque $Z$ est continu, $a = .2$ , $X_0 = .1$ , $\sigma^2 = .09$ , $\mu = .06$ et $n = 1 \dots$	7
Figure 2.1	Stratégie optimale lorsque $Z$ est continu, $a_1 = 5$ , $a_2 = 15$ , $X_0 = 2$ , $\sigma_1^2 = 4$ , $\mu_1 = 2$ , $\sigma_2^2 = 9$ , $\mu_2 = 4$ et $n = 2 \dots$	21
Figure 2.2	Sensibilité par rapport à $\mu_2 \dots$	30
Figure 2.3	Sensibilité par rapport à $\mu_1 \dots$	32
Figure 2.4	Sensibilité par rapport à $\sigma_1^2 \dots$	34
Figure 2.5	Sensibilité par rapport à $\sigma_2^2 \dots$	36
Figure 3.1	Stratégie optimale lorsque $Z$ a un taux borné par $u_0 = .75$ , $b_1 = 750$ , $b_2 = 1725$ , $X_0 = 0$ , $\sigma_1^2 = 16$ , $\mu_1 = .7$ , $\sigma_2^2 = 100$ , $\mu_2 = 1$ et $n = 2 \dots$	45
Figure 3.2	Sensibilité par rapport à $\mu_2 \dots$	50
Figure 3.3	Sensibilité par rapport à $\mu_1 \dots$	51
Figure 3.4	Sensibilité par rapport à $\sigma_1^2 \dots$	52
Figure 3.5	Sensibilité par rapport à $\sigma_2^2 \dots$	53

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Tableau de variations de $P_i$ .....	16
-------------	--------------------------------------	----

## RÉSUMÉ

Nous considérons ici une compagnie qui possède deux plans d'investissement, vérifiant certaines conditions, et qui paie des dividendes. En 1996, Radner et Shepp dans (Radner et Shepp, 1996) déterminent une stratégie optimale pour une telle compagnie, lorsque le dividende est continu. Plus tard en 2008, Schmidli dans (Schmidli, 2008) trouve une stratégie optimale pour une compagnie possédant un seul plan d'investissement, lorsque le dividende est absolument continu avec un taux borné, puis lorsque le dividende est continu. Dans ce mémoire, nous reformulons le problème souligné dans (Radner et Shepp, 1996) de façon similaire à celui de Schmidli dans (Schmidli, 2008). Ensuite, nous généralisons le travail de Schmidli, pour une compagnie possédant deux plans d'investissement. À chaque fois, nous faisons des tests de sensibilité.

MOTS CLÉS : contrôle stochastique ; processus stochastiques ; stratégie optimale ; seuils.

## INTRODUCTION

Les actuaires se sont toujours fixés pour objectif d'améliorer la stabilité financière des compagnies d'assurance. En 1903, Lundberg dans (Lundberg, 1903), introduit le modèle classique de risque collectif. Le risque d'une compagnie d'assurance était alors mesuré par sa probabilité de ruine. On pourrait se référer à (Cramér, 1930) et (Cramér, 1955). La décision optimale était de minimiser la probabilité de ruine, soit par la réassurance et/ou les investissements. On pourrait se référer à (Azcue et Muler, 2014), (Hipp et Plum, 2000), (Schmidli, 2002) et (Schmidli, 2008). Mais minimiser la probabilité de ruine sur un horizon infini, suppose que la compagnie laisse le surplus croître à l'infini. Ceci est peu plausible, car une compagnie ancienne se retrouve à détenir un surplus plus élevé qu'une compagnie nouvelle, même si les deux compagnies sont dans la même industrie, et donc possèdent le même risque. Par conséquent, il faut trouver un moyen de distribuer le surplus.

Bruno de Finetti dans (de Finetti, 1957), introduit alors la stratégie de paiement de dividendes. Le dividende est distribué aux actionnaires, et non aux détenteurs de police. La décision optimale de la compagnie ici, est de maximiser la valeur présente des dividendes payés jusqu'à la ruine de la compagnie. Bruno de Finetti a résolu le problème de la stratégie optimale de paiement de dividendes, dans le cas d'une marche aléatoire. Après cela, Gerber dans (Gerber, 1969), étudie le problème dans le cadre d'un modèle de Cramér-Lundberg. Gerber et Shiu dans (Gerber et Shiu, 2004), poursuivent l'étude du problème dans le cadre d'un modèle de diffusion. Mais l'inconvénient de l'approche de paiements de dividendes, est que sous la stratégie optimale, la ruine est presque certaine.

Dans tout ce qui est cité plus haut, la compagnie d'assurance dont on veut étudier la solvabilité, n'a qu'un seul plan d'investissement, c'est-à-dire que la dynamique du processus de surplus est fixée au départ et ne peut être modifiée. En 1996, Radner et Shepp dans (Radner et Shepp, 1996), considèrent le cas où la compagnie d'assurance possède plusieurs plans d'investissements qui ne se dominent pas les uns les autres. Les auteurs ici, supposent que la compagnie paie des dividendes et déterminent une stratégie corporative optimale, c'est-à-dire un meilleur choix de plan d'investissement et de paiement de dividendes.

À la même époque, Jeanblanc-Picqué et Shiryaev dans (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995), reprennent le travail de Radner et Shepp pour un seul plan d'investissement. Ils supposent d'abord que, le dividende payé est absolument continu, avec un taux borné. Ensuite, ils considèrent le cas où le dividende est croissant et

continu à droite. Plus tard en 2008, Schmidli dans (Schmidli, 2008), reprend le travail de Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, avec une autre approche et présente les résultats différemment.

Dans le présent mémoire, nous faisons une généralisation de ce que Schmidli a fait dans (Schmidli, 2008). Nous trouvons une stratégie corporative optimale pour une compagnie possédant deux plans d'investissement et payant des dividendes. Nous reformulons le problème souligné dans (Radner et Shepp, 1996) de façon similaire à celui de Schmidli dans (Schmidli, 2008). Nous considérons le cas où le dividende est continu, puis le cas où il est absolument continu avec un taux borné, ce qui n'avait pas encore été considéré dans la littérature.

Le mémoire est composé de trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous faisons un rappel du problème classique d'optimisation de dividendes. Nous nous inspirons de ce qui a été fait dans (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995) et (Schmidli, 2008).

Dans le deuxième chapitre, nous trouvons une stratégie corporative optimale pour une compagnie possédant deux plans d'investissement et payant des dividendes continus. Le problème ayant été reformulé comme dans (Schmidli, 2008), nous nous assurons que si la compagnie ne possède qu'un seul plan d'investissement, nous retrouvons bien le résultat énoncé dans (Schmidli, 2008). Nous faisons une analyse numérique et étudions le comportement de la stratégie optimale en fonction des paramètres des plans d'investissement.

Le troisième chapitre contient le résultat principal du mémoire, qui est nouveau dans la littérature. Le chapitre traite le cas où le dividende est absolument continu avec un taux borné, et la compagnie possède deux plans d'investissement. Nous montrons que lorsque la borne tend vers l'infini, nous retrouvons le cas du Chapitre 2, où le dividende est continu. Ici aussi, nous étudions le comportement de la stratégie optimale en fonction des paramètres des plans d'investissement.

## CHAPITRE 1

### RAPPELS SUR LE PROBLÈME CLASSIQUE D'OPTIMISATION DE DIVIDENDES

Dans tout le mémoire,  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est un espace de probabilités et  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  est un mouvement brownien standard défini sur cet espace. De plus,  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  est la filtration naturelle de  $W$ .

Dans ce chapitre, nous faisons des rappels sur le problème d'optimisation de dividendes, pour un modèle de diffusion, en nous basant sur (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995) et (Schmidli, 2008). La compagnie d'assurance, dont on veut étudier la solvabilité, paie des dividendes et n'a qu'un seul plan d'investissement  $(\mu, \sigma^2)$ . Le paramètre  $\mu$  est le rendement de l'investissement, c'est-à-dire le rapport du bénéfice net perçu sur l'investissement, par le capital investi. Le paramètre  $\sigma^2$  est la variance, et elle mesure la variabilité du rendement.

Le processus de surplus de la compagnie est décrit par

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t,$$

avec  $X_0 \geq 0$ . On applique un contrôle à ce surplus, à l'aide d'un processus croissant  $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ , qui est ici le paiement cumulé de dividendes fait par la compagnie, de telle sorte que le processus contrôlé s'écrit

$$X_t^Z = X_t - Z_t.$$

**Remarque 1.1** Dans ce chapitre, nous survolons les preuves car des preuves plus générales et détaillées sont données aux Chapitres 2 et 3.

Nous allons d'abord considérer le cas où le processus  $Z$  est continu, ensuite le cas où il est absolument continu avec un taux borné.

#### 1.1 Dividende croissant et continu

Le processus de surplus contrôlé est alors donné par

$$dX_t^Z = \mu dt + \sigma dW_t - dZ_t.$$

On définit le temps de la ruine correspondant par

$$\tau^Z = \inf\{t \geq 0 \mid X_t^Z < 0\}.$$

Le processus  $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$  est une stratégie admissible s'il est  $\mathcal{F}_t$ -adapté, continu et croissant. On note  $\mathcal{Z}$  l'ensemble des stratégies admissibles. La fonction valeur de la stratégie  $Z$  est définie par :

$$V^Z(x) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau^Z} e^{-rt} dZ_t \right], \quad x \in [0, \infty),$$

où  $r > 0$  est un taux d'escompte donné. La fonction valeur optimale est définie par :

$$V(x) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} V^Z(x), \quad x \in [0, \infty).$$

Une stratégie optimale est une stratégie qui maximise la fonction valeur optimale. Plus précisément, une stratégie  $Z^*$  est dite optimale si on a  $V^{Z^*}(x) = V(x)$  pour tout  $x \in [0, \infty)$ .

## 1.2 Lemme de vérification

Le lemme suivant permet de résoudre le problème d'optimisation.

**Lemme 1.2 (Lemme de vérification)** Soit  $\bar{V}$  une fonction positive définie sur  $[0, \infty)$ , deux fois continûment différentiable, telle que  $\bar{V}(0) = 0$ , et qui vérifie pour  $x > 0$ ,

$$\max\left\{\frac{1}{2}\sigma^2\bar{V}''(x) + \mu\bar{V}'(x) - r\bar{V}(x), 1 - \bar{V}'(x)\right\} \leq 0.$$

Alors, on a  $V(x) \leq \bar{V}(x)$ , pour tout  $x \geq 0$ .

*Preuve.* Ici, nous survolons la preuve car une preuve plus détaillée est donnée au Chapitre 2, pour un cas plus général.

Considérons  $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ , une stratégie admissible et un réel  $h > 0$ . On pose  $X_0^Z = x$  et on écrit la Formule d'Itô

$$\begin{aligned} e^{-r(\tau^Z \wedge h)} \bar{V}(X_{\tau^Z \wedge h}^Z) - \bar{V}(x) &= \int_0^{\tau^Z \wedge h} e^{-rt} (\mu \bar{V}'(X_t^Z) + \frac{1}{2} \sigma^2 \bar{V}''(X_t^Z) - r \bar{V}(X_t^Z)) dt \\ &+ \int_0^{\tau^Z \wedge h} e^{-rt} \sigma \bar{V}'(X_t^Z) dW_t - \int_0^{\tau^Z \wedge h} e^{-rt} \bar{V}'(X_t^Z) dZ_t. \end{aligned} \quad (1.1)$$

La fonction  $t \mapsto e^{-rt}$  et le processus  $\{\bar{V}'(X_t^Z), t \geq 0\}$  sont bornés sur  $[0, \tau^Z \wedge h]$ . Il en est de même du processus  $\{e^{-rt} \sigma \bar{V}'(X_t^Z), t \geq 0\}$ . On sait alors que l'intégrale stochastique

$$\int_0^{\tau^Z \wedge h} e^{-rt} \sigma \bar{V}'(X_t^Z) dW_t$$

a une espérance nulle.

Pour l'intégrale stochastique de Stieltjes

$$\int_0^{\tau^Z \wedge h} e^{-rt} \bar{V}'(X_t^Z) dZ_t,$$

et parce qu'on suppose  $\bar{V}'(X_t^Z) \geq 1$ , on a

$$\int_0^{\tau^Z \wedge h} e^{-rt} \bar{V}'(X_t^Z) dZ_t \geq \int_0^{\tau^Z \wedge h} e^{-rt} dZ_t.$$

Avec la propriété de monotonie de l'espérance, l'équation (1.1) devient

$$\mathbb{E}_x \left[ e^{-r(\tau^Z \wedge h)} \bar{V}(X_{\tau^Z \wedge h}^Z) \right] \leq \bar{V}(x) - \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau^Z \wedge h} e^{-rt} dZ_t \right]. \quad (1.2)$$

Par le Théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x \left[ e^{-r(\tau^Z \wedge h)} \bar{V}(X_{\tau^Z \wedge h}^Z) \right] = \mathbb{E}_x \left[ \lim_{h \rightarrow \infty} e^{-r(\tau^Z \wedge h)} \bar{V}(X_{\tau^Z \wedge h}^Z) \right] = 0.$$

Par le Théorème de convergence monotone, on a

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau^Z \wedge h} e^{-rt} dZ_t \right] = \mathbb{E}_x \left[ \lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^Z \wedge h} e^{-rt} dZ_t \right] = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau^Z} e^{-rt} dZ_t \right].$$

En faisant tendre  $h$  vers l'infini dans l'équation (1.2), on obtient

$$V^Z(x) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau^Z} e^{-rt} dZ_t \right] \leq \bar{V}(x).$$

□

### 1.3 Construction de la fonction valeur optimale et solution au problème

Le polynôme

$$P(y) = \frac{1}{2} \sigma^2 y^2 + \mu y - r$$

a pour racines :

$$\alpha = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}. \quad (1.3)$$

Considérons la fonction

$$\bar{V}(x) = \begin{cases} Ae^{\alpha x} - Be^{\beta x} & \text{pour } 0 \leq x \leq a, \\ x + \xi & \text{pour } x \geq a, \end{cases}$$

où les valeurs  $A, B, a$  et  $\xi$  sont à déterminer. Nous allons les choisir pour que la fonction  $\bar{V}$  vérifie les conditions du Lemme de vérification 1.2. En d'autres mots, on veut que :

$$\begin{aligned} \bar{V}(0) &= 0 \text{ ou } A = B, \\ \bar{V}(a-) &= \bar{V}(a+) \text{ ou } Ae^{\alpha a} - Be^{\beta a} = a + \xi, \\ \bar{V}'(a-) &= \bar{V}'(a+) \text{ ou } A\alpha e^{\alpha a} - B\beta e^{\beta a} = 1, \\ \bar{V}''(a-) &= \bar{V}''(a+) \text{ ou } A\alpha^2 e^{\alpha a} - B\beta^2 e^{\beta a} = 0. \end{aligned}$$

On trouve

$$A = \frac{1}{\alpha e^{\alpha a} - \beta e^{\beta a}}, \quad a = \frac{1}{\alpha - \beta} \log \left[ \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right], \quad \xi = \frac{\mu}{r} - a.$$

Le théorème suivant donne une solution au problème d'optimisation.

**Théorème 1.3** Une stratégie optimale  $Z^*$  est donnée par

$$Z_t^* = \max \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t \wedge \tau} X_s - a, 0 \right\}.$$

De plus, la fonction valeur optimale est égale à

$$V(x) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha e^{\alpha a} - \beta e^{\beta a}} & \text{pour } 0 \leq x \leq a, \\ \frac{\mu}{r} + (x - a) & \text{pour } x \geq a. \end{cases}$$

La Figure 1.1 illustre une stratégie optimale où  $a = .2$ ,  $X_0 = .1$ ,  $\sigma^2 = .09$  et  $\mu = .06$ . En deçà du point  $a$ , les processus  $X$  et  $X^*$  sont identiques. La preuve du théorème est donnée dans un cas plus général au Chapitre 2. On commence par montrer que la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha e^{\alpha a} - \beta e^{\beta a}} & \text{pour } 0 \leq x \leq a, \\ \frac{\mu}{r} + (x - a) & \text{pour } x \geq a, \end{cases}$$

vérifie les hypothèses du Lemme de vérification 1.2. On en déduit que, pour tout  $x \geq 0$ , on a  $V(x) \leq f(x)$ . Ensuite, on montre que  $f(x) = V^{Z^*}(x)$ .

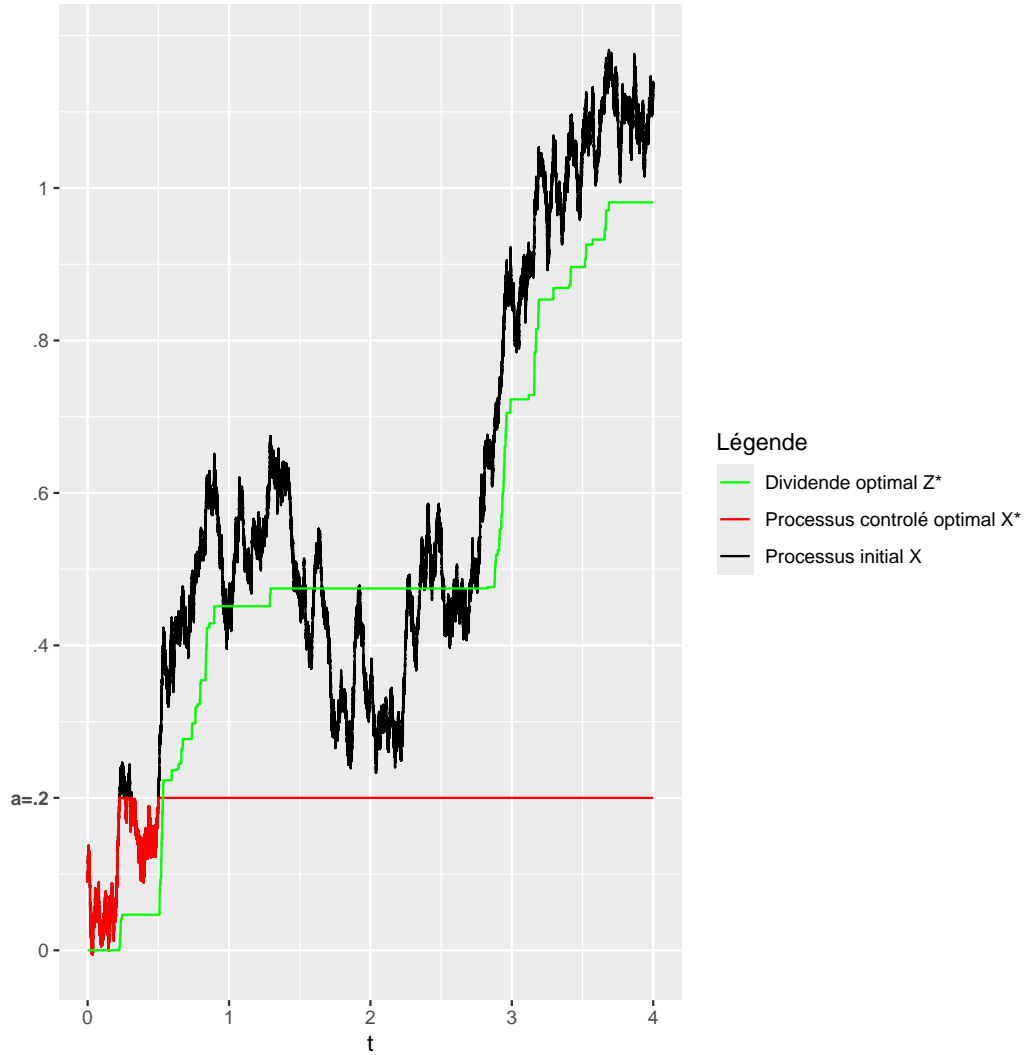


Figure 1.1 – Stratégie optimale lorsque  $Z$  est continu,  $a = .2$ ,  $X_0 = .1$ ,  $\sigma^2 = .09$ ,  $\mu = .06$  et  $n = 1$ .

