

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

RÉDUCTIONS DE GRAPHE CONFLUENTES POUR L'ÉTUDE DU PROBLÈME DE L'ANCRAGE SYMBOLIQUE

THÈSE
PRÉSENTÉE
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN INFORMATIQUE

PAR
MOUSSA ABDENBI

JANVIER 2026

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.12-2023). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Alexandre Blondin Massé et Alain Goupil, mes directeurs de recherche, pour leur encadrement et leurs précieux conseils tout au long de cette recherche. Merci également à Odile Marcotte pour son aide et ses commentaires.

Une pensée particulière à ma famille et à mes proches pour leur patience et leur encouragement indéfectible. Je souhaite également au travers de ce travail rendre hommage à la mémoire de mon père.

Un grand merci à tous !

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES	vi
LISTE DES TABLEAUX	ix
RÉSUMÉ	x
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 PRÉLIMINAIRES	8
1.1 Graphes	8
1.1.1 Problème du transversal de circuits de cardinalité minimale	11
1.2 Réductions	15
1.3 Propriété de finitude Church-Rosser	24
1.3.1 Diagrammes commutatifs	27
CHAPITRE 2 RÉDUCTIONS CONFLUENTES	28
2.1 Réductions	28
2.1.1 Levy et Low	28
2.1.2 Réductions de Lin et Jou	32
2.1.3 Réductions de Lemaic	37
2.1.4 Autres réductions	40
2.2 Hiérarchie de réductions	45
2.3 Étude de la confluence	47
CHAPITRE 3 ARCS SUPERFLUS ET RÉDUCTIONS CONFLUENTES	60
3.1 Arcs essentiels et superflus	60
3.2 Réductions d'arcs superflus	65
3.2.1 Réduction de cordes CHORD_k	66

3.2.2	Réduction d'arcs dominés DARC	76
CHAPITRE 4	CONFLUENCE	88
4.1	Discussion sur la confluence	88
4.1.1	Graphe transposé et confluence	92
4.2	Dépendance et interdépendance	94
4.3	Parallélisme	99
4.3.1	Stratégie de parallélisation	99
4.3.2	Algorithmes parallèles	103
CHAPITRE 5	ÉTUDE DES DICTIONNAIRES	106
5.1	Dictionnaires	106
5.2	Représentation abstraite de sens	108
5.2.1	Construction du graphe RAS	110
5.3	Expérimentation	114
CHAPITRE 6	ÉNUMÉRATION	120
6.1	Arbres Union-Cat	120
6.2	Algorithme d'énumération	124
6.3	Performances	127
CONCLUSION		133
ANNEXE A	LEMES DE LA CONFLUENCE	136
A.1	Résultats préliminaires	136
A.2	Lemmes	138
ANNEXE B	CONFLUENCE DE LA RÉDUCTION CHORD_k	164
ANNEXE C	CONFLUENCE DE LA RÉDUCTION DAV^-	177

ANNEXE D TABLEAUX STATISTIQUES	196
ANNEXE E ARBRE UNION-CAT	200
E.1 Requêtes.....	201
E.2 Modificateurs.....	202
E.2.1 Aplatissement de l'arbre	202
E.2.2 Binarisation de l'arbre	203
E.2.3 Extraction d'une sous-famille	203
BIBLIOGRAPHIE	204

TABLE DES FIGURES

Figure 0.1	Exemple de définitions circulaires	5
Figure 1.1	Concepts de la théorie des graphes.....	10
Figure 1.2	Morphismes de graphes.....	12
Figure 1.3	Sommets et arcs d'intérêts pour le transversal de circuits de cardinalité minimale.....	14
Figure 1.4	Transformations de graphes préservant le TCCM d'un graphe	15
Figure 1.5	Exemple de conditions d'application.....	21
Figure 1.6	Interprétation d'une condition d'application	23
Figure 1.7	Exemple de réduction	24
Figure 2.1	Illustrations des réductions de Levy et Low	30
Figure 2.2	Illustrations des réductions de Lin et Jou	33
Figure 2.3	Illustrations des réductions INDICLIQUE et OUTDICLIQUE de Lemaic.....	37
Figure 2.4	Contre-exemples de la confluence de DICLIQUE-2 et DICLIQUE-3	39
Figure 2.5	Illustration du lien entre le problème du transversal de circuits et le problème de couverture par sommets	41
Figure 2.6	Illustration de la réduction SUBSET.....	42
Figure 2.7	Contre-exemple de la confluence de la réduction SHORTONE	42
Figure 2.8	Contre-exemples de la confluence de DOME et DOME++	44
Figure 2.9	Exemples où la priorisation des réductions n'est pas appliquée	46
Figure 2.10	Illustration de la couverture de CORE par INDICLIQUE et OUTDICLIQUE	48
Figure 3.1	Exemple de circuit minimal, d'arcs essentiels et superflus	61

Figure 3.2	Exemple de cordes.....	63
Figure 3.3	Cordes arrière dans la réduction CHORD_4	66
Figure 3.4	Exemple d'une corde arrière qui n'est pas identifiée par CHORD_3	67
Figure 3.5	Illustration de haut de niveau des deux chemins c et c'	69
Figure 3.6	Trace de CHORD_3	71
Figure 3.7	Exemple d'arcs identifiés par la réduction DARC	78
Figure 3.8	Contre-exemple de la confluence de la réduction DARC avec elle-même	79
Figure 3.9	Illustration de la dépendance des cordes arrière de la réduction DARC	80
Figure 3.10	Illustration des conditions restrictives d'application de DARC	81
Figure 3.11	Illustration des limites des conditions restrictives d'application de DARC	82
Figure 3.12	Contre-exemple de la confluence de DAV^- et DAV^+	83
Figure 3.13	Exemple de changement de l'applicabilité de DARC^- sur un arc	86
Figure 4.1	Exemple de la non-commutativité de CHORD_3 et DARC	89
Figure 4.2	Illustration de la dépendance et de l'interdépendance d'arcs au travers de DARC	96
Figure 5.1	Extrait d'un graphe associé à un dictionnaire	109
Figure 5.2	Exemple d'une Représentation Abstraite de Sens.....	110
Figure 5.3	Exemple d'une transformation d'une RAS	112
Figure 5.4	Extraits des trois graphes considérés	113
Figure 5.5	Nombres de sommets et d'arcs des différents dictionnaires	114
Figure 5.6	Nombres de sommets et d'arcs des différents noyaux.....	115

Figure 5.7	Une représentation en diagramme de Venn des proportions des mots partagés et exclusifs entre les noyaux des graphes associés, désambiguïsés et RAS	116
Figure 5.8	Nombre des composantes fortement connexes dans les noyaux	117
Figure 5.9	Nombre d'applications des réductions confluentes	117
Figure 5.10	Distribution de l'âge d'acquisition des mots dans les noyaux et leurs réductions	118
Figure 5.11	Distribution de la concrétude des mots dans les noyaux et leurs réductions.....	119
Figure 6.1	Exemple d'un arbre union-cat	123
Figure 6.2	Les différents cas rencontrés lors du calcul de l'arbre union-cat	127
Figure 6.3	Exemple d'arbre union-cat retourné par l'algorithme 7	129
Figure 6.4	Un exemple de dictionnaire	130
Figure 6.5	Résultats de simulation.....	132
Figure A.1	Commutativité de l'opération $\circ$	137
Figure A.2	Illustration du cas (b) du lemme A.11.....	152
Figure A.3	Illustration du cas (a) du lemme A.15	156
Figure A.4	Illustration du cas (a) du lemme A.16	160
Figure C.1	Illustration du cas (b) du lemme C.1.....	179
Figure C.2	Illustration du lemme C.1 après application des réductions	180
Figure C.3	Illustration de l'égalité du corollaire C.2	182
Figure E.1	Relation entre un BDD/ROBDD/ZDD et un UCT	200

LISTE DES TABLEAUX

Table 1.1	Énumération de tous les transversal de circuits de cardinalité minimale	14
Table 2.1	Réductions et leur couvertures	49
Table 3.1	L'appel $K\text{-CHEMINSANS CORDE}(G, c, i, (i))$	73
Table 3.2	L'appel $K\text{-CHEMINSANS CORDE}(G, e, d, (d))$	74
Table 3.3	L'appel $K\text{-CHEMINSANS CORDE}(G, a, b, (b))$	74
Table 5.1	Quelques reformulations possibles des définitions	111
Table D.1	Les graphes et leur noyau pour chacun des dictionnaires numériques	197
Table D.2	Comparaison entre les tailles des noyaux des graphes associés, désambiguïsés et RAS	197
Table D.3	Les réductions sur les noyaux des graphes associés, désambiguïsés et RAS	198
Table D.4	Les caractéristiques psycholinguistiques des mots dans les noyaux des graphes associés, désambiguïsés et RAS et leur graphe réduit correspondant	199

RÉSUMÉ

Les modèles symboliques, connexionnistes et hybrides constituent les principales approches pour modéliser le langage humain. Les modèles symboliques sont toutefois confrontés au *problème de l'ancrage symbolique* : un système ne peut définir les mots uniquement à partir d'autres mots sans circularité. En particulier lorsque ce type de modèle est utilisé pour modéliser des dictionnaires.

Pour étudier ce phénomène, plusieurs travaux ont représenté les dictionnaires comme des graphes orientés, où le problème de l'ancrage symbolique se rapproche du problème du *transversal de circuits de cardinalité minimale* (TCCM), consistant à identifier un ensemble minimal de mots devant être ancrés pour briser toutes les circularités définitionnelles.

Cette thèse s'inscrit dans cette lignée en apportant trois contributions principales. Tout d'abord, nous introduisons un nouveau cadre formel pour les réductions de graphes et nous rappelons notion de la *confluence*. Nous regroupons un ensemble de réductions utilisées dans la littérature et démontrons leur confluence, garantissant l'unicité du noyau et du graphe réduit, indépendamment de l'ordre d'application. Unicité essentielle pour garantir que les analyses et les conclusions psycholinguistiques ne dépendent pas de la stratégie de réduction suivie. Cette confluence offre également des perspectives pour des algorithmes parallèles plus rapides et adaptés aux architectures modernes des machines de calcul.

Ensuite, nous présentons de nouvelles réductions d'*arcs superflus* et outils pour analyser les TCCMs. Nous introduisons deux nouvelles réductions polynomiales, confluentes avec l'ensemble des réductions considérées, permettant de retirer efficacement des arcs superflus sans modifier les TCCMs. Nous développons par ailleurs une nouvelle structure de données *union-cat*, qui conserve la trace des sommets traités par les réductions et facilite l'énumération des TCCMs dans certains cas.

Enfin, nous étudions l'effet de l'application de ces réductions sur huit dictionnaires linguistiques. Nous désambiguïsons les définitions et intégrons des liens syntaxiques via des *représentations abstraites du sens* (RAS), produisant deux nouveaux graphes (désambiguïsé et RAS). L'application de nos réductions montre que ces enrichissements augmentent significativement la taille du noyau et du graphe réduit, tout en conservant leurs unicités et maintenant ainsi un contexte linguistique plus riche.

Ces résultats démontrent que la confluence et les nouvelles réductions constituent des outils efficaces pour réduire les graphes, identifier les mots essentiels et améliorer, d'une part, la résolution du problème du TCCM et d'autre part l'étude du problème de l'ancrage symbolique.

Mots clés : Graphe orienté, Réduction de graphe, Arc superflu, Problème du transversal de circuits de cardinalité minimale, Problème de l'ancrage symbolique, Dictionnaire

ENGLISH ABSTRACT

English title :

Symbolic, connectionist, and hybrid models constitute the main approaches to modeling human language. However, symbolic models are confronted with the *symbol grounding problem* : a system cannot define words solely in terms of other words without falling into definitional circularity. In particular when these types of models are used to model dictionaries. To study this phenomenon, several works have represented dictionaries as directed graphs, where the symbol grounding problem aligns with the problem of the *minimum feedback vertex set* (MFVS), which consists in identifying a minimal set of words that must be grounded externally in order to break all definitional cycles.

This thesis follows this line of work by making three main contributions. First, we introduce a new formal framework for graph reductions and we recall the notion of *confluence*. We gather a set of reductions used in the literature and demonstrate their confluence, guaranteeing the uniqueness of the kernel and the reduced graph, regardless of the order in which reductions are applied—an essential uniqueness to ensure that psycholinguistic analyses and conclusions do not depend on the chosen reduction strategy. This confluence also opens perspectives for faster parallel algorithms adapted to modern computing architectures.

Second, we present new reductions of *superfluous arcs* and tools for analyzing MFVS. We introduce two new polynomial reductions, confluent with the entire set of considered reductions, enabling the efficient removal of superfluous arcs without altering MFVS. We also develop a new data structure, *union-cat*, which keeps track of vertices affected by reductions and facilitates the enumeration of MFVS in some cases.

Finally, we study the effect of applying these reductions to eight linguistic dictionaries. We disambiguate definitions and integrate syntactic links through *abstract meaning representations* (AMR), producing two new graphs (a disambiguated graph and a AMR graph). Applying our reductions shows that these enrichments significantly increase the size of the kernel and the reduced graph, while preserving their uniqueness and thus maintaining a richer linguistic context.

These results demonstrate that confluence and the new reductions constitute effective tools for reducing graphs, identifying essential words, and improving, on the one hand, the resolution of the MFVS problem and, on the other hand, the study of the symbol grounding problem.

Keywords : Directed graph, Graph reduction, Superfluous arc, Minimum feedback vertex set problem, Symbol grounding problem, Dictionary

INTRODUCTION

Le test d'intelligence artificielle décrit par Alan Turing en 1950 dans sa publication *Computing Machinery and Intelligence* (Turing, 1950), consiste à mettre un humain, un *interrogateur*, en confrontation verbale à l'aveugle avec 2 *interlocuteurs* : un ordinateur et un autre humain. La conversation est limitée à des messages textuels entre les protagonistes. Si l'interrogateur n'est pas capable d'identifier lequel de ses interlocuteurs est un ordinateur, nous pouvons considérer que le programme de l'ordinateur a passé le test avec succès. Cela sous-entend que ce programme peut *imiter* le comportement sémantique humaine.

Au delà de la réussite de ce test par un programme, des questions se posent sur ce qu'est la *sémantique humaine*. En effet, même si un programme passe le test de Turing, nous pouvons nous poser la question de savoir s'il *comprend* le sens des mots ou des phrases qu'il a utilisées. Cette question en soulève d'autres. En particulier, quel est exactement le *sens* d'un mot ? Comment un mot acquiert-t-il un sens ? Comment ce sens a-t-il été acquis par un être humain ? De manière générale, comment pouvons-nous modéliser la compréhension humaine des mots ? Et par quel processus cette compréhension a-t-elle été acquise par les humains ? Pour tenter de répondre à ces questions, il est important, tout d'abord, d'avoir un cadre théorique pour modéliser la sémantique humaine ou le langage humain. Une première tentative a été basée sur un modèle dit *symbolique*, modèle initialement introduit par Chomsky. C'est un modèle qui est constitué de symboles et d'un ensemble de règles explicites qui régissent les combinaisons de ces symboles. Ces règles sont elles-mêmes formulées exclusivement en fonction des symboles de leur modèle. Dans un tel modèle, la notion de *mot* étant liée à un langage, elle a été remplacée par la notion de *symbole*, abstraite et plus générale. L'ensemble du modèle et toutes ses parties sont interprétables sémantiquement : la syntaxe peut se voir attribuer une signification (Chomsky, 1957).

Même si un modèle symbolique permet de retranscrire les règles syntaxiques d'un langage et, éventuellement, construire des phrases syntaxiquement correctes, le sens des symboles demeure une variable non prise en compte, pas seulement par un modèle symbolique, mais par le test de Turing lui-même. En effet, c'est ce que Searle a mis de l'avant dans un article intitulé « *Minds, Brains and Programs* » avec son expérience de la *chambre chinoise* (Searle, 1980). Dans cette expérience de pensée, Searle imagine une personne qui n'a aucune connaissance du chinois enfermée dans une chambre. Cette personne a accès à un ensemble de règles permettant de répondre à des phrases en chinois. Ces règles sont parfaitement claires pour cette personne et leur application se base uniquement sur la syntaxe des phrases. Une phrase

d'une certaine forme syntaxique en chinois est corrélée avec une phrase d'une autre forme syntaxique. La personne enfermée dans la chambre est capable, en appliquant les règles qu'elle a à sa disposition, de répondre à des phrases écrites en chinois. Elle est capable de produire d'autres phrases en chinois qui constituent, par exemple, des réponses à des questions posées par un individu situé à l'extérieur de la chambre et dont la langue maternelle est le chinois. Du point de vue du locuteur qui pose les questions, la personne enfermée dans la chambre se comporte comme un individu qui parlerait vraiment chinois. Mais, en l'occurrence, cette dernière n'a aucune compréhension de la signification des phrases en chinois qu'elle ne fait que transformer en suivant des règles prédéterminées. Cette expérience de pensée suggère qu'il ne suffit pas d'être capable de reproduire exactement les comportements linguistiques d'un locuteur chinois pour parler chinois. C'est ainsi que des systèmes implémentant un modèle symbolique développés plus tard, à l'instar de Fodor et Pylyshyn (Pylyshyn, 1980; Fodor, 1987), souffrent de cette limitation inhérente à un modèle purement symbolique, à savoir que des symboles peuvent être correctement manipulés sans qu'il n'y ait une compréhension de leur sens. Ceci étant dit, d'autres modèles ont été développés pour répondre à cette limitation, c'est notamment le cas du modèle proposé par Rumelhart et Smolensky et appelé le *connexionnisme* (Rumelhart *et al.*, 1986; Smolensky, 1988). Le principe de base du connexionnisme est que le langage humain, entre autres, peut être décrit à l'aide de réseaux d'unités simples interconnectées. La forme des connexions et des unités peut varier selon les implémentations. Par exemple, l'association d'un mot à un objet physique est représentée par une connexion entre ces deux unités.

Pour formaliser l'importance du sens des mots, dans son article « *The symbol grounding problem* », Harnad transpose l'expérience de Searle à un dictionnaire chinois-chinois pour formaliser le *problème de l'ancrage symbolique* (en anglais *Symbol Grounding Problem*), que nous pouvons résumer de la façon suivante. Supposons que nous devons *apprendre* le chinois comme *première langue* et que la seule source d'information dont nous disposons est un dictionnaire chinois-chinois. Pour comprendre un symbole, nous pouvons consulter sa définition et, si certains symboles de cette définition nous sont inconnus, alors nous pouvons les rechercher à leur tour dans le dictionnaire. Cependant, sous peine de tourner en boucle indéfiniment, comment pouvons-nous éviter cette circularité entre symboles ? Autrement dit, comment le sens du symbole doit-il être *ancré* dans autre chose que des symboles ? C'est ainsi qu'Harnad schématise la problématique que chaque modèle purement symbolique aura à affronter. Par conséquent, il estime qu'il est nécessaire d'enrichir un modèle symbolique avec des concepts venant du modèle connexionniste, qui permettent de connecter certains symboles à des représentations externes du système symbolique (Harnad, 1990). Ces représentations permettent d'acquérir une compréhension des symboles pour briser toute boucle de défi-

nitions symboles/symboles.

C'est ainsi que plusieurs chercheurs se sont attelés à étudier et à proposer des solutions au problème de l'ancrage symbolique et, par extension, à la problématique du sens des mots de l'expérience de la chambre chinoise de Searle. Sans surprise et comme Harnad l'a suggéré, les modèles hybrides sont de meilleurs candidats pour résoudre le problème de l'ancrage symbolique. Nous pouvons, par exemple, citer les travaux de Taddeo et Floridi qui reprennent donc un système symbolique, avec l'idée que la signification des symboles ne peut pas être purement dérivée par des relations symboliques internes mais doit émerger de ce qu'ils qualifient d'*interactions pratiques* avec l'environnement où le système symbolique évolue (Taddeo et Floridi, 2007). On peut également citer les travaux de Johnston et Williams pour une approche formelle qui établit une distinction claire entre les systèmes symboliques et les représentations internes des symboles. Ils introduisent la notion de *représentation*, qu'ils définissent comme « l'état interne dans le système qui correspond à des perceptions ou à des actions dans le monde réel ». C'est ainsi qu'ils estiment qu'un symbole ne devient *significatif* que lorsqu'il est relié à une ou des représentations internes qui, à leur tour, sont ancrées dans des interactions sensori-motrices ou d'autres modalités d'expérience (Johnston et Williams, 2009). À noter, qu'il existe également des modèles et approches, qui se détachent des approches symbolique et connexionniste classiques, notamment les systèmes basés sur un modèle probabiliste et statistique. Ces systèmes s'appuient sur des modèles mathématiques pour estimer les probabilités des événements linguistiques (par exemple, la probabilité qu'un mot suive un autre). En d'autres termes, cette approche utilise des modèles statistiques pour capturer les régularités dans les données linguistiques (Jurafsky et Martin, 2025). À l'instar des modèles bayésiens (Griffiths et al., 2008) ou des modèles n-grammes (Jurafsky et Martin, 2025). Il est également intéressant de citer des modèles plus récents qui tentent de répondre au problème de l'ancrage symbolique, adoptant une architecture dite *neuronale* appelée SATNet (*Satisfiability Neural Network*), conçue pour intégrer le raisonnement symbolique dans des systèmes d'apprentissage profond. Cette architecture combine des réseaux neuronaux profonds pour traiter des données perceptuelles (comme des images ou des sons) avec des mécanismes symboliques permettant de résoudre des contraintes logiques (Wang et al., 2019). C'est ainsi que ce type de modèle a été considéré pour résoudre le problème de l'ancrage symbolique (Topan et al., 2021; Chang et al., 2023). En résumé, ces travaux se concentrent principalement sur des modèles qui permettent d'ancrer des symboles et ainsi prétendre à la résolution du problème de l'ancrage symbolique.

D'autres travaux se sont plutôt concentrés sur l'identification des symboles nécessitant un ancrage dans un

système symbolique. Se focalisant davantage sur la nature de ces symboles et leurs rôles dans le système symbolique. C'est dans cette optique que des travaux ont été menés sur le problème de l'ancrage symbolique dans le contexte des *lexiques* ou des *dictionnaires* linguistiques. En effet, un lexique peut être décrit comme un système symbolique, où un mot est représenté par un symbole et les définitions sont représentées par la relation « *définie par* » entre les symboles. À noter qu'un *graphe orienté* représente très bien un tel système. En effet, chaque symbole est représenté par un sommet et chaque relation définitionnelle est représentée par un ou plusieurs arcs. De même, un dictionnaire peut être vu comme une implémentation avec des symboles représentant des mots et des arcs représentant les liens définitionnels entre les mots. Ce qui en fait un système symbolique où tout symbole est défini en fonction d'autres symboles du même système. Ainsi la circularité décrite par Harnad se transpose par des circuits définitionnels et les mots apparaissant dans ces circuits sont ceux qui doivent être ancrés (Blondin Massé *et al.*, 2008). Par exemple, considérons les définitions suivantes des quatre mots *winter*, *spring*, *summer* et *autumn* tirées du dictionnaire *Cambridge International Dictionary of English* (Procter, 1995).

Winter *the season between **autumn** and **spring**, lasting from November to March north of the equator and from May to September south of the equator, when the weather is coldest.*

Spring *the season of the year between **winter** and **summer**, lasting from March to June north of the equator, and from September to December south of the equator, when the weather becomes warmer, leaves and plants start to grow again and flowers appear.*

Summer *the season of the year between **spring** and **autumn** when the weather is warmest, lasting from June to September north of the equator and from December to March south of the equator.*

Autumn *the season of the year between **summer** and **winter**, lasting from September to November north of the equator and from March to May south of the equator, when fruits and crops become ready to eat and are picked, and leaves fall.*

Nous pouvons extraire les relations circulaires « *définie par* » entre les mots représentant les saisons, tel qu'illustré à la figure 0.1.

Dans cette optique, nous pouvons pousser l'analyse et nous intéresser aux mots qui, au contraire, peuvent être ignorés ou retirés d'un dictionnaire sans affecter les circuits définitionnels. C'est de cette manière que des structures ont été découvertes dans des dictionnaires, notamment le *noyau*, qui est construit en retirant récursivement les mots qui n'apparaissent dans aucune définition. Ce même noyau est divisé en un *cœur* et des *satellites*, qui s'avèrent être des composantes fortement connexes (Blondin Massé *et al.*, 2008; Pi-

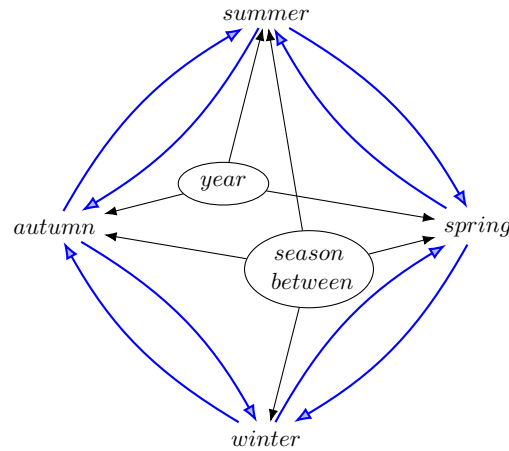


Figure 0.1 – Exemple de définitions circulaires. Définitions des 4 saisons *winter*, *spring*, *summer* et *autumn* tirées du dictionnaire *Cambridge International Dictionary of English* (Procter, 1995). Noter que, pour des raisons de lisibilité, nous nous représentons que les premiers mots de chaque définition en ignorant les mots vides (en anglais *stop words*) et les prépositions.

card et al., 2010; Vincent-Lamarre et al., 2016), c'est-à-dire que tous les mots d'une composante connexe, apparaissent directement ou indirectement dans les définitions des autres de la même composante. Avant d'aller plus loin, notons que la manière de construire un noyau a un effet secondaire intéressant : le noyau d'un dictionnaire est unique, peu importe l'ordre dans lequel nous retirons ces mots qui n'apparaissent dans aucune définition. Ce qui induit également l'unicité du cœur et des satellites. À présent, si nous revenons aux graphes, un lien naturel s'établit entre le problème de l'ancrage symbolique et le problème du *transversal de circuits de cardinalité minimale*. Plus précisément, un transversal de circuits de cardinalité minimale est un ensemble de mots qui doivent être ancrés en dehors du système symbolique pour éviter la circularité définitionnelle décrite par Harnad (Vincent-Lamarre et al., 2016). Nous pouvons donc tirer parti des travaux portant sur le problème du transversal de circuits pour pousser l'analyse du problème de l'ancrage symbolique, en se focalisant, dans un système symbolique, sur les mots nécessitant d'être ancrés. En effet, le retrait des mots qui n'apparaissent dans aucune autre définition, peut s'apparenter à une *réduction de graphe sécuritaire* pour le problème du transversal de circuits de cardinalité minimale. C'est-à-dire, une transformation de graphe qui préserve les solutions du problème du transversal de circuits de cardinalité minimale. Il est donc tout naturel que, dans un tel contexte, nous posions les questions suivantes.

- Quelles sont les autres réductions qui préservent les solutions du problème du transversal de circuits de cardinalité minimale ?
- Pour un dictionnaire donné, est-ce que l'ordre d'application de ces réductions affecte le noyau ? Notamment son unicité est-elle préservée ?

- Pouvons-nous aller plus loin dans la réduction du noyau ? Si oui, comment pouvons-nous maintenir l'unicité du *noyau réduit* ?

D'autres questions se posent également sur le modèle adopté. En effet, le choix de représenter un mot et sa définition avec seulement des liens allant des mots définissant vers le mot défini, induit une perte d'information sur la structure syntaxique de la définition. Nous nous posons donc les questions suivantes.

- Comment pouvons-nous considérer, en plus des liens définitionnels, des liens syntaxiques entre les mots d'une définition ?
- Quel est l'impact des liens syntaxiques des mots d'une définition sur le noyau et ses composantes internes ?

Un autre point important qui a été mis de côté jusqu'à présent dans l'étude du problème de l'ancrage symbolique avec des dictionnaires est la *désambiguïsation lexicale*. Cette dernière est la détermination du sens d'un mot dans une phrase lorsque ce mot possède plusieurs sens. Ainsi, nous nous posons les questions suivantes.

- Qu'apporte la désambiguïsation d'un dictionnaire à son noyau et à ses composantes ?
- Est-ce que les résultats et interprétations obtenus dans l'étude des dictionnaires sont maintenus dans les dictionnaires désambiguïsés ? Notamment, les interprétations psycholinguistiques du noyau et de ses composantes ? (Vincent-Lamarre *et al.*, 2016)

Dans cette thèse, nous proposons d'apporter des éléments de réponses aux questions posées ci-haut. Pour ce faire, nous nous sommes d'abord concentrés sur les réductions de graphes et l'unicité des graphes dits *réduits* résultants, qui constitue à notre avis un point central dans l'étude du problème du transversal de circuits de cardinalité minimale et, par extension, du problème de l'ancrage symbolique. En effet, le noyau, le cœur et les satellites étant uniques par construction, il est naturel d'essayer de maintenir cette unicité lors de l'application de nouvelles réductions. Même si cette unicité apporte des restrictions sur le choix des réductions, elle est néanmoins essentielle pour garantir que les analyses et les conclusions ne dépendent pas de la stratégie de réductions suivie. Ainsi, les quatre premiers chapitres de la thèse sont consacrés à l'étude des réductions. Notamment dans le chapitre 1 où nous formalisons la notion de *réduction* et nous rappelons des définitions de base de la théorie des graphes. Dans le chapitre 2 nous passons en revue la littérature sur les réductions de graphes et nous sélectionnons un ensemble de réductions qui a la propriété particulière, appelée *confluence*, qui garantit justement l'unicité, à isomorphisme près, du graphe obtenu après une application des réductions dans n'importe quel ordre jusqu'à épuisement. Dans le chapitre 3 nous revenons sur une classe de réductions qui touche les arcs dits *superflus* et nous introduisons deux nouvelles

réductions qui préservent la confluence de l'ensemble des réductions du chapitre 2. Dans le chapitre 4 qui suit, nous discutons également de plusieurs questions soulevées par des réductions d'arcs superflus, notamment sur leur contribution à la confluence d'autres ensembles de réductions. Nous abordons également un intéressant effet de bord de la confluence, à savoir la possibilité de paralléliser l'application des réductions confluentes. Dans le chapitre 5 nous revenons sur les dictionnaires et sur les questions de désambiguïsation et des liens syntaxiques entre les mots d'une définition. Nous utilisons la *représentation abstraite du sens* (*Abstract Meaning Representation*) (Jascob, 2023) pour désambiguïser et enrichir avec des liens syntaxiques des dictionnaires utilisés dans des travaux antérieurs. Ce chapitre est dédié à l'expérimentation des résultats obtenus sur les réductions et la confluence, appliqués sur des dictionnaires. Nous y comparons les résultats des travaux antérieurs avec nos nouvelles représentations désambiguïsées et syntaxiquement enrichies des mêmes dictionnaires. Dans le dernier chapitre 6, nous introduisons une structure de données qui permet de suivre à la trace les sommets affectés par les différentes réductions dans un graphe ou dans un dictionnaire donné. Le but étant de pouvoir énumérer tous les sommets identifiés lors de l'application des réductions, notamment, les sommets appartenant à un transversal de circuits de cardinalité minimale et, donc, des mots qui nécessitent d'être ancrés.

Enfin, bien que la motivation première de cette thèse soit l'étude du problème de l'ancrage symbolique, une large partie de notre démarche consiste à approfondir et structurer les fondements théoriques nécessaires à son analyse, en particulier ceux issus de la théorie des graphes. En effet, la représentation des dictionnaires comme graphes orientés, l'étude des circuits définitionnels, des réductions de graphes et de leur unicité, ainsi que les questions liées aux liens syntaxiques ou à la désambiguïsation, illustrent que l'approche par la théorie des graphes offre un cadre particulièrement riche pour examiner la structure interne des systèmes symboliques et, par extension, les dictionnaires. Ce cadre permet non seulement de formuler rigoureusement les questions soulevées par l'ancrage des symboles, mais aussi d'établir des ponts vers des interrogations linguistiques et psycholinguistiques plus larges, ouvrant ainsi la voie à de futures recherches au croisement de la modélisation formelle et de l'étude empirique du langage. En outre, cette thèse n'a pas pour vocation de résoudre le problème de l'ancrage symbolique ni le problème du transversal de circuits. En effet, à l'instar des travaux sur les dictionnaires cités plus haut, nous nous intéressons, en premier lieu, à la démarche qui nous permet de nous rapprocher d'un TCCM ou d'un ensemble d'ancrage et, en seconde lieu, à l'interprétation psycholinguistique de ses différentes étapes.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous posons les fondations théoriques nécessaires à l'ensemble de la thèse. À la section 1.1, nous rappelons d'abord plusieurs notions essentielles de théorie des graphes, notamment les circuits, les transversaux de circuits, les composantes fortement connexes et les morphismes, qui constituent le langage formel au cœur de notre approche. Ensuite, dans la section 1.2, nous introduisons la notion centrale de réduction de graphes, qui jouera un rôle fondamental dans la suite de la thèse pour relier les propriétés structurelles des dictionnaires à celles du problème du transversal de circuits de cardinalité minimale. Enfin, dans la section 1.3, nous présentons la propriété de confluence (ou finitude de Church-Rosser), concept clé permettant de garantir l'unicité des graphes réduits et constituant un outil méthodologique majeur pour la suite de nos analyses.

1.1 Graphes

Nous commençons par rappeler des définitions de base de la théorie des graphes. Pour de plus amples détails le lecteur peut se référer au livre de Diestel (Diestel, 2010).

Un *graphe orienté* est un couple $G = (V, E)$ d'ensembles tel que les éléments de E , appelés *arcs*, sont des paires ordonnées d'éléments de V , appelés *sommets* (ou *nœuds*). Autrement dit, $E \subseteq V \times V$. Dans le cas général, les deux ensembles V et E peuvent être infinis et dans ce cas nous parlons de graphes *infinis*. Cependant, nous ne considérons que des graphes finis dans cette thèse. La *taille* d'un graphe G est son nombre de sommets, c'est-à-dire $|V|$ où $|\cdot|$ dénote la cardinalité d'un ensemble. Un *sous-graphe* de G est un couple $H = (V_H, E_H)$ tel que $V_H \subseteq V$ et $E_H \subseteq E \cap (V_H \times V_H)$. Pour $U \subseteq V$, le *sous-graphe induit* par U dans G , noté $G[U]$, est défini par $G[U] = (U, E \cap (U \times U))$.

Pour un sommet $u \in V$, l'ensemble des *prédécesseurs* de u dans G est défini par $N_G^-(u) = \{p \in V \mid (p, u) \in E\}$ et l'ensemble des *successeurs* de u dans G est défini par $N_G^+(u) = \{s \in V \mid (u, s) \in E\}$. L'ensemble des *voisins* de u dans G est $N_G(u) = N_G^-(u) \cup N_G^+(u)$. Le *degré intérieur* d'un sommet $u \in V$ est défini par $\deg_G^-(u) = |N_G^-(u)|$, son *degré extérieur* par $\deg_G^+(u) = |N_G^+(u)|$ et son *degré total* par $\deg_G(u) = |N_G(u)| = \deg_G^-(u) + \deg_G^+(u)$. En particulier, un sommet u est appelé *puits* si $\deg_G^+(u) = 0$ et est appelé *source* si $\deg_G^-(u) = 0$.

Un *chemin* entre deux sommets $u_0, u_k \in V$ dans $G = (V, E)$ est un tuple $c = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_k)$ tel que $u_i \in V$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k$ et $(u_i, u_{i+1}) \in E$ pour $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$. La *longueur* d'un chemin $c = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_k)$ est l'entier k . L'ensemble des sommets visités par le chemin c est désigné par $V(c) = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_k\}$. De même, l'ensemble des arcs visités par le chemin c est désigné par $E(c) = \{(u_0, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_{k-1}, u_k)\}$. Un chemin est dit *élémentaire* s'il ne passe pas deux fois par un même sommet et il est dit *simple* s'il ne passe pas deux fois par un même arc. Un *circuit* est un chemin simple $c = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_k)$ ayant le même sommet dans les deux extrémités, $u_0 = u_k$. En particulier, un circuit de longueur 1 est appelé une *boucle*, il est donc de la forme (u, u) . Un circuit de longueur 2 est appelé un *2-circuit* et est de la forme $C = (u, v, u)$ avec $u \neq v$. Un graphe G qui ne contient aucun circuit est dit *acyclique*. Un graphe est dit *fortement connexe* si pour tous $u, v \in V$ tels que $u \neq v$, il existe un chemin entre u et v et un chemin entre v et u . Une *composante fortement connexe* d'un graphe G est un sous-graphe fortement connexe de G et de taille maximale. Nous reprenons quelques notations récentes et pratiques (Lemaic, 2008). Pour un sommet $u \in V$, $G - u$ désigne le graphe orienté dont l'ensemble des sommets est $V' = V \setminus \{u\}$ et l'ensemble des arcs est $E' = E \setminus \{(x, y) \in E \mid x = u \text{ ou } y = u\}$. Par extension, pour un ensemble de sommets $U \subseteq V$, $G - U$ est le graphe formé par les sommets $V \setminus U$ et les arcs $E \setminus \{(x, y) \in E \mid x \in U \text{ ou } y \in U\}$. Pour un arc donné $(u, v) \in E$, $G - (u, v)$ désigne le graphe orienté où l'ensemble des sommets est V et l'ensemble des arcs est $E' = E \setminus \{(u, v)\}$. De même, pour un ensemble d'arcs $A \subseteq E$, $G - A$ est le graphe formé par les sommets V et les arcs $E \setminus A$. Enfin, pour un sommet $u \in V$, si $(u, u) \notin E$, alors le graphe orienté $G \circ u$ est le graphe où l'ensemble des sommets est $V' = V \setminus \{u\}$ et l'ensemble des arcs est $E' = (E \setminus \{(x, y) \in E \mid x = u \text{ ou } y = u\}) \cup N_G^-(u) \times N_G^+(u)$. Nous disons que u a été *contourné* dans $G \circ u$ et nous parlons également de *contournement* du sommet u .

Nous notons l'ensemble de tous les 2-circuits de G par $E^{\leftrightarrow} = \{(u, v) \in E \mid (v, u) \in E \text{ avec } u \neq v\}$. Étant donné un graphe orienté $G = (V, E)$, nous distinguons deux graphes orientés spéciaux $G^{\leftrightarrow} = (V, E^{\leftrightarrow})$ et $G^{\rightarrow} = (V, E^{\rightarrow})$ où $E^{\rightarrow} = E \setminus E^{\leftrightarrow}$. Étant donné $U \subseteq V$, nous disons que U est une *clique orientée* ou *diclique* de G si $(u, v) \in E$ pour tout $u, v \in U$, $u \neq v$ et $(u, u) \notin E$ pour tout $u \in U$.

L'ensemble $U \subseteq V$ est appelé un *transversal de circuits* si $G - U$ est acyclique. L'ensemble de tous les transversaux de circuits de G est noté $\text{TC}(G)$. L'ensemble de tous les transversaux de circuits de G de cardinalité minimale est noté $\text{TCCM}(G)$. Dans ce qui suit, nous utilisons d'une manière interchangeable l'appellation « transversaux de circuits de cardinalité minimale » ou son acronyme « TCCM ».

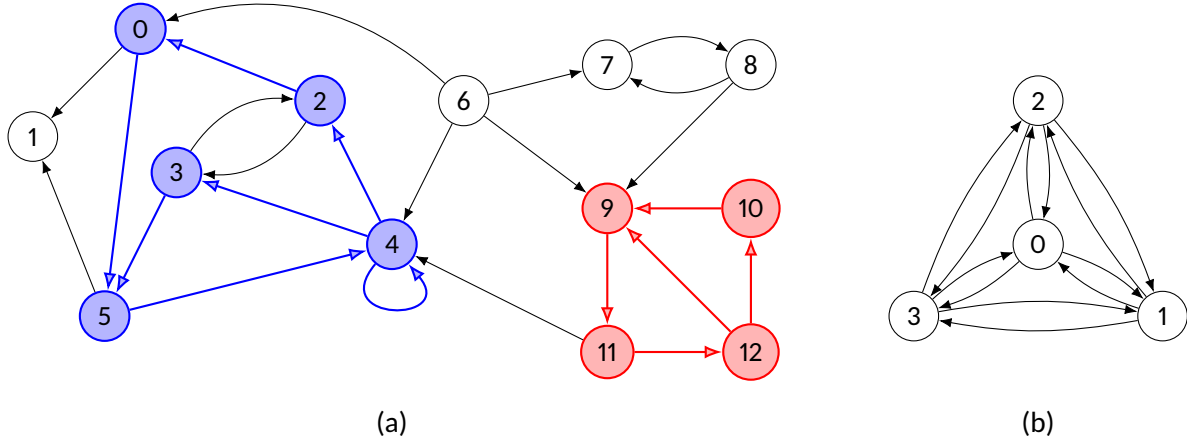


Figure 1.1 – Concepts de la théorie des graphes. (a) Soit le graphe orienté $G = (V, E)$ illustré ci-haut. Les sommets et les arcs en bleu forment un sous-graphe $H = (V_H, E_H)$ de G . Par contre il n'est pas induit, car $2, 3 \in V_H$ et $(2, 3), (3, 2) \in E$, mais $(2, 3), (3, 2) \notin E_H$. Le sous-graphe formé par les sommets et arcs rouge est un sous-graphe induit par les sommets $\{9, 10, 11, 12\}$. Le sommet 6 est une source et le sommet 1 est un puits. $(8, 9, 11, 4, 5, 1)$ est un chemin de longueur 5. $(4, 2, 0, 5, 4)$ est un circuit de longueur 4. L'arc $(4, 4)$ est une boucle. $(7, 8, 7)$ est un 2-circuit. Les sommets et arcs en rouge forment une composante fortement connexe. Les ensembles $\{1, 6, 7, 12, 9, 3, 4\}$, $\{7, 10, 11, 3, 4\}$ et $\{7, 12, 9, 2, 4\}$ sont des transversaux de circuits dans G . Les ensembles $\{2, 4, 7, 9\}$, $\{3, 4, 8, 11\}$ et $\{3, 4, 7, 12\}$ sont des transversaux de circuits minimaux dans G . Les circuits $(0, 5, 4, 2, 0)$, $(3, 2, 3)$, $(4, 4)$ et $(9, 11, 12, 9)$ sont minimaux. Par contre, le circuit $(9, 11, 12, 10, 9)$ n'est pas minimal à cause du circuit $(9, 11, 12, 9)$ car $\{9, 11, 12, 9\} \subseteq \{9, 11, 12, 10, 9\}$. (b) Une diclique de taille 4.

Pour les besoins des prochains chapitres nous ajoutons la définition suivante de circuit *minimal*.

Définition 1.1 (Circuit minimal) Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté et $c = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_0)$ un circuit. Nous disons que le circuit c est minimal s'il n'existe pas de circuit c' avec un ensemble de sommets $V(c') \subset V(c)$.

Nous illustrons les concepts définis jusqu'ici dans la figure 1.1.

Nous définissons la relation d'ordre $\prec$ sur l'ensemble des graphes orientés par la vérification d'une des deux conditions suivantes, pour deux graphes orientés $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$.

- $|V'| < |V|$.
- $|V'| = |V|$ et $|E'| < |E|$.

Dans ce cas nous notons $G' \prec G$. À noter que c'est un ordre *strict*.

Enfin nous rappelons la notion de *morphisme de graphes* et ses variantes.

Définition 1.2 (Morphisme de graphes) Étant donnés deux graphes orientés $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, un morphisme de graphe $\mu : G_1 \longrightarrow G_2$ est une fonction $\mu : V_1 \longrightarrow V_2$ qui préserve les arcs, c'est-à-dire que pour tout $(u, v) \in E_1$ nous avons $(\mu(u), \mu(v)) \in E_2$.

Pour un morphisme μ entre $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, nous avons.

- μ est un monomorphisme, si μ est une fonction injective, c'est-à-dire, pour tout $u_1, v_1 \in V_1$ si $u_1 \neq v_1$, alors $\mu(u_1) \neq \mu(v_1)$.
- μ est un épimorphisme, si μ est une fonction surjective, c'est-à-dire, pour tout $u_2 \in V_2$, il existe $u_1 \in V_1$ tel que $\mu(u_1) = u_2$.
- μ est un isomorphisme, si μ est bijective, c'est-à-dire, μ est injective et surjective. Dans ce cas, G_1 et G_2 sont dits isomorphes et nous écrivons $G_1 \cong G_2$.

La figure 1.2 donne des exemples pour illustrer les 3 types de morphismes.

Remarque 1.1 Si G et H sont deux graphes orientés isomorphes au travers d'un isomorphisme μ , alors il y a une bijection naturelle entre les deux ensembles $TCCM(G)$ et $TCCM(H)$. En effet, la fonction f définie ci-bas est une bijection.

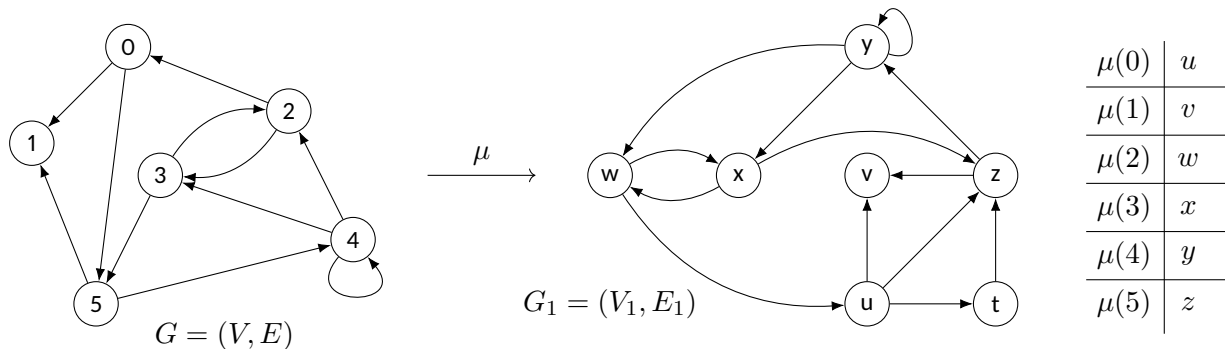
$$\begin{aligned} f : TCCM(G) &\longrightarrow TCCM(H) \\ U &\longmapsto f(U) = \mu(U) = \{\mu(u) \mid u \in U\} \end{aligned}$$

1.1.1 Problème du transversal de circuits de cardinalité minimale

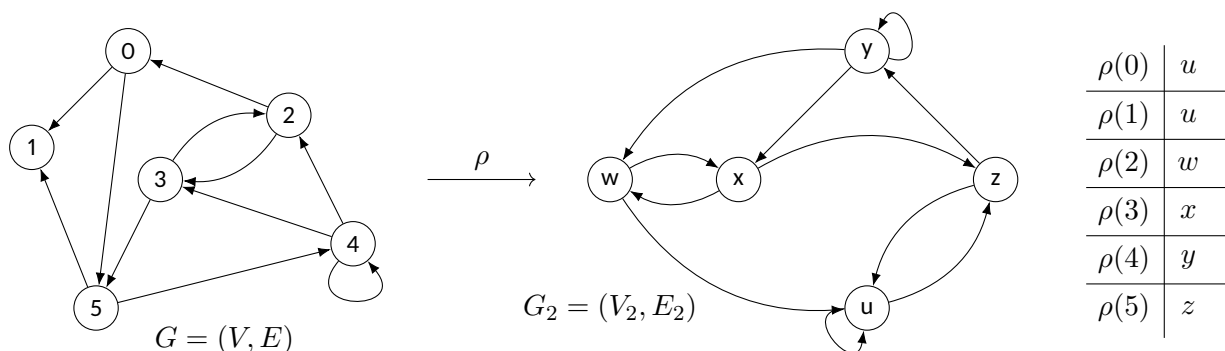
Nous rappelons brièvement dans cette sous-section le problème consistant à trouver un transversal de circuits de cardinalité minimale dans un graphe orienté.

Formellement, le problème de décision portant sur l'existence d'un transversal de circuits d'une cardinalité donnée, peut être énoncé ainsi.

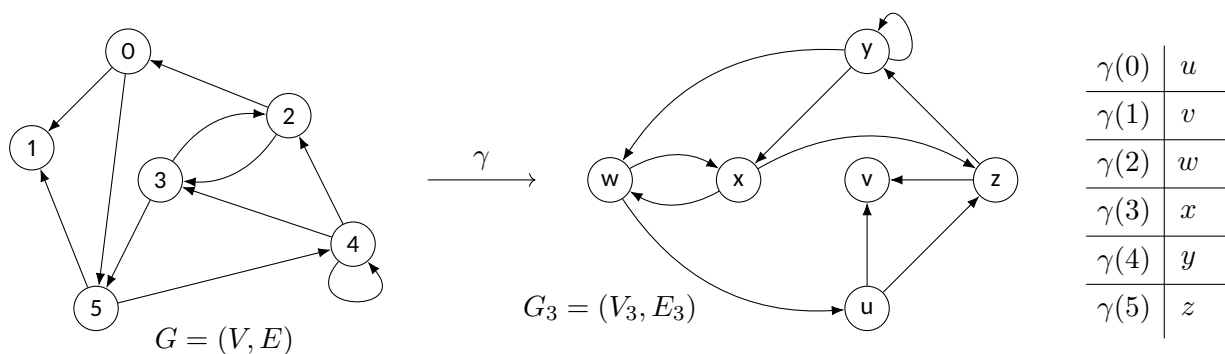
Problème 1 (Existence d'un transversal de circuits de cardinalité donnée)



(a) Un monomorphisme μ .



(b) Un épimorphisme ρ .



(c) Un isomorphisme γ .

Figure 1.2 – Exemples des différents morphismes de graphes.

Instance. Un graphe orienté $G = (V, E)$ et un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

Question. Est-ce qu'il existe un transversal de circuits de G de cardinalité au plus k ?

Nous associons naturellement au problème 1 le problème d'optimisation des *transversaux de circuits de cardinalité minimale* défini comme suit.

Problème 2 (Calcul de la cardinalité minimale d'un transversal de circuits)

Instance. Un graphe orienté $G = (V, E)$.

Question. Quelle est la cardinalité minimale d'un transversal de circuits de G ?

Le problème 1 est NP-complet ce qui fait du problème 2 d'optimisation associé un problème NP-difficile (Karp, 1972; Garey et Johnson, 1979).

À noter qu'il existe également deux autres problèmes combinatoires associés au problème 2.

Problème 3 (Dénombrement des transversaux de circuits de cardinalité minimale)

Instance. Un graphe orienté $G = (V, E)$.

Question. Combien existe-t-il de transversaux de circuits de cardinalité minimale ?

Problème 4 (Énumération des transversaux de circuits de cardinalité minimale)

Instance. Un graphe orienté $G = (V, E)$.

Question. Quels sont les éléments de $TCCM(G)$?

Le problème 4 de l'énumération de tous les transversaux de circuits de cardinalité minimale est un problème dans la classe #P (Fomin et al., 2008; Golovach et al., 2014).

Exemple 1.1 Considérons le graphe de la figure 1.3. Le tableau 1.1 donne la liste de tous les TCCM du graphe G de la figure 1.3, autrement dit, la solution du problème 4. Par conséquent, la solution du problème 3 est 12.

Transversal de circuits de cardinalité minimale	$\{4, 3, 7, 11\}$	$\{4, 3, 7, 12\}$	$\{4, 3, 8, 9\}$	$\{4, 3, 8, 11\}$
	$\{4, 3, 7, 9\}$	$\{4, 3, 8, 12\}$	$\{4, 2, 7, 9\}$	$\{4, 2, 7, 11\}$
	$\{4, 2, 7, 12\}$	$\{4, 2, 8, 9\}$	$\{4, 2, 8, 11\}$	$\{4, 2, 8, 12\}$

Table 1.1 – Énumération de tous les transversaux de circuits de cardinalité minimale du graphe G de la figure 1.3.

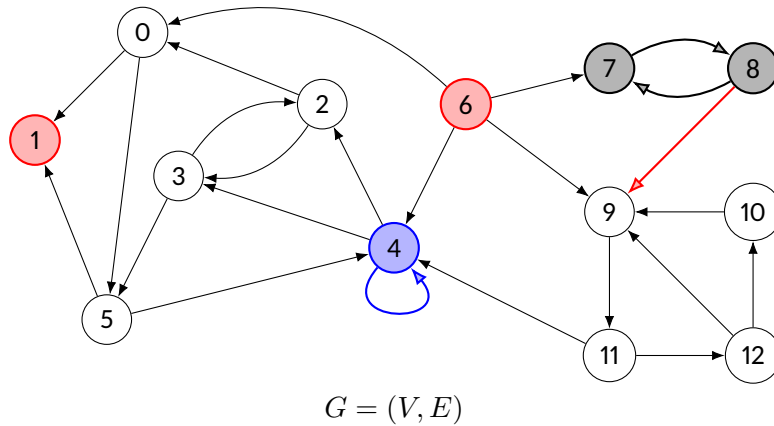


Figure 1.3 – Sommets et arcs d'intérêts pour le transversal de circuits de cardinalité minimale. Soit le graphe $G = (V, E)$ ci-dessus. À cause de la boucle $(4, 4)$, le sommet 4 en bleu appartient à tous les transversaux de circuits, incluant les transversaux de circuits de cardinalité minimale. Les sommets 1 et 6 en rouge n'appartiennent à aucun transversal de cardinalité minimale. À cause du 2-circuit $\{7, 8, 7\}$ l'un des sommets 7 ou 8 en noir doit nécessairement appartenir à tout transversal de circuits. De même pour les sommets 2 et 3 à cause du 2-circuit $\{2, 3, 2\}$. Nous remarquons qu'aucun circuit ne passe, entre autre, par l'arc $(8, 9)$ en rouge.

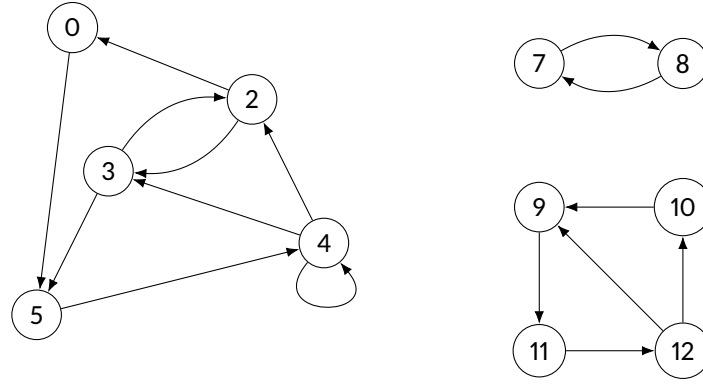


Figure 1.4 – Transformations de graphes préservant le TCCM d'un graphe. Soit le graphe $G = (V, E)$ ci-dessus que nous avons obtenu du graphe de la figure 1.3 en retirant les sommets 1 et 6 ainsi que les arcs $(8, 9)$ et $(11, 4)$. Les TCCM du tableau 1.1 restent tous des TCCM valides pour ce graphe transformé.

Quelques observations intéressantes se dégagent de l'exemple 1.1.

1. Le sommet 4 appartient à tous les TCCM de G à cause de la boucle $(4, 4)$.
2. Au moins un sommet de chaque 2-circuit appartient à tous les TCCM de G .
3. Même si le sommet 10 est dans le circuit $c = (9, 11, 12, 10, 9)$, il n'appartient à aucun TCCM de G , car le circuit c contient un circuit minimal $(9, 11, 12, 9)$ qui ne contient pas le sommet 10.
4. Certains sommets et certains arcs peuvent être ignorés lors de la recherche des TCCM de G . Par exemple, les sommets 1 et 6 peuvent être ignorés car il est certain qu'aucun circuit ne passe par ces deux sommets. De même, aucun circuit ne passe par l'arc $(8, 9)$, nous pouvons donc l'ignorer. Par conséquent, certains sommets et arcs peuvent être retirés du graphe G sans affecter l'optimalité des TCCM du nouveau graphe.

1.2 Réductions

Comme nous venons de le discuter à la section précédente, dans certains cas, nous pouvons réduire la taille d'un graphe G par le retrait de certains sommets et de certains arcs, sans pour autant affecter l'optimalité des TCCM. Autrement dit, étant donné un graphe orienté G , nous nous posons la question suivante. Existe-t-il des *transformations* de graphe permettant de réduire G en un nouveau graphe G' de telle sorte que $\text{TCCM}(G')$ soit égal à $\text{TCCM}(G)$ ou, à tout le moins, qu'il soit possible de reconstruire un TCCM de G à partir d'un TCCM de G' ? Voir par exemple la figure 1.4 où nous avons repris le graphe de la figure 1.3 auquel nous avons retiré certains sommets et arcs tout en gardant le même ensemble de transversaux de circuits de cardinalité minimale.

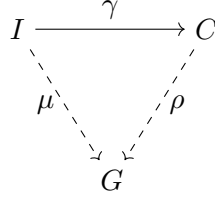
Il est donc possible d'utiliser un ensemble de *transformations* grâce auxquelles la taille du graphe à l'étude peut être réduite, avec la garantie que l'ensemble des TCCM du nouveau graphe *réduit* soit exactement le même ou un sous-ensemble de celui du graphe initial. De manière générale, étant donnés deux graphes orientés G et G' , nous nous intéressons aux transformations telles que $G' \prec G$ et qui nous garantissent qu'au moins un TCCM dans G peut être construit à partir d'un TCCM dans le graphe transformé G' en temps polynomial. Nous entendons par *temps polynomial* le fait qu'il existe un algorithme avec une complexité polynomiale, qui prend en paramètre G' , un TCCM dans G' et l'ensemble des transformations utilisées pour arriver à G' , et qui retourne un TCCM dans G . Nous appelons ces transformations des *réductions* de graphes orientés. Bien qu'une définition formelle d'une transformation de graphes existe (Ehrig *et al.*, 2010) et est introduite au chapitre 4, dans un premier temps, nous utilisons une version allégée et suffisante pour les premiers résultats présentés dans cette thèse.

Pour introduire la définition de réduction, nous détaillons d'abord ce que fait une réduction en général. Une réduction agit sur un ou plusieurs sommets et sur un ou plusieurs arcs d'un graphe sous certaines conditions que ce graphe, ces sommets ou ces arcs doivent vérifier. La réduction va supprimer des sommets ou des arcs et dans certains cas, elle va créer des arcs. Le but étant de toujours de réduire la taille d'un graphe ou la taille de son ensemble d'arcs, afin de simplifier la recherche d'un TCCM. Une réduction doit donc satisfaire une ou plusieurs *préconditions* ou *conditions d'application* et si un graphe G les vérifie, la réduction va transformer, localement, le graphe G en un graphe G' en supprimant un ou plusieurs sommets et arcs, et éventuellement en ajoutant des arcs.

Avant de définir ce qu'est une réduction, nous introduisons la définition d'une *condition d'application*. Cette définition est inspirée de la définition d'une *condition d'application positive* utilisée dans les systèmes de réécriture et les transformations de graphes (Ehrig *et al.*, 2010). Nous préférons simplifier le formalisme original et mettre de côté certaines notions (notamment, les notions de *production*, de *collage* et de *somme amalgamée*) pour aller à l'essentiel dont nous avons besoin dans le cadre de cette thèse.

Définition 1.3 (Condition d'application) Soient les deux graphes orientés I et C .

Une condition d'application sur les graphes I et C , est un monomorphisme de graphes $\gamma : I \longrightarrow C$. Un graphe orienté G satisfait à la condition d'application γ , s'il existe deux monomorphismes $\mu : I \longrightarrow G$ et $\rho : C \longrightarrow G$, tels que $\rho \circ \gamma(I) = \mu(I)$



Dans ce cas, nous notons $\overset{G}{\mu} \models \gamma$ pour indiquer que G satisfait à la condition d'application γ au travers du monomorphisme μ .

Remarque 1.2 Étant donnée une condition d'application γ , notons que pour le même graphe G nous pouvons trouver plusieurs paires de monomorphismes μ et ρ de telle sorte que $\overset{G}{\mu} \models \gamma$. Ainsi, la condition $\rho \circ \gamma(I) = \mu(I)$ nous garantit que $\mu(I)$ est un sous-graphe de $\rho(C)$ dans G .

Les conditions d'application peuvent être manipuler comme des propositions logiques, il est donc intéressant d'étendre les définitions des opérateurs logiques classique aux conditions d'application.

Définition 1.4 (Opérateurs de conditions d'application) Soient G un graphe orienté, $\gamma_1 : I_1 \longrightarrow C_1$ et $\gamma_2 : I_2 \longrightarrow C_2$ deux conditions d'application. Nous adaptons les opérations logiques de négation ($\neg$), de disjonction ($\vee$) et de conjonction ($\wedge$) pour les conditions d'application de manière suivante.

Négation. Nous disons que le graphe G ne satisfait pas la condition d'application γ_1 au travers du monomorphisme μ et nous écrivons $\overset{G}{\mu} \models \neg\gamma_1$, s'il n'existe aucun monomorphisme $\rho : C_1 \longrightarrow G$ tel que $\rho \circ \gamma_1(I_1) = \mu(I_1)$.

Dans cas nous notons $\overset{G}{\mu} \models \neg\gamma_1$ par $\overset{G}{\mu} \not\models \gamma_1$. Nous utilisons cette dernière notation quand elle permet d'alléger l'expression d'une condition d'application complexe.

Disjonction. Nous disons que le graphe G satisfait l'une des deux conditions γ_1 au travers du monomorphisme μ_1 ou γ_2 au travers du monomorphisme μ_2 , et nous notons $\overset{G}{\mu_1} \models \gamma_1 \vee \overset{G}{\mu_2} \models \gamma_2$, s'il existe un monomorphisme $\rho : C_1 \longrightarrow G$ ou $\rho : C_2 \longrightarrow G$, tels que $\rho \circ \gamma_1(I_1) = \mu_1(I_1)$ ou $\rho \circ \gamma_2(I_2) = \mu_2(I_2)$.

Conjonction. Nous disons que le graphe G satisfait aux deux conditions γ_1 et γ_2 au travers des deux monomorphismes μ_1 et μ_2 respectivement et nous notons $\overset{G}{\mu_1} \models \gamma_1 \wedge \overset{G}{\mu_2} \models \gamma_2$, s'il existe deux monomorphismes $\rho_1 : C_1 \longrightarrow G$ et $\rho_2 : C_2 \longrightarrow G$, tels que $\rho_1 \circ \gamma_1(I_1) = \mu_1(I_1)$ et $\rho_2 \circ \gamma_2(I_2) = \mu_2(I_2)$.

Remarque 1.3 Nous apportons les précisions suivantes sur les opérateurs de la définition 1.4.

1. Dans une disjonction, il est possible que le graphe G satisfassent les deux conditions d'application γ_1 et γ_2 au travers des deux monomorphismes μ_1 et μ_2 respectivement. Pour cela, il doit exister deux monomorphismes $\rho_1 : C_1 \longrightarrow G$ et $\rho_2 : C_2 \longrightarrow G$, tels que $\rho_1 \circ \gamma_1(I_1) = \mu_1(I_1)$ et $\rho_2 \circ \gamma_1(I_2) = \mu_1(I_2)$.
2. Si les deux conditions γ_1 et γ_2 ont le même graphe de départ, c'est-à-dire $I_1 = I_2$, alors il est possible d'avoir un unique monomorphisme $\mu : I \longrightarrow G$ pour les deux conditions.
3. Une disjonction des deux conditions γ_1 au travers du monomorphisme μ_1 ou γ_2 au travers du monomorphisme μ_2 , n'est pas vérifiée si nous avons les deux négations $\overset{G}{\mu_1} \not\models \gamma_1$ et $\overset{G}{\mu_2} \not\models \gamma_2$ qui sont vérifiées.

De même, une conjonction des deux conditions γ_1 au travers du monomorphisme μ_1 et γ_2 au travers du monomorphisme μ_2 , n'est pas vérifiée si nous avons au moins l'une des deux négations $\overset{G}{\mu_1} \not\models \gamma_1$ ou $\overset{G}{\mu_2} \not\models \gamma_2$ qui est vérifiée.