#### 1.4 Dividende absolument continu avec un taux borné

On suppose ici que le dividende est un processus  $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$  de la forme

$$Z_t = \int_0^t U_s ds.$$

Le processus de surplus contrôlé est alors donné par

$$dX_t^U = (\mu - U_t)dt + \sigma dW_t$$

ou encore

$$X_t^U = X_0 + \mu t - \int_0^t U_s ds + \sigma W_t.$$

Le temps de ruine correspondant est défini par

$$\tau^U = \inf\{t \geq 0 \mid X_t^U < 0\}.$$

Le processus  $U = \{U_t, t \geq 0\}$  est une stratégie admissible s'il est  $\mathcal{F}_t$ -adapté, avec  $0 \leq U_t \leq u_0$ , où  $u_0$  est une constante donnée. On note  $\mathcal{U}$  l'ensemble des stratégies admissibles.

La fonction valeur de la stratégie  $U$  est définie par

$$V^U(x) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau^U} U_t e^{-rt} dt \right], \quad x \in [0, \infty),$$

où  $r$  est un taux d'escompte donné. La fonction valeur optimale est définie par :

$$V(x) = \sup_{U \in \mathcal{U}} V^U(x), \quad x \in [0, \infty).$$

Ici encore, une stratégie optimale est une stratégie qui maximise la fonction valeur optimale.

### 1.5 Lemme de vérification

Le lemme de vérification est le suivant.

**Lemme 1.4** Soit  $\bar{V}$  une fonction positive définie sur  $[0, \infty)$ , deux fois continûment différentiable, telle que  $\bar{V}(0) = 0$ , et qui vérifie pour  $x > 0$ ,

$$\sup_{0 \leq u \leq u_0} \left( \frac{1}{2} \sigma^2 \bar{V}''(x) + (\mu - u) \bar{V}'(x) - r \bar{V}(x) + u \right) = 0.$$

Alors, on a  $V(x) \leq \bar{V}(x)$ , pour tout  $x \geq 0$ .

**Remarque 1.5** La fonction  $V$  est strictement croissante, et bornée par  $u_0/r$ . De plus on a  $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = u_0/r$ , et  $V(0) = 0$ .

Les preuves du lemme et de la remarque sont données au Chapitre 3.

## 1.6 Construction de la fonction valeur optimale et solution au problème

Ici, nous survolons les étapes. Cette construction est faite plus en détail au Chapitre 3, dans un cas plus général. L'équation

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \mu f'(x) - rf(x) + \sup_{0 \leq u \leq u_0} (u(1 - f'(x))) = 0$$

a pour solutions

$$f_1(x) = Ae^{\gamma(0)x} - Be^{-\theta(0)x},$$

et

$$f_2(x) = \frac{u_0}{r} + Ce^{\gamma(u_0)x} - De^{-\theta(u_0)x},$$

où

$$\gamma(u) = \frac{-(\mu - u) + \sqrt{(\mu - u)^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2} \quad \text{et} \quad \theta(u) = \frac{\mu - u + \sqrt{(\mu - u)^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}.$$

Nous cherchons une solution régulière qui vérifie les propriétés citées dans la remarque précédente. Un candidat à cette solution est la fonction

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{\gamma(0)x} - Be^{-\theta(0)x} & \text{pour } 0 \leq x \leq b, \\ \frac{u_0}{r} - \frac{e^{-\theta(u_0)(x-b)}}{\theta(u_0)} & \text{pour } x \geq b, \end{cases}$$

où les paramètres  $A$ ,  $B$ , et  $b$  sont à déterminer. On veut que :

$$f(0) = 0 \text{ ou } A = B, \tag{1.4}$$

$$f(b-) = f(b+) \text{ ou } A(e^{\gamma(0)b} - e^{-\theta(0)b}) = u_0/r - 1/\theta(u_0), \tag{1.5}$$

$$f'(b-) = f'(b+) \text{ ou } A(\gamma(0)e^{\gamma(0)b} + \theta(0)e^{-\theta(0)b}) = 1, \tag{1.6}$$

$$f''(b-) = f''(b+) \text{ ou } A(\gamma(0)^2 e^{\gamma(0)b} - \theta(0)^2 e^{-\theta(0)b}) = -\theta(u_0). \tag{1.7}$$

L'équation (1.6) donne

$$A = B = \frac{1}{\gamma(0)e^{\gamma(0)b} + \theta(0)e^{-\theta(0)b}}.$$

En divisant les équations (1.6) et (1.7), on a

$$\frac{\gamma(0) + \theta(0)e^{-b(\theta(0)+\gamma(0))}}{\gamma(0)^2 - \theta(0)^2 e^{-b(\theta(0)+\gamma(0))}} = \frac{1}{-\theta(u_0)}.$$

On en déduit que

$$b = \frac{1}{\gamma(0) + \theta(0)} \log \frac{\theta(0)(\theta(0) - \theta(u_0))}{\gamma(0)(\gamma(0) + \theta(u_0))}. \tag{1.8}$$

Le théorème suivant donne une solution au problème d'optimisation.

**Théorème 1.6** Une stratégie optimale  $U^*$  est donnée par  $U_t^* = u_0 \mathbf{1}_{X_t > b}$ , pour tout  $t \geq 0$ , où  $b$  est donné par (1.8).

De plus, la fonction valeur optimale est égale à

$$V(x) = \begin{cases} \frac{e^{\gamma(0)x} - e^{-\theta(0)x}}{\gamma(0)e^{\gamma(0)b} + \theta(0)e^{-\theta(0)b}} & \text{pour } 0 \leq x \leq b, \\ \frac{u_0}{r} - \frac{e^{-\theta(u_0)(x-b)}}{\theta(u_0)} & \text{pour } x \geq b. \end{cases}$$

La preuve du théorème est donnée dans un cas plus général, au Chapitre 3. Comme dans la section précédente, la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\gamma(0)x} - e^{-\theta(0)x}}{\gamma(0)e^{\gamma(0)b} + \theta(0)e^{-\theta(0)b}} & \text{pour } 0 \leq x \leq b, \\ \frac{u_0}{r} - \frac{e^{-\theta(u_0)(x-b)}}{\theta(u_0)} & \text{pour } x \geq b. \end{cases}$$

vérifie les conditions du Lemme 1.4, donc  $V(x) \leq f(x)$ . On montre aussi que  $V^{U^*}(x) = f(x)$ .

## CHAPITRE 2

### STRATÉGIE OPTIMALE LORSQUE LE DIVIDENDE EST CONTINU

Pour la suite du mémoire, nous supposons que la compagnie possède deux plans d'investissement. Le processus de contrôle est une combinaison du choix d'un plan d'investissement et de paiement de dividendes. Une stratégie sera dite optimale si elle maximise la valeur présente des dividendes payés avant la ruine de la compagnie.

Dans ce chapitre, nous reprenons en détails le travail fait dans (Radner et Shepp, 1996) et reformulons le problème comme dans (Schmidli, 2008). Nous nous assurons à la fin que, si la compagnie ne possède qu'un plan d'investissement alors, on retrouve bien le résultat de (Schmidli, 2008).

Soit  $\mathcal{A} = \{(\mu_1, \sigma_1^2), (\mu_2, \sigma_2^2)\}$  l'ensemble des plans d'investissement de la compagnie, où  $\mu_i, \sigma_i \in (0, \infty)$ , pour chaque  $i = 1, 2$ . Les paramètres  $\mu_i$  et  $\sigma_i^2$  sont respectivement les rendement et variance d'investissement, tels que définis au Chapitre 1. Ils vérifient de plus les conditions

$$\begin{cases} \mu_1 < \mu_2, & (2.1a) \\ \frac{\sigma_1^2}{\mu_1} < \frac{\sigma_2^2}{\mu_2}. & (2.1b) \end{cases}$$

Un investissement est plus sollicité qu'un autre, si pour le même risque  $\sigma$ , il fournit un meilleur rendement  $\mu$ . Les deux conditions précédemment citées, confèrent aux deux éléments de  $\mathcal{A}$  la même utilité, c'est-à-dire qu'un investisseur sera indifférent quant au choix d'un des éléments de  $\mathcal{A}$ . Le processus de surplus de la compagnie est  $X = \{X_t, t \geq 0\}$ . On suppose que  $X_0 \geq 0$ .

Nous considérons encore l'espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et le mouvement brownien standard  $W = \{W_t, t \geq 0\}$ , tels que définis au Chapitre 1.

Une stratégie  $\pi = \{\pi_t, t \geq 0\}$  est définie par  $\pi_t = [(\mu_t, \sigma_t^2), Z_t]$  où, pour chaque  $t$ , on a  $(\mu_t, \sigma_t^2) \in \mathcal{A}$ , et où  $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$  est un processus croissant et continu. On suppose que  $Z_0 = 0$ .

**Remarque 2.1** Dans l'article (Radner et Shepp, 1996), le processus  $Z$  n'est que croissant, mais nous imposons ici qu'il soit aussi continu, car le processus contrôlé sera alors continu, ce qui facilite les calculs. De plus, lorsqu'on se restreint au cas continu, on obtient les mêmes résultats que dans l'article.

Le processus contrôlé par une stratégie  $\pi$  est donné par

$$dX_t^\pi = \mu_t dt + \sigma_t dW_t - dZ_t,$$

ou, sous forme intégrale,

$$X_t^\pi = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s - Z_t.$$

Il est continu car  $Z$  est continu. La stratégie  $\pi = \{[(\mu_t, \sigma_t^2), Z_t], t \geq 0\}$  est admissible si les processus  $\{\mu_t, t \geq 0\}$ ,  $\{\sigma_t^2, t \geq 0\}$ ,  $\{Z_t, t \geq 0\}$  sont  $\mathcal{F}_t$ -adaptés et,  $\{Z_t, t \geq 0\}$  est croissant et continu. On note  $\Pi$  l'ensemble des stratégies admissibles.

La fonction valeur de  $\pi = \{[(\mu_t, \sigma_t^2), Z_t], t \geq 0\}$  est définie par :

$$V^\pi(x) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau^\pi} e^{-rt} dZ_t \right], \quad x \in [0, \infty),$$

où  $r > 0$  est un taux d'escompte donné, et  $\tau^\pi$  est le temps de ruine défini par

$$\tau^\pi = \inf\{t \geq 0 \mid X_t^\pi \leq 0\}.$$

Sur l'événement  $\{\tau^\pi < \infty\}$ , on a  $X_{\tau^\pi}^\pi = 0$  car le processus  $X^\pi$  est continu.

La fonction valeur optimale est définie par :

$$V(x) = \sup_{\pi \in \Pi} V^\pi(x), \quad x \in [0, \infty).$$

Si le capital initial est nul, alors pour toute stratégie  $\pi$ , on a  $\tau^\pi = 0$ . Donc

$$V^\pi(0) = \mathbb{E}_0 \left[ \int_0^{\tau^\pi} e^{-rt} dZ_t \right] = 0.$$

On en déduit que  $V(0) = 0$ . Une stratégie  $\pi^*$  est dite optimale si on a  $V^{\pi^*}(x) = V(x)$  pour tout  $x \in [0, \infty)$ .

## 2.1 Lemme de vérification

Le lemme de vérification est le suivant :

**Lemme 2.2 (Lemme de vérification)** Soit  $\bar{V}$  une fonction positive définie sur  $[0, \infty)$ , deux fois continûment différentiable, telle que  $\bar{V}(0) = 0$ , et qui vérifie, pour  $x > 0$ , les inéquations

$$\begin{cases} \max\{\frac{1}{2}\sigma_1^2 \bar{V}''(x) + \mu_1 \bar{V}'(x) - r\bar{V}(x), 1 - \bar{V}'(x)\} \leq 0, \\ \max\{\frac{1}{2}\sigma_2^2 \bar{V}''(x) + \mu_2 \bar{V}'(x) - r\bar{V}(x), 1 - \bar{V}'(x)\} \leq 0. \end{cases}$$

Alors, on a  $V(x) \leq \bar{V}(x)$ , pour tout  $x \geq 0$ .

Preuve.

Soit  $\pi = \{\pi_t, t \geq 0\}$ , une stratégie admissible avec  $\pi_t = [(\mu_t, \sigma_t^2), Z_t]$ . Considérons un réel  $h > 0$  et la fonction  $g(t, x) = e^{-rt}\bar{V}(x)$ . On a que  $g \in C^2((0, \infty) \times (0, \infty))$ . Si on applique la Formule d'Itô à  $g(\tau^\pi \wedge h, X_{\tau^\pi \wedge h}^\pi)$ , et si  $X_0^\pi = x$ , alors on peut écrire

$$\begin{aligned} e^{-r(\tau^\pi \wedge h)}\bar{V}(X_{\tau^\pi \wedge h}^\pi) - \bar{V}(x) &= \int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt}(\mu_t \bar{V}'(X_t^\pi) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \bar{V}''(X_t^\pi) - r\bar{V}(X_t^\pi))dt \\ &+ \int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt}\sigma_t \bar{V}'(X_t^\pi)dW_t - \int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt}\bar{V}'(X_t^\pi)dZ_t. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Rappelons que le processus  $X^\pi$  est continu. De plus sur  $[0, \tau^\pi \wedge h]$ , on a  $X_t^\pi \geq 0$ . Par hypothèse, la fonction  $x \mapsto \bar{V}'(x)$  est continue. Donc, le processus  $\{\bar{V}'(X_t^\pi), t \geq 0\}$  est continu et par conséquent borné sur  $[0, \tau^\pi \wedge h]$ . De plus la fonction  $t \mapsto e^{-rt}$  est bornée sur  $[0, \tau^\pi \wedge h]$ , et  $\sigma_t$  ne prend que deux valeurs. Donc  $\{e^{-rt}\sigma_t \bar{V}'(X_t^\pi), t \geq 0\}$  est borné sur  $[0, \tau^\pi \wedge h]$ . On sait alors que l'intégrale stochastique

$$\int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt}\sigma_t \bar{V}'(X_t^\pi)dW_t$$

a une espérance nulle.

Le processus  $Z$  étant croissant, il est à variation finie. On sait alors que

$$\int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt}\bar{V}'(X_t^\pi)dZ_t$$

est une intégrale stochastique de Stieltjes qui est définie trajectoire par trajectoire comme une intégrale de Riemann-Stieltjes. Par hypothèse, on a  $\bar{V}'(X_t^\pi) \geq 1$ . Par la propriété de monotonie de l'intégrale de Riemann-Stieltjes, on a

$$\int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt}\bar{V}'(X_t^\pi)dZ_t \geq \int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt}dZ_t.$$

Par hypothèse, on a aussi

$$\mu_t \bar{V}'(X_t^\pi) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \bar{V}''(X_t^\pi) - r\bar{V}(X_t^\pi) \leq 0,$$

si  $t \in [0, \tau^\pi \wedge h]$ .

En faisant les modifications nécessaires dans les expressions (2.2), on obtient l'inégalité

$$e^{-r(\tau^\pi \wedge h)}\bar{V}(X_{\tau^\pi \wedge h}^\pi) \leq \bar{V}(x) + \int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt}\sigma_t \bar{V}'(X_t^\pi)dW_t - \int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt}dZ_t. \quad (2.3)$$

Par la propriété de monotonie de l'espérance, on obtient ensuite

$$\mathbb{E}_x \left[ e^{-r(\tau^\pi \wedge h)} \bar{V}(X_{\tau^\pi \wedge h}^\pi) \right] \leq \bar{V}(x) - \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt} dZ_t \right]. \quad (2.4)$$

Rappelons que le processus  $\{\bar{V}(X_t^\pi), t \geq 0\}$  est continu. Donc, sur l'événement  $\{\tau^\pi < \infty\}$ , ce processus est borné sur  $[0, \tau^\pi]$ . Soit  $M$  cette borne. Pour tout  $h > 0$ , on a

$$e^{-r(\tau^\pi \wedge h)} \bar{V}(X_{\tau^\pi \wedge h}^\pi) \leq M \mathbf{1}_{\{\tau^\pi < \infty\}}.$$

Par le Théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x \left[ e^{-r(\tau^\pi \wedge h)} \bar{V}(X_{\tau^\pi \wedge h}^\pi) \right] = \mathbb{E}_x \left[ \lim_{h \rightarrow \infty} e^{-r(\tau^\pi \wedge h)} \bar{V}(X_{\tau^\pi \wedge h}^\pi) \right].$$

Sur l'événement  $\{\tau^\pi < \infty\}$ , les variables aléatoires  $e^{-r\tau^\pi}$  et  $X_{\tau^\pi}^\pi$  sont bien définies, et on a  $\lim_{h \rightarrow \infty} e^{-r(\tau^\pi \wedge h)} = e^{-r\tau^\pi}$ . Donc

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} e^{-r(\tau^\pi \wedge h)} \bar{V}(X_{\tau^\pi \wedge h}^\pi) &= e^{-r\tau^\pi} \mathbf{1}_{\{\tau^\pi < \infty\}} \bar{V}(\lim_{h \rightarrow \infty} X_{\tau^\pi \wedge h}^\pi) \\ &= e^{-r\tau^\pi} \mathbf{1}_{\{\tau^\pi < \infty\}} \bar{V}(X_{\tau^\pi}^\pi) \\ &= e^{-r\tau^\pi} \mathbf{1}_{\{\tau^\pi < \infty\}} \bar{V}(0) \text{ car} \\ &= 0, \end{aligned}$$

où les trois premières égalités découlent respectivement, et dans l'ordre, des faits que  $\bar{V}$  soit continue, le processus  $X^\pi$  soit continu, et  $X_{\tau^\pi}^\pi = 0$  sur  $\{\tau^\pi < \infty\}$ .

D'autre part, sur l'événement  $\{\tau^\pi < \infty\}$ , l'intégrale de Riemann-Stieltjes  $\int_0^{\tau^\pi} e^{-rt} dZ_t$  est bien définie. Le processus  $\{\int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt} dZ_t, h \geq 0\}$  est croissant, car l'intervalle d'intégration est de plus en plus grand et  $Z$  est croissant. Par le Théorème de convergence monotone, on a

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt} dZ_t \right] = \mathbb{E}_x \left[ \lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt} dZ_t \right] = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau^\pi} e^{-rt} dZ_t \right].$$

En faisant tendre  $h$  vers l'infini dans l'équation (2.4), on obtient

$$V^\pi(x) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau^\pi} e^{-rt} dZ_t \right] \leq \bar{V}(x).$$

La stratégie  $\pi$  étant arbitraire, en passant au supremum, on a  $V(x) \leq \bar{V}(x)$ .  $\square$

## 2.2 Construction de la fonction valeur optimale

Pour  $i = 1, 2$ , on considère le polynôme

$$P_i(y) = \frac{1}{2}\sigma_i^2 y^2 + \mu_i y - r, \quad (2.5)$$

dont les racines sont :

$$\alpha_i = \frac{-\mu_i + \sqrt{\mu_i^2 + 2r\sigma_i^2}}{\sigma_i^2} \quad \text{et} \quad \beta_i = \frac{-\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 + 2r\sigma_i^2}}{\sigma_i^2}. \quad (2.6)$$

La proposition suivante donne quelques propriétés des racines de  $P_1$  et  $P_2$ .

**Proposition 2.3** *On a  $\beta_1 < \beta_2 < 0 < \alpha_2 < \alpha_1$ . Par conséquent  $P_1(\alpha_2) < 0$ ,  $P_1(\beta_2) < 0$ ,  $P_2(\alpha_1) > 0$  et  $P_2(\beta_1) > 0$ .*

*Preuve.* Pour  $i = 1, 2$ , on a  $\beta_i < 0 < \alpha_i$ . On sait que  $P_i(\alpha_i) = 0$ . Donc

$$\frac{1}{2}(\sigma_i^2/\mu_i)\alpha_i^2 + \alpha_i = r/\mu_i.$$

Selon (2.1a), on a  $r/\mu_2 < r/\mu_1$ . Donc

$$\frac{1}{2}(\sigma_2^2/\mu_2)\alpha_2^2 + \alpha_2 < \frac{1}{2}(\sigma_1^2/\mu_1)\alpha_1^2 + \alpha_1.$$

Selon (2.1b), on a

$$\frac{1}{2}(\sigma_1^2/\mu_1)\alpha_1^2 + \alpha_1 < \frac{1}{2}(\sigma_2^2/\mu_2)\alpha_1^2 + \alpha_1.$$

On a donc

$$\left(\frac{1}{2}(\sigma_2^2/\mu_2)(\alpha_1 + \alpha_2) + 1\right)(\alpha_2 - \alpha_1) < 0.$$

Il s'ensuit que  $\alpha_2 < \alpha_1$ . De façon analogue, on a

$$\left(\frac{1}{2}(\sigma_2^2/\mu_2)(\beta_1 + \beta_2) + 1\right)(\beta_2 - \beta_1) < 0.$$

Mais

$$(\sigma_2^2/\mu_2)(\beta_2) = (1/\mu_2)(-\mu_2 - \sqrt{\mu_2^2 + 2r\sigma_2^2}) < -1.$$

Par (2.1a), on a

$$(\sigma_2^2/\mu_2)(\beta_1) < (\sigma_1^2/\mu_1)(\beta_1) < -1.$$

$x$	$-\infty$	$\beta_i$	$-\mu_i/\sigma_i^2$	$0$	$\alpha_i$	$+\infty$
$P'_i(x)$		-	-	0	+	+
$P_i(x)$	$-\infty$					$+\infty$
		$0$		$-r$	$0$	
			$-\mu_i^2/2\sigma_i^2 - r$			

Tableau 2.1 – Tableau de variations de  $P_i$

Donc  $\beta_1 < \beta_2$ .

Le Tableau 2.1 illustre que  $P_i$  admet un minimum en  $-\mu_i/\sigma_i^2$ . Sur l'intervalle  $(-\infty, -\mu_i/\sigma_i^2]$ , sa courbe décroît de  $-\infty$  à  $(-\mu_i^2/2\sigma_i^2 - r)$ , en coupant l'axe des  $x$  en  $\beta_i$ . D'autre part, sur  $[-\mu_i/\sigma_i^2, \infty)$ , la courbe croît de  $(-\mu_i^2/2\sigma_i^2 - r)$  à  $\infty$ , en coupant l'axe des  $x$  en  $\alpha_i$ . Donc comme

$$\beta_1 < \beta_2 < 0 < \alpha_2 < \alpha_1,$$

on a  $P_1(\alpha_2) < 0$ ,  $P_1(\beta_2) < 0$ ,  $P_2(\alpha_1) > 0$  et  $P_2(\beta_1) > 0$ .  $\square$

Dans ce qui suit, nous allons déterminer un ensemble de nombres  $\{a_0, a_1, a_2\}$  qu'on appellera les seuils. Ce sont les points où le processus optimal changera de régimes. On pose :

$$a_0 = 0 \text{ et } a_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \beta_1} \log \left[ \frac{P_2(\beta_1)}{P_2(\alpha_1)} \right]. \quad (2.7)$$

On peut facilement vérifier qu'on a bien  $a_1 > 0 = a_0$ . Pour y parvenir, il suffit de montrer que  $P_2(\beta_1) > P_2(\alpha_1)$ . On a

$$\begin{aligned} P_2(\beta_1) - P_2(\alpha_1) &= \frac{1}{2}\sigma_2^2(\beta_1^2 - \alpha_1^2) + \mu_2(\beta_1 - \alpha_1) \\ &= (\beta_1 - \alpha_1) \left( \frac{1}{2}\sigma_2^2(\beta_1 + \alpha_1) + \mu_2 \right) \\ &= (\beta_1 - \alpha_1)\sigma_2^2(-\mu_1/\sigma_1^2 + \mu_2/\sigma_2^2) \\ &> 0, \end{aligned}$$

car  $(\beta_1 - \alpha_1) < 0$  et  $\mu_1/\sigma_1^2 > \mu_2/\sigma_2^2$ .

Considérons maintenant la fonction

$$\bar{V}(x) = \begin{cases} A_1 e^{\alpha_1 x} - B_1 e^{\beta_1 x} & \text{pour } 0 \leq x \leq a_1, \\ A_2 e^{\alpha_2 x} - B_2 e^{\beta_2 x} & \text{pour } a_1 \leq x \leq a_2, \\ x + \xi & \text{pour } x \geq a_2, \end{cases}$$

où les valeurs  $A_1, A_2, B_1, B_2, a_2$  et  $\xi$  sont à déterminer. Nous allons les choisir pour que la fonction  $\bar{V}$  vérifie les conditions du Lemme de vérification 2.2. En d'autres mots, on veut que :

$$\bar{V}(0) = 0 \text{ ou } A_1 = B_1, \quad (2.8)$$

$$\bar{V}(a_1-) = \bar{V}(a_1+) \text{ ou } A_1(e^{\alpha_1 a_1} - e^{\beta_1 a_1}) = A_2 e^{\alpha_2 a_1} - B_2 e^{\beta_2 a_1}, \quad (2.9)$$

$$\bar{V}'(a_1-) = \bar{V}'(a_1+) \text{ ou } A_1(\alpha_1 e^{\alpha_1 a_1} - \beta_1 e^{\beta_1 a_1}) = A_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 a_1} - B_2 \beta_2 e^{\beta_2 a_1}, \quad (2.10)$$

$$\bar{V}''(a_1-) = \bar{V}''(a_1+) \text{ ou } A_1(\alpha_1^2 e^{\alpha_1 a_1} - \beta_1^2 e^{\beta_1 a_1}) = A_2 \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a_1} - B_2 \beta_2^2 e^{\beta_2 a_1}, \quad (2.11)$$

$$\bar{V}(a_2-) = \bar{V}(a_2+) \text{ ou } A_2 e^{\alpha_2 a_2} - B_2 e^{\beta_2 a_2} = a_2 + \xi, \quad (2.12)$$

$$\bar{V}'(a_2-) = \bar{V}'(a_2+) \text{ ou } A_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 a_2} - B_2 \beta_2 e^{\beta_2 a_2} = 1, \quad (2.13)$$

$$\bar{V}''(a_2-) = \bar{V}''(a_2+) \text{ ou } A_2 \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a_2} - B_2 \beta_2^2 e^{\beta_2 a_2} = 0. \quad (2.14)$$

On veut faire ressortir les expressions  $P_1(\alpha_1)$  et  $P_1(\beta_1)$  des équations (2.9), (2.10) et (2.11). Ceci réduirait ces équations, car  $P_1(\alpha_1) = P_1(\beta_1) = 0$ . Pour cela, on les multiplie respectivement par  $-r, \mu_1$  et  $\frac{1}{2}\sigma_1^2$ , puis on les additionne. On obtient

$$A_2 e^{\alpha_2 a_1} P_1(\alpha_2) - B_2 e^{\beta_2 a_1} P_1(\beta_2) = 0. \quad (2.15)$$

De façon similaire, mais en utilisant le fait que  $P_2(\alpha_2) = P_2(\beta_2) = 0$ , on obtient

$$A_1(e^{\alpha_1 a_1} P_2(\alpha_1) - e^{\beta_1 a_1} P_2(\beta_1)) = 0. \quad (2.16)$$

L'équation (2.14) donne  $A_2 = B_2(\beta_2/\alpha_2)^2 e^{(\beta_2 - \alpha_2)a_2}$ . En remplaçant cette valeur dans l'équation(2.13), on a

$$A_2 = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \alpha_2} \frac{e^{-\alpha_2 a_2}}{\alpha_2} \quad B_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2 - \alpha_2} \frac{e^{-\beta_2 a_2}}{\beta_2}. \quad (2.17)$$

En remplaçant les valeurs (2.17) dans l'équation (2.15) on obtient

$$(\beta_2/\alpha_2)P_1(\alpha_2)e^{\alpha_2(a_1-a_2)} = (\alpha_2/\beta_2)P_1(\beta_2)e^{\beta_2(a_1-a_2)}.$$

On en déduit que

$$a_2 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2 - \beta_2} \log \left[ \frac{\beta_2^2 P_1(\alpha_2)}{\alpha_2^2 P_1(\beta_2)} \right]. \quad (2.18)$$

On va montrer plus bas que  $a_2 > a_1$ . Les équations (2.8) et (2.9) donnent

$$A_1 = B_1 = \frac{\frac{\beta_2}{\beta_2 - \alpha_2} \frac{e^{\alpha_2(a_1 - a_2)}}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\beta_2 - \alpha_2} \frac{e^{\beta_2(a_1 - a_2)}}{\beta_2}}{e^{\alpha_1 a_1} - e^{\beta_1 a_1}}. \quad (2.19)$$

Pour la suite, on pose

$$A := A_1 = B_1.$$

L'équation (2.12) nous donne la valeur de  $\xi$

$$\xi = \frac{\alpha_2 + \beta_2}{\alpha_2 \beta_2} - a_2 = \frac{\mu_2}{r} - a_2. \quad (2.20)$$

Vérifions que  $a_2 > a_1$ . Il faut montrer que  $\beta_2^2 P_1(\alpha_2) > \alpha_2^2 P_1(\beta_2)$ . En utilisant l'expression (2.5), on a :

$$\begin{aligned} \beta_2^2 \left( \frac{1}{2} \sigma_1^2 \alpha_2^2 + \mu_1 \alpha_2 - r \right) - \alpha_2^2 \left( \frac{1}{2} \sigma_1^2 \beta_2^2 + \mu_1 \beta_2 - r \right) \\ = (\beta_2 - \alpha_2) (r(\beta_2 + \alpha_2) + \mu_1 \beta_2 \alpha_2) \\ = -(2r/\sigma_2^2) (\beta_2 - \alpha_2) (\mu_2 + \mu_1) \\ > 0, \end{aligned}$$

car  $\beta_2 - \alpha_2 < 0$  et  $\mu_1, \mu_2 > 0$ .

Vérifions que les constantes  $A$ ,  $A_2$  et  $B_2$  sont strictement positives. Puisque  $\alpha_2 > 0$  et  $\beta_2 < 0$ , on déduit que  $A_2 > 0$  et  $B_2 > 0$  d'après les expressions (2.17). Montrons maintenant que  $A$  est strictement positive.

Le dénominateur de  $A$  dans l'expression (2.19) est  $e^{\beta_1 a_1} (e^{a_1(\alpha_1 - \beta_1)} - 1)$ . Puisque  $a_1 > 0$  et  $\alpha_1 - \beta_1 > 0$ , on déduit que  $e^{a_1(\alpha_1 - \beta_1)} > 1$ . Donc le dénominateur de  $A$  est strictement positif. Pour ce qui est du

numérateur, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_2}{\beta_2 - \alpha_2} \frac{e^{\alpha_2(a_1 - a_2)}}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\beta_2 - \alpha_2} \frac{e^{\beta_2(a_1 - a_2)}}{\beta_2} &= \frac{\beta_2}{\beta_2 - \alpha_2} \frac{e^{\alpha_2(a_1 - a_2)}}{\alpha_2} \left( 1 - \frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2} e^{(\beta_2 - \alpha_2)(a_1 - a_2)} \right) \\
&= \frac{\beta_2}{\beta_2 - \alpha_2} \frac{e^{\alpha_2(a_1 - a_2)}}{\alpha_2} \left( 1 - \frac{P_1(\alpha_2)}{P_1(\beta_2)} \right) \\
&= \frac{\beta_2}{(\beta_2 - \alpha_2)} \frac{e^{\alpha_2(a_1 - a_2)}}{\alpha_2 P_1(\beta_2)} \left( P_1(\beta_2) - P_1(\alpha_2) \right) \\
&= \frac{\beta_2}{(\beta_2 - \alpha_2)} \frac{e^{\alpha_2(a_1 - a_2)}}{\alpha_2 P_1(\beta_2)} \left( \frac{1}{2} \sigma_1^2 (\beta_2^2 - \alpha_2^2) + \mu_1 (\beta_2 - \alpha_2) \right) \\
&= \beta_2 \frac{e^{\alpha_2(a_1 - a_2)}}{\alpha_2 P_1(\beta_2)} \left( \frac{1}{2} \sigma_1^2 (\beta_2 + \alpha_2) + \mu_1 \right) \\
&= \beta_2 \frac{e^{\alpha_2(a_1 - a_2)}}{\alpha_2 P_1(\beta_2)} \left( \frac{1}{2} \sigma_1^2 \left( -2 \frac{\mu_2}{\sigma_2^2} \right) + \mu_1 \right) \\
&= \sigma_1^2 \beta_2 \frac{e^{\alpha_2(a_1 - a_2)}}{\alpha_2 P_1(\beta_2)} \left( \frac{\mu_1}{\sigma_1^2} - \frac{\mu_2}{\sigma_2^2} \right) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

car  $\beta_2 < 0, \alpha_2 > 0, P_1(\beta_2) < 0$  et  $(\mu_1/\sigma_1^2) > (\mu_2/\sigma_2^2)$ .

### 2.3 Solution du problème d'optimisation

Le théorème suivant donne une solution à notre problème d'optimisation.

**Théorème 2.4** Soit  $Y^* = \{Y_t^*, t \geq 0\}$  le processus défini par

$$Y_t^* = X_0 + \int_0^t (\mu_1 \mathbf{1}_{\{Y_s^* < a_1\}} + \mu_2 \mathbf{1}_{\{Y_s^* \geq a_1\}}) ds + \int_0^t (\sigma_1 \mathbf{1}_{\{Y_s^* < a_1\}} + \sigma_2 \mathbf{1}_{\{Y_s^* \geq a_1\}}) dW_s.$$

Ainsi, une stratégie optimale est donnée par  $\pi^* = \{[(\mu_t^*, \sigma_t^{*2}), Z_t^*], t \geq 0\}$ , où

$$(\mu_t^*, \sigma_t^{*2}) = \begin{cases} (\mu_1, \sigma_1^2) & \text{pour } 0 \leq Y_t^* < a_1, \\ (\mu_2, \sigma_2^2) & \text{pour } a_1 \leq Y_t^*, \end{cases}$$

$$\text{et } Z_t^* = \max \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t \wedge \tau^*} Y_s^* - a_2, 0 \right\}$$

$$\text{avec } \tau^* = \inf \{t \geq 0 \mid Y_t^* \leq 0\}.$$

Une stratégie optimale  $\pi^*$  consiste à changer  $(\mu_1, \sigma_1^2)$  pour  $(\mu_2, \sigma_2^2)$  en  $a_1$ , et à payer les dividendes au-dessus de  $a_2$ .

De plus, la fonction valeur optimale est

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\frac{\beta_2}{\beta_2 - \alpha_2} e^{\alpha_2(a_1 - a_2)} - \frac{\alpha_2}{e^{\alpha_1 a_1} - e^{\beta_1 a_1}} \frac{e^{\beta_2(a_1 - a_2)}}{\beta_2 - \alpha_2}}{\beta_2} (e^{\alpha_1 x} - e^{\beta_1 x}) & \text{pour } 0 \leq x \leq a_1, \\ \frac{\beta_2}{\alpha_2(\beta_2 - \alpha_2)} e^{-\alpha_2(a_2 - x)} - \frac{\alpha_2}{\beta_2(\beta_2 - \alpha_2)} e^{-\beta_2(a_2 - x)} & \text{pour } a_1 \leq x \leq a_2, \\ \frac{\mu_2}{r} + (x - a_2) & \text{pour } x \geq a_2. \end{cases}$$

La Figure 2.1 illustre une stratégie optimale où  $a_1 = 5$ ,  $a_2 = 15$ ,  $X_0 = 2$ ,  $\sigma_1^2 = 4$ ,  $\mu_1 = 2$ ,  $\sigma_2^2 = 9$  et  $\mu_2 = 4$ . Ici, le processus  $X^* = \{X_t^*, t \geq 0\}$  correspond à la stratégie  $\pi^*$ , et l'on a  $X_t^* = Y_t^* - Z_t^*$ . En deçà du point  $a_2$ , et quand il n'y a pas paiement de dividendes, les processus  $X^*$  et  $Y^*$  sont identiques.

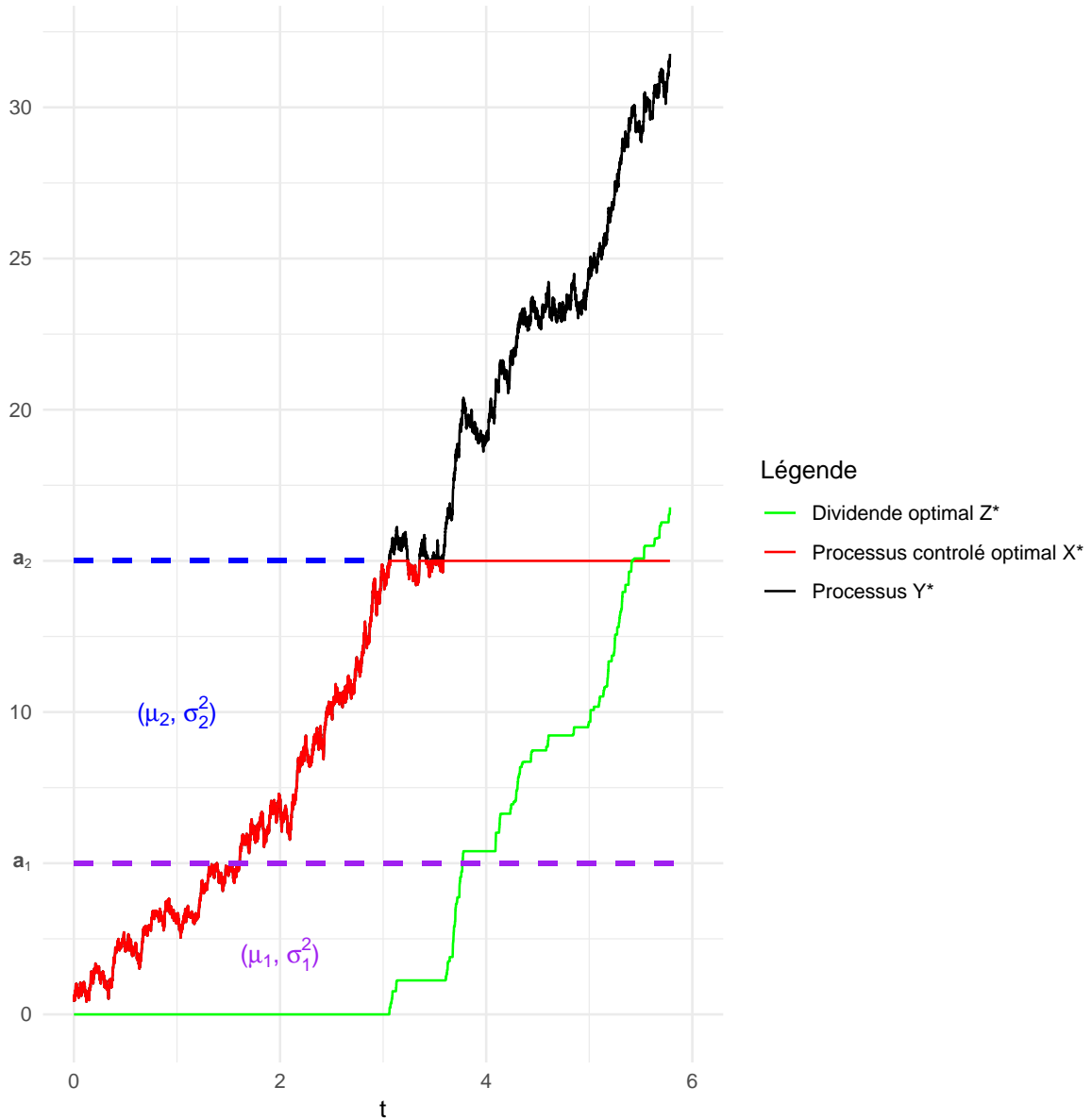


Figure 2.1 - Stratégie optimale lorsque  $Z$  est continu,  $a_1 = 5$ ,  $a_2 = 15$ ,  $X_0 = 2$ ,  $\sigma_1^2 = 4$ ,  $\mu_1 = 2$ ,  $\sigma_2^2 = 9$ ,  $\mu_2 = 4$  et  $n = 2$

## 2.4 Preuve du théorème

Posons

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\frac{\beta_2}{\beta_2 - \alpha_2} \frac{e^{\alpha_2(a_1 - a_2)}}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\beta_2 - \alpha_2} \frac{e^{\beta_2(a_1 - a_2)}}{\beta_2}}{e^{\alpha_1 a_1} - e^{\beta_1 a_1}} (e^{\alpha_1 x} - e^{\beta_1 x}) & \text{pour } 0 \leq x \leq a_1, \\ \frac{\beta_2}{\alpha_2(\beta_2 - \alpha_2)} e^{-\alpha_2(a_2 - x)} - \frac{\alpha_2}{\beta_2(\beta_2 - \alpha_2)} e^{-\beta_2(a_2 - x)} & \text{pour } a_1 \leq x \leq a_2, \\ \frac{\mu_2}{r} + (x - a_2) & \text{pour } x \geq a_2. \end{cases}$$

Les paramètres de la fonction  $f$  sont les  $A, A_2, B_2, \alpha_i, \beta_i, a_i$  et  $\xi$  trouvés respectivement dans (2.19), (2.17), (2.6), (2.7), (2.18) et (2.20). Donc la fonction s'écrit encore

$$f(x) = \begin{cases} A(e^{\alpha_1 x} - e^{\beta_1 x}) & \text{pour } 0 \leq x \leq a_1, \\ A_2 e^{\alpha_2 x} - B_2 e^{\beta_2 x} & \text{pour } a_1 \leq x \leq a_2, \\ x + \xi & \text{pour } x \geq a_2. \end{cases}$$

Les deux lemmes suivants montrent que  $f$  vérifie les hypothèses du Lemme de vérification 2.2.