Dans ce qui suit nous nous contenterons d'écrire $\overset{G}{\mu} \models \gamma$ pour indiquer que G satisfait à la condition γ au travers de μ ou $\overset{G}{\mu} \not\models \gamma$ pour indiquer que G ne satisfait pas à la condition γ au travers de μ .

L'exemple 1.2 présente des conditions d'application.

Exemple 1.2 Considérons les conditions d'application suivantes.

1. Pour $I = (\{u\}, \emptyset)$ et $C = (\{x\}, \{(x, x)\})$, soit la condition d'application $\lambda : I \longrightarrow C$ définie par $\gamma(u) = x$.
Cette condition d'application permet d'identifier des sommets de G avec une boucle.
2. Pour $I = (\{u\}, \emptyset)$ et $C_{i,j} = (\{p_1, \dots, p_i, x, s_1, \dots, s_j\}, \{(p_k, x), (x, s_l) \mid 1 \leq k \leq i \text{ et } 1 \leq l \leq j\})$ pour $i, j \in \mathbb{N}$ soit la condition d'application $\nu_{i,j} : I \longrightarrow C_{i,j}$ définie par $\nu_{i,j}(u) = x$.
Cette condition d'application permet d'identifier des sommets avec au moins i prédécesseurs et au moins j successeurs.
3. Pour $A = (\{u, v\}, \{(u, v)\})$ et $C_i = (\{x_1, x_2, \dots, x_i\}, \{(x_i, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{i-1}, x_i)\})$ où $i \geq 2$ un entier, soit la condition d'application $\gamma_i : A \longrightarrow C_i$ définie par $\gamma_i(u) = x_1$ et $\gamma_i(v) = x_2$ pour tout $i \geq 2$.
Cette condition d'application permet d'identifier des arcs qui appartiennent à un circuit de longueur i .

Considérons maintenant le graphe $G = (V, E)$ de la figure 1.5.

1. Nous avons $\frac{G}{\mu} \models \lambda$ avec les monomorphismes $\mu : I \longrightarrow G$ et $\rho : C \longrightarrow G$, définis par $\mu(u) = 4$ et $\rho(x) = 4$ respectivement. Nous avons bien $\rho \circ \lambda(u) = \mu(u) = 4$. Voir la figure 1.5 (a) pour une illustration.
2. Nous avons $\frac{G}{\mu_{1,1}} \models \nu_{1,1}$ avec les monomorphismes $\mu_{1,1} : I \longrightarrow G$ et $\rho_{1,1} : N_{1,1} \longrightarrow G$, définis ainsi, $\mu_{1,1}(u) = 0$ et

$\rho_{1,1}(p_1)$	$\rho_{1,1}(x)$	$\rho_{1,1}(s_1)$
2	0	1

Nous avons bien $\rho_{1,1} \circ \nu_{1,1}(u) = \mu_{1,1}(u) = 0$. Voir la figure 1.5 (a) pour une illustration. À noter qu'il y a un second monomorphisme $\rho'_{1,1} : N_{1,1} \longrightarrow G$, défini par

$\rho'_{1,1}(p_1)$	$\rho'_{1,1}(x)$	$\rho'_{1,1}(s_1)$
2	0	5

tel que $\frac{G}{\mu_{1,1}} \models \nu_{1,1}$.

Remarquons que le monomorphisme $\rho_{1,1}$ ne couvre pas tout le voisinage de $\mu_{1,1}(u)$. En effet, si un graphe G satisfait à la condition d'application $\nu_{1,1}$, alors G contient au moins un sommet avec, minimalement, 1 prédécesseur et 1 successeur. Si nous voulons identifier un sommet dans G avec exactement 1 prédécesseur et 1 successeur, ou plus généralement avec exactement i prédécesseurs et j successeurs, il faut ajouter des négations de deux conditions d'application. Ainsi, pour un graphe G et un monomorphisme $\mu_{i,j} : I \longrightarrow G$ tel que $\frac{G}{\mu_{i,j}} \models \nu_{i,j}$, il faut que

$$\left(\frac{G}{\mu_{i,j}} \models \nu_{i,j} \right) \wedge \left(\frac{G}{\mu_{i,j}} \not\models \nu_{i+1,j} \right) \wedge \left(\frac{G}{\mu_{i,j}} \not\models \nu_{i,j+1} \right)$$

Ce qui se traduit par,

- $\frac{G}{\mu_{i,j}} \models \nu_{i,j}$: le sommet $\mu_{i,j}(u)$ dans G a minimalement i prédécesseurs et j successeurs ;
- $\frac{G}{\mu_{i,j}} \not\models \nu_{i+1,j}$: le sommet $\mu_{i,j}(u)$ dans G ne peut pas avoir $i + 1$ prédécesseurs et j successeurs ;
- $\frac{G}{\mu_{i,j}} \not\models \nu_{i,j+1}$: le sommet $\mu_{i,j}(u)$ dans G ne peut pas avoir i prédécesseurs et $j + 1$ successeurs.

- La conjonction des trois conditions impose que le sommet $\mu_{i,j}(u)$ dans G ait exactement i pré-décesseurs et j successeurs.

Notons que nous utilisons le même monomorphisme $\mu_{i,j}$ pour garantir que les trois conditions s'appliquent sur le même sommet dans G .

3. Nous avons $\mu_2 \models \gamma_2$, $\mu_3 \models \gamma_3$, $\mu_4 \models \gamma_4$ et $\mu_5 \models \gamma_5$ avec les monomorphismes suivants.

- $\mu_2 : A \longrightarrow G$ et $\rho_2 : C_2 \longrightarrow G$ définis ainsi,

$\mu_2(u)$	$\mu_2(v)$	$\rho_2(x_1)$	$\rho_2(x_2)$
2	3	2	3

Nous avons bien $\rho_2 \circ \gamma_2(u) = \mu_2(u) = 2$ et $\rho_2 \circ \gamma_2(v) = \mu_2(v) = 3$, ce qui donne $\mu_2 \models \gamma_2$.

- $\mu_3 : A \longrightarrow G$ et $\rho_3 : C_3 \longrightarrow G$ définis ainsi,

$\mu_3(u)$	$\mu_3(v)$	$\rho_3(x_1)$	$\rho_3(x_2)$	$\rho_3(x_3)$
3	5	3	5	4

Nous avons bien $\rho_3 \circ \gamma_3(u) = \mu_3(u) = 3$ et $\rho_3 \circ \gamma_3(v) = \mu_3(v) = 5$, ce qui donne $\mu_3 \models \gamma_3$. Voir la figure 1.5 (b) pour une illustration.

- $\mu_4 : A \longrightarrow G$ et $\rho_4 : C_4 \longrightarrow G$ définis ainsi,

$\mu_4(u)$	$\mu_4(v)$	$\rho_4(x_1)$	$\rho_4(x_2)$	$\rho_4(x_3)$	$\rho_4(x_4)$
2	0	2	0	5	4

Nous avons bien $\rho_4 \circ \gamma_4(u) = \mu_4(u) = 2$ et $\rho_4 \circ \gamma_4(v) = \mu_4(v) = 0$, ce qui donne $\mu_4 \models \gamma_4$.

- $\mu_5 : A \longrightarrow G$ et $\rho_5 : C_5 \longrightarrow G$ définis ainsi,

$\mu_5(u)$	$\mu_5(v)$	$\rho_5(x_1)$	$\rho_5(x_2)$	$\rho_5(x_3)$	$\rho_5(x_4)$	$\rho_5(x_5)$
3	2	3	2	0	5	4

Nous avons bien $\rho_5 \circ \gamma_5(u) = \mu_5(u) = 3$ et $\rho_5 \circ \gamma_5(v) = \mu_5(v) = 2$, ce qui donne $\mu_5 \models \gamma_5$.

4. Nous avons $\mu_6 \not\models \gamma_6$. En effet, G ne contient aucun circuit de longueur 6, par conséquent, pour chaque monomorphisme $\mu_6 : A \longrightarrow G$ que nous pouvons trouver (il y en a exactement $|E|$), il n'existera

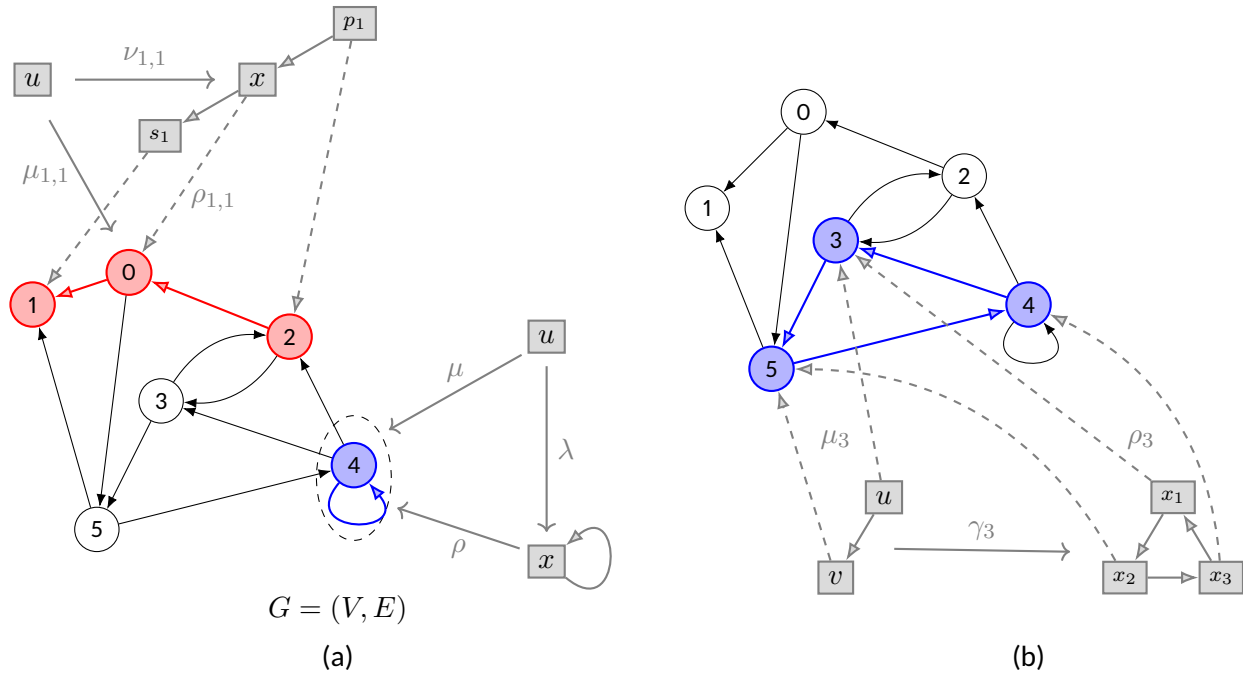


Figure 1.5 – Exemple de conditions d'application. Nous représentons avec la couleur grise les monomorphismes des conditions d'application, notamment pour distinguer les sommets et les arcs du graphe G des sommets et des arcs liés aux monomorphismes des conditions d'application. (a) Pour le sous-graphe en bleu de G (entouré par des pointillés) nous avons $\rho \circ \lambda(u) = \rho(x) = 4$ et $\mu(u) = 4$, par conséquent, nous avons $G_\mu \models \gamma$. De même, pour le sous-graphe en rouge de G , nous avons $\rho_{1,1} \circ \nu_{1,1}(u) = \rho_{1,1}(x) = 0$ et $\mu_{1,1}(u) = 0$, par conséquent, nous avons $G_{\mu_{1,1}} \models \gamma_{1,1}$. (b) De même, pour $\gamma_3(u) = x_1$ et $\gamma_3(v) = x_2$, nous avons $G_{\mu_3} \models \gamma_3$.

aucun monomorphisme $\rho_6 : C_6 \longrightarrow G$. Autrement dit, $G_{\mu_6} \not\models \gamma_6$.

En résumé, les graphes qui satisfont à la condition λ ont au moins un sommet avec une boucle et s'ils satisfont à une des conditions γ_i , alors ils contiennent au moins un circuit de longueur i .

Pour un dernier exemple, considérons un arc (a, b) dans le graphe G et un monomorphisme $\mu : A \rightarrow G$ avec $\mu(u) = a$ et $\mu(v) = b$. Si nous avons $\bigwedge_{i \geq 2} \mu \not\models \gamma_i$, alors il n'y a aucun circuit qui passe par l'arc (a, b) . Nous disons alors que (a, b) est un arc acyclique dans G . Noter que nous utilisons le même monomorphisme μ pour n'importe quelle valeur $i \geq 2$, autrement dit, nous nous assurons que c'est toujours le même arc dans G qui est considéré.

Nous avons à présent tout ce dont nous avons besoin pour introduire une définition de ce que nous considérons comme une réduction de graphes.

Définition 1.5 (Réduction de graphe) Une réduction de graphe R est constituée de,

1. une ou plusieurs conditions d'application,
2. une action de réduction qui consiste en la suppression d'un ou plusieurs sommets ou arcs, et l'ajout d'un ou plusieurs arcs (à condition qu'au moins un sommet ait été retiré au préalable), de telle sorte que si un graphe $G = (V, E)$ est réduit à un graphe $G' = (V', E')$ par R , alors $G' \prec G$.

La réduction R est applicable sur un graphe G si G satisfait à toutes les conditions d'application de R .

Remarque 1.4 Étant donnée une réduction R avec la condition d'application définie sur les deux graphes $I = (V_I, E_I)$ et $C = (V_C, E_C)$ et le monomorphisme $\gamma : I \rightarrow C$, les deux graphes I et C d'une condition d'application peuvent être interprétés de la manière suivante.

- I est le graphe d'intérêt, c'est-à-dire l'ensemble des sommets et arcs sur lesquels la réduction agit directement.
- C est le contexte dans lequel nous aimerions retrouver les sommets et les arcs de I dans un graphe quelconque G pour que R soit applicable.

Pour un graphe donné $G = (V, E)$, l'existence des monomorphismes μ et ρ se traduit ainsi.

- μ nous assure que les sommets et arcs d'intérêts de I se retrouvent bien dans G . Autrement dit, si le monomorphisme μ existe, alors nous sommes sûrs qu'il existe au moins un sous-graphe $H = (V_H, E_H)$ de G qui est isomorphe à I . À noter que H est l'image de I par μ .

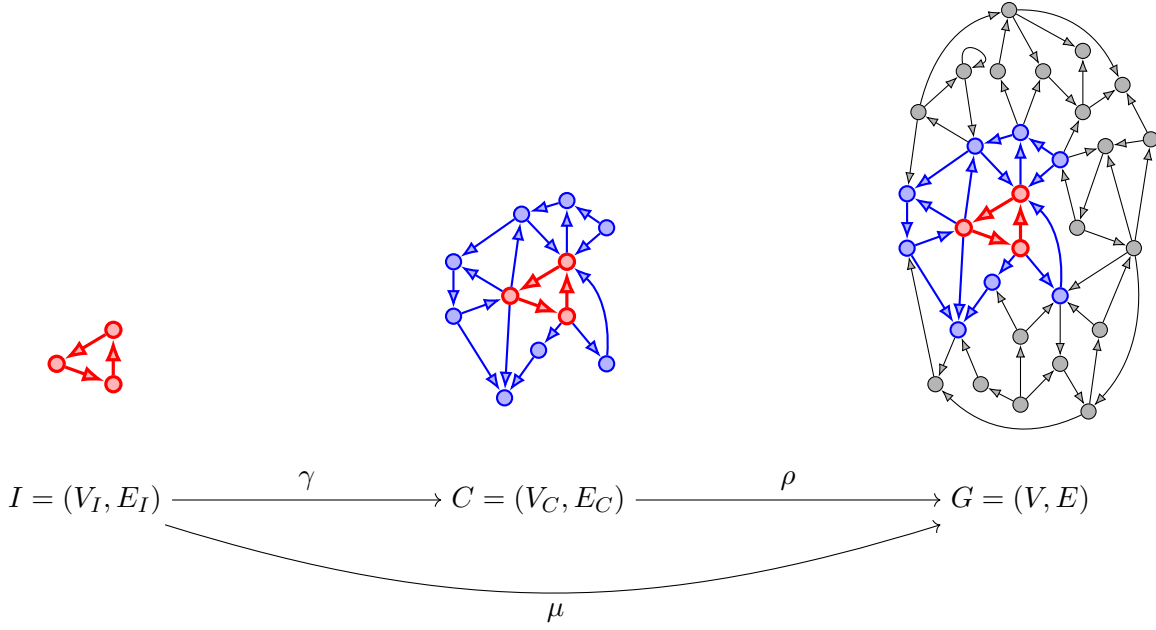


Figure 1.6 – Interprétation d’une condition d’application. Soit la condition d’application γ avec les deux graphes I et C . Le graphe G satisfait la condition γ grâce aux monomorphismes μ et ρ , par conséquent, nous avons $\mu^G \models \gamma$. Cela nous assure que G contient un sous-graphe isomorphe à C qui contient un sous-graphe isomorphe à I .

— ρ nous assure que G contient un sous-graphe isomorphe au graphe contexte C .

À présent, le monomorphisme γ et la condition $\rho \circ \gamma(I) = \mu(I)$ nous garantissent que G contient un sous-graphe isomorphe au graphe d’intérêt I qui sera inclus dans un plus grand sous-graphe de G qui sera lui isomorphe au graphe contexte C . Voir la figure 1.6 pour une illustration. Si la négation d’une condition d’application est vraie sur un graphe G , alors nous ne pouvons pas trouver un sous-graphe de G isomorphe à I contenu dans un sous-graphe isomorphe à C .

Exemple 1.3 Considérons, par exemple, la réduction *LOOP* défini par Levy et Low (Levy et Low, 1988) qui supprime tout sommet ayant une boucle et l’ajoute au transversal de circuits de cardinalité minimale. Nous pouvons l’exprimer ainsi.

- La condition d’application λ avec le monomorphisme $\lambda : I \longrightarrow B$ défini ainsi $\lambda(u) = x$, où $I = (\{u\}, \emptyset)$ et $B = (\{x\}, \{(x, x)\})$.
- Pour un graphe $G = (V, E)$, s’il existe deux monomorphismes $\mu : I \longrightarrow G$ et $\rho : B \longrightarrow G$ tel que $\rho \circ \lambda(u) = \mu(u)$, alors l’action de réduction consiste en la réduction du graphe G en $G - \mu(u)$.

La figure 1.7 montre un exemple d’application complet de la réduction *LOOP*.

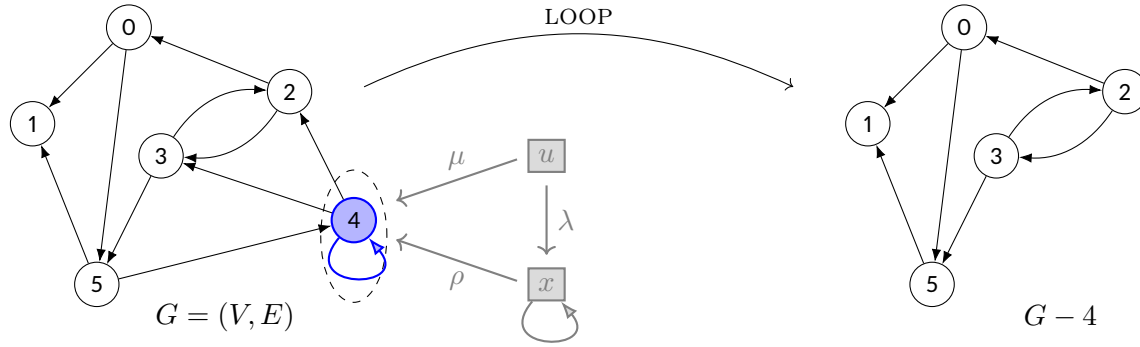


Figure 1.7 – Exemple de réduction. La réduction LOOP de Levy et Low (Levy et Low, 1988) appliquée au graphe G .

1.3 Propriété de finitude Church-Rosser

Une autre manière de voir les réductions est de les considérer comme des relations binaires sur l'ensemble de tous les graphes orientés, que nous notons $\mathcal{G}$. Plus précisément, une réduction R peut être vue comme une relation $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G}$. Ainsi, pour $G, G' \in \mathcal{G}$, si nous pouvons réduire G à G' avec la réduction R , alors nous disons que $(G, G') \in \mathcal{R}$. Autrement dit,

$$\mathcal{R} = \{(G, G') \in \mathcal{G} \mid G \text{ est réduit à } G' \text{ par la réduction } R\}$$

Pour une relation de réduction donnée $\mathcal{R}$, nous disons que $G \in \mathcal{G}$ est $\mathcal{R}$ -irréductible (ou simplement irréductible lorsque le contexte est clair) s'il n'existe pas de $G' \in \mathcal{G}$ tel que $(G, G') \in \mathcal{R}$.

Maintenant, étant donné un graphe orienté $G \in \mathcal{G}$, nous souhaitons réduire G autant que possible en utilisant la procédure suivante :

1. S'il n'existe pas de G' tel que $(G, G') \in \mathcal{R}$, alors arrêter.
2. Sinon, choisir n'importe quel $G' \in \mathcal{G}$ tel que $(G, G') \in \mathcal{R}$.
3. Remplacer G par G' et répéter les étapes précédentes.

Cependant, il n'y a aucune garantie que le graphe orienté final soit unique, car il pourrait y avoir plusieurs candidats disponibles pour G' à l'étape (2). En effet, pour chaque réduction possible, nous pouvons avoir plusieurs sous-graphes de correspondance candidats pour l'application de la réduction R . Pour peu que nous ayons plusieurs réductions applicables sur plusieurs sous-graphes de correspondance dans un même graphe initial, a priori nous pouvons bifurquer vers plusieurs graphes irréductibles possibles.

Une propriété importante qui pourrait être satisfaite par un ensemble de réductions est la propriété de *finitude de Church-Rosser* (Church et Rosser, 1936). Lorsque cette propriété est vérifiée, l'ordre dans lequel une séquence de réductions est appliquée n'affecte pas le résultat final. Pour introduire formellement cette propriété, nous avons besoin de quelques définitions supplémentaires.

Soit $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ une relation binaire sur un ensemble $\mathcal{S}$ et écrivons $x\mathcal{R}y$ lorsque $(x, y) \in \mathcal{R}$. Nous avons les relations suivantes.

- La *fermeture réflexive* de $\mathcal{R}$, notée $\mathcal{R}^R$, est définie par $\mathcal{R}^R = \mathcal{R} \cup \{(x, x) \mid x \in \mathcal{S}\}$.
- La *fermeture transitive* de $\mathcal{R}$, notée $\mathcal{R}^T$, est définie par $\mathcal{R}^T = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}^i$ où $\mathcal{R}^i$ est la composition de $\mathcal{R}$ avec elle-même i fois.
- La *fermeture réflexive-transitive* de $\mathcal{R}$, notée $\mathcal{R}^{RT}$, est définie par $\mathcal{R}^{RT} = \mathcal{R}^R \cup \mathcal{R}^T$.
- La *complétion* de $\mathcal{R}$, notée $\mathcal{R}^C$, est définie par $\mathcal{R}^C = \{(x, y) \in \mathcal{R}^{RT} \mid \text{il n'existe pas de } z \in \mathcal{S} \text{ tel que } (y, z) \in \mathcal{R}\}$.

Une paire $(\mathcal{S}, \mathcal{R})$ est dite *finie* si pour $x, y \in \mathcal{S}$, il existe une constante k telle que si $x\mathcal{R}^i y$, alors $i \leq k$.

Exemple 1.4 Considérons la relation $\mathcal{R} = \{(0, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$ sur l'ensemble $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Alors nous avons les relations suivantes.

- La *fermeture réflexive* de $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^R = \{(0, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.
- La *fermeture transitive* de $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^T = \{(0, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (0, 3), (0, 4), (1, 4), (2, 4)\}$.
- La *fermeture réflexive-transitive* de $\mathcal{R}$ est donc la réunion $\mathcal{R}^R \cup \mathcal{R}^T$.
- La *complétion* de $\mathcal{R}$ vaut donc $\mathcal{R}^C = \{(0, 4), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$.

La paire $(\mathcal{S}, \mathcal{R})$ est finie, car la plus longue composition que nous avons dans $\mathcal{R}$ est la suivante $(0, 1), (1, 3)$ et $(3, 4)$, donc $0\mathcal{R}^3 4$, par conséquent, pour $k = 3$, nous avons bien pour tout $x, y \in \mathcal{S}$, si $x\mathcal{R}^i y$, alors $i \leq 3$.

À noter que ce n'est pas parce que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$ sont des ensembles finis que ça implique nécessairement que la paire $(\mathcal{S}, \mathcal{R})$ est finie.

Par exemple, si nous considérons, toujours sur l'ensemble $\mathcal{S}$, la relation $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \cup \{(4, 0)\}$, alors la paire $(\mathcal{S}, \mathcal{R}_1)$ n'est plus finie. En effet, à cause du fait que nous pouvons partir de $0 \in \mathcal{S}$ et y revenir avec $\mathcal{R}_1$ par succession $(0, 1), (1, 3), (3, 4)$ et $(4, 0)$, nous pouvons avoir une composition $0\mathcal{R}_1^i 0$ aussi longue que

nous le désirons. En fait, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, nous avons $0 \mathcal{R}_1^{4i} 0$. Donc nous ne pouvons pas borner i par une constante k , ce qui implique que la paire $(S, \mathcal{R}_1)$ n'est pas finie.

Définition 1.6 (Propriété de finitude de Church-Rosser) Nous disons que $(S, \mathcal{R})$ a la propriété de finitude de Church-Rosser si $(S, \mathcal{R})$ est fini et que pour $x, y, z \in S$, si $(x, y) \in \mathcal{R}^C$ et $(x, z) \in \mathcal{R}^C$, alors $y = z$.

Ainsi la relation $\mathcal{R}$ de l'exemple 1.4 a la propriété de finitude de Church-Rosser. En effet, $\mathcal{R}$ est finie et $x, y, z \in S$, si $(x, y) \in \mathcal{R}^C$ et $(x, z) \in \mathcal{R}^C$, alors $y = z = 4$.

Le calcul de la finitude de la relation $\mathcal{R}$ de l'exemple 1.4 est assez simple. Cependant, il peut devenir très vite laborieux de calculer la complétion d'une relation $\mathcal{R}$ quelconque sur un ensemble S quelconque, notamment, sur l'ensemble $\mathcal{G}$ qui est infini. Aho et al. donnent un critère dans le théorème suivant qui caractérise la propriété de finitude de Church-Rosser (A. V. Aho et Ullman, 1972).

Théorème 1.7 (Aho, Sethi and Ullman (A. V. Aho et Ullman, 1972)) Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble S . Alors $(S, \mathcal{R})$ a la propriété de finitude de Church-Rosser si et seulement si $(S, \mathcal{R})$ est fini et, pour tout $x, y, z \in S$, les conditions $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{R}z$ impliquent qu'il existe $w \in S$ tel que $y\mathcal{R}^T w$ et $z\mathcal{R}^T w$.

La propriété de finitude de Church-Rosser a été également appelée *confluence* (Baader et Nipkow, 1998). Afin d'alléger le texte, nous utilisons également ce terme. Plus précisément, nous disons que la paire $(S, \mathcal{R})$ est *confluente* (ou simplement que $\mathcal{R}$ est *confluente*, lorsque l'ensemble S est clair) si et seulement si $(S, \mathcal{R})$ possède la propriété de finitude de Church-Rosser. En général nous travaillons avec un ensemble de relations $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n\}$ et pour étudier la confluence de ces relations, nous considérons leur réunion, la relation $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \dots \cup \mathcal{R}_n$ et nous démontrons que $(S, \mathcal{R})$ est confluente, ce qui est équivalent à démontrer que l'ensemble $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n\}$ est confluent. Grâce au théorème 1.7 l'étude de la confluence d'une telle relation $\mathcal{R}$, revient à étudier sa finitude et à étudier ce que nous appelons la *confluence locale* deux à deux des relations $\mathcal{R}_i$ pour $1 \leq i \leq n$ (Baader et Nipkow, 1998). C'est-à-dire que pour démontrer que pour tout $x, y, z \in S$, les conditions $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{R}z$ impliquent qu'il existe $w \in S$ tel que $y\mathcal{R}^T w$ et $z\mathcal{R}^T w$, nous considérons tous les cas possibles suivants $x\mathcal{R}_i y$ et $x\mathcal{R}_j z$ avec $1 \leq i, j \leq n$, et nous démontrons à chaque fois qu'il existe $w \in S$ tel que $y\mathcal{R}^T w$ et $z\mathcal{R}^T w$.

Il est à noter que lors de la démonstration de la confluence d'un ensemble de relations, nous pouvons exclure les relations incluses dans d'autres relations. Ainsi, par exemple si $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{R}_j$ et $\mathcal{R}'$ est confluente, avec $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_{i-1}, \mathcal{R}_{i+1}, \dots, \mathcal{R}_j, \dots, \mathcal{R}_n$, alors $\mathcal{R}' \cup \mathcal{R}_i$ est également confluente. La proposition suivante formalise cette propriété.

Proposition 1.8 Soit S un ensemble et $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$ trois relations sur S . Si $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ et la paire $(S, \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3)$ est confluente, alors la paire $(S, \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3)$ est également confluente.

Preuve. La preuve est directe du moment que $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, alors $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3$. Par conséquent, si $(S, \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3)$ est confluente, alors $(S, \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3)$ est également confluente. $\square$

1.3.1 Diagrammes commutatifs

Un formalisme pratique que nous utiliserons pour prouver qu'un ensemble de relations est confluente est fourni par les *diagrammes commutatifs*. Un diagramme commutatif est une représentation graphique dirigée de morphismes, conçue pour visualiser l'égalité entre deux ou plusieurs séquences de compositions partant du même sommet A et se terminant au même sommet B . Nous utiliserons ces diagrammes avec la convention que les flèches continues représentent des fonctions données comme hypothèses et les flèches pointillées représentent des affirmations que leurs morphismes étiquetées existent et établissent une égalité entre deux chemins. La forme la plus simple de diagramme commutatif est constituée de trois sommets représentant des ensembles A, B, C et trois morphismes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ formant un triangle comme illustré dans le diagramme 1.1.

Le diagramme 1.1 représente l'affirmation que si les deux morphismes $\gamma_1 : A \longrightarrow B, \gamma_2 : A \longrightarrow C$ existent, alors il existe un troisième morphisme $\gamma_3 : B \longrightarrow C$ telle que $\gamma_1(A) = (\gamma_3 \circ \gamma_2)(A)$.

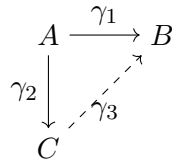


Diagramme 1.1 – Exemple de diagramme commutatif.

CHAPITRE 2

RÉDUCTIONS CONFLUENTES

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un ensemble de réductions de graphes issues de la littérature et, en particulier, à l'établissement de leur confluence. Ce chapitre, en partie adapté de notre publication à GAS-Com 2024 *Random Generation of Combinatorial Structures Polyominoes and Tilings* (Abdenbi et al., 2024a), rassemble les définitions originales de ces réductions puis les reformule dans le formalisme présenté au chapitre 1. L'objectif est double : d'une part, clarifier la nature exacte des réductions considérées ; d'autre part, disposer d'un cadre conceptuel unifié permettant d'étudier rigoureusement leur interaction. Dans cette perspective, nous utilisons indifféremment les définitions formelles et leurs formulations textuelles plus intuitives, afin d'allier précision mathématique et lisibilité. Ce chapitre établit ainsi les fondements confluents sur lesquels reposera l'ensemble des développements ultérieurs.

2.1 Réductions

Nous énonçons dans cette section un ensemble de réductions introduites par plusieurs auteurs (Levy et Low, 1988; Lin et Jou, 2000; Lemaic, 2008; Kiesel et Schidler, 2022). À noter que Levy et Low ont étudié la confluence des réductions qu'ils avaient proposées (Levy et Low, 1988) et Lemaic a étudié la confluence d'un sous-ensemble des réductions qu'il avait proposé dans sa thèse (Lemaic, 2008).

2.1.1 Levy et Low

Un premier ensemble de 5 réductions confluents a été introduit par Levy et Low (Levy et Low, 1988).

Remarque 2.1 Dans leur travaux, Levy et Low utilisent l'appellation *contraction de graphes*. Nous n'utilisons pas cette terminologie car elle peut prêter à confusion et est en conflit avec la notion de contraction d'arcs qui consiste à fusionner les deux extrémités d'un arc pour former un unique sommet qui hérite du voisinage des deux sommets fusionnés (Gross J.L., 2018).

Voici les définitions originales des 5 réductions de Levy et Low. Pour un graphe $G = (V, E)$ et un sommet $x \in V$, nous avons les réductions suivantes.

LOOP si $(x, x) \in E$, alors cette réduction supprime le sommet x et ses arcs incidents. Le sommet est ajouté au transversal de circuits de cardinalité minimale.

IN0 si $N_G^-(x) = \emptyset$, alors cette réduction supprime le sommet x et ses arcs incidents.

OUT0 si $N_G^+(x) = \emptyset$, alors cette réduction supprime le sommet x et ses arcs incidents.

IN1 si $(x, x) \notin E$, $N_G^+(x) \neq \emptyset$ et $|N_G^-(x)| = 1$, alors cette réduction contourne le sommet x , c'est-à-dire, que cette réduction réduit un graphe G à $G \circ x$.

OUT1 si $(x, x) \notin E$, $N_G^-(x) \neq \emptyset$ et $|N_G^+(x)| = 1$, alors cette réduction contourne le sommet x , c'est-à-dire, que cette réduction réduit un graphe G à $G \circ x$.

Voir la figure 2.1 pour des illustrations de ces réductions.

Nous soulignons les effets de ces réductions dans la recherche d'un élément de l'ensemble $\text{TCCM}(G)$ pour un graphe donné $G = (V, E)$. En particulier, la complexité temporelle de construction d'un TCCM en partant d'un élément de $\text{TCCM}(G')$ où G' est un graphe réduit de G avec l'une des réductions plus haut. Pour un graphe donné $G = (V, E)$ et un sommet $x \in V$. Nous avons les observations suivantes.

1. Toute boucle (x, x) étant un circuit de longueur 1, n'importe quel transversal de circuits de G doit obligatoirement contenir x . Ainsi, si G' est le graphe réduit de G par la réduction **LOOP** appliquée au sommet x , alors quelque soit $U \in \text{TCCM}(G')$ nous avons $U \cup \{x\} \in \text{TCCM}(G)$.
2. Si $N_G^-(x) = \emptyset$ ou $N_G^+(x) = \emptyset$, alors nous sommes certains qu'aucun circuit ne passe par le sommet x . Ainsi, si G' est le graphe réduit de G par la réduction **IN0** ou **OUT0** appliquée au sommet x , alors nous avons $\text{TCCM}(G) = \text{TCCM}(G')$.
3. Si le sommet x , sans boucle, n'a qu'un seul prédécesseur et un ou plusieurs successeurs ou qu'un seul successeur et un ou plusieurs prédécesseurs, alors tout circuit qui passe par x passera également par son unique prédécesseur ou son unique successeur. Ainsi, si G' est le graphe réduit de G par la réduction **IN1** ou **OUT1** appliquée au sommet x , alors nous avons $\text{TCCM}(G') \subseteq \text{TCCM}(G)$. En effet, il est possible que nous perdions des transversaux de circuits de cardinalité minimale quand nous réduisons G à G' , en particulier s'il existe $U \in \text{TCCM}(G)$ tel que $x \in U$. Si nous substituons le sommet x dans U par son unique prédécesseur ou son unique successeur, nous obtenons un transversal de circuits de cardinalité minimale dans G' .

À présent pour définir formellement les réductions de Levy et Low nous commençons par introduire les graphes et les monomorphismes suivants.

- $I = (\{u\}, \emptyset)$ le graphe constitué d'un sommet et d'aucun arc.

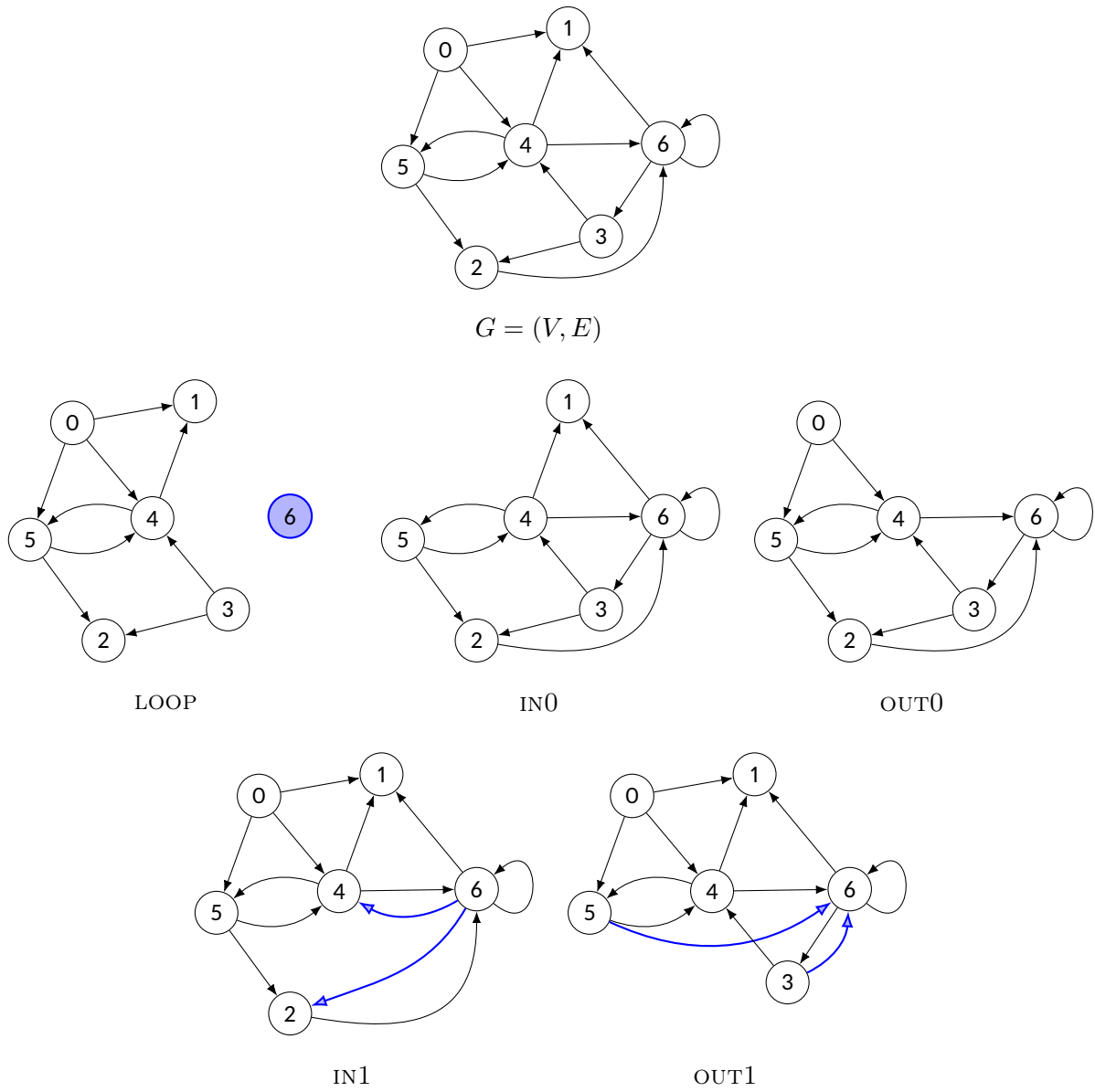


Figure 2.1 – Illustrations des réductions de Levy et Low. Soit le graphe $G = (V, E)$ illustré ci-haut. LOOP supprime le sommet 6 car $(6, 6) \in E$ et l'ajoute au transversal de circuits de cardinalité minimale. IN0 supprime le sommet 0 car $N_G^-(0) = \emptyset$. OUT0 supprime le sommet 1 car $N_G^+(1) = \emptyset$. IN1 contourne le sommet 3, car $(3, 3) \notin E$, $N_G^+(3) \neq \emptyset$ et $N_G^-(3) = \{6\}$. OUT1 contourne le sommet 2, car $(2, 2) \notin E$, $N_G^-(2) \neq \emptyset$ et $N_G^+(2) = \{6\}$. À noter que le contournement des sommets 3 et 2 par IN1 et OUT1 respectivement, supprime un sommet et crée de nouveaux arcs (en bleu) dans le graphe réduit.

- $B = (\{x\}, \{(x, x)\})$ le graphe boucle.
- $N_{i,j} = (\{p_1, \dots, p_i, x, s_1, \dots, s_j\}, \{(p_k, x), (x, s_l) \mid 1 \leq k \leq i \text{ et } 1 \leq l \leq j\})$ pour $i, j \in \mathbb{N}$ le graphe avec un sommet central x et son voisinage de i prédécesseurs et j successeurs.
- Le monomorphisme $\beta : I \longrightarrow B$ avec $\beta(u) = x$
- Le monomorphisme $v_{i,j} : I \longrightarrow N_{i,j}$ avec $v_{i,j}(u) = x$ et $i, j \in \mathbb{N}$

Ainsi les définitions des réductions de Levy et Low s'écrivent de la manière suivante dans le formalisme de la définition 1.5.

LOOP La condition d'application β . Soient un graphe $G = (V, E)$ et un monomorphisme $\mu : I \longrightarrow G$. Si $\mu \models \beta$, alors l'action de réduction de **LOOP** réduit G en $G - \mu(u)$. Nous ajoutons le sommet $\mu(u)$ de G au transversal de circuits de cardinalité minimale en construction.

IN0 La condition d'application $v_{1,0}$. Soient un graphe $G = (V, E)$ et un monomorphisme $\mu : I \longrightarrow G$. Si $\mu \not\models v_{1,0}$, alors l'action de réduction de **IN0** réduit G en $G - \mu(u)$.

OUT0 La condition d'application $v_{0,1}$. Soient un graphe $G = (V, E)$ et un monomorphisme $\mu : I \longrightarrow G$. Si $\mu \not\models v_{0,1}$, alors l'action de réduction de **OUT0** réduit G en $G - \mu(u)$.

IN1 Les conditions d'application β , $v_{1,1}$ et $v_{2,0}$. Soient un graphe $G = (V, E)$ et un monomorphisme $\mu : I \longrightarrow G$. Si $(\mu \not\models \beta) \wedge (\mu \models v_{1,1}) \wedge (\mu \not\models v_{2,0})$, alors l'action de réduction de **IN1** réduit G en $G \circ \mu(u)$.

OUT1 Les conditions d'application β , $v_{1,1}$ et $v_{0,2}$. Soient un graphe $G = (V, E)$ et un monomorphisme $\mu : I \longrightarrow G$. Si $(\mu \not\models \beta) \wedge (\mu \models v_{1,1}) \wedge (\mu \not\models v_{0,2})$, alors l'action de réduction de **OUT1** réduit G en $G \circ \mu(u)$.

Remarque 2.2 Soient $G = (V, E)$ et un sommet $x \in V$. Pour les réductions **IN0** et **IN1** (respectivement, **OUT0** et **OUT1**) nous ne nous intéressons pas au nombre exact de successeurs (respectivement de prédécesseurs) qu'un sommet x puisse avoir, mais seulement au fait qu'il doit avoir exactement 0 prédécesseur pour **IN0** et 1 prédécesseur pour **IN1** (respectivement, 0 successeur pour **OUT0** et 1 successeur pour **OUT1**). Nous détaillons ci-bas la description des conditions ensemblistes des définitions originales par les conditions d'application pour ces quatre réductions.

IN0 l'égalité $N_G^-(x) = \emptyset$ est équivalente à la condition $\mu \not\models v_{1,0}$ qui nous garantit, si elle est vraie, que le sommet $\mu(u)$ ne peut avoir ne serait-ce qu'un prédécesseur, peu importe le nombre de successeurs qu'il peut avoir.

OUT0 de même l'égalité $N_G^+(x) = \emptyset$ est équivalente à la condition $\mu \not\models v_{0,1}$ qui nous garantit, si elle est vraie, que le sommet $\mu(u)$ ne peut avoir ne serait-ce qu'un successeur, peu importe le nombre de prédécesseurs qu'il peut avoir.

IN1 les conditions $(x, x) \notin E$, $|N_G^-(x)| = 1$ et $N_G^+(x) \neq \emptyset$ sont équivalentes à la condition

$$(\mu \not\models \beta) \wedge (\mu \models v_{1,1}) \wedge (\mu \not\models v_{2,0})$$

qui nous garantit, si elle est vraie, que le sommet $\mu(u)$ n'a pas de boucle (grâce à $\mu \not\models \beta$) et a au moins un prédécesseur et un successeur (grâce à $\mu \models v_{1,1}$) mais pas deux prédécesseurs (grâce à $\mu \not\models v_{2,0}$).

OUT1 les conditions $(x, x) \notin E$, $|N_G^+(x)| = 1$ et $N_G^-(x) \neq \emptyset$ sont équivalentes à la condition

$$(\mu \not\models \beta) \wedge (\mu \models v_{1,1}) \wedge (\mu \not\models v_{0,2})$$

qui nous garantit, si elle est vraie, que le sommet $\mu(u)$ n'a pas de boucle (grâce à $\mu \not\models \beta$) et a au moins un prédécesseur et un successeur (grâce à $\mu \models v_{1,1}$) mais pas deux successeurs (grâce à $\mu \not\models v_{0,2}$).

2.1.2 Réductions de Lin et Jou

Dans leur article Lin et Jou ont exploité le fait que nous sommes certains que l'un des deux sommets constituant un 2-circuit fait partie de tout transversal de circuits (Lin et Jou, 2000). Ainsi, étant donné un graphe $G = (V, E)$, Lin et Jou ont travaillé sur des réductions avec des critères qui s'appliquent sur G ou sur $G^\rightarrow$. Ils ont ajouté 3 nouvelles réductions à celles de Levy et Low, avec des critères un peu plus coûteux à vérifier. À noter, qu'ils n'ont pas abordé l'étude de la confluence du nouvel ensemble de 8 réductions présentées plus bas, préférant proposer une heuristique dans l'ordre d'application des différentes réductions.

Ci-bas les définitions originales des 3 réductions (Lin et Jou, 2000). Pour un graphe $G = (V, E)$, un sommet $x \in V$ et un arc $(x, y) \in E$, nous avons les réductions suivantes.

PIE Cette réduction identifie et retire les arcs acycliques dans G ou dans $G^\rightarrow$, c'est-à-dire les arcs (x, y) tels qu'aucun circuit ne passe par eux.

CORE Cette réduction identifie le sommet x tel que $(x, x) \notin E$ et dont le voisinage et lui-même, $\{x\} \cup N_G(x)$, forment une diclique, puis retire les sommets du voisinage $N_G(x)$ et les ajoute au transversal

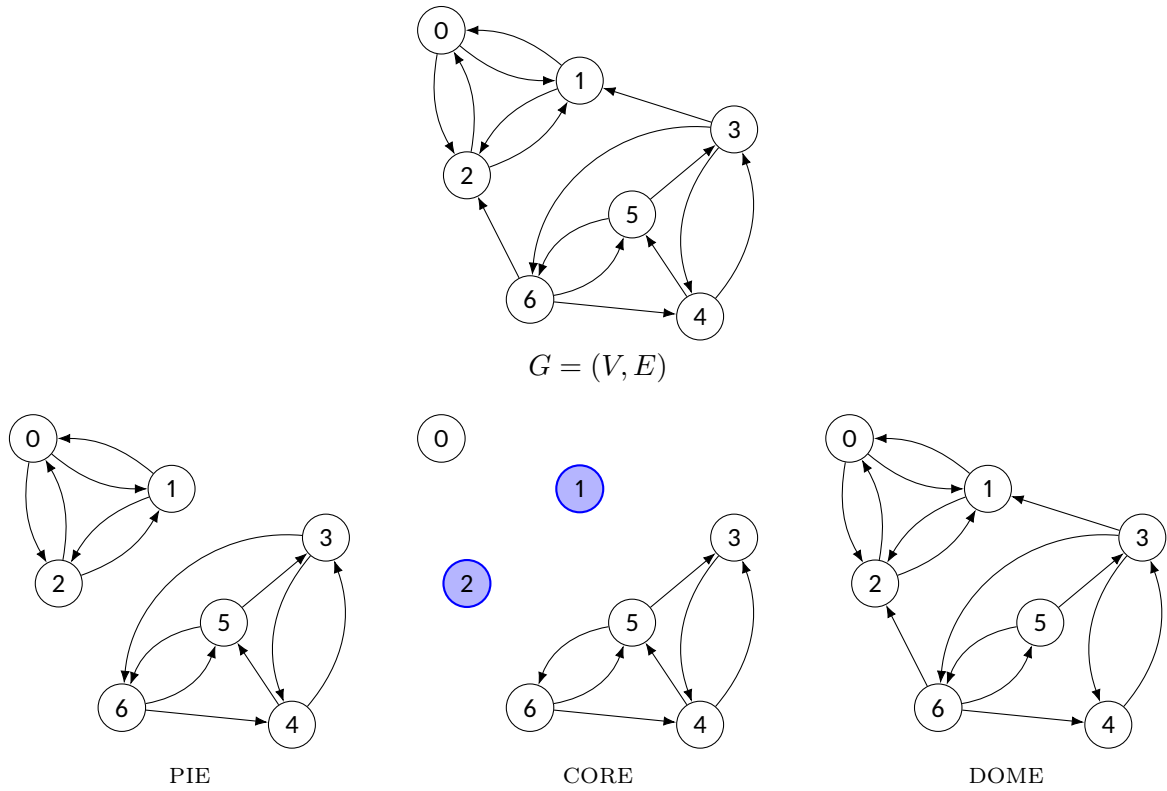


Figure 2.2 – Illustrations des réductions de Lin et Jou. Soit le graphe $G = (V, E)$ illustré ci-haut. Aucune des réductions de Levy et Low n'est applicable sur ce graphe G . PIE supprime les arcs $(3, 1)$ et $(6, 2)$ car aucun circuit ne passe par ces deux arcs. CORE supprime les sommets 1 et 2 et les ajoute au transversal de circuits de cardinalité minimale, car $N_G(0) = \{1, 2\}$ et les sommets $\{0, 1, 2\}$ forment une diclique. DOME supprime l'arc $(4, 5)$ car $N_{G \rightarrow}^-(4) = \{6\} \subseteq \{4, 6\} = N_G^-(5)$.

de circuits de cardinalité minimale en construction.

DOME Cette réduction identifie et retire les arcs (x, y) vérifiant $N_{G \rightarrow}^-(x) \subseteq N_G^-(y)$ ou $N_{G \rightarrow}^+(y) \subseteq N_G^+(x)$.

Voir la figure 2.2 pour des illustrations de ces réductions. Nous résumons brièvement les effets de ces trois réductions dans la recherche d'un transversal de circuits de cardinalité minimale et nous référons le lecteur à l'article de Lin et Jou pour plus de détails (Lin et Jou, 2000).

1. Un concept central des réductions de Lin et Jou est celui du 2-circuit. Si un circuit c de G contient 2 sommets qui forment un 2-circuit, alors retirer l'un de ces deux sommets suffira pour briser le circuit c et le 2-circuit. Ainsi, même si nous avons souvent le choix entre l'un des deux sommets, dans certains cas nous sommes certains que nous pouvons ignorer les autres sommets et arcs du circuit c et nous pouvons nous concentrer seulement sur les 2-circuits.
2. Il est facile de voir que si on retire tous les arcs acycliques de G par la réduction PIE alors le graphe

réduit G' a les mêmes transversaux de circuits que G . De même, nous pouvons refaire la même réduction sur le graphe $G^{\rightarrow}$.

3. Pour briser tous les circuits d'une diclique de taille n , il faut retirer au moins $n - 1$ sommets. Si nous nous assurons qu'un sommet et son voisinage forment une diclique dans G alors nous pouvons retirer le voisinage et l'ajouter au transversal de circuits de cardinalité minimale. Par contre, il est possible que nous perdions certains transversaux par ce choix, en particulier si nous avons deux sommets différents x_1 et x_2 tels que $\{x_1\} \cup N_G(x_1) = \{x_2\} \cup N_G(x_2)$ avec $\{x_1\} \cup N_G(x_1)$ une diclique. Dans ce cas, il faudra choisir entre l'un des sommets ce qui éliminera le transversal de circuits de cardinalité minimale qui contiendra l'autre sommet.
4. Si un circuit c passe par un arc (x, y) identifié par DOME, alors un arc qui raccourcit c de la forme (p_x, y) ou (x, s_y) où p_x est un prédécesseur de x et s_y est un successeur de y forme un circuit raccourci traversant tous les sommets de c sauf x . Ainsi, il est suffisant de briser le circuit raccourci plutôt que c , ce qui fait que nous pouvons retirer l'arc (x, y) tout en gardant au moins un transversal de circuit de cardinalité minimale dans le graphe réduit.

Pour définir formellement les réductions de Lin et Jou nous introduisons les graphes et les monomorphismes suivants. Pour $i, j \in \mathbb{N}$ nous avons.

- $I = (\{u\}, \emptyset)$ le graphe constitué d'un sommet et d'aucun arc.
- $A = (\{u, v\}, \{(u, v)\})$ le graphe constitué de deux sommets et d'un arc.
- $B = (\{x\}, \{(x, x)\})$ le graphe boucle.
- $N_{i,j} = (\{p_1, \dots, p_i, x, s_1, \dots, s_j\}, \{(p_k, x), (x, s_l) \mid 1 \leq k \leq i \text{ et } 1 \leq l \leq j\})$.
- $C_i = (\{x_1, x_2, \dots, x_i\}, \{(x_i, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{i-1}, x_i)\})$ le graphe circuit de longueur i avec $i \geq 2$.
- $D_i = (\{x, x_1, x_2, \dots, x_i\}, \{(a, b) \mid a, b \in \{x, x_1, x_2, \dots, x_i\}\})$ le graphe diclique de $i + 1$ sommets.
- $D_{i,j}^- = (P_i \cup \{x, y\}, EP_{i,j} \cup \{(x, y)\})$ pour i et j vérifiant $0 \leq j \leq i$, avec,
 - $P_i = \{p_1, p_2, \dots, p_i\}$ et $DP_j \subseteq P_i$ tel que $|DP_j| = j$,
 - $EP_{i,j} = \{(p, x), (p', y), (x, s) \mid p \in P_i \text{ et } p' \in P_i \setminus DP_j \text{ et } s \in DP_j\}$.

Dans ce graphe x a i prédécesseurs dont j qui forment des 2-circuits avec x et les autres prédécesseurs de x sont également des prédécesseurs de y .

- $D_{i,j}^+ = (S_i \cup \{x, y\}, ES_{i,j} \cup \{(x, y)\})$ pour i et j vérifiant $0 \leq j \leq i$, avec,
 - $S_i = \{s_1, s_2, \dots, s_i\}$ et $DS_j \subseteq S_i$ tel que $|DS_j| = j$,

- $ES_{i,j} = \{(y, s), (x, s'), (p, y) \mid s \in S_i \text{ et } s' \in S_i \setminus DS_j \text{ et } p \in DS_j\}$.

Dans ce graphe y a i successeurs dont j qui forment des 2-circuits avec y et les autres successeurs de y sont également des successeurs de x .

— Les monomorphismes suivants.

- $\beta : I \longrightarrow B$ avec $\beta(u) = x$.
- $v_{i,j} : I \longrightarrow N_{i,j}$ avec $v_{i,j}(u) = x$ et $i, j \in \mathbb{N}$.
- $\lambda_i : I \longrightarrow D_i$ avec $\lambda_i(u) = x$ et $i \in \mathbb{N}$.
- $\gamma_i : A \longrightarrow C_i$ avec $\gamma_i(u) = x_1$ et $\gamma_i(v) = x_2$, pour $i \geq 2$.
- $\delta_{i,j}^- : A \longrightarrow D_{i,j}^-$ avec $\delta_{i,j}^-(u) = x$ et $\delta_{i,j}^-(v) = y$.
- $\delta_{i,j}^+ : A \longrightarrow D_{i,j}^+$ avec $\delta_{i,j}^+(u) = x$ et $\delta_{i,j}^+(v) = y$.

PIE La disjonction des conditions d'application γ_i pour $i \geq 2$. Soient un graphe $G = (V, E)$ et un monomorphisme $\mu : A \longrightarrow G$. Si $\neg \left(\bigvee_{i \geq 2} \overset{G}{\mu} \models \gamma_i \right)$, alors l'action de réduction de **PIE** réduit G en $G - (\mu(u), \mu(v))$.

CORE Les deux conditions d'application β, λ_i et $v_{i,i}$. Soient un graphe $G = (V, E)$ et un monomorphisme $\mu : I \longrightarrow G$. Si $\neg (\overset{G}{\mu} \models \beta) \wedge (\overset{G}{\mu} \models \lambda_i) \wedge \neg (\overset{G}{\mu} \models v_{i,i+1}) \wedge \neg (\overset{G}{\mu} \models v_{i+1,i})$ pour un $i \geq 0$, alors l'action de réduction de **CORE** réduit G en $G - N_G(\mu(u))$.

DOME Les conditions d'application $\gamma_2, \delta_{i,j}^-$ et $\delta_{i,j}^+$. Soient un graphe $G = (V, E)$ et un monomorphisme $\mu : A \longrightarrow G$. Si

$$\overset{G}{\mu} \not\models \gamma_2 \wedge \left(\left(\overset{G}{\mu} \models \delta_{i,j}^- \wedge \overset{G}{\mu} \not\models \delta_{i+1,j}^- \wedge \overset{G}{\mu} \not\models \delta_{i,j+1}^- \right) \vee \left(\overset{G}{\mu} \models \delta_{i,j}^+ \wedge \overset{G}{\mu} \not\models \delta_{i+1,j}^+ \wedge \overset{G}{\mu} \not\models \delta_{i,j+1}^+ \right) \right)$$

pour certains $i, j \geq 0$, alors l'action de réduction de **DOME** réduit G en $G - (\mu(u), \mu(v))$.

Remarque 2.3 Soient $G = (V, E)$ et un sommet $u, v \in V$. Nous détaillons ci-bas la description des conditions des définitions originales de ces trois réductions par les conditions d'application correspondantes.

PIE supposons que μ identifie l'arc (u, v) . Le fait qu'aucun circuit dans G ou dans $G^\rightarrow$ ne doit passer par l'arc (u, v) pour qu'il soit identifié par **PIE** est équivalent à dire que nous ne pouvons pas plonger l'arc (u, v) , au travers de μ , dans circuit de longueur supérieure ou égale à 2, qui sera lui-même plongé dans $G^\rightarrow$. C'est-à-dire que pour tout $2 \leq i$ nous avons $\overset{G^\rightarrow}{\mu} \not\models \gamma_i$, autrement dit, $\neg (\overset{G^\rightarrow}{\mu} \models \gamma_i)$. Ainsi nous retrouvons la condition $\left(\bigwedge_{i \geq 2} \overset{G^\rightarrow}{\mu} \not\models \gamma_i \right) = \neg \left(\bigvee_{i \geq 2} \overset{G^\rightarrow}{\mu} \models \gamma_i \right)$. Notons que si (u, v) est dans

un 2-circuit, alors $\neg \left(\bigvee_{i \geq 2} G_{\mu}^{\rightarrow} \models \gamma_i \right)$ est fausse, car nous nous pouvons pas trouver de μ qui plonge (u, v) dans $G^{\rightarrow}$.

CORE supposons que μ identifie le sommet u . La condition $\neg (G_{\mu} \models \beta)$ nous garantit que le sommet identifié par μ n'a pas de boucle. Ensuite, la condition $(G_{\mu} \models \lambda_i)$ nous indique que le sommet identifié par μ est plongé dans une diclique d'une taille $i + 1$ donnée. Enfin, nous nous assurons que le sommet identifié par μ a exactement i successeurs et i prédécesseurs avec les deux conditions $\neg (G_{\mu} \models v_{i,i+1}) \wedge \neg (G_{\mu} \models v_{i+1,i})$ qui interdisent d'avoir un prédécesseur ou un successeur de plus. Ainsi, la conjonction de ces conditions nous indique que le sommet identifié par μ ne contient pas de boucle, qu'il a au moins i voisins avec lesquels il forment une diclique et c'est les seuls voisins qu'il a. Autrement dit, ce sommet et sont voisinage forment une diclique et est identifié par *CORE*.

DOMÉ supposons que μ identifie l'arc (u, v) . Nous nous assurons d'abord que l'arc (u, v) identifié par μ n'est pas dans un 2-circuit avec la condition $G_{\mu} \not\models \gamma_2$. Ensuite, la condition de la réduction originale $N_{G^{\rightarrow}}^{-}(u) \subseteq N_G^{-}(v)$, qui veut dire que les prédécesseurs de u qui ne forment pas des 2-circuits avec u sont également des prédécesseurs de v , est exprimée d'abord par $G_{\mu} \models \delta_{i,j}^{-}$ qui nous indique que u a au moins i prédécesseurs en communs avec v et au moins j prédécesseurs avec lesquels il forment des 2-circuits; suivi de la condition $G_{\mu} \not\models \delta_{i+1,j}^{-}$ qui nous indique que nous nous pouvons pas trouver $\delta_{i+1,j}^{-}$ qui augmente le nombre de prédécesseurs commun à u et v d'un sommet et qui ne forment pas un 2-circuit avec u , autrement dit, u a exactement i prédécesseurs dans $G^{\rightarrow}$; enfin, la condition $G_{\mu} \not\models \delta_{i,j+1}^{-}$ qui nous indique que nous nous pouvons pas augmenter le nombre de prédécesseurs de u qui forment des 2-circuits avec u . Ainsi, la conjonction de ces trois conditions nous indique que u a exactement i prédécesseurs en commun avec v dans $G^{\rightarrow}$ et j prédécesseurs dans $G^{\leftrightarrow}$. Enfin la condition $N_{G^{\rightarrow}}^{+}(y) \subseteq N_G^{+}(x)$ est exprimée d'une manière similaire avec la conjonction $(G_{\mu} \models \delta_{i,j}^{+} \wedge G_{\mu} \not\models \delta_{i+1,j}^{+} \wedge G_{\mu} \not\models \delta_{i,j+1}^{+})$. Par conséquent, si cette condition est vraie, alors (u, v) est bien identifié par *DOMÉ*.

Des démonstrations qui montrent que ces réductions préservent un transversal de circuits de cardinalité minimale ou permettent d'en construire un en temps polynomial à partir d'un transversal de circuits de cardinalité minimale du graphe réduit sont disponibles dans l'article de Lin et Jou (Lin et Jou, 2000).

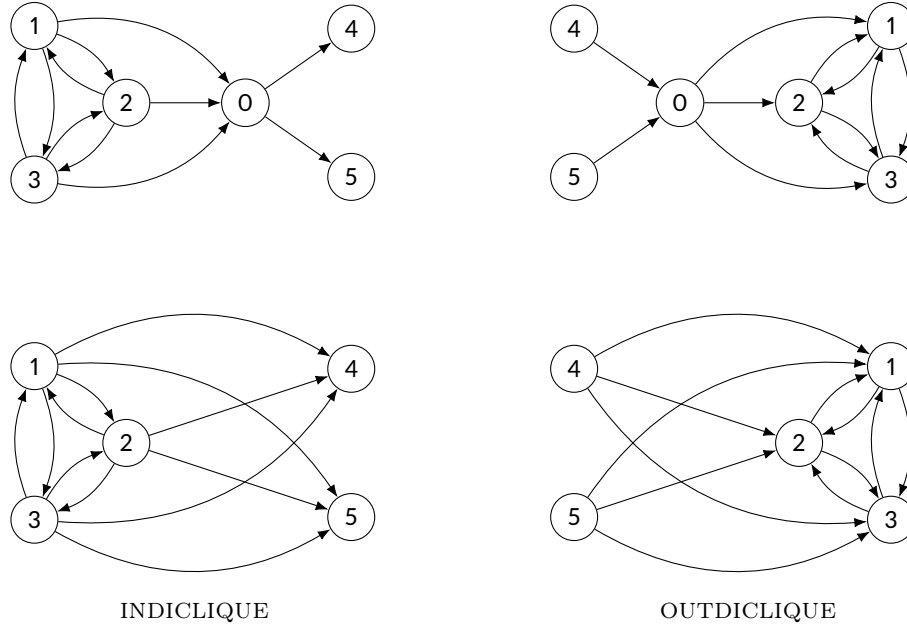


Figure 2.3 – Illustrations des réductions INDICLIQUE et OUTDICLIQUE de Lemaic. Lorsque les prédécesseurs du sommet 0 forment une diclique, la réduction INDICLIQUE contourne le sommet 0 et le retire. De même, lorsque les successeurs du sommet 0 forment une diclique, la réduction OUTDICLIQUE contourne le sommet 0 et le retire.