**Lemme 2.5** Pour tout  $x > 0$ , la fonction  $f$  vérifie les inégalités

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma_1^2 f''(x) + \mu_1 f'(x) - r f(x) \leq 0, \\ \frac{1}{2}\sigma_2^2 f''(x) + \mu_2 f'(x) - r f(x) \leq 0. \end{cases}$$

*Preuve.* Nous allons tout d'abord vérifier la première inégalité.

Si  $0 \leq x \leq a_1$  alors,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_1^2 f''(x) + \mu_1 f'(x) - r f(x) &= A\left(\frac{1}{2}\sigma_1^2(\alpha_1^2 e^{\alpha_1 x} - \beta_1^2 e^{\beta_1 x}) + \mu_1(\alpha_1 e^{\alpha_1 x} - \beta_1 e^{\beta_1 x}) + r(e^{\alpha_1 x} - e^{\beta_1 x})\right) \\ &= A\left(\left(\frac{1}{2}\sigma_1^2 \alpha_1^2 + \mu_1 \alpha_1 - r\right)e^{\alpha_1 x} - \left(\frac{1}{2}\sigma_1^2 \beta_1^2 + \mu_1 \beta_1 - r\right)e^{\beta_1 x}\right) \\ &= A(P_1(\alpha_1)e^{\alpha_1 x} - P_1(\beta_1)e^{\beta_1 x}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car  $P_1(\alpha_1) = P_1(\beta_1) = 0$ .

Si  $a_1 \leq x \leq a_2$  alors,

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 f''(x) + \mu_1 f'(x) - r f(x) = P_1(\alpha_2)A_2 e^{\alpha_2 x} - P_1(\beta_2)B_2 e^{\beta_2 x}.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 f''(x) + \mu_1 f'(x) - r f(x) \leq 0 \text{ si et seulement si } P_1(\alpha_2)A_2 e^{(\alpha_2 - \beta_2)x} \leq P_1(\beta_2)B_2.$$

Comme  $P_1(\alpha_2) < 0, P_1(\beta_2) < 0, A_2 > 0, B_2 > 0$ , ceci équivaut à

$$e^{(\alpha_2 - \beta_2)x} \geq P_1(\beta_2)B_2 / P_1(\alpha_2)A_2.$$

La fonction  $x \mapsto e^{(\alpha_2 - \beta_2)x}$  étant croissante, il suffit de montrer la dernière inégalité au point  $x = a_1$ . Mais on sait d'après (2.15) que  $P_1(\alpha_2)A_2e^{\alpha_2 a_1} - P_1(\beta_2)B_2e^{\beta_2 a_1} = 0$ . Donc

$$P_1(\alpha_2)A_2e^{(\alpha_2 - \beta_2)x} - P_1(\beta_2)B_2 \leq 0.$$

Si  $x \geq a_2$  alors,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_1^2 f''(x) + \mu_1 f'(x) - r f(x) &= \mu_1 - r(x + \xi) \\ &\leq \mu_1 - r(a_2 + \xi) \\ &\leq \mu_2 - r(a_2 + \xi) \\ &= 0, \end{aligned}$$

où la dernière égalité est donnée par (2.20).

Maintenant, vérifions la deuxième inégalité.

Si  $0 \leq x \leq a_1$  alors,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_2^2 f''(x) + \mu_2 f'(x) - r f(x) &= A\left(\frac{1}{2}\sigma_2^2(\alpha_1^2 e^{\alpha_1 x} - \beta_1^2 e^{\beta_1 x}) + \mu_2(\alpha_1 e^{\alpha_1 x} - \beta_1 e^{\beta_1 x}) + r(e^{\alpha_1 x} - e^{\beta_1 x})\right) \\ &= A\left(\left(\frac{1}{2}\sigma_2^2 \alpha_1^2 + \mu_2 \alpha_1 - r\right)e^{\alpha_1 x} - \left(\frac{1}{2}\sigma_2^2 \beta_1^2 + \mu_2 \beta_1 - r\right)e^{\beta_1 x}\right) \\ &= A(P_2(\alpha_1)e^{\alpha_1 x} - P_2(\beta_1)e^{\beta_1 x}) \\ &= A(P_2(\alpha_1)e^{\alpha_1 x} - P_2(\beta_1)e^{\beta_1 x}). \end{aligned}$$

Comme  $A$  est positif, on a

$$\frac{1}{2}\sigma_2^2 f''(x) + \mu_2 f'(x) - r f(x) \leq 0 \text{ si et seulement si } P_2(\alpha_1)e^{\alpha_1 x} \leq P_2(\beta_1)e^{\beta_1 x}.$$

Comme  $P_2(\alpha_1) > 0$  et  $P_2(\beta_1) > 0$ , ceci équivaut à

$$e^{(\alpha_1 - \beta_1)x} \leq P_2(\beta_1)/P_2(\alpha_1).$$

La fonction  $x \mapsto e^{(\alpha_1 - \beta_1)x}$  étant croissante, il suffit de montrer la dernière inégalité au point  $x = a_1$ . Mais on sait d'après (2.16) que  $A(e^{\alpha_1 a_1} P_2(\alpha_1) - e^{\beta_1 a_1} P_2(\beta_1)) = 0$ . Donc

$$P_2(\alpha_1)e^{\alpha_1 x} \leq P_2(\beta_1)e^{\beta_1 x}.$$

Si  $a_1 \leq x \leq a_2$  alors,

$$\frac{1}{2}\sigma_2^2 f''(x) + \mu_2 f'(x) - r f(x) = P_2(\alpha_2)A_2e^{\alpha_2 x} - P_2(\beta_2)B_2e^{\beta_2 x} = 0.$$

Si  $x \geq a_2$  alors,

$$\frac{1}{2}\sigma_2^2 f''(x) + \mu_2 f'(x) - r f(x) = \mu_2 - r(x + \xi) \leq \mu_2 - r(a_2 + \xi) = 0.$$

□

**Lemme 2.6** On a  $f'(x) \geq 1$ , pour tout  $x > 0$ . En plus,  $f$  est concave.

*Preuve.* Comme  $f'(x) = 1$ , pour  $x \geq a_2$ , il suffit de montrer que  $f'$  est décroissante sur  $[0, a_2[$ , c'est-à-dire  $f''(x) \leq 0$ . Pour  $a_{i-1} \leq x \leq a_i$ ,  $i = 1, 2$ , on a

$$f''(x) = A_i \alpha_i^2 e^{\alpha_i x} - B_i \beta_i^2 e^{\beta_i x}.$$

Dans cette dernière écriture, on a reconsidéré les paramètres  $A_1$  et  $B_1$ . Les points  $a_{i-1}$  et  $a_i$  sont atteints car on sait que par construction,  $f$  est deux fois continûment différentiable. Donc, nous voulons montrer que

$$A_i \alpha_i^2 e^{(\alpha_i - \beta_i)x} \leq B_i \beta_i^2. \quad (2.21)$$

La fonction  $x \mapsto e^{(\alpha_i - \beta_i)x}$  est croissante car  $\alpha_i - \beta_i > 0$ . On sait aussi que  $A_i, B_i > 0$ . Donc il suffit de montrer l'inégalité (2.21) au point  $x = a_i$ . En d'autres termes, on doit montrer que

$$\begin{cases} \alpha_1^2 e^{(\alpha_1 - \beta_1)a_1} \leq \beta_1^2, & (2.22a) \\ A_2 \alpha_2^2 e^{(\alpha_2 - \beta_2)a_2} \leq B_2 \beta_2^2. & (2.22b) \end{cases}$$

Nous allons tout d'abord vérifier l'inégalité (2.22a). On a  $e^{(\alpha_1 - \beta_1)a_1} = P_2(\beta_1)/P_2(\alpha_1)$  par définition de  $a_1$ . Donc nous devons montrer que

$$\alpha_1^2 \left( \frac{1}{2}\sigma_2^2 \beta_1^2 + \mu_2 \beta_1 - r \right) \leq \beta_1^2 \left( \frac{1}{2}\sigma_2^2 \alpha_1^2 + \mu_2 \alpha_1 - r \right).$$

On a

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 \left( \frac{1}{2}\sigma_2^2 \beta_1^2 + \mu_2 \beta_1 - r \right) - \beta_1^2 \left( \frac{1}{2}\sigma_2^2 \alpha_1^2 + \mu_2 \alpha_1 - r \right) &= \beta_1 \alpha_1 \mu_2 (\alpha_1 - \beta_1) - r(\alpha_1^2 - \beta_1^2) \\ &= (\beta_1 \alpha_1 \mu_2 - r(\alpha_1 + \beta_1))(\alpha_1 - \beta_1) \\ &= -2 \frac{r}{\sigma_1^2} \mu_2 + r \frac{2\mu_1}{\sigma_1^2} (\alpha_1 - \beta_1) \\ &= (\mu_1 - \mu_2) 2 \frac{r}{\sigma_1^2} (\alpha_1 - \beta_1) \\ &< 0, \end{aligned}$$

car  $\mu_1 < \mu_2$  et  $\alpha_1 > \beta_1$ .

Maintenant vérifions l'inégalité (2.22b). Les expressions (2.17) nous donnent

$$A_2 \alpha_2^2 e^{\alpha_2 a_2} = \beta_2 \alpha_2 / (\beta_2 - \alpha_2) \quad \text{et} \quad B_2 \beta_2^2 e^{\beta_2 a_2} = \beta_2 \alpha_2 / (\beta_2 - \alpha_2).$$

Donc

$$A_2 \alpha_2^2 e^{(\alpha_2 - \beta_2) a_2} = B_2 \beta_2^2.$$

Nous avons montré que  $f'$  est décroissante, donc  $f$  est concave. On voit aussi facilement que sa dérivée est positive.  $\square$

**Proposition 2.7** Pour tout  $x \geq 0$ , on a  $V(x) \leq f(x)$ .

*Preuve.* On a  $f(0) = 0$  et  $f \in C^2(0, \infty)$  par construction. Les Lemmes 2.5 et 2.6 et le Lemme de vérification 2.2 permettent de conclure.  $\square$

Nous voulons maintenant montrer l'inégalité inverse de la Proposition 2.7. Considérons de nouveau le processus  $X^* = \{X_t^*, t \geq 0\}$ , correspondant à la stratégie  $\pi^*$ . On sait que

$$X_t^* = Y_t^* - Z_t^*.$$

Nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.8** Pour tout  $t \in [0, \tau^*)$ , on a

$$\mu_t^* f'(X_t^*) + \frac{1}{2} \sigma_t^{*2} f''(X_t^*) - r f(X_t^*) = 0.$$

*Preuve.* Pour  $t \in [0, \tau^*)$ , on a  $0 \leq X_t^* \leq a_2$ , car on paie en dividendes, tout surplus au-dessus de  $a_2$ .

Si  $0 \leq X_t^* \leq a_1$  alors, on a  $0 \leq Y_t^* \leq a_1$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \mu_t^* f'(X_t^*) + \frac{1}{2} \sigma_t^{*2} f''(X_t^*) - r f(X_t^*) &= \mu_1 f'(X_t^*) + \frac{1}{2} \sigma_1^2 f''(X_t^*) - r f(X_t^*) \\ &= A(P_1(\alpha_1) e^{\alpha_1(X_t^*)} - P_1(\beta_1) e^{\beta_1(X_t^*)}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car  $P_1(\alpha_1) = P_1(\beta_1) = 0$ .

Si  $a_1 < X_t^* \leq a_2$  alors, on a  $a_1 < Y_t^*$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \mu_t^* f'(X_t^*) + \frac{1}{2} \sigma_t^{*2} f''(X_t^*) - r f(X_t^*) &= \mu_2 f'(X_t^*) + \frac{1}{2} \sigma_2^2 f''(X_t^*) - r f(X_t^*) \\ &= P_2(\alpha_2) A_2 e^{\alpha_2(X_t^*)} - P_2(\beta_2) B_2 e^{\beta_2(X_t^*)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

car  $P_2(\alpha_2) = P_2(\beta_2) = 0$ .

□

**Proposition 2.9** Pour tout  $x \geq 0$ , on a  $f(x) \leq V(x)$ .

*Preuve.* Nous allons montrer que  $f(x) = V^{\pi^*}(x)$ .

On procède comme dans la preuve du Lemme de vérification 2.2, en considérant le cas particulier où la stratégie est  $\pi^*$ , afin d'écrire

$$\begin{aligned} e^{-r(\tau^* \wedge h)} f(X_{\tau^* \wedge h}^*) - f(x) &= \int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} \left( \mu_t^* f'(X_t^*) + \frac{1}{2} \sigma_t^{*2} f''(X_t^*) - r f(X_t^*) \right) dt \\ &\quad + \int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} \sigma_t^* f'(X_t^*) dW_t - \int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} f'(X_t^*) dZ_t^*. \end{aligned} \quad (2.23)$$

On montre aussi de façon similaire, que l'intégrale stochastique

$$\int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} \sigma_t^* f'(X_t^*) dW_t$$

a une espérance nulle.

Comme l'indique la Figure 2.1 : Initialement, le processus  $Z^*$  vaut 0, jusqu'au premier instant  $T_1$ , où  $Y_{T_1}^* > a_2$ . On a alors,  $Z_{T_1}^* = Y_{T_1}^* - a_2$ , et  $X_{T_1}^* = a_2$ . Le dividende reste constant jusqu' à l'instant suivant  $T_2$  où  $Y_{T_2}^* > a_2$  et  $Y_{T_2}^* - a_2 > Y_{T_1}^* - a_2$ . À cet instant  $T_2$ , on a encore  $X_{T_2}^* = a_2$ . Donc le dividende croît seulement aux points où  $X_t^* = a_2$ , et en ces points la dérivée de  $f$  vaut 1. Donc

$$\int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} f'(X_t^*) dZ_t^* = \int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} dZ_t^*.$$

D'après le Lemme 2.8, on a

$$\mu_t^* f'(X_t^*) + \frac{1}{2} \sigma_t^{*2} f''(X_t^*) - r f(X_t^*) = 0.$$

En faisant les modifications nécessaires dans les expressions (2.23), et en appliquant l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}_x \left[ e^{-r(\tau^* \wedge h)} f(X_{\tau^* \wedge h}^*) \right] = f(x) - \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} dZ_t^* \right].$$

Toujours en procédant comme dans la preuve du Lemme de vérification 2.2, on obtient

$$V^*(x) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau^*} e^{-rt} dZ_t^* \right] = f(x).$$

Donc  $f(x) = V^{\pi^*}(x) \leq V(x)$ .  $\square$

On déduit des Propositions 2.7 et 2.9, que  $f(x) = V^{\pi^*}(x) = V(x)$ .

## 2.5 Réconciliation avec le cas où il n'y a qu'un seul plan d'investissement

**Remarque 2.10** Cette section est propre au mémoire et n'a pas été traitée dans l'article de référence.

Nous voulons montrer que, sous certaines conditions limites, nous retrouvons le résultat du Chapitre I où, on avait un seul plan d'investissement.

**Proposition 2.11** Si  $\mu_1 = \mu_2$ , alors  $a_1$  tend vers  $a_2$  quand  $\sigma_1$  tend vers  $\sigma_2$ . À la limite  $a_2$  vaut  $a = \frac{1}{\alpha - \beta} \log \left[ \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right]$ .

*Preuve.* On a

$$e^{(a_2 - a_1)(\alpha_2 - \beta_2)} = \frac{\beta_2^2 \left( \frac{1}{2} \sigma_1^2 \alpha_2^2 + \mu_2 \alpha_2 - r \right)}{\alpha_2^2 \left( \frac{1}{2} \sigma_1^2 \beta_2^2 + \mu_2 \beta_2 - r \right)}.$$

La dérivée du membre de droite par rapport à  $\sigma_1$  est  $\frac{\beta_2^2 \sigma_1^2 \alpha_2^2}{\alpha_2^2 \sigma_1^2 \beta_2^2} = 1$ . En utilisant la règle de l'Hôpital, on a  $e^{(a_2 - a_1)(\alpha_2 - \beta_2)}$  tend vers 1. Comme  $\alpha_2 \neq \beta_2$ , alors  $a_1$  tend vers  $a_2$ .  $\square$

**Remarque 2.12** Le cas où la compagnie possède plus de deux plans d'investissement, se traite de la même façon, mais les calculs sont plus laborieux. Voir (Radner et Shepp, 1996).

## 2.6 Algorithme pour calculer les paramètres de la stratégie optimale

Le théorème suivant nous permet de calculer les paramètres de la stratégie optimale.

**Théorème 2.13** On se donne un ensemble de plans d'investissement  $\mathcal{A} = \{(\mu_1, \sigma_1^2), (\mu_2, \sigma_2^2)\}$ , tel que  $\mu_i, \sigma_i \in (0, \infty)$ ,  $\mu_1 < \mu_2$  et  $\sigma_1^2/\mu_1 < \sigma_2^2/\mu_2$ . On considère les polynômes  $P_i(y) = \frac{1}{2}\sigma_i^2 y^2 + \mu_i y - r$ ,  $i = 1, 2$ . Alors,

1. Les racines du polynôme  $P_i$  sont :

$$\alpha_i = \frac{-\mu_i + \sqrt{\mu_i^2 + 2r\sigma_i^2}}{\sigma_i^2} \quad \text{et} \quad \beta_i = \frac{-\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 + 2r\sigma_i^2}}{\sigma_i^2}.$$

2. Les seuils sont donnés par :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \beta_1} \log \left[ \frac{P_2(\beta_1)}{P_2(\alpha_1)} \right] \quad \text{et} \quad a_2 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2 - \beta_2} \log \left[ \frac{\beta_2^2 P_1(\alpha_2)}{\alpha_2^2 P_1(\beta_2)} \right].$$

3. Les autres paramètres sont :

$$A_2 = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \alpha_2} \frac{e^{-\alpha_2 a_2}}{\alpha_2} \quad B_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2 - \alpha_2} \frac{e^{-\beta_2 a_2}}{\beta_2},$$

$$A = \frac{\frac{\beta_2}{\beta_2 - \alpha_2} \frac{e^{\alpha_2(a_1 - a_2)}}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\beta_2 - \alpha_2} \frac{e^{\beta_2(a_1 - a_2)}}{\beta_2}}{e^{\alpha_1 a_1} - e^{\beta_1 a_1}},$$

$$\xi = \frac{\alpha_2 + \beta_2}{\alpha_2 \beta_2} - a_2 = \frac{\mu_2}{r} - a_2.$$

## 2.7 Test de sensibilité de la stratégie optimale par rapport aux paramètres d'investissement

Comme nous l'avons indiqué au début de ce chapitre, un investisseur est indifférent quant au choix des éléments de  $\mathcal{A}$ . Ces éléments se situent sur la frontière efficiente des investissements et présentent le même ratio de Sharpe, qui est défini par

$$RS = (\mu - \mu_f)/\sigma,$$

où  $\mu$  et  $\sigma$  sont respectivement, le rendement et le risque de l'investissement, et  $\mu_f$  est le taux d'intérêt sans risque. En d'autres termes, on a

$$(\mu_1 - \mu_f)/\sigma_1 = (\mu_2 - \mu_f)/\sigma_2.$$

Rappelons qu'une stratégie optimale est donnée par les processus  $Y^*$  et  $Z^*$  tels que représentés dans la Figure 2.1. Le seuil  $a_1$  est le point où le processus  $Y^*$  change de régime, et le seuil  $a_2$  est le point au-dessus

duquel on paie les dividendes. Dans cette section, nous représentons graphiquement les seuils  $a_1$  et  $a_2$ , en fonction d'un seul paramètre d'investissement  $\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2$ , les trois autres étant fixés, tout en respectant les conditions des éléments de  $\mathcal{A}$  qui sont

$$\begin{cases} \mu_1 < \mu_2, \\ \frac{\sigma_1^2}{\mu_1} < \frac{\sigma_2^2}{\mu_2}. \end{cases} \quad (2.24a)$$

$$\begin{cases} \frac{\sigma_1^2}{\mu_1} < \frac{\sigma_2^2}{\mu_2}. \end{cases} \quad (2.24b)$$

À chaque fois, nous considérons quelques combinaisons de paramètres fixés. Si les seuils  $a_1$  et  $a_2$  sont identiques, on se retrouve dans un cas similaire au Chapitre 1, où il y a un seul plan d'investissement. On s'attend donc à ce que, dans le cas limite où  $\mu_1 = \mu_2$ , les courbes de  $a_1$  et  $a_2$  se rejoignent.

### 2.7.1 Sensibilité par rapport à $\mu_2$

Par les conditions (2.24), il faut que  $\mu_2 \in ]\mu_1, \mu_1 \sigma_2^2 / \sigma_1^2[$ . Ce cas est représenté dans la Figure 2.2. Quand  $\mu_2$  est petit,  $a_1$  est à son maximum car on veut garder longtemps le régime 1. Quand  $\mu_2$  augmente,  $a_1$  décroît pour des raisons similaires, et devient ultimement nul. La décroissance de  $a_1$  se fait d'abord à un taux décroissant, puis croissant. D'où les formes convexe puis concave de la courbe. À mesure que  $\mu_2$  augmente, le désir de passer au régime 2 est plus pressant. À l'exception du premier graphe de la Figure 2.2 où  $a_2$  est presque constant et  $\mu_2$  est petit, on a que  $a_2$  est décroissant lorsque  $\mu_2$  augmente. Ceci pour s'assurer qu'on paie plus de dividendes, puisque le processus  $Y^*$  aura tendance à être au-dessus de  $a_2$ . Un paiement excessif de dividendes entraînerait une ruine hâtive. Il faut trouver un compromis entre un paiement de dividende maximal et la viabilité de la compagnie. Donc lorsque  $\mu_2$  et  $\sigma_2^2$  sont assez élevés, la pente de la trajectoire de  $a_2$  est moins abrupte, pour tenir compte de ce compromis. C'est ce qu'on remarque dans le troisième graphe de la Figure 2.2. Les courbes de  $a_1$  et  $a_2$  se joignent au point où  $\mu_1 = \mu_2$ .

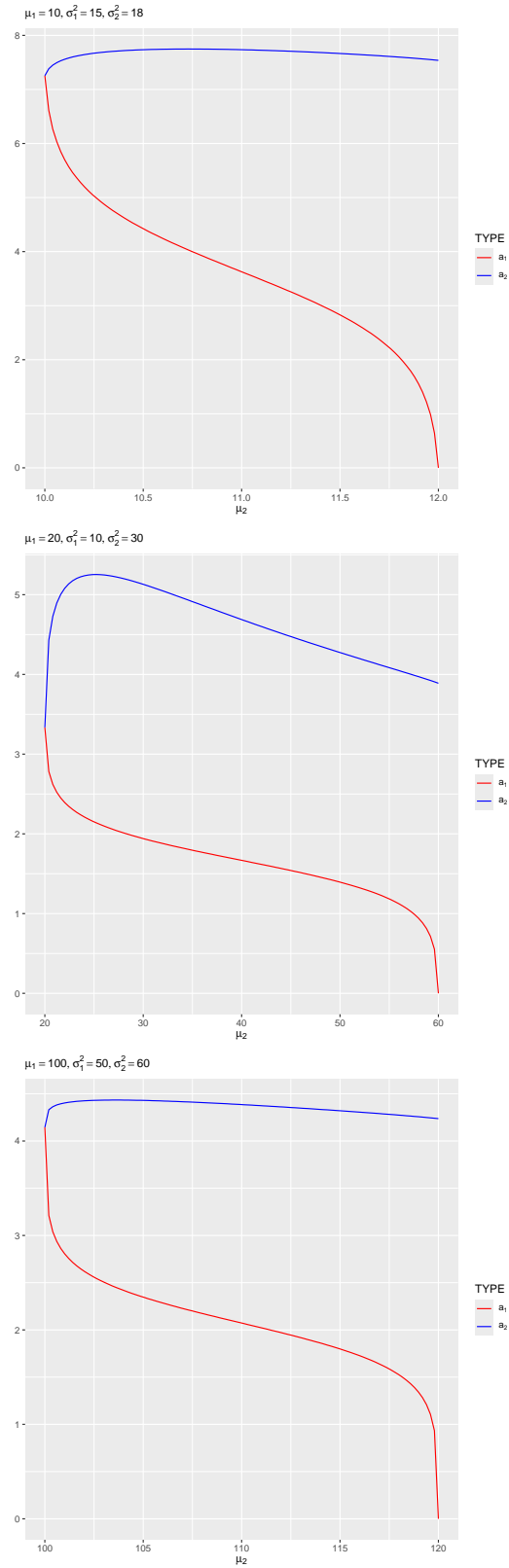


Figure 2.2 - Sensibilité par rapport à  $\mu_2$

### 2.7.2 Sensibilité par rapport à $\mu_1$

Par les conditions (2.24), il faut que  $\mu_1 \in ]\mu_2\sigma_1^2/\sigma_2^2, \mu_2[$ . Ce cas est représenté dans la Figure 2.3. Le seuil  $a_1$  part de 0 pour  $\mu_1$  très petit et croît par la suite, car plus  $\mu_1$  est grand, plus on veut garder le régime 1 longtemps en repoussant vers le haut  $a_1$ . La croissance de  $a_1$  se fait d'abord à un taux décroissant, puis à un taux croissant. D'où les formes concave, puis convexe de la courbe. Comme on l'a expliqué à la section précédente,  $a_2$  est décroissant pour s'assurer qu'on paie plus de dividendes. Mais lorsque  $\mu_2$  et  $\sigma_2^2$  sont assez élevés comme dans le troisième graphe de la Figure 2.3, la pente de la trajectoire de  $a_2$  est moins abrupte pour tenir compte du compromis entre un paiement de dividende maximal et la viabilité de la compagnie.

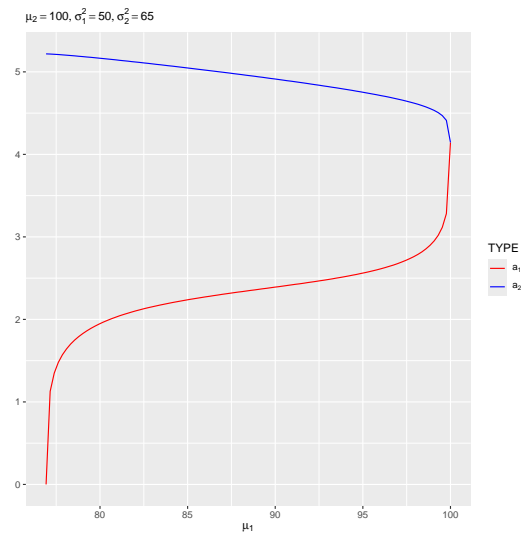
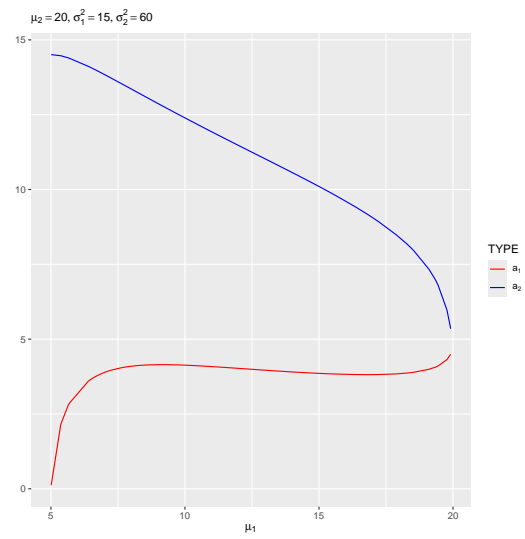
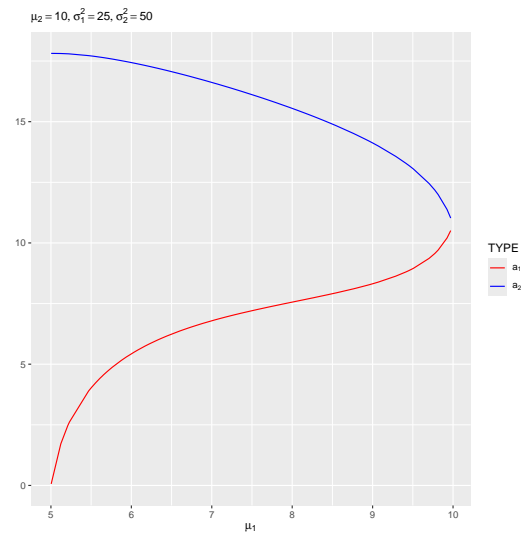


Figure 2.3 – Sensibilité par rapport à  $\mu_1$

### 2.7.3 Sensibilité par rapport à $\sigma_1^2$

Par les conditions (2.24), il faut que  $\sigma_1^2 \in ]0, \mu_1 \sigma_2^2 / \mu_2 [$ . Ce cas est représenté dans la Figure 2.4. Un investissement est moins attrayant quand son risque est très grand, pour un même rendement. Un investissement dont la variabilité est très petite, a un rendement proche du taux sans risque, qui n'est pas très attrayant. Par conséquent, lorsque  $\sigma_1^2$  est très petit ou très grand, on veut détenir le régime 2 et  $a_1$  est petit. Lorsque  $\sigma_1^2$  croit, on veut détenir le régime 1 assez souvent, jusqu'à une certaine valeur de  $\sigma_1^2$ . Le seuil  $a_1$  va croître, puis décroître par la suite. Sa courbe est concave. La croissance de  $a_2$  peut s'expliquer par le fait qu'on veut maintenir un compromis entre un paiement maximal du dividende et la viabilité de la compagnie. Une grande variabilité de la trajectoire de  $Y^*$ , le mettrait le plus souvent au-dessus de  $a_2$ , si la trajectoire de cette dernière n'est pas croissante.

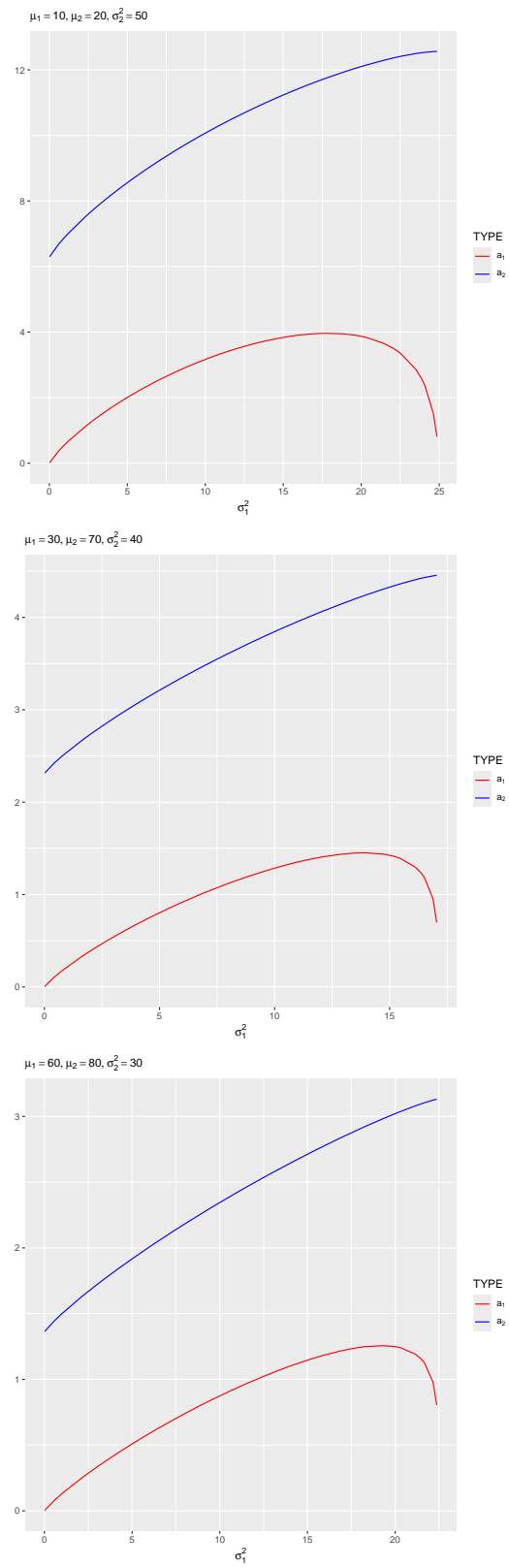


Figure 2.4 - Sensibilité par rapport à  $\sigma_1^2$

#### 2.7.4 Sensibilité par rapport à $\sigma_2^2$

Par les conditions (2.24), il faut que  $\sigma_2^2 \in ]\mu_2\sigma_1^2/\mu_1, \infty)$ . Ce cas est représenté dans la Figure 2.5. Il n'existe pas de borne supérieure pour  $\sigma_2^2$ . Comme nous l'avons dit à la section précédente, un investissement est moins attrayant quand son risque est très grand, pour un même rendement. Pour les premières valeurs de  $\sigma_2^2$ , on veut encore garder le régime 2 et  $a_1$  vaut zéro. Mais plus  $\sigma_2^2$  est grand, plus on veut garder le régime 1 longtemps en repoussant vers le haut  $a_1$ . La croissance de  $a_1$  est d'abord abrupte, puis légère par la suite. La courbe est concave. De plus lorsque  $\sigma_2^2$  croît,  $a_2$  doit être croissant pour maintenir le compromis entre un paiement maximal du dividende et la viabilité de la compagnie.

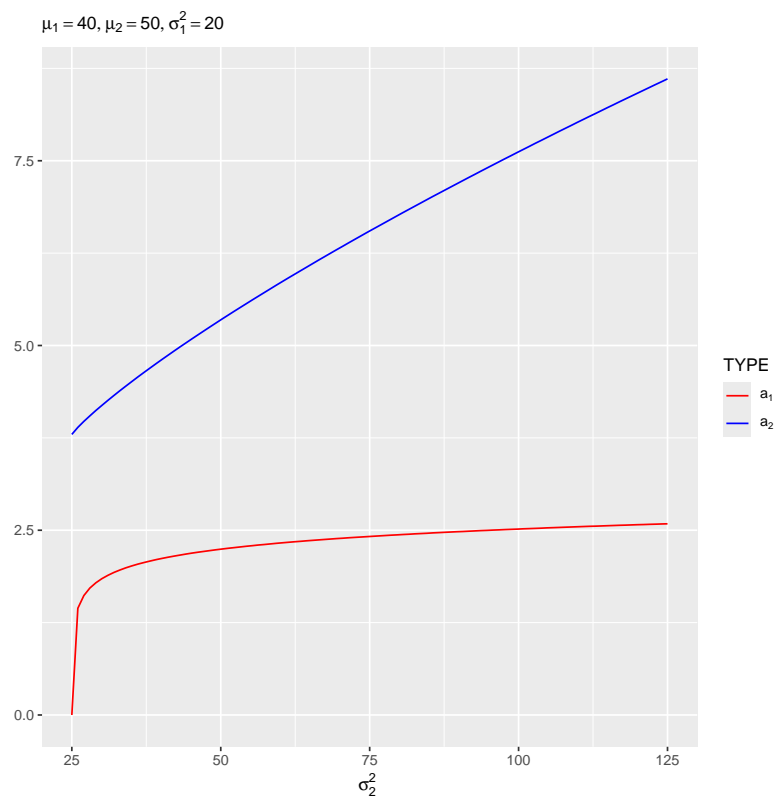
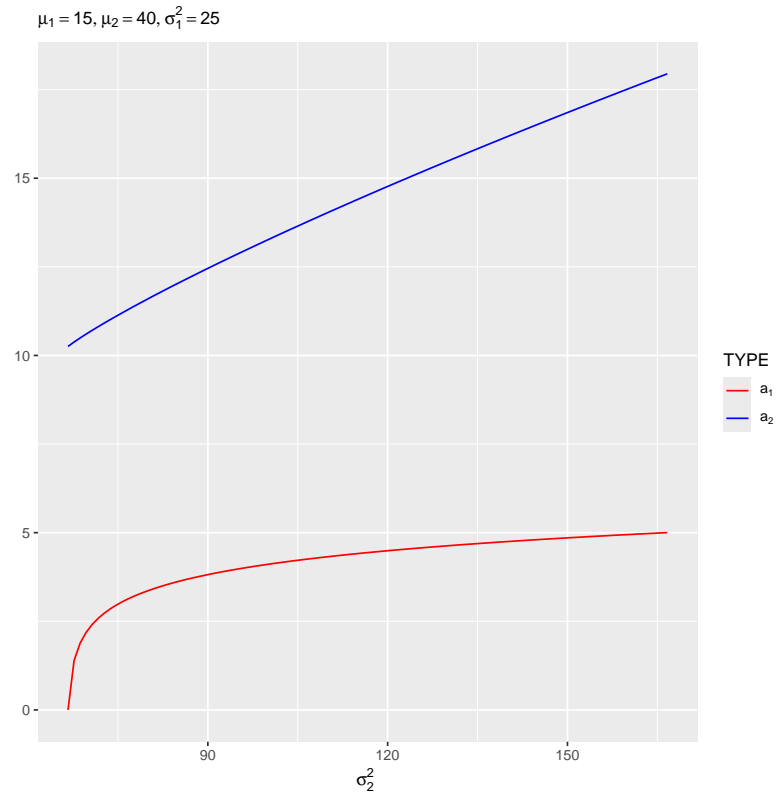


Figure 2.5 – Sensibilité par rapport à  $\sigma_2^2$

### CHAPITRE 3

#### STRATÉGIE OPTIMALE LORSQUE LE DIVIDENDE EST ABSOLUMENT CONTINU AVEC UN TAUX BORNÉ

Dans ce chapitre, nous nous restreignons au cas où le dividende est absolument continu, avec un taux borné. Ce qui est fait ici, est une généralisation de ce qui a été fait dans (Schmidli, 2008) et dans (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995), en considérant qu'on a deux plans d'investissement. C'est aussi une modification au problème traité dans (Radner et Shepp, 1996), et détaillé au chapitre précédent. Plus précisément, nous allons considérer le cas où

$$Z_t^U = \int_0^t U_s ds,$$

où  $U = \{U_t, t \geq 0\}$  est un processus devant satisfaire quelques conditions citées plus bas. On désignera une stratégie  $\pi = \{\pi_t, t \geq 0\}$ , par

$$\pi_t = [(\mu_t, \sigma_t^2), U_t]$$

où, pour chaque  $t$ ,  $(\mu_t, \sigma_t^2)$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{A}$  défini au Chapitre 2. Le processus de surplus contrôlé correspondant est donné par

$$dX_t^\pi = (\mu_t - U_t)dt + \sigma_t dW_t$$

ou, sous forme intégrale, par

$$X_t^\pi = X_0 + \int_0^t (\mu_s - U_s)ds + \int_0^t \sigma_s dW_s.$$

La stratégie  $\pi$  est admissible, si les processus  $\{\mu_t, t \geq 0\}$ ,  $\{\sigma_t^2, t \geq 0\}$  et  $\{U_t, t \geq 0\}$  sont  $\mathcal{F}_t$ -adaptés, et si pour chaque  $t \geq 0$ , on a  $0 \leq U_t \leq u_0$  et  $(\mu_t, \sigma_t^2) \in \mathcal{A}$ . On note  $\Pi$  l'ensemble des stratégies admissibles.