2.1.3 Réductions de Lemaic

Dans sa thèse (Lemaic, 2008) Lemaic a introduit deux réductions qui généralisent IN1 et OUT1 respectivement, ainsi que deux nouvelles réductions basées sur les dicliques. Il démontre également que ses réductions généralisent IN0, IN1, OUT0 et OUT1. Ci-bas les définitions originales des 4 réductions de Lemaic. Pour un graphe $G = (V, E)$ et un sommet $x \in V$, nous avons les réductions suivantes.

INDICLIQUE Cette réduction généralise la réduction IN1. Elle contourne un sommet x si $(x, x) \notin E$ et $N_G^-(x)$ est une diclique, autrement dit, G est réduit en $G \circ x$.

OUTDICLIQUE Cette réduction généralise la réduction OUT1. Elle contourne un sommet x si $(x, x) \notin E$ et $N_G^+(x)$ est une diclique, autrement dit, G est réduit en $G \circ x$.

DICLIQUE-2 Cette réduction contourne un sommet x . Si $(x, x) \notin E$ et $N_G(x) = N_1 \cup N_2$, avec $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, $G[N_1]$ et $G[N_2]$ sont des dicliques et $N_{G \rightarrow}(x) \subseteq N_1$, alors G est réduit en $G \circ x$.

DICLIQUE-3 De même, cette réduction contourne un sommet x . Si $(x, x) \notin E$, $N_{G \rightarrow}(x) = \emptyset$ et $N_G(x) = N_1 \cup N_2 \cup N_3$, avec $N_i \cap N_j = \emptyset$ pour $1 \leq i, j \leq 3$ et $G[N_1]$, $G[N_2]$ et $G[N_3]$ sont des dicliques, alors G est réduit en $G \circ x$.

Nous illustrons dans la figure 2.3 les réductions INDICLIQUE et OUTDICLIQUE. L'idée principale exploitée

par Lemaic est le fait que dans une diclique avec n sommets, il est nécessaire de retirer $n - 1$ sommets pour briser tous les 2-circuits de la diclique. Ainsi, étant donné un graphe G et un sommet x , si $N_G^-(x)$ ou $N_G^+(x)$ forme une diclique après que tous les 2-circuits soient brisés, alors il ne restera qu'un seul sommet comme prédécesseur ou successeur de x . Autrement dit, nous revenons à un graphe où la réduction IN1 ou OUT1 est applicable sur le sommet x . Et si nous considérons qu'un sommet seul est une diclique de taille 1, alors INDICLIQUE et OUTDICLIQUE généralisent IN1 et OUT1 respectivement.

Les deux réductions DICLIQUE-2 et DICLIQUE-3 se basent sur la même idée avec une légère variation. En effet, dans ces deux réductions, le voisinage du sommet x est formé de deux ou trois dicliques deux à deux disjointes. Ainsi, après que tous les 2-circuits des dicliques soient brisés, il ne reste que 2 ou 3 sommets selon la réduction considérée. Nous avons alors un voisinage du sommet x qui sera formé d'au plus 3 sommets. Dans cette configuration, ces sommets sont soit des prédécesseurs soit des successeurs de x , et donc IN0 ou OUT0 est applicable. Il y a soit exactement un prédécesseur soit un successeur sur les 2 ou 3 sommets du voisinage, ce qui fait que la réduction IN1 ou OUT1 est applicable.

Ceci étant dit, nous ne considérons pas les réductions DICLIQUE-2 et DICLIQUE-3 car elles s'appliquent très peu en pratique et ne sont pas confluentes avec les autres réductions vues précédemment, à savoir LOOP, INDICLIQUE et OUTDICLIQUE. Voir la figure 2.4 pour un contre-exemple présenté par Lemaic (Lemaic, 2008).

À présent, pour définir formellement les réductions INDICLIQUE et OUTDICLIQUE de Lemaic, nous introduisons les graphes et les monomorphismes suivants. Pour $i, j \in \mathbb{N}$ nous avons.

- $I = (\{u\}, \emptyset)$ le graphe constitué d'un sommet et d'aucun arc.
- $B = (\{x\}, \{(x, x)\})$ le graphe boucle.
- $N_{i,j} = (\{p_1, \dots, p_i, x, s_1, \dots, s_j\}, \{(p_k, x), (x, s_l) \mid 1 \leq k \leq i \text{ et } 1 \leq l \leq j\})$.
- $P_i = (\{p_1, \dots, p_i, x, s\}, \{(p_k, p_l), (p_k, x), (x, s) \mid 1 \leq k \neq l \leq i\})$.
- $S_i = (\{p, x, s_1, \dots, s_i\}, \{(p, x), (x, s_k), (s_k, s_l) \mid 1 \leq k \neq l \leq i\})$.
- Les monomorphismes suivants.
 - $\beta : I \longrightarrow B$ avec $\beta(u) = x$.
 - $v_{i,j} : I \longrightarrow N_{i,j}$ avec $v_{i,j}(u) = x$.
 - $\gamma_i : I \longrightarrow P_i$ avec $\gamma_i(u) = x$.
 - $\sigma_i : I \longrightarrow S_i$ avec $\sigma_i(u) = x$.

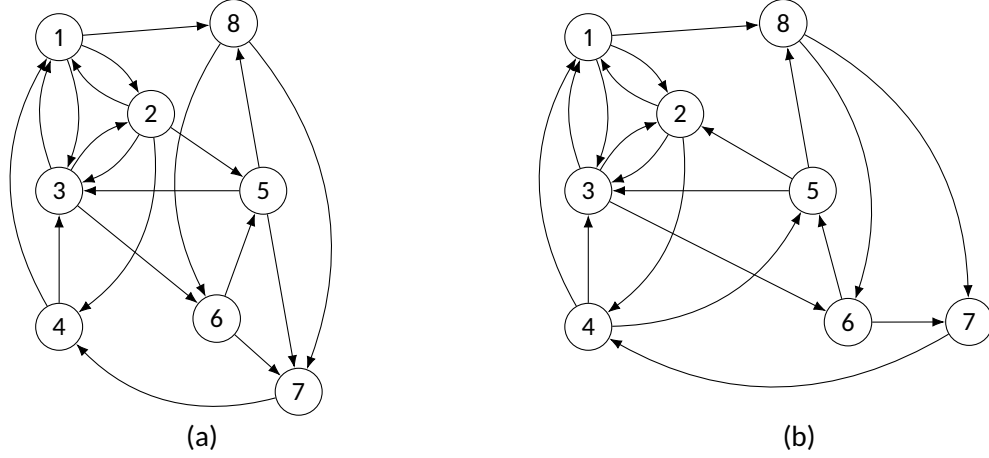


Figure 2.4 – Contre-exemples de la confluence de DICLIQUE-2 et DICLIQUE-3. Soient les deux graphes ci-haut. (a) Seuls DICLIQUE-2(4) et OUTDICLIQUE(7) sont applicables avec les dicliques correspondants $\{1, 2, 3\}$ et $\{7\}$ formant l'ensemble $N_G(4)$. Si nous appliquons DICLIQUE-2(4), alors OUTDICLIQUE(7) n'est plus applicable et aucune autre réduction n'est possible. (b) Seuls DICLIQUE-3(4) et OUTDICLIQUE(7) sont applicables avec les dicliques correspondants $\{1, 2, 3\}$, $\{5\}$ et $\{7\}$ formant l'ensemble $N_G(4)$. Si nous appliquons DICLIQUE-3(4), alors OUTDICLIQUE(7) n'est plus applicable et aucune autre réduction n'est possible.

INDICLIQUE Les conditions d'application β , γ_i et $v_{i,j}$. Soient un graphe $G = (V, E)$ et un monomorphisme $\mu : I \rightarrow G$. Si $\mu \not\models \beta \wedge \mu \models \gamma_i \wedge \mu \not\models v_{i+1,0}$, alors l'action de réduction de INDICLIQUE réduit G en $G \circ \mu(u)$.

OUTDICLIQUE Les conditions d'application β , σ_i et $v_{i,j}$. Soient un graphe $G = (V, E)$ et un monomorphisme $\mu : I \rightarrow G$. Si $\mu \not\models \beta \wedge \mu \models \sigma_i \wedge \mu \not\models v_{0,i+1}$, alors l'action de réduction de OUTDICLIQUE réduit G en $G \circ \mu(u)$.

Remarque 2.4 Soient $G = (V, E)$ et un sommet $u, v \in V$. Nous détaillons ci-bas la description des conditions des définitions originales de ces trois réductions par les conditions d'application correspondantes.

INDICLIQUE supposons que μ identifie le sommet u . La condition $\mu \not\models \beta$ nous garantit que u n'a pas de boucle. Ensuite, la condition $\mu \models \gamma_i$ nous indique que u a au moins i prédécesseurs qui forment un diclique et au moins un successeur. Enfin, la condition $\mu \not\models v_{i+1,0}$ nous indique que u ne peut pas avoir plus de i prédécesseurs. Notons que le fait que nous ayons $j = 0$ dans $\mu \not\models v_{i+1,0}$ nous indique que u a au moins un successeur, en effet, sans la négation, 0 successeur est autorisé. Ainsi, si la conjonction de ces trois conditions est vraie alors INDICLIQUE est applicable sur u .

OUTDICLIQUE ce cas est symétrique et est exprimé d'une manière similaire.

2.1.4 Autres réductions

D'autres réductions existent dont les critères d'applicabilité vont de simples conditions sur un sommet et son voisinage (Balasubramanian *et al.*, 1998), des conditions sous forme d'algorithmes avec une complexité quadratique (Xiao et Nagamochi, 2013; Kiesel et Schidler, 2022), à des conditions prises d'autres problèmes comme, le problème de couverture par sommets (Karp, 1972), adaptées aux graphes orientés et au problème du transversal de circuits (Kiesel et Schidler, 2022; Angrick *et al.*, 2023). Dans ce qui suit, nous citons et énonçons davantage de réductions et nous considérons certaines pour étudier leur confluence et nous motivons les raisons pour lesquelles nous écartons les autres.

Plusieurs de ces réductions sont adaptées du problème de couverture par sommets, dont l'énoncé est le suivant.

Problème 5 (Problème de couverture par sommets)

Instance. *Un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier $k \in \mathbb{N}^*$.*

Question. *Est-ce qu'il existe un ensemble $T \subseteq V$ de cardinalité k tel que chaque arête de E a au moins une de ses extrémités dans T ?*

Le problème 5 est NP-complet (Karp, 1972) et l'une des approches utilisée pour trouver des algorithmes exacts de résolution est l'utilisation de réductions de graphes (Balasubramanian *et al.*, 1998; Fomin *et al.*, 2009; Xiao et Nagamochi, 2013; Fellows *et al.*, 2018). Certaines de ces réductions peuvent être réécrites pour être appliquées au problème du transversal de circuits de cardinalité minimale (Kiesel et Schidler, 2022; Angrick *et al.*, 2023). En effet, pour un graphe non-orienté $G = (V, E)$, si on considère le graphe orienté obtenu de G en substituant chaque arête $\{x, y\} \in E$ par deux arcs (x, y) et (y, x) . Dans ce cas, nous pouvons transférer les réductions du problème de couverture par sommets en des réductions du problème de transversal de circuits de cardinalité minimale. Voir la figure 2.5 pour une illustration de la relation entre le problème du transversal de circuits et le problème de couverture par sommets. Ainsi pour un graphe orienté $G = (V, E)$, si on se restreint au graphe $G^{\leftrightarrow}$ nous pouvons appliquer, sous certaines conditions, les réductions provenant des recherches sur le problème de couverture par sommets. Plusieurs de ces réductions ont été regroupées par Kiesel et Schidler (Kiesel et Schidler, 2022) dont nous n'utilisons qu'une seule réduction que nous estimons être une bonne candidate pour la confluence avec les réductions LOOP, INDICLIQUE et OUTDICLIQUE.

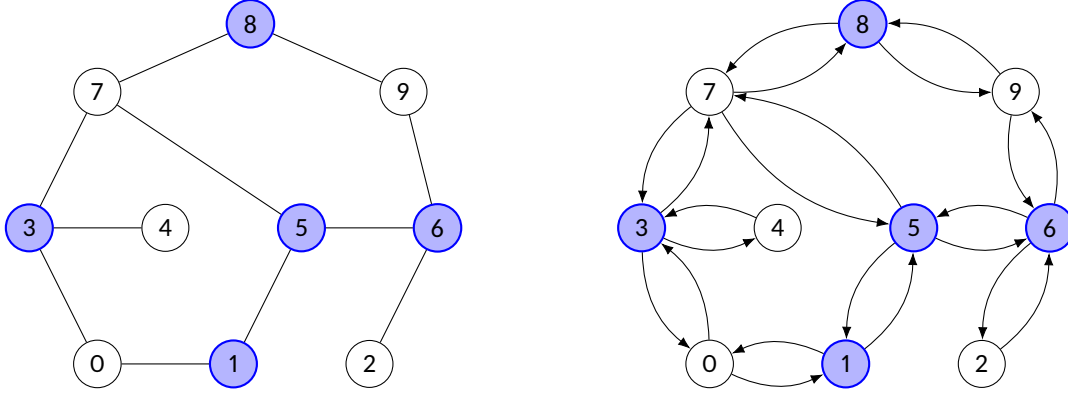


Figure 2.5 – Illustration du lien entre le problème du transversal de circuits et le problème de couverture par sommets. À gauche un graphe non-orienté et les sommets $\{1, 3, 5, 6, 8\}$ forment une solution de cardinalité minimale au problème 5. À droite le graphe orienté correspondant où le même ensemble de sommets $\{1, 3, 5, 6, 8\}$ est une solution de cardinalité minimale au problème du transversal de circuits.

Pour un graphe orienté $G = (V, E)$ et trois sommets $x, y, z \in V$, nous avons la réduction suivante.

SUBSET Cette réduction identifie deux sommets x et y , dont un à ajouter au transversal de circuits. Si $(x, y), (y, x) \in E$, $(y, y) \notin E$, $N_G^-(y) \subseteq N_G^-(x) \cup \{x\}$ et $N_G^+(y) \subseteq N_G^+(x) \cup \{x\}$, alors G sera réduit en $G - x$ et le sommet x est ajouté au transversal de circuits (Fellows *et al.*, 2018; Kiesel et Schidler, 2022).

Cette réduction identifie un sommet de TCCM en construction, En effet, nous savons déjà qu'un des sommets de l'ensemble $\{x, y\}$ sera inclus dans un transversal minimum car les deux sommets forment un 2-circuit qui doit être couvert par le TCCM. Qui plus est, si un circuit c passait par y , le fait que $N_G^-(y) \subseteq N_G^-(x) \cup \{x\}$ et $N_G^+(y) \subseteq N_G^+(x) \cup \{x\}$, implique qu'il existe $p \in N_G^-(y)$ et $s \in N_G^+(y)$ tels que les deux arcs (p, y) et (y, s) appartiennent à c . Ainsi, si y est dans un TCCM car c'est le choix optimal pour couvrir tous les circuits passant par y dans le cas $(y, y) \notin E$, alors x est également un choix optimal pour couvrir, au moins, tous les circuits construit à partir des circuits de la forme de c en substituant les deux arcs (p, y) et (y, s) par (p, x) et (x, s) .

Voir la figure 2.6 pour une illustration de la réduction SUBSET.

La réduction **SHORTONE** (Fomin *et al.*, 2009; Angrick *et al.*, 2023) qui s'applique sur deux arcs $(x, y), (y, z)$ si $N_{G \rightarrow}^-(y) = \{x\}$, $N_{G \rightarrow}^+(y) = \{z\}$ et $N_{G \leftrightarrow}(y) \subseteq N_{G \leftrightarrow}(x) \cup N_{G \leftrightarrow}(z)$ et alors elle retire les deux arcs $(x, y), (y, z)$ et les substitue par un seul nouvel arc (x, z) . Cette réduction n'est pas confluyente avec **LOOP**, **INDICLIQUE** et **OUTDICLIQUE**. Voir le contre-exemple de la figure 2.7.

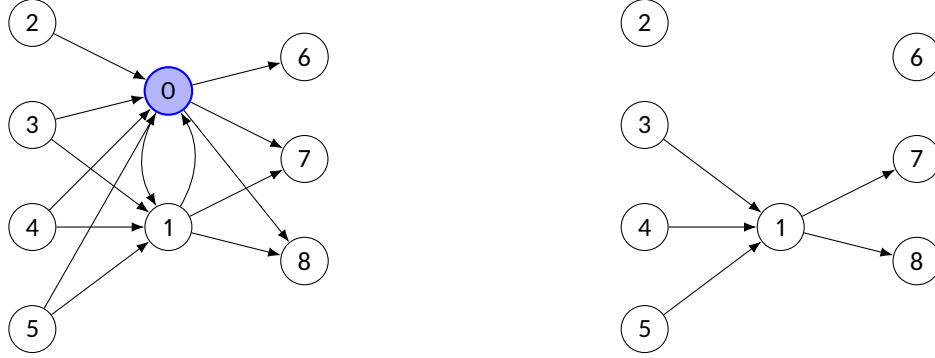


Figure 2.6 – Illustration de réduction SUBSET. Soit $G = (V, E)$ un graphe avec le sous-graphe représenté plus haut à gauche. SUBSET identifie deux sommets 0 et 1, tel que $(0, 1), (1, 0) \in E, N_G^-(1) \subseteq N_G^-(0) \cup \{0\}$ et $N_G^+(1) \subseteq N_G^+(0) \cup \{0\}$. La réduction SUBSET retire le sommet 0 et l'ajoute au transversal de circuits.

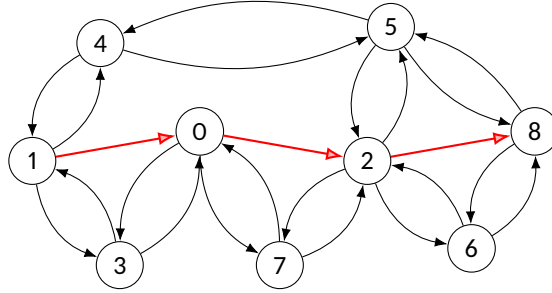


Figure 2.7 – Contre-exemple de la confluence de la réduction SHORTONE. Soit $G = (V, E)$ le graphe plus haut. D'une part, SHORTONE identifie les arcs $(1, 0)$ et $(0, 2)$, car $N_{G \rightarrow}^-(0) = \{1\}, N_{G \rightarrow}^+(0) = \{2\}$ et $N_{G \leftrightarrow}(0) \subseteq N_{G \leftrightarrow}(1) \cup N_{G \leftrightarrow}(2)$. Ainsi, elle retire les arcs $(1, 0)$ et $(0, 2)$ et les remplace par l'arc $(1, 2)$ et construit ainsi un nouveau graphe G_1 . D'autre part, SHORTONE identifie également les arcs $(0, 2)$ et $(2, 8)$, car $N_{G \rightarrow}^-(2) = \{0\}, N_{G \rightarrow}^+(2) = \{8\}$ et $N_{G \leftrightarrow}(2) \subseteq N_{G \leftrightarrow}(0) \cup N_{G \leftrightarrow}(8)$. La réduction SHORTONE retire donc les arcs $(0, 2)$ et $(2, 8)$ et les remplace par l'arc $(0, 8)$ et construit ainsi un autre graphe G_2 . G_1 et G_2 sont différents et non isomorphes.

À noter que les différents auteurs citent davantage de réductions. Ils démontrent toutefois que certaines de ces réductions sont couvertes par les réductions plus haut. C'est-à-dire que quand une réduction réduit un graphe G en G' , nous pouvons appliquer sur G une seule ou une combinaison de plusieurs des réductions citées plus haut pour arriver au même graphe réduit G' en partant de G . Par exemple, la réduction `IMPROVED-CORE` couverte par `INDICLIQUE` ou `OUTDICLIQUE`, ou encore, la réduction `VC-DOME` couverte par `SUBSET` (Kiesel et Schidler, 2022; Angrick et al., 2023). Les autres réductions ont soit des conditions d'application qui s'implémentent que par des algorithmes NP-difficiles dans leur version orientée (par exemple, voir la réduction `MANYFOLD` (Kiesel et Schidler, 2022) adaptée de la réduction R.8 de (Fellows et al., 2018)), soit elles sont applicables à condition que la réduction `MANYFOLD` ne le soit pas (voir par exemple, les réductions `3EMPTY` et `4PATH` (Kiesel et Schidler, 2022) adaptées des réductions R.9 et R.10 respectivement (Fellows et al., 2018)). Nous avons écarté ces réductions pour ces raisons.

Nous écartons également la réduction `UNCONFINED` introduite par Xiao et Nagamochi pour la recherche d'une couverture par sommets (Xiao et Nagamochi, 2013) et adaptée à la recherche d'un TCCM dans des graphes orientés par Kiesel et Shidler (Kiesel et Schidler, 2022), car son critère d'applicabilité est un algorithme de complexité quadratique qui identifie un ensemble de *sommets confinés*, qui peuvent être retirés et ajouté au TCCM, avec une dépendance au sommet initial. Ce genre de réduction qui retire un ensemble de sommet ou d'arcs n'a que peu de chance de confluer à cause de la nature même de la réduction. La raison en est que le retrait d'un sommet confiné affecte la possible identification d'autres sommets, ce qui veut dire qu'il est fort probable qu'un ensemble de sommets identifié par `UNCONFINED` n'existe plus lorsqu'une autre réduction est appliquée avant. D'un côté, le caractère global de la condition d'applicabilité d'une telle réduction la rend compliquée à manipuler du point de vue de la confluence et d'un autre côté, malheureusement, la potentielle interdépendance entre les sommets identifiés et le sommet initial fait que le suivi de l'évolution d'une telle réduction en interaction avec plusieurs autres réductions est plus complexe. Nous revenons dans le chapitre 4 avec une étude complète d'une réduction similaire sur laquelle l'argument d'exclusion ci-haut a été motivé et développé.

Nous écartons pour ce chapitre la réduction `DOME++` (Kiesel et Schidler, 2022), dont nous donnons la définition ci-bas, qui généralise la réduction `DOME`, car cette dernière n'est pas confluyente avec `LOOP`, `INDICLIQUE` et `OUTDICLIQUE`. Voir la figure 2.8 pour un contre-exemple.

`DOME++` Cette réduction identifie un arc (u, v) , tel que $(v, u) \notin E$, qui peut être retiré, si pour tout chemin c du sommet v vers le sommet u , c passe par un 2-circuit ou par un successeur de u ou un

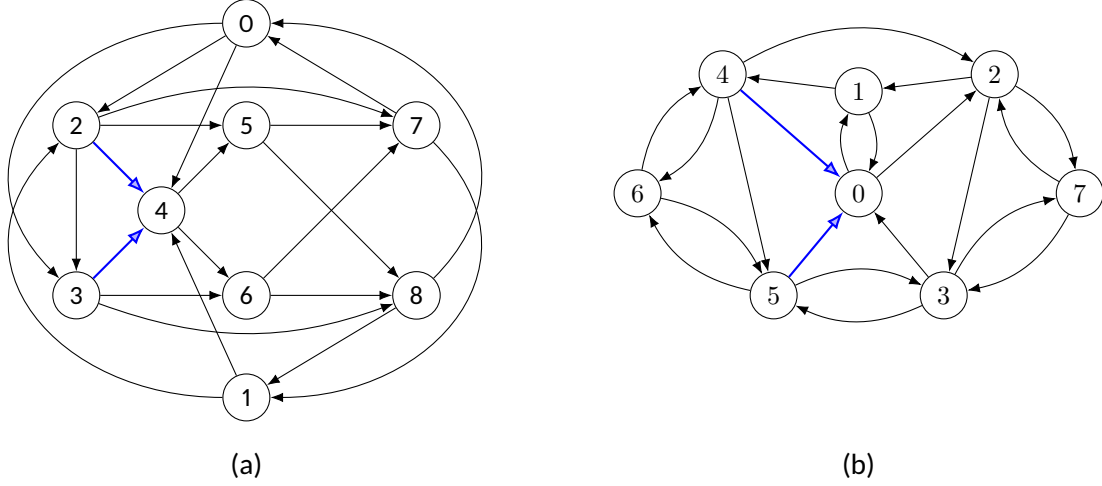


Figure 2.8 – Contre-exemples de la confluence de DOME et DOME++. (a) Soit $G = (V, E)$ le graphe à gauche. Nous avons les égalités suivantes $N_{G \rightarrow}^-(2) = \{0, 1\} \subseteq \{0, 1, 2, 3\} = N_G^-(4)$ et $N_{G \rightarrow}^-(3) = \{0, 2\} \subseteq \{0, 1, 2, 3\} = N_G^-(4)$. Par conséquent, nous pouvons réduire G en utilisant DOME(2, 4) et DOME(3, 4). Nous pouvons appliquer DOME(3, 4) suivi de DOME(2, 4). Cependant, si nous appliquons d'abord DOME(2, 4), alors DOME(3, 4) n'est plus applicable. En effet, nous avons $N_{G-(2,4)}^-(3) = \{0, 2\} \not\subseteq \{0, 1, 3\} = N_{G-(2,4)}^-(4)$ et le graphe $(V, E - (2, 4))$ ne peut pas être réduit davantage. (b) Soit $G = (V, E)$ le graphe à droite. Tout chemin du sommet 0 vers le sommet 4 passe par l'un des deux 2-circuit $(0, 1, 0)$ et $(3, 5, 3)$ ou par le sommet 2 successeur du sommet 4, ce qui fait l'arc $(4, 0)$ est identifiée par DOME++. De même, tout chemin du sommet 0 vers le sommet 5 passe par le sommet 4 prédécesseur du sommet 0 ou par le 2-circuit $(3, 5, 3)$, ce qui fait que l'arc $(5, 0)$ est identifié par DOME++. Cependant, si nous appliquons d'abord DOME++(4, 0), alors DOME++(5, 0) n'est plus applicable, car le chemin $(0, 2, 1, 4, 5)$ ne passe ni par un 2-circuit ni par un prédécesseur du sommet 0, ni par un successeur du sommet 5 dans le graphe $G - (4, 0)$.

prédécesseur de v .

À noter que nous étudions la confluence des réductions LOOP, INDICLIQUE et OUTDICLIQUE avec une nouvelle réduction qui englobe les deux réductions DOME et DOME++ et qui sera introduite dans le chapitre 4.

À présent, pour définir formellement la réduction SUBSET, nous introduisons les graphes et les monomorphismes suivants. Pour $i, j \in \mathbb{N}$ nous avons.

- $I = (\{u, v\}, \emptyset)$.
- $B = (\{x, y\}, \{(y, y)\})$.
- $P_{i,j} = (VP_i \cup \{x, y\}, \{(x, y), (y, x)\} \cup EP_{i,j})$ pour $0 \leq j \leq i$, avec,
 - $VP_i = \{p_1, \dots, p_i\}$.
 - $CP_j \subseteq VP_i$ tel que $|CP_j| = j$.

- $EP_{i,j} = \{(p, x), (p', y) \mid p \in CP_j \text{ et } p' \in VP_i\}$.
- $S_{i,j} = (VS_i \cup \{x, y\}, \{(x, y), (y, x)\} \cup ES_{i,j})$ pour $0 \leq j \leq i$, avec,
 - $VS_i = \{s_1, \dots, s_i\}$.
 - $CS_j \subseteq VS_i$ tel que $|CS_j| = j$.
 - $ES_{i,j} = \{(x, s), (y, s') \mid s \in CS_j \text{ et } s' \in VS_i\}$.
- Les monomorphismes suivants.
 - $\beta : I \longrightarrow B$ avec $\beta(u) = x$ et $\beta(v) = y$.
 - $v_{i,j} : I \longrightarrow P_{i,j}$ avec $v_{i,j}(u) = x$ et $v_{i,j}(v) = y$.
 - $\gamma_{i,j} : I \longrightarrow S_{i,j}$ avec $\gamma_{i,j}(u) = x$ et $\gamma_{i,j}(v) = y$.

SUBSET Les conditions d'application $\beta, v_{i,j}$ et $\gamma_{i,j}$. Soient $G = (V, E)$ et un monomorphisme $\mu : I \longrightarrow G$. Si $\mu \not\models \beta \wedge \mu \models v_{i,j} \wedge \mu \not\models v_{i+1,i} \wedge \mu \models \gamma_{j,j} \wedge \mu \not\models \gamma_{j+1,j}$, alors l'action de réduction de SUBSET réduit G en $G - \mu(u)$. Nous ajoutons le sommet $\mu(u)$ de G au transversal de circuits de cardinalité minimale en construction.

2.2 Hiérarchie de réductions

Avant d'aller plus loin dans l'étude de la confluence, il est intéressant de voir que toutes les réductions que nous avons vues rentrent dans des catégories particulières. En effet, toutes les réductions présentées jusqu'ici et dans toute la thèse, que nous les considérons pour étudier leur confluence ou non, peuvent être regroupées par leur action de réduction vis-à-vis du problème du transversal de circuits de cardinalité minimale, de la manière suivante. Étant donné un graphe $G = (V, E)$, nous avons les quatre types suivants :

Type 1. Les réductions qui identifient des sommets qui appartiennent à tous les transversaux de circuits du graphe G . Par exemple, la réduction LOOP.

Type 2. Les réductions qui identifient des sommets qui appartiennent à au moins un transversal de circuit de cardinalité minimale, mais pas nécessairement à tous. Par exemple, les réductions SUBSET et CORE.

Type 3. Les réductions qui identifient des sommets qui peuvent être contournés ou retirés tout en garantissant qu'au moins un transversal de circuits de cardinalité minimale du graphe G est préservé ou peut être construit en temps polynomial à partir du graphe réduit. Par exemple, les réductions INDICLIQUE, OUTDICLIQUE, IN0 et OUT0.

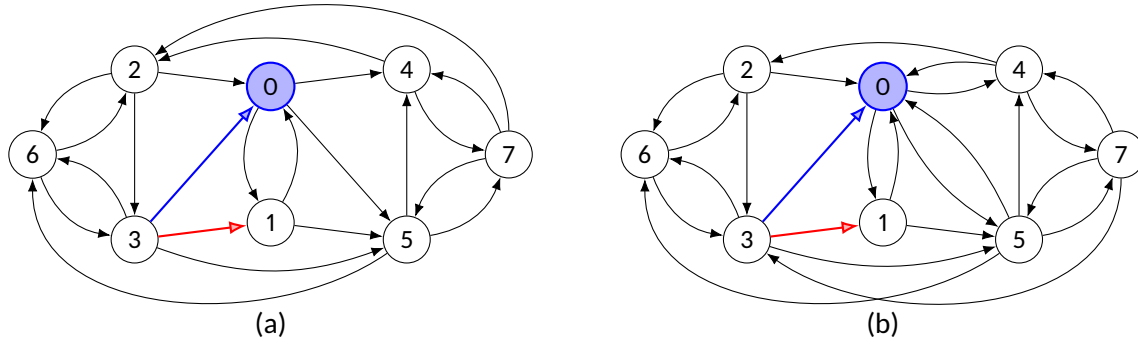


Figure 2.9 – Exemples où la priorisation des réductions n'est pas appliquée. Soient les deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ ci-haut. (a) D'une part, la réduction **SUBSET** identifie le sommet 0 en bleu à ajouter au transversal de circuits, car $(0, 1), (1, 0) \in E$, $N_{G_1}^-(1) \subseteq N_{G_1}^-(0) \cup \{0\}$ et $N_{G_1}^+(1) \subseteq N_{G_1}^+(0) \cup \{0\}$. D'autre part, l'arc $(3, 0)$ sera retiré par **DOME**, car $N_{G_1}^-(3) \subseteq N_{G_1}^-(0)$. Par contre, l'arc $(3, 1)$ ne sera identifié par **DOME**, ainsi si **DOME** est appliquée en premier, alors **SUBSET** ne serait plus applicable, car $3 \in N_{G_1}^-(1)$ et $3 \notin N_{G_1}^-(0)$. Par conséquent, nous passons à côté de la possibilité d'identifier un sommet d'un transversal de circuits. (b) De même, **SUBSET** est applicable sur le sommet 0 et l'arc $(3, 0)$ est identifié par **PIE** car tout chemin de 0 vers 3 a un 2-circuit. Par contre, l'arc $(3, 1)$ ne le sera pas, car le chemin $(1, 5, 4, 2, 3)$ n'a pas de 2-circuit. Donc, si nous appliquons **PIE** sur $(3, 0)$ en premier, **SUBSET** ne sera plus applicable sur 0. Nous arrivons donc à la même situation que (a) nous passons à côté de la possibilité d'identifier un sommet d'un transversal de circuits.

Type 4. Les réductions qui identifient des arcs qui peuvent être retiré sans changer le nombre de transversaux de circuits de cardinalité minimale du graphe G . Par exemple, les réductions **PIE**, **DOME** et **DOME++**.

Nous maintenons et nous élargissons, à l'instar de Lin et Jou (Lin et Jou, 2000) et de Lemaic (Lemaic, 2008), la priorité introduite par Levy et Low (Levy et Low, 1988) de prioriser l'application de la réduction **LOOP** sur un sommet donné même si d'autres réductions sont applicables sur ledit sommet. La raison en est que **LOOP** est une réduction de type 1 qui identifie un sommet appartenant à tous les transversaux de circuits. Il était donc naturel de la prioriser.

Dans cette thèse, nous travaillons avec des réductions qui proviennent d'auteurs distincts, traitant autant du problème du transversal de circuits, que du problème de la couverture par sommets. Par conséquent, nous pouvons rapidement avoir des conflits entre les réductions qui affectent directement la confluence. Par exemple, une réduction de type 2 peut entrer en conflit avec une réduction de type 4, en particulier les réductions **SUBSET** et **PIE** (nous verrons que ce conflit s'étend à deux nouvelles réductions de type 4 que nous introduirons dans le chapitre 3). Voir la figure 2.9 pour un exemple d'un tel conflit.

Comme la réduction `SUBSET` identifie des sommets appartenant à au moins un TCCM, nous estimons qu'elle devrait être appliquée en priorité, au risque de ne plus l'être après l'application d'une réduction de type 4 et potentiellement perdre la possibilité d'identifier un sommet du transversal de circuits de cardinalité minimale. Nous introduisons donc une hiérarchie entre des réductions qui identifient des sommets qui appartiennent à au moins un transversal de circuit de cardinalité minimale et celles qui retirent des arcs. Ainsi, étant donné un sommet u , nous imposons l'ordre d'applicabilité suivant.

Règle de priorisation. Si des réductions de type 2 et type 4 sont applicables sur le sommet u ou sur un arc incident à u , alors la réduction de type 2 est appliquée.

Remarque 2.5 *La confluence nous assure que l'ordre d'application d'un ensemble de réductions n'est pas important, nous prisons le rôle de cette hiérarchie. En effet, cette priorisation ne réduit en rien l'intérêt d'étudier la confluence. Sur l'ensemble des réductions que nous considérons pour étudier leur confluence, la majorité sont des réductions qui identifient des sommets à supprimer ou à contourner, ou des arcs à retirer. Il demeure ainsi d'intérêt d'étudier l'unicité, à isomorphisme prêt, du graphe réduit final.*

Ainsi, à partir de maintenant, la définition de la réduction `PIE` est reformulée de sorte qu'elle sera applicable sur un arc (u, v) si `SUBSET` n'est applicable sur aucun des deux sommets u et v .

2.3 Étude de la confluence

En appliquant le théorème 1.7 aux réductions, l'étude de la confluence d'un ensemble de réductions revient à vérifier les deux points suivants. Étant donné un ensemble $\mathcal{T}$ de réductions et un graphe $G = (V, E)$.

1. Aucune réduction n'est applicable à l'infini.
2. Si deux réductions appliquées à G donnent deux graphes G_1 et G_2 , alors il existe deux suites finies de réductions de $\mathcal{T}$ à appliquer à G_1 et G_2 , telles que les deux graphes résultant, en appliquant la première suite de réductions à G_1 et la deuxième suite de réductions à G_2 , soient égaux ou isomorphes.

Comme les réductions que nous considérons réduisent, par définition, la taille de V ou E , nous sommes certains que n'importe laquelle des réductions que nous considérons ne s'applique pas à l'infini. Reste à considérer toutes les paires de réductions possibles qui s'appliquent à G et à chaque fois revenir par des suites d'application de réductions de $\mathcal{T}$ qui donneront un même graphe ou deux graphes isomorphes. Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier l'ensemble des réductions $\{\text{LOOP}, \text{IN0}, \text{OUT0}, \text{IN1}, \text{OUT1}, \text{PIE}, \text{CORE}, \text{INDICLIQUE}, \text{OUTDICLIQUE}, \text{SUBSET}\}$.

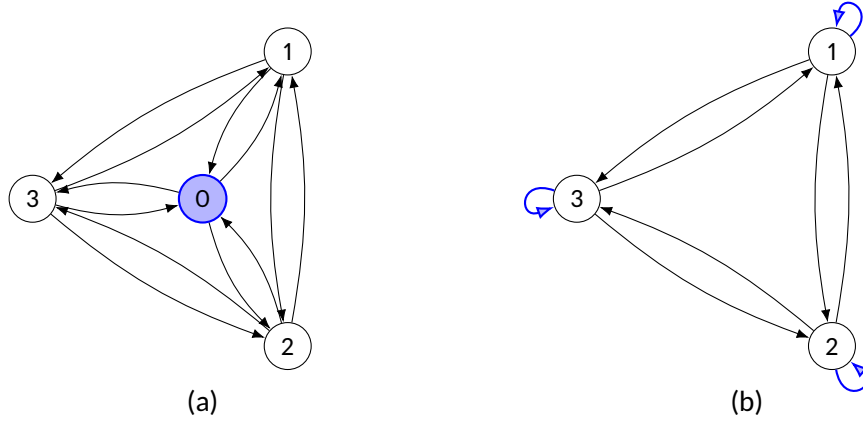


Figure 2.10 – Illustration de la couverture de CORE par INDICLIQUE et OUTDICLIQUE. (a) 0 est un sommet identifié par CORE. CORE(0) ajoutera les sommets 1, 2 et 3 au transversal de circuits et isolera 0. (b) Après avoir appliqué INDICLIQUE(0) ou OUTDICLIQUE(0), 0 est retiré et nous obtenons des boucles sur les sommets 1, 2 et 3, qui seront ajoutés par LOOP au transversal de circuits.

Notez que nous pouvons retirer la réduction CORE de cet ensemble car elle est couverte par INDICLIQUE ou OUTDICLIQUE suivi de LOOP. En effet, étant donné un graphe $G = (V, E)$, si un sommet $x \in V$ est identifié par CORE, alors $N_G(x) \cup \{x\}$ forme une diclique. En particulier, nous avons $N_G(x) = N_G^-(x) = N_G^+(x)$, ainsi $N_G^-(x)$ et $N_G^+(x)$ formant des dicliques, nous pouvons appliquer INDICLIQUE(x) ou OUTDICLIQUE(x). Donc chaque sommet dans $N_G(x)$ aura une boucle dans $G \circ x$, ce qui implique qu'ils seront ajoutés au transversal de circuits par LOOP. Cela, d'une part, est presque équivalent à ce que CORE(x) devrait faire, sauf que CORE(x) isolera x sans le retirer et ajoutera $N_G(x)$ au transversal de circuits. D'autre part, INDICLIQUE(x) ou OUTDICLIQUE(x) retirent x . Voir la figure 2.10 pour une illustration.

Grâce à la proposition 1.8, nous pouvons également retirer IN0, OUT0, IN1 et OUT1. Le tableau 2.1 résume les couvertures des réductions que nous utilisons. Ce qui revient à étudier l'ensemble des réductions suivant,

$$\mathcal{T} = \{\text{LOOP}, \text{PIE}, \text{INDICLIQUE}, \text{OUTDICLIQUE}, \text{SUBSET}\}$$

.

À présent nous reprenons le formalisme introduit dans la section 1.3 pour étudier la confluence de l'ensemble de réductions $\mathcal{T}$.

Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble de tous les graphes orientés finis. Soient les relations suivantes sur l'ensemble $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ qui

Réduction	Couvertes par
LOOP	-
SUBSET	-
IN0 et IN1	INDICLIQUE
OUT0 et OUT1	OUTDICLIQUE
CORE	(INDICLIQUE ou OUTDICLIQUE) et LOOP

Table 2.1 – Les réductions considérées et leur couvertures s'il y a lieu.

représentent les réductions de l'ensemble $\mathcal{T}$.

- $\mathcal{R}_L = \{(G, G') \mid G \text{ est réduit en } G' \text{ par la réduction LOOP}\}.$
- $\mathcal{R}_I = \{(G, G') \mid G \text{ est réduit en } G' \text{ par la réduction INDICLIQUE}\}.$
- $\mathcal{R}_O = \{(G, G') \mid G \text{ est réduit en } G' \text{ par la réduction OUTDICLIQUE}\}.$
- $\mathcal{R}_P = \{(G, G') \mid G \text{ est réduit en } G' \text{ par la réduction PIE}\}.$
- $\mathcal{R}_S = \{(G, G') \mid G \text{ est réduit en } G' \text{ par la réduction SUBSET}\}.$

Soit à présent la relation

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_L \cup \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}_O \cup \mathcal{R}_P \cup \mathcal{R}_S$$

Rappelons que la fermeture transitive de la relation $\mathcal{R}$ est l'union de toutes les compositions possibles de la relation $\mathcal{R}$ avec elle-même, c'est-à-dire,

$$\mathcal{R}^T = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}^i$$

où $\mathcal{R}^i$ est la composition de $\mathcal{R}$ avec elle-même i fois.

Nous énonçons le théorème principal de ce chapitre.

Théorème 2.1 *Soit la relation*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_L \cup \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}_O \cup \mathcal{R}_P \cup \mathcal{R}_S$$

alors $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ a la propriété de finitude de Church-Rosser.

Pour alléger la démonstration qui suit, plusieurs arguments calculatoires ont été formulées avec des lemmes, dont les preuves complètes ont été mises en annexe pour augmenter la lisibilité de la preuve.

Preuve. D'après le théorème 1.7 il nous suffit de démontrer que $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ est fini et que pour tout $G, G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ si $(G, G_1) \in \mathcal{R}$ et $(G, G_2) \in \mathcal{R}$, alors il existe $G', G'' \in \mathcal{G}$ tels que $(G_1, G') \in \mathcal{R}^T$ et $(G_2, G'') \in \mathcal{R}^T$ avec $G' \cong G''$. Pour rappel, $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ est fini si pour tout $G, G' \in \mathcal{G}$, il existe une constante k telle que si $(G, G') \in \mathcal{R}^i$ alors $i \leq k$. Comme les réductions réduisent le nombre de sommets ou d'arcs, il suffit de prendre $k = |G| + |G|^2 = |G|(|G| + 1)$, avec $G = (V, E)$ et $|G| = |V|$, alors nous sommes certains que $(G, G') \in \mathcal{R}^i$ implique que $i \leq k$. En effet, toutes les réductions vont, au moins, retirer un sommet ou un arc, donc au plus il faudra retirer tous les sommets et tous les arcs donc le nombre maximal pour un graphe $G = (V, E)$ est $|V| + |V|^2$. À noter que *INDICLIQUE* et *OUTDICLIQUE* qui ajoutent des arcs, retirent quand même un sommet au préalable, donc la taille du graphe diminue. Ainsi $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ est fini.

À présent, soient $G = (V, E), G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2) \in \mathcal{G}$ tels que $(G, G_1) \in \mathcal{R}$ et $(G, G_2) \in \mathcal{R}$. Nous cherchons deux graphes $G', G'' \in \mathcal{G}$ avec les deux propriétés suivantes, pour $i, j \in \mathbb{N}$,

$$(G_1, G') \in \mathcal{R}^i \text{ et } (G_2, G'') \in \mathcal{R}^j \quad (\text{P1})$$

$$G' \cong G'' \quad (\text{P2})$$

Nous commençons par le cas $(G, G_1) \in \mathcal{R}_P$ et nous traitons tous les cas possibles pour (G, G_2) . Supposons donc qu'il existe un arc $(u, v) \in E$ tel que, $R_P(u, v)$ appliquée à G le réduit en $G_1 = G - (u, v)$. Alors nous avons les cas suivants pour $(G, G_2) \in \mathcal{R}$.

— $(G, G_2) \in \mathcal{R}_L$. Supposons qu'il existe un sommet $x \in V$ tel que $R_L(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G - x$. Nous distinguons alors les cas suivants.

(a) Si $x \neq u$ et $x \neq v$, alors nous pouvons appliquer $R_L(x)$ sur $G_1 = G - (u, v)$ qui le réduira au graphe $(G - (u, v)) - x$, ainsi $(G_1, G_1 - x) \in \mathcal{R}_L \subseteq \mathcal{R}^1$.

Nous pouvons également appliquer $R_P(u, v)$ sur $G_2 = G - x$ qui le réduira au graphe $(G - x) - (u, v)$, ainsi $(G_2, G_2 - (u, v)) \in \mathcal{R}_P \subseteq \mathcal{R}^1$.

Comme $(G - (u, v)) - x = (G - x) - (u, v)$, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = (G - (u, v)) - x = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

(b) Si $x = u$ ou $x = v$ alors nous pouvons appliquer $R_L(x)$ sur G_1 qui le réduira au graphe $(G - (u, v)) - x$, ainsi $(G_1, G_1 - x) \in \mathcal{R}_L \subseteq \mathcal{R}^1$. Comme $x = u$ ou $x = v$, alors l'arc (u, v) est incident au sommet x , donc $(G - (u, v)) - x = G - x$. Nous n'avons donc pas besoin d'appliquer une

réduction sur $G_2 = G - x$ et il suffit de prendre $i = 1, j = 0$ et $G' = G_2 = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

Voir le lemme A.3 pour les preuves d'existence des réductions et des graphes de ces cas.

- $(G, G_2) \in \mathcal{R}_P$. Supposons donc qu'il existe un arc $(x, y) \in E$ tel que $R_P(x, y)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G - (x, y)$. Puisque retirer des arcs n'affecte pas l'acyclicité d'un arc dans G ou dans $G^\rightarrow$, autrement dit, tout arc acyclique dans G est également acyclique dans G_1 , $R_P(x, y)$ reste applicable dans G_1 et $R_P(u, v)$ reste applicable dans G_2 . Donc $(G_1, G_1 - (x, y)), (G_2, G_2 - (u, v)) \in \mathcal{R}_P \subseteq \mathcal{R}^1$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = G'' = G - (u, v) - (x, y)$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites. Voir le lemme A.4 pour la preuve d'existence des réductions et des graphes de ce cas.

- $(G, G_2) \in \mathcal{R}_I$. Supposons donc qu'il existe un sommet $x \in V$ tel que, $R_I(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G \circ x$. Nous distinguons alors les cas suivants.

- (a) Si $x \neq u$ et $x \neq v$, alors nous pouvons appliquer $R_I(x)$ sur $G_1 = G - (u, v)$ qui le réduira au graphe $(G - (u, v)) \circ x$, ainsi $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathcal{R}^1$. Nous pouvons également appliquer $R_P(u, v)$ sur G_2 qui le réduira au graphe $(G \circ x) - (u, v)$, ainsi $(G_2, G_2 - (u, v)) \in \mathcal{R}_P \subseteq \mathcal{R}^1$.

Comme $(G - (u, v)) \circ x = (G \circ x) - (u, v)$, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = (G \circ x) - (u, v) = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

- (b) Si $x = u$, alors nous pouvons appliquer $R_I(x)$ sur $G_1 = G - (x, v)$ qui le réduira au graphe $(G - (x, v)) \circ x$, ainsi $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathcal{R}^1$. Par contre, dans $G_2 = G \circ x$ l'arc $(u, v) = (x, v)$ n'existe plus et est remplacé par les arcs (p, v) pour $p \in N_G^-(x)$. Nous pouvons appliquer successivement les réductions $(R_P(p, v))_{p \in N_G^-(x)}$ sur G_2 pour le réduire au graphe $(G \circ x) - N_G^-(x) \times \{v\} = (G - (x, v)) \circ x$. Donc $(G_2, G_2 - N_G^-(x) \times \{v\}) \in \mathcal{R}_P^{|N_G^-(x)|} \subseteq \mathcal{R}^{|N_G^-(x)|}$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = 1, j = |N_G^-(x)|$ et $G' = (G - (x, v)) \circ x = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

- (c) Si $x = v$, alors nous pouvons appliquer $R_I(x)$ sur $G_1 = G - (u, x)$ qui le réduira au graphe $(G - (u, x)) \circ x$, ainsi $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathcal{R}^1$. Par contre, dans $G_2 = G \circ x$ l'arc $(u, v) = (u, x)$ n'existe plus et est remplacé par les arcs (u, s) pour $s \in N_G^+(x)$. Nous pouvons appliquer successivement les réductions $(R_P(u, s))_{s \in N_G^+(x)}$ sur G_2 pour le réduire au graphe $(G \circ x) - \{u\} \times N_G^+(x) = (G - (u, x)) \circ x$. Donc $(G_2, G_2 - \{u\} \times N_G^+(x)) \in \mathcal{R}_P^{|N_G^+(x)|} \subseteq \mathcal{R}^{|N_G^+(x)|}$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = 1$, $j = |N_G^+(x)|$ et $G' = (G - (u, x)) \circ x = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

Voir le lemme A.5 pour les preuves d'existence des réductions et des graphes de ces cas.

— $(G, G_2) \in \mathcal{R}_O$. Supposons donc qu'il existe un sommet $x \in V$ tel que, $R_O(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G \circ x$. Nous distinguons alors les cas suivants.

(a) Si $x \neq u$ et $x \neq v$, alors nous pouvons appliquer $R_O(x)$ sur $G_1 = G - (u, v)$ qui le réduira au graphe $(G - (u, v)) \circ x$, ainsi $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_O \subseteq \mathcal{R}^1$. Nous pouvons également appliquer $R_P(u, v)$ sur $G_2 = G \circ x$ qui le réduira au graphe $(G \circ x) - (u, v)$, ainsi $(G_2, G_2 - (u, v)) \in \mathcal{R}_P \subseteq \mathcal{R}^1$.

Comme $(G - (u, v)) \circ x = (G \circ x) - (u, v)$, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = (G \circ x) - (u, v) = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

(b) Si $x = u$, alors nous pouvons appliquer $R_O(x)$ sur $G_1 = G - (x, v)$ qui le réduira au graphe $(G - (x, v)) \circ x$, ainsi $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_O \subseteq \mathcal{R}^1$. Par contre, dans $G_2 = G \circ x$ l'arc $(u, v) = (x, v)$ n'existe plus et est remplacé par les arcs (p, v) pour $p \in N_G^-(x)$. Nous pouvons appliquer successivement les réductions $(R_P(p, v))_{p \in N_G^-(x)}$ sur G_2 pour le réduire au graphe $(G \circ x) - N_G^-(x) \times \{v\} = (G - (x, v)) \circ x$. Donc $(G_2, G_2 - N_G^-(x) \times \{v\}) \in \mathcal{R}_P^{|N_G^-(x)|} \subseteq \mathcal{R}^{|N_G^-(x)|}$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = 1$, $j = |N_G^-(x)|$ et $G' = (G - (x, v)) \circ x = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

(c) Si $x = v$, alors nous pouvons appliquer $R_O(x)$ sur $G_1 = G - (u, x)$ qui le réduira au graphe $(G - (u, x)) \circ x$, ainsi $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_O \subseteq \mathcal{R}^1$. Par contre, dans $G_2 = G \circ x$ l'arc $(u, v) = (u, x)$ n'existe plus et est remplacé par les arcs (u, s) pour $s \in N_G^+(x)$. Nous pouvons appliquer successivement les réductions $(R_P(u, s))_{s \in N_G^+(x)}$ sur G_2 pour le réduire au graphe $(G \circ x) - \{u\} \times N_G^+(x) = (G - (u, x)) \circ x$. Donc $(G_2, G_2 - \{u\} \times N_G^+(x)) \in \mathcal{R}_P^{|N_G^+(x)|} \subseteq \mathcal{R}^{|N_G^+(x)|}$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = 1$, $j = |N_G^+(x)|$ et $G' = (G - (u, x)) \circ x = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

Voir le lemme A.6 pour les preuves d'existence des réductions et des graphes de ces cas.

— $(G, G_2) \in \mathcal{R}_S$. Supposons donc qu'il existe deux sommets $x, y \in V$ tel que $R_{S[y]}(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G - x$. Comme $x \neq u$ et $x \neq v$, alors nous pouvons appliquer $R_{S[y]}(x)$ sur G_1 qui le réduira au graphe $(G - (u, v)) - x$, ainsi $(G_1, (G - (u, v)) - x) \in \mathcal{R}_S \subseteq \mathcal{R}^1$. Nous pouvons également

appliquer $R_P(u, v)$ sur G_2 qui le réduira au graphe $(G - x) - (u, v)$, ainsi $(G_2, (G - x) - (u, v)) \in \mathcal{R}_P \subseteq \mathcal{R}^1$.

Comme $(G - (u, v)) - x = (G - x) - (u, v)$, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = (G - x) - (u, v) = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites. Voir le lemme A.7 pour les preuves d'existence des réductions et des graphes de ces cas.

À présent nous traitons le cas où $(G, G_1) \in \mathcal{R}_S$ ainsi que tous les cas possibles pour (G, G_2) , à l'exception du cas où (G, G_2) appartient à $\mathcal{R}_P$ qui a déjà été traité. Supposons donc qu'il existe deux sommets $u, v \in E$ tels que, $R_{S[v]}(u)$ appliquée à G le réduit en $G_1 = G - u$. Alors nous avons les cas suivants $(G, G_2) \in \mathcal{R}$.

— $(G, G_2) \in \mathcal{R}_L$. Supposons qu'il existe un sommet $x \in V$ tel que $R_L(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G - x$. Nous distinguons alors les cas suivants.

(a) Si $x = u$, alors $G_1 = G_2$ et il suffit de prendre $i = j = 0$ et $G' = G - x = G_2 = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

(b) Si $x \neq u$ et $x \neq v$, alors dans ce cas l'applicabilité d'une réduction n'affecte pas l'applicabilité de l'autre. En effet, retirer le sommet u n'affecte pas la boucle (x, x) et $R_L(x)$ reste applicable et $(G_1, G_1 - x) \in \mathcal{R}_L \subseteq \mathcal{R}^1$. De même, retirer un sommet avec une boucle affectera de la même manière les deux sommets u et v , autrement dit $R_{S[v]}(u)$ reste applicable, donc $(G_2, G_2 - u) \in \mathcal{R}_S \subseteq \mathcal{R}^1$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = G'' = G - u - x$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

Voir le lemme A.8 pour la preuve d'existence des réductions et des graphes de ce cas.

— $(G, G_2) \in \mathcal{R}_I$. Supposons donc qu'il existe un sommet $x \in V$ tel que, $R_I(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G \circ x$. Nous distinguons alors les cas suivants.

(a) Si $x = u$, alors $N_G^-(v) \setminus \{x\}$ est diclique et donc $N_G^-(v) \setminus \{x\} = N_G^-(x) \setminus \{v\}$. D'une part, une fois que $R_{S(v)}(x)$ est appliquée, $R_I(v)$ est applicable dans G_1 , car $R_{S(v)}(x)$ va seulement retirer le sommet x ainsi, les prédécesseurs de v dans G_1 continuent de former une diclique. Donc $(G_1, G_1 \circ v) \in \mathcal{R}_I$. Maintenant, comme v faisait partie de la diclique $N_G^-(x)$, tous les sommets de $N_{G_1}^-(v)$ auront des boucles dans $G_1 \circ v$, nous pouvons donc appliquer $R_L(p)$ pour tout $p \in N_{G_1}^-(v) = N_G^-(v) \setminus \{x\}$. Donc $(G_1 \circ v, (G_1 \circ v) - N_G^-(v) \setminus \{x\}) \in \mathcal{R}_L^{|N_G^-(v)|-1} \subseteq \mathcal{R}^{|N_G^-(v)|-1}$. D'autre part, une fois que $R_I(x)$ est appliquée sur G , tous les sommets $N_G^-(x)$,

incluant v , auront des boucles. Nous pouvons donc appliquer $R_L(p)$ pour tout $p \in N_G^-(x)$.
Donc $(G_2, G_2 - N_G^-(x)) \in \mathcal{R}_L^{|N_G^-(x)|} \subseteq \mathcal{R}^{|N_G^-(x)|}$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = |N_G^-(v)|$, $j = |N_G^-(x)|$ et $G' = G'' = G - (N_G^-(x) \cup \{x\})$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

- (b) Si $x = v$ (c) si $x \in N_G^-(u)$ et $(u, x) \in E$ (d) si $x \in N_G^+(u)$ et $(x, u) \in E$, alors le retrait du sommet u par $R_{S[v]}(u)$ dans $G_1 = G - u$ ne change pas le fait que $N_G^-(x)$ demeure une diclique dans ces trois cas. Par conséquent, $R_I(x)$ reste applicable dans G_1 et nous aurons $(G_1, G_1 - x) \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathcal{R}^1$. Comme $(u, x) \in E$ dans les trois cas, alors $u \in N_G^-(x)$, ce qui implique qu'il y a un 2-circuit entre u et x . Par conséquent, une fois que $R_I(x)$ est appliquée sur G , u aura une boucle dans $G_2 = G \circ x$ et nous pourrons donc appliquer $R_L(u)$ dans G_2 . Nous aurons $(G_2, G_2 - u) \in \mathcal{R}_L \subseteq \mathcal{R}^1$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = G'' = (G - u) \circ x = (G \circ x) - u$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

- (c) Si $x \neq v$ et $x \notin N_G(v)$ (f) si $x \in N_G^-(v)$ et $(v, x), (u, x) \notin E$ (g) si $x \in N_G^+(v)$ et $(x, v), (x, u) \notin E$, alors dans ce cas l'applicabilité d'une réduction n'affecte pas l'applicabilité de l'autre. En effet, le retrait du sommet u n'affectera pas la diclique $N_G^-(x)$, donc $R_I(x)$ reste applicable et $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathcal{R}^1$. De même, comme x est dans le voisinage de v sans 2-circuit entre x et v , et entre x et u , alors u et v auront un voisinage augmenté avec les mêmes éléments dans $G_2 = G \circ x$. Ce qui veut dire que $R_{S[v]}(u)$ reste applicable dans G_2 , donc $(G_2, G_2 - u) \in \mathcal{R}_S \subseteq \mathcal{R}^1$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = G'' = (G - u) \circ x = (G \circ x) - u$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

Voir le lemme A.9 pour la preuve d'existence des réductions et des graphes de ce cas.

- $(G, G_2) \in \mathcal{R}_O$. Supposons donc qu'il existe un sommet $x \in V$ tel que, $R_O(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G \circ x$. Nous distinguons alors les cas suivants.

- (a) Si $x = u$, alors $N_G^+(v) \setminus \{x\}$ est une diclique et donc $N_G^+(v) \setminus \{x\} = N_G^+(x) \setminus \{v\}$. D'une part, une fois que $R_{S(v)}(x)$ est appliquée, $R_O(v)$ est applicable dans G_1 , car $R_{S(v)}(x)$ va seulement retirer le sommet x ainsi, les successeurs de v dans G_1 continuent de former une diclique. Donc $(G_1, G_1 \circ v) \in \mathcal{R}_O$. Maintenant, comme v faisait partie de la diclique $N_G^+(x)$, tous les sommets

de $N_{G_1}^+(v)$ auront des boucles dans $G_1 \circ v$, nous pouvons donc appliquer $R_L(s)$ pour tout $s \in N_{G_1}^+(v) = N_G^+(v) \setminus \{x\}$. Donc $(G_1 \circ v, (G_1 \circ v) - N_G^+(v) \setminus \{x\}) \in \mathcal{R}_L^{|N_G^+(v)|-1} \subseteq \mathcal{R}^{|N_G^+(v)|-1}$. D'autre part, une fois que $R_O(x)$ est appliquée sur G , tous les sommets $N_G^+(x)$, incluant v , auront des boucles. Nous pouvons donc appliquer $R_L(s)$ pour tout $s \in N_G^+(x)$. Donc $(G_2, G_2 - N_G^+(x)) \in \mathcal{R}_L^{|N_G^+(x)|} \subseteq \mathcal{R}^{|N_G^+(x)|}$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = |N_G^+(v)|$, $j = |N_G^+(x)|$ et $G' = G'' = G - (N_G^+(x) \cup \{x\})$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

- (b) Si $x = v$ (c) si $x \in N_G^-(u)$ et $(u, x) \in E$ (d) si $x \in N_G^+(u)$ et $(x, u) \in E$, alors le retrait du sommet u par $R_{S[v]}(u)$ dans $G_1 = G - u$ ne change pas le fait que $N_G^+(x)$ demeure une diclique dans ces trois cas. Par conséquent, $R_O(x)$ reste applicable dans G_1 et nous aurons $(G_1, G_1 - x) \in \mathcal{R}_O \subseteq \mathcal{R}^1$. Comme $(u, x) \in E$ dans les trois cas, alors $u \in N_G^+(x)$, ce qui implique qu'il y a un 2-circuit entre u et x . Par conséquent, une fois que $R_O(x)$ est appliquée sur G , u aura une boucle dans $G_2 = G \circ x$ et nous pourrons donc appliquer $R_L(u)$ dans G_2 . Nous aurons $(G_2, G_2 - u) \in \mathcal{R}_L \subseteq \mathcal{R}^1$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = G'' = (G - u) \circ x = (G \circ x) - u$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

- (c) Si $x \neq v$ et $x \notin N_G(v)$ (f) si $x \in N_G^-(v)$ et $(v, x), (u, x) \notin E$ (g) si $x \in N_G^+(v)$ et $(x, v), (x, u) \notin E$, alors dans ce cas l'applicabilité d'une réduction n'affecte pas l'applicabilité de l'autre. En effet, le retrait du sommet u n'affectera pas la diclique $N_G^+(x)$, donc $R_O(x)$ reste applicable et $(G_1, G_1 - x) \in \mathcal{R}_O \subseteq \mathcal{R}^1$. De même, comme x est dans le voisinage de v sans 2-circuit entre x et v , et entre x et u , alors u et v auront un voisinage augmenté avec les mêmes éléments dans $G_2 = G \circ x$. Ce qui veut dire que $R_{S[v]}(u)$ reste applicable dans G_2 , donc $(G_2, G_2 - u) \in \mathcal{R}_S \subseteq \mathcal{R}^1$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = G'' = (G - u) \circ x = (G \circ x) - u$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

Voir le lemme A.10 pour la preuve d'existence des réductions et des graphes de ce cas.

- $(G, G_2) \in \mathcal{R}_S$. Supposons donc qu'il existe deux sommets $x, y \in V$ tel que, $R_{S[y]}(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G - x$. Nous distinguons alors les cas suivants.