La fonction valeur de la stratégie  $\pi = \{[(\mu_t, \sigma_t^2), U_t], t \geq 0\}$  est définie par :

$$V^\pi(x) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau^\pi} U_t e^{-rt} dt \right], \quad x \in [0, \infty),$$

où  $r > 0$  est fixé et  $\tau^\pi = \inf\{t \geq 0 \mid X_t^\pi \leq 0\}$ .

La fonction valeur optimale est définie par :

$$V(x) = \sup_{\pi \in \Pi} V^\pi(x), \quad x \in [0, \infty).$$

Une stratégie  $\pi^*$  est dite optimale si on a  $V^{\pi^*}(x) = V(x)$  pour tout  $x \in [0, \infty)$ .

### 3.1 Lemme de vérification

Le lemme de vérification est le suivant :

**Lemme 3.1 (Lemme de vérification)** Soit  $\bar{V}$  une fonction positive définie sur  $[0, \infty)$ , deux fois continûment différentiable, telle que  $\bar{V}(0) = 0$ , et qui vérifie pour  $x > 0$ , les équations HJB

$$\begin{cases} \sup_{0 \leq u \leq u_0} \left( \frac{1}{2} \sigma_1^2 \bar{V}''(x) + (\mu_1 - u) \bar{V}'(x) - r \bar{V}(x) + u \right) = 0, \\ \sup_{0 \leq u \leq u_0} \left( \frac{1}{2} \sigma_2^2 \bar{V}''(x) + (\mu_2 - u) \bar{V}'(x) - r \bar{V}(x) + u \right) = 0. \end{cases}$$

Alors, on a  $V(x) \leq \bar{V}(x)$ , pour tout  $x \geq 0$ .

*Preuve.* Soit  $\pi = \{[(\mu_t, \sigma_t^2), U_t], t \geq 0\}$  une stratégie admissible. La fonction  $f$  appartient à  $C^2(0, \infty)$ , par hypothèse. Comme dans la preuve du Lemme de vérification 2.2, on considère la fonction  $l(t, x) = e^{-rt} \bar{V}(x)$  et on applique la Formule d'Itô à  $l(\tau^\pi \wedge h, X_{\tau^\pi \wedge h}^\pi)$ . On peut alors écrire

$$\begin{aligned} e^{-r(\tau^\pi \wedge h)} \bar{V}(X_{\tau^\pi \wedge h}^\pi) &= \bar{V}(x) + \int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt} \sigma_t \bar{V}'(X_t^\pi) dW_t \\ &\quad + \int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt} \left( (\mu_t - U_t) \bar{V}'(X_t^\pi) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \bar{V}''(X_t^\pi) - r \bar{V}(X_t^\pi) \right) dt \\ &= \bar{V}(x) + \int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt} \sigma_t \bar{V}'(X_t^\pi) dW_t \\ &\quad + \int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt} \left( (\mu_t - U_t) \bar{V}'(X_t^\pi) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \bar{V}''(X_t^\pi) - r \bar{V}(X_t^\pi) + U_t \right. \\ &\quad \left. - U_t \right) dt. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Comme  $0 \leq U_t \leq u_0$  et  $X_t^\pi > 0$  lorsque  $t \in [0, \tau^\pi]$ , alors on a

$$(\mu_t - U_t) \bar{V}'(X_t^\pi) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \bar{V}''(X_t^\pi) - r \bar{V}(X_t^\pi) + U_t \leq 0,$$

car la fonction  $\bar{V}$  est solution des équations HJB, par hypothèse. On obtient donc

$$e^{-r(\tau^\pi \wedge h)} \bar{V}(X_{\tau^\pi \wedge h}^\pi) \leq \bar{V}(x) + \int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt} \sigma_t \bar{V}'(X_t^\pi) dW_t - \int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt} U_t dt. \tag{3.2}$$

Toujours comme dans la preuve du Lemme de vérification 2.2, on montre que l'intégrale stochastique

$$\int_0^{\tau^\pi \wedge h} e^{-rt} \sigma_t \bar{V}'(X_t^\pi) dW_t$$

a une espérance nulle et que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} e^{-r(\tau^\pi \wedge h)} \bar{V}(X_{\tau^\pi \wedge h}^\pi) = 0.$$

En faisant tendre  $h$  vers l'infini dans l'équation (3.2), on obtient

$$V^\pi(x) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau^\pi} e^{-rt} U_t dt \right] \leq \bar{V}(x).$$

La stratégie  $\pi$  étant arbitraire, en passant au supremum, on obtient  $V(x) \leq \bar{V}(x)$ .  $\square$

### 3.2 Caractéristiques de la fonction valeur optimale

Avant la construction de la fonction valeur optimale, nous allons déterminer certaines de ses caractéristiques.

**Proposition 3.2** *La fonction  $V$  est strictement croissante.*

*Preuve.* Soient  $x$  et  $y$  deux réels positifs tels que  $x < y$ . Soit  $\pi = \{[(\mu_t, \sigma_t^2), U_t], t \geq 0\}$ , une stratégie admissible de capital initial  $x$ . Soit  $\tilde{\pi} = \{[(\mu_t, \sigma_t^2), \tilde{U}_t], t \geq 0\}$ , une stratégie admissible de capital initial  $y - x$ . Appelons  $\tau_x$  et  $\tau_y$ , les temps de ruine associés à  $x$  et  $y$ , respectivement. On a alors  $\tau_x < \tau_y$ . Considérons la stratégie  $\hat{\pi} = \{[(\mu_t, \sigma_t^2), \hat{U}_t], t \geq 0\}$ , où

$$\hat{U}_t = \begin{cases} U_t & \text{si } t \leq \tau_x, \\ \tilde{U}_{t-\tau_x} & \text{si } \tau_x < t \leq \tau_y. \end{cases}$$

Le processus  $\hat{U}$  est  $\mathcal{F}_t$ -adapté et on a par construction,  $0 \leq \hat{U}_t \leq u_0$ , pour tout  $t \geq 0$ . Donc la stratégie  $\hat{\pi}$  est admissible. Son capital initial est  $y$ . On a

$$V^{\hat{\pi}}(y) = V^\pi(x) + \mathbb{E} [e^{-r\tau_x}] V^{\tilde{\pi}}(y - x).$$

Par conséquent,

$$V(y) \geq V^\pi(x) + \mathbb{E} [e^{-r\tau_x}] V^{\tilde{\pi}}(y - x).$$

Comme les stratégies  $\tilde{\pi}$  et  $\pi$  sont arbitraires, on a

$$V(y) \geq V(x) + \mathbb{E} [e^{-r\tau_x}] V(y - x).$$

Donc on a  $V(y) > V(x)$  et  $V$  est strictement croissante.  $\square$

**Proposition 3.3** La fonction  $V$  est positive, bornée par  $u_0/r$  et telle que  $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = \frac{u_0}{r}$ . De plus,  $V(0) = 0$ .

*Preuve.* Soient  $x \geq 0$  et  $\pi = \{[(\mu_t, \sigma_t^2), U_t], t \geq 0\}$ , une stratégie arbitraire. Puisque

$$0 \leq \int_0^{\tau^\pi} U_t e^{-rt} dt \leq \int_0^\infty u_0 e^{-rt} dt = \frac{u_0}{r},$$

alors

$$0 \leq V^\pi(x) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau^\pi} U_t e^{-rt} dt \right] \leq \frac{u_0}{r}.$$

Comme  $x$  et  $\pi$  sont arbitraires, on a  $0 \leq V(x) \leq \frac{u_0}{r}$ , pour tout  $x \geq 0$ .

Considérons la stratégie  $\pi^0$  qui paie des dividendes au taux constant  $u_0$ , c'est-à-dire  $\pi^0 = \{[(\mu_t, \sigma_t^2), U_t], t \geq 0\}$ , avec  $(\mu_t, \sigma_t^2) \in \mathcal{A}$  quelconque, et  $U_t = u_0$ , pour chaque  $t$ . On a

$$V^{\pi^0}(x) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau^{\pi^0}} u_0 e^{-rt} dt \right] = \left( 1 - \mathbb{E}_x[e^{-r\tau^{\pi^0}}] \right) \frac{u_0}{r}.$$

Donc,

$$V(x) \geq \left( 1 - \mathbb{E}_x[e^{-r\tau^{\pi^0}}] \right) \frac{u_0}{r}.$$

Pour tout  $x \geq 0$ , on a  $0 < e^{-r\tau^{\pi^0}} \leq 1$ . Donc, par le Théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x[e^{-r\tau^{\pi^0}}] = 0.$$

On obtient que  $V(x)$  tend vers  $\frac{u_0}{r}$ , quand  $x$  tend vers l'infini. On montre de façon similaire au Chapitre 2, que  $V(0) = 0$ .  $\square$

### 3.3 Construction de la fonction valeur optimale

Dans cette section, nous cherchons une solution régulière aux équations HJB du Lemme 3.1, qui possède les propriétés citées dans la Proposition 3.3 et qui est strictement croissante. Nous montrerons par la suite que cette solution est la fonction valeur optimale. Nous commençons par expliciter les solutions desdites équations HJB.

Pour  $i \in \{1, 2\}$  fixé, considérons l'équation

$$\frac{1}{2} \sigma_i^2 f''(x) + \mu_i f'(x) - r f(x) + \sup_{0 \leq u \leq u_0} (u(1 - f'(x))) = 0. \quad (3.3)$$

Pour  $x$  tel que  $f'(x) < 1$ , l'équation (3.3) s'écrit

$$\frac{1}{2}\sigma_i^2 f''(x) + \mu_i f'(x) - r f(x) + u_0(1 - f'(x)) = 0, \quad (3.4)$$

alors que pour  $x$  tel que  $f'(x) \geq 1$ , l'équation (3.3) s'écrit

$$\frac{1}{2}\sigma_i^2 f''(x) + \mu_i f'(x) - r f(x) = 0. \quad (3.5)$$

Conséquemment, nous allons commencer par trouver des solutions à ces deux EDOs. D'après l'annexe A, les solutions des équations (3.5) et (3.4) sont respectivement

$$f_{1i}(x) = A_i e^{\gamma_i(0)x} - B_i e^{-\theta_i(0)x}$$

et

$$f_{2i}(x) = \frac{u_0}{r} + C_i e^{\gamma_i(u_0)x} - D_i e^{-\theta_i(u_0)x},$$

avec

$$\gamma_i(u) = \frac{-(\mu_i - u) + \sqrt{(\mu_i - u)^2 + 2r\sigma_i^2}}{\sigma_i^2} \quad \text{et} \quad \theta_i(u) = \frac{\mu_i - u + \sqrt{(\mu_i - u)^2 + 2r\sigma_i^2}}{\sigma_i^2}.$$

Remarquons que les paramètres  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  trouvés dans le Chapitre 2, sont donnés respectivement par  $\gamma_i(0)$  et  $-\theta_i(0)$ . Selon la Proposition 2.3, on a

$$-\theta_1(0) < -\theta_2(0) < 0 < \gamma_2(0) < \gamma_1(0).$$

Comme

$$\sqrt{(\mu_i - u)^2 + 2r\sigma_i^2} > |\mu_i - u|,$$

on a  $\gamma_i(u) > 0$  et  $\theta_i(u) > 0$ . Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\theta_i(u_0)x} = 0$  et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_{2i}(x) = u_0/r + \lim_{x \rightarrow \infty} C_i e^{\gamma_i(u_0)x}.$$

Comme  $\gamma_i(u_0)$  est strictement positif, pour avoir  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_{2i}(x) = u_0/r$ , il faut que  $C_i = 0$ . De plus, la fonction  $f_{2i}$  doit être croissante donc  $D_i$  doit être positif. En résumé, pour  $i \in \{1, 2\}$ , on a  $f_{2i}(x) = \frac{u_0}{r} - D_i e^{-\theta_i(u_0)x}$ , avec  $D_i$  positif.

Nous aimerions mieux expliciter la fonction  $f$ . On ne peut pas avoir  $f(x) = f_{11}(x) = A_1 e^{\gamma_1(0)x} - B_1 e^{-\theta_1(0)x}$ , pour tout  $x \geq 0$ . En effet,  $f$  étant bornée, on devrait avoir  $A_1 = 0$ . On veut aussi que  $f$  soit strictement

croissante. Donc, on devrait avoir  $B_1 > 0$ . Mais  $f(0) = 0$ , donc  $B_1 = 0$ . D'où la contradiction. On montre de façon similaire qu'on ne peut pas avoir  $f(x) = f_{12}(x) = A_2 e^{\gamma_2(0)x} - B_2 e^{-\theta_2(0)x}$ , pour tout  $x \geq 0$ .

Ceci nous pousse à considérer la fonction

$$f(x) = \begin{cases} A_1 e^{\gamma_1(0)x} - B_1 e^{-\theta_1(0)x} & \text{pour } 0 \leq x \leq b_1, \\ A_2 e^{\gamma_2(0)x} - B_2 e^{-\theta_2(0)x} & \text{pour } b_1 \leq x \leq b_2, \\ \frac{u_0}{r} - \frac{e^{-\theta_2(u_0)(x-b_2)}}{\theta_2(u_0)} & \text{pour } x \geq b_2, \end{cases}$$

où les paramètres  $A_1, B_1, A_2, B_2, b_1$  et  $b_2$  sont à déterminer. Nous allons choisir ces paramètres pour que  $f(0) = 0$  et  $f \in C^2(0, \infty)$ . Premièrement,  $f(0) = 0$  si et seulement si  $A_1 = B_1$ . On veut donc :

$$f(b_1-) = f(b_1+) \text{ ou } A_1(e^{\gamma_1(0)b_1} - e^{-\theta_1(0)b_1}) = A_2 e^{\gamma_2(0)b_1} - B_2 e^{-\theta_2(0)b_1} \quad (3.6)$$

$$f'(b_1-) = f'(b_1+) \text{ ou } A_1(\gamma_1(0)e^{\gamma_1(0)b_1} + \theta_1(0)e^{-\theta_1(0)b_1}) = A_2 \gamma_2(0)e^{\gamma_2(0)b_1} + B_2 \theta_2(0)e^{-\theta_2(0)b_1} \quad (3.7)$$

$$f''(b_1-) = f''(b_1+) \text{ ou } A_1(\gamma_1(0)^2 e^{\gamma_1(0)b_1} - \theta_1(0)^2 e^{-\theta_1(0)b_1}) = A_2 \gamma_2(0)^2 e^{\gamma_2(0)b_1} - B_2 \theta_2(0)^2 e^{-\theta_2(0)b_1} \quad (3.8)$$

$$f(b_2-) = f(b_2+) \text{ ou } A_2 e^{\gamma_2(0)b_2} - B_2 e^{-\theta_2(0)b_2} = u_0/r - 1/\theta_2(u_0) \quad (3.9)$$

$$f'(b_2-) = f'(b_2+) \text{ ou } A_2 \gamma_2(0)e^{\gamma_2(0)b_2} + B_2 \theta_2(0)e^{-\theta_2(0)b_2} = 1 \quad (3.10)$$

$$f''(b_2-) = f''(b_2+) \text{ ou } A_2 \gamma_2(0)^2 e^{\gamma_2(0)b_2} - B_2 \theta_2(0)^2 e^{-\theta_2(0)b_2} = -\theta_2(u_0). \quad (3.11)$$

De façon similaire au Chapitre 2, on veut utiliser les relations  $P_i(\gamma_i(0)) = P_i(-\theta_i(0)) = 0$  ( $i = 1, 2$ ), dans les équations (3.6), (3.7) et (3.8), pour les réduire. Pour cela, on les multiplie respectivement par  $-r, \mu_i$  et  $\frac{1}{2}\sigma_i^2$ , puis on additionne. On obtient

$$A_2 e^{\gamma_2(0)b_1} P_1(\gamma_2(0)) - B_2 e^{-\theta_2(0)b_1} P_1(-\theta_2(0)) = 0, \quad (3.12)$$

et

$$A_1 (e^{\gamma_1(0)b_1} P_2(\gamma_1(0)) - e^{-\theta_1(0)b_1} P_2(-\theta_1(0))) = 0. \quad (3.13)$$

On déduit de la dernière équation que

$$b_1 = \frac{1}{\gamma_1(0) + \theta_1(0)} \log \left[ \frac{P_2(-\theta_1(0))}{P_2(\gamma_1(0))} \right]. \quad (3.14)$$

À partir de l'équation (3.12), on a

$$A_2 = B_2 e^{-(\theta_2(0) + \gamma_2(0))b_1} P_1(-\theta_2(0)) / P_1(\gamma_2(0)). \quad (3.15)$$

En remplaçant cette dernière expression de  $A_2$  dans (3.9) et (3.10), on obtient

$$B_2 e^{-\theta_2(0)b_2} \left( e^{(\theta_2(0)+\gamma_2(0))(b_2-b_1)} P_1(-\theta_2(0))/P_1(\gamma_2(0)) - 1 \right) = u_0/r - 1/\theta_2(u_0), \quad (3.16)$$

et

$$B_2 \gamma_2(0) e^{-\theta_2(0)b_2} \left( e^{(\theta_2(0)+\gamma_2(0))(b_2-b_1)} P_1(-\theta_2(0))/P_1(\gamma_2(0)) + \theta_2(0) \right) = 1. \quad (3.17)$$

Posons

$$K = \frac{u_0}{r} - \frac{1}{\theta_2(u_0)}. \quad (3.18)$$

En divisant les équations (3.16) et (3.17), on obtient

$$e^{(\theta_2(0)+\gamma_2(0))(b_2-b_1)} = \frac{(1 + K\theta_2(0))P_1(\gamma_2(0))}{(1 - K\gamma_2(0))P_1(-\theta_2(0))}.$$

On en déduit que

$$b_2 = b_1 + \frac{1}{\gamma_2(0) + \theta_2(0)} \log \left[ \frac{(1 + K\theta_2(0)) P_1(\gamma_2(0))}{(1 - K\gamma_2(0)) P_1(-\theta_2(0))} \right]. \quad (3.19)$$

En remplaçant cette dernière expression dans l'équation (3.16), on obtient

$$B_2 = \frac{1 - K\gamma_2(0)}{\theta_2(0) + \gamma_2(0)} e^{\theta_2(0)b_2}. \quad (3.20)$$

En remplaçant cette dernière valeur dans l'expression (3.15), on obtient

$$A_2 = \frac{K\theta_2(0) + 1}{\theta_2(0) + \gamma_2(0)} e^{-\gamma_2(0)b_2} \quad (3.21)$$

En remplaçant  $A_2$  et  $B_2$  par les valeurs trouvées précédemment, dans l'équation (3.6), on obtient

$$A_1 = \frac{\frac{K\theta_2(0)+1}{\theta_2(0)+\gamma_2(0)} e^{\gamma_2(0)(b_1-b_2)} + \frac{K\gamma_2(0)-1}{\theta_2(0)+\gamma_2(0)} e^{-\theta_2(0)(b_1-b_2)}}{e^{\gamma_1(0)b_1} - e^{-\theta_1(0)b_1}}. \quad (3.22)$$

Les paramètres sont maintenant connus.