- (a) Si $x = v$ et $y = u$, alors x et y ont des rôles symétriques et nous avons $N_G^-(x) \setminus \{y\} =$

$N_G^-(y) \setminus \{x\}$ et $N_G^+(x) \setminus \{y\} = N_G^+(y) \setminus \{x\}$. Ainsi, nous n'avons pas besoin d'appliquer des réductions sur G_1 ou G_2 , car $G_1 = G - y \cong G - x = G_2$. Il suffit de prendre $i = j = 0$ et $G' = G'' = G - x$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

(b) Si $x = v$ et $y \neq u$, alors $(u, y), (y, u) \in E$, $N_G^-(y) \subseteq N_G^-(x) \cup \{x\} \subseteq N_G^-(u) \cup \{u\}$ et $N_G^+(y) \subseteq N_G^+(x) \cup \{x\} \subseteq N_G^+(u) \cup \{u\}$. Donc, d'une part, $R_{S[y]}(u)$ est applicable $G_2 = G - x$ et nous aurons $(G_2, G_2 - u) \in \mathcal{R}_S \subseteq \mathcal{R}^1$. D'autre part, $R_{S[y]}(x)$ est applicable $G_1 = G - u$ car le retrait de u affectera d'une manière identique les voisinages de x et de y et nous aurons $(G_1, G_1 - x) \in \mathcal{R}_S \subseteq \mathcal{R}^1$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = G'' = G - u - x$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

(c) Si $x \neq v$ et $y \neq u$, alors dans ce cas l'applicabilité d'une réduction n'affecte pas l'applicabilité de l'autre. Ainsi, $(G_1, G_1 - x) \in \mathcal{R}_S \subseteq \mathcal{R}^1$ et $(G_2, G_2 - u) \in \mathcal{R}_S \subseteq \mathcal{R}^1$. Ainsi, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = G'' = G - u - x$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

Nous traitons le cas où $(G, G_1) \in \mathcal{R}_L$ ainsi que tous les cas possibles pour (G, G_2) , à l'exception des cas où (G, G_2) appartient à $\mathcal{R}_P$ et $\mathcal{R}_S$ car ils ont déjà été traités. Supposons donc qu'il existe un sommet $u \in E$ tel que, $R_L(u)$ appliquée à G le réduit en $G_1 = G - u$. Alors nous avons les cas suivants $(G, G_2) \in \mathcal{R}$.

— $(G, G_2) \in \mathcal{R}_L$. Supposons donc qu'il existe un sommet $x \in V$ tel que, $R_L(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G - x$. Comme retirer un sommet n'affecte pas la boucle d'un autre sommet, $R_L(x)$ reste applicable dans G_1 et $R_L(u)$ reste applicable dans G_2 . Donc $(G_1, G_1 - x), (G_2, G_2 - u) \in \mathcal{R}_L \subseteq \mathcal{R}^1$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = G'' = G - u - x$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites. Voir le lemme A.12 pour la preuve d'existence des réductions et des graphes de ce cas.

— $(G, G_2) \in \mathcal{R}_I$. Supposons donc qu'il existe un sommet $x \in V$ tel que, $R_I(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G \circ x$. Comme retirer un sommet n'affecte pas le fait que $N_G^-(x)$ est une diclique, $R_I(x)$ reste applicable dans G_1 et $R_L(u)$ reste applicable dans G_2 car $x \neq u$ et donc la boucle (u, u) existe dans G_2 . Donc $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathcal{R}^1$ et $(G_2, G_2 - u) \in \mathcal{R}_L \subseteq \mathcal{R}^1$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = G'' = G - u \circ x$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites. Voir le lemme A.13 pour la preuve d'existence des réductions et des graphes de ce cas.

— $(G, G_2) \in \mathcal{R}_O$. Supposons donc qu'il existe un sommet $x \in V$ tel que, $R_O(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G \circ x$. Comme retirer un sommet n'affecte pas le fait que $N_G^+(x)$ est une diclique, $R_O(x)$

reste applicable dans G_1 et $R_L(u)$ reste applicable dans G_2 car $x \neq u$ et donc la boucle (u, u) existe dans G_2 . Donc $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_O \subseteq \mathcal{R}^1$ et $(G_2, G_2 - u) \in \mathcal{R}_L \subseteq \mathcal{R}^1$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = G'' = G - u \circ x$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites. Voir le lemme A.14 pour la preuve d'existence des réductions et des graphes de ce cas.

Ensuite, nous traitons le cas où $(G, G_1) \in \mathcal{R}_I$ ainsi que tous les cas possibles pour (G, G_2) , à l'exception des cas où (G, G_2) appartient à $\mathcal{R}_P$, $\mathcal{R}_S$ et $\mathcal{R}_L$ car ils ont déjà été traités. Supposons donc qu'il existe un sommet $u \in E$ tel que $R_I(u)$ appliquée à G le réduit en $G_1 = G \circ u$. Alors nous avons les cas suivants $(G, G_2) \in \mathcal{R}$.

— $(G, G_2) \in \mathcal{R}_O$. Supposons donc qu'il existe un sommet $x \in V$ tel que, $R_O(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G \circ x$. Nous distinguons alors les cas suivants.

(a) Si $(u, x) \notin E$ et $(x, u) \in E$, alors $N_G^-(u) \cap N_G^+(x)$ forme une diclique et $N_G^+(x) \setminus \{u\} = N_G^-(u) \setminus \{x\}$. Donc, d'une part, une fois $R_I(u)$ appliquée, les sommets de $N_G^+(x) \setminus \{u\}$ auront des boucles et donc nous pouvons appliquer $R_L(s)$ pour tout sommet dans $s \in N_G^+(x) \setminus \{u\}$, nous obtenons donc le graphe $G' = G \circ u - (N_G^+(x) \setminus \{u\})$. Ainsi $(G_1, G_1 - (N_G^+(x) \setminus \{u\})) \in \mathcal{R}_L^{|N_G^+(x)|-1} \subseteq \mathcal{R}^{|N_G^+(x)|-1}$. D'autre part, une fois $R_O(x)$ appliquée, les sommets de $N_G^-(u) \setminus \{x\}$ auront des boucles et donc nous pouvons appliquer $R_L(p)$ pour tout sommet dans $p \in N_G^-(u) \setminus \{x\}$, nous obtenons donc le graphe $G'' = G \circ u - (N_G^-(u) \setminus \{x\})$. Ainsi $(G_2, G_2 - (N_G^-(u) \setminus \{x\})) \in \mathcal{R}_L^{|N_G^-(u)|-1} \subseteq \mathcal{R}^{|N_G^-(u)|-1}$.

Comme $N_G^+(x) \setminus \{u\} = N_G^-(u) \setminus \{x\}$, les deux graphes G' et G'' sont isomorphes. Il suffit donc de prendre $i = |N_G^+(x)| - 1 = |N_G^-(u)| - 1 = j$, pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

(b) Si $(u, x) \notin E$ et $(x, u) \notin E$, alors l'applicabilité d'une réduction n'affecte pas l'applicabilité de l'autre. En effet, les deux sommets u et x ne sont pas adjacents donc leur retrait et l'ajout de nouveaux arcs ne changera pas le fait que $N_{G \circ x}^-(u)$ ou $N_{G \circ u}^+(x)$ sont des dicliques. Donc $R_O(x)$ reste applicable dans G_1 et $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathcal{R}^1$. De même, $R_I(u)$ reste applicable dans G_2 , donc $(G_2, G_2 \circ u) \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathcal{R}^1$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = G'' = G \circ u \circ x$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

(c) Si $(u, x) \in E$ et $(x, u) \in E$, alors $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$ forme une diclique. Donc, d'une

part, une fois $R_I(u)$ appliquée, les sommets de $N_G^+(x) \setminus \{u\}$ auront des boucles et nous pouvons appliquer $R_L(s)$ pour tout sommet dans $s \in N_G^+(x) \cup \{x\} \setminus \{u\}$, nous obtenons donc le graphe $G' = G \circ u - (N_G^+(x) \cup \{x\} \setminus \{u\})$. Ainsi $(G_1, G_1 - (N_G^+(x) \cup \{x\} \setminus \{u\})) \in \mathcal{R}_L^{|N_G^+(x)|} \subseteq \mathcal{R}^{|N_G^+(x)|}$. D'autre part, une fois $R_O(x)$ appliquée, les sommets de $N_G^-(u) \cup \{u\} \setminus \{x\}$ auront des boucles et nous pouvons appliquer $R_L(p)$ pour tout sommet dans $p \in N_G^-(u) \cup \{u\} \setminus \{x\}$, nous obtenons donc le graphe $G'' = G \circ u - (N_G^-(u) \cup \{u\} \setminus \{x\})$. Ainsi $(G_2, G_2 - (N_G^-(u) \cup \{u\} \setminus \{x\})) \in \mathcal{R}_L^{|N_G^-(u)|} \subseteq \mathcal{R}^{|N_G^-(u)|}$.

Comme $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$, alors $G' = G \circ u - (N_G^+(x) \cup \{x\} \setminus \{u\}) = G \circ u - (N_G^-(u) \cup \{u\} \setminus \{x\}) = G''$, il suffit donc de prendre $i = j = |N_G^-(u)|$, pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

Voir le lemme A.15 pour la preuve d'existence des réductions et des graphes de ce cas.

- $(G, G_2) \in \mathcal{R}_I$. Supposons qu'il existe un sommet $x \in V$ tel que, $R_I(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G \circ x$. Nous distinguons les cas suivants.

(a) Si $(u, x) \notin E$ et $(x, u) \in E$ et (b) si $(u, x) \notin E$ et $(x, u) \notin E$, alors les deux réductions sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être appliquées séparément sans que l'application d'une réduction n'affecte l'applicabilité de l'autre. Donc $R_I(x)$ est applicable dans G_1 et nous avons $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathcal{R}^1$. De même, $R_I(u)$ est applicable dans G_2 et nous avons $(G_2, G_2 \circ u) \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathcal{R}^1$.

Il suffit donc de prendre $i = j = 1$ et $G' = G'' = G \circ u \circ x$, pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

(b) Si $(u, x) \in E$ et $(x, u) \in E$, alors $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^-(x) \cup \{x\}$ forme une diclique. Donc, d'une part, une fois $R_I(u)$ appliquée, tout sommet $p \in N_G^-(x) \cup \{x\} \setminus \{u\}$ aura une boucle. Nous pouvons appliquer $R_L(p)$ pour tout $p \in N_G^-(x) \cup \{x\} \setminus \{u\}$, ainsi $(G_1, G_1 - N_{G \circ u}^-(x) \cup \{x\}) \in \mathcal{R}_L^{|N_{G \circ u}^-(x)|+1} \subseteq \mathcal{R}^{|N_{G \circ u}^-(x)|+1}$. D'autre part, une fois $R_I(x)$ appliquée, tout sommet $p \in N_G^-(u) \cup \{u\} \setminus \{x\}$ aura une boucle. Nous pouvons donc appliquer $R_L(p)$ pour tout $p \in N_G^-(u) \cup \{u\} \setminus \{x\}$, ainsi $(G_2, G_2 - N_{G \circ x}^-(u) \cup \{u\}) \in \mathcal{R}_L^{|N_{G \circ x}^-(u)|+1} \subseteq \mathcal{R}^{|N_{G \circ x}^-(u)|+1}$.

Comme $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^-(x) \cup \{x\}$, alors $G' = G \circ u - N_{G \circ u}^-(x) \cup \{x\} = G - u - N_G^-(u) = G \circ x - N_{G \circ x}^-(u) \cup \{u\} = G''$, il suffit de prendre $i = j = |N_{G \circ x}^-(u)| + 1$, pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

Voir le lemme A.16 pour la preuve d'existence des réductions et des graphes de ce cas.

Enfin, nous traitons le cas où $(G, G_1) \in \mathcal{R}_O$ avec lui-même, car les cas où (G, G_2) est dans $\mathcal{R}_P, \mathcal{R}_S, \mathcal{R}_L$ et $\mathcal{R}_I$ ont déjà été traités. Supposons donc qu'il existe un sommet $u \in E$ tel que, $R_O(u)$ appliquée à G le réduit en $G_1 = G \circ u$. Alors pour le cas $(G, G_2) \in \mathcal{R}_O$, nous distinguons les cas suivants.

- (a) Si $(u, x) \in E$ et $(x, u) \notin E$ et (b) si $(u, x) \notin E$ et $(x, u) \in E$, alors les deux réductions sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent donc être appliquées séparément sans que l'application d'une réduction n'affecte l'applicabilité de l'autre. Donc $R_O(x)$ est applicable dans G_1 et nous avons $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_O \subseteq \mathcal{R}^1$. De même, $R_O(u)$ est applicable dans G_2 et nous avons $(G_2, G_2 \circ u) \in \mathcal{R}_O \subseteq \mathcal{R}^1$.

Il suffit donc de prendre $i = j = 1$ et $G' = G'' = G \circ u \circ x$, pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

- (b) Si $(u, x) \in E$ et $(x, u) \in E$, alors $N_G^+(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$ forme une diclique. Donc, d'une part, une fois $R_O(u)$ appliquée, tout sommet $s \in N_G^+(x) \cup \{x\} \setminus \{u\}$ aura une boucle. Nous pouvons donc appliquer $R_L(s)$ pour tout $s \in N_G^+(x) \cup \{x\} \setminus \{u\}$, ainsi $(G_1, G_1 - N_{G \circ u}^+(x) \cup \{x\}) \in \mathcal{R}_O^{|N_{G \circ u}^+(x)|+1} \subseteq \mathcal{R}^{|N_{G \circ u}^+(x)|+1}$. D'autre part, une fois $R_O(x)$ appliquée, tout sommet $s \in N_G^+(u) \cup \{u\} \setminus \{x\}$ aura une boucle. Nous pouvons ainsi appliquer $R_L(s)$ pour tout $s \in N_G^+(u) \cup \{u\} \setminus \{x\}$, ainsi $(G_2, G_2 - N_{G \circ x}^+(u) \cup \{u\}) \in \mathcal{R}_L^{|N_{G \circ x}^+(u)|+1} \subseteq \mathcal{R}^{|N_{G \circ x}^+(u)|+1}$.

Comme $N_G^+(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$, alors $G' = G \circ u - N_{G \circ u}^+(x) \cup \{x\} = G - u - N_G^+(u) = G \circ x - N_{G \circ x}^+(u) \cup \{u\} = G''$, il suffit de prendre $i = j = |N_{G \circ x}^+(u)| + 1$, pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

Voir le lemme A.17 pour la preuve d'existence des réductions et des graphes de ce cas.

Tous les cas ayant été traités, nous concluons que $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ a la propriété de Church-Rosser. $\square$

Ainsi grâce à la proposition 1.8 et au théorème 2.1, l'ensemble des réductions $\{\text{LOOP}, \text{IN0}, \text{OUT0}, \text{IN1}, \text{OUT1}, \text{PIE}, \text{CORE}, \text{INDICLIQUE}, \text{OUTDICLIQUE}, \text{SUBSET}\}$ est confluent. Par conséquent, pour un graphe donné G , peu importe l'ordre d'application de ces réductions sur le graphe G , le graphe irréductible final est unique à isomorphisme près.

CHAPITRE 3

ARCS SUPERFLUS ET RÉDUCTIONS CONFLUENTES

Dans ce chapitre, nous approfondissons la famille des réductions de type 4, c'est-à-dire celles qui modifient l'ensemble des arcs du graphe. Ces réductions visent à identifier et retirer les arcs que nous nommons *superflus*, dont la suppression ne compromet pas l'existence d'un transversal de circuits de cardinalité minimale. Après avoir rappelé les réductions `PIE` et `DOMÉ`, ainsi que la variante `DOMÉ++`, nous introduisons deux nouvelles réductions polynomiales conçues pour maximiser le retrait d'arcs non essentiels tout en demeurant compatibles avec l'ensemble confluent étudié au chapitre 2. Une partie des résultats présentés ici est publiée dans le journal *RAIRO - Theoretical Informatics and Applications* (Abdenbi et al., 2025). Ce chapitre enrichit ainsi l'ensemble de réductions applicables pour réduire efficacement un graphe sans altérer les solution du TCCM.

3.1 Arcs essentiels et superflus

Dans cette section, nous examinons de plus près les *arcs superflus*, une généralisation des arcs identifiés par les réductions `PIE` et `DOMÉ`. Nous reprenons la définition 1.1 du chapitre 1 et nous observons d'abord que pour vérifier qu'un sous-ensemble de sommets soit effectivement un transversal de circuits, il suffit de vérifier qu'il ait une intersection non vide avec chaque circuit minimal. Nous avons donc la proposition suivante.

Proposition 3.1 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et un ensemble de sommets $U \subseteq V$. Si U a une intersection non vide avec chaque circuit minimal de G , alors U a une intersection non vide avec tous les circuits de G .*

Preuve. Pour un circuit c donné, notons $V(c)$ l'ensemble des sommets de c . Si c est un circuit qui n'est pas minimal, alors il contient un circuit minimal c' et $U \cap V(c)$ est non vide parce que $U \cap V(c')$ est non vide. $\square$

Par conséquent, lorsque nous cherchons un transversal de circuits, nous pouvons ignorer tous les arcs qui n'appartiennent à aucun circuit minimal.

Définition 3.2 (Arcs essentiel et superflu) *Un arc (u, v) d'un graphe $G = (V, E)$ est un arc essentiel s'il*

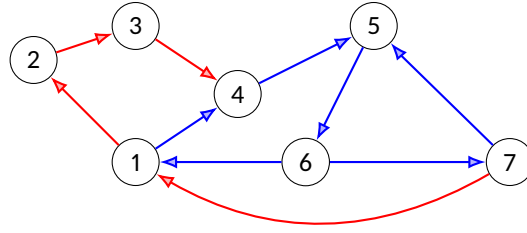


Figure 3.1 – Exemple de circuit minimal, d'arcs essentiels et superflus. Soit le graphe $G = (V, E)$ ci-haut. Les circuits $(1, 4, 5, 6, 1)$ et $(5, 6, 7, 5)$ sont les seuls circuits minimaux et les circuits $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 1)$ et $(1, 4, 5, 6, 7, 1)$ sont des circuit non minimaux. Ainsi, les arcs en bleus sont essentiels tandis que les arcs en rouge sont superflus.

appartient à au moins un circuit minimal. Autrement il est superflu.

La figure 3.1 illustre les deux types d'arcs.

Remarque 3.1 Nous observons qu'une boucle, c'est-à-dire un arc de la forme (u, u) , est toujours essentiel et que si les boucles (u, u) et (v, v) n'appartiennent pas au graphe mais les arcs (u, v) et (v, u) lui appartiennent, alors (u, v) et (v, u) sont essentiels. À noter que si (u, v) est acyclique, alors il est superflu.

Ainsi dans un graphe $G = (V, E)$, si $(u, v) \in E$ est un arc superflu, alors le graphe $G - (u, v)$ a les mêmes circuits minimaux que le graphe G . Par conséquent, un ensemble U de sommets est un transversal de circuits dans G si et seulement s'il est un transversal de circuits dans $G - (u, v)$, ce qui revient à dire que l'ensemble de tous les TCCM dans G est identique à l'ensemble de tous les TCCM dans $G - (u, v)$. Nous notons également que lors de la suppression d'arcs superflus, l'ordre de suppression n'a pas d'importance. La proposition suivante formalise cette observation.

Proposition 3.3 Si un graphe $G = (V, E)$ contient deux arcs superflus distincts (u, v) et (x, y) , alors l'arc (x, y) demeure superflu dans $G - (u, v)$.

Preuve. Nous pouvons raisonner par l'absurde et supposer que (u, v) et (x, y) sont superflus dans G , mais que (x, y) n'est pas superflu dans $G - (u, v)$.

Autrement dit et par définition, (x, y) est un arc essentiel dans $G - (u, v)$. Alors il existe un circuit c dans

$G - (u, v)$ qui passe par (x, y) et qui est minimal. Le circuit c existe également dans G . Nous avons deux cas possibles.

- Soit c est également minimal dans G ce qui constitue une contradiction avec le fait que (x, y) est supposé être superflu dans G .
- Soit c n'est pas minimal dans G , ce qui revient à dire que c'est la suppression de (u, v) qui a rendu (x, y) essentiel. Autrement dit, le circuit c contient un circuit qui passe par (u, v) et qui ne passe évidemment pas par (x, y) . Notons ce circuit c' . Comme (u, v) est superflu dans G , alors c' contient à son tour un circuit qui ne passe pas par (u, v) . Notons ce circuit c'' . Ainsi, c'' est un circuit inclus dans c' et donc ne passe pas par (x, y) et ne contient pas (u, v) . Par conséquent, c'' est un circuit qui existe dans $G - (u, v)$ et qui sera contenu dans c , ce qui fait que c n'est pas minimal, qui est une contradiction avec la supposition que c est minimal.

Dans les deux cas, nous arrivons à une contradiction. Par conséquent, notre supposition est fausse et, ainsi, (x, y) demeure superflu dans $G - (u, v)$. $\square$

Ainsi, lorsque nous recherchons un transversal de circuits de cardinalité minimale, nous souhaitons identifier autant d'arcs superflus que possible et les retirer du graphe. Cependant, déterminer si un arc est superflu ne peut pas être fait en temps polynomial à moins que $P = NP$. Effectivement, le problème de déterminer si un sommet donné appartient à un circuit minimal a été démontré comme étant NP-complet par Lubiw (Lubiw, 1988), ce qui implique que déterminer si un arc appartient à un circuit minimal est également NP-complet. En effet, nous pouvons le démontrer par un raisonnement par l'absurde. Supposons que déterminer si un sommet appartient à un circuit minimal est NP-complet et qu'il est possible de déterminer en temps polynomial si un arc donné est essentiel ou superflu. Nous pouvons donc vérifier tous les arcs entrants ou sortants d'un sommet donné pour savoir s'il appartient à un circuit minimal ou non. Si cette vérification pour un seul arc est polynomiale, alors déterminer qu'un sommet appartient à circuit minimal ou non, se fait également en temps polynomial. Ce qui est une contradiction. Par conséquent, aucune réduction ne peut apporter une condition nécessaire et suffisante calculable en temps polynomial pour décider si un arc est superflu ou non, à moins que $P = NP$.

Nous sommes donc amenés à étudier des conditions suffisantes pour qu'un arc soit superflu, mais d'abord nous avons besoin de quelques définitions et remarques.

Définition 3.4 (Cordes) Soient $G = (V, E)$ un graphe et $c = (u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ un chemin élémentaire où

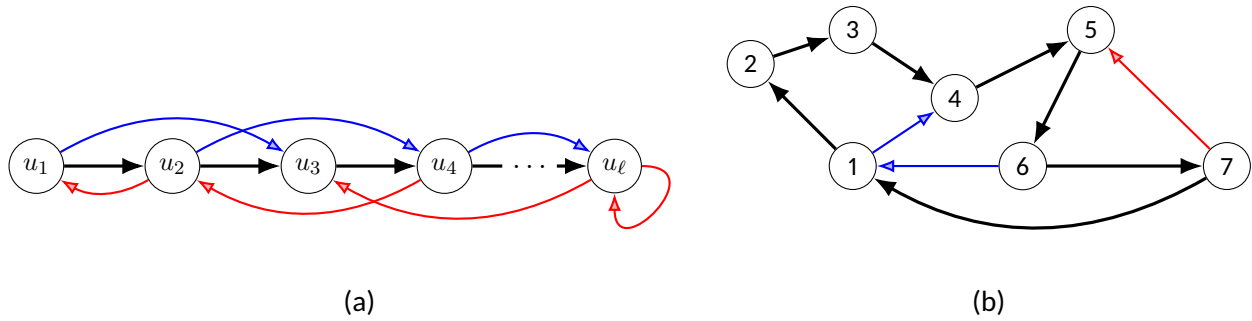


Figure 3.2 – Exemple de cordes. (a) Nous considérons le chemin $c = (u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_\ell)$ dans un graphe $G = (V, E)$. Les arcs en bleu, s'ils existent, sont des exemples de corde avant et les arcs en rouge, s'ils existent, sont des exemples de corde arrière. (b) Nous reprenons le graphe de la figure 3.1. Soit le circuit $(7, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$. Par rapport à l'arc $(7, 1)$ dans le circuit précédent, les arcs $(1, 4)$ et $(6, 1)$ en bleu sont des cordes-avant, tandis que l'arc $(7, 5)$ en rouge est une corde arrière.

$\ell \geq 3$ et $C = \{u_1, u_2, \dots, u_{\ell-1}, u_\ell\}$ l'ensemble des sommets du chemin c .

Une corde de c est un arc $(x, y) \in E$ tel que $x, y \in C$ mais (x, y) n'est pas un arc de c . Nous distinguons deux types de cordes dans un le chemin C .

- Une corde arrière est une corde de c de la forme (u_i, u_j) avec $i \geq j$.
- Une corde avant est une corde de c de la forme (u_i, u_j) avec $i < j$.

Lorsque le contexte est clair, nous omettons la phrase « par rapport à (u_1, u_2) ».

Dans la remarque suivante nous adaptons cette définition aux circuits.

Remarque 3.2 (Corde de circuit) Soient $G = (V, E)$ un graphe et $c = (u_\ell, u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ un circuit élémentaire où $\ell \geq 3$ et $C = \{u_1, u_2, \dots, u_\ell\}$ l'ensemble des sommets du circuit c .

- Une corde de c est un arc (x, y) tel que $x, y \in C$ mais (x, y) n'est pas un arc de c .
- Une corde arrière par rapport à (u_ℓ, u_1) est une corde de c de la forme (u_i, u_j) avec $i \geq j$.
- Une corde avant par rapport à (u_ℓ, u_1) est une corde de c de la forme (u_i, u_j) avec $i < j$.

Lorsque le contexte est clair, nous omettons la phrase « par rapport à (u_ℓ, u_1) ». Il est facile de voir qu'un circuit est minimal si et seulement s'il est sans corde.

La figure 3.2 illustre les cordes de circuit.

Proposition 3.5 Soient $G = (V, E)$ un graphe et $(u, v) \in E$ un arc. Si chaque circuit élémentaire contenant (u, v) a une corde arrière par rapport à (u, v) , alors l'arc (u, v) est superflu.

Preuve. Soit $c = (u_\ell = u, u_1 = v, \dots, u_{\ell-1}, u_\ell)$ un circuit élémentaire qui contient donc (u, v) . Soit (u_i, u_j) avec $i \geq j$ une corde arrière par rapport à (u, v) . Nous pouvons construire un nouveau circuit élémentaire c' de la manière suivante. Comme $i \geq j$, nous considérons le chemin élémentaire $c' = (u_j, u_{j+1}, \dots, u_i)$ qui va donc du sommet u_j vers le sommet u_i . Nous sommes certain que c' ne passe pas par l'arc $(u, v) = (u_\ell, u_1)$, autrement nous devrions avoir $u_\ell \geq j \geq i \geq 1$ ce qui contredit le fait que (u_i, u_j) soit une corde arrière.

Ainsi, tout circuit élémentaire c passant par (u, v) qui a une corde arrière par rapport à (u, v) n'est pas minimal et par conséquent (u, v) est superflu. $\square$

Ainsi, pour décider si un arc (u, v) est superflu, il suffirait de vérifier que tout chemin de v vers u , s'il existe, contient une corde arrière.

Remarque 3.3 Nous notons les observations suivantes.

1. Une corde arrière du circuit (u, v, u) est soit la boucle (u, u) soit la boucle (v, v) , un tel circuit n'a pas de corde avant et la corde arrière est différente de l'arc (u, v) ou (v, u) .
2. La corde (u, u) (resp. (v, v)) est une corde arrière par rapport à la fois à (u, v) et à (v, u) .
3. La notion de corde arrière est utilisée implicitement dans les définitions de *DOME* et *PIE* données par Lin et Jou (Lin et Jou, 2000), ainsi que dans celle de *DOME++* donnée par Kiesel et Schidler (Kiesel et Schidler, 2022). En effet, pour un graphe G sans boucle et un arc (u, v) de G .

— La condition d'acyclicité de (u, v) dans $G^\rightarrow$ introduite par *PIE*, revient à dire que chaque chemin $c = (u_1 = v, u_2, \dots, u_\ell = u)$ a, au moins, une corde arrière de la forme (u_{i+1}, u_i) pour $1 \leq i \leq \ell - 1$.

— Pour la réduction *DOME* nous avons les deux cas suivants.

(i) la condition $N_{G^\rightarrow}^-(u) \subseteq N_G^-(v)$ de l'application de *DOME* sur l'arc (u, v) , peut être formulée ainsi : Tout circuit $c' = (u_\ell = u, u_1 = v, \dots, u_{\ell-1}, u_\ell)$ a une corde arrière de la forme $(u_{\ell-1}, u_1) = (p, v)$ où $p \in N_{G^\rightarrow}^-(u)$.

(ii) De même la condition $N_{G^\rightarrow}^+(v) \subseteq N_G^+(u)$ de l'application de *DOME* sur l'arc (u, v) , peut

être formulée ainsi : Tout circuit $c' = (u_\ell = u, u_1 = v, \dots, u_{\ell-1}, u_\ell)$ a une corde arrière de la forme $(u_\ell, u_2) = (u, s)$ où $s \in N_{G \rightarrow}^+(v)$.

3.2 Réductions d'arcs superflus

À présent pour définir de nouvelles réductions de type 4 s'appliquant sur un arc donné, il suffit de trouver des critères, *peu coûteux*, permettant de vérifier si tout chemin passant par l'arc en question, a au moins une corde arrière par rapport à cet arc. Nous souhaitons également que ces critères puissent couvrir autant d'arcs, identifiés par des réductions connues, que possible, tels que ceux définis par DOME (Lin et Jou, 2000) et DOME++ (Kiesel et Schidler, 2022), par exemple.

Considérons un graphe $G = (V, E)$ et un arc $(u, v) \in E$ tel que $(v, u) \notin E$. Soit $c = (u_1 = v, u_2, \dots, u_\ell = u)$ un chemin qui part de v et se termine en u dans G et $C = \{v, u_2, \dots, u\}$ un ensemble de sommets. Nous pouvons identifier plusieurs formes de corde arrière dont voici quelques exemples.

1. Une corde arrière de la forme (u_i, u_i) pour $1 \leq i \leq \ell$. Cette corde arrière formera un circuit de longueur 1 et fera que le sommet u_i sera identifié par LOOP.
2. Une corde arrière de la forme (u_{i+1}, u_i) pour $1 \leq i \leq \ell - 1$. Cette corde arrière forme, avec l'arc (u_i, u_{i+1}) , un 2-circuit.
3. Une corde arrière de la forme (u_{i+1}, u_{i-1}) pour $2 \leq i \leq \ell - 1$. Cette corde arrière forme, avec les arcs (u_{i-1}, u_i) et (u_i, u_{i+1}) , un circuit de longueur 3.
4. De manière générale, nous pouvons chercher les cordes arrière qui forment un circuit de longueur $k \geq 1$ qui seront de la forme (u_{i+k-1}, u_i) pour $1 \leq i \leq \ell - k + 1$.

À noter qu'une réduction basée sur l'identification de ces 4 formes de corde arrière, inclut tous les arcs identifiables par PIE.

Une condition d'applicabilité au sens de la définition 1.3 pour une corde arrière s'écrit de la manière suivante. D'abord nous considérons les graphes suivants,

- $A = (\{u, v\}, \{(u, v)\})$ le graphe constitué de deux sommets et d'un arc.
- $C_{\ell, k, i} = (\{u_1, \dots, u_\ell\}, \{(u_j, u_{j+1}) \mid 1 \leq j \leq \ell - 1\} \cup \{(u_\ell, u_1), (u_{i+(k-1)}, u_i)\})$ le graphe circuit de longueur ℓ ayant une corde arrière formant un circuit de longueur k .

Ensuite, nous considérons le monomorphisme $\delta_{\ell, k, i} : A \longrightarrow C_{\ell, k, i}$ avec $\delta_{\ell, k, i}(u) = u_\ell$ et $\delta_{\ell, k, i}(v) = u_1$. Enfin nous pouvons varier les indices $\ell, k, i \in \mathbb{N}^*$ pour couvrir ou interdire des circuits avec une conjonction

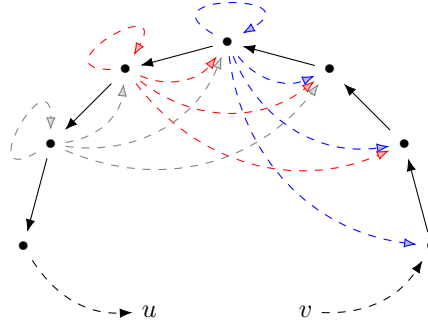


Figure 3.3 – Cordes arrière dans la réduction CHORD_4 . Pour chaque sommet d'un chemin reliant v à u , CHORD_4 vérifie l'existence d'une corde arrière formant un circuit de longueur 1, 2, 3 ou 4. L'analyse commence à v , en recherchant uniquement les cordes arrière de longueur 1, puis la longueur maximale des circuits considérés est progressivement augmentée jusqu'à 4 au fur et à mesure que le chemin de v à u est parcouru.

ou disjonction de condition d'application $\delta_{\ell,k,i}$.

3.2.1 Réduction de cordes CHORD_k

Nous pouvons définir une nouvelle réduction basée sur l'identification de cordes arrière qui forment un circuit de longueur au plus k .

Définition 3.6 (Réduction de cordes CHORD_k) Soient $G = (V, E)$ un graphe et (u, v) un arc tel que $(v, u) \notin E$ et tel qu'aucune réduction de type 2 n'est applicable sur u ou v .

Nous disons que CHORD_k identifie l'arc (u, v) , si pour tout chemin $c = (u_1 = v, u_2, \dots, u_\ell = u)$ de v à u , c a une corde arrière, autre que (u, v) , formant un circuit de longueur au plus k pour $k \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas le graphe G peut être réduit en $G - (u, v)$. Nous notons cette réduction CHORD_k et nous écrivons $\text{CHORD}_k(u, v)$ quand CHORD_k est applicable sur l'arc (u, v) .

Voir la figure 3.3 pour une illustration de certaines des cordes arrière que CHORD_4 recherche pour un chemin appartenant d'un sommet v vers un sommet u .

Un arc identifié par CHORD_k est, par définition, un arc superflu, car tout chemin le traversant a une corde arrière. Par contre, la réduction CHORD_k définie dans la définition 3.6 identifie un sous-ensemble d'arcs superflus. En effet, au-delà du fait qu'elle ne détecte que les cordes arrière formant des circuits d'une lon-

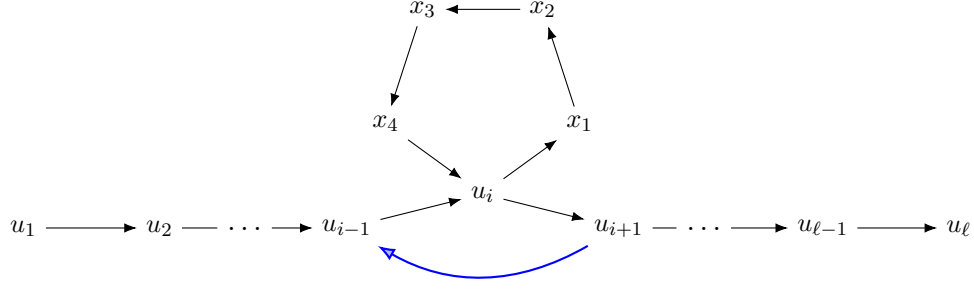


Figure 3.4 – Exemple d’une corde arrière qui n’est pas identifiée par CHORD_3 . Il existe deux chemins dans G reliant u_1 à u_ℓ : un chemin élémentaire $c = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{\ell-1}, u_\ell)$ et un chemin non élémentaire $c' = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, x_1, x_2, x_3, x_4, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{\ell-1}, u_\ell)$. Comme dans la Définition 3.4, seuls les chemins élémentaires sont pris en compte, l’arc (u_ℓ, u_1) est donc superflu. Dans la Définition 3.6, tous les chemins possibles sont considérés, ce qui conduit CHORD_3 à identifier la corde arrière (u_{i+1}, u_{i-1}) dans c . Cependant, CHORD_3 considère que le chemin c' ne contient aucune corde arrière.

gueur d’au plus k , elle prend en compte *tous les chemins* entre deux sommets, y compris les chemins non élémentaires. Cela fournit un critère plus faible pour l’identification des arcs superflus par rapport à la définition 3.4. Voir la figure 3.4 pour une illustration de cette différence.

Par ailleurs, une première propriété d’intérêt pour la réduction CHORD_k est formalisée dans la proposition suivante.

Proposition 3.7 *Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et deux arcs $(u, v), (x, y) \in E$ identifiés par CHORD_k . Alors CHORD_k identifie (x, y) dans $G - (u, v)$.*

Preuve. Le retrait de l’arc (u, v) par la réduction CHORD_k , va potentiellement réduire le nombre de chemins possibles de y vers x , donc l’applicabilité de CHORD_k sur l’arc (x, y) dans $G - (u, v)$ devrait être maintenue. Le seul cas problématique apparaît lorsque (u, v) est une corde arrière d’un chemin $c = (x_1 = y, x_2, \dots, x_\ell = x)$ de y vers x , c’est-à-dire qu’il existe $1 \leq j \leq k$ tel que $c = (x_1 = y, x_2, \dots, x_i = v, \dots, x_{i+(j-1)} = u, \dots, x_\ell = x)$ avec un arc $(x_{i+(j-1)}, x_i) = (u, v)$. Ainsi, si CHORD_k retire l’arc (u, v) identifié comme superflu, alors, à priori, le chemin c perd sa corde arrière. Cependant, dans le chemin c nous avons un sous-chemin de v vers u , $c' = (x_i = v, \dots, x_{i+(j-1)} = u)$ et comme (u, v) est identifié par CHORD_k et que tout chemin, incluant c' , a une corde arrière, alors cette dernière sera également une corde arrière de c et ainsi, c demeure identifiable par CHORD_k . $\square$

La proposition 3.7 constitue un premier pas vers la confluence de la réduction CHORD_k . Une autre propriété

intéressante est qu'elle ne crée pas de nouveaux arcs superflus une fois appliquée. La proposition suivante le formalise.

Proposition 3.8 *Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et deux arcs $(u, v) \neq (x, y) \in E$ tels que (u, v) est identifié par $CHORD_k$ et (x, y) ne l'est pas dans G . Alors, (x, y) n'est pas identifié par $CHORD_k$ dans $G - (u, v)$.*

Preuve. Soit le chemin $c = (x_1 = y, x_2, \dots, x_\ell = x)$ de y vers x dans G qui n'a aucune corde arrière de la forme $(x_{i+(j-1)}, x_i)$ avec $1 \leq j \leq k$ et $1 \leq i \leq \ell - j + 1$. Nous avons deux possibilités concernant le chemin c dans $G - (u, v)$.

- (a) Soit c existe dans $G - (u, v)$, et s'il n'y avait pas de corde arrière, pour (x, y) , identifiable par $CHORD_k$ dans G , à plus forte raison, il n'y en aura pas dans $G - (u, v)$.
- (b) Soit c n'existe pas dans $G - (u, v)$. Autrement dit, il existe $1 \leq i \leq \ell - 1$ tel que $x_i = u$ et $x_{i+1} = v$, donc $c = (x_1 = y, x_2, \dots, x_i = u, x_{i+1} = v, \dots, x_\ell = x)$. Ainsi, le chemin c se divise en trois portions,
 - une première portion constituée du chemin $c_1 = (x_1 = y, \dots, x_{i-1}, x_i = u)$,
 - suivie d'une deuxième portion constituée de l'arc (u, v) ,
 - et enfin une dernière portion constituée du chemin $c_2 = (x_{i+1} = v, x_{i+2}, \dots, x_\ell = x)$.

Si nous ajoutons l'arc (x, y) et que nous retirons l'arc (u, v) , nous créons un nouveau chemin c' de v vers u dans le graphe G , qui sera constitué de c_2 , (x, y) et c_1 . Nous pouvons étiqueter les sommets du nouveau chemin pour revenir à la forme avec des indices croissants, ce qui nous donne,

$$\begin{aligned} c' &= (x_{i+1} = v, & x_{i+2}, & \dots, & x_\ell = x, & x_1 = y, & \dots, & x_{i-1}, & x_i = u) \\ c' &= ([x_{i+1}]_1 = v, & [x_{i+2}]_2, & \dots, & [x_\ell]_{\ell-i} = x, & [x_1]_{\ell-i+1} = y, & \dots, & [x_{i-1}]_{\ell-1}, & [x_i]_\ell = u) \\ c' &= (u_1 = v, & u_2, & \dots, & u_{\ell-i} = x, & u_{\ell-i+1} = y, & \dots, & u_{\ell-1}, & u_\ell = u) \end{aligned}$$

La figure 3.5 illustre les deux chemins c et c' .

Donc c' est un chemin de v vers u dans G et comme (u, v) est identifié par $CHORD_k$ dans G , alors le chemin c' a une corde arrière de la forme $(u_{l+(j-1)}, u_l)$ avec $1 \leq j \leq k$ et nous avons les cas suivants.

- (i) Il n'est pas possible que la corde arrière $(u_{l+(j-1)}, u_l)$ soit une boucle, car elle aurait été également une corde arrière pour le chemin c , qui n'a pas de corde arrière par hypothèse.

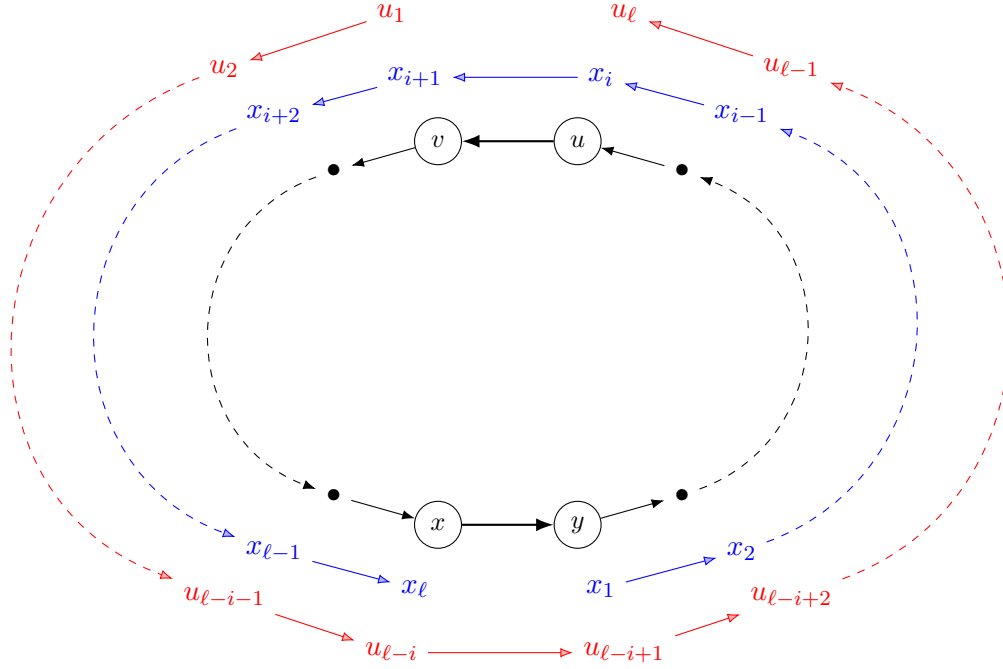


Figure 3.5 – Illustration de haut de niveau des deux chemins c et c' . Le chemin c et l'étiquetage de ses sommets est en bleu. En rouge sont le chemin c' et un étiquetage différent des mêmes sommets. En noir le chemin c avec un étiquetage identique à celui du graphe G .

- (ii) Soit la corde arrière $(u_{l+(j-1)}, u_l)$ est un 2-circuit auquel cas, la seule possibilité autorisée est (u_{l-i+1}, u_{l-i}) et donc $l = l - i$ et $j = 2$. Autrement dit, le 2-circuit est (x, y, x) . Dans les autres cas, le 2-circuit sera identifié par $CHORD_k$ comme corde arrière dans le chemin c qui est supposé ne pas avoir de corde arrière.
- (iii) Soit c'est une corde arrière de longueur $j \geq 3$ et dans ce cas il est impossible que les deux sommets formant cette corde arrière de c' soient parmi les sommets $\{u_1, \dots, u_{l-i}\}$, car cela signifie que la corde arrière est entre deux sommets parmi les sommets $\{x_{i+1}, \dots, x_l\}$ ce qui implique que cette corde arrière est également une corde arrière pour le chemin c , qui n'en a pas.

De même, il est impossible que les deux sommets formant cette corde arrière soient dans l'ensemble de sommets $\{u_{l-i+1}, \dots, u_l\}$, car cela implique que la corde arrière est entre deux sommets parmi les sommets $\{x_1, \dots, x_i\}$ ce qui implique que cette corde arrière est également une corde arrière pour le chemin c , qui n'en a pas.

Donc l'unique possibilité est que la corde arrière de c' soit formée par un premier sommet r

dans l'ensemble $\{u_{\ell-i+1}, \dots, u_\ell\}$ et un second sommet s dans l'ensemble $\{u_1, \dots, u_{\ell-i}\}$. Ainsi, nous avons un arc (r, s) tel que $r \in \{u_{\ell-i+1}, \dots, u_\ell\} = \{x_1, \dots, x_i\}$ et $s \in \{u_1, \dots, u_{\ell-i}\} = \{x_{i+1}, \dots, x_\ell\}$. Ce qui nous permet de réécrire le chemin c' de la manière suivante.

$$c' = (u_1 = v, \dots, s, \dots, u_{\ell-i} = x, u_{\ell-i+1} = y, \dots, r, \dots, u_\ell = u)$$

avec un arc (r, s) , nous pouvons donc extraire de c' un chemin c'' de y à x dans G qui ne passe pas par (u, v) ,

$$c'' = (u_{\ell-i+1} = y, \dots, r, s, \dots, u_{\ell-i} = x)$$

Comme CHORD_k n'identifie pas (x, y) dans G , alors le chemin c'' n'a pas de corde arrière formant un circuit de longueur $\leq k$ et il ne passe pas par (u, v) ,

Par conséquent, peu importe la longueur du circuit créé par la corde arrière de c' , nous pouvons utiliser cette corde arrière pour construire un nouveau chemin c'' (qui peut être un simple arc dans le cas de corde arrière formant un 2-circuit) de y vers x qui ne passe pas par (u, v) , ce qui nous renvoie au cas (a) de cette preuve. Donc, c'' n'a pas de corde arrière identifiable par CHORD_k dans $G - (u, v)$.

Ainsi, dans tous les cas, (x, y) demeure non-identifiable par CHORD_k dans $G - (u, v)$. $\square$

Nous pouvons élargir l'ensemble des réductions confluentes introduit dans le chapitre 2 avec la réduction CHORD_k .

D'abord, soit la relation $\mathcal{R}_C = \{(G, G') \mid G \text{ est réduit en } G' \text{ par la réduction } \text{CHORD}_k\}$. Nous avons la relation binaire $\mathcal{R}_1$ suivante sur l'ensemble $\mathcal{G}$ de tous les graphes orientés finis,

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_L \cup \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}_O \cup \mathcal{R}_S \cup \mathcal{R}_C$$

Comme CHORD_k couvre PIE pour $k \geq 2$, alors la proposition 1.8 nous indique que la relation $\mathcal{R}$ du chapitre 2 est incluse dans $\mathcal{R}_1$ et nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.9 $(\mathcal{G}, \mathcal{R}_1)$ a la propriété de finitude de Church-Rosser.

La preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème 2.1 du chapitre 2. Pour alléger la lecture de ce chapitre, cette preuve est fournie à l'annexe B.

Algorithme 1 CHORD_k Réduction

Entrée : $G = (V, E)$: graphe orienté, u, v : sommet**Sortie :***vrai* si l'arc (u, v) est identifié par CHORD_k comme superflus*faux* sinon

```
1: fonction  $\text{CHORD}_k(G = (V, E), u, v)$ 
2:   pour  $x \in V$  faire
3:      $\gamma_k(x) \leftarrow \{\}$ 
4:   fin pour
5:   retourner  $\neg \text{K-CHEMINSANS CORDE}(G, u, v, (v))$ 
6: fin fonction
```

Entrée : $G = (V, E)$: graphe orienté, u, v : sommet s : un chemin $\langle x_1, x_2, \dots, x_{\ell-1}, x_\ell \rangle$ de longueur $\ell - 1$, avec $\ell \leq k$ γ_k : fonction associant à un sommet x l'ensemble des k -suffixes menant à x déjà visités**Sortie :***vrai* s'il existe un chemin de v vers u sans corde arrière identifiable par CHORD_k *faux* sinon

```
1: fonction  $\text{K-CHEMINSANS CORDE}(G, u, v, s)$ 
2:    $s' \leftarrow \langle x_1, x_2, \dots, x_{\ell-1} \rangle$  ▷ retire le dernier sommet  $x_\ell$  de  $s$ 
3:   si  $s' \in \gamma_k(x_\ell)$  alors ▷ atteindre  $x_\ell$  au travers de  $s'$  a déjà été exploré
4:     retourner faux
5:   fin si
6:    $\gamma_k(x_\ell).\text{ajouter}(s')$ 
7:   pour  $y \in V(s)$  faire
8:     si  $(x_\ell, y) \neq (u, v)$  et  $(x_\ell, y) \in E$  alors ▷ une corde arrière a été trouvée
9:       retourner faux
10:    fin si
11:  fin pour
12:  si  $x_\ell = u$  alors ▷ nous avons trouvé un chemin sans corde arrière
13:    retourner vrai
14:  fin si
15:  pour  $y$  successeur de  $x_\ell$  faire
16:    si  $\ell = k$  alors
17:       $s'' \leftarrow \langle x_2, \dots, x_{\ell-1}, x_\ell, y \rangle$  ▷ retire  $x_1$  et ajoute  $y$  au chemin  $s$ 
18:    sinon ▷ dans ce cas  $\ell < k$ 
19:       $s'' \leftarrow \langle x_1, x_2, \dots, x_{\ell-1}, x_\ell, y \rangle$ 
20:    fin si
21:    si  $\text{K-CHEMINSANS CORDE}(G, u, v, s'', \gamma_k)$  alors
22:      retourner vrai
23:    fin si
24:  fin pour
25:  retourner faux
26: fin fonction
```

Table 3.1 – L'appel $K\text{-CHEMINSANS CORDE}(G, c, i, (i))$ retourne vrai

s	x_ℓ	$\gamma_3(x_\ell)$
(i)	i	$i[()]$
(i, h)	h	$h[(i)]$
(i, h, g)	g	$g[(i, h)]$ (g, i)

corde arrière identifiable par CHORD_3 , ce qui signifie que l'algorithme retourne faux, et donc que l'arc donné n'est pas identifié comme superflu par CHORD_3 .

Le Tableau 3.1 présente les appels récurifs à $K\text{-CHEMINSANS CORDE}()$ pour l'arc (c, i) , identifié par CHORD_3 comme superflu. Le Tableau 3.3 montre les appels récurifs à $K\text{-CHEMINSANS CORDE}()$ pour l'arc (a, b) , qui n'est pas identifié par CHORD_3 en raison du chemin (b, c, h, g, f, a) .

Afin de démontrer la justesse de l'algorithme 1, nous introduisons la notion de k -suffixe. Soit $c = (p_1, \dots, p_\ell)$ un chemin dans un graphe orienté $G = (V, E)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, le k -suffixe de c est le sous-chemin constitué des k derniers sommets de c si $k \leq \ell$, ou l'intégralité du chemin c si $k > \ell$. Ainsi, le k -suffixe de c est le sous-chemin $(p_i, p_{i+1}, \dots, p_\ell)$, où $i = \max(1, \ell - k)$.

Lemme 3.10 Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté, $(u, v) \in E$ un arc, et $k \geq 1$ un entier.

Alors, l'algorithme 1 termine toujours et explore les k -suffixes des chemins partant de v soit jusqu'à atteindre u sans trouver de corde arrière identifiable par CHORD_k , soit jusqu'à ce que tous les k -suffixes de ces chemins aient été explorés.

Preuve. Soient γ_k et s tels que définis dans l'algorithme 1.

Tout d'abord, comme nous limitons la longueur de s à au plus $k - 1$, alors s est toujours le k -suffixe d'un certain chemin. Dans l'algorithme 1, pour un sommet donné x_ℓ , si la condition à la ligne 3 est fausse et que s ne contient aucune corde arrière et n'atteint pas u , alors nous explorons tous les sommets de $N_G^+(x_\ell)$ et, pour chacun d'eux, nous étendons le k -suffixe s afin de créer de nouveaux chemins. Sinon, le sommet x_ℓ a déjà été traité en suivant exactement le même k -suffixe s' pour l'atteindre. Dans tous les cas, les sommets de $N_G^+(x_\ell)$ sont visités au moins une fois. Par conséquent, l'algorithme 1 explore tous les chemins partant de v et s'arrête uniquement s'il trouve un chemin vers u dont le k -suffixe ne contient aucune corde arrière.

Table 3.2 – L'appel $K\text{-CHEMINSANS CORDE}(G, e, d, (d))$ retourne vrai

s	x_ℓ	$\gamma_3(x_\ell)$
(d)	d	$d[()]$
(d, b)	b	$b[(d)]$ (d, b)
(d, c)	c	$c[(d)]$
(d, c, i)	i	$i[(d, c)]$
(c, i, h)	h	$h[(c, i)]$
(i, h, g)	g	$g[(i, h)]$ (g, i)
(d, c, h)	h	$h[(c, i)(d, c)]$
(c, h, g)	g	$g[(i, h)(c, h)]$
(h, g, a)	a	$a[(h, g)]$ (a, h)
(h, g, f)	f	$f[(h, g)]$
(g, f, a)	a	$a[(h, g)(g, f)]$
(f, a, b)	b	$b[(d)(f, a)]$
(a, b, c)	c	$c[(d)(a, b)]$
(b, c, i)	i	$i[(d, c)(b, c)]$
(c, i, h)	h	$h[(c, i)(d, c)]$ (c, i)
(b, c, h)	h	$h[(c, i)(d, c)(b, c)]$
(c, h, g)	g	$g[(i, h)(c, h)]$ (c, h)
(a, b, d)	d	$d[()](a, b)$ (d, b)
(a, b, e)	e	$e[(a, b)]$ (e, e)
(f, a, h)	h	$h[(c, i)(d, c)(b, c)(f, a)]$
(a, h, g)	g	$g[(i, h)(c, h)(a, h)]$ (g, a)
(g, f, e)	e	$e[(a, b)(g, f)]$ (e, e)
(h, g, i)	i	$i[(d, c)(b, c)(h, g)]$ (i, h)

Table 3.3 – L'appel $K\text{-CHEMINSANS CORDE}(G, a, b, (b))$ retourne faux

s	x_ℓ	$\gamma_3(p_\ell)$
(b)	b	$b[()]$
(b, c)	c	$c[(b)]$
(b, c, i)	i	$i[(b, c)]$
(c, i, h)	h	$h[(c, i)]$
(i, h, g)	g	$g[(i, h)]$ (g, i)
(b, c, h)	h	$h[(c, i)(b, c)]$
(c, h, g)	g	$g[(i, h)(c, h)]$
(h, g, a)	a	$a[(h, g)]$ (a, h)
(h, g, f)	f	$f[(h, g)]$
(g, f, a)	a	$a[(h, g)(g, f)]$

Comme nous limitons la longueur des chemins à moins de k grâce à la condition de la ligne 16, tous les chemins considérés dans l'algorithme 1 sont des k -suffixes de chemins partant de v vers des sommets de $N_G^+(x_\ell)$. Ainsi, pour chaque sommet x_ℓ atteignable depuis v , nous conservons tous les k -suffixes distincts dans la fonction d'association $\gamma_k(x_\ell)$, grâce à la ligne 6. Par conséquent, en utilisant la condition de la ligne 3, nous n'explorons pas et n'étendons pas un k -suffixe s'il a déjà été traité.

Maintenant, si nous posons $\Delta = \max\{|N_G^-(y)| \mid y \in V\}$, nous savons que le nombre de k -suffixes menant à un sommet donné x_ℓ dans G est borné par

$$\underbrace{\Delta \cdot \dots \cdot \Delta}_{k \text{ fois}} = \Delta^k.$$

En d'autres termes, $|\gamma_k(x_\ell)| \leq \Delta^k$. Ainsi, chaque sommet de G est considéré au plus Δ^k fois pour l'extension des k -suffixes dans la boucle **pour** de la ligne 15, ce qui signifie que la fonction `K-CHEMINSANSCORDE()` est appelée au plus $|V| \cdot \Delta^k$ fois. Cela implique que l'algorithme 1 termine toujours. $\square$

Nous prouvons maintenant la justesse de l'algorithme 1.

Lemme 3.11 Soit $G = (V, E)$ un digraphe et $(u, v) \in E$ un arc. Alors `CHORDk` est applicable à (u, v) si et seulement si l'algorithme 1 retourne vrai.

Preuve. Soient γ_k et s tels que définis dans l'algorithme 1.

Si (u, v) est identifié par `CHORDk`, alors tous les chemins de v à u possèdent une corde arrière identifiée par `CHORDk`. D'après le lemme 3.10, nous savons que l'algorithme 1 explore les k -suffixes de tous les chemins possibles partant de v , sauf s'il atteint u sans trouver de corde arrière. Grâce à la boucle **pour** de la ligne 7 et à la condition **si** de la ligne 8, l'algorithme 1 vérifie toutes les cordes arrière possibles de la forme (x_ℓ, y) où y est dans le k -suffixe courant s . Comme s est un k -suffixe, il contient au plus k sommets, ce qui signifie que le plus grand circuit qu'une corde arrière peut former a une longueur de k . Le plus petit circuit est une boucle, dans le cas où $y = x_\ell$. Ainsi, la boucle **pour** à la ligne 7 recherche une corde arrière identifiable par `CHORDk` dans les k -suffixes de tous les chemins possibles partant de v , y compris ceux menant à u s'ils existent. Cela implique que l'appel à l'algorithme 1 retourne vrai.

Réciproquement, supposons qu'un appel à l'algorithme 1 retourne vrai. D'après le lemme 3.10, nous savons que tous les k -suffixes de tous les chemins possibles partant de v et menant à u seront explorés. Si une corde arrière est trouvée par la boucle **pour** de la ligne 7, alors l'exploration s'arrête au sommet courant x_ℓ . Si aucune corde n'est trouvée, alors u n'est pas atteint, sinon l'algorithme aurait retourné faux. Grâce encore une fois au lemme 3.10, nous savons que les appels récursifs à $K\text{-CHEMIN}\text{SANS}\text{CORDE}()$ sont bornés et que, par conséquent, l'algorithme 1 retourne vrai, indiquant que (u, v) est identifié par CHORD_k . $\square$

Grâce à la fonction de correspondance γ_k , nous sommes assurés que l'algorithme 1 ne visitera pas un sommet donné plus de Δ^k fois. En effet, pour un sommet donné x , la fonction γ_k stocke les k -suffixes menant à x . Le nombre maximal de k -suffixes pouvant être explorés est borné par $\Delta = \max\{|N_G^-(y)| \mid y \in V\}$ élevé à la puissance k . Grâce à la condition **si** de la ligne 3, il est garanti qu'un même sommet x ne sera pas visité deux fois par le même k -suffixe. Par conséquent, l'algorithme 1 effectue au plus $|V| \cdot \Delta^k$ appels récursifs, tandis que la condition **si** à la ligne 3 et la boucle **pour** à la ligne 7 sont bornées par une expression polynomiale en k . Ainsi, la complexité de l'algorithme 1 est $\mathcal{O}(|V| \cdot \Delta^{2k})$, ce qui reste polynomial tant que k est fixé.

3.2.2 Réduction d'arcs dominés DARC

Si nous désirons une réduction qui inclut les arcs identifiés par la réduction DOME , alors CHORD_k ne suffit pas. En effet, il faudra considérer les deux formes de corde arrière pour l'arc (u, v) suivantes, qui ne sont pas toujours couvertes par CHORD_k . Étant donné un chemin $c = (u_1 = v, u_2, \dots, u_\ell = u)$ de v vers u dans un graphe G .

1. Une corde arrière de la forme $(u_\ell = u, u_i)$ pour $2 \leq i \leq \ell - 1$. Cette corde arrière couvre le cas $N_{G \rightarrow}^+(v) \subseteq N_G^+(v) \subseteq N_G^+(u)$ de la réduction DOME . En effet, on ne cherche plus seulement un arc de u vers un successeur de v , mais un arc (u, s) , tel qu'il existe un chemin de v vers s .
2. Une corde arrière de la forme $(u_i, u_1 = v)$ pour $2 \leq i \leq \ell - 1$. Cette corde arrière couvre le cas $N_{G \rightarrow}^-(u) \subseteq N_G^-(u) \subseteq N_G^-(v)$ de la réduction DOME . En effet, on ne cherche plus seulement un arc d'un prédécesseur de u vers v , mais un arc (p, v) , tel qu'il existe un chemin de c vers u .

Nous conservons une complexité polynomiale avec ces deux vérifications, plus précisément nous gardons exactement la même complexité $\mathcal{O}((|V| + |E|) \max_{x \in V} \deg^+(x))$ (à cause du fait que nous vérifions les degrés intérieurs de tous les sommets $x \in V$).

Ainsi, si nous voulons inclure ces deux formes de corde arrière, nous introduisons une nouvelle réduction DARC de la manière suivante.

Définition 3.12 (Réduction d'arcs dominés DARC) Soient $G = (V, E)$ un graphe et (u, v) un arc tel que $(v, u) \notin E$ et aucune réduction de type 2 n'est applicable sur u ou v . Nous disons que DARC est applicable sur (u, v) si tout chemin $c = (u_1 = v, u_2, \dots, u_\ell = u)$, avec $\ell \geq 3$, a une corde arrière de l'une des formes suivantes,

Forme 1. (u_i, u_i) pour $2 \leq i \leq \ell - 1$.

Forme 2. (u_{i+1}, u_i) pour $1 \leq i \leq \ell - 1$.

Forme 3. (u_ℓ, u_i) pour $2 \leq i < \ell - 1$.

Forme 4. (u_i, u_1) pour $2 < i \leq \ell - 1$.

Dans ce cas le graphe G peut être réduit en $G - (u, v)$.

Cette réduction généralise les réductions PIE ainsi que DOME (Lin et Jou, 2000) et DOME++ (Kiesel et Schidler, 2022). À noter que la définition de DOME++ originale introduite par Kiesel et Shidler (Kiesel et Schidler, 2022) présente des erreurs évidentes que les auteurs n'ont toujours pas corrigées au moment d'écrire ces lignes, notamment la condition qui stipule qu'un arc (u, v) est identifié par DOME++ si « tout chemin de u vers v passe par un sommet $N_G^-(v) \setminus \{u\}$ », condition qui n'a aucun impact sur les circuits passant par (u, v) . C'est la réduction que nous pensons qu'ils voulaient définir qui est généralisée par DARC. Notamment, ils ne considèrent pas les boucles comme cordes arrière potentielles et ils n'abordent pas la notion de corde arrière ni les arcs superflus ou des concepts s'y apparentant.

Remarque 3.4 Une manière d'interpréter les 4 formes de corde arrière de la réduction DARC est la suivante. Pour un arc (u, v) et un chemin $c = (u_1 = v, u_2, \dots, u_\ell = u)$ dans un graphe G .

Forme 1. Il existe un sommet du chemin c avec une boucle.

Forme 2. Il existe deux sommets du chemin c qui forment un 2-circuit.

Forme 3. Il existe un arc de u vers un sommet du chemin c autre que v , autrement dit, c passe par un sommet de $N_G^+(u) \setminus \{v\}$.

Forme 4. Il existe un arc d'un sommet du chemin c autre que u vers v , autrement dit, c passe par un sommet de $N_G^-(v) \setminus \{u\}$.

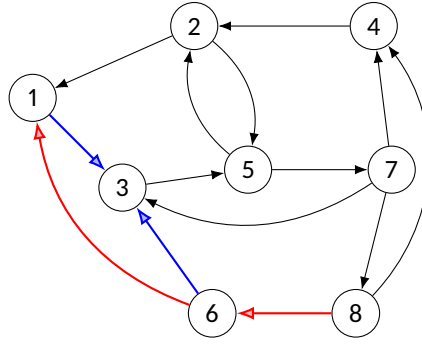


Figure 3.7 – Exemple d'arcs identifiés par la réduction DARC. L'arc $(1, 3)$ est identifié par DARC, car les chemins $(3, 5, 2, 1)$, $(3, 5, 7, 4, 2, 1)$, $(3, 5, 7, 8, 4, 2, 1)$ et $(3, 5, 7, 8, 6, 1)$ ont respectivement les cordes arrière $(2, 5)$ de la forme 2 et le reste des chemins ont $(7, 3)$ comme corde arrière de la forme 4. L'arc $(6, 3)$ est identifié par DARC, car le chemin $(3, 5, 7, 8, 6)$ a $(7, 3)$ comme corde arrière de la forme 4. Noter que les arcs $(8, 6)$ et $(6, 1)$ ne seront pas identifiés par DARC, même si l'arc $(7, 3)$ est une corde arrière pour tous les chemins de 6 vers 8 et de 1 vers 6. Par contre, il est facile d'inclure la forme qui permettra d'identifier ces arcs.