### 3.4 Solution du problème d'optimisation

Nous allons maintenant énoncer le théorème qui donne une solution au problème d'optimisation.

**Théorème 3.4** Soit  $Y^* = \{Y_t^*, t \geq 0\}$  le processus défini par

$$Y_t^* = X_0 + \int_0^t (\mu_1 \mathbf{1}_{\{Y_s^* < b_1\}} + \mu_2 \mathbf{1}_{\{Y_s^* \geq b_1\}}) ds + \int_0^t (\sigma_1 \mathbf{1}_{\{Y_s^* < b_1\}} + \sigma_2 \mathbf{1}_{\{Y_s^* \geq b_1\}}) dW_s.$$

Ainsi, une stratégie optimale est donnée par  $\pi^* = \{[(\mu_t^*, \sigma_t^{*2}), U_t^*], t \geq 0\}$ , où

$$(\mu_t^*, \sigma_t^{*2}) = \begin{cases} (\mu_1, \sigma_1^2) & \text{pour } 0 \leq Y_t^* < b_1 \\ (\mu_2, \sigma_2^2) & \text{pour } b_1 \leq Y_t^*, \end{cases}$$

$$\text{et } U_t^* = u_0 \mathbf{1}_{\{Y_t^* > b_2\}}.$$

Une stratégie optimale  $\pi^*$  consiste à changer  $(\mu_1, \sigma_1^2)$  pour  $(\mu_2, \sigma_2^2)$  en  $b_1$ , et  $(\mu_2, \sigma_2^2)$  pour  $(\mu_2 - u_0, \sigma_2^2)$  en  $b_2$ .

La fonction valeur optimale est

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\frac{K\theta_2(0)+1}{\theta_2(0)+\gamma_2(0)} e^{\gamma_2(0)(b_1-b_2)} + \frac{K\gamma_2(0)-1}{\theta_2(0)+\gamma_2(0)} e^{-\theta_2(0)(b_1-b_2)}}{e^{\gamma_1(0)b_1} - e^{-\theta_1(0)b_1}} (e^{\gamma_1(0)x} - e^{-\theta_1(0)x}) & \text{pour } 0 \leq x \leq b_1, \\ \frac{K\theta_2(0)+1}{\theta_2(0)+\gamma_2(0)} e^{-\gamma_2(0)(b_2-x)} + \frac{K\gamma_2(0)-1}{\theta_2(0)+\gamma_2(0)} e^{\theta_2(0)(b_2-x)} & \text{pour } b_1 \leq x \leq b_2, \\ \frac{u_0}{r} - \frac{e^{-\theta_2(u_0)(x-b_2)}}{\theta_2(u_0)} & \text{pour } x \geq b_2, \end{cases}$$

où  $b_1, b_2$  et  $K$  sont donnés respectivement dans (3.14), (3.19) et (3.18).

La Figure 3.1 illustre une stratégie optimale où  $b_1 = 750$ ,  $b_2 = 1725$ ,  $X_0 = 0$ ,  $\sigma_1^2 = 16$ ,  $\mu_1 = .7$ ,  $\sigma_2^2 = 100$  et  $\mu_2 = 1$  et  $u_0 = .75$ . Le seuil  $b_1$  est le point où le processus  $Y^*$  change de régime, et le seuil  $b_2$  est le point au-dessus duquel on paie le dividende au taux maximal  $u_0$ . Ici, le processus  $X^* = \{X_t^*, t \geq 0\}$ , correspond à la stratégie  $\pi^*$ . Il est identique au processus  $Y^*$  en deça de  $b_2$ , et a pour dérive et variance  $(\mu_2 - u_0, \sigma_2^2)$  au-dessus de  $b_2$ .

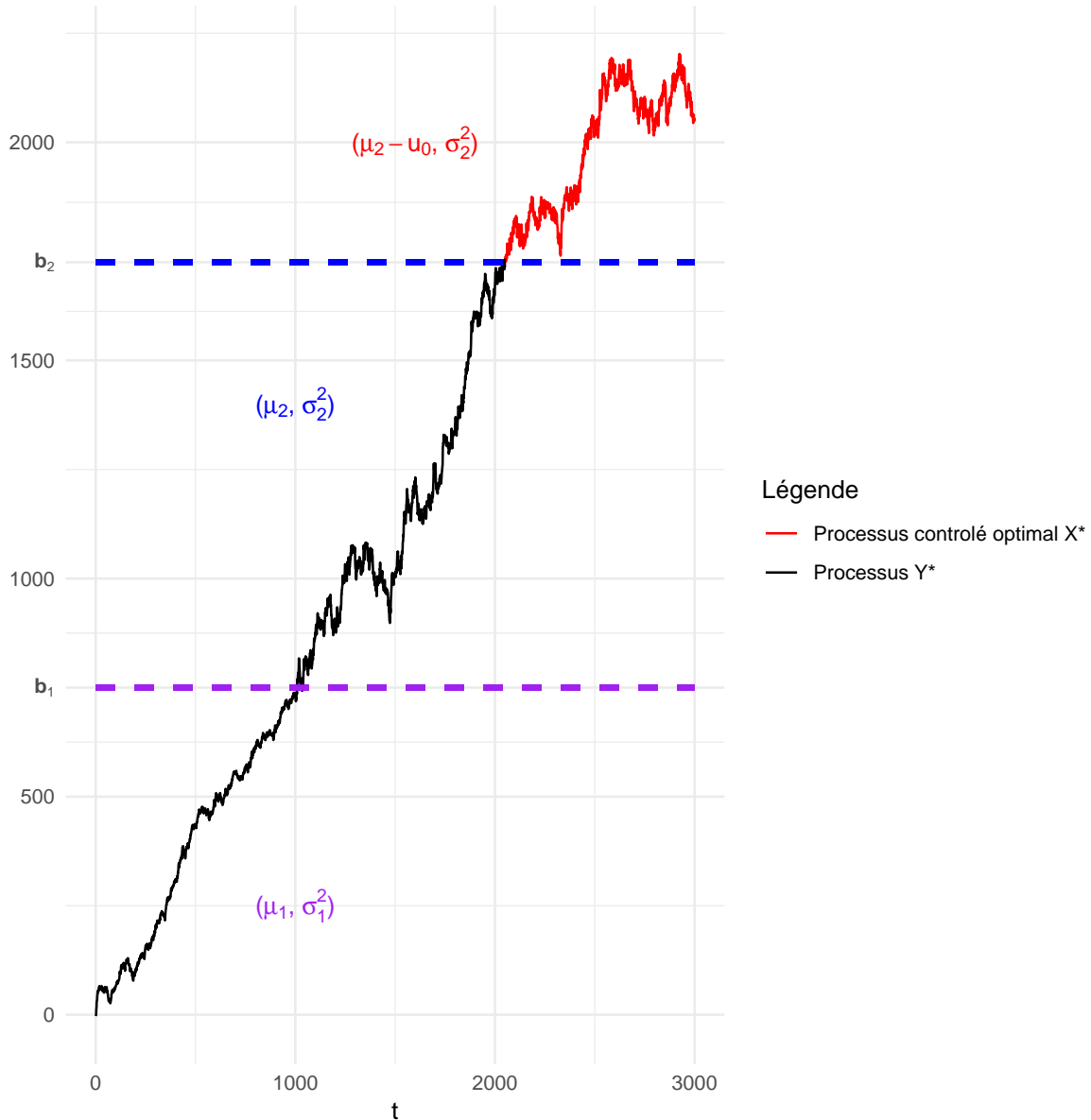


Figure 3.1 - Stratégie optimale lorsque  $Z$  a un taux borné par  $u_0 = .75$ ,  $b_1 = 750$ ,  $b_2 = 1725$ ,  $X_0 = 0$ ,  $\sigma_1^2 = 16$ ,  $\mu_1 = .7$ ,  $\sigma_2^2 = 100$ ,  $\mu_2 = 1$  et  $n = 2$

*Preuve. Posons*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\frac{K\theta_2(0)+1}{\theta_2(0)+\gamma_2(0)} e^{\gamma_2(0)(b_1-b_2)} + \frac{K\gamma_2(0)-1}{\theta_2(0)+\gamma_2(0)} e^{-\theta_2(0)(b_1-b_2)}}{e^{\gamma_1(0)b_1} - e^{-\theta_1(0)b_1}} (e^{\gamma_1(0)x} - e^{-\theta_1(0)x}) & \text{pour } 0 \leq x \leq b_1, \\ \frac{K\theta_2(0)+1}{\theta_2(0)+\gamma_2(0)} e^{-\gamma_2(0)(b_2-x)} + \frac{K\gamma_2(0)-1}{\theta_2(0)+\gamma_2(0)} e^{\theta_2(0)(b_2-x)} & \text{pour } b_1 \leq x \leq b_2, \\ \frac{u_0}{r} - \frac{e^{-\theta_2(u_0)(x-b_2)}}{\theta_2(u_0)} & \text{pour } x \geq b_2. \end{cases}$$

Par construction, la fonction  $f$  vérifie les conditions du Lemme de vérification 3.1, donc  $V(x) \leq f(x)$ .

Nous voulons maintenant montrer que  $f(x) \leq V(x)$ . Notons une fois de plus  $V^*$  la fonction valeur de la stratégie  $\pi^*$  et  $\tau^*$  le temps de ruine associé à cette stratégie. Pour montrer que  $f(x) \leq V(x)$ , il suffit de montrer que  $f(x) = V^*(x)$ . Nous réécrivons l'équation (3.1) mais cette fois en considérant  $X^*$ ,  $U^*$  et  $\tau^*$ , où  $X^*$  est le processus correspondant à  $\pi^*$ . On a

$$\begin{aligned}
e^{-r(\tau^* \wedge h)} f(X_{\tau^* \wedge h}^*) &= f(x) + \int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} \sigma_t^* f'(X_t^*) dW_t \\
&+ \int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} \left( (\mu_t^* - U_t^*) f'(X_t^*) + \frac{1}{2} \sigma_t^{*2} f''(X_t^*) - r f(X_t^*) \right) dt \\
&= f(x) + \int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} \sigma_t^* f'(X_t^*) dW_t \\
&+ \int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} \left( (\mu_t^* - U_t^*) f'(X_t^*) + \frac{1}{2} \sigma_t^{*2} f''(X_t^*) - r f(X_t^*) + U_t^* - U_t^* \right) dt. \\
&= f(x) + \int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} \sigma_t^* f'(X_t^*) dW_t \\
&+ \int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} \left( \mu_1 f'(X_t^*) + \frac{1}{2} \sigma_1^2 f''(X_t^*) - r f(X_t^*) \right) \mathbf{1}_{\{X_t^* < b_1\}} dt \\
&+ \int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} \left( \mu_2 f'(X_t^*) + \frac{1}{2} \sigma_2^2 f''(X_t^*) - r f(X_t^*) \right) \mathbf{1}_{\{b_1 \leq X_t^* < b_2\}} dt \\
&+ \int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} \left( (\mu_2 - u_0) f'(X_t^*) + \frac{1}{2} \sigma_2^2 f''(X_t^*) - r f(X_t^*) + u_0 - u_0 \right) \mathbf{1}_{\{X_t^* \geq b_2\}} dt.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Par construction de  $f_{1i}$ , pour  $X_t^* \leq b_2$ , le supremum dans les équations HJB est atteint en 0. Tandis que pour  $X_t^* > b_2$ , le supremum est atteint en  $u_0$ , par construction de  $f_{2i}$ . Donc les quatrième et cinquième termes, du membre de droite de la dernière égalité de (3.23), sont nuls. Tandis que le dernier terme vaut

$$- \int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} u_0 \mathbf{1}_{\{X_t^* \geq b_2\}} dt.$$

L'équation (3.23) devient

$$e^{-r(\tau^* \wedge h)} f(X_{\tau^* \wedge h}^*) = f(x) + \int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} \sigma_t^* f'(X_t^*) dW_t - \int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} u_0 \mathbf{1}_{\{X_t^* \geq b_2\}} dt. \tag{3.24}$$

Comme précédemment, on a que l'intégrale stochastique

$$\int_0^{\tau^* \wedge h} e^{-rt} \sigma_t^* f'(X_t^*) dW_t$$

a une espérance nulle et que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x \left[ e^{-r(\tau^* \wedge h)} f(X_{\tau^* \wedge h}^*) \right] = 0.$$

En faisant tendre  $h$  vers l'infini dans l'équation (3.24), on obtient

$$V^*(x) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau^*} e^{-rt} u_0 \mathbf{1}_{\{X_t^* \geq b_2\}} dt \right] = f(x).$$

Donc on a  $f(x) \leq V(x)$ .  $\square$

### 3.5 Réconciliation avec le cas où le dividende est continu

Nous voulons maintenant montrer que lorsque la borne  $u_0$  tend vers l'infini, nous retrouvons la fonction valeur du cas général traité au Chapitre 2, où le dividende  $Z$  est continu. Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.5** Lorsque  $u_0$  tend vers l'infini, les constantes

$$\theta_2(u_0) = \frac{\mu_2 - u_0 + \sqrt{(\mu_2 - u_0)^2 + 2r\sigma_2^2}}{\sigma_2^2} \quad \text{et} \quad K = \frac{u_0}{r} - \frac{1}{\theta_2(u_0)}$$

tendent respectivement vers 0 et vers  $\mu_2/r$ .

*Preuve.* Si on applique l'identité

$$a - b = (a^2 - b^2)/(a + b)$$

au numérateur de  $\theta_2(u_0)$ , on obtient

$$\theta_2(u_0) = \frac{1}{\sigma_2^2} \frac{(\mu_2 - u_0)^2 - (\mu_2 - u_0)^2 - 2r\sigma_2^2}{\left(\mu_2 - u_0 - \sqrt{(\mu_2 - u_0)^2 + 2r\sigma_2^2}\right)} = \frac{2r}{\sqrt{(\mu_2 - u_0)^2 + 2r\sigma_2^2} + u_0 - \mu_2}.$$

Il s'ensuit que  $\theta_2(u_0)$  tend vers 0, lorsque  $u_0$  tend vers l'infini.

On a

$$K = \frac{u_0}{r} - \frac{1}{\theta_2(u_0)} = \frac{u_0 + \mu_2 - \sqrt{(u_0 - \mu_2)^2 + 2r\sigma_2^2}}{2r}.$$

À ce dernier terme, on applique encore l'identité  $a - b = (a^2 - b^2)/(a + b)$ . On obtient

$$K = \frac{(u_0 + \mu_2)^2 - (u_0 - \mu_2)^2 - 2r\sigma_2^2}{2r \left(u_0 + \mu_2 + \sqrt{(u_0 - \mu_2)^2 + 2r\sigma_2^2}\right)}.$$

On réarrange les termes et on obtient

$$K = \frac{2u_0\mu_2 - r\sigma_2^2}{r \left(u_0 + \mu_2 + \sqrt{(u_0 - \mu_2)^2 + 2r\sigma_2^2}\right)}.$$

On considère dans cette dernière expression de  $K$ , le rapport des termes de plus haut degré en  $u_0$ , et on a

$$\lim_{u_0 \rightarrow \infty} K = \mu_2/r.$$

□

Notons  $V_\infty$ , la fonction valeur définie dans le Théorème 2.4, et  $V_{u_0}$  celle définie dans le Théorème 3.4. Alors,

$$V_\infty(x) = \begin{cases} \frac{\frac{\beta_2}{\beta_2 - \alpha_2} \frac{e^{\alpha_2(a_1 - a_2)}}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\beta_2 - \alpha_2} \frac{e^{\beta_2(a_1 - a_2)}}{\beta_2}}{e^{\alpha_1 a_1} - e^{\beta_1 a_1}} (e^{\alpha_1 x} - e^{\beta_1 x}) & \text{pour } 0 \leq x \leq a_1, \\ \frac{\beta_2}{\alpha_2(\beta_2 - \alpha_2)} e^{-\alpha_2(a_2 - x)} - \frac{\alpha_2}{\beta_2(\beta_2 - \alpha_2)} e^{-\beta_2(a_2 - x)} & \text{pour } a_1 \leq x \leq a_2, \\ \frac{\mu_2}{r} + (x - a_2) & \text{pour } x \geq a_2, \end{cases}$$

et

$$V_{u_0} = \begin{cases} \frac{\frac{K\theta_2(0)+1}{\theta_2(0)+\gamma_2(0)} e^{\gamma_2(0)(b_1-b_2)} + \frac{K\gamma_2(0)-1}{\theta_2(0)+\gamma_2(0)} e^{-\theta_2(0)(b_1-b_2)}}{e^{\gamma_1(0)b_1} - e^{-\theta_1(0)b_1}} (e^{\gamma_1(0)x} - e^{-\theta_1(0)x}) & \text{pour } 0 \leq x \leq b_1, \\ \frac{K\theta_2(0)+1}{\theta_2(0)+\gamma_2(0)} e^{-\gamma_2(0)(b_2-x)} + \frac{K\gamma_2(0)-1}{\theta_2(0)+\gamma_2(0)} e^{\theta_2(0)(b_2-x)} & \text{pour } b_1 \leq x \leq b_2, \\ \frac{u_0}{r} - \frac{e^{-\theta_2(u_0)(x-b_2)}}{\theta_2(u_0)} & \text{pour } x \geq b_2. \end{cases}$$

On a la proposition suivante :

**Proposition 3.6** Lorsque la borne  $u_0$  tend vers l'infini,  $V_{u_0}$  tend vers  $V_\infty$ .

*Preuve.* Rappelons que les paramètres  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  et  $a_1$ , trouvés dans le Chapitre 2, sont donnés respectivement par  $\gamma_i(0)$  et  $-\theta_i(0)$  et  $b_1$ . D'autre part, d'après le Lemme 3.5, on a

$$\lim_{u_0 \rightarrow \infty} (K\theta_2(0) + 1)\gamma_2(0) = \left( \frac{\mu_2}{r}\theta_2(0) + 1 \right) \gamma_2(0).$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \left( \frac{\mu_2}{r}\theta_2(0) + 1 \right) \gamma_2(0) &= \frac{\mu_2}{r}\theta_2(0)\gamma_2(0) + \gamma_2(0) \\ &= \frac{\mu_2}{r} \left( \frac{2r}{\sigma^2} \right) + \gamma_2(0) \\ &= \frac{2\mu_2}{\sigma^2} + \gamma_2(0) \\ &= \gamma_2(0) - \theta_2(0) - \gamma_2(0) \\ &= -\theta_2(0). \end{aligned}$$

De façon similaire,

$$\lim_{u_0 \rightarrow \infty} (1 - K\gamma_2(0))\theta_2(0) = \gamma_2(0).$$

Donc

$$\lim_{u_0 \rightarrow \infty} \frac{K\theta_2(0) - 1}{1 - K\gamma_2(0)} = \left( \frac{\theta_2(0)}{\gamma_2(0)} \right)^2$$

et le paramètre  $b_2$  tend vers le paramètre  $a_2$  trouvé dans le Chapitre 2. On a aussi que la première expression (resp. deuxième expression) de la fonction  $V_{u_0}$  tend vers la première expression (resp. deuxième expression) de la fonction  $V_\infty$ .