Voir la figure 3.7 pour une illustration de la réduction DARC.

Malheureusement, la réduction DARC telle que définie ne conflue pas avec l'ensemble des réductions introduit dans le chapitre 2, en particulier, avec elle-même. Le problème vient des conditions qui généralisent la réduction DOME, c'est-à-dire les cordes arrière de forme 3 et 4. Plus précisément, c'est le cas où un arc est en même temps un arc identifié par DARC et l'unique corde arrière pour un autre arc identifiable par DARC. Voir la figure 3.8 pour une illustration d'une telle situation. Nous revenons dans le chapitre 4 sur la possibilité de retirer ces arcs dans un ordre précis de telle sorte que nous évitons de perdre des arcs préalablement identifiés par DARC.

Notons que les cordes arrière de forme 1 et forme 2 ne posent pas un tel problème. En effet, une boucle ne peut pas être identifiée par DARC comme un arc superflu, car c'est un circuit de longueur 1. De même, un arc (u, v) appartenant à un 2-circuit, s'il est identifié par DARC, implique que soit u soit v a une boucle, ce qui nous ramène au point précédent. En effet, si (u, v) fait partie d'un 2-circuit et est identifié par DARC, alors soit u a une boucle, soit v a une boucle comme corde arrière par rapport à (u, v) . Donc même si l'arc (u, v) est retiré par DARC, tout chemin passant par (v, u) , qui a (u, v) comme corde arrière, a également une corde arrière de forme 1, c'est-à-dire une boucle (v, v) ou (u, u) .

Ainsi, pour un arc (u, v) , si nous voulons que son retrait par DARC n'annule pas l'applicabilité de DARC sur un autre arc, nous devons étudier les cas où (u, v) est une corde arrière de la forme 3 ou de la forme 4, tel

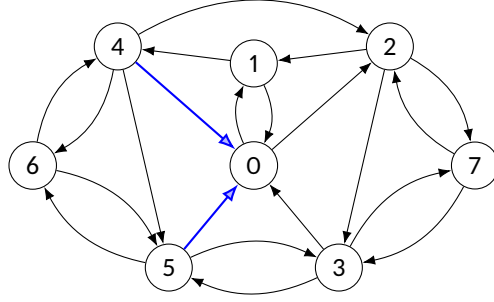


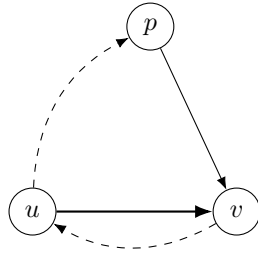
Figure 3.8 – Contre-exemple de la confluence de la réduction DARC avec elle-même. Soit le graphe $G = (V, E)$ représenté ci-haut. Les arcs $(4, 0)$ et $(5, 0)$ en bleu sont identifiés par DARC. En effet, il n'existe qu'un seul chemin $(0, 2, 1, 4)$ de 0 vers 4 sans 2-circuit, comme $(4, 2)$ est une corde arrière de la forme 3, alors $(4, 0)$ sera identifié par DARC. De même, il n'existe qu'un seul chemin $c = (0, 2, 1, 4, 5)$ de 0 vers 5 sans 2-circuit, comme $(4, 0)$ est une corde arrière de la forme 4, alors $(5, 0)$ sera identifié par DARC. Si nous appliquons DARC sur l'arc $(4, 0)$, alors l'arc $(5, 0)$ ne sera plus identifié par DARC, car le chemin c reste un chemin de 0 vers 5 dans $G - (4, 0)$ sans corde arrière d'aucune des quatre formes identifiées par DARC. Notons qu'aucune autre réduction de l'ensemble des réductions confluentes du chapitre 2 n'est applicable dans $G - (4, 0)$.

qu'illustré dans la figure 3.9.

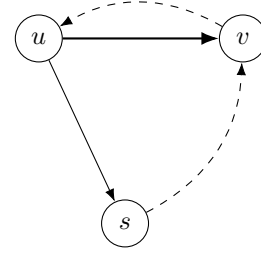
Donc si nous désirons que le retrait d'un arc (u, v) identifié par DARC n'affecte pas l'applicabilité de DARC sur un autre arc, alors, en plus des conditions d'applicabilité de DARC, nous devons imposer des conditions qui garantissent que (u, v) n'est pas une corde arrière pour un autre arc ou, du moins, que ce n'est pas la seule corde arrière. Nous pouvons commencer par les deux conditions suivantes.

- C1.** u ne doit apparaître dans aucun chemin de v vers $p \in N_G^-(v) \setminus \{u\}$, pour éviter la situation illustrée dans la figure 3.9 (a). Autrement dit, cette condition sert à éviter l'éventualité où l'arc (p, v) est identifié par DARC, grâce à la corde arrière (u, v) .
- C2.** v ne doit apparaître dans aucun chemin de $s \in N_G^+(u) \setminus \{v\}$ vers u , pour éviter la situation illustrée dans la figure 3.9 (b). Autrement dit, cette condition sert à éviter l'éventualité où l'arc (u, s) est identifié par DARC, grâce à la corde arrière (u, v) .

Remarque 3.5 Les conditions C1 et C2 sont fortes, dans le sens où elles peuvent prévenir l'identification d'un arc (u, v) juste à cause de l'existence d'un chemin dont (u, v) est une potentielle corde arrière. En effet, (u, v) ne peut plus être identifié par DARC, s'il y a une possibilité qu'un arc (v, p) (respectivement (s, u)) ait un chemin de p vers v (respectivement un chemin de u vers s), ce qui fera de (u, v) une corde arrière de la forme 4 (respectivement de la forme 3). Même si les arcs (p, v) et (u, s) ne seront pas identifiés par DARC



(a) (u, v) est une corde-arrière de la forme $u \in N_G^-(v) \setminus \{p\}$ par rapport à l'arc (p, v) et le chemin qui va de v vers p .



(b) (u, v) est une corde-arrière de la forme $v \in N_G^+(u) \setminus \{s\}$ par rapport à l'arc (u, s) et le chemin qui va de s vers u .

Figure 3.9 – Illustration de la dépendances des cordes arrière de la réduction DARC. Soit le sous-graphe plus haut d'un graphe $G = (V, E)$ représentant un arc (u, v) qui est une corde arrière pour un autre arc. Les arcs en pointillé représentent des chemins avec au moins un arc. (a) Un chemin de v vers p a (u, v) comme corde arrière de forme 4. (b) Un chemin de s vers u a (u, v) comme corde arrière de forme 3.

plus tard (potentiellement à cause d'autres chemins sans corde arrière).

Nous pouvons donc relaxer les conditions $C1, C2$ avec le retrait des sommets voisins dans $G^{\leftrightarrow}$ car ces sommets forment un 2-circuit avec u ou v et leur identification par DARC implique qu'il y a des boucles. De manière générale, nous pouvons ignorer tous les chemins contenant des cordes arrière de forme 1 et de forme 2 vu qu'elles ne posent pas de problème de dépendance. En effet, les boucles et les 2-circuits vont remplacer (u, v) comme corde arrière s'il y a lieu. Ainsi nous avons les conditions relaxées suivantes

CR1. Tout chemin de v vers $p \in N_{G \rightarrow}^-(v) \setminus \{u\}$ soit ne passe pas par u , soit contient une boucle ou un 2-circuit.

CR2. Tout chemin de $s \in N_{G \rightarrow}^+(u) \setminus \{v\}$ vers u soit ne passe pas par v , soit contient une boucle ou un 2-circuit.

Remarque 3.6 Nous aurions pu ajouter les cordes arrière de forme 3 ou forme 4 au chemin de v vers p ou de s vers u . Cependant, cela ne fait que complexifier les conditions et augmenter grandement le coût algorithmique d'identification de ces arcs. Ceci étant dit, nous considérons ces deux formes de corde arrière dans des contextes précis que nous décrivons plus bas.

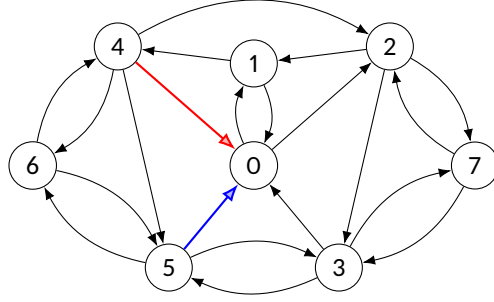


Figure 3.10 – Illustration des conditions restrictives d'application de DARC. Nous reprenons le graphe du contre-exemple de la figure 3.8. L'arc $(4, 0)$ sera donc identifié par DARC comme étant superflu. Par contre, la condition CR1 n'est pas respectée. En effet, il y a un chemin de 0 vers $5 \in N_{G \rightarrow}^-(0) \setminus \{4\}$ qui passe par 4 et qui n'a ni boucle ni 2-circuit $(0, 2, 1, 4, 5)$. À noter que $(5, 0)$ sera identifié par DARC et il respecte les deux conditions CR1 et CR2. En effet, aucun chemin de 0 vers $p \in N_{G \rightarrow}^-(0) \setminus \{5\} = \{4\}$ ne passe par 5 et $N_{G \rightarrow}^+(5) \setminus \{0\} = \emptyset$.

Voir la figure 3.10 pour une illustration de ces deux conditions et de leur effet.

Nous pourrions être tentés de définir une réduction qui restreint la réduction DARC en ajoutant les deux conditions CR1 et CR2, cependant si nous utilisons ces deux conditions en plus des critères de DARC pour identifier des arcs superflus, elles restent quand même restrictives. En effet, les deux conditions CR1 et CR2 sont supposées empêcher l'applicabilité de DARC pour protéger des arcs qui peuvent éventuellement être identifiés par DARC et ceci même si au final les arcs protégés en question ne sont pas identifiables par DARC. La figure 3.11 donne un exemple où ces deux conditions protègent un arc qui n'est pas superflu.

Ceci étant dit, les deux conditions CR1 et CR2 permettent de mieux encadrer l'utilisation de la réduction DARC. En effet, si un arc (u, v) est identifié par DARC, alors la condition CR1, si (u, v) la vérifie, prévient (u, v) d'être une corde arrière de forme 4 pour un arc de la forme (p, v) . Autrement dit, tous les arcs potentiellement *dépendants* de (u, v) comme potentielle corde arrière, ont v comme extrémité finale. Donc si nous généralisons DARC d'une réduction applicable sur un arc à une réduction applicable sur un sommet pour identifier tous les arcs superflus ayant ledit sommet comme extrémité finale, nous neutralisons la dépendance créée par le non-respect de la condition CR1.

Pour remédier aux dépendances liées aux conditions CR1 et CR2, nous scindons la réduction DARC en deux réductions. Pour un graphe $G = (V, E)$ et un arc $(u, v) \in E$, nous avons.

DARC_G^+ est applicable sur (u, v) , si tout chemin de v vers u a une corde arrière qui est soit une boucle (forme 1), soit un 2-circuit (forme 2) soit un arc (u, s) avec $s \in N_G^+(u) \setminus \{v\}$ (forme 3).

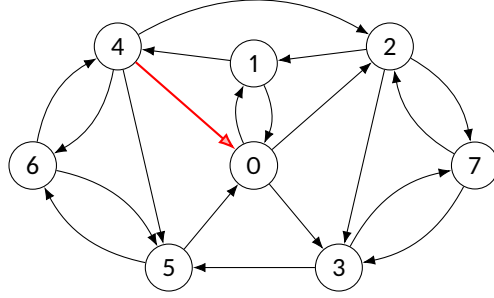


Figure 3.11 – Illustration des limites des conditions restrictives d'application de DARC. Nous considérons un graphe similaire à celui de la figure 3.10 avec une légère modification. L'arc $(4, 0)$ est identifié par DARC comme étant superflu. En effet, le chemin $(0, 2, 1, 4)$ de 0 vers 4 est sans boucle ni 2-circuit, mais $(4, 2)$ est une corde arrière de la forme 3. Les autres chemins qui passent par les sommets 3 et 5 supportent des 2-circuits. Alors $(4, 0)$ sera identifié par DARC. Par contre, la condition CR1 n'est pas respectée. En effet, le chemin $(0, 2, 1, 4, 5)$ de 0 à $5 \in N_{G \rightarrow}^-(0) \setminus \{4\}$ passe par 4 et n'a ni boucle ni 2-circuit. Ceci étant dit, l'arc $(5, 0)$ n'est pas superflu et ne sera pas identifié par DARC, car le circuit $(5, 0, 3, 5)$ n'a aucune corde et est donc minimal. Par conséquent, une réduction basée sur DARC et les deux conditions CR1 et CR2 ne s'appliquera pas sur $(4, 0)$ parce que les conditions évaluent qu'il est possible que $(4, 0)$ soit une corde arrière pour l'arc $(5, 0)$ et bloquent inutilement l'applicabilité de DARC sur $(4, 0)$.

DARC_G^- est applicable sur (u, v) , si tout chemin de v vers u a une corde arrière qui est soit une boucle (forme 1), un 2-circuit (forme 2) ou un arc (p, v) avec $p \in N_{G \rightarrow}^-(v) \setminus \{u\}$ (forme 4).

Ainsi, pour un arc (u, v) donné, DARC^- et la condition CR1, nous assurent que l'arc identifié n'est pas l'unique corde arrière par rapport à un arc (p, v) dont dépendrait l'applicabilité de DARC^- . De même, DARC^+ et la condition CR2, nous assurent que l'arc identifié n'est pas l'unique corde arrière par rapport à un arc (u, s) dont dépendrait l'applicabilité de DARC^+ .

Par définition donc, le cas DARC^- et la condition CR1 regroupent les arcs susceptibles d'être dépendants autour de v comme extrémité finale. De même, dans le cas DARC^+ et la condition CR2, les arcs susceptibles d'être dépendants ont tous u comme extrémité initiale. Donc si nous considérons tous les arcs (p, v) et (u, s) pour qu'ils soient tous retirés d'un coup, nous ne devons plus avoir de problème de dépendance pour DARC^- et DARC^+ avec elles-mêmes.

Ceci nous permet d'introduire deux nouvelles réductions qui identifient des arcs superflus incidents à un sommet donné.

Définition 3.13 (Réduction d'arcs dominés d'un sommet DAV) Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté et un sommet $u \in V$.

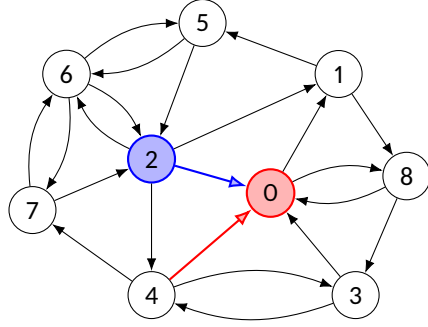


Figure 3.12 – Contre-exemple de la confluence de DAV^- et DAV^+ . Dans le graphe $G = (V, E)$ ci-haut, nous avons $\text{DAV}_G^-(0) = \{(4, 0)\}$ car les chemins de 0 vers 4 passent par des 2-circuits ou ont l'arc $(2, 0)$ comme corde arrière et nous avons $\text{DAV}_G^+(2) = \{(2, 0)\}$ car les chemins de 0 vers 2 ont des 2-circuits ou ont l'arc $(2, 1)$ comme corde arrière. Si nous retirons les arcs dans $\text{DAV}_G^+(2)$ en premier, alors $\text{DAV}_{G-(2,0)}^-(0)$ sera vide et aucune autre réduction de l'ensemble confluent du chapitre 2 n'est applicable.

DAV^+ identifie l'ensemble d'arcs $\text{DAV}_G^+(u) = \{(u, s) \in E \mid \text{DARC}^+ \text{ s'applique sur } (u, s)\}$.

DAV^- identifie l'ensemble d'arcs $\text{DAV}_G^-(u) = \{(p, u) \in E \mid \text{DARC}^- \text{ s'applique sur } (p, u)\}$.

Remarque 3.7 À noter que ces deux réductions sont symétriques. C'est-à-dire que pour un graphe $G = (V, E)$ et un sommet u , tous les arcs identifiés par $\text{DAV}_G^+(u)$ sont précisément ceux qui seront identifiés par $\text{DAV}_{G^T}^-(u)$, où $G^T = (V, E^T)$ est le graphe transposé de G avec $E^T = \{(y, x) \mid (x, y) \in E\}$. Malheureusement, l'ensemble $\{\text{DAV}_G^-(u), \text{DAV}_G^+(u)\}$ demeure non-confluent. Voir la figure 3.12 pour un contre-exemple. De surcroît, comme DARC combine les deux formes 3 et 4 pour identifier des cordes arrière, alors que DAV^- et DAV^+ se limitent à seulement une de ces deux formes, cela implique qu'un arc identifié par DARC grâce à ces deux formes, ne sera identifié ni par DAV^- ni par DAV^+ .

Dans ce qui suit nous nous concentrons sur la réduction DAV^- , DAV^+ étant une réduction symétrique. Nous revenons plus tard dans le chapitre 4 sur la façon d'inclure les arcs identifiables par DAV^+ .

Avant d'aller plus loin, nous devons nous assurer que le retrait de l'ensemble d'arcs identifié par DAV^- n'affecte pas l'existence d'un transversal de circuits de cardinalité minimale dans le graphe réduit.

Proposition 3.14 Soient le graphe $G = (V, E)$ et un sommet $u \in V$. Si c est un circuit minimal dans G , alors c demeure un circuit minimal dans $G - \text{DAV}_G^-(u)$.

Preuve. La preuve de cette proposition est directe. En effet, si c est un circuit minimal dans G , alors, par définition, aucun des arcs de c n'est identifiable par $DARC$ et, à plus forte raison, aucun de ses arcs n'est identifiable par DAV^- non plus. Ceci inclut tous les arcs $DAV_G^-(u)$, que u soit un sommet de c ou non.

Par conséquent, tous les arcs de c existent dans $G - DAV_G^-(u)$ et c demeure un circuit minimal dans $G - DAV_G^-(u)$. $\square$

À présent, nous notons que l'ensemble $DAV_G^-(u)$ est stable dans G et $G - DAV_G^-(v)$ pour tout $v \in V$. La proposition suivante le formalise.

Proposition 3.15 Soient le graphe $G = (V, E)$ et $u \neq v \in V$. Alors $DAV_G^-(u) = DAV_{G-DAV_G^-(v)}^-(u)$.

Preuve. Soient deux arcs $(p_1, u) \in DAV_G^-(u)$ et $(p_2, u) \notin DAV_G^-(u)$ dans G .

D'abord, on a toujours $(p_1, u) \in DAV_{G-DAV_G^-(v)}^-(u)$. En effet, soit $c_1 = (u_1 = u, u_2, \dots, u_\ell = p_1)$ un chemin dans G . Comme (p_1, u) est identifié par $DARC^-$, alors nous avons les cas suivants.

- (i) Soit c_1 a une boucle qui reste dans $G - DAV_G^-(v)$, car $DARC^-$ ne l'identifie pas.
- (ii) Soit c_1 a un 2-circuit qui soit reste dans $G - DAV_G^-(v)$, soit est retiré auquel cas, cela implique que c_1 a au moins une boucle, ce qui nous renvoie au point précédent.
- (iii) Soit c_1 a une corde arrière (p_u, u) qui ne peut pas appartenir à $DAV_G^-(v)$, car $u \neq v$.

Ainsi, si le chemin c_1 existe dans $G - DAV_G^-(v)$ il aura toujours une corde arrière identifiable par $DARC^-$ et, par conséquent, $(p_1, u) \in DAV_{G-DAV_G^-(v)}^-(u)$.

Ensuite, soit un chemin $c_2 = (u_1 = u, u_2, \dots, u_\ell = p_2)$ toujours dans G . Comme (p_2, u) n'est pas identifié par $DARC^-$, alors nous avons les cas suivants.

- (i) Soit aucun arc de $DAV_G^-(v)$ n'appartient à c_2 , donc c_2 existera dans $G - DAV_G^-(v)$ et empêchera $DARC^-$ d'identifier (p_2, u) dans $G - DAV_G^-(v)$.
- (ii) Soit il existe un arc $(p_v, v) \in DAV_G^-(v)$ qui appartient à c_2 et dans ce cas c_2 a une corde arrière de la forme (p'_v, v) . En effet, c_2 ne peut pas avoir de boucle ou de 2-circuit. Autrement, il n'aurait pas empêché (p_2, u) d'être identifié par $DARC^-$. Ainsi, il existe $1 \leq i < j \leq \ell - 1$ tel que $v = u_{j+1}$, $p_v = u_j$ et $p'_v = u_i$ et donc $c_2 = (u_1 = u, p'_v, \dots, p_v, v, \dots, u_\ell = p_2)$ avec un arc (p'_v, v) . À partir de c_2 , nous

pouvons donc construire un nouveau chemin de u vers p_2 $c'_2 = (u_1 = u, p'_v, v, \dots, u_\ell = p_2)$ qui ne contient plus l'arc $(p_v, v) \in \text{DAV}_G^-(v)$. À présent, soit $(p'_v, v) \notin \text{DAV}_G^-(v)$ et donc (p_2, u) n'est pas identifiable par DARC^- . Soit $(p'_v, v) \in \text{DAV}_G^-(v)$ et nous pouvons reprendre le même raisonnement pour construire, à partir de c'_2 , un nouveau chemin qui ne contient pas (p'_v, v) et qui va de u vers p_2 qui permet à (p_2, u) de ne pas être identifié par DARC^- . Comme le chemin c_2 est fini, nous finirons par trouver un chemin de u vers p_2 sans aucun arc appartenant à $\text{DAV}_G^-(v)$. Le cas limite est quand $v = p_2$ et que le dernier chemin de u vers $p_2 = v$ est le 2-circuit $(u, v = p_2, u)$ et, de même, (p_2, u) ne peut pas être identifiable par DARC^- car c'est un 2-circuit et son identification impliquera que soit $(u, u) \in E$, soit $(p_2, p_2) \in E$ ce qui voudra dire que $(p_2, u) \in \text{DAV}_G^-(u)$ ce qui est une contradiction.

Dans tous les cas, un arc $(p_2, u) \notin \text{DAV}_G^-(u)$ dans G , demeurera $(p_2, u) \notin \text{DAV}_{G - \text{DAV}_G^-(v)}^-(u)$.

À noter que le cas $\text{DAV}_G^-(u)$ ou $\text{DAV}_G^-(v)$ est vide est trivial. Par conséquent, l'ensemble $\text{DAV}_G^-(u)$ dans G reste le même dans $G - \text{DAV}_G^-(v)$. $\square$

Remarque 3.8 Quelques remarques sur la réduction DAV^- . Étant donné un graphe $G = (V, E)$, un sommet $u \in V$ et un arc $(x, y) \in E$.

- La réduction DAV^- identifie moins d'arcs que DARC . Nous verrons dans le chapitre 4 comment nous pouvons également retirer certains des arcs identifiées par DAV^+ . En fait, même si nous ajoutons DAV^+ , nous couvrons moins d'arcs que la réduction DARC , car cette dernière permet les quatre formes de cordes arrière que nous avons vues pour un même arc, alors que nous nous restreignons à des formes particulières pour ces deux réductions.
- Identifier les arcs $\text{DAV}_G^-(u)$ se fait en temps polynomial sur un graphe G . En effet, l'applicabilité de DARC se vérifie en temps polynomial, ainsi nous aurons une complexité polynomiale multipliée par le degré $N_G^-(u)$ pour DAV^- , ce qui reste coûteux, mais polynomial tout de même.
- Si (x, y) est identifié par PIE , alors il sera également identifié par DARC^- et appartiendra donc à $\text{DAV}_G^-(y)$. En effet, PIE identifie des arcs acycliques dans G , ces mêmes arcs seront également identifiés par DARC^- car il n'est pas nécessaire de chercher des cordes arrière si aucun chemin n'existe entre y et x . Comme les 2-circuits contiennent des cordes-arrière, si (x, y) est identifié par PIE dans $G^\rightarrow$, alors il sera également identifié par DARC^- dans G à cause justement des 2-circuits.
- La proposition 3.15 nous dit que la réduction DARC^- ne crée pas de nouveaux arcs identifiées par DARC^- et maintient ceux déjà identifiés. Par contre, les réductions INDICLIQUE et OUTDICLIQUE

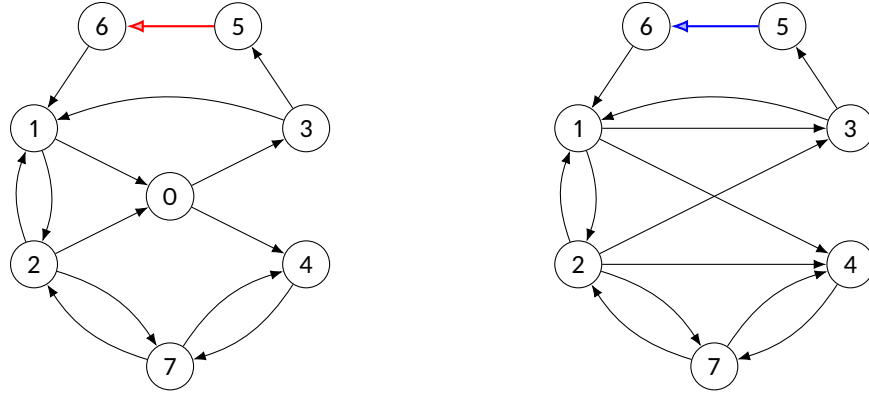


Figure 3.13 – Exemple de changement de l'applicabilité de DARC^- sur un arc. À gauche un graphe $G = (V, E)$ où INDICLIQUE est applicable sur le sommet 0. L'arc $(5, 6)$ n'est pas identifié par DARC^- à cause du chemin $(6, 1, 0, 3, 5)$ qui n'a pas de corde arrière identifiable par DARC^- . À droite, le graphe $G \circ 0$ où l'arc $(5, 6)$ est identifié par DARC^- car tous les chemins de 6 vers 5 ont un 2-circuit.

peuvent en créer, car elles peuvent créer des boucles ou des 2-circuits. La réduction SUBSET quant à elle peut retirer des arcs et donc casser des chemins. Voir la figure 3.13 pour un exemple.

Nous pouvons également élargir l'ensemble confluent des réductions du chapitre 2. Pour cela, soit la relation $\mathcal{R}_D = \{(G, G') \mid G \text{ est réduit en } G' \text{ par la réduction } \text{DAV}^-\}$. Nous avons la relation binaire $\mathcal{R}_2$ suivante sur l'ensemble $\mathcal{G}$ de tous les graphes orientés finis,

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_L \cup \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}_O \cup \mathcal{R}_S \cup \mathcal{R}_D$$

Puisque DARC^- couvre PIE , la relation $\mathcal{R}$ du chapitre 2 est incluse dans $\mathcal{R}_2$ et nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.16 $(\mathcal{G}, \mathcal{R}_2)$ a la propriété de finitude de Church-Rosser.

La preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème 2.1 et celle du théorème 3.9. Pour alléger la lecture du présent chapitre, cette preuve est présentée à l'annexe C.

Enfin, nous présentons ci-après l'algorithme 2 qui implémente la réduction DAV^- . Il prend, entre autre, un sommet et retourne un ensemble d'arcs identifié par DARC^- .

Algorithme 2 Réduction DAV^-

```
1: fonction  $\text{DAV}(G : \text{graphe}, u : \text{sommet}) : \text{ensemble}$ 
2:    $D \leftarrow$  un ensemble vide
3:   pour  $p_u \in N_G^-(u)$  faire
4:     si  $(u, p_u) \in G$  alors
5:       si  $(u, u) \in G$  ou  $(p_u, p_u) \in G$  alors
6:          $D.\text{AJOUTER}((p_u, u))$ 
7:       fin si
8:     sinon si  $\text{DOMINE}(G, p_u, u, u, u)$  alors
9:        $D.\text{AJOUTER}((p_u, u))$ 
10:    fin si
11:  fin pour
12:  retourner  $D$ 
13: fin fonction

1: fonction  $\text{DOMINE}(G : \text{graphe}, x, y, c, p : \text{sommet}) : \text{booléen}$ 
2:   si  $c.\text{visiter}$  alors
3:     retourner vrai
4:   fin si
5:    $c.\text{visiter} \leftarrow \text{vrai}$ 
6:   si  $(c, c) \in G$  ou  $(c, p) \in G$  ou  $(c, y) \in G$  alors
7:     retourner vrai
8:   fin si
9:   si  $c = x$  alors
10:    retourner faux
11:  fin si
12:   $dome \leftarrow \text{vrai}$ 
13:  pour  $s \in N_G^+(y)$  faire
14:     $dome \leftarrow dome \wedge \text{DOMINE}(G, x, y, s, c)$ 
15:  fin pour
16:  retourner  $dome$ 
17: fin fonction
```

CHAPITRE 4

CONFLUENCE

Ce chapitre examine la confluence des réductions introduites dans les chapitres 2 et 3 lorsqu'elles sont considérées dans un même ensemble. Après avoir montré séparément que les réductions CHORD_k et DAV^- sont chacune confluentes avec l'ensemble de réductions du chapitre 2, dans les sections 4.1 et 4.2 nous étudions leurs interactions mutuelles afin de déterminer si elles peuvent toutes deux être intégrées simultanément dans un ensemble global de réductions confluentes. Plus généralement, nous analysons les liens entre CHORD_k et DARC dans le contexte plus large de la confluence.

Une conséquence intéressante de la confluence est qu'elle ne garantit pas seulement l'unicité du graphe réduit, elle permet également d'envisager un parallélisme naturel dans l'application des réductions, puisque l'ordre d'exécution n'affecte plus le résultat final. Dans la section 4.3, nous discutons ainsi du potentiel de cette propriété pour concevoir des algorithmes parallèles de réduction, ouvrant la voie à des implémentations plus efficaces sur architectures modernes.

4.1 Discussion sur la confluence

Pour cette discussion, nous revenons à la réduction DARC. Cette dernière étant la réduction sur laquelle nous nous sommes basés pour construire DAV^- et DAV^+ , nous commençons par discuter de l'interaction entre les deux réductions CHORD_k et DARC, notamment le fait qu'elles ne *commutent* pas entre elles. En effet, étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un arc (u, v) identifié par DARC comme étant un arc superflu, il est facile de construire un exemple où il existera un unique chemin p de v vers u passant par un sommet x qui forme l'unique corde arrière (x, v) identifiable par DARC. Si le sous chemin p' du chemin p , qui va de v vers x , a une longueur supérieure à k , alors CHORD_k ne peut pas identifier l'arc (x, v) comme une corde arrière. Par contre, il est possible que l'arc (x, v) soit identifié par CHORD_k comme arc superflu à cause d'une corde arrière dans le chemin p' formant un circuit de longueur 3 qui ne sera pas identifiable par DARC et par conséquent, CHORD_k peut retirer (x, v) et DARC ne pourra plus identifier (u, v) .

Voir la figure 4.1 pour un exemple qui illustre cette situation.

Ceci étant dit, dans l'exemple de la figure 4.1 nous remarquons que nous pouvons malgré tout arriver au

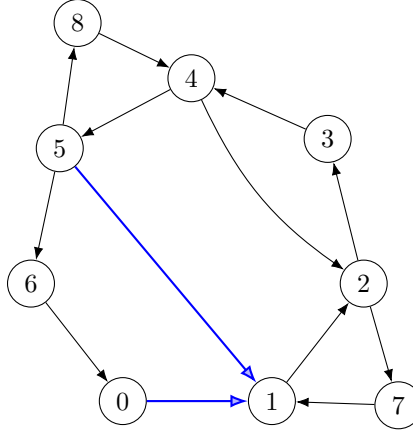


Figure 4.1 – Exemple de la non-commutativité de CHORD_3 et DARC. Soit G le graphe représenté ci-haut. Le seul chemin de 1 vers 0 dans G est le suivant $p = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 0)$. Donc l'arc $(0, 1)$ sera identifié par DARC à cause de la corde arrière $(5, 1)$ et il sera également identifié par CHORD_3 à cause de la corde arrière $(4, 2)$. De même, il existe un unique chemin $p' = (1, 2, 3, 4, 5)$ de 1 vers 5, ainsi l'arc $(5, 1)$ sera identifié par CHORD_3 à cause, toujours, de la corde arrière $(4, 2)$. À noter que DARC n'identifie pas l'arc $(5, 1)$ Si nous appliquons $\text{CHORD}_3(5, 1)$ en premier, alors DARC n'est plus applicable sur l'arc $(0, 1)$.

même graphe même si DARC n'est plus applicable, car $(0, 1)$ sera identifiable par CHORD_3 . Ce qui nous permet d'énoncer le lemme qui est un premier pas vers une réduction qui englobe CHORD_k et DAV^- .

Lemme 4.1 Soient $G = (V, E)$ un graphe, $(u, v) \neq (x, y) \in E$ deux arcs et $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 3$. Si l'arc (u, v) est identifié par CHORD_k et l'arc (x, y) est identifié par DARC dans G , alors nous avons les cas suivants.

- (a) Tout chemin de y vers x dans $G - (u, v)$ a une corde arrière identifiable soit par DARC, soit par CHORD_k .
- (b) Tout chemin de v vers u dans $G - (x, y)$ a une corde arrière identifiable par CHORD_k .

Preuve. Soient donc les deux arcs (u, v) et (x, y) identifiés par CHORD_k et par DARC respectivement dans le graphe G .

- (a) Soit $c = (x_1 = y, x_2, \dots, x_\ell = x)$ un chemin de y vers x dans $G - (u, v)$. Le chemin existe dans G et comme (x, y) y est identifié par DARC dans G , alors il a une corde arrière de l'une des formes suivantes.
 - Soit c'est une boucle, qui existera également dans $G - (u, v)$, auquel cas, (x, y) sera identifié par DARC dans $G - (u, v)$.

- Soit c'est un 2-circuit qui va, soit exister dans $G - (u, v)$, auquel cas, (x, y) sera identifiable par DARC dans $G - (u, v)$, soit il n'existera pas dans $G - (u, v)$, ce qui voudra dire que c'est un 2-circuit formé par les sommets u, v et qui doivent apparaître dans le chemin c . Ainsi, soit u ou v a une boucle, qui existera dans $G - (u, v)$ et appartiendra au chemin c .
 - Soit c'est une corde arrière de la forme (p_y, y) avec $p_y \in p$, qui va soit exister dans $G - (u, v)$, auquel cas, (x, y) sera identifiable par DARC dans $G - (u, v)$, soit l'arc (p_y, y) n'existera pas dans $G - (u, v)$, ce qui voudra dire que $(p_y, y) = (u, v)$. Dans ce cas $c = (x_1 = v, x_2, \dots, x_i = u, \dots, x_\ell = x)$. Comme (u, v) est identifié par $CHORD_k$, alors il a une corde arrière identifiable par $CHORD_k$, qui va exister dans $G - (u, v)$ et qui sera donc une corde arrière de c également identifiable par $CHORD_k$.
 - Soit c'est une corde arrière de la forme (x, s_x) avec $s_x \in p$, qui va soit exister dans $G - (u, v)$, auquel cas, (x, y) sera identifiable par DARC dans $G - (u, v)$, soit l'arc (x, s_x) n'existera pas dans $G - (u, v)$, ce qui voudra dire que $(x, s_x) = (u, v)$. Dans ce cas $c = (x_1 = y, x_2, \dots, x_i = v, \dots, x_\ell = u)$. Soit $c' = (x_i = v, \dots, x_\ell = u)$ un sous-chemin de c qui va de v vers u . Comme (u, v) est identifié par $CHORD_k$, alors il a une corde arrière identifiable par $CHORD_k$, qui va exister dans $G - (u, v)$ et qui sera donc une corde arrière de c également identifiable par $CHORD_k$.
- (b) Soit $c = (u_1 = v, u_2, \dots, u_\ell = u)$ un chemin de v vers u dans $G - (x, y)$. Le chemin existe dans G et comme (u, v) y est identifié par $CHORD_k$, alors il a une corde arrière de la forme $(u_{i+(l-1)}, u_i)$ pour $1 \leq i \leq \ell$ et $1 \leq l \leq k$. Soit cette corde arrière existe dans $G - (x, y)$, auquel cas, elle sera identifiable par $CHORD_k$. Soit cette corde arrière n'existera pas dans $G - (x, y)$, ce qui voudra dire que $(u_{i+(l-1)}, u_i) = (x, y)$ et dans ce cas $c = (u_1 = v, u_2, \dots, u_i = y, \dots, u_{i+(l-1)} = x, \dots, u_\ell = u)$. Soit $c' = (u_i = y, \dots, u_{i+(l-1)} = x)$ un sous-chemin de c qui va de y vers x . Comme (x, y) est identifié par DARC dans G , alors il a une corde arrière qui est soit une boucle, soit un 2-circuit, soit un arc (p_y, y) avec $p_y \in p'$ ou un arc (x, s_x) avec $s_x \in p'$. Dans ces cas, comme le chemin c' est de longueur $l - 1 \leq k$, alors toute corde arrière du chemin c' sera identifiable par la réduction $CHORD_k$, car cette dernière identifie des cordes arrière formant des circuits de longueur inférieur ou égal à k , ainsi, la corde arrière identifiée par DARC dans le chemin c' sera également identifiée par $CHORD_k$. Autrement dit, le chemin c' aura une corde arrière identifiable par $CHORD_k$ dans $G - (x, y)$ et, à plus forte raison, c héritera de cette corde arrière dans $G - (x, y)$.

□

Remarque 4.1 Dans la démonstration du lemme 4.1 a) nous avons utilisé la même forme de corde arrière pour identifier un arc dans $G - (u, v)$ et dans G . Autrement dit, le résultat du lemme 4.1 reste vrai si nous substituons $DARC$ par $DARC^-$ ou $DARC^+$.

Ainsi, si nous créons une réduction basée sur des cordes arrière identifiables par $CHORD_k$ et DAV^- elle confluera avec les réductions du chapitre 2. En effet, pour un arc (u, v) , $c = (u_1 = v, \dots, u_\ell = u)$ un chemin et $k \geq 2$, nous considérons une réduction basée sur les cordes arrière suivantes, que nous notons $SARC$.

Forme k . $(u_{i+(k-1)}, u_i)$ pour $1 \leq i \leq \ell - k + 1$.

Forme 4. (u_i, u_1) pour $2 \leq i \leq \ell - 1$.

La réduction $SARC$ s'applique sur un sommet donné u et retire tous les arcs incidents à u dont les chemins ont une corde arrière de la forme k ou de la forme 4. Cette réduction englobe évidemment les réductions $CHORD_k$ et DAV^- .

Une conséquence directe du lemme 4.1 est que nous pouvons encore élargir l'ensemble des réductions confluentes couvertes jusqu'à présent. En effet, si nous désignons la relation binaire $\mathcal{R}_A = \{(G, G') \mid G \text{ est réduit en } G' \text{ par la réduction } SARC\}$, alors soit la relation binaire $\mathcal{R}_3$ suivante sur l'ensemble $\mathcal{G}$ de tous les graphes orientés finis,

$$\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_L \cup \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}_O \cup \mathcal{R}_S \cup \mathcal{R}_A$$

Nous avons le théorème suivant.

Théorème 4.2 $(\mathcal{G}, \mathcal{R}_3)$ a la propriété de finitude de Church-Rosser.

Preuve. La preuve est immédiate et découle des théorèmes 2.1, 3.9 et 3.16, ainsi que du lemme 4.1. $\square$

Les réductions $CHORD_k$ et $DARC$ étant toutes deux basées sur les cordes arrière, il est intéressant de voir quand elles identifient les mêmes arcs. Voici quelques caractéristiques de graphes qui, si elles sont satisfaites, impliquent que $CHORD_k$ couvre $DARC$ (c'est-à-dire, chaque arc identifié par $DARC$, est aussi identifié par $CHORD_k$). Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un entier $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons.

1. Le plus long chemin de G est de longueur inférieur ou égale à k .

2. Le plus long circuit de G est de longueur inférieur ou égale à k .
3. Pour un sommet $u \in V$ donné, les chemins ci-bas ont une longueur inférieur à k .
 - Un chemin de u vers p , pour tout $p \in N_G^-(u)$.
 - Un chemin de s vers u , pour tout $s \in N_G^+(u)$.

Ces cas sont évidemment suffisants, mais pas nécessaires pour que CHORD_k couvre DARC, ce sont donc des conditions fortes pour cette couverture.

4.1.1 Graphe transposé et confluence

Jusqu'à présent, pour remédier à la non-confluence d'un ensemble de réduction incluant DARC, nous avons considéré une version restreinte à des arcs entrants vers un sommet donné, à savoir DAV^- . Une manière simple d'ajouter l'application d'une réduction DAV^+ sans perdre la confluence est de considérer le *graphe transposé*, c'est-à-dire $G^T = (V, E^T)$ avec $E^T = \{(v, u) \mid (u, v) \in E\}$. En effet, l'ensemble des réductions que nous considérons incluant DARC, mais pas DAV^- , est *stable par transposition*, c'est-à-dire, si un arc ou un sommet a été retiré ou contourné par une des réductions de l'ensemble

$$\{\text{LOOP}, \text{INDICLIQUE}, \text{OUTDICLIQUE}, \text{SUBSET}, \text{CHORD}_k, \text{DARC}\}$$

qui est applicable dans G , alors ce même arc ou son transposé, ou le même sommet sera également retiré ou contourné dans G^T , soit par la même réduction pour les retraits, soit par la réduction *transposée* pour le contournement (la transposée de INDICLIQUE étant OUTDICLIQUE et vice-versa). Ainsi, appliquer DARC^+ sur G revient à appliquer DARC^- sur G^T . La question se pose sur la confluence : comment s'assurer que la confluence d'un ensemble d'opérations sur G soit maintenue sur G^T ?

Une réponse à cette question est fournie par la théorie des *transformations de graphes* (Ehrig et al., 2010), qui est une branche de la théorie des graphes qui étudie les processus de modification des graphes en suivant des règles formelles. Dans cette théorie, la notion de réduction est généralisée par la notion de *transformation* et cette dernière s'appuie sur les notions suivantes.

- Une *production* (parfois appelée *règle de production*) est une règle formelle qui décrit comment un graphe peut être transformé en un autre graphe.
- Une *contrainte de graphes* est une restriction ou une condition qui doit être respectée par le graphe ou un sous-graphe pour qu'une production puisse être appliquée.

- Une *condition d'application* précise les situations spécifiques dans lesquelles une production de graphe peut (*condition d'application positive*) ou ne peut pas (*condition d'application négative*) être appliquée.

Sans trop entrer dans les détails, étant donné un ensemble de réductions confluent, cette théorie permet de lui ajouter une transformation de graphe qui *ne réduit pas*, mais qui ne peut s'appliquer qu'un *nombre fini* de fois sur un graphe donné G , tout en préservant la confluence (voir le *Theorem 3.37* du livre *Fundamentals of Algebraic Graph Transformation* (Ehrig et al., 2010)).

La principale inquiétude d'ajouter une transformation qui ne réduit pas un graphe à un ensemble de réductions confluentes est la *finitude* ou la *terminaison* dans le langage des transformations de graphes. En effet, dans toutes les démonstrations de confluence que nous avons écrites, l'argument permettant de démontrer que le couple $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ est *fini*, est le fait que les réductions réduisent la taille du graphe sur lequel elles s'appliquent et comme nous ne travaillons qu'avec des graphes finis, nous sommes certains que pour un graphe donné $G \in \mathcal{G}$, le nombre de fois qu'une réduction s'applique est limité par la taille du graphe G (au plus $|V| + |V|^2$ applications, peu importe la réduction dans $\mathcal{R}$). Par contre, si nous ajoutons une transformation $\mathcal{P}$ à $\mathcal{R}$ qui ne réduit ni le nombre de sommets ni le nombre d'arcs, alors nous pouvons avoir un nombre d'applications potentiellement infini de $\mathcal{P}$, ce qui casse la finitude du couple $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ et par conséquent l'applicabilité du théorème 1.7.

Donc, si nous voulons ajouter la transposition de graphe comme une transformation à l'ensemble des réductions $\mathcal{R}_4$, il nous faut y attacher une condition négative d'application qui nous assure que la transposition n'est applicable qu'un nombre fini de fois pour chaque graphe donné G . Nous pouvons donc définir la transformation suivante.

Définition 4.3 (Transformation transposé $\mathcal{T}$) Étant donné un graphe $G = (V, E)$, nous définissons la transformation de graphes $\mathcal{T}$ par,

- La production *TRAN* qui transforme chaque arc $(u, v) \in E$ en (v, u) .
- La condition d'application positive *PAC* qui est vraie si $DARC^+$ est applicable sur G .
- La condition d'application négative *NAC* qui est vraie si $DARC^-$ n'est pas applicable sur G .

Ainsi, la transformation $\mathcal{T}$ est applicable sur G , si les deux conditions *PAC* et *NAC* sont vraies pour le graphe G et dans ce cas, G sera transformé en G^T .

Noter que si un graphe G est transformé en G^T par $\mathcal{T}$, alors $\mathcal{T}$ n'est plus applicable sur G^T . En effet, si nous appliquons $\mathcal{T}$ alors PAC et NAC sont vraies, c'est-à-dire que DARC^+ est applicable sur G et que DARC^- n'est plus applicable sur G . En d'autres termes, du point de vue de G^T , DARC^- est applicable sur G^T et DARC^+ n'est plus applicable sur G^T . Autrement dit, $\mathcal{T}$ n'est plus applicable sur G^T . Ainsi, nous pouvons considérer la relation binaire suivante.

$$\mathcal{R}_4 = \mathcal{R}_L \cup \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}_O \cup \mathcal{R}_S \cup \mathcal{R}_A \cup \mathcal{R}_T$$

avec $\mathcal{R}_T = \{(G, G^T) \mid G \text{ est transformé en } G^T \text{ par la transformation } \mathcal{T}\}$.

Ceci nous permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 4.4 $(\mathcal{G}, \mathcal{R}_4)$ a la propriété de finitude de Church-Rosser.

Preuve. La preuve est immédiate et découle du théorème 4.2 et du « Theorem 3.37 » du livre « Fundamentals of Algebraic Graph Transformation » (Ehrig et al., 2010). $\square$

Avec $\mathcal{R}_4$ nous pouvons donc ajouter les arcs identifiants par la réduction DARC^+ , en plus de toutes les autres, et ainsi retirer davantage d'arcs tout en nous assurant que le graphe final est unique à isomorphisme près.

4.2 Dépendance et interdépendance

En dépit des résultats énoncés par les théorèmes 2.1, 3.9, 3.16 et 4.4, nous n'avons pas complètement couvert les arcs potentiellement identifiants par la réduction DARC . À l'instar de l'exemple de la figure 3.12, il demeure toujours possible de trouver des exemples d'interdépendance entre des arcs identifiés par DARC qui, jusqu'à maintenant, nous a contraint à sélectionner seulement un sous-ensemble d'arcs à retirer de manière à maintenir la confluence.

Ceci étant dit, l'observation qui nous a mené à considérer la réduction DAV^- , à savoir identifier un ensemble d'arcs particulier avec DARC^- et les retirer d'un coup, peut être étendue. En effet, si nous parcourons tous les arcs possibles d'un graphe $G = (V, E)$ et nous identifions tous les arcs possibles avec DARC , notons

cet ensemble $D \subseteq E$, nous considérons la question de savoir quelles sont les caractéristiques qu'un sous-ensemble de D doit avoir pour que son retrait ne perturbe pas l'applicabilité de DARC sur les arcs restants dans D ?

La réponse à cette question réside principalement dans la forme d'*interdépendance* qui existe parmi les arcs de l'ensemble D . Avant de continuer, définissons clairement la dépendance au travers de la réduction DARC. Dans ce qui suit, pour alléger l'écriture, nous notons à l'occasion les arcs par des lettres, par exemple $a \in E$, et nous notons les sommets qui forment un arc a par $a[0]$ et $a[1]$, c'est-à-dire, $a = (a[0], a[1]) \in E$ de sorte que $a[0], a[1] \in V$.

Définition 4.5 (Dépendance DARC) *Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et deux arcs $a_1, a_2 \in E$ identifiés par DARC. Nous disons que l'arc a_1 est dépendant de l'arc a_2 , s'il existe au moins un chemin c de $a_1[1]$ vers $a_1[0]$, dont a_2 est une corde arrière identifiable par DARC. Nous écrivons alors $a_1 \trianglelefteq_c a_2$, qui se lit « a_1 dépend de a_2 au travers du chemin c ». Nous omettons « au travers du chemin c » et nous notons $a_1 \trianglelefteq a_2$, quand le contexte est clair.*

Ainsi, si nous avons deux arcs $a_1, a_2 \in E$, tels que $a_1 \trianglelefteq a_2$ et $a_2 \trianglelefteq a_1$, alors nous parlons d'*interdépendance* de a_1 et a_2 dont la définition suit.

Définition 4.6 (Interdépendance DARC) *Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et deux arcs $a_1, a_2 \in E$, nous disons que les arcs a_1 et a_2 sont interdépendants, s'il existe deux chemins c_1 de $a_1[1]$ vers $a_1[0]$ et c_2 de $a_2[1]$ vers $a_2[0]$ tels que,*

$$a_1 \trianglelefteq_{c_1} a_2 \text{ et } a_2 \trianglelefteq_{c_2} a_1$$

Nous illustrons les notions de dépendance et d'interdépendance dans l'exemple 4.1. Nous allons mettre de côté la confluence pour le moment et nous concentrer uniquement sur la dépendance au travers de la réduction DARC.

Exemple 4.1 *Considérons le graphe représenté dans la figure 4.2-(a). Dans ce graphe, l'arc $(0, 1)$ est identifié par DARC grâce à la corde arrière $(5, 1)$. En effet, il n'existe qu'un unique chemin de 1 vers 0 et c'est*

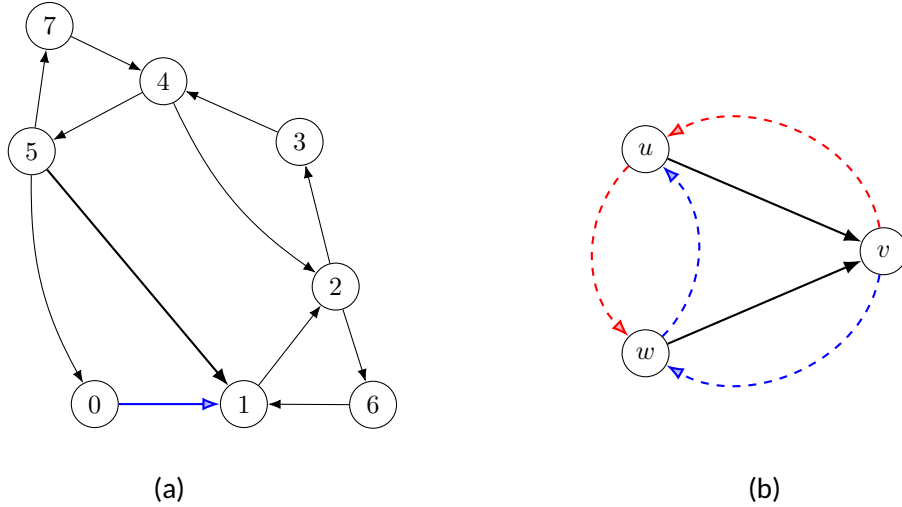


Figure 4.2 – Illustration de la dépendance et de l'interdépendance d'arcs au travers de DARC. (a) $(0, 1)$ est dépendant de $(5, 1)$. (b) (u, v) et (w, v) sont interdépendants.

$(1, 2, 3, 4, 5, 0)$ et $(5, 1)$ est son unique corde arrière. Ainsi $(0, 1)$ est dépendant de $(5, 1)$. Si nous avons une interdépendance entre deux arcs (u, v) et (w, v) , alors le graphe qui les contiendra aura un premier chemin $c_1 = (v, \dots, w, \dots, u)$ de v vers u et un deuxième chemin $c_2 = (v, \dots, u, \dots, w)$ de v vers w , illustrés respectivement en pointillés bleu et en pointillés rouge dans la figure 4.2-(b). Par conséquent, dans ce contexte, avoir $(u, v) \preceq_{c_1} (w, v)$ et $(w, v) \preceq_{c_2} (u, v)$ implique que la portion du chemin c_1 , qui va de v à w , a une corde arrière car (w, v) est identifié par DARC. Il en va de même pour la portion du chemin c_2 , $(v, \dots, u)$ et l'arc (u, v) .

Remarque 4.2 À partir des définitions 4.5 et 4.6, ainsi que l'Exemple 4.1, nous pouvons déduire les observations suivantes. Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et deux arcs $a_1, a_2 \in E$. Supposons qu'il existe deux chemins c_1 et c_2 , tels que $a_1 \preceq_{c_1} a_2$ et $a_2 \preceq_{c_2} a_1$.

- Il est possible qu'il y ait des cordes arrière dans le chemin c_1 autres que a_2 . De même, c_2 peut avoir d'autres cordes arrière que a_1 .
- Ni a_1 ni a_2 ne peuvent être des boucles. Ceci est immédiat car une boucle n'est pas identifiable par DARC.
- Ni a_1 ni a_2 ne font partie d'un 2-circuit. De même, s'il n'y a pas de boucle dans un chemin, alors il ne peut y avoir de 2-circuit, car la seule possibilité pour DARC d'identifier l'arc d'un 2-circuit est par la présence d'une boucle comme corde arrière.

Donc a_1 et a_2 doivent être des cordes arrière de format autre que la boucle et le 2-circuit. Ce qui implique

que a_1 et a_2 ont un sommet incident en commun.

Dans ce qui suit, pour un arc (u, v) dans un graphe $G = (V, E)$ donné, nous nous concentrons donc sur l'interdépendance avec des cordes arrière de la forme (p, v) ou (u, s) si elle existent. Nous pouvons généraliser les définitions 4.5 et 4.6 au cas de plusieurs arcs ou une séquence d'arcs dépendants et interdépendants. Les commentaires de la remarque 4.2 demeurent valides.

Définition 4.7 (Séquence d'arcs dépendants et d'arcs interdépendants DARC) Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et une séquence d'arcs $A = (a_1, a_2, \dots, a_t)$ avec $a_i \in E$ pour tout $1 \leq i \leq t$. Nous disons que les arcs de la séquence A sont dépendants s'il existe $t - 1$ chemins $c_1, c_2, \dots, c_{t-1}$, tels que pour tout $1 \leq i \leq t - 1$ nous avons $a_i \trianglelefteq_{c_i} a_{i+1}$.

Si en plus, il existe un chemin c_t tel que $a_t \trianglelefteq_{c_t} a_1$ nous disons que les arcs de la séquence A sont interdépendants.

Pour revenir à la confluence, il est nécessaire de distinguer deux types d'arcs identifiables par DARC. Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un arc $(u, v) \in E$ identifié par DARC, nous avons les deux types d'arcs suivants.

Arc d'appui. (u, v) est un arc d'appui s'il existe un arc $(x, y) \in E$ et un chemin c de y vers x , tel que $(x, y) \trianglelefteq_c (u, v)$.

Arc indépendant. (u, v) est indépendant si pour tout arc $(x, y) \in E - (u, v)$, il n'existe aucun chemin c de y vers x , tel que $(x, y) \trianglelefteq_c (u, v)$.

À noter que tout arc identifié par DARC est soit un arc d'appui, soit un arc indépendant et un arc donné ne peut pas être en même temps un arc d'appui et un arc indépendant, ces deux types d'arcs induisent une partition des arcs identifiés par DARC. Il est facile de voir qu'une réduction qui identifie des arcs indépendants, notons-la IDARC, va commuter avec elle-même. C'est-à-dire, que si $(u, v) \neq (x, y) \in E$ sont deux arcs identifiés par la réduction IDARC, alors l'arc (u, v) (respectivement, l'arc (x, y)) est identifié par IDARC dans le graphe $G - (x, y)$ (respectivement, dans le graphe $G - (u, v)$). Comme IDARC est basée sur DARC, nous sommes également assurés que le retrait de ces arcs n'affecte pas l'existence d'au moins une solution au problème du transversal de circuits de cardinalité minimale.

Nous sommes tentés de définir une réduction qui retire tous les arcs d'une séquence d'arcs interdépendants, mais il est possible d'avoir, par exemple, des interdépendances imbriquées. En effet, dans la séquence d'arcs interdépendants $A = (a_1, a_2, \dots, a_t)$, il est possible qu'il existe $1 < i < t$ et un chemin c tels que, $a_t \leq_c a_i$, auquel cas si une *simple* réduction qui retire une séquence d'arcs interdépendants, retire la séquence $(a_i, \dots, a_t)$, l'arc d'appui a_i sera retiré avant a_{i-1} , ce qui va impliquer que l'identification de l'arc a_{i-1} par DARC n'est potentiellement plus possible. Si nous adoptons une stratégie globale où nous retirons simultanément tous les arcs d'appuis qui sont *connectés* entre eux, alors nous devons introduire une notion de *composante d'arcs dépendants*.

Définition 4.8 (Composante d'arcs dépendants) *Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un ensemble d'arcs $C \subseteq E$. Nous disons que C est une composante d'arcs dépendants si les points suivants sont vérifiés.*

1. *Pour tout $a \in C$, a est identifié par DARC.*
2. *Pour tout $a, b \in C$, il existe une séquence d'arcs dépendants dans C qui relie a à b ou b à a . C'est-à-dire, que soit il existe une séquence d'arcs dépendants $A = (a = a_1, \dots, a_t = b)$ avec $a_i \in C$ et $1 \leq i \leq t$, ou une séquence d'arcs dépendants $B = (b = b_1, \dots, b_s = a)$ avec $b_i \in C$ et $1 \leq i \leq s$, où $t, s \geq 2$.*
3. *Pour tout $e \in E \setminus C$, il n'existe aucun arc $a \in C$ tel que $a \leq e$ ou $e \leq a$.*

Une réduction qui retire tous les arcs d'une composante d'arcs dépendants ne peut pas commuter avec elle-même. La raison en est que le retrait d'un arc a de G peut créer de nouveaux arcs identifiables par DARC, ce qui veut dire qu'il est fort probable qu'une composante C dans G , n'existera plus sous la même forme dans $G - a$. D'autant plus qu'il peut y avoir un effet en cascade de dépendance qui changera les composantes d'arcs dépendants entre G et $G - a$. D'un côté, le caractère global de la condition d'application d'une telle réduction la rend compliquée à manipuler et d'un autre côté, malheureusement, la potentielle interdépendance entre des arcs identifiés par DARC nous oblige à considérer plusieurs arcs en même temps. Il est donc difficile et coûteux de suivre l'évolution d'une telle réduction.

Il en va de même pour la réduction IDARC. Même si son évolution dans $G - a$ est mesurable, elle sera quand même très coûteuse en calcul à cause de tous les arcs et chemins qui doivent être énumérés et vérifiés. Pour peu que nous incluons CHORD_k dans l'ensemble des réductions à étudier, nous aurons le même souci que pour DAV^- , c'est-à-dire, que nous serons contraints de jumeler IDARC et CHORD_k pour

espérer avoir une confluence avec les réductions précédentes. De même, nous devons jumeler CHORD_k avec une éventuelle réduction basée sur les composantes d'arcs dépendants, pour étendre les formes de cordes arrière à considérer.

En conclusion, considérer les deux formes de cordes arrière incidentes aux extrémités d'un arc permet à des séquences de dépendance entre arcs de se *déplacer* et de *bifurquer* potentiellement dans toutes les directions dans un ensemble d'arcs E . Dès que nous nous restreignons à une seule forme de corde arrière (DAV^- ou DAV^+) les arcs dépendants sont tous incidents à un sommet donné, ainsi, l'évolution d'une telle réduction peut être suivie et l'impact des modifications locales de G par d'autres réductions peut être évalué avec une complexité modérée. Passer de critères locaux pour une réduction comme ceux de DOME vers des critères faisant intervenir le graphe en entier, comme ceux de DARC ou de $\text{DOME}++$, va certes permettre l'identification d'arcs supplémentaires, mais complexifie la vérification des conditions de leur applicabilité.

4.3 Parallélisme

À présent que la confluence nous assure que les réductions appliquées dans n'importe quel ordre mènent à un graphe unique à isomorphisme près, ça nous ouvre la voie à des méthodes plus efficaces d'application de ces réductions, notamment une approche parallèle. Dans cette section nous nous concentrons sur cet aspect en introduisant une stratégie de parallélisation capable d'exploiter pleinement le parallélisme rendu possible par la confluence.

4.3.1 Stratégie de parallélisation

Avant d'entrer dans les détails de notre stratégie de parallélisation, rappelons les quatre types de réductions introduits dans le chapitre 2 qui catégorisent les réductions introduites ou étudiées dans cette thèse.

Type 1. Les réductions qui identifient des sommets qui appartiennent à tous les TCCM d'un graphe.

Type 2. Les réductions qui identifient des sommets qui appartiennent à au moins un TCCM, mais pas nécessairement à tous.

Type 3. Les réductions qui identifient des sommets qui peuvent être retirés avec ou sans contournement tout en garantissant qu'au moins un TCCM est préservé ou peut être construit en temps polynomial à partir du graphe réduit.

Type 4. Les réductions qui identifient des arcs superflus.

Tout d’abord en ce qui concerne les réductions de type 4, à savoir PIE , CHORD_k , DAV^- ou DAV^+ , grâce à la confluence, nous pouvons, en premier lieu, identifier les arcs sur lesquels elles sont applicables et, en second lieu, retirer tous ces arcs en une seule fois. Il est donc plus facile de paralléliser l’application de ces réductions. En effet, nous pouvons simplement lancer plusieurs identifications en parallèles, qui n’interagissent avec le graphe qu’en lecture seule et une fois que l’ensemble des arcs est entièrement parcouru, il suffit de retirer les arcs superflus identifiés. Ainsi nous ne risquons pas des situations de compétition où des arcs superflus retirés perturbent ou annulent l’identification d’autres arcs superflus.

Pour les trois autres types, il se trouve que toutes les réductions que nous avons considérées dans ces trois types, à savoir LOOP , INDICLIQUE , OUTDICLIQUE , SUBSET et toute réduction couverte par ces réductions, ne nécessitent que de l’information locale au sommet sur lequel nous testons l’applicabilité d’une réduction. Précisément, pour un graphe donné $G = (V, E)$ et un sommet $u \in V$, pour décider si une des réductions ci-haut s’applique, nous avons seulement besoin de vérifier des conditions sur les sommets de $\{u\} \cup N_G(u)$. Par conséquent du point de vue de la parallélisation, nous pouvons les regrouper dans un type de réductions qui s’appliquent sur un sommet et dont la condition d’applicabilité nécessite la connaissance du sommet courant et de son voisinage immédiat. Ainsi, nous pouvons approcher la parallélisation de ces réductions autrement que par des stratégies complexes comme celles utilisant un modèle de partitions du graphe ou celles basées sur les modèles de calcul à base de messages (Bader et Madduri, 2006; Malewicz *et al.*, 2010; Gonzalez *et al.*, 2012). Notre stratégie de parallélisation repose sur une approche avec une mémoire partagée et un verrouillage partiel d’un sommet et de son voisinage pour application d’une réduction (Quammen, 2005; Sterling *et al.*, 2018).

Pour ce faire, nous introduisons la structure de données `SOMMET` représentant un sommet d’un graphe avec les attributs suivants.

VERROU une variable d’exclusion mutuelle qui permet de verrouiller l’accès au sommet courant. Nous pouvons implémenter cette variable avec un *mutex* (Grama *et al.*, 2003), initialement déverrouillé.

USAGE une variable qui permet d’indiquer si le sommet courant est utilisé dans les calculs pour l’applicabilité d’une réduction d’un ou de plusieurs sommets voisins. Nous pouvons implémenter cette variable avec un *sémaphore* (Dijkstra, 1962), initialisé à 0.

MODIFIÉ une variable booléenne qui indique qu’il y a eu un changement dans le voisinage du sommet courant, initialisée à *vrai*.

Nous ajoutons à cette structure de données, les fonctions suivantes.

VERROUILLER(u) qui permet de verrouiller le sommet u pour le préparer pour l'application d'une réduction sans risquer une situation de compétition. Ça retourne *vrai* si le verrouillage réussit, *faux* si non.

DÉVERROUILLER(u) qui permet de déverrouiller l'accès au sommet u si la réduction n'a pas été appliquée. Cette fonction réussit toujours et retourne *vrai*.

Des implémentations de ces fonctions en pseudocode sont présentées dans l'algorithme 3.

Algorithme 3 Fonctions associées à la structure de données **SOMMET**

```

1: fonction VERROUILLER( $u$  : sommet) : booléen
2:   si aucun sommet de  $\{u\} \cup N_G(u)$  n'est verrouillé alors                                ▷ ça implique que  $u.USAGE = 0$ 
3:     Verrouiller  $u.VERROU$ 
4:     Incrémenter  $v.USAGE$  pour tout  $v \in N_G(u)$ 
5:     retourner vrai
6:   fin si
7:   retourner faux
8: fin fonction

1: fonction DÉVERROUILLER( $u$  : sommet) : booléen
2:   Déverrouiller  $u.VERROU$ 
3:   Décrémenter  $v.USAGE$  pour tout  $v \in N_G(u)$ 
4:   retourner vrai
5: fin fonction

```

Ainsi nous pouvons appliquer une réduction de type 1, 2 ou 3 sur un sommet u si nous pouvons le verrouiller, c'est-à-dire que **VERROUILLER**(u) retourne *vrai* et que la réduction est applicable. L'attribut **MODIFIÉ** de u nous permet de construire une condition d'arrêt lors d'une exécution à l'échelle du graphe entier. En effet, si une réduction n'est pas applicable alors cet attribut sera mis à *faux* pour indiquer que nous avons testé l'applicabilité d'une réduction sans succès. Par contre, si la même réduction est appliquée sur un sommet voisin, l'attribut redevient *vrai* pour indiquer que les conditions au voisinage de u ont changé et ainsi l'applicabilité de la réduction peut de nouveau être testée. Voir l'algorithme 4 pour un pseudocode implémentant l'application d'une réduction.

À présent, pour intégrer la fonction **APPLIQUER** et compléter notre stratégie de parallélisation, nous utilisons le modèle de programmation *diviser-joindre* (en anglais, *fork-join*) avec une légère adaptation. En général, le modèle diviser-joindre repose sur la décomposition récursive d'un problème initial en sous-problèmes indépendants (phase de « division »), attribuer en parallèle le traitement des sous-problème

Algorithme 4 Fonction d'application d'une réduction R sur un sommet u

```
1: fonction APPLIQUER( $u$  : sommet,  $R$  : réduction) : booléen
2:   si  $u$ .MODIFIÉ et VERROUILLER( $u$ ) alors           ▷ rappel que VERROUILLER retourne un booléen
3:     si  $R$  est applicable sur  $u$  alors
4:       Appliquer la réduction  $R$  sur  $u$ 
5:       pour  $v \in N_G(u)$  faire
6:          $v$ .MODIFIÉ  $\leftarrow Vrai$ 
7:          $v$ .USAGE  $\leftarrow v$ .USAGE  $- 1$ 
8:       fin pour
9:       retourner vrai
10:    sinon
11:       $u$ .MODIFIÉ  $\leftarrow Faux$ 
12:      DÉVERROUILLER( $u$ )
13:    fin si
14:  fin si
15:  retourner faux
16: fin fonction
```

à des processus ou des fils d'exécution (en anglais, *threads*) et enfin combiner les solutions partielles pour construire la solution finale (phase de « jointure ») (McCool *et al.*, 2012).

Dans notre contexte, au lieu de se baser sur des appels récursifs, nous nous appuyons sur une subdivision du graphe en sous-graphes sur lesquels les applications d'une même réduction sont indépendantes. En effet, comme formulé plus tôt et sans aller jusqu'à la partition du graphe, les réductions de type 1, 2 et 3 s'appliquent sur un sommet et son voisinage immédiat. Autrement dit, pour un sommet u dans un graphe $G = (V, E)$, nous avons besoin de connaître et de contrôler le sous-graphe induit $G[\{u\} \cup N_G(u)]$ pour évaluer l'application d'une réduction le cas échéant. Pour faciliter la discussion qui suit, nous notons $B_G[u] = G[\{u\} \cup N_G(u)]$ une *boule* autour de u et pour $u, v \in V$ nous définissons l'intersection des deux boules $B_G[u] \cap B_G[v] = (\{u\} \cup N_G(u)) \cap (\{v\} \cup N_G(v))$, c'est-à-dire, l'ensemble des sommets communs aux deux boules. Ainsi, la condition qui permet l'application parallèle d'une réduction sur deux sommets u et v est la suivante,

$$u \notin B_G[u] \cap B_G[v] \text{ et } v \notin B_G[u] \cap B_G[v] \quad (4.1)$$

C'est-à-dire que nous autorisons des sommets communs, du moment que ce ne sont pas les sommets sur lesquels s'applique la réduction.

4.3.2 Algorithmes parallèles

À présent, pour construire un algorithme basé sur notre stratégie de parallélisation, il suffit de diviser le graphe G en boules vérifiant la condition 4.1 deux à deux et attribuer à chaque boule un fil d'exécution qui applique une réduction localement, ce qui correspond à la phase de « diviser ». Autrement dit, pour une boule $B_G[u]$ et une réduction R nous faisons l'appel suivant `APPLIQUER( $u, R$ )`. Dans chaque appel, la fonction `APPLIQUER` verrouille le sommet u et indique que le voisinage de u ne doit pas être considéré pour un autre appel à la même fonction. Par la suite, la fonction vérifie les critères d'applicabilité de la réduction R sur u , en se basant uniquement sur les informations locales et l'applique s'il y a lieu. Lors des applications de ces réductions, l'état du graphe est mis à jour localement. Une fois que les différents appels se terminent correspondant à la phase de « rejoindre », nous sommes certains que la prochaine tournée d'applications se fait sur un graphe cohérent et intègre.

Ainsi, il suffit de générer des boules respectant la condition 4.1 et de les distribuer sur les fils d'exécution disponibles. Ce qui revient donc à parcourir le graphe G en progressant d'une boule à une autre et, idéalement, n'avoir que des boules qui respectent la condition 4.1. En effet, comme indiqué plus haut, nous n'utilisons pas d'approche basée sur une partition de graphe, par conséquent, nous pouvons implémenter un parcours de graphe par boules moins stricte sur les boules parcourues par rapport à la condition 4.1 car la fonction `APPLIQUER` tentera, par définition, de verrouiller le sommet d'intérêt et son voisinage immédiat et va donc naturellement échouer si la condition 4.1 n'est pas satisfaite. Autrement dit, nous savons que si deux appels `APPLIQUER( $u, R$ )` et `APPLIQUER( $v, R$ )` retournent *vrai*, alors $v \notin N_G(u)$, notamment grâce à la condition de la ligne 2 de la fonction `VERROUILLER`. Il suffit donc d'extraire un ensemble de sommets de G suffisamment distants entre eux et laisser la fonction `VERROUILLER` assurer qu'il n'y a pas de chevauchement. Pour ce faire, un parcours à distance fixe suffira. L'algorithme 5 montre une simple implémentation d'un tel parcours à partir d'un sommet s aléatoirement sélectionné. À noter que le parcours implémenté dans l'algorithme 5 va tenter de fournir une liste de nb sommets, dont aucun sommet n'est dans le voisinage d'un autre, cependant, il est probable que deux sommets soient voisins auquel cas l'un des deux sera ignoré par l'appel à la fonction `APPLIQUER` lors du verrouillage. À présent, nous sommes prêt à présenter un algorithme qui applique parallèlement sur un graphe donné G , l'ensemble des réductions confluentes étudiées à date.

À noter que notre stratégie de parallélisation ainsi que les algorithmes 4, 5 et 6 sont implémentables via des bibliothèques telles qu'OpenMP, qui permet une gestion efficace des sections critiques et des mécanismes

Algorithme 5 Fonction de parcours à distance fixe

```
1: fonction PARCOURSFIXE( $G$  : graphe,  $s$  : sommet,  $nb$  : entier) : liste
2:    $F.ENFILER(s, 0)$  ▷ file de (sommet, profondeur)
3:    $vis \leftarrow$  ensemble vide
4:    $L \leftarrow$  liste vide
5:   tant que  $\neg F.ESTVIDE()$  et  $L.TAILLE() \leq nb$  faire
6:      $u, p \leftarrow F.DÉFILER()$ 
7:     si  $u \notin vis$  alors
8:        $vis.AJOUTER(u)$ 
9:       si  $p = 2$  et  $u.MODIFIÉ$  alors
10:         $L.AJOUTER(u)$ 
11:       sinon si  $p < 2$  alors
12:         pour  $v \in N_G(u) \setminus vis$  faire
13:            $F.ENFILER(v, (p + 1) \bmod 2)$ 
14:         fin pour
15:       fin si
16:     fin si
17:   fin tant que
18:   retourner  $L$ 
19: fin fonction
```

Algorithme 6 Algorithme parallèle d'application de réductions confluentes

```
1: procedure RÉDUCTIONPARALLÈLE( $G = (V, E)$  : graphe)
2:    $nb \leftarrow$  nombre de processeurs disponibles sur le système
3:   faire
4:      $G' \leftarrow G.COPIE()$ 
5:     pour  $R \in \{LOOP, INDICLIQUE, OUTDICLIQUE, SUBSET\}$  faire
6:       faire
7:          $G'' \leftarrow G.COPIE()$ 
8:          $L \leftarrow PARCOURSFIXE(G, s, nb)$  ▷  $s$  est un sommet aléatoirement choisi
9:         pour distribuer  $u \in L$  faire ▷ phase « diviser »
10:            $APPLIQUER(u, R)$  ▷  $G$  est modifié sur place
11:         fin pour
12:         Attendre que tous les fils d'exécution se termine ▷ phase « joindre »
13:         tant que  $L.TAILLE() \neq 0$  ou  $G'' \neq G$ 
14:       fin pour
15:       pour distribuer  $e \in E$  faire ▷ phase « diviser »
16:         si  $e$  est superflu alors ▷ peu importe la réduction confluyente appliquée
17:           Marquer  $e$  pour la suppression
18:         fin si
19:       fin pour
20:       Attendre que tous les fils d'exécution se termine ▷ phase « joindre »
21:        $G \leftarrow G' \setminus \{\text{arcs marqués}\}$ 
22:     tant que  $G' \neq G$ 
23: fin procedure
```

de synchronisation adaptés à la mémoire partagée (OpenMP Architecture Review Board, 2024).

CHAPITRE 5

ÉTUDE DES DICTIONNAIRES

Dans ce chapitre, nous revenons aux dictionnaires, en particulier, à l'étude du noyau dans le cadre des dictionnaires linguistiques représentés sous forme de graphes orientés. Nous rappelons d'abord les structures internes identifiées dans ces graphes, à savoir, le noyau, le cœur et les satellites, ainsi que leur relation avec les circuits définitionnels. Nous appliquons à plusieurs dictionnaires réels les réductions confluentes étudiées dans les chapitres précédents, y compris `OUT0`, puis nous ajoutons deux enrichissements : la désambiguïsation lexicale et l'ajout de liens syntaxiques via les représentations abstraites du sens (RAS). Nous analysons l'effet de ces transformations sur les graphes obtenus et sur la structure du noyau, en mettant en évidence les apports psycholinguistiques de ces modifications. Grâce à la confluence, ces résultats demeurent indépendants de l'ordre d'application des réductions, ce qui renforce leur robustesse interprétative.

5.1 Dictionnaires

Nous allons tout d'abord rappeler la notion de *lexique* que nous utilisons ici. Nous nous basons sur le sens linguistique d'un lexique, c'est-à-dire « l'entité théorique qui correspond à l'ensemble de tous les *lexèmes* d'une langue ou encore [du lexique mental] d'un individu » (Polguère, 2003). Plus formellement, un lexique peut être défini comme suit.

Définition 5.1 (Aronoff et Rees-Miller, 2003; Poulin et al., 2018) *Un lexique est un quadruplet $X = (\mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{D})$, où*

- (i) $\mathcal{A}$ est un alphabet fini dont les éléments sont appelés lettres.
- (ii) $\mathcal{P}$ est un ensemble fini de catégories grammaticales qu'on appelle partie du discours (anglais : *parts-of-speech*).
- (iii) $\mathcal{L}$ est un ensemble fini de triplets $\ell = (w, i, p)$ appelés lexèmes notés par $\ell = w_p^i$, où w est un mot formé de lettres dans $\mathcal{A}$ (l'ensemble des mots possibles est noté $\mathcal{A}^*$), i est un entier et $p \in \mathcal{P}$.
- (iv) $\mathcal{D}$ est un ensemble d'associations entre chaque lexème $\ell \in \mathcal{L}$ et une séquence finie $D(\ell) = (d_1, d_2, \dots, d_k)$, où $d_j \in \mathcal{A}^*$ pour $j = 1, 2, \dots, k$, qu'on appelle une définition de ℓ .

Nous disons qu'un lexique est *sans ambiguïté* si dans la définition de chaque lexème $\ell \in \mathcal{L}$, les d_j sont des éléments de $\mathcal{L}$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Un *dictionnaire* est un modèle, une représentation particulière d'un lexique, qui met l'accent sur l'aspect descriptif, la définition des lexèmes. Pour la suite, nous mettrons l'accent sur les ensembles de lexèmes $\mathcal{L}$ et de définitions $\mathcal{D}$. Aussi, nous utilisons de façon interchangeable les termes « dictionnaire » et « lexique ».

Nous présentons ici les dictionnaires que nous allons utiliser pour notre étude pratique. Concrètement, nous allons considérer des dictionnaires écrits par des linguistes professionnels, que nous appelons *dictionnaires numériques* qui sont rédigés en langue anglaise. En voici la liste.

- Le *Cambridge International Dictionary of English*, ou CIDE, est un dictionnaire de langue anglaise, développé pour les étudiants d'anglais langue seconde (Procter, 1995).
- Le *Longman Dictionary of Contemporary English*, ou LDOCE, est un dictionnaire de niveau avancé pour des étudiants d'anglais langue seconde. Il a été publié pour la première fois en 1978 (Procter, 1995).
- Le *Merriam-Webster's Collegiate Dictionary*, ou MWC, est le dictionnaire le plus volumineux que nous allons étudier (Merriam-Webster, 2003).
- *Wordsmyth* est, selon ses auteurs, à la fois un dictionnaire et un thesaurus (Wordsmyth, 2017). Il se décline en quatre versions :
 - Le *Wordsmyth Educational Dictionary-Thesaurus* (WEDT), le plus complet, a été développé le premier dans les années 1980.
 - Le *Wordsmyth Illustrated Learner's Dictionary* (WILD) est un dictionnaire illustré pour enfants.
 - Le *Wordsmyth Learner's Dictionary-Thesaurus* (WLDT) est un dictionnaire de niveau intermédiaire.
 - Le *Wordsmyth Children's Dictionary-Thesaurus* (WCDT) est un dictionnaire pour débutants.
- Le *WordNet* est une base de données lexicale développée à l'université de Princeton (Oram, 2001).

Un lexique peut être représenté par un graphe orienté. En effet, un graphe orienté est particulièrement indiqué pour représenter les relations *définitionnelles* entre les lexèmes d'un lexique, à savoir, nous considérons uniquement les relations de la forme : le lexème ℓ apparaît dans la définition du lexème ℓ' . Ce qui nous permet de représenter un dictionnaire en utilisant les conventions suivantes.

- Les sommets du graphe sont étiquetés par les lexèmes.
- Les arcs du graphe décrivent les relations définitionnelles entre les lexèmes. Par exemple, si un arc va du sommet ℓ vers le sommet ℓ' , cela signifie que le lexème ℓ fait partie de la définition de ℓ' .

De façon plus formelle, nous définissons le *graphe associé* à un dictionnaire de la façon suivante :

Définition 5.2 (Poulin et al., 2018) Soit $X = (\mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{D})$ un lexique sans ambiguïté. Alors $G(X)$ est le graphe associé à X si :

- (i) $G(X) = (V, A)$ est un graphe orienté
- (ii) $V = \mathcal{L}$
- (iii) $A = \{(\ell, \ell') : \ell' \in \mathcal{L} \text{ et } \ell \in D(\ell')\}$

Remarque 5.1 À noter que de l'information sur le dictionnaire est perdue dans cette représentation, car cette façon de faire ne préserve pas l'ordre des lexèmes de la définition (une définition $D(\ell)$ est un tuple). Nous voyons dans la sous-section 5.2 un modèle différent qui préserve les propriétés sémantiques des définitions dans le graphe représentant un dictionnaire.

La figure 5.1 présente une partie d'un graphe de dictionnaire.

Dans ce qui suit nous utilisons de manière interchangeable les appellations *dictionnaire* et *graphe associé* audit dictionnaire.

5.2 Représentation abstraite de sens

La *Représentation Abstraite de Sens* (RAS, en anglais *Abstract Meaning Representation*) est un formalisme sémantique conçu pour représenter le *sens* d'une phrase donnée tout en s'abstrayant des particularités syntaxiques (Banarescu et al., 2013). Dans ce formalisme, les phrases sont représentées sous forme de graphes orientés acycliques enracinés dans un sommet commun *define*, où les sommets représentent des *concepts* et les arcs étiquetés indiquent les *relations sémantiques* entre ces concepts. Ces concepts sont souvent extraits de *Propbank* (Palmer et al., 2005), un ensemble de données contenant des concepts et arguments désambiguïsés, lesquels représentent des relations spécifiques qu'un concept peut avoir avec d'autres concepts. Une propriété intéressante d'une RAS est que différentes phrases ayant le même sens

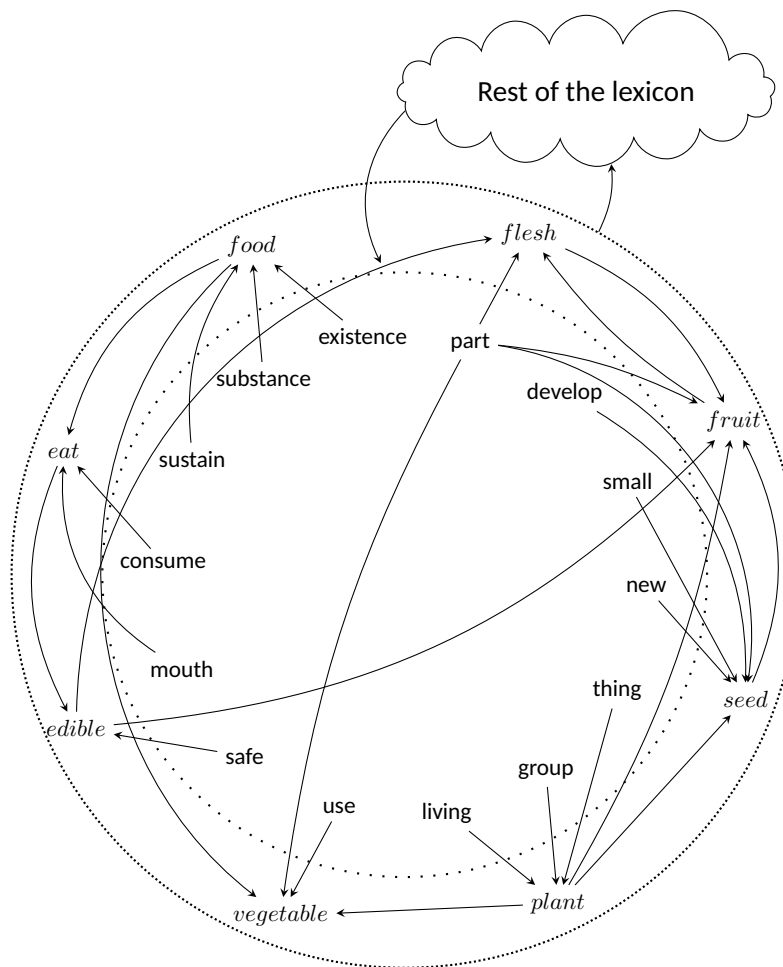


Figure 5.1 – Extrait d'un graphe associé à un dictionnaire (Poulin et al., 2018).

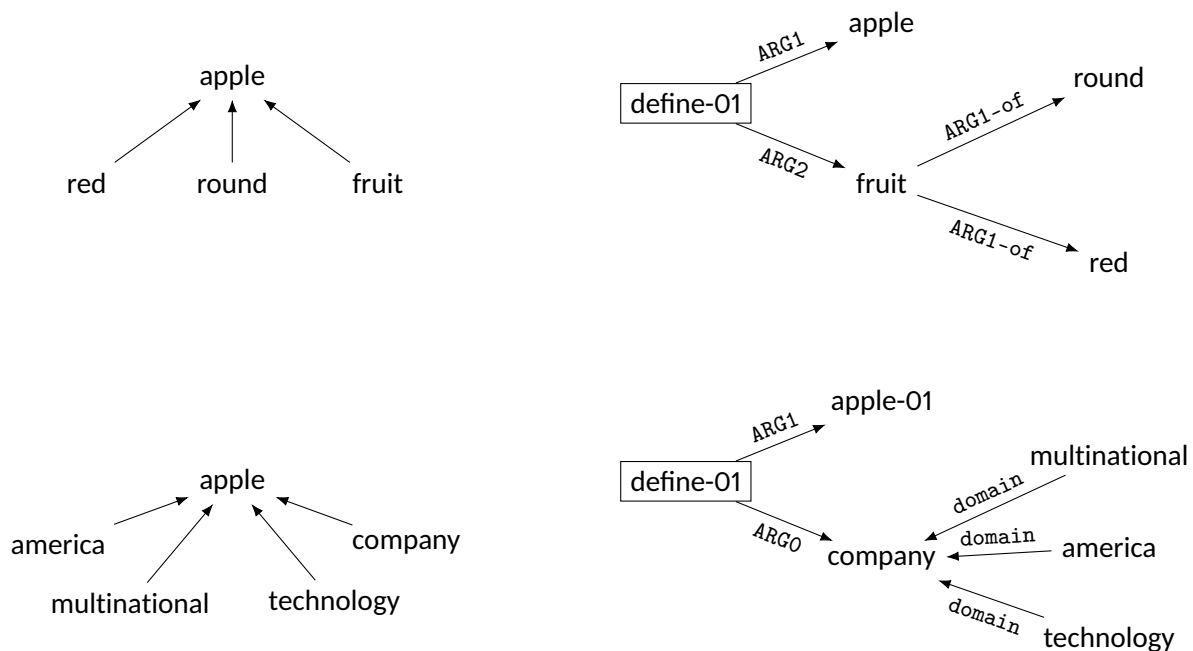


Figure 5.2 – En haut, la RAS obtenu à partir de la transformation des phrases « *apple is defined as a red round fruit* » et « *a red round fruit is the definition of apple* ». À gauche une représentation suivant la définition 5.2 et à droite la RAS équivalente. Étant donné que ces phrases sont des définitions, *define-01* constitue le point central de la RAS. Dans Propbank, l'arc ARG1 de *define-01* correspond à la *chose définie*, tandis que l'arc ARG2 représente la *définition*. En bas, La RAS de la définition de la compagnie Apple.

devraient partager la même représentation RAS. Par exemple, les phrases « *apple is defined as a red round fruit* » et « *a red round fruit is the definition of apple* » partagent la même RAS, illustrée dans la figure 5.2.

Ce formalisme sémantique permet une représentation, d'abord qui désambiguïse les mots d'un dictionnaire et qui, en plus, maintient une structure sémantique de la définition d'un mot.

5.2.1 Construction du graphe RAS

Nous décrivons ici le processus de construction de deux graphes basés sur les RAS à partir des définitions issues de dictionnaires numériques. Un premier qui reprend la structure classique d'un graphe associé (Blondin Massé *et al.*, 2008), c'est-à-dire sans aucune préservation des liens syntaxiques d'une définition, mais qui sera désambiguïsé. Nous appelons ce graphe le *graphe associé désambiguïsé* ou simplement le *graphe désambiguïsé*. Un deuxième graphe qui sera une copie du premier, mais avec l'ajout des liens syntaxiques que nous appelons le *graphe RAS*. À noter que le graphe désambiguïsé servira également de point intermédiaire de comparaison entre les résultats d'une approche non désambiguïcée et sans les liens syntaxiques

1.	« <i>s</i> est défini comme <i>d</i> . »
2.	« La définition de <i>s</i> est <i>d</i> . »
3.	« <i>s</i> a pour définition <i>d</i> . »
4.	« <i>d</i> est la définition de <i>s</i> . »
5.	« <i>s</i> est défini par <i>d</i> . »
6.	« <i>s</i> est défini en tant que <i>d</i> . »

Table 5.1 – Quelques reformulations possibles des définitions, mettant en évidence la relation définitionnelle.

des définitions, représenté par le graphe associé, et l'approche où les liens syntaxiques sont maintenus, représentée par le graphe RAS.

Pour les deux graphes, la première étape est de transformer le contenu d'un dictionnaire dans le formalisme RAS, qui consiste à créer une RAS pour chaque définition du dictionnaire. En particulier, une telle approche doit capturer la relation *définitionnelle* entre les *mots définissants* et le *mot défini*. Dans cet esprit, chaque définition peut être reformulée selon l'une des phrases présentées dans le tableau 5.1, où *s* représente le symbole défini et *d* désigne la définition associée à *s*. Ces phrases peuvent ensuite être traduites en RAS à l'aide d'un *parseur* pour convertir des phrases en graphes (*StoG, Sentence-to-Graph*) (Jascob, 2023). Dans la plupart des cas, la RAS obtenue présente une structure similaire à celle illustrée dans la figure 5.2, où la racine de la RAS est le sommet *define-01*, son premier argument est *s* et son second argument pointe vers une RAS représentant *d*. La désambiguïsation interviendra par exemple pour différencier le fruit *apple* de l'entreprise *Apple* qui sera représenté par *apple-01*, justement pour indiquer que ces deux mots identiques ont des sens distincts, tel qu'illustré dans la figure 5.2.

Pour le graphe désambiguïsé, nous supprimons les arcs RAS existants et nous ajoutons de nouveaux arcs afin que la relation définitionnelle soit correctement reflétée comme dans un graphe associé. Et pour le deuxième graphe RAS, nous maintenons les arcs générés par la transformation RAS en plus d'ajouter les arcs définitionnels, comme pour le graphe désambiguïsé. En effet, chaque RAS enracinée avec l'étiquette *define-01*, possède un seul nœud RAS représentant *s* et un seul sous-graphe représentant *d*. On peut donc supposer que chaque nœud du sous-graphe représentant *d*, est utilisé pour définir le mot associé à la fin de l'arc *ARG1*. Le nœud racine peut alors être supprimé en toute sécurité et un arc sortant est ajouté depuis chaque nœud du sous-graphe définitionnel vers le mot défini. La figure 5.3 illustre ces transformations.

Par conséquent, nous pouvons bénéficier d'un point commun aux trois graphes pour identifier des en-

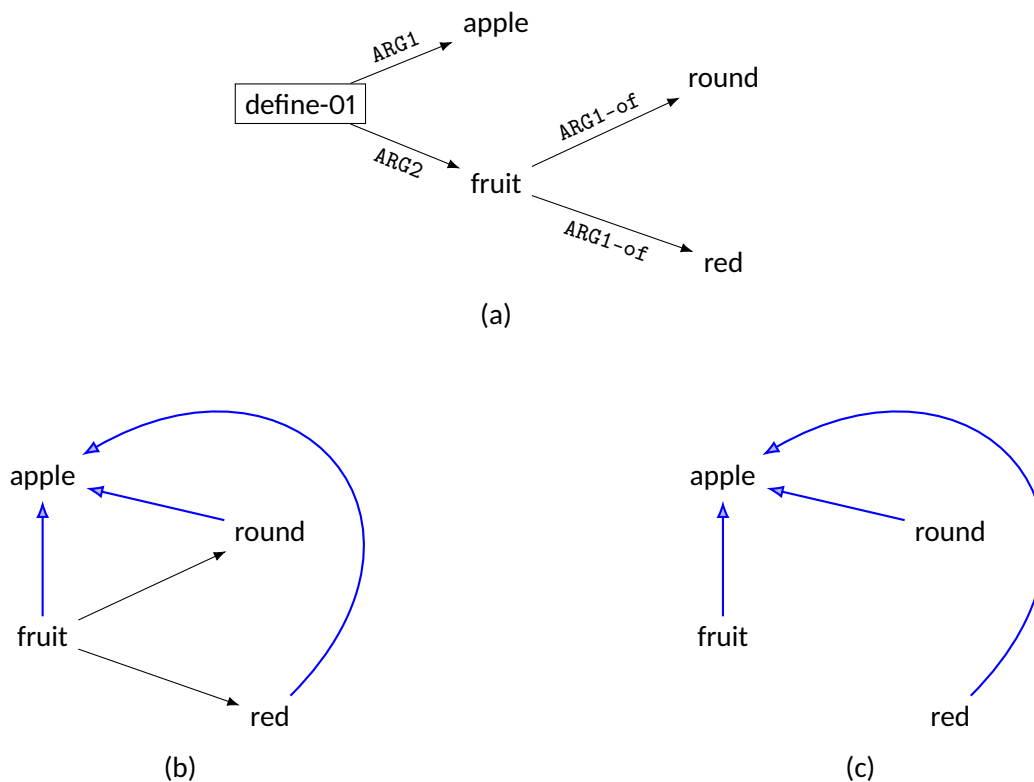


Figure 5.3 – Exemple d'une transformation d'une RAS. (a) La RAS de la définition « *apple is defined as a red round fruit* ». (b) Sa transformation où l'étiquette de la racine a été effacé et des arcs définitionnels, en bleu, ont été ajoutés. C'est cette représentation qui est utilisée pour construire le graphe RAS. (c) La transformation qui est utilisée pour construire le graphe désambiguïé.

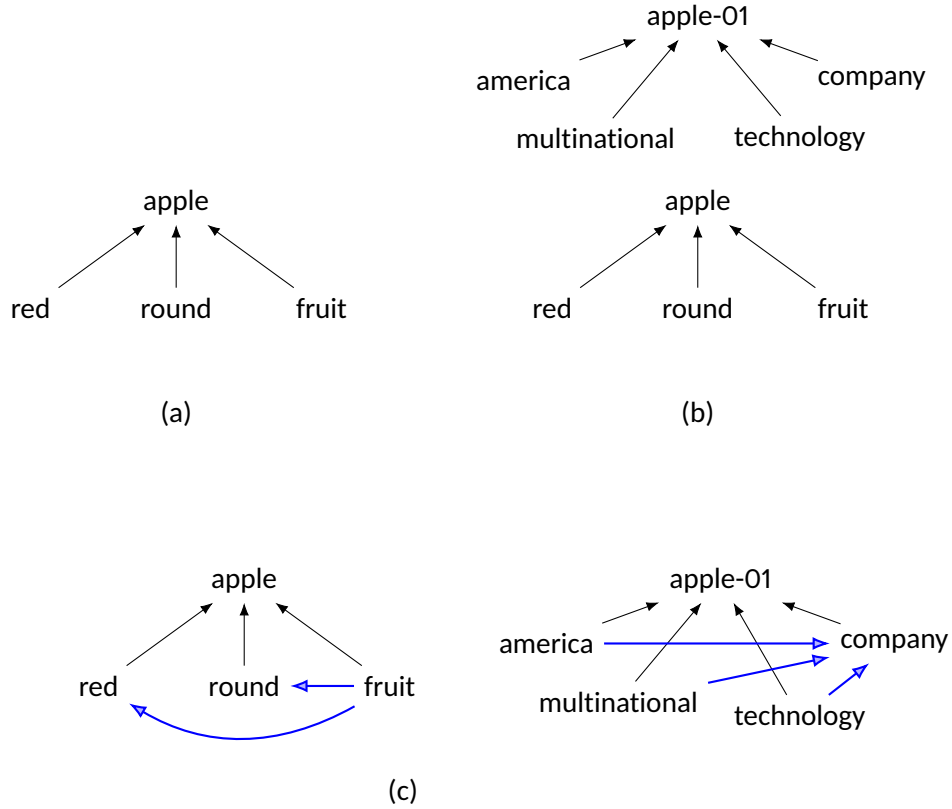


Figure 5.4 – Extraits des trois graphes considérés. (a) Le graphe associé non désambiguïsé (Blondin Massé *et al.*, 2008; Vincent-Lamarre *et al.*, 2016). (b) Le graphe désambiguïsé où nous gardons les deux définitions du fruit et de la compagnie *apple*. Par contre nous ne gardons pas les arcs ajoutés par le processus RAS. (c) Le graphe RAS, désambiguïsé et où nous gardons les arcs de la construction RAS.

sembles d'ancrage, à savoir les arcs définitionnels. En effet, tous les circuits d'un graphe représentant un dictionnaire sont maintenus grâce aux arcs ajoutés lors de la construction des RAS. Plus formellement, les graphe désambiguïsé et graphe RAS d'un dictionnaire sont définis comme l'union des RAS augmentées des arcs définitionnels individuels pour le graphe RAS et sans les arcs RAS pour le graphe désambiguïsé. Nous considérons ces deux unions comme deux représentations graphiques du contenu d'un dictionnaire numérique traduit en RAS. Voir la figure 5.4 pour une illustration des trois graphes considérés.

À noter qu'il est possible que plusieurs RAS partagent la même étiquette pour s , dans ce cas, nous pouvons adopter une stratégie similaire à celle utilisée pour construire des graphes à partir de dictionnaires (Blondin Massé *et al.*, 2008; Vincent-Lamarre *et al.*, 2016), qui consiste à conserver uniquement le premier sens, en respectant l'ordre défini dans le dictionnaire numérique source.

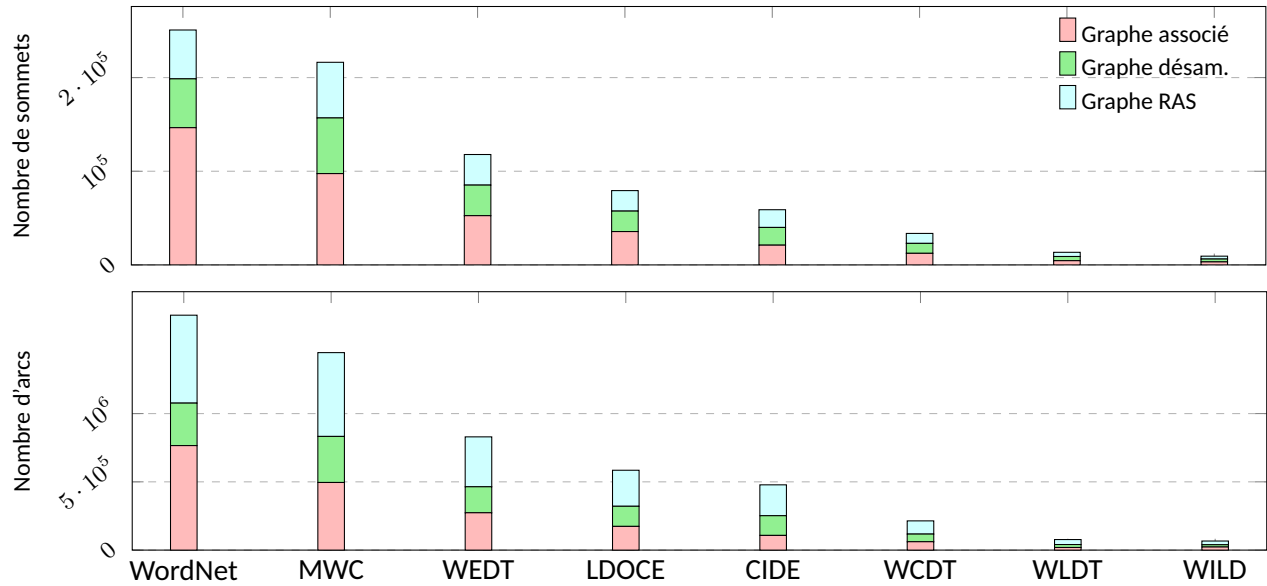


Figure 5.5 – Nombres de sommets et d'arcs des différents dictionnaires

5.3 Expérimentation

À partir des 8 dictionnaires de la section 5.1, nous avons construit 8 graphes désambiguïsés et 8 graphes RAS en utilisant la méthode décrite dans la section précédente. Afin de comparer nos résultats avec ceux décrits dans les travaux précédents, nous avons également utilisé les graphes associés en utilisant uniquement la première définition d'un mot donné (Blondin Massé *et al.*, 2008; Vincent-Lamarre *et al.*, 2016). Le figure 5.5 présente une première comparaison, en termes de sommets et d'arcs, entre les différents graphes obtenus.

Chaque définition a été transformée en une RAS avec des nœuds et les relations définitionnelles. Nous reprenons également le concept de *noyau* défini ainsi.

Définition 5.3 (Noyau (Vincent-Lamarre *et al.*, 2016)) *Le noyau d'un dictionnaire donné est construit en supprimant les mots qui ne sont jamais utilisés dans aucune définition, jusqu'à ce qu'aucun mot supplémentaire ne puisse être retiré sans qu'un mot ne devienne indéfinissable à partir des autres. C'est équivalent à appliquer itérativement la réduction $OUT0$ au graphe associé à un dictionnaire, jusqu'à ce qu'elle ne soit plus applicable.*

Nous rappelons que le noyau d'un dictionnaire est unique, en ce sens que chaque dictionnaire possède un

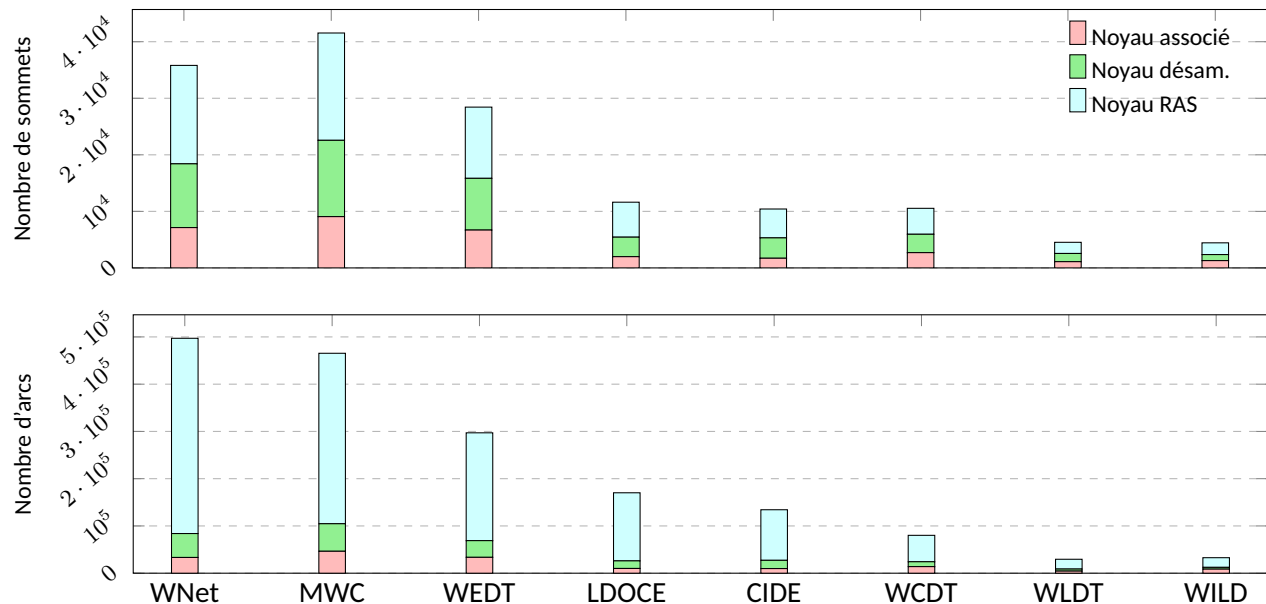


Figure 5.6 – Nombres de sommets et d'arcs des différents noyaux

seul et unique Noyau (Vincent-Lamarre *et al.*, 2016). La figure 5.6 présente une première comparaison, en termes de sommets et d'arcs, entre les différents noyaux obtenus. Nous remarquons que le noyaux désambiguïsé a plus de mots que le noyau associé pour chacun des dictionnaire, même si le graphe désambiguïsé a moins de sommets que le graphe associé. Les noyaux RAS gardent approximativement la même proportion de sommets que les noyaux désambiguïsés, en dépit de leur nombre d'arcs largement supérieur. À noter que dans les graphes désambiguïsés et RAS nous perdons quelques sommets comparativement aux graphes associés. En effet, dans le processus de construction des RAS, parfois nous n'arrivons pas à obtenir une RAS enracinée avec deux arguments fils. C'est ainsi que le nombre de sommets est toujours plus grand dans les graphes associés que dans les graphes désambiguïsés ou RAS. Par contre, le nombre d'arcs est proportionnellement plus élevé dans les graphes RAS. C'est dû à l'approche adoptée lors de la suppressions du sommet *define-01* et l'ajout d'arcs des mots définissants vers le mot défini. Ça se répercute également sur les noyaux des graphes désambiguïsés et RAS qui sont plus gros que les noyaux des graphes associés. En effet, la densité plus élevée des graphes désambiguïsés et RAS aide à préserver davantage de sommets, ce qui ajoute plus de contexte à l'étude psycholinguistique du noyau. Notons que c'est un avantage psycholinguistique et, à l'inverse, un désavantage dans le calcul d'un TCCM. Ceci étant dit, le but premier étant d'étudier le problème de l'ancrage symbolique, le problème du TCCM donc, la résolution du problème, même si elle est souhaitable, elle demeure de moindre importance. En effet, à l'instar des travaux antérieurs, nous nous intéressons, en premier lieu, à la démarche qui nous permet de nous rapprocher d'un TCCM et, en seconde

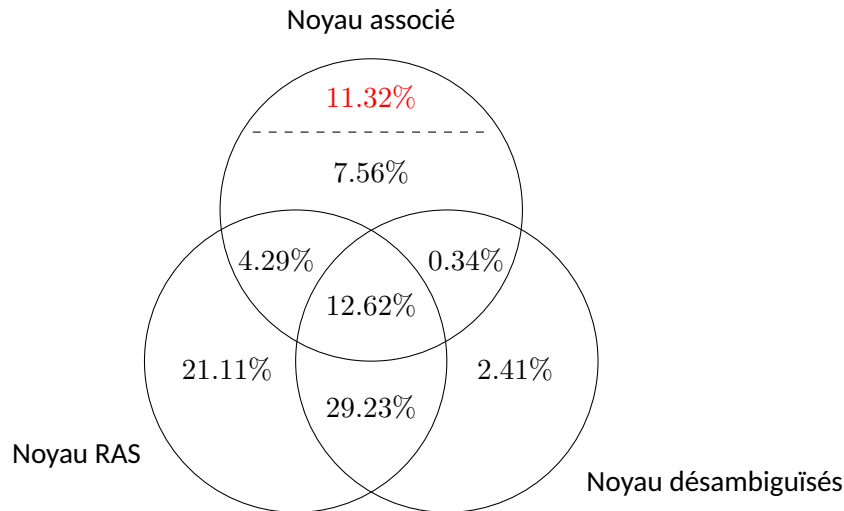


Figure 5.7 – Une représentation en diagramme de Venn des proportions des mots partagés et exclusifs entre les noyaux des graphes associés, désambiguïsés et RAS. Nous considérons tous les mots des trois noyaux des graphes associés, désambiguïsés et RAS. Les pourcentages sont calculés comme une moyenne basée sur les valeurs détaillées du tableau D.2. En rouge le pourcentage de mots dont la définition n'a pas été transformée par RAS.

lieu, l'interprétation psycholinguistique de ses différentes étapes.

Une présentation en diagramme de Venn dans la figure 5.7 permet de mieux visualiser la tendance dans la distribution des mots appartenant aux différents noyaux. Nous voyons clairement que les noyaux des graphes RAS permettent en moyenne de maintenir davantage de mots et donc, potentiellement, davantage d'information pour étudier le problème de l'ancrage symbolique et les mots non-ancrés. Même si d'un point de vue algorithmique ça augmente la difficulté de traitement.

Nous voyons que la désambiguïsation apporte un gain significatif en ajoutant un nombre proportionnellement important de sommets (mots) aux noyaux des graphes désambiguïsés. Une comparaison plus juste serait de considérer seulement la troisième colonne du tableau D.2 qui indique donc le nombre de mots appartenant à un graphe associé et désambiguïsé, qui sont dans le noyau du graphe associé, mais pas dans le noyau du graphe désambiguïsé. Ainsi nous observons que la désambiguïsation apporte un réel surplus de sommets dans le noyau vu qu'elle permet d'identifier davantage de mots appartenant au noyau.

Concernant les composantes fortement connexes, en dépit du fait que les noyaux désambiguïsés et RAS ont plus de sommets que le noyau associé, la figure 5.8 nous montre que ce dernier a beaucoup plus de composantes fortement connexes. Ce qui peut indiquer que la désambiguïsation ajoute des mots *passerelles*

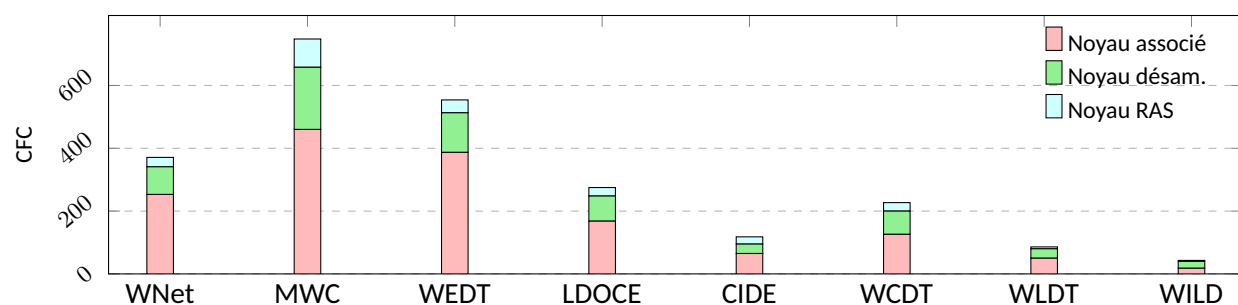


Figure 5.8 – Nombre des composantes fortement connexes dans les noyaux

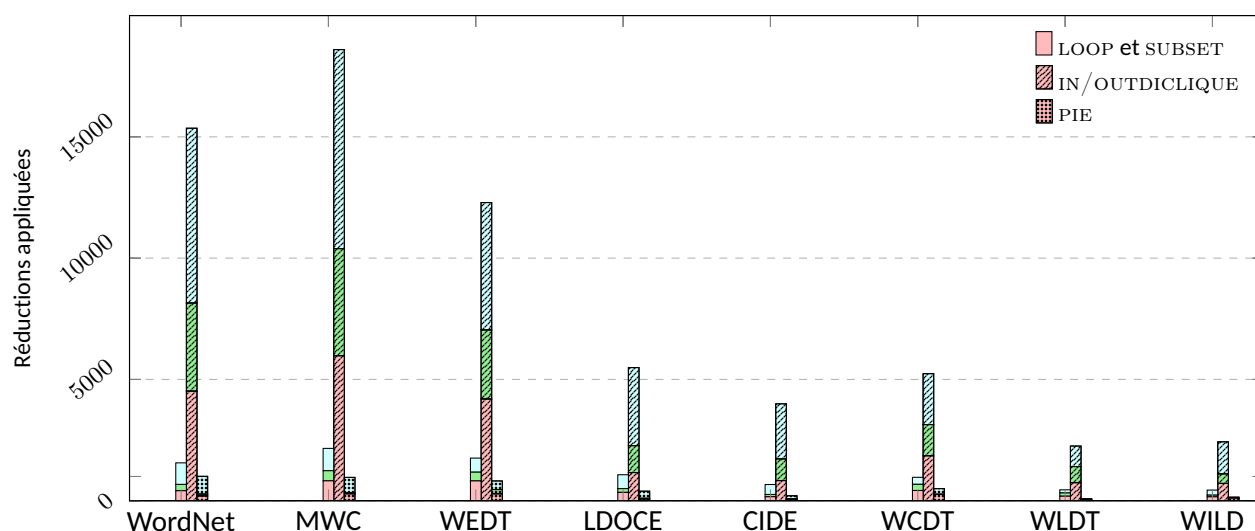


Figure 5.9 – Nombre d'applications des réductions confluentes

entre de petites composantes pour les fusionner. Le noyau RAS a encore moins de composantes fortement connexes qui probablement due à son nombre élevé d'arcs.

À présent, sachant que la réduction `OUT0` est confluite avec l'ensemble des réductions du chapitre 2, nous continuons d'appliquer toutes les autres réductions sur les noyaux et nous sommes assurés que les graphes ou noyaux réduits finaux que nous obtenons sont uniques à isomorphisme près. C'est ainsi que nous obtenons les résultats présentés dans la figure 5.9. Ce graphique représente les nombres de fois que les réductions confluentes discutées dans le chapitre 2 ont été appliquées sur les 8 dictionnaires et leurs graphes correspondants. Que ça soit lors de la construction du noyau ou lors de sa réduction, ce sont principalement les formes simples de `OUTDICLIQUE` qui sont appliquées, à savoir `OUT0` et `OUT1`. Nous pouvons interpréter ce phénomène comme le retrait de mots qui ne définissent aucun autre mot ou exactement un mot, que nous pouvons voir comme une sorte de synonyme dans un tel cas de figure.

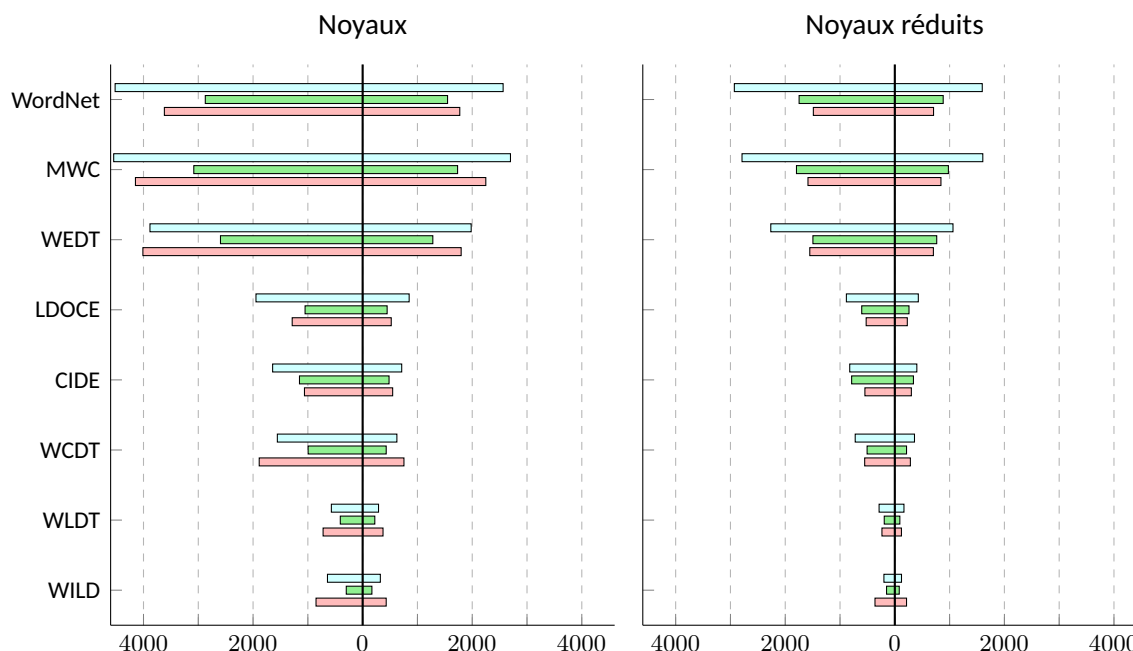


Figure 5.10 – Distribution de l'âge d'acquisition des mots dans les noyaux et leurs réductions. À gauche de la ligne verticale à l'abscisse 0 le nombre total de mots acquis avant l'âge de 10 ans, à droite le nombre total de mots acquis après l'âge de 10 ans. Les couleurs des barres horizontales suivent la convention des figures précédentes, à savoir la couleur rouge est pour le noyau associé, la couleur verte est pour le noyau désambiguïsé et la couleur bleue est pour le noyau RAS. De même pour les noyaux réduits.

Nous avons également examiné l'interprétation psycholinguistique de ces résultats, notamment, les caractéristiques psycholinguistiques des mots appartenant aux différents noyaux et de leur noyau réduit correspondant. Nous avons restreint notre attention à deux variables psycholinguistiques clés : *l'âge d'acquisition* (AOA) et *la concrétude* (Conc). L'AOA fait référence à l'âge moyen auquel un mot est appris pour la première fois, avec des données provenant de la base de données de Brysbaert (couvrant les âges de 1 à 21) (Kuperman *et al.*, 2012). La concrétude mesure, avec des valeurs supérieures ou égales à 1, la *matérialité* d'un mot, allant de *abstrait* à *hautement concret*, sur la base des classifications des participants. Par exemple, « *banane* » et « *pomme* » sont classés au niveau 5, tandis que « *croyance* » est évalué au niveau 1 (Brysbaert *et al.*, 2014).

La figure 5.10 montre les nombres de mots acquis avant et après l'âge de 10 ans. Nous observons la même tendance sur le nombre total de mots acquis avant et après l'âge de 10 ans dans tous les noyaux et les noyaux réduits pour tous les dictionnaires. En résumé, c'est principalement avant l'âge de 10 ans qu'une grande majorité des mots est apprise (aux alentours de 65% des mots) et ça se maintient aux trois noyaux des trois graphes ainsi que leurs réductions.

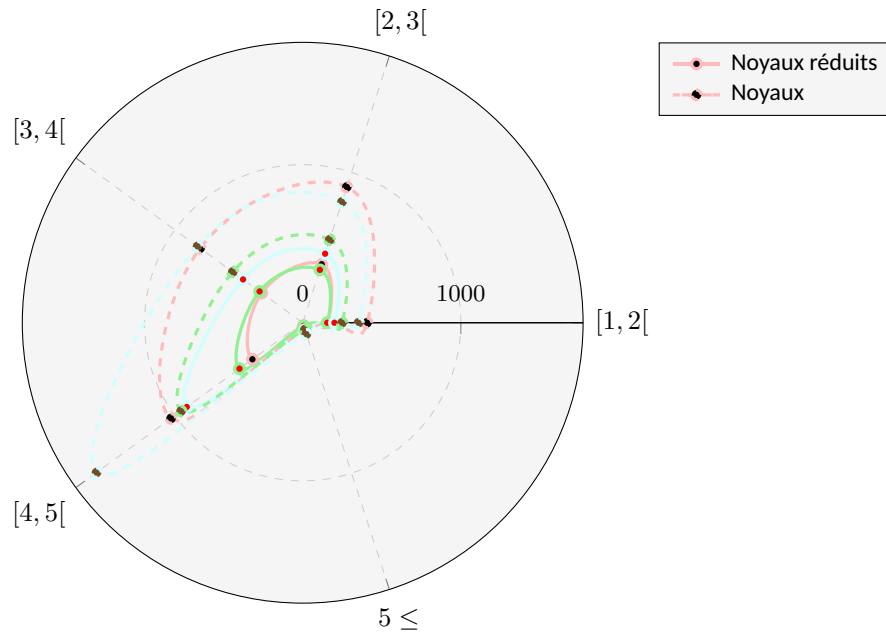


Figure 5.11 – Distribution de la concrétude des mots dans les noyaux et leurs réductions. Les couleurs suivent la même convention que les figures précédentes. Les courbes en pointillées représentent les moyennes des nombres totaux de mots dans tous les noyaux pour chaque intervalle de concrétude. De même, les courbes en continues représentent les mêmes moyennes mais pour les noyaux réduits.

Nous observons le même phénomène pour la distribution de la concrétude dans la figure 5.11. En effet, nous voyons les mêmes proportions de mots dans les 5 intervalles de concrétude que nous considérons.

À noter que ce ne sont pas tous les mots apparaissant dans les noyaux ou les noyaux réduits qui sont étiquetés par les bases de données sur la concrétude et l'âge d'acquisition dont nous disposons. Par conséquent, la somme des nombres d'une ligne de concrétude ou de AOA du tableau D.4 est potentiellement inférieure au nombre total de sommets du noyau ou du noyau réduit correspondant. Les valeurs exactes qui ont été utilisées pour construire les graphiques de ce chapitre sont fournies dans l'annexe D pour les lecteurs intéressés.

CHAPITRE 6

ÉNUMÉRATION

Ce chapitre traite du problème de l'énumération efficace de tous les transversaux de circuits de cardinalité minimale d'un graphe donné, problématique intimement liée au TCCM et particulièrement pertinente dans le contexte des dictionnaires, où chaque solution possède une potentielle interprétation psycholinguistique. Nous développons une structure de données conçue pour accompagner les algorithmes basés sur les réductions précédemment étudiées : l'arbre union-cat, capable de représenter de façon compacte une famille d'ensembles de même cardinalité et particulièrement adapté aux différents *branchements* induits par l'application des réductions. Nous présentons un algorithme construisant un arbre union-cat contenant, lorsque cela est possible, l'ensemble de tous les TCCM du graphe. Dans le cas des dictionnaires, cette structure permet de conserver une trace complète de tous les mots susceptibles d'appartenir à un TCCM. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication dans *RAIRO - Theoretical Informatics and Applications* (Abdenbi *et al.*, 2024b).

6.1 Arbres Union-Cat

Lorsqu'il s'agit de traiter de grands ensembles de sous-ensembles, il devient rapidement impraticable de stocker explicitement chacun d'entre eux en mémoire. Il est donc nécessaire d'utiliser des structures de données qui représentent ces sous-ensembles de manière compacte et implicite.

Parmi les structures de données couramment utilisées, on trouve les *diagrammes de décision binaires* (BDD), les *diagrammes de décision binaires ordonnés réduits* (ROBDD) (Bryant, 1986), ainsi que leurs variantes, telles que les *BDD à suppression des zéros* (ZDD) (Minato, 1993). L'idée de leur fonctionnement peut être résumée comme suit. Soit S un ensemble fini et $\mathcal{F}$ une famille de sous-ensembles de S . Alors $\mathcal{F}$ peut être représentée par une fonction booléenne $f : \{0, 1\}^{|S|} \rightarrow \{0, 1\}$ dont l'évaluation indique si un sous-ensemble donné $A \subseteq S$ appartient ou non à $\mathcal{F}$, c'est-à-dire $f(A) = 1$ si et seulement si $A \in \mathcal{F}$.

Les BDD et les ZDD ont été largement étudiés. Donald Knuth a donné deux célèbres conférences sur le sujet (Knuth, 2008a; Knuth, 2008b), mentionnant, notamment, que l'article de Bryant a été pendant plusieurs années le plus cité dans ce domaine (Bryant, 1986). Les BDD et les ZDD trouvent de nombreuses applications, allant de la génétique (Benini *et al.*, 2005) à l'exploration de données (Loekito et Bailey, 2006) et

à la théorie des jeux (Schröder et Wegener, 1998). Ils sont également très utiles dans les problèmes combinatoires, en particulier pour représenter toutes les solutions d'un problème donné (Minato, 1993). De nombreux algorithmes d'énumération reposent sur la technique classique de *branch-and-cut*, selon que certaines variables choisies sont incluses ou exclues de la solution (Becker *et al.*, 2005).

Cependant, le branchement binaire n'est pas toujours adapté et les BDD/ZDD peuvent s'avérer moins pratiques, notamment lorsque l'énumération exhaustive des éléments de la famille est impossible. Par exemple, Lin et Jou (Lin et Jou, 2000) proposent un algorithme de *branch-and-cut* avec deux règles de branchement :

- (1) lorsque le graphe orienté n'est pas connexe, brancher selon chacune de ses composantes fortement connexes ;
- (2) lorsque toutes les autres règles ont été épuisées, brancher selon qu'un sommet bien choisi est inclus ou exclu de la solution.

Si les BDD/ZDD gèrent naturellement la règle (2), la règle (1) est quant à elle plus difficile à traiter.

Avant de définir formellement notre structure de données, nous avons besoin de définitions et de notations supplémentaires. Soit S un ensemble fini. Tout ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ est appelé une *famille* sur S , où $\mathcal{P}(S)$ est l'ensemble des parties de S . Autrement dit, $\mathcal{F}$ est une collection de sous-ensembles de S . Toutes les opérations habituelles en théorie des ensembles sont naturellement définies pour les familles. Étant données deux familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$, la *concaténation* de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ est définie par,

$$\mathcal{F} * \mathcal{H} = \{E \cup F \mid E \in \mathcal{F}, F \in \mathcal{H}\}$$

Il est facile de vérifier que l'opération de concaténation est à la fois associative et commutative. Plus généralement, si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ sont des familles sur S , alors

$$\bigast_{i=1}^n \mathcal{F}_i = \left\{ \bigcup_{i=1}^n E_i \mid E_i \in \mathcal{F}_i, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

Les arbres union-cat sont définis par la structure de graphe suivante dans la définition 6.1, consolidée avec les applications de la définition 6.2 afin de les rendre concises et efficaces.

Définition 6.1 Soient S un ensemble fini, T un arbre enraciné et V l'ensemble des nœuds de T . Pour tout

$v \in V$, notons $v.ENFANTS$ l'ensemble (éventuellement vide) des nœuds enfants de v . Alors, T est appelé un arbre union-cat (UCT) s'il existe une application $CONTENU : V \rightarrow S \cup \{*, \cup\}$ telle que, pour tout nœud $v \in V$, nous avons.

- (i) Si $v.ENFANTS = \emptyset$ (v est une feuille), alors $CONTENU(v) \in S$;
- (ii) Si $v.ENFANTS \neq \emptyset$ (v est un nœud interne), alors :
 - soit $CONTENU(v) = *$, et v est alors appelé un nœud de concaténation,
 - soit $CONTENU(v) = \cup$, et v est alors appelé un nœud d'union.

Étant donné un arbre union-cat T , on peut lui associer une famille unique $\mathcal{F}$, calculée de manière récursive comme suit. Le cas de base est une feuille v de T , représentée par l'ensemble $\{\{CONTENU(v)\}\}$. Pour chaque nœud interne v de T , on applique les opérations $\cup$ ou $*$ correspondant à $CONTENU(v)$ sur tous les $v.ENFANTS$. Cette construction est illustrée dans l'exemple suivant.

Exemple 6.1 Soit $S = \{0, 1, 2, 3\}$ et $\mathcal{F} = \{\{0, 1\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}\}$. L'arbre union-cat T de la figure 6.1-(a) fournit une représentation de $\mathcal{F}$. La figure 6.1-(b) montre les étapes récursives de la construction de $\mathcal{F}$. Nous commençons par représenter les feuilles de T , où chaque nœud v est associé à l'ensemble $\{\{CONTENU(v)\}\}$. Ensuite, nous appliquons récursivement les opérations des nœuds internes.

- Le nœud d'union avec les feuilles 1 et 3 est remplacé par $\{\{1\}, \{3\}\} = \{\{1\}\} \cup \{\{3\}\}$.
- Le nœud de concaténation gauche est remplacé par $\{\{0, 1\}, \{0, 3\}\} = \{\{0\}\} * \{\{1\}, \{3\}\}$.
- Le nœud de concaténation droit est remplacé par $\{\{1, 2\}\} = \{\{1\}\} * \{\{2\}\}$.

Enfin, nous obtenons la famille $\mathcal{F}$ en remplaçant le nœud racine (union) de T par $\{\{0, 1\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}\} = \{\{0, 1\}, \{0, 3\}\} \cup \{\{1, 2\}\}$.