Pour ce qui est de la dernière expression de  $V_{u_0}$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{u_0}{r} - \frac{e^{-\theta_2(u_0)(x-b_2)}}{\theta_2(u_0)} &= \frac{u_0}{r} - \frac{1}{\theta_2(u_0)} + \frac{1}{\theta_2(u_0)} \left(1 - e^{-\theta_2(u_0)(x-b_2)}\right) \\ &= K + \frac{1}{\theta_2(u_0)} \left(1 - e^{-\theta_2(u_0)(x-b_2)}\right). \end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.5, on sait que  $\theta_2(u_0)$  tend vers 0, lorsque  $u_0$  tend vers l'infini. De plus,  $b_2$  tend vers  $a_2$ . Donc, la limite de  $\frac{1 - e^{-(x-b_2)\theta_2(u_0)}}{\theta_2(u_0)}$ , quand  $u_0$  tend vers l'infini, est identique à celle de  $\frac{1 - e^{-(x-a_2)\theta_2(u_0)}}{\theta_2(u_0)}$  quand  $\theta_2(u_0)$  tend vers zéro. On a donc

$$\lim_{\theta_2(u_0) \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-(x-a_2)\theta_2(u_0)}}{\theta_2(u_0)} = - \left( e^{-(x-a_2)\theta} \right)' \Big|_{\theta=0} = x - a_2.$$

De plus,  $K$  tend vers  $\mu_2/r$ . Donc, la dernière expression de la fonction  $V_{u_0}$  tend vers la dernière expression de la fonction  $V_\infty$ .  $\square$

### 3.6 Test de sensibilité de la stratégie optimale par rapport aux paramètres d'investissement

Nous voulons faire ici, une analyse similaire à ce qui a été fait au Chapitre 2. On se fixe un taux maximum de dividendes  $u_0$ . On représente graphiquement les seuils  $b_1$  et  $b_2$ , en fonction d'un seul paramètre d'investissement  $\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2$ , les trois autres étant fixés, tout en respectant les conditions des éléments de  $\mathcal{A}$ . On sait que le seuil  $b_1$  est identique au seuil  $a_1$  du Chapitre 2. Pour  $u_0$  assez grand, on devrait avoir la courbe de  $b_2$  qui tend vers celle de  $a_2$ .

**Remarque 3.7** On considère certaines valeurs de  $u_0$  et on donne aux paramètres  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ , les mêmes valeurs données au Chapitre 2, pour pouvoir faire des comparaisons.

On obtient les figures suivantes :

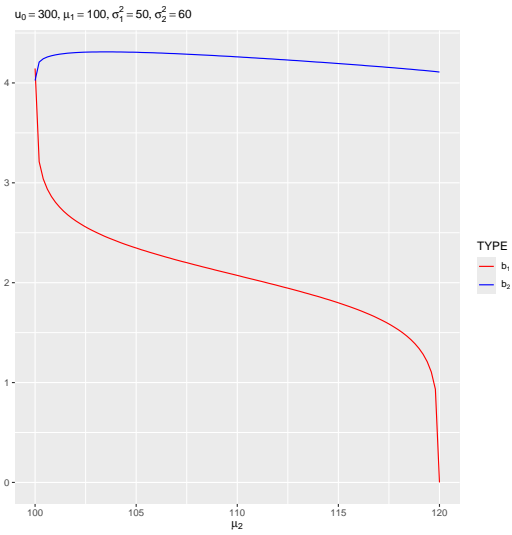
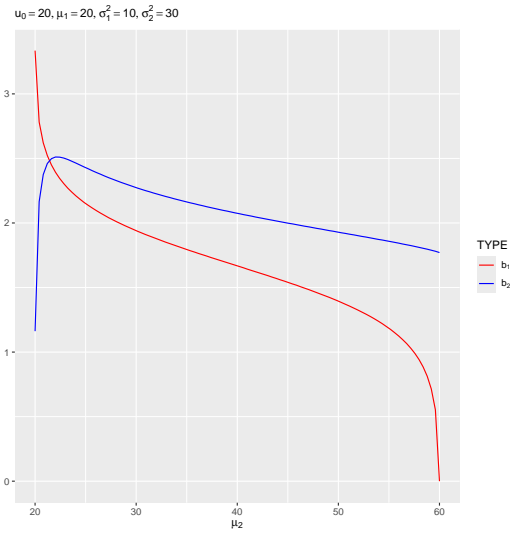
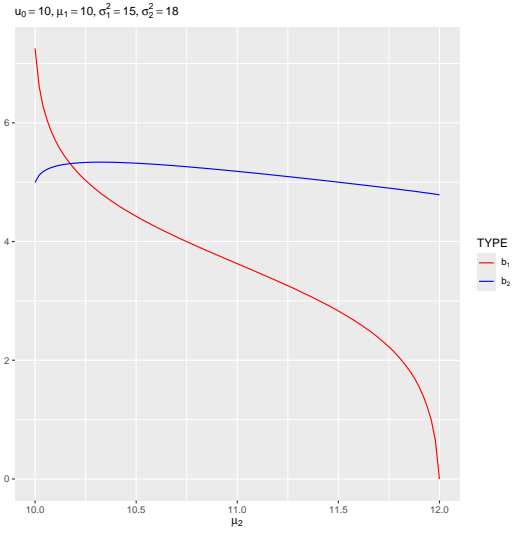


Figure 3.2 - Sensibilité par rapport à  $\mu_2$

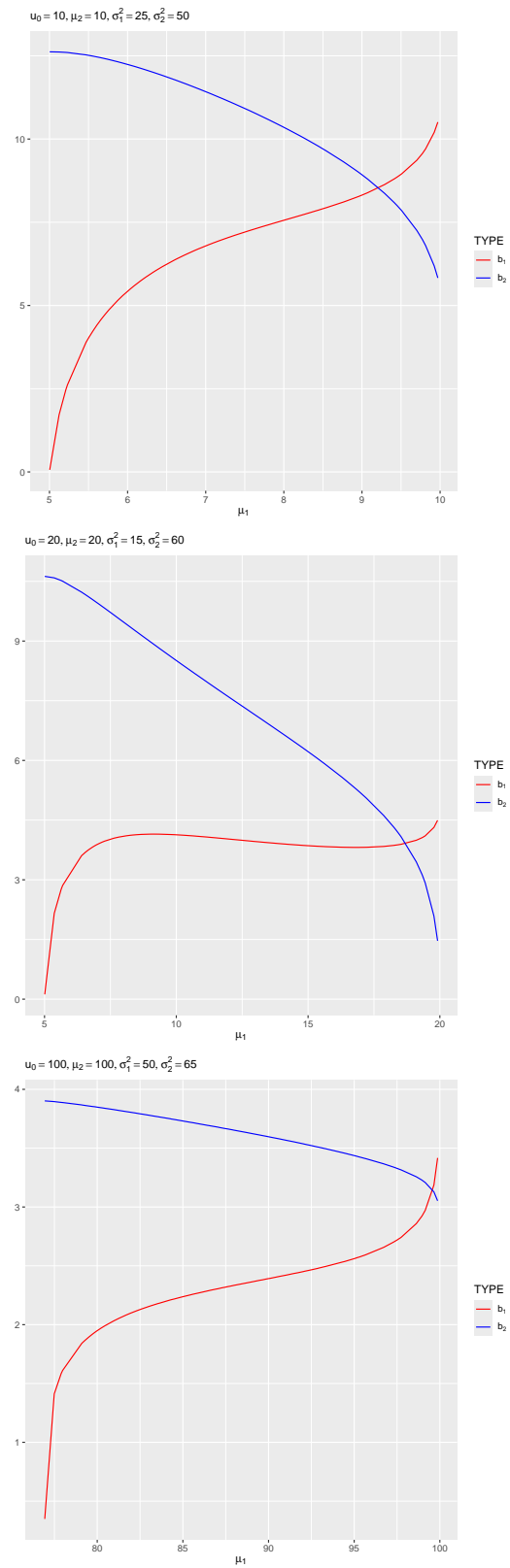


Figure 3.3 – Sensibilité par rapport à  $\mu_1$

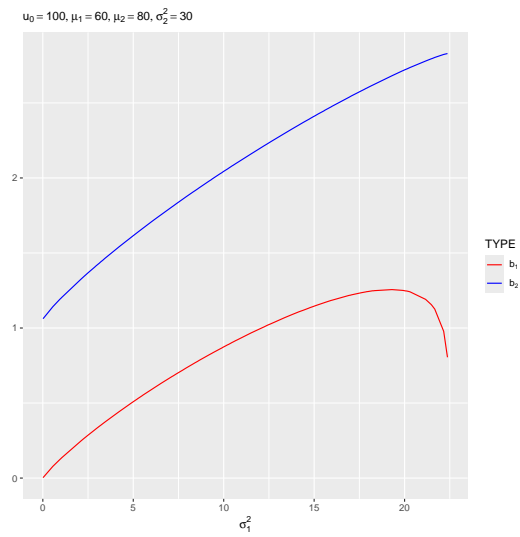
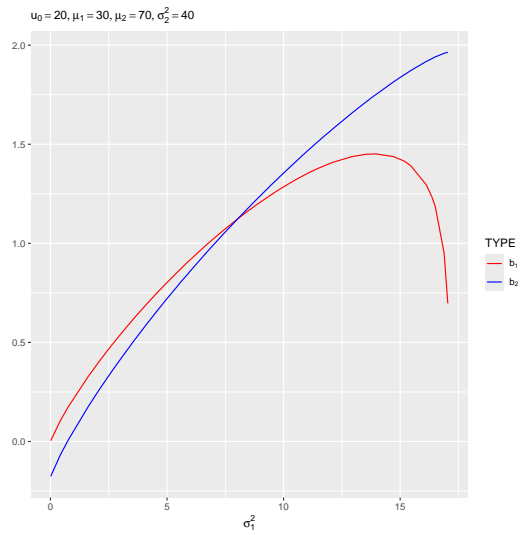
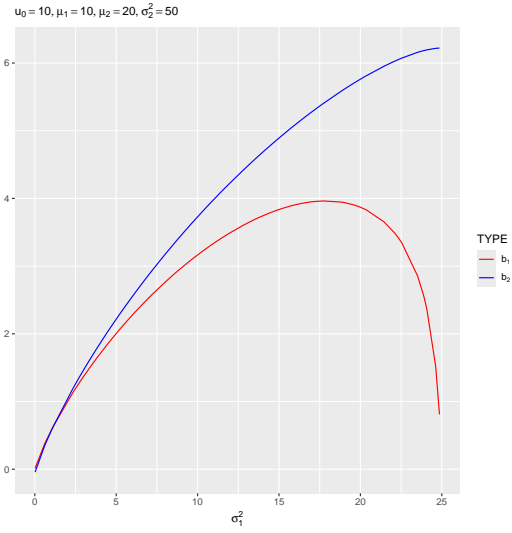


Figure 3.4 - Sensibilité par rapport à  $\sigma_1^2$

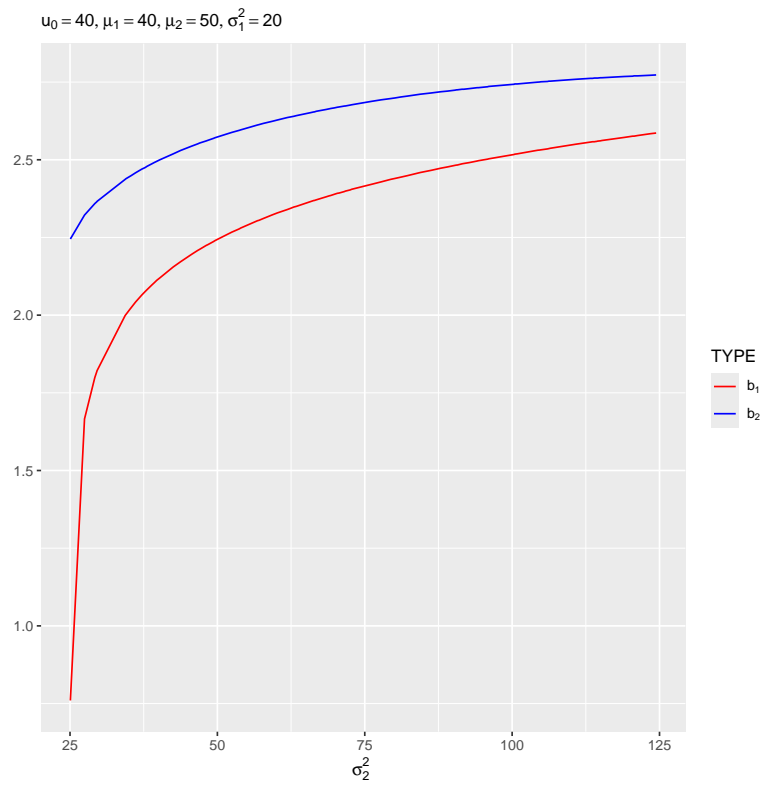
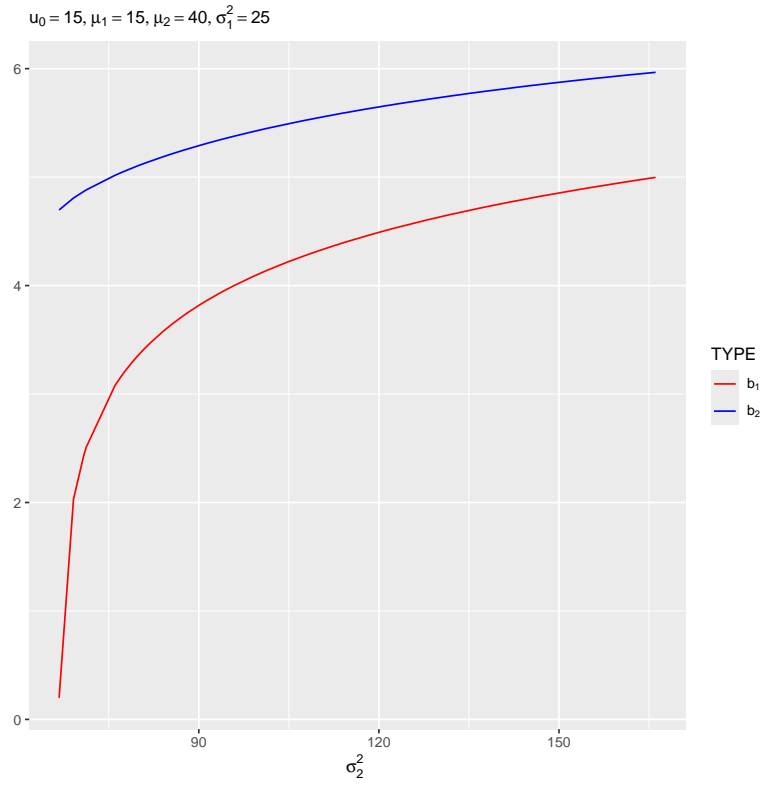


Figure 3.5 – Sensibilité par rapport à  $\sigma_2^2$

On voit effectivement que la courbe de  $b_1$  est identique à celle de  $a_1$  du Chapitre 2. Pour  $u_0 = 100$  par exemple, on voit que la courbe de  $b_2$  est identique à celle de  $a_2$ . Dans tous les cas, les formes des courbes de  $b_2$  et  $a_2$  sont identiques. Donc, l'analyse faite au Chapitre 2 est encore valide au Chapitre 3. Normalement, selon notre problématique, on devrait toujours avoir la courbe de  $b_2$  au-dessus de celle de  $b_1$ . Ici, il est difficile d'expliquer que les deux courbes se croisent.

## CONCLUSION

Après avoir fait un rappel du problème classique d'optimisation de dividendes, nous avons considéré le cas où la compagnie d'assurance possède deux plans d'investissement qui ne se dominent pas les uns les autres  $(\mu_1, \sigma_1^2)$  et  $(\mu_2, \sigma_2^2)$ , et paie des dividendes continus. Nous avons identifié deux seuils  $a_1$  et  $a_2$  de telle sorte qu'une stratégie optimale consiste à changer de régime en  $a_1$  et à payer des dividendes au-dessus de  $a_2$ . Les tests de sensibilité des seuils par rapport aux paramètres d'investissement, ont confirmé que dans le cas limite où  $\mu_1 = \mu_2$ , les courbes de  $a_1$  et  $a_2$  se rejoignent. Nous avons aussi pu expliquer les formes des différentes courbes.

Dans le cas où le dividende est absolument continu avec un taux borné, nous avons encore identifié deux seuils  $b_1$  et  $b_2$ . Une stratégie optimale consiste à changer de régime en  $b_1$  et au-dessus de  $b_2$ , le paramètre  $\mu_2$  est réduit du taux maximal du dividende. Dans ce dernier cas, les tests de sensibilité n'ont pas apporté d'informations supplémentaires et il est difficile d'expliquer que les courbes des seuils se croisent.

Ce mémoire ouvre un nouveau champ pour la recherche. Tout ce qui a été fait en problème d'optimisation de dividendes, dans le cas où la compagnie possède un seul plan d'investissement, pourrait être repensé en supposant qu'il y a  $n \geq 2$  plans d'investissement.

**ANNEXE A**  
**RÉSOLUTION D'UNE EDO**

Nous voulons résoudre les équations suivantes du Chapitre 3,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \mu f'(x) - rf(x) + u_0(1 - f(x)) = 0 \quad (\text{A.1})$$

et

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \mu f'(x) - rf(x) = 0. \quad (\text{A.2})$$

L'équation (A.2) étant un cas particulier de (A.1), on ne considère que l'équation (A.1) qui s'écrit encore

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (\mu - u_0)f'(x) - rf(x) = -u_0. \quad (\text{A.3})$$

L'équation homogène

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (\mu - u_0)f'(x) - rf(x) = 0 \quad (\text{A.4})$$

a pour équation caractéristique

$$\frac{1}{2}\sigma^2 T^2 + (\mu - u_0)T - r = 0. \quad (\text{A.5})$$

Le discriminant est

$$\Delta = (\mu - u_0)^2 + 2r\sigma^2 > 0$$

et les solutions de (A.5) sont :

$$\gamma = \frac{-(\mu - u_0) + \sqrt{(\mu - u_0)^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{-(\mu - u_0) - \sqrt{(\mu - u_0)^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}.$$

On en déduit que la forme générale des solutions de l'équation (A.4) est

$$f(x) = Ce^{\gamma x} + De^{\theta x},$$

où  $C$  et  $D$  sont deux constantes réelles arbitraires. Une solution particulière de l'équation (A.3) est la constante  $\frac{u_0}{r}$ . On en déduit que la forme générale de ses solutions

$$f(x) = \frac{u_0}{r} + Ce^{\gamma x} + De^{\theta x}.$$

## BIBLIOGRAPHIE

- Azcue, P. et Muler, N. (2014). *Stochastic Optimization in Insurance. A Dynamic Programming Approach*. Springer, New York.
- Cramér, H. (1930). On the Mathematical Theory of Risk. [Index : Abstract, 1.2, 2.3].
- Cramér, H. (1955). *Collective Risk Theory : A Survey of the Theory from the Point of View of the Theory of Stochastic Processes*. Ab Nordiska Bokhandeln, Stockholm. [Index : 1.2, 2.3, 3.1].
- de Finetti, B. (1957). Su un'Impostazione Alternativa della Teoria Collettiva del Rischio. *Transactions of the XVth International Congress of Actuaries*, 2, 433–43. [Index : Abstract, 1.2, 2.1.1, 2.1.2, 4, 6.1.1, 7].
- Gerber, H. U. (1969). Entscheidungskriterien für den Zusammengesetzten Poisson-Prozess. *Bulletin de l'Association Suisse des Actuaires*, 1969(2), 185–228. [Index : 2.3.1, 2.3.2].
- Gerber, H. U. et Shiu, E. S. W. (2004). Optimal Dividends : Analysis with Brownian Motion. *North American Actuarial Journal*, 8(1), 1–20. [Index : 2.1.2, 2.5.1].
- Hipp, C. et Plum, M. (2000). Optimal investment for insurers. *Insurance Math. Econom.*, 27, 215–228.
- Jeanblanc-Picqué, M. et Shiryaev, A. N. (1995). Optimization of the flow of dividends. *Uspekhi Mat. Nauk*, 50(2(302)), 25–46.
- Lundberg, F. (1903). Approximerad framställning av sannolikhetsfunktionen. Återförsäkring av kollektivrisker.
- Radner, R. et Shepp, L. (1996). Risk vs. Profit Potential : A Model for Corporate Strategy. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 20(8), 1373–93. [Index : 1.1, 6.3].
- Schmidli, H. (2002). On minimising the ruin probability by investment and reinsurance. *Ann. Appl. Probab.*, 12, 890–907.
- Schmidli, H. (2008). *Stochastic Control in Insurance*. Springer, London. [Index : 1.2].