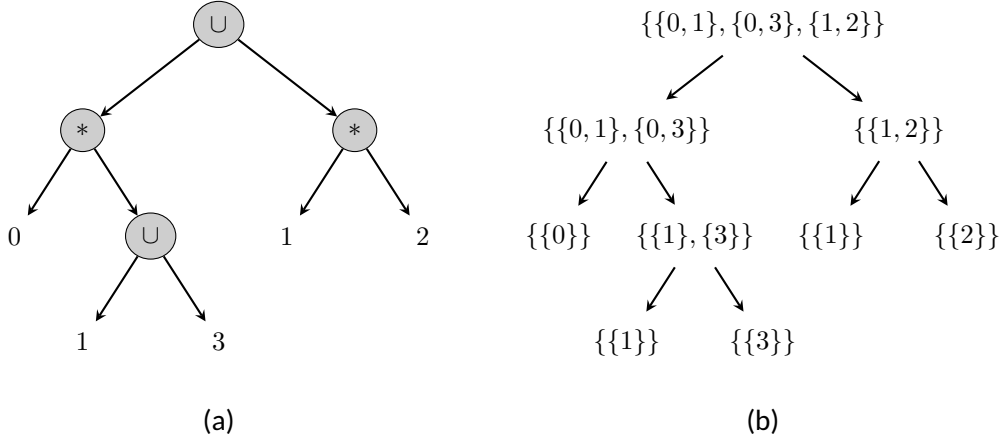


Figure 6.1 – Exemple d'un arbre union-cat. (a) Un arbre union-cat T représentant la famille $\mathcal{F} = \{\{0, 1\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}\}$ sur l'ensemble $S = \{0, 1, 2, 3\}$. (b) Le même arbre union-cat avec des étiquettes de nœuds correspondant à la construction récursive de la famille $\mathcal{F}$.

Remarquons que la définition actuelle d'un arbre union-cat peut permettre des redondances, c'est-à-dire que certains éléments de la famille $\mathcal{F}$ peuvent être obtenus à partir de branches différentes. Pour éviter cela, nous introduisons les applications suivantes, qui servent également à formaliser le processus de construction récursif décrit dans l'exemple 6.1.

Définition 6.2 Soient S un ensemble fini et T un arbre union-cat sur S . On dit que T est une représentation non ambiguë d'une famille $\mathcal{F}$ sur S s'il existe deux applications $\text{VALEURS} : V \rightarrow \mathcal{P}(S)$ et $\text{FAMILLE} : V \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$ telles que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) Pour tout $v \in V$,

$$\text{VALEURS}(v) = \begin{cases} \{\text{CONTENU}(v)\}, & \text{si } v \text{ est une feuille;} \\ \bigcup_{w \in v.\text{ENFANTS}} \text{VALEURS}(w), & \text{si } v \text{ est un nœud interne.} \end{cases}$$

(ii) Pour tout $v \in V$,

$$\text{FAMILLE}(v) = \begin{cases} \{\{\text{CONTENU}(v)\}\}, & \text{si } v \text{ est une feuille;} \\ \bigcup_{w \in v.\text{ENFANTS}} \text{FAMILLE}(w), & \text{si } v \text{ est un nœud d'union;} \\ \bigstar_{w \in v.\text{ENFANTS}} \text{FAMILLE}(w), & \text{si } v \text{ est un nœud de concaténation.} \end{cases}$$

- (iii) *Pour tout nœud d'union $v \in V$ tel que $w, w' \in v.ENFANTS$, la condition $FAMILLE(w) \cap FAMILLE(w') \neq \emptyset$ implique $w = w'$.*
- (iv) *Pour tout nœud de concaténation $v \in V$ tel que $w, w' \in v.ENFANTS$, la condition $VALEURS(w) \cap VALEURS(w') \neq \emptyset$ implique $w = w'$.*

En termes simples, la contrainte (iii) de la définition 6.2 garantit que l'opération d'union est toujours disjointe, ce qui empêche qu'un sous-ensemble soit représenté plus d'une fois. La condition (iv) assure que toute concaténation est effectuée sur des familles disjointes. Désormais, nous désignons par la *structure de données UCT* (ou arbre union-cat) un arbre union-cat enrichi des applications valeurs et famille de la définition 6.2.

Il est évident que les arbres union-cat ne sont pas toujours adaptés pour représenter certaines familles, mais ils s'avèrent particulièrement compacts lorsqu'il s'agit de calculer de grandes familles avec des structures spécifiques, notamment lorsque les nœuds de concaténation partitionnent les valeurs en groupes suffisamment grands. Il convient de noter que les arbres union-cat sont très similaires à une autre structure de données appelée *arbres et/ou (and/or trees)*, principalement utilisés dans la communauté d'intelligence artificielle (Luger et A., 1993) et comme technique d'exploration d'espaces de grands arbres de jeu (Kumar et Kanal, 1984).

Des opérations de base et avancées peuvent être définies de manière récursive sur la structure de données des arbres union-cat. Dans de nombreux cas, elles consistent en un parcours en profondeur, avec des actions spécifiques en fonction du type de nœud visité. Pour rendre le contenu de cette section plus accessible, nous présentons certaines de ces opérations dans l'annexe.

6.2 Algorithme d'énumération

Cette section est consacrée à la description d'un algorithme qui calcule l'arbre union-cat représentant l'ensemble $TCCM(G)$ pour tout graphe orienté G . Avant de présenter cet algorithme, nous introduisons quelques définitions utiles.

Définition 6.3 Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté et $u \in V$. On dit que u est un sommet,

- (i) *TCCM-Essentiel (ou simplement essentiel) s'il appartient à tout ensemble de $TCCM(G)$;*

- (ii) *TCCM-Inutile (ou simplement inutile) s'il n'appartient à aucun ensemble de $TCCM(G)$;*
- (iii) *TCCM-Optionnel (ou simplement optionnel) s'il n'est ni essentiel, ni inutile.*

Par exemple, les sommets possédant une boucle sont essentiels, ceux identifiés par `LOOP`. Tandis que ceux sans successeur ou sans prédécesseur, ceux identifiés par `OUT0` et `IN0` respectivement, sont inutiles.

Les deux relations naturelles suivantes sur les sommets s'avèrent utiles pour notre étude.

Définition 6.4 Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté et $u, v \in V$. Pour un sommet donné $x \in V$, nous notons $\mathcal{U}[x] = \{U \in TCCM(G) \mid x \in U\}$. Nous disons que,

- (i) *u est dominé par v , noté $u \preceq v$, si pour tout $U \in \mathcal{U}[u]$, nous avons $(U - \{u\}) \cup \{v\} \in \mathcal{U}[v]$;*
- (ii) *u et v sont équivalents, noté $u \equiv v$, si $u \preceq v$ et $v \preceq u$.*

Soit $U \in TCCM(G)$. Nous observons immédiatement que si $u \equiv v$, alors $u \in U$ implique $v \notin U$, c'est-à-dire que ces deux sommets ne peuvent pas appartenir simultanément à U . En effet, par l'absurde, si $u, v \in U$, alors $(U - \{u\}) \cup \{v\} = U - \{u\}$ serait un TCCM avec une cardinalité inférieure à celle de U , ce qui contredit la minimalité de U .

À noter que $\equiv$ est une relation d'équivalence. L'intérêt des paires de sommets équivalents est qu'elles peuvent être fusionnées. Ainsi, il suffit de suivre les classes d'équivalence lors de la construction de l'arbre union-cat représentant tous les TCCM. Plus précisément, pour tout $U \in TCCM(G)$, si $u \in U$ et $u \equiv v$, alors u peut être remplacé par v dans U . Enfin, des propriétés supplémentaires reliant la relation $\preceq$ aux concepts de sommets essentiels, optionnels et inutiles permettent d'accélérer l'algorithme 7 dans certains cas.

Remarque 6.1 Dans certaines situations nous pouvons caractériser la dominance entre des sommets essentiels ou optionnels et des sommets inutiles. En effet, soient $G = (V, A)$ un graphe orienté et $u, v \in V$.

- (i) *Si u a un unique successeur v , alors $u \preceq v$;*
- (ii) *Si v a un unique prédécesseur u , alors $v \preceq u$;*
- (iii) *Si v a un unique prédécesseur u et u a un unique successeur v , alors $u \equiv v$.*

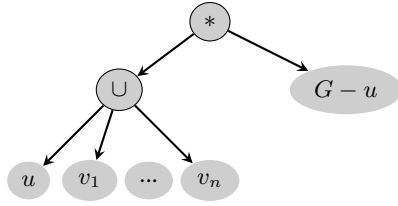
De même, certains sommets sont inutiles.

- (i) Si $u \preceq v$ et v est essentiel, alors u est inutile.
- (ii) Si $u \preceq v$ et v est inutile, alors u est inutile.

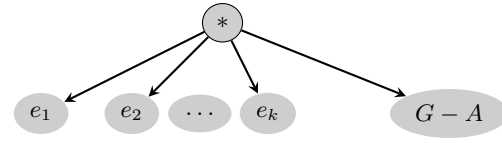
Avant de décrire notre algorithme d'énumération des TCCM, nous définissons la fonction de fusion suivante. Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et $u, v \in V$, si $(u, v) \in E$, alors $G.\text{FUSION}(u, v)$ est le graphe $G - v$ auquel nous ajoutons les arcs $((N_G^-(v) \setminus \{u\}) \times \{u\}) \cup (\{u\} \times N_G^+(v))$. D'autres opérations sont définies dans l'annexe E.

Nous sommes désormais prêts à décrire notre algorithme d'énumération des TCCM. Il prend en entrée un graphe orienté $G = (V, E)$ quelconque et retourne l'ensemble $\text{TCCM}(G)$, représenté sous forme d'un arbre union-cat. La stratégie suit les étapes suivantes (voir la figure 6.2).

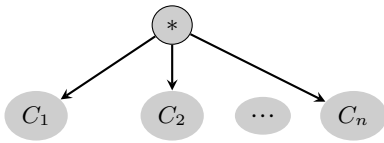
1. Identifier les paires de sommets équivalents et adjacents, les fusionner.
 - Les sommets doivent être adjacents, autrement nous risquons de créer des circuits. Par exemple le cas où u n'a aucun successeur et v n'a aucun prédécesseur, les fusionner sans qu'ils soient adjacents va potentiellement créer un circuit.
 - Il est crucial de conserver les informations sur les sommets équivalents pour les étapes ultérieures, voir la figure 6.2-(a).
2. Identifier les sommets inutiles et essentiels en appliquant les observations de la remarque 6.1 (pour accélérer l'exécution).
3. Retirer les sommets inutiles;
4. Appliquer les réductions identifiant des arcs superflus;
5. Retirer les sommets essentiels et les ajouter à l'arbre union-cat (voir la figure 6.2-(b));
6. Si le graphe orienté contient plusieurs composantes connexes, diviser le problème en autant de sous-problèmes que de composantes (voir la figure 6.2-(c));
7. Sinon, choisir un sommet (par exemple, le premier sommet ayant le degré maximum) et explorer les deux possibilités, selon qu'il est inclus ou exclu de la solution (voir la figure 6.2-(d)).



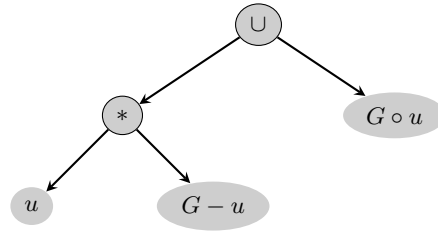
(a) À chaque ajout d'un sommet u , si la classe d'équivalence de u ne contient que u , alors nous créons un nœud feuille contenant u , sinon, nous créons le sous-arbre ci-dessus, où $v_1, \dots, v_n$ sont les autres sommets équivalents à u .



(b) Si l'ensemble des sommets essentiels A n'est pas vide, i.e. $A = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, nous pouvons les ajouter à l'arbre et les retirer du graphe.



(c) Lorsqu'il y a plus d'une composante connexe, nous divisons le problème en sous-problèmes plus petits.



(d) Sinon, nous branchons selon un sommet bien choisi.

Figure 6.2 – Les différents cas rencontrés lors du calcul de l'arbre union-cat.

L'algorithme complet est présenté sous forme de pseudo-code dans l'algorithme 7 et un exemple de sortie est illustré dans la figure 6.3. Nous supposons qu'une structure de données (comme des ensembles disjoints) est utilisée pour conserver la trace des sommets équivalents ou l'ensemble S , qui sont insérés dans l'arbre lors de chaque ajout d'un sommet (voir les lignes 10 et 26).

6.3 Performances

Pour évaluer la performance de notre algorithme, nous utilisons les réductions de Levy et Low ainsi que celles de Lin et Jou (Levy et Low, 1988; Lin et Jou, 2000). Plus précisément, nous employons In1 et Out1 pour identifier les sommets à fusionner, In0 et Out0 pour identifier les sommets inutiles, Loop pour identifier les sommets essentiels, ainsi que Pie et Dome pour identifier les arcs superflus. Nous avons généré des échantillons de graphes aléatoires provenant de deux familles de graphes orientés : les graphes Erdős-Rényi (Erdos et Rényi, 1984) et les webgraphs (Sathe, 2008). L'algorithme a également été testé sur les dictionnaires obtenus dans le cadre du jeu de dictionnaires décrit dans le chapitre 5.

Les graphes Erdős-Rényi (Erdos et Rényi, 1984) sont générés comme suit. Nous fixons le nombre de sommets n et la densité attendue $p \in [0, 1]$. Ensuite, pour chaque arc possible (u, v) , on l'inclut avec une probabilité

Algorithme 7 Calcul d'un arbre union-cat de tous les TCCM d'un graphe orienté donné

```
1: fonction CONSTRUIREARBRE( $G$  : digraph) : arbre union-cat
2:   Fusionner toutes les paires de sommets équivalents
3:   Retirer les sommets inutiles
4:   Retirer tous les arcs superflus identifiables
5:   Soit  $A$  l'ensemble des sommets essentiels
6:    $x \leftarrow \text{NOUVEAUNOEUD}()$ 
7:   si  $|A| > 0$  alors
8:      $x.\text{CONTENU} \leftarrow *$  ▷ Les sommets essentiels peuvent être retirés
9:     pour  $e \in A$  faire
10:      Ajouter la feuille contenant  $e$  à  $x.\text{ENFANTS}$ 
11:     fin pour
12:      $G' \leftarrow G - A$ 
13:     Ajouter CONSTRUIREARBRE( $G'$ ) à  $x.\text{ENFANTS}$ 
14:   sinon
15:      $\mathcal{C} \leftarrow \text{COMPOSANTESCONNEXES}(G)$ 
16:     si  $|\mathcal{C}| > 1$  alors ▷ Brancher suivant les composantes connexes
17:        $x.\text{CONTENU} \leftarrow *$ 
18:       pour  $C \in \mathcal{C}$  faire
19:         Ajouter CONSTRUIREARBRE( $C$ ) à  $x.\text{ENFANTS}$ 
20:       fin pour
21:     sinon ▷ Brancher suivant un certain sommet
22:       Soit  $u$  un sommet quelconque
23:        $x.\text{CONTENU} \leftarrow \cup$ 
24:        $y \leftarrow \text{NOUVEAUNOEUD}()$ 
25:        $y.\text{CONTENU} \leftarrow *$ 
26:       Ajouter une feuille contenant  $u$  à  $y.\text{ENFANTS}$ 
27:        $G' \leftarrow G - u$ 
28:       Ajouter CONSTRUIREARBRE( $G'$ ) à  $y.\text{ENFANTS}$ 
29:        $G' \leftarrow G \circ u$ 
30:       Ajouter CONSTRUIREARBRE( $G'$ ) à  $x.\text{ENFANTS}$ 
31:     fin si
32:   fin si
33:   retourner  $x$ 
34: fin fonction
```

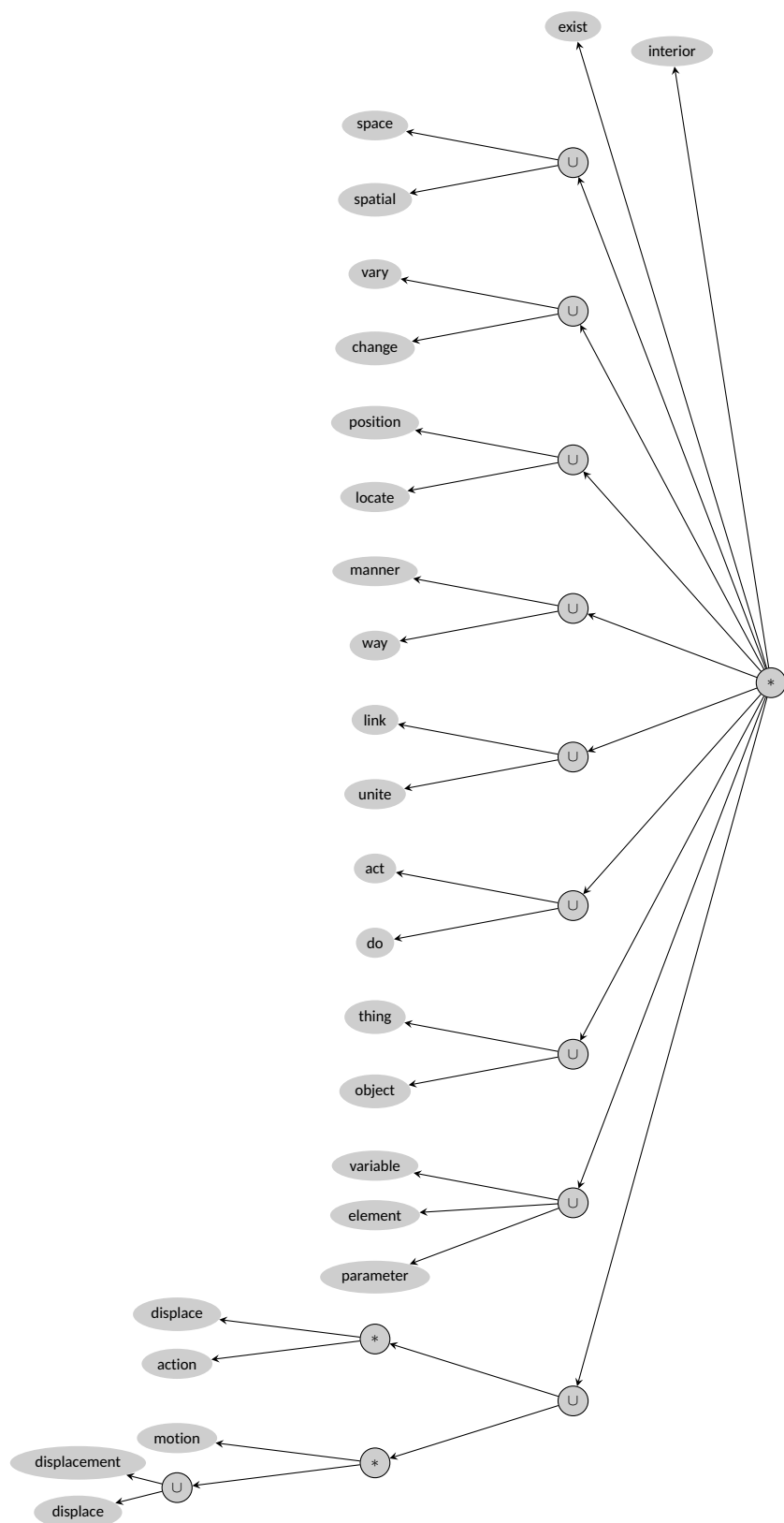


Figure 6.3 – Un exemple de sortie de l'algorithme 7 à partir du dictionnaire de 38 mots de la figure 6.4. Il y a 38 nœuds et 37 arcs pour représenter un ensemble de 1152 TCCM chacun contenant 12 sommets.

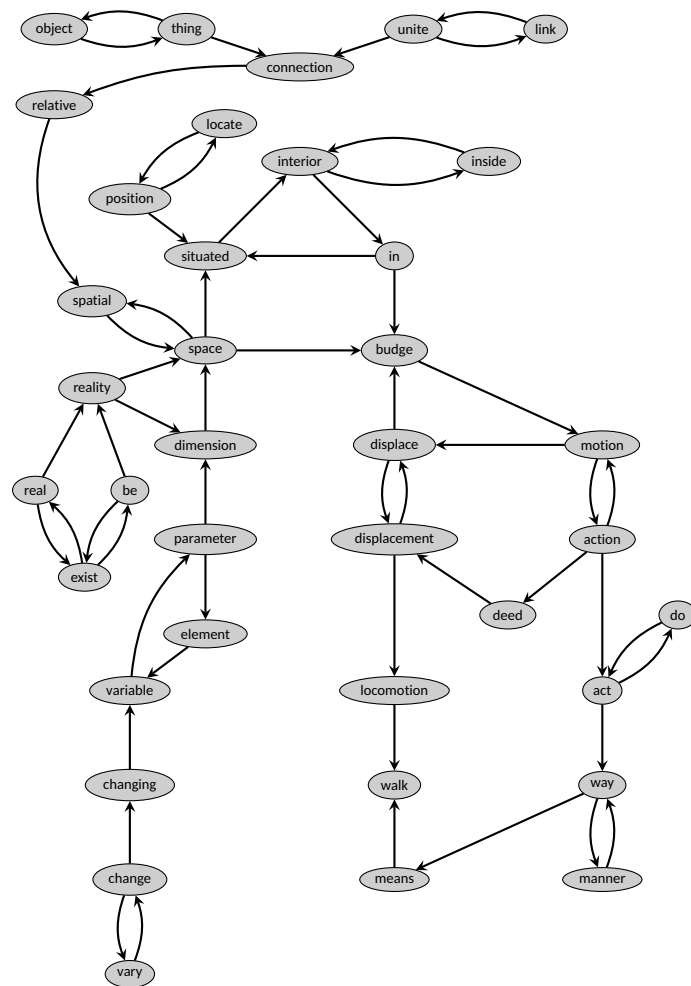


Figure 6.4 – Un exemple de dictionnaire retourné par le jeu du dictionnaire (UQAM, 2019).

p. Des graphes du type *webgraph* qui sont des graphes ayant une structure similaire à celle du Web ont également été utilisés. De nombreux modèles ont été étudiés, nous avons utilisé un générateur Python disponible publiquement (Sathe, 2008) qui implémente l'algorithme R-MAT (Chakrabarti *et al.*, 2004).

Dans le cas des graphes Erdős-Rényi, nous avons généré 10 instances aléatoires pour chaque taille comprise entre 1 et 80 et densité entre 0.01 et 0.04. Pour les *webgraphs*, nous avons pu augmenter le nombre de sommets jusqu'à 150 avec les mêmes densités. Les graphiques décrivant le temps d'exécution apparaissent dans la colonne de gauche de la figure 6.5. Les trois graphiques de la colonne de droite indiquent le ratio du temps utilisé pour calculer l'arbre union-cat par rapport au temps utilisé pour calculer un TCCM avec l'algorithme de Lin et Jou (appelé *UCT ratio*). Toutes les croissances apparaissent exponentielles, à l'exception des graphes de dictionnaire.

Sans surprise, la performance sur les graphes Erdős-Rényi n'est pas aussi bonne que celle pour les *webgraphs*. Cela s'explique probablement par le fait que les huit opérateurs de réduction s'appliquent plus souvent sur les *webgraphs* que sur les graphes Erdős-Rényi. Dans le cas des 24 dictionnaires produits dans le jeu de dictionnaires, le calcul d'un TCCM a pris au maximum 1 seconde et le ratio UCT est un peu supérieur à 100, même si les graphes comptent jusqu'à 300 sommets. Ces résultats sont cohérents puisque tous les dictionnaires sont complètement ou presque complètement réductibles.

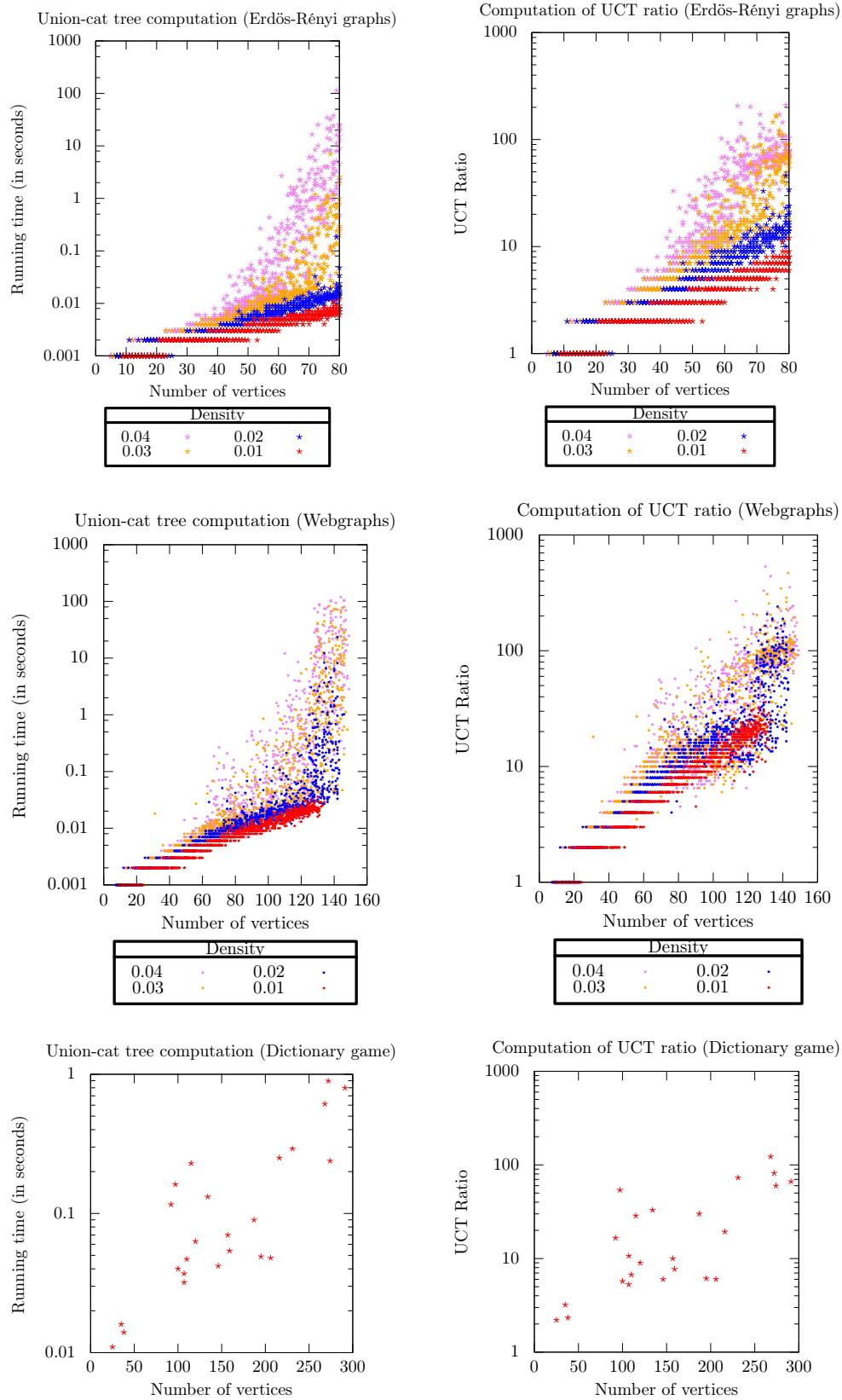


Figure 6.5 – Temps d'exécution et le ratio UCT observés lors de l'exécution de l'algorithme 7 sur les graphes de Erdős-Rényi, les *webgraphs* et 24 dictionnaires produit par le jeu du dictionnaire (UQAM, 2019).

CONCLUSION

Dans cette thèse nous avons étudié le problème de l'ancrage symbolique au travers de la théorie des graphes. Nous nous sommes concentré sur la manifestation de ce problème dans le cas d'un lexique ou dictionnaire, représenté par un graphe orienté. Nous avons repris l'approche consistant à représenter un lexique ou un dictionnaire avec un graphe où chaque symbole ou mot est représenté par un sommet et un arc est créé entre un sommet u vers un sommet v si le symbole ou mot correspondant au sommet u apparaît dans la définition du symbole ou mot correspondant au sommet v . Cette approche ne prend pas en charge la désambiguïsation et elle introduit une perte d'information par rapport au rôle d'un symbole dans une définition, néanmoins, elle permet d'identifier des structures internes dans un lexique, notamment, le noyau et le cœur. En particulier, cette approche permet de faire le lien entre le problème de l'encrage symbolique dans un système symbolique et le problème du transversal de circuits de cardinalité minimale dans un graphe orienté. À savoir, une solution de ce dernier représente un ensemble de symboles qui doivent être ancrés à l'extérieur du modèle symbolique pour éluder le problème de l'ancrage symbolique.

C'est dans la continuité de ce travail que s'inscrit cette thèse. Tout d'abord, nous nous sommes concentré sur l'aspect théorie des graphes et le problème du transversal de circuits de cardinalité minimale, en particulier, sur les réductions de graphes et la confluence. Ainsi, nous avons regroupé et étudié la confluence d'un ensemble de réductions de graphes, ce qui nous a permis de prouver que le noyau et le graphe réduit sont uniques, tout en identifiant un ensemble de sommets qui appartiennent à tous les TCCM du graphe. Par la suite, nous nous sommes orienté vers l'étude des arcs superflus et des réductions qui permettent de les retirer. Nous avons introduit 2 nouvelles réductions qui préservent la confluence de l'ensemble des réductions étudiées auparavant et nous les avons comparées à d'autres réductions d'arcs de la littérature. Nous avons introduit la structure de données union-cat, qui permet de garder une trace de ces sommets, en plus de permettre de lister tous les ensembles avec les sommets sélectionnés pour appartenir à un TCCM, dans le but d'étudier tous les symboles retirés lors des réductions.

Par la suite, nous sommes revenus aux dictionnaires linguistiques sur lesquels nous avons appliqué notre ensemble de réductions confluent. Nous avons reproduit les représentations, par des graphes, de ces dictionnaires adoptées dans des travaux antérieurs et nous les avons enrichies avec des liens syntaxiques, en plus de les désambiguïser. Pour ce faire nous avons appliqué des représentations abstraites du sens aux définitions pour construire deux nouveaux graphes. Un premier, que nous avons appelé graphe désambiguïsé,

qui est un graphe similaire à celui utilisé dans les travaux initiaux, à l'exception que celui-ci est désambiguïsé. Un deuxième, que nous avons appelé graphe RAS, qui est un graphe désambiguïsé enrichi avec des liens syntaxiques issus des définitions de chaque mot. Ainsi nous avons pu comparer les premiers résultats publiés dans d'autres travaux sur cette approche avec nos résultats. Sans surprise, la désambiguïsation et l'ajout des liens syntaxiques permettent de préserver davantage de sommets dans le noyau et le graphe réduit. En effet, nous avons constaté des augmentations significatives dans les tailles de ces derniers. Nous avons appuyé cette observation avec une analyse psycholinguistique des noyaux et des graphes réduits. En effet, nous avons analysé la distribution des mots, dans ces deux graphes, suivant la concrétude des mots ainsi que leur âge d'acquisition et il s'est avéré que nous avons approximativement les mêmes proportions de mots dans les différentes catégories considérées. Ceci renforce l'observation selon laquelle la désambiguïsation et l'ajout de liens syntaxiques permettent d'identifier davantage de mots appartenant aux noyaux et aux graphes réduits, tout en ayant un nombre largement plus élevé d'application des réductions. Grâce à la confluence de l'ensemble des réductions utilisées, le graphe réduit est identique au noyau réduit de chaque dictionnaire et ils sont uniques. Par conséquent, les mots qui y appartiennent sont particulièrement pertinents dans l'étude du problème de l'ancrage symbolique.

Enfin, les résultats présentés dans cette thèse, concernant les réductions de graphes et la confluence, contribuent au développement de solutions plus efficaces du problème du transversal de circuits de cardinalité minimale en retirant, notamment, des arcs superflus contribuant ainsi à réduire la taille du graphe. La confluence de l'ensemble de réductions présenté dans cette thèse, pave le chemin vers des algorithmes parallèles, à l'instar de l'algorithme parallèle présenté ici, augmentant ainsi les performances des algorithmes et tirant profit des architectures modernes des ordinateurs fortement parallèles. L'application de ces réductions sur des graphes représentant des dictionnaires, permet d'identifier des mots à ancrer pour éluder le problème de l'ancrage symbolique, ce qui permet, entre autre, de meilleures stratégies d'apprentissage des langues en se concentrant sur l'apprentissage des mots identifiés par les graphes ou noyaux réduits.

Ceci étant dit, des voies d'amélioration sont possibles. Notamment concernant la construction du graphe RAS. En effet, la désambiguïsation et les liens syntaxiques peuvent être obtenus avec d'autres types de représentation telle que les arbres de dépendances (Honnibal *et al.*, 2020). L'avantage des arbres de dépendances est que les circuits sont maintenus, comparativement à l'approche RAS où nous avons besoin d'ajouter les liens définitionnels. Cette approche, bien qu'elle se détache des travaux antérieurs, permet de construire des graphes syntaxiquement valides. Par conséquent, une étude linguistique approfondie des résultats et

des mots identifiés dans les noyaux réduits est nécessaire. En effet, dans cette thèse, nous ne nous sommes contentés que d'une étude statistique des effets des réductions sur les dictionnaires. L'étape suivante serait de faire une études linguistique et psycholinguistique de ces résultats. Il est également clair que d'autres réductions peuvent être étudiées et ajoutées à l'ensemble confluent présenté dans cette thèse. Cependant, il est crucial de sélectionner des réductions avec une signification linguistique ou du moins dont l'effet sur un graphe a une interprétation linguistique. Autrement, nous risquons de retirer des mots *insignifiants* pour le problème du transversal de circuits de cardinalité minimale, mais *importants* pour le problème de l'ancrage symbolique. Il est donc nécessaire d'effectuer un travail d'interprétation des réductions du points de vue linguistique.

ANNEXE A

LEMME DE LA CONFLUENCE

Nous énonçons et démontrons un ensemble de lemmes qui permettent de démontrer le théorème 2.1 du chapitre 2. Mais avant d'aller de l'avant avec les énoncés des lemmes et leur démonstration, nous énonçons des résultats qui formalisent quelques arguments que nous utilisons à plusieurs reprises dans les démonstrations des lemmes plus tard dans cette annexe.

A.1 Résultats préliminaires

Lemme A.1 *Étant donné un graphe orienté $G = (V, E)$ et deux sommets $x, y \in V$ tels que $x \neq y$. Alors nous avons.*

- $(G - x) - y = (G - y) - x$,
- si x et y ne forment pas un 2-circuit, alors $(G \circ x) \circ y = (G \circ y) \circ x$,
- $(G - x) \circ y = (G \circ y) - x$.

Preuve.

- Le graphe $G - x$ est constitué des sommets $V \setminus \{x\}$ et des arcs $E \setminus \{(a, b) \in E \mid a = x \text{ ou } b = x\}$.
 $(G - x) - y$ est donc le graphe avec les sommets $(V \setminus \{x\}) \setminus \{y\}$ et les arcs

$$(E \setminus \{(a, b) \in E \mid a = x \text{ ou } b = x\}) \setminus \{(a, b) \in E \mid a = y \text{ ou } b = y\}.$$

Nous avons $(V \setminus \{x\}) \setminus \{y\} = V \setminus \{x, y\} = (V \setminus \{y\}) \setminus \{x\}$ et

$$\begin{aligned} & (E \setminus \{(a, b) \in E \mid a = x \text{ ou } b = x\}) \setminus \{(a, b) \in E \mid a = y \text{ ou } b = y\} \\ &= E \setminus \{(a, b) \in E \mid a, b \in \{x, y\}\}. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons

$$(G - x) - y = (V \setminus \{x, y\}, E \setminus \{(a, b) \in E \mid a, b \in \{x, y\}\}) = (G - y) - x.$$

- Nous considérons donc que si $(x, y) \in E$, alors $(y, x) \notin E$ et vice-versa. Nous avons alors deux cas à

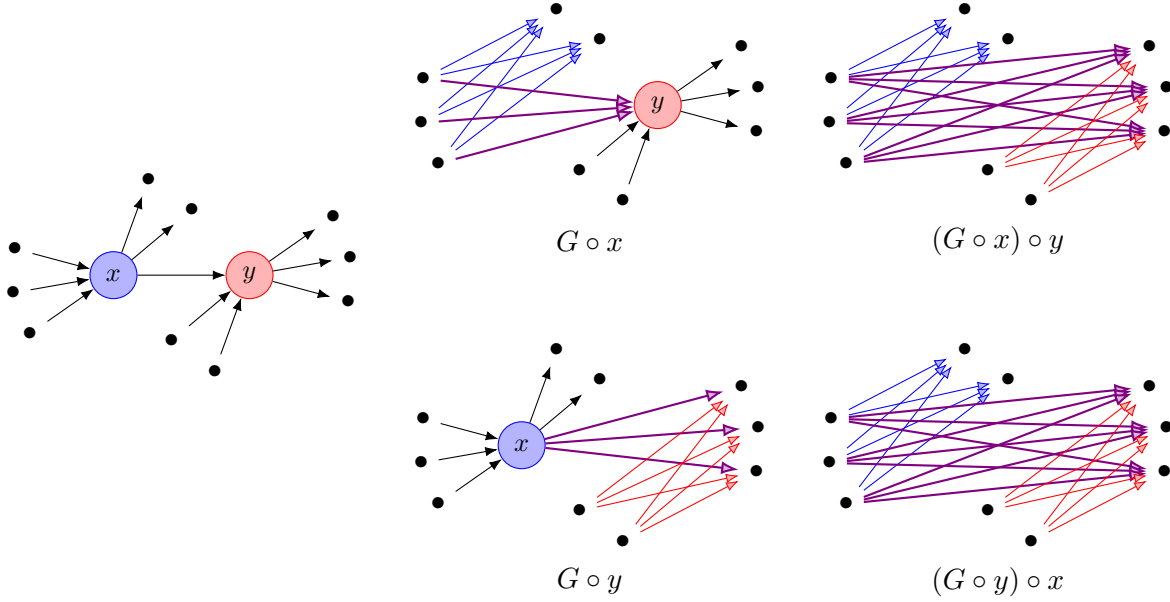


Figure A.1 – Commutativité de l'opération $\circ$ dans le cas $(x, y) \in E$. Soit le sous-graphe de G représentant les sommets x et y ainsi que leurs voisinages. Dans les deux graphes $(G \circ x) \circ y$ et $(G \circ y) \circ x$ nous avons le même ensemble d'arcs, en bleu $N_G^-(x) \times (N_G^+(x) \setminus \{y\})$, en rouge $(N_G^-(y) \setminus \{x\}) \times N_G^+(y)$ et enfin en violet $N_G^-(x) \times N_G^+(y)$.

traiter.

1. Si $(x, y) \in E$. L'ensemble des sommets de ce graphe $(G \circ x) \circ y$ est $V \setminus \{x, y\}$ et l'ensemble des arcs

$$(E \setminus \{(a, b) \in E \mid a, b \in \{x, y\}\}) \cup N_G^-(x) \times (N_G^+(x) \setminus \{y\}) \\ \cup (N_G^-(y) \setminus \{x\}) \times N_G^+(y) \cup N_G^-(x) \times N_G^+(y)$$

De même, l'ensemble des sommets de $(G \circ y) \circ x$ est $V \setminus \{x, y\}$ et l'ensemble des arcs est identique à celui $(G \circ x) \circ y$. Voir la figure A.1 pour une illustration. Le cas où c'est $(y, x) \in E$ est symétrique à celui-ci.

2. Si non, la commutativité de $\circ$ est immédiate.

Ainsi l'opération $\circ$ est commutative sous condition.

— Si les deux sommets x et y ne sont pas adjacents, alors la commutativité de $\circ$ et $-$ est immédiate.

Si $(x, y) \in E$, alors nous avons,

— $(G - x) \circ y$ est constitué de l'ensemble de sommets $V \setminus \{x, y\}$ et l'ensemble d'arcs $(E \setminus \{(a, b) \in$

$$E \mid a = x \text{ ou } b = x\} \setminus \{(a, b) \in E \mid a = y \text{ ou } b = y\} \cup (N_G^-(y) \setminus \{x\}) \times N_G^+(y).$$

— $(G \circ y) - x$ est constitué de l'ensemble de sommets $V \setminus \{x, y\}$ et l'ensemble des arcs

$$((E \setminus \{(a, b) \in E \mid a = y \text{ ou } b = y\}) \cup N_G^-(y) \times N_G^+(y)) \setminus \{(a, b) \in E \mid a = x \text{ ou } b = x\}$$

qui est égal à

$$((E \setminus \{(a, b) \in E \mid a = y \text{ ou } b = y\}) \setminus \{(a, b) \in E \mid a = x \text{ ou } b = x\}) \cup (N_G^-(y) \setminus \{x\}) \times N_G^+(y)$$

Le cas $(y, x) \in E$ est symétrique. Par conséquent, nous avons bien $(G - x) \circ y = (G \circ y) - x$.

Ce qui conclut la démonstration. $\square$

Lemme A.2 Étant donné un graphe orienté $G = (V, E)$, un arc $(x, y) \in E$, $s \in N_G^+(y)$ et $p \in N_G^-(x)$. Si (x, y) est acyclique dans G , alors les arcs (x, s) et (p, y) , s'ils existent, le sont également.

Preuve. Supposons donc que l'arc (x, y) est acyclique, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun circuit dans G qui passe par (x, y) . Soient $s \in N_G^+(y)$ et $p \in N_G^-(x)$. Nous voulons donc démontrer que (x, s) et (p, y) sont également acycliques. Nous raisonnons par l'absurde et nous supposons que ces deux arcs ne sont pas acycliques. C'est-à-dire qu'il existe deux circuits c_s et c_p dans G qui passent par les arcs (x, s) et (p, y) respectivement.

Comme $s \in N_G^+(y)$ alors nous pouvons substituer l'arc (x, s) dans le circuit c_s par les deux arcs (x, y) et (y, s) , nous obtiendrons ainsi un nouveau circuit c'_s qui passe par (x, y) . Ce qui contredit l'hypothèse d'acyclicité de (x, y) . De même, comme $p \in N_G^-(x)$ alors nous pouvons substituer l'arc (p, y) dans le circuit c_p par les deux arcs (p, x) et (x, y) , nous obtiendrons ainsi un nouveau circuit c'_p qui passe par (x, y) . Ce qui contredit également l'hypothèse d'acyclicité de (x, y) . $\square$

A.2 Lemmes

À présent pour étudier la confluence des différentes paires de réductions d'un ensemble réductions donné, nous utilisons les digrammes introduits dans la Sous-section 1.3.1 du chapitre 1 de la manière suivante.

Pour un graphe G et deux réductions R_1 et R_2 qui sont applicables sur G , le diagramme A.1 se lit ainsi.

- $G \xrightarrow{R_1} G_1$ et $G \xrightarrow{R_2} G_2$ sont les énoncés de nos prémisses. C'est-à-dire que ces flèches dans un diagramme nous indiquent que nous supposons que G est réductible à G_1 par la réduction R_1 et que G est également réductible à G_2 par la réduction R_2 .
- $G_1 \xrightarrow{R'_1} G'$ et $G_2 \xrightarrow{R'_2} G'$ sont les conclusions que nous affirmons. C'est-à-dire que nous affirmons qu'il existe une réduction R'_1 applicable sur G_1 et qui le réduit à G' et, de même, qu'il existe une réduction R'_2 applicable sur G_2 qui le réduit à G' ou à un graphe isomorphe à G' .

Ainsi nous supposons l'existence des réductions et graphes réduits représentés par des flèches pleines et nous affirmons l'existence des graphes et réductions représentés par les flèches discontinues. Une fois la preuve de l'existence des réductions pour les flèches en pointillées a été démontrée, nous disons que le diagramme est *commutatif*.

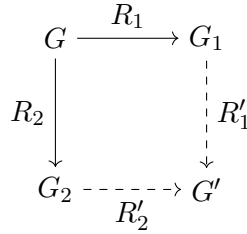


Diagramme A.1 – Diagramme commutatif pour un graphe et des réductions applicable.

Pour alléger les diagrammes et les démonstrations, nous adoptons les notations et les conventions suivantes.

- Nous utilisons les notations R_L pour LOOP, R_I pour INDICLIQUE, R_O pour OUTDICLIQUE, R_P pour PIE et enfin R_S pour SUBSET.
- Si la réduction est appliquée sur un sommet ou un arc précis, nous le mettons entre parenthèse ainsi $R_P(x, y)$ pour indiquer que la réduction PIE est appliquée sur l'arc (x, y) ou $R_I(x)$ pour indiquer que la réduction INDICLIQUE est appliquée sur le sommet x . Notons que SUBSET, même si elle s'applique sur un sommet x , dans ses conditions d'applicabilité l'existence du sommet y pour les inclusions des voisinages est importante. Ainsi nous notons $R_{S[y]}(x)$ pour signifier que SUBSET s'applique sur x et ses conditions d'applicabilité sont vérifiées avec le sommet y .
- Si nous appliquons une réduction plusieurs fois sur un ensemble d'arcs A ou un ensemble de sommets S , nous utilisons la notation suivante $(R_P(x, y))_{(x,y) \in A}$ ou $(R_O(x))_{x \in S}$. Nous considérons que

l'ordre d'application n'est pas important et il n'y a pas d'interdépendance dans ces applications, c'est-à-dire que le graphe réduit est le même peu importe dans quel ordre nous choisissons les arcs de A ou les sommets de S .

Nous énonçons des lemmes avec des digrammes commutatifs pour chacun paire de réductions applicables sur un même graphe. Dans ce qui suit, nous considérons un graphe orienté $G = (V, E)$.

Lemme A.3 (PIE et LOOP) Pour un sommet $x \in V$ et un arc $(u, v) \in E$ nous avons les diagrammes suivants.

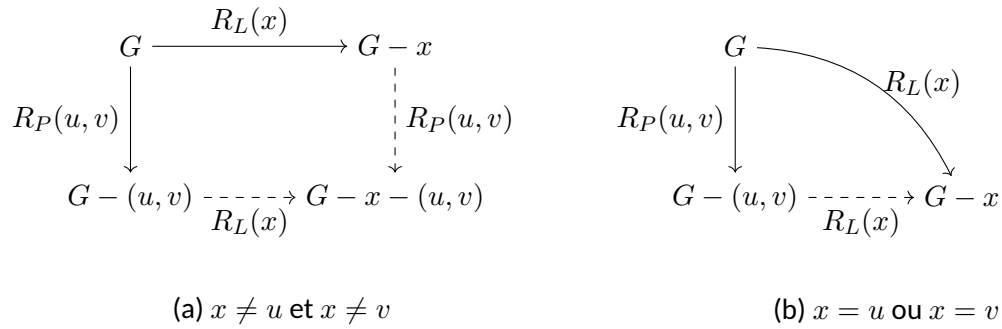


Diagramme A.2 - Le cas PIE et LOOP

Preuve. Soient $x \in V$ et $(u, v) \in E$, tels que $R_L(x)$ et $R_P(u, v)$ sont applicables.

- (a) Comme $(u, v) \neq (x, x)$, le retrait de l'arc (u, v) n'affectera pas donc l'applicabilité de réduction $LOOP$ sur le sommet x . Ainsi, le diagramme A.2 (a) est commutatif.
- (b) De même, si $x = u$ ou $x = v$, retirer l'arc (u, v) n'affecte l'applicabilité $R_L(x)$. Par contre, l'application $R_L(x)$ va supprimer l'arc (u, v) et il n'est donc plus possible d'appliquer $R_P(u, v)$. Ainsi, le diagramme A.2 (b) est également commutatif.

Par conséquent, pour tout graphe G et pour chaque diagramme A.2, il existe un graphe G' et un ensemble de réductions tels que ce diagramme soit commutatif. $\square$

Lemme A.4 (PIE et PIE) Pour deux arcs $(u, v), (x, y) \in E$ nous avons le diagramme suivant.

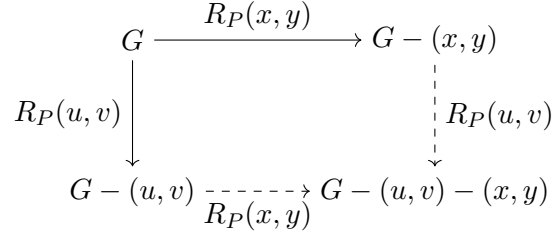


Diagramme A.3 – Le cas PIE et PIE

Preuve. Soient $(x, y), (u, v) \in E$, tels que $R_P(x, y)$ et $R_P(u, v)$ sont applicables. Comme le retrait d'un arc préserve l'acyclicité des arcs restant, les réductions appliquées $R_P(u, v)$ et $R_P(x, y)$ sont interchangeables. Par conséquent, le Digramme A.3 est commutatif. $\square$

Lemme A.5 (PIE et INDICLIQUE) Pour un sommet $x \in V$ et un arc $(u, v) \in E$ nous avons les diagrammes suivants.

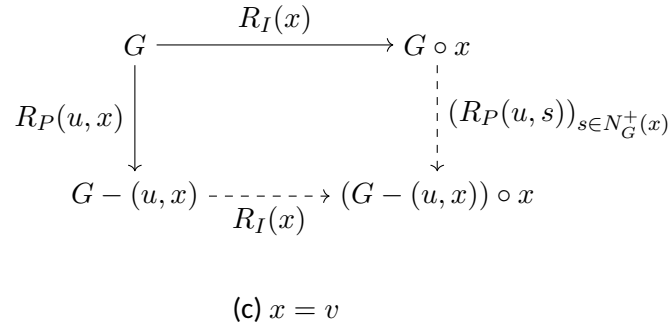
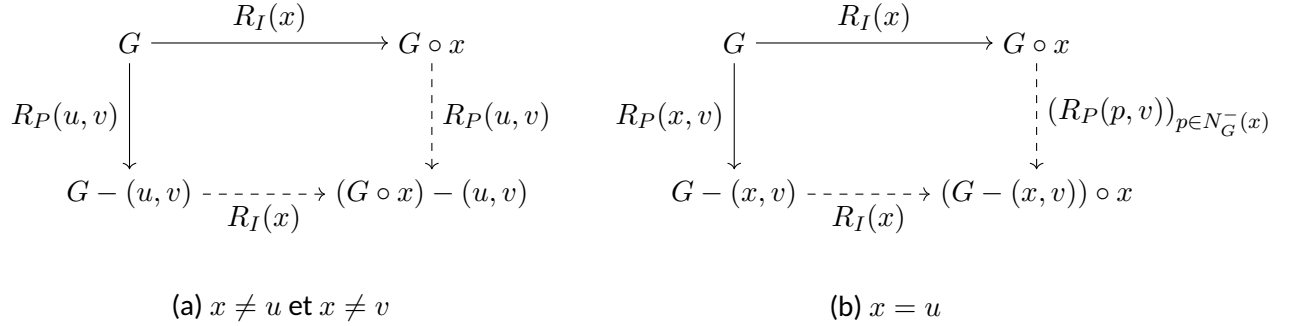


Diagramme A.4 – Le cas PIE et INDICLIQUE

Preuve. Soient $x \in V$ et $(u, v) \in E$, tels que $R_I(x)$ et $R_P(u, v)$ sont applicables.

- (a) Comme $x \neq u$ et $x \neq v$ l'application d'une réduction n'affecte pas l'applicabilité de l'autre, ainsi le diagramme A.4 (a) est commutatif.
- (b) D'une part, comme $x = u$, une fois que $R_P(x, v)$ est appliquée, $R_I(x)$ reste applicable, car si $N_G^-(x)$ demeure une diclique, et $R_I(x)$ va réduire $G - (x, v)$ en $(G - (x, v)) \circ x$ qui est égal au graphe $G - x$ auquel nous ajoutons les arcs $N_G^-(x) \times (N_G^+(x) \setminus \{v\})$. D'autre part, l'application de $R_I(x)$ va retirer le sommet x ainsi que tous les arcs qui lui sont incidents et va ajouter l'ensemble d'arcs $N_G^-(x) \times N_G^+(x)$. Comme (x, v) est acyclique dans G ou $G^\rightarrow$, d'après le lemme A.2 tous les arcs $N_G^-(x) \times \{v\}$ sont également acycliques. Nous pouvons donc appliquer $R_P(p, v)$ pour $p \in N_G^-(x)$ et retirer tous ces arcs. Ce qui nous donne le graphe $(G \circ x) - N_G^-(x) \times \{v\}$ qui est égal au graphe $(G - (x, v)) \circ x$. Ainsi, le Digramme A.4 (b) est commutatif.
- (c) D'une part, comme $x = v$, une fois que $R_P(u, x)$ est appliquée, x perd un prédécesseur, par contre $R_I(x)$ reste applicable dans $G - (u, x)$ car quand nous retirons un sommet d'une diclique, les sommets restant formeront toujours une diclique. Autrement dit, $N_{G-(u,x)}^-(x)$ est une diclique. Donc une fois $R_I(x)$ est appliquée sur le graphe $G - (u, x)$, nous obtiendrons le graphe $(G - (u, x)) \circ x$, qui est égal au graphe $G - x$ auquel nous ajoutons les arcs $(N_G^-(x) \setminus \{u\}) \times N_G^+(x)$. D'autre part, l'application de $R_I(x)$ va retirer le sommet x ainsi que tous les arcs qui lui sont incidents et va ajouter l'ensemble d'arcs $N_G^-(x) \times N_G^+(x)$. Comme (u, x) est acyclique dans G ou $G^\rightarrow$, d'après le lemme A.2 tous les arcs $\{u\} \times N_G^+(x)$ sont également acycliques. Nous pouvons donc appliquer $R_P(u, s)$ pour $s \in N_G^+(x)$ et retirer tous ces arcs. Ce qui nous donne le graphe $(G \circ x) - \{u\} \times N_G^+(x)$ qui est égal au graphe $(G - (u, x)) \circ x$. Ainsi, le Digramme A.4 (c) est commutatif.

Par conséquent, pour tout graphe G et pour chaque diagramme A.4, il existe un graphe G' et un ensemble de réductions tels que ce diagramme soit commutatif. $\square$

Lemme A.6 (PIE et OUTDICLIQUE) Pour un sommet $x \in V$ et un arc $(u, v) \in E$ nous avons les diagrammes suivants.

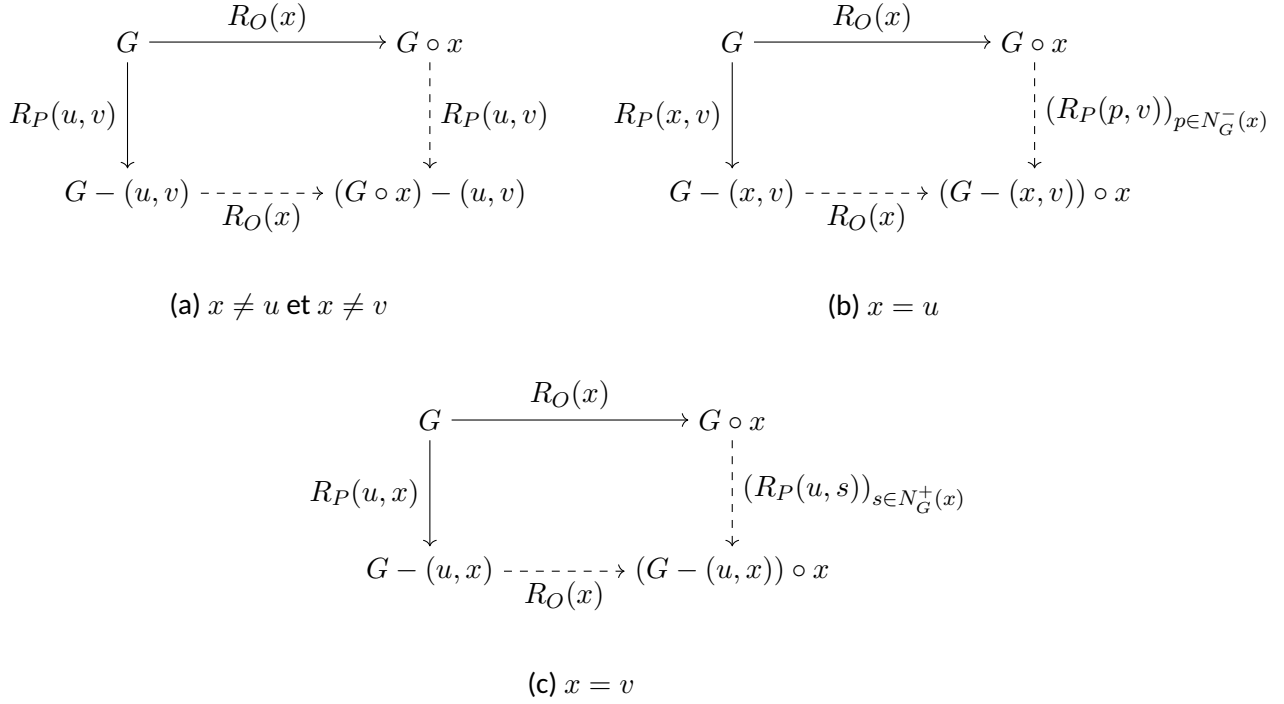


Diagramme A.5 – Le cas PIE et OUTDICLIQUE

Preuve. Soient $x \in V$ et $(u, v) \in E$, tels que $R_O(x)$ et $R_P(u, v)$ sont applicables.

- (a) Comme $x \neq u$ et $x \neq v$ l'application d'une réduction n'affecte pas l'applicabilité de l'autre, ainsi le diagramme A.5 (a) est commutatif.
- (b) D'une part, comme $x = u$, une fois que $R_P(x, v)$ est appliquée, x perd un successeur, par contre $R_O(x)$ reste applicable dans $G - (x, u)$ car quand nous retirons un sommet d'une diclique, les sommets restant forment toujours une diclique. Autrement dit, $N_{G-(x,v)}^+(x)$ est une diclique. Donc une fois $R_O(x)$ est appliquée sur le graphe $G - (x, v)$, nous obtiendrons le graphe $(G - (x, v)) \circ x$, qui est égal au graphe $G - x$ auquel nous ajoutons les arcs $N_G^-(x) \times (N_G^+(x) \setminus \{v\})$. D'autre part, l'application de $R_O(x)$ va retirer le sommet x ainsi que tous les arcs qui lui sont incidents et va ajouter l'ensemble d'arcs $N_G^-(x) \times N_G^+(x)$. Comme (x, v) est acyclique dans G ou $G^\rightarrow$, d'après le lemme A.2 tous les arcs $N_G^-(x) \times \{v\}$ sont également acycliques. Nous pouvons donc appliquer $R_P(p, v)$ pour $p \in N_G^-(x)$ et retirer tous ces arcs. Ce qui nous donne le graphe $(G \circ x) - N_G^-(x) \times \{v\}$ qui est égal au graphe $(G - (x, v)) \circ x$. Ainsi, le Diagramme A.5 (b) est commutatif.
- (c) D'une part, comme $x = v$, une fois que $R_P(u, x)$ est appliquée, $R_O(x)$ reste applicable, car si $N_G^+(x)$

demeure une diclique, et $R_O(x)$ va réduire $G - (u, x)$ en $(G - (u, x)) \circ x$ qui est égal au graphe $G - x$ auquel nous ajoutons les arcs $(N_G^-(x) \setminus \{u\}) \times N_G^+(x)$. D'autre part, l'application de $R_O(x)$ va retirer le sommet x ainsi que tous les arcs qui lui sont incidents et va ajouter l'ensemble d'arcs $N_G^-(x) \times N_G^+(x)$. Comme (u, x) est acyclique dans G ou $G^\rightarrow$, d'après le lemme A.2 tous les arcs $\{u\} \times N_G^+(x)$ sont également acycliques. Nous pouvons donc appliquer $R_P(u, s)$ pour $s \in N_G^+(x)$ et retirer tous ces arcs. Ce qui nous donne le graphe $(G \circ x) - \{u\} \times N_G^+(x)$ qui égal au graphe $(G - (u, x)) \circ x$. Ainsi, le Digramme A.5 (c) est commutatif.

Par conséquent, pour tout graphe G et pour chaque diagramme A.5, il existe un graphe G' et un ensemble de réductions tels que ce diagramme soit commutatif. $\square$

Lemme A.7 (PIE et SUBSET) Pour deux sommets $x, y \in V$ et un arc $(u, v) \in E$ avec $u \neq x$ et $v \neq x$, nous avons le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{R_{S[y]}(x)} & G - x \\
 \downarrow R_P(u, v) & & \downarrow R_P(u, v) \\
 G - (u, v) & \xrightarrow{R_{S[y]}(x)} & G - x - (u, v)
 \end{array}$$

Diagramme A.6 – Le cas PIE et SUBSET

Preuve. Soient $x, y \in V$ et $(u, v) \in E$, tels que $R_{S[y]}(x)$ et $R_P(u, v)$ sont applicables. Comme $x \neq u$ et $x \neq v$ l'application d'une réduction n'affecte pas l'applicabilité de l'autre. En effet, d'une part, le retrait de l'arc (u, v) n'affectera pas $N_G^-(x)$ ni $N_G^+(x)$, donc les inclusions $N_G^-(y) \subseteq N_G^-(x) \cup \{x\}$ et $N_G^+(y) \subseteq N_G^+(x) \cup \{x\}$, autrement dit $R_{S[y]}(x)$ reste applicable dans $G - (u, v)$. D'autre part, si (u, v) est acyclique, il le restera après le retrait de x et de ses arcs incidents. Ainsi, le diagramme A.6 est commutatif. $\square$

Lemme A.8 (SUBSET et LOOP) Pour trois sommets $x, u, v \in V$ nous avons les diagrammes suivants.

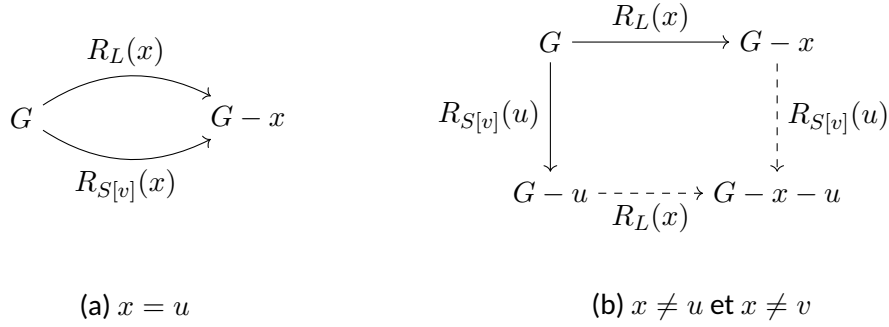


Diagramme A.7 – Le cas SUBSET et LOOP

Preuve. Soit $x, u, v \in V$, tels que $R_{S[v]}(u)$ et $R_L(x)$ sont applicables.

- (a) Comme $x = u$ les réductions s'appliquent sur le même sommet et elles ont le même effet, à savoir retirer le sommet x , donc l'application de $R_{S[v]}(x)$ à G donne le même graphe réduit que $R_L(x)$ appliquée à G . Ainsi le diagramme A.7 (a) est commutatif.
- (b) Comme $x \neq u$ et $x \neq v$ l'application d'une réduction n'affecte pas l'applicabilité de l'autre. En effet, le retrait du sommet u n'affectera pas la boucle (x, x) et, inversement, la suppression des arcs incidents au sommet x , n'affectera pas les inclusions de la réduction $R_{S[v]}(u)$, ou affectera de la même manière le voisinage commun de v et u de la même manière, ce qui maintiendra les inclusions de la réduction $R_{S[v]}(u)$ vraies. Ainsi le diagramme A.7 (b) est commutatif.

Par conséquent, pour tout graphe G et pour chaque diagramme A.7, il existe un graphe G' et un ensemble de réductions tels que ce diagramme soit commutatif. $\square$

Lemme A.9 (SUBSET et INDICLIQUE) Pour trois sommets $x, u, v \in V$ nous avons les diagrammes suivants.

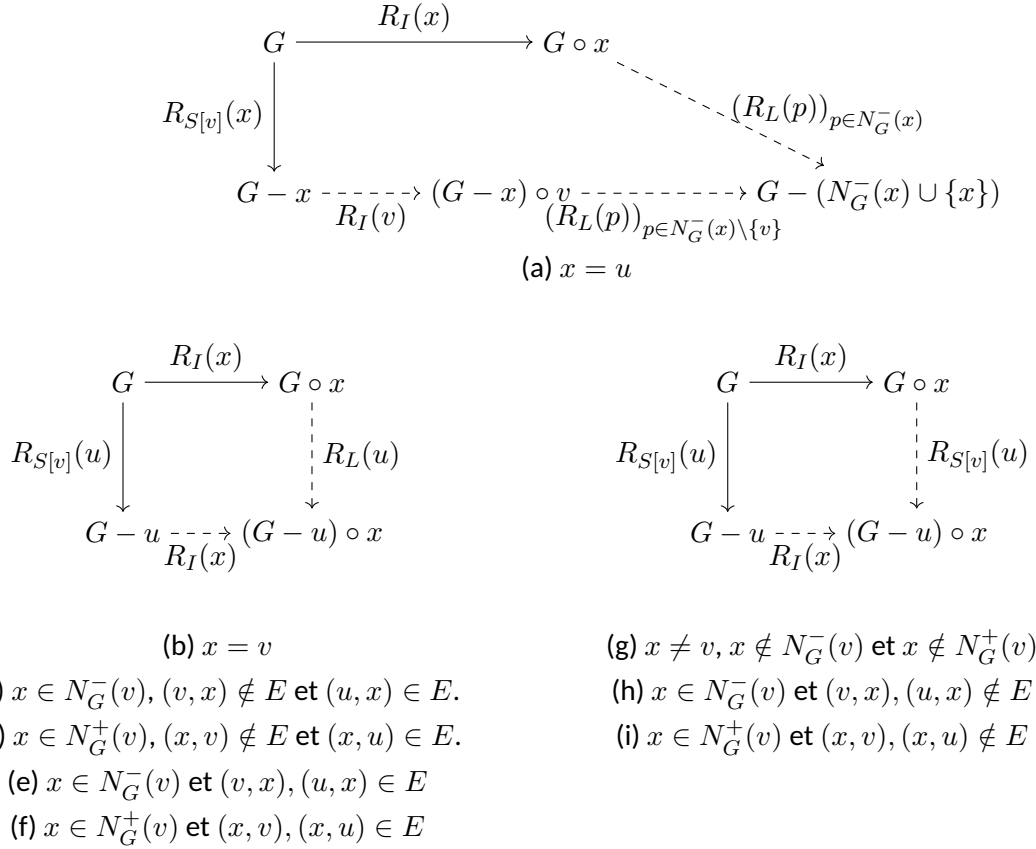


Diagramme A.8 – Le cas SUBSET et INDICLIQUE

Preuve. Soit $x, u, v \in V$, tels que $R_{S[v]}(u)$ et $R_I(x)$ sont applicables.

(a) Dans le cas $x = u$, $N_G^-(x) \cup \{x\}$ forment une diclique. En effet, comme $R_I(x)$ est applicable nous savons que $N_G^-(x)$ est une diclique, donc il y a des 2-circuits entre $v \in N_G^-(x)$ et tous les autres sommets de $N_G^-(x)$, ce qui fait que $N_G^-(x) \setminus \{v\} \subseteq N_G^+(v)$. Cependant $R_{S[v]}(u)$ est applicable et donc $N_G^+(v) \subseteq N_G^+(x) \cup \{x\}$, par conséquent, $N_G^-(x) \subseteq N_G^+(x) \cup \{x\}$, donc il existe des 2-circuits entre x et tous ces prédécesseurs. Ce qui fait que $N_G^-(x) \cup \{x\} = N_G^-(v) \cup \{v\}$ est une diclique.

Donc, d'une part, si nous appliquons $R_{S[v]}(x)$, $N_G^-(x) = (N_G^-(v) \setminus \{x\}) \cup \{v\}$ reste une diclique, alors $R_I(v)$ est applicable. Une fois appliquée, nous aurons le graphe réduit $(G - x) \circ v$ avec la particularité que chacun des sommets de $N_{G-x}^-(v) = N_G^-(x) \setminus \{v\}$ a une boucle, nous pouvons donc appliquer $R_L(p)$ pour chaque $p \in N_G^-(x) \setminus \{v\}$, pour obtenir le graphe $G - (N_G^-(x) \cup \{x\})$ avec les sommets $(N_G^-(x) \setminus \{v\}) \cup \{x\}$ qui seront ajoutés au transversal de circuits. D'autre part, si nous appliquons $R_I(x)$ en premier nous aurons des boucles sur tous les sommets de $N_G^-(x)$, nous pouvons

donc appliquer $R_L(p)$ pour tout $p \in N_G^-(x)$. Pour obtenir le graphe $G - (N_G^-(x) \cup \{x\})$, mais cette fois avec les sommets $N_G^-(x)$ qui seront ajoutés au transversal de circuits.

Ainsi, même si les sommets ajoutés au transversal de circuits sont différents, le graphe réduit obtenu est le même, donc le diagramme A.8 (a) est commutatif.

(b), (c), (d), (e) et (f) Dans ces cinq cas, nous avons les mêmes réductions qui s'appliquent. En effet, d'une part, si on applique $R_{S[v]}(u)$, alors $R_I(x)$ reste applicable dans les cinq cas, car, au pire, si nous retirons un sommet d'une diclique, alors elle demeurera une diclique. Nous obtenons le graphe $(G - u) \circ x$. D'autre part, si nous appliquons $R_I(x)$, nous aurons les cinq cas suivants qui mènent à la même réduction $R_L(u)$.

- $x = v$, dans ce cas u étant un successeur et un prédécesseur de x , après l'application de $R_I(x)$, u aura une boucle.
- $x \in N_G^-(v)$, $(v, x) \notin E$ et $(u, x) \in E$, de même dans ce cas u est un successeur et un prédécesseur de x , car $x \in N_G^-(v) \subseteq N_G^-(u)$ et $(u, x) \in E$, donc après l'application de $R_I(x)$, u aura une boucle.
- $x \in N_G^+(v)$, $(x, v) \notin E$ et $(x, u) \in E$, le même argument reste valide, à savoir u est un successeur et un prédécesseur de x , car $x \in N_G^+(v) \subseteq N_G^+(u)$ et $(x, u) \in E$, donc après l'application de $R_I(x)$, u aura une boucle.
- $x \in N_G^-(v)$ et $(v, x), (u, x) \in E$, comme nous avons un 2-circuit entre u et x , après l'application de $R_I(x)$, u aura une boucle et donc $R_L(u)$ est applicable.
- $x \in N_G^+(v)$ et $(x, v), (x, u) \in E$, pour les mêmes raisons que le cas (e), u aura une boucle et donc $R_L(u)$ est applicable.

Donc nous obtenons le graphe $(G \circ x) - u$ qui est égal au graphe $(G - u) \circ x$ d'après le lemme A.1. Ainsi, le diagramme A.8 (b)-(c)-(d)-(e)-(f) est commutatif.

(g), (h) et (i) De même, dans ces trois cas nous avons les mêmes réductions qui s'appliquent. En effet, pour le même argument que les cas précédents, d'une part, si on applique $R_{S[v]}(u)$, alors $R_I(x)$ reste applicable dans les trois cas, car, au pire, si nous retirons un sommet d'une diclique, alors elle demeurera une diclique. Nous obtenons le graphe $(G - u) \circ x$. D'autre part, si nous appliquons $R_I(x)$, nous aurons les trois cas suivants qui mènent à la même réduction $R_L(u)$.

- $x \neq v$, $x \notin N_G^-(v)$ et $x \notin N_G^+(v)$, dans ce cas l'application de $R_I(x)$ n'affecte pas l'application de $R_{S[v]}(u)$.

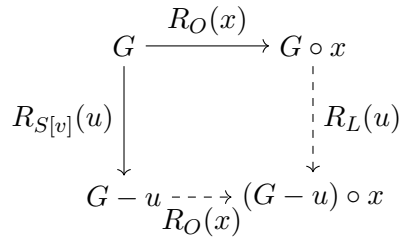
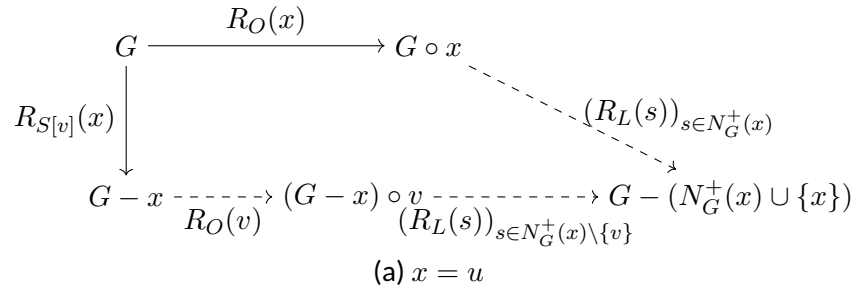
- $x \in N_G^-(v)$ et $(v, x), (u, x) \notin E$, dans ce cas les prédécesseurs de x seront ajoutés à $N_G^-(u)$ et à $N_G^-(v)$, ce qui fait que $R_{S[v]}(u)$ reste applicable.
- $x \in N_G^+(v)$ et $(x, v), (x, u) \notin E$, dans ce cas un raisonnement similaire reste applicable, les successeurs de x seront ajoutés à $N_G^+(u)$ et à $N_G^+(v)$, ce qui fait que $R_{S[v]}(u)$ reste applicable.

Donc nous obtenons le graphe $(G \circ x) - u$ qui est égal au graphe $(G - u) \circ x$ d'après le lemme A.1.

Ainsi, le diagramme A.8 (e)-(f)-(g) est commutatif.

Par conséquent, pour tout graphe G et pour chaque diagramme A.8, il existe un graphe G' et un ensemble de réductions tels que ce diagramme soit commutatif. $\square$

Lemme A.10 (SUBSET et OUTDICLIQUE) Pour trois sommets $x, u, v \in V$ nous avons les diagrammes suivants.



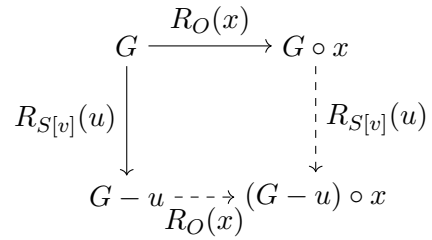
(b) $x = v$

(c) $x \in N_G^+(v)$, $(x, v) \notin E$ et $(x, u) \in E$.

(d) $x \in N_G^-(v)$, $(v, x) \notin E$ et $(u, x) \in E$.

(e) $x \in N_G^+(v)$ et $(x, v), (x, u) \in E$

(f) $x \in N_G^-(v)$ et $(v, x), (u, x) \in E$



(g) $x \neq v$, $x \notin N_G^-(v)$ et $x \notin N_G^+(v)$

(h) $x \in N_G^+(v)$ et $(x, v), (x, u) \notin E$

(i) $x \in N_G^-(v)$ et $(v, x), (u, x) \notin E$

Diagramme A.9 – Le cas SUBSET et OUTDICLIQUE

À noter que cette preuve est similaire à celle du lemme A.9, car INDICLIQUE et OUTDICLIQUE sont symé-

triques.

Preuve. Soit $x, u, v \in V$, tels que $R_{S[v]}(u)$ et $R_O(x)$ sont applicables.

(a) Dans le cas $x = u$, $N_G^+(x) \cup \{x\}$ forment une diclique. En effet, comme $R_O(x)$ est applicable nous savons que $N_G^+(x)$ est une diclique, donc il y a des 2-circuits entre $v \in N_G^+(x)$ et tous les autres sommets de $N_G^+(x)$, ce qui fait que $N_G^+(x) \setminus \{v\} \subseteq N_G^-(v)$. Cependant $R_{S[v]}(u)$ est applicable et donc $N_G^-(v) \subseteq N_G^-(x) \cup \{x\}$, par conséquent, $N_G^+(x) \subseteq N_G^-(x) \cup \{x\}$, donc il existe des 2-circuits entre x et tous ces successeurs. Ce qui fait que $N_G^+(x) \cup \{x\} = N_G^+(v) \cup \{v\}$ est une diclique.

Donc, d'une part, si nous appliquons $R_{S[v]}(x)$, $N_G^+(x) = (N_G^+(v) \setminus \{x\}) \cup \{v\}$ reste une diclique, alors $R_O(v)$ est applicable. Une fois appliquée, nous aurons le graphe réduit $(G - x) \circ v$ avec la particularité que chacun des sommets de $N_{G-x}^+(v) = N_G^+(x) \setminus \{v\}$ a une boucle, nous pouvons donc appliquer $R_L(s)$ pour chaque $s \in N_G^+(x) \setminus \{v\}$, pour obtenir le graphe $G - (N_G^+(x) \cup \{x\})$ avec les sommets $(N_G^+(x) \setminus \{v\}) \cup \{x\}$ qui seront ajoutés au transversal de circuits. D'autre part, si nous appliquons $R_O(x)$ en premier nous aurons des boucles sur tous les sommets de $N_G^+(x)$, nous pouvons donc appliquer $R_L(p)$ pour tout $s \in N_G^+(x)$. Pour obtenir le graphe $G - (N_G^+(x) \cup \{x\})$, mais cette fois avec les sommets $N_G^+(x)$ qui seront ajoutés au transversal de circuits.

Ainsi, même si les sommets ajoutés au transversal de circuits sont différents, le graphe réduit obtenu est le même, donc le diagramme A.9 (a) est commutatif.

(b), (c), (d), (e) et (f) Dans ces cinq cas, nous avons les mêmes réductions qui s'appliquent. En effet, d'une part, si on applique $R_{S[v]}(u)$, alors $R_O(x)$ reste applicable dans les cinq cas, car, au pire, si nous retirons un sommet d'une diclique, alors elle demeurera une diclique. Nous obtenons le graphe $(G - u) \circ x$. D'autre part, si nous appliquons $R_O(x)$, nous aurons les cinq cas suivants qui mènent à la même réduction $R_L(u)$.

- $x = v$, dans ce cas u étant un successeur et un prédécesseur de x , après l'application de $R_O(x)$, u aura une boucle.
- $x \in N_G^+(v)$, $(x, v) \notin E$ et $(x, u) \in E$, de même dans ce cas u est un successeur et un prédécesseur de x , car $x \in N_G^+(v) \subseteq N_G^+(u)$ et $(x, u) \in E$, donc après l'application de $R_O(x)$, u aura une boucle.
- $x \in N_G^-(v)$, $(v, x) \notin E$ et $(u, x) \in E$, le même argument reste valide, à savoir u est un successeur et un prédécesseur de x , car $x \in N_G^-(v) \subseteq N_G^-(u)$ et $(u, x) \in E$, donc après l'application

de $R_O(x)$, u aura une boucle.

- $x \in N_G^+(v)$ et $(x, v), (x, u) \in E$, comme nous avons un 2-circuit entre u et x , après l'application de $R_O(x)$, u aura une boucle et donc $R_L(u)$ est applicable.
- $x \in N_G^-(v)$ et $(v, x), (u, x) \in E$, pour les mêmes raisons que le cas (e), u aura une boucle et donc $R_L(u)$ est applicable.

Donc nous obtenons le graphe $(G \circ x) - u$ qui est égal au graphe $(G - u) \circ x$ d'après le lemme A.1. Ainsi, le diagramme A.9 (b)-(c)-(d)-(e)-(f) est commutatif.

(g), (h) et (i) De même, dans ces trois cas nous avons les mêmes réductions qui s'appliquent. En effet, pour le même argument que les cas précédents, d'une part, si on applique $R_{S[v]}(u)$, alors $R_O(x)$ reste applicable dans les trois cas, car, au pire, si nous retirons un sommet d'une diclique, alors elle demeurera une diclique. Nous obtenons le graphe $(G - u) \circ x$. D'autre part, si nous appliquons $R_O(x)$, nous aurons les cinq cas suivants qui mènent à la même réduction $R_L(u)$.

- $x \neq v$, $x \notin N_G^+(v)$ et $x \notin N_G^-(v)$, dans ce cas l'application de $R_O(x)$ n'affecte l'application de $R_{S[v]}(u)$.
- $x \in N_G^+(v)$ et $(x, v), (x, u) \notin E$, dans ce cas un raisonnement similaire reste applicable, les successeurs de x seront ajoutés à $N_G^+(u)$ et à $N_G^+(v)$, ce qui fait que $R_{S[v]}(u)$ reste applicable.
- $x \in N_G^-(v)$ et $(v, x), (u, x) \notin E$, dans ce cas les prédécesseurs de x seront ajoutés à $N_G^-(u)$ et à $N_G^-(v)$, ce qui fait que $R_{S[v]}(u)$ reste applicable.

Donc nous obtenons le graphe $(G \circ x) - u$ qui est égal au graphe $(G - u) \circ x$ d'après le lemme A.1. Ainsi, le diagramme A.8 (e)-(f)-(g) est commutatif.

Par conséquent, pour tout graphe G et pour chaque diagramme A.9, il existe un graphe G' et un ensemble de réductions tels que ce diagramme soit commutatif. $\square$

Lemme A.11 (SUBSET et SUBSET) Pour quatre sommets $x, y, u, v \in V$ nous avons les diagrammes suivants.

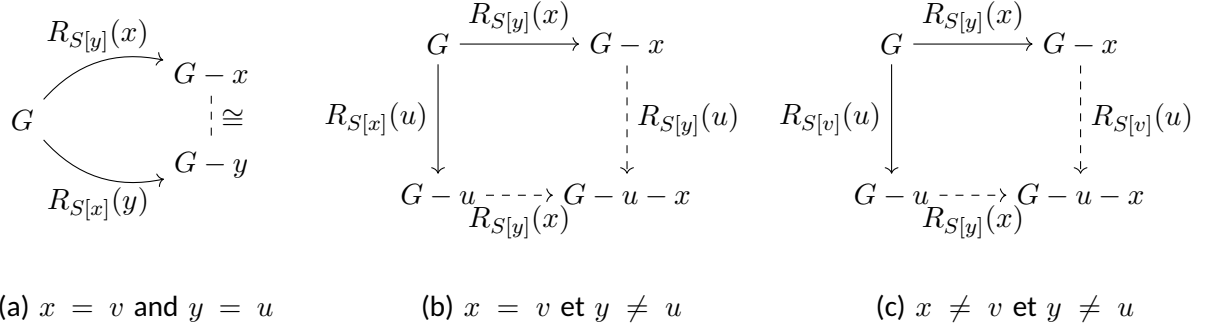


Diagramme A.10 - Le cas SUBSET et SUBSET

Preuve. Soit $x, y, u, v \in V$, tels que $R_{S[v]}(u)$ et $R_{S[y]}(x)$ sont applicables.

(a) *Si $x = v$ et $y = u$ et comme $R_{S[v]}(u)$ et $R_{S[y]}(x)$ sont applicables, alors nous aurons.*

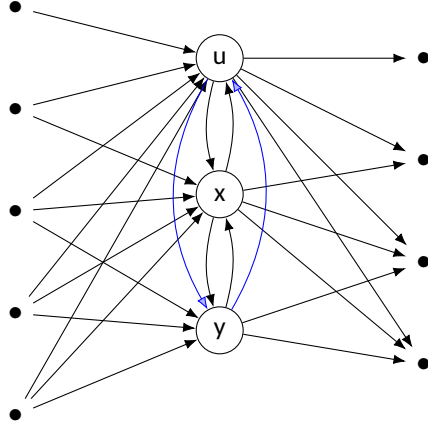
- $N_G^-(v) \subseteq N_G^-(u) \cup \{u\}$ **ce qui donne** $N_G^-(x) \subseteq N_G^-(y) \cup \{y\}$ **et nous avons** $N_G^-(y) \subseteq N_G^-(x) \cup \{x\}$, **donc** $N_G^-(v) \setminus \{u\} = N_G^-(u) \setminus \{v\}$ **et** $N_G^-(y) \setminus \{y\} = N_G^-(x) \setminus \{x\}$.
- **En utilisant la substitution grâce à $x = v$ et $y = u$, nous avons** $N_G^+(v) \setminus \{u\} = N_G^+(u) \setminus \{v\}$ **et** $N_G^+(y) \setminus \{y\} = N_G^+(x) \setminus \{x\}$.

Ainsi, si nous appliquons $R_{S[v]}(u)$, alors nous aurons le graphe $G - u$ et $R_{S[y]}(x)$ n'est plus applicable. Le voisinage de x dans $G - u$ sera donc $N_{G-u}^-(x) = N_G^-(x) \setminus \{y\}$ et $N_{G-u}^+(x) = N_G^+(x) \setminus \{y\}$. Et si nous appliquons $R_{S[y]}(x)$, alors nous aurons le graphe $G - x$ et $R_{S[v]}(u)$ n'est plus applicable. Le voisinage de u dans $G - x$ sera donc $N_{G-x}^-(u) = N_G^-(u) \setminus \{v\}$ et $N_{G-x}^+(u) = N_G^+(u) \setminus \{v\}$. Les deux graphes $G - u$ et $G - x$ sont isomorphes au travers de l'isomorphisme $\iota : G - u \longrightarrow G - x$ défini ainsi

$$\iota(a) = \begin{cases} a & \text{si } a \neq x \\ u & \text{si } a = x \end{cases}$$

Ainsi, le diagramme A.10 (a) est commutatif.

(b) *Si $x = v$, d'une part, si on applique $R_{S[v]}(u)$ en premier, alors nous retranchant u aux voisinages des deux sommets x et y , ce qui veut dire que les inclusions de la réduction $R_{S[y]}(x)$ demeurent valides dans $G - u$. Ce qui nous donne le graphe $(G - u) - x$. D'autre part, si nous appliquons $R_{S[y]}(x)$ en premier, alors la réduction $R_{S[y]}(u)$ sera applicable dans le graphes $G - x$. En effet, si $x = v$, alors nous aurons $(u, y), (y, u) \in E$, $N_G^-(y) \subseteq N_G^-(x) \cup \{x\} \subseteq N_G^-(u) \cup \{u\}$ et $N_G^+(y) \subseteq N_G^+(x) \cup \{x\} \subseteq N_G^+(u) \cup \{u\}$, car $R_{S[v]}(u)$ et $R_{S[y]}(x)$ sont applicables. Ce qui fait que dans $G - x$, nous aurons*



$$x = v \text{ et } y \neq u$$

Figure A.2 – Illustration du cas (a) du lemme A.11 pour la réduction SUBSET. Ci-haut, un sous-graphe d'un graphe $G = (V, E)$ où $R_{S[v]}(u)$ et $R_{S[y]}(x)$ sont applicables et $x = v$ et $y \neq u$. Comme $x = v$, $N_G^-(y) \subseteq N_G^-(x) \cup \{x\} \subseteq N_G^-(u) \cup \{u\}$ et $N_G^+(y) \subseteq N_G^+(x) \cup \{x\} \subseteq N_G^+(u) \cup \{u\}$, alors nous avons le 2-circuit en bleu entre u et y .

quand même $(u, y), (y, u) \in E$, $N_G^-(y) \subseteq N_G^-(u) \cup \{u\}$ et $N_G^+(y) \subseteq N_G^+(u) \cup \{u\}$, par conséquent, nous aurons le graphe $(G - x) - u$ après l'application de $R_{S[y]}(x)$, qui est égal $G - u - x$ d'après le lemme A.1. Voir la figure A.2 pour une illustration des réductions successives décrites ici. Ainsi, le diagramme A.10 (b) est commutatif.

(c) Pour ce cas l'application d'une réduction n'affectera pas l'application de l'autre et d'après le lemme A.1

$G - u - x = G - x - u$. Ainsi, le diagramme A.10 (c) est commutatif.

Par conséquent, pour tout graphe G et pour chaque diagramme A.10, il existe un graphe G' et un ensemble de réductions tels que ce diagramme soit commutatif. $\square$

À noter que des preuves ont été fournies par (Lemaic, 2008) dans son étude de la confluence des réductions $\{\text{LOOP}, \text{INDICLIQUE}, \text{OUTDICLIQUE}\}$. Pour des raisons d'exhaustivité de cette thèse, nous proposons des preuves similaires pour les lemmes suivants qui traitent les mêmes cas.

Lemme A.12 (LOOP et LOOP) Pour deux sommets $x, u \in V$ nous avons le diagramme suivant.

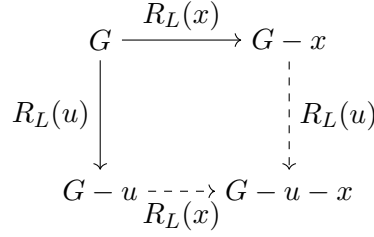


Diagramme A.11 – Le cas LOOP et LOOP

Preuve. Soit $x \neq u \in V$ tels que $R_L(u)$ et $R_L(x)$ sont applicables. Dans ce cas l'applicabilité d'une réduction n'affecte pas l'applicabilité de l'autre. En effet, le retrait d'un sommet n'affectera pas la boucle d'un autre sommet, même s'ils sont adjacents. Donc, $R_L(x)$ reste applicable dans $G - u$ et $R_L(u)$ reste applicable dans $G - x$. Dans les deux cas nous arrivons au graphe $G - u - x$. Par conséquent, pour tout graphe G , il existe un graphe G' et un ensemble de réductions tels que le diagramme A.11 est commutatif. À noter que le cas $x = u$ est trivial. $\square$

Lemme A.13 (LOOP et INDICLIQUE) Pour deux sommets $x, u \in V$ nous avons le diagramme suivant.

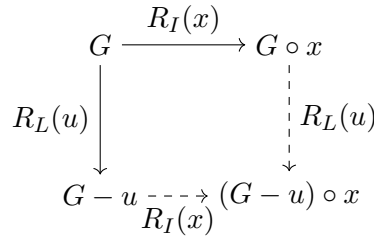


Diagramme A.12 – Le cas LOOP et INDICLIQUE

Preuve. Soit $x, u \in V$ tels que $R_L(u)$ et $R_I(x)$ sont applicables. Comme la condition d'applicabilité de $R_I(x)$ est que $(x, x) \notin E$, alors $x \neq u$. Dans ce cas l'applicabilité d'une réduction n'affecte pas l'applicabilité de l'autre. En effet, après le retrait de x par $R_I(x)$, la boucle (u, u) sera présente dans $G \circ x$. De même, si $R_L(u)$ retire le sommet u , $N_G^-(x)$ demeure une diclique, même si $u \in N_G^-(x)$, ainsi $R_I(x)$ reste applicable dans $G - u$. Dans les deux cas nous arrivons au graphe $(G - u) \circ x = (G \circ x) - u$. Par conséquent, pour tout graphe G , il existe un graphe G' et un ensemble de réductions tels que le diagramme A.12 est commutatif.

$\square$

Lemme A.14 (LOOP et OUTDICLIQUE) Pour deux sommets $x, u \in V$ nous avons le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{R_O(x)} & G \circ x \\
 R_L(u) \downarrow & & \downarrow R_L(u) \\
 G - u & \xrightarrow[R_O(x)]{\quad \quad \quad} & (G - u) \circ x
 \end{array}$$

Diagramme A.13 – Le cas LOOP et OUTDICLIQUE

Preuve. Soit $x, u \in V$ tels que $R_L(u)$ et $R_O(x)$ sont applicables. Comme la condition d'applicabilité de $R_O(x)$ est que $(x, x) \notin E$, alors $x \neq u$. Dans ce cas l'applicabilité d'une réduction n'affecte pas l'applicabilité de l'autre. En effet, après le retrait de x par $R_O(x)$, la boucle (u, u) sera présente dans $G \circ x$. De même, si $R_L(u)$ retire le sommet u , $N_G^+(x)$ demeure une diclique, même si $u \in N_G^+(x)$, ainsi $R_O(x)$ reste applicable dans $G - u$. Dans les deux cas nous arrivons au graphe $(G - u) \circ x = (G \circ x) - u$. Par conséquent, pour tout graphe G , il existe un graphe G' et un ensemble de réductions tels que le diagramme A.13 est commutatif.

□

Lemme A.15 (INDICLIQUE et OUTDICLIQUE) Pour deux sommets $x, u \in V$ nous avons les diagrammes suivants.

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{R_O(x)} & G \circ x \xrightarrow{(R_L(p))_{p \in N_G^-(u) \setminus \{x\}}} G \circ x - (N_G^-(u) \setminus \{x\}) \\
\downarrow R_I(u) & & \downarrow \cong \\
G \circ u & \xrightarrow{(R_L(s))_{s \in N_G^+(x) \setminus \{u\}}} & G \circ u - (N_G^+(x) \setminus \{u\})
\end{array}$$

(a) $(u, x) \notin E$ et $(x, u) \in E$

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{R_O(x)} & G \circ x \\
\downarrow R_I(u) & & \downarrow R_I(u) \\
G \circ u & \xrightarrow{R_O(x)} & G \circ u \circ x
\end{array}$$

(b) $(u, x) \notin E$ et $(x, u) \notin E$

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{R_O(x)} & G \circ x \\
\downarrow R_I(u) & & \searrow (R_L(p))_{p \in N_G^-(u) \cup \{u\} \setminus \{x\}} \\
G \circ u & \xrightarrow{(R_L(s))_{s \in N_G^+(x) \cup \{x\} \setminus \{u\}}} & G - N_G^+(x) \cup \{x\}
\end{array}$$

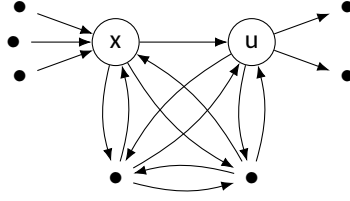
(c) $(u, x) \in E$ et $(x, u) \in E$

Diagramme A.14 – Le cas INDICLIQUE et OUTDICLIQUE

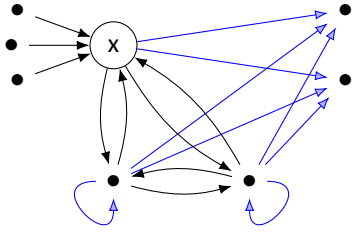
Preuve. Soient $x, u \in V$ tels que $R_I(u)$ et $R_O(x)$ sont applicables.

(a) Si $(u, x) \notin E$ et $(x, u) \in E$, alors $N_G^-(u) \cap N_G^+(x)$ forme une diclique et $N_G^+(x) \setminus \{u\} = N_G^-(u) \setminus \{x\}$. En effet, comme $N_G^-(u)$ forme une diclique, alors un sous-ensemble de sommets de $N_G^-(u)$ formera également une diclique, donc $N_G^-(u) \cap N_G^+(x) \subseteq N_G^-(u)$ forme une diclique dans G . Pour démontrer que $N_G^+(x) \setminus \{u\} = N_G^-(u) \setminus \{x\}$ nous démontrons la double inclusions. Nous raisonnons par l'absurde et nous supposons qu'il existe $a \in N_G^+(x) \setminus \{u\}$ et $a \notin N_G^-(u) \setminus \{x\}$. Comme a et u sont dans $N_G^+(x)$ qui forme une diclique, alors $(a, u), (u, a) \in E$, donc $a \in N_G^-(u)$ ce qui est une contradiction. Donc $N_G^+(x) \setminus \{u\} \subseteq N_G^-(u) \setminus \{x\}$. Nous pouvons utiliser le même raisonnement pour démontrer que $N_G^+(x) \setminus \{u\} \supseteq N_G^-(u) \setminus \{x\}$ et ainsi démontrer l'égalité $N_G^+(x) \setminus \{u\} = N_G^-(u) \setminus \{x\}$. Par conséquent, $N_G^-(u) \cap N_G^+(x) = N_G^+(x) \setminus \{u\} = N_G^-(u) \setminus \{x\}$ est une diclique.

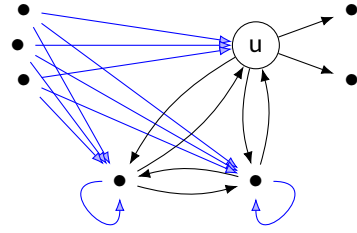
Maintenant, d'une part, si nous appliquons $R_I(u)$, alors tous les sommets $N_G^-(u) \cap N_G^+(x) = N_G^+(x) \setminus \{u\}$ auront une boucle et $N_{G \circ u}^+(x) = (N_G^+(x) \setminus \{u\}) \cup N_G^+(u)$. Ainsi, nous pouvons appliquer $R_L(s)$ pour tout $s \in N_G^+(x) \setminus \{u\}$ et nous obtiendrons le graphe $G' = G \circ u - (N_G^+(x) \setminus \{u\})$. D'autre



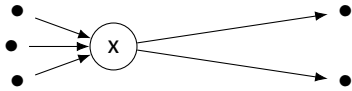
Un sous-graphe d'un graphe $G = (V, E)$ où $R_I(u)$ et $R_O(x)$ sont applicables avec $(x, u) \in E$ et $(u, x) \notin E$



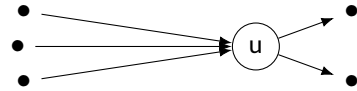
Le réduction $R_I(u)$ est appliquée



Le réduction $R_O(x)$ est appliquée



Nous appliquons $R_L(s)$ pour tout sommet $s \in N_G^+(x) \setminus \{u\}$



Nous appliquons $R_L(p)$ pour tout sommet $p \in N_G^-(u) \setminus \{x\}$

Figure A.3 – Illustration du cas (a) du lemme A.15 pour les réductions INDICLIQUE et OUTDICLIQUE. Une illustration du cas où $R_I(u)$ et $R_O(x)$ sont applicables et $(u, x) \notin E$ et $(x, u) \in E$. À gauche les réductions successive en commençant par $R_I(u)$. À droite les réductions successive en commençant par $R_O(x)$.

part, si nous appliquons $R_O(x)$, alors tous les sommets $N_G^-(u) \cap N_G^+(x) = N_G^-(u) \setminus \{x\}$ auront une boucle et $N_{G \circ x}^-(u) = (N_G^-(u) \setminus \{x\}) \cup N_G^-(x)$. Ainsi, nous pouvons appliquer $R_L(p)$ pour tout $p \in N_G^-(u) \setminus \{x\}$ et nous obtiendrons le graphe $G'' = G \circ x - (N_G^-(u) \setminus \{x\})$. Voir la figure A.3 pour une illustration des réductions successives décrites ici.

Nous avons donc les deux graphes $G' = G \circ u - (N_G^+(x) \setminus \{u\})$ et $G'' = G \circ x - (N_G^-(u) \setminus \{x\})$, comme $N_G^+(x) \setminus \{u\} = N_G^-(u) \setminus \{x\}$, alors les deux graphes G' et G'' sont isomorphes au travers

de l'isomorphisme $\iota : G' \longrightarrow G''$ défini ainsi

$$\iota(a) = \begin{cases} a & \text{si } a \neq x \\ u & \text{si } a = x \end{cases}$$

Ainsi, le diagramme A.14 (a) est commutatif.

(b) Si $(u, x) \notin E$ et $(x, u) \notin E$, alors l'applicabilité d'une réduction n'affecte pas l'applicabilité de l'autre. En effet, le deux sommets u et x ne sont pas adjacents donc leur retrait et l'ajout de nouveaux arcs ne changera pas le fait que $N_{G \circ x}^-(u)$ ou $N_{G \circ u}^+(x)$ sont des dicliques. Ce qui fait que $R_O(x)$ reste applicable dans $G \circ u$ et $R_I(u)$ reste applicable dans $G \circ x$. Ainsi, nous obtiendrons les deux graphes $(G \circ u) \circ x$ et $(G \circ x) \circ u$ qui sont égaux d'après le lemme A.1. Par conséquent, le diagramme A.14 (b) est commutatif.

(c) Si $(u, x) \in E$ et $(x, u) \in E$, alors $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$ forme une diclique. En effet, d'abord nous utilisons la double inclusions pour démontrer que $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$. Nous raisonnons par l'absurde et nous supposons qu'il existe $a \in N_G^-(u) \cup \{u\}$ et $a \notin N_G^+(x) \cup \{x\}$. Soit $a = u$ et comme $(x, u) \in E$ alors $a \in N_G^+(x)$ ce qui est une contradiction. Soit $a \in N_G^-(u)$, comme $R_I(u)$ est applicable et que $(x, u) \in E$, donc $x \in N_G^-(u)$, alors nous avons un $(a, x), (x, a) \in E$, donc $a \in N_G^+(x)$ ce qui est une contradiction. Donc, nous avons bien $N_G^-(u) \cup \{u\} \subseteq N_G^+(x) \cup \{x\}$. Nous pouvons utiliser le même raisonnement pour démontrer que $N_G^-(u) \cup \{u\} \supseteq N_G^+(x) \cup \{x\}$ et ainsi démontrer l'égalité $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$. Ensuite pour montrer que $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$ forme une diclique, soit $a, b \in N_G^-(u) \cup \{u\}$, nous distinguons les cas suivants.

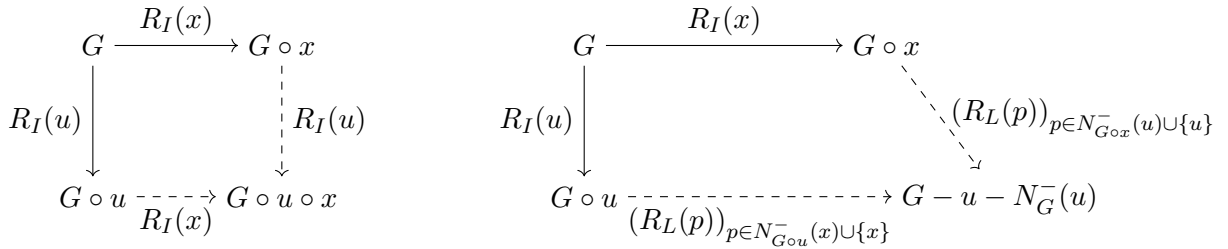
- $a = u$ et $b = x$, par hypothèse nous avons $(a, b), (b, a) \in E$.
- $a = u$ et $b \neq x$, comme $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$, alors $b \in N_G^+(x)$, ainsi nous avons $a, b \in N_G^+(x)$ qui forme une diclique car $R_O(x)$ est applicable, donc nous avons $(a, b), (b, a) \in E$.
- $a \neq u$ et $a = x$, comme $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$, alors $a \in N_G^-(u)$, ainsi nous avons $a, b \in N_G^-(u)$ qui forme une diclique car $R_I(u)$ est applicable, donc nous avons $(a, b), (b, a) \in E$.
- $a \neq u$ et $b \neq x$, comme $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$, alors nous avons $a, b \in N_G^-(u) \setminus \{u\} = N_G^+(x) \setminus \{x\}$, donc nous avons $(a, b), (b, a) \in E$.

Ainsi, dans tous les cas, nous avons un 2-circuit entre tous les sommets $a, b \in N_G^-(u) \cup \{u\}$, par conséquent, $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$ forme une diclique.

Maintenant, d'une part, si nous appliquons $R_I(u)$ tous les sommet $N_G^-(u)$ aurons des boucles (incluant x). Comme $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$, alors $N_G^-(u) = N_G^+(x) \cup \{x\} \setminus \{u\}$, donc nous appliquerons $R_L(s)$ pour tout $s \in N_G^+(x) \cup \{x\} \setminus \{u\}$. Nous obtiendrons le graphe $G' = (G \circ u) - N_G^+(x) \cup \{x\} \setminus \{u\} = G - N_G^+(x) \cup \{x\}$. D'autre part, si nous appliquons $R_O(x)$ tous les sommet $N_G^+(x)$ aurons des boucles (incluant u). Comme $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$, alors $N_G^+(x) = N_G^-(u) \cup \{u\} \setminus \{x\}$, donc nous appliquerons $R_L(p)$ pour tout $p \in N_G^-(u) \cup \{u\} \setminus \{x\}$. Nous obtiendrons le graphe $G'' = (G \circ x) - N_G^-(u) \cup \{u\} \setminus \{x\} = G - N_G^-(u) \cup \{u\}$. Comme $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$, alors nous avons $G' = G''$ et ainsi le diagramme A.14 (c) est commutatif.

Par conséquent, pour tout graphe G et pour chaque diagramme A.14, il existe un graphe G' ou un graphe qui lui est isomorphe et un ensemble de réductions tels que ce diagramme soit commutatif. $\square$

Lemme A.16 (INDICLIQUE et INDICLIQUE) Pour deux sommets $x, u \in V$ nous avons les diagrammes suivants.



(a) $(u, x) \notin E$ et $(x, u) \in E$

(c) $(u, x) \in E$ et $(x, u) \in E$

(b) $(u, x) \notin E$ et $(x, u) \notin E$

Diagramme A.15 – Le cas INDICLIQUE et INDICLIQUE

Preuve. Soient $x, u \in V$ tels que $R_I(u)$ et $R_I(x)$ sont applicables.

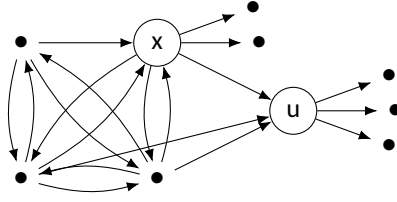
(a) Si $(u, x) \notin E$ et $(x, u) \in E$ et (b) si $(u, x) \notin E$ et $(x, u) \notin E$, alors pour le cas (b) les deux réductions sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent donc être appliquées séparément sans que l'application d'une réduction n'affecte l'applicabilité de l'autre. En effet, les deux sommets u et x ne sont pas adjacents donc leur retrait et l'ajout de nouveaux arcs ne changera pas le fait que $N_{G \circ x}^-(u)$ ou $N_{G \circ u}^-(x)$ sont des dicliques. Ce qui fait que $R_I(x)$ reste applicable dans $G \circ u$ et de même pour $R_I(u)$ qui reste

applicable dans $G \circ x$. Ainsi, nous obtiendrons les deux graphes $(G \circ u) \circ x$ et $(G \circ x) \circ u$ qui sont égaux d'après le lemme A.1. Par conséquent, le diagramme A.15 (b) est commutatif.

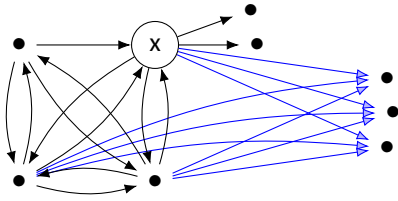
Pour le cas (a), c'est un peu plus subtile à voir, mais les deux réductions sont applicables peu importe l'ordre d'application. En effet, nous commençons par démontrer que si $(u, x) \notin E$ et $(x, u) \in E$, alors $N_G^-(u) \subseteq \{x\} \cup N_G^-(x)$. Soit $a \in N_G^-(u)$, si $a = x$ l'appartenance est immédiate. Si $a \neq x$, comme $(x, u) \in E$ alors il existe un 2-circuit entre a et x , car $R_I(u)$ est applicable. Donc a est également un prédécesseur de x , ainsi l'inclusion est démontrée. Donc, d'une part, si nous appliquons $R_I(u)$, alors $R_I(x)$ reste applicable dans $G \circ u$, car u n'est pas un prédécesseur de x et sans retrait n'affectera donc pas le fait que $N_{G \circ u}^-(x) = N_G^-(x)$ est une diclique. Nous obtiendrons donc $(G \circ u) \circ x$ après l'application de $R_I(x)$ dans $G \circ u$. D'autre part, si nous appliquons $R_I(x)$ en premier, alors tous les prédécesseurs de x deviendront des prédécesseurs de u , donc $N_{G \circ x}^-(u) = N_G^-(u) \cup N_G^-(x) = N_G^-(x)$ car nous avons l'inclusion $N_G^-(u) \subseteq \{x\} \cup N_G^-(x)$ et nous sommes dans $G \circ x$ (x a été retiré). Donc $R_I(u)$ est applicable dans $G \circ x$ et nous obtiendrons $(G \circ x) \circ u$. Les deux graphes $(G \circ u) \circ x$ et $(G \circ x) \circ u$ étant égaux d'après le lemme A.1, le diagramme A.15 (a) est commutatif. Voir la figure A.4 pour une illustration de cas.

(c) Si $(u, x) \in E$ et $(x, u) \in E$, alors $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^-(x) \cup \{x\}$ forme une diclique. En effet, d'abord nous utilisons la double inclusions pour démontrer que $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^-(x) \cup \{x\}$. Nous raisonnons par l'absurde et nous supposons qu'il existe $a \in N_G^-(u) \cup \{u\}$ et $a \notin N_G^-(x) \cup \{x\}$. Soit $a = u$ et comme $(u, x) \in E$, alors $a \in N_G^-(x)$ ce qui est une contradiction. Soit $a \in N_G^-(u)$, comme $R_I(u)$ est applicable et que $(x, u) \in E$, donc $x \in N_G^-(u)$, alors nous avons un $(a, x), (x, a) \in E$, donc $a \in N_G^-(x)$ ce qui est une contradiction. Donc, nous avons bien $N_G^-(u) \cup \{u\} \subseteq N_G^-(x) \cup \{x\}$. Nous pouvons utiliser le même raisonnement pour démontrer que $N_G^-(u) \cup \{u\} \supseteq N_G^-(x) \cup \{x\}$ et ainsi démontrer l'égalité $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^-(x) \cup \{x\}$. Ensuite pour montrer que $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^-(x) \cup \{x\}$ forme une diclique, soit $a, b \in N_G^-(u) \cup \{u\}$, nous distinguons les cas suivants.

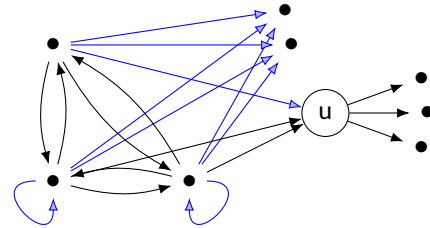
- $a = u$ et $b = x$, par hypothèse nous avons $(a, b), (b, a) \in E$.
- $a = u$ et $b \neq x$, comme $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^-(x) \cup \{x\}$, alors $b \in N_G^-(x)$, ainsi nous avons $a, b \in N_G^-(x)$ qui forme une diclique car $R_I(x)$ est applicable, donc nous avons $(a, b), (b, a) \in E$.
- $a \neq u$ et $a = x$, comme $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^-(x) \cup \{x\}$, alors $a \in N_G^-(u)$, ainsi nous avons $a, b \in N_G^-(u)$ qui forme une diclique car $R_I(u)$ est applicable, donc nous avons $(a, b), (b, a) \in E$.



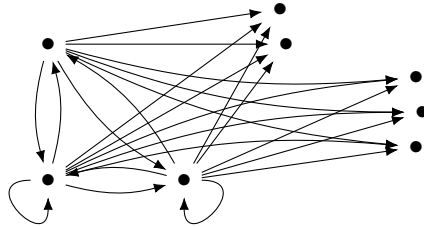
Un sous-graphe d'un graphe $G = (V, E)$ où $R_I(u)$ et $R_I(x)$ sont applicables avec $(x, u) \in E$ et $(u, x) \notin E$



La réduction $R_I(u)$ est appliquée. $R_I(x)$ reste applicable dans $G \circ u$ car $N_G^-(x)$ reste inchangé.



La réduction $R_I(x)$ est appliquée. $R_I(u)$ reste applicable dans $G \circ x$, car $(x, u) \in E$ et donc $N_{G \circ x}^-(u) = N_G^-(x)$.



Il est possible d'appliquer $R_L(a)$ pour tout $a \in N_G^-(u)$, mais ce n'est pas nécessaire car nous arrivons déjà à un graphe commun.

Figure A.4 – Illustration du cas (a) du lemme A.16 pour la réduction INDICLIQUE. Une illustration du cas où $R_I(u)$ et $R_I(x)$ sont applicables et $(u, x) \notin E$ et $(x, u) \in E$. À gauche la réduction $R_I(u)$. À droite la réduction $R_I(x)$.

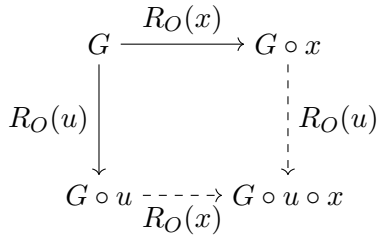
— $a \neq u$ et $b \neq x$, comme $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^-(x) \cup \{x\}$, alors nous avons $a, b \in N_G^-(u) \setminus \{x\} = N_G^-(x) \setminus \{u\}$, donc nous avons $(a, b), (b, a) \in E$.

Ainsi, dans tous les cas, nous avons un 2-circuit entre tous les sommets $a, b \in N_G^-(u) \cup \{u\}$, par conséquent, $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^-(x) \cup \{x\}$ forme une diclique.

Maintenant, d'une part, si nous appliquons $R_I(u)$ tous les sommet $N_G^-(u)$ aurons des boucles (incluant x). Comme $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^-(x) \cup \{x\}$, alors $N_G^-(u) = N_G^-(x) \cup \{x\} \setminus \{u\}$, donc nous appliquerons $R_L(p)$ pour tout $p \in N_G^-(x) \cup \{x\} \setminus \{u\}$. Nous obtiendrons le graphe $G' = (G \circ u) - N_G^-(x) \cup \{x\} \setminus \{u\} = G - N_G^-(x) \cup \{x\}$. D'autre part, si nous appliquons $R_I(x)$ tous les sommet $N_G^-(x)$ aurons des boucles (incluant u). Comme $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^-(x) \cup \{x\}$, alors $N_G^-(x) = N_G^-(u) \cup \{u\} \setminus \{x\}$, donc nous appliquerons $R_L(p)$ pour tout $p \in N_G^-(u) \cup \{u\} \setminus \{x\}$. Nous obtiendrons le graphe $G'' = (G \circ x) - N_G^-(u) \cup \{u\} \setminus \{x\} = G - N_G^-(u) \cup \{u\}$. Comme $N_G^-(u) \cup \{u\} = N_G^-(x) \cup \{x\}$, alors nous avons $G' = G''$ et ainsi le diagramme A.15 (c) est commutatif.

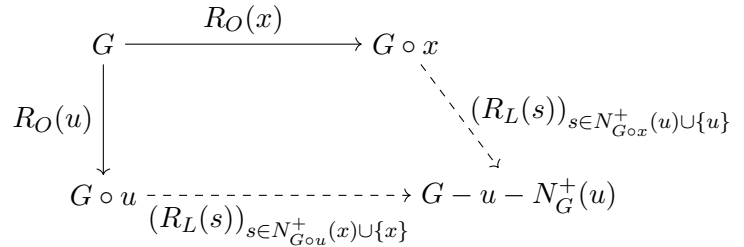
Par conséquent, pour tout graphe G et pour chaque diagramme A.15, il existe un graphe G' et un ensemble de réductions tels que ce diagramme soit commutatif. $\square$

Lemme A.17 (OUTDICLIQUE et OUTDICLIQUE) Pour deux sommets $x, u \in V$ nous avons les diagrammes suivants.



(a) $(u, x) \in E$ et $(x, u) \notin E$

(b) $(u, x) \notin E$ et $(x, u) \notin E$



(c) $(u, x) \in E$ et $(x, u) \in E$

Diagramme A.16 – Le cas OUTDICLIQUE et OUTDICLIQUE

Preuve. Cette preuve est similaire à la preuve du lemme A.16. Soient $x, u \in V$ tels que $R_O(u)$ et $R_O(x)$ sont applicables.

(a) Si $(u, x) \in E$ et $(x, u) \notin E$ et (b) si $(u, x) \notin E$ et $(x, u) \in E$, alors pour le cas (b) les deux réductions sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent donc être appliquées séparément sans que l'application d'une réduction n'affecte l'applicabilité de l'autre. En effet, les deux sommets u et x ne sont pas adjacents donc leur retrait et l'ajout de nouveaux arcs ne changera pas le fait que $N_{G \circ x}^+(u)$ ou $N_{G \circ u}^+(x)$ sont des dicliques. Ce qui fait que $R_O(x)$ reste applicable dans $G \circ u$ et de même pour $R_O(u)$ qui reste applicable dans $G \circ x$. Ainsi, nous obtiendrons les deux graphes $(G \circ u) \circ x$ et $(G \circ x) \circ u$ qui sont égaux d'après le lemme A.1. Par conséquent, le diagramme A.16 (b) est commutatif.

Pour le cas (a), c'est similaire au cas (a) du lemme A.16 à savoir les deux réductions sont applicables l'une après l'autre, peu importe celle que nous appliquons en premier. En effet, nous commençons par démontrer que si $(u, x) \in E$ et $(x, u) \notin E$, alors $N_G^+(u) \subseteq \{x\} \cup N_G^+(x)$. Soit $a \in N_G^+(u)$, si $a = x$ l'appartenance est immédiate. Si $a \neq x$, comme $(u, x) \in E$ alors il existe un 2-circuit entre a et x , car $R_O(u)$ est applicable. Donc a est également un successeur de x , ainsi l'inclusion est démontrée. Donc, d'une part, si nous appliquons $R_O(u)$, alors $R_O(x)$ reste applicable dans $G \circ u$, car u n'est pas un successeur de x et sans retrait n'affectera donc pas le fait que $N_{G \circ u}^+(x) = N_G^+(x)$ est une diclique. Nous obtiendrons donc $(G \circ u) \circ x$ après l'application de $R_O(x)$ dans $G \circ u$. D'autre part, si nous appliquons $R_O(x)$ en premier, alors tous les successeurs de x deviendront des successeurs de u , donc $N_{G \circ x}^+(u) = N_G^+(u) \cup N_G^+(x) = N_G^+(x)$ car nous avons l'inclusion $N_G^+(u) \subseteq \{x\} \cup N_G^+(x)$ et nous sommes dans $G \circ x$ (x a été retiré). Donc $R_O(u)$ est applicable dans $G \circ x$ et nous obtiendrons $(G \circ x) \circ u$. Les deux graphes $(G \circ u) \circ x$ et $(G \circ x) \circ u$ étant égaux d'après le lemme A.1, le diagramme A.16 (a) est commutatif.

(c) Si $(u, x) \in E$ et $(x, u) \in E$, alors $N_G^+(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$ forme une diclique. En effet, d'abord nous utilisons la double inclusions pour démontrer que $N_G^+(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$. Nous raisonnons par l'absurde et nous supposons qu'il existe $a \in N_G^+(u) \cup \{u\}$ et $a \notin N_G^+(x) \cup \{x\}$. Soit $a = u$ et comme $(x, u) \in E$ alors $a \in N_G^+(x)$ ce qui est une contradiction. Soit $a \in N_G^+(u)$, comme $R_O(u)$ est applicable et que $(u, x) \in E$, donc $x \in N_G^+(u)$, alors nous avons un $(a, x), (x, a) \in E$, donc $a \in N_G^+(x)$ ce qui est une contradiction. Donc, nous avons bien $N_G^+(u) \cup \{u\} \subseteq N_G^+(x) \cup \{x\}$. Nous pouvons utiliser le même raisonnement pour démontrer que $N_G^+(x) \cup \{x\} \subseteq N_G^+(u) \cup \{u\}$ et ainsi démontrer l'égalité $N_G^+(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$. Ensuite pour montrer que $N_G^+(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$ forme une diclique, soit $a, b \in N_G^+(u) \cup \{u\}$, nous distinguons les cas suivants.

- $a = u$ et $b = x$, par hypothèse nous avons $(a, b), (b, a) \in E$.
- $a = u$ et $b \neq x$, comme $N_G^+(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$, alors $b \in N_G^+(x)$, ainsi nous avons

$a, b \in N_G^+(x)$ qui forme une diclique car $R_O(x)$ est applicable, donc nous avons $(a, b), (b, a) \in E$.

— $a \neq u$ et $a = x$, comme $N_G^+(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$, alors $a \in N_G^+(u)$, ainsi nous avons $a, b \in N_G^+(u)$ qui forme une diclique car $R_O(u)$ est applicable, donc nous avons $(a, b), (b, a) \in E$.

— $a \neq u$ et $b \neq x$, comme $N_G^+(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$, alors nous avons $a, b \in N_G^+(u) \setminus \{x\} = N_G^+(x) \setminus \{u\}$, donc nous avons $(a, b), (b, a) \in E$.

Ainsi, dans tous les cas, nous avons un 2-circuit entre tous les sommets $a, b \in N_G^+(u) \cup \{u\}$, par conséquent, $N_G^+(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$ forme une diclique.

Maintenant, d'une part, si nous appliquons $R_O(u)$ tous les sommet $N_G^+(u)$ aurons des boucles (incluant x). Comme $N_G^+(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$, alors $N_G^+(u) = N_G^+(x) \cup \{x\} \setminus \{u\}$, donc nous appliquerons $R_L(s)$ pour tout $s \in N_G^+(x) \cup \{x\} \setminus \{u\}$. Nous obtiendrons le graphe $G' = (G \circ u) - N_G^+(x) \cup \{x\} \setminus \{u\} = G - N_G^+(x) \cup \{x\}$. D'autre part, si nous appliquons $R_O(x)$ tous les sommet $N_G^+(x)$ aurons des boucles (incluant u). Comme $N_G^+(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$, alors $N_G^+(x) = N_G^+(u) \cup \{u\} \setminus \{x\}$, donc nous appliquerons $R_L(s)$ pour tout $s \in N_G^+(u) \cup \{u\} \setminus \{x\}$. Nous obtiendrons le graphe $G'' = (G \circ x) - N_G^+(u) \cup \{u\} \setminus \{x\} = G - N_G^+(u) \cup \{u\}$. Comme $N_G^+(u) \cup \{u\} = N_G^+(x) \cup \{x\}$, alors nous avons $G' = G''$ et ainsi le diagramme A.16 (c) est commutatif.

Par conséquent, pour tout graphe G et pour chaque diagramme A.16, il existe un graphe G' et un ensemble de réductions tels que ce diagramme soit commutatif. $\square$

ANNEXE B

CONFLUENCE DE LA RÉDUCTION CHORD_k

Dans cette annexe nous démontrons le théorème 3.9, c'est-à-dire, la confluence de l'ensemble des réductions $\{\text{LOOP}, \text{INDICLIQUE}, \text{OUTDICLIQUE}, \text{SUBSET}, \text{CHORD}_k\}$.

Nous énonçons d'abord le résultat suivant qui formalisent des arguments que nous utilisons à plusieurs reprises dans les démonstrations des lemmes plus bas dans cette annexe.

Lemme B.1 Soient un graphe orienté $G = (V, E)$, un arc $(u, v) \in E$ et un sommet $x \in V$ tel que $(x, x) \notin E$. Si nous avons $\text{CHORD}_k(u, v)$ dans G , alors nous avons les cas suivants.

- (a) Si $x \neq u$ et $x \neq v$, alors (u, v) sera identifié par CHORD_k dans $G \circ x$.
- (b) Si $x = u$ et pour $p_x \in N_G^-(x)$, $(p_x, v) \notin E$, alors (p_x, v) sera identifié par CHORD_k dans $G \circ x$.
- (c) Si $x = v$ et pour $s_x \in N_G^+(x)$, $(u, s_x) \notin E$, alors (u, s_x) sera identifié par CHORD_k dans $G \circ x$.

Preuve. Nous avons plusieurs cas à considérer.

- (a) $x \neq u$ et $x \neq v$. Soit $p = (u_1 = v, u_2, \dots, u_\ell = u)$ un chemin de v vers u dans $G \circ x$. Nous avons les cas suivants.
 - (i) $p \cap N_G^-(x) \times N_G^+(x) = \emptyset$, dans ce cas le chemin p existe dans G et comme $\text{CHORD}_k(u, v)$ dans G , alors p a une corde arrière identifiable par CHORD_k dans G , qui sera également identifiée par CHORD_k dans $G \circ x$ car $x \notin p$ donc la corde arrière dans G n'est pas incidente à x .
 - (ii) Il existe $p_x \in N_G^-(x)$ et $s_x \in N_G^+(x)$, tels que $(p_x, s_x) \in p$. Donc le chemin p s'écrit ainsi $p = (u_1 = v, \dots, u_i = p_x, u_{i+1} = s_x, \dots, u_\ell = u)$. Le chemin p étant dans $G \circ x$, nous pouvons construire un chemin p' dans G à partir de p en ajoutant le sommet x et en substituant l'arc (p_x, s_x) par les deux arcs (p_x, x) et (x, s_x) , nous aurons donc,

$$p' = (u_1 = v, \dots, u_i = p_x, x, u_{i+1} = s_x, \dots, u_\ell = u)$$

Pour faciliter les arguments qui suivent, nous étiquetons les sommets de p' ce qui nous donne,

$$p' = (u_1 = v, \dots, u_i = p_x, x, u_{i+1} = s_x, \dots, x_\ell = u)$$

$$p' = (x_1 = v, \dots, x_i = p_x, x_{i+1} = x, x_{i+2} = s_x, \dots, x_{\ell+1} = u)$$

Comme p' est un chemin de v vers u et (u, v) est identifié par CHORD_k dans G , alors p' a une corde arrière et nous avons plusieurs possibilités.

- Soit c'est une boucle et comme $(x, x) \notin E$, alors cette boucle existe dans $G \circ x$ et ainsi un des sommets du chemin p' autre que x a une boucle, par conséquent, ce même sommet qui appartient à p gardera sa boucle dans $G \circ x$.
- Soit c'est un 2-circuit et dans ce cas nous 2 possibilités, soit x fait partie du 2-circuit, c'est-à-dire, c'est l'un de ces deux 2-circuits (p_x, x, p_x) ou (s_x, x, s_x) , ainsi soit p_x ou s_x aura une boucle dans $G \circ x$ et donc p aura une boucle. Soit c'est un 2-circuit qui ne passe pas par x et par conséquent, il existera dans $G \circ x$ et ainsi p aura un 2-circuit.
- Soit c'est un arc (x_{l+k-1}, x_l) avec $k \geq 3$ formant donc un circuit de longueur k . Nous avons trois cas possibles.

- (1) $(x_{l+k-1}, x_l) = (x_{i+k}, x)$ (pour $l = i + 1$ et $x_{i+1} = x$), comme $k \geq 3$ et que le sommet $x_{i+k} \in N_G^-(x)$, alors cet arc sera transformé en (x_{i+k}, s_x) ce qui est une corde arrière de p qui existe dans $G \circ x$ et qui forme un circuit de longueur $k - 1$.
- (2) $(x_{l+k-1}, x_l) = (x, x_{i-k+2})$ (pour $l + k - 1 = i + 1$ et $x_{i+1} = x$), comme $k \geq 3$ et que le sommet $x_{i-k+2} \in N_G^+(x)$, alors cet arc sera transformé en (p_x, x_{i-k+2}) ce qui est une corde arrière de p qui existe dans $G \circ x$ et qui forme un circuit de longueur $k - 1$.
- (3) x n'est pas incident à cette corde arrière et dans ce cas, cette corde arrière existera dans $G \circ x$ et appartiendra à p , elle formera donc un circuit de longueur $k - 1$.

Dans tous les cas, l'arc (x_{l+k-1}, x_l) formant une corde arrière de p' dans G formera une corde arrière de p dans $G \circ x$.

Ainsi, le chemin p aura une corde arrière identifiable par CHORD_k dans $G \circ x$, donc (u, v) sera identifié par CHORD_k dans $G \circ x$.

- (b) $x = u$ et $p_x \in N_G^-(x)$ tel que $(p_x, v) \notin E$. Soit $p = (u_1 = v, u_2, \dots, u_\ell = p_x)$ un chemin de v vers p_x dans $G \circ x$. Le chemin p étant dans $G \circ x$, nous pouvons construire un chemin p' de v vers x dans G à partir de p en ajoutant le sommet x et en substituant l'arc (p_x, v) , qui n'existe pas dans G , par

l'arc (p_x, x) , nous aurons donc,

$$p' = (u_1 = v, \dots, u_\ell = p_x, u_{\ell+1} = x)$$

Comme p' est un chemin de v vers x et (x, v) est identifié par $CHORD_k$ dans G , alors p' a une corde arrière et nous avons plusieurs possibilités.

- Soit c'est une boucle et comme $(x, x) \notin E$, alors cette boucle existe dans $G \circ x$ et ainsi un des sommets du chemin p' autre que x a une boucle, par conséquent, ce même sommet qui appartient à p gardera sa boucle dans $G \circ x$.
- Soit c'est un 2-circuit et dans ce cas nous 2 possibilités, soit x fait partie du 2-circuit, c'est-à-dire, c'est le 2-circuit (p_x, x, p_x) , ainsi p_x aura une boucle dans $G \circ x$ et donc p aura une boucle. Soit c'est un 2-circuit qui ne passe pas par x et par conséquent, il existera dans $G \circ x$ et ainsi p aura un 2-circuit.
- Soit c'est un arc (u_{l+k-1}, u_l) avec $k \geq 3$ formant donc un circuit de longueur k . Nous avons deux cas possibles.

(1) $(u_{l+k-1}, u_l) = (x, u_{\ell-k+2})$ (pour $l + k - 1 = \ell + 1$ et $u_{\ell+1} = x$), comme $k \geq 3$ et que le sommet $u_{\ell-k+2} \in N_G^+(x)$, alors cet arc sera transformé en $(p_x, u_{\ell-k+2})$ ce qui est une corde arrière de p qui existe dans $G \circ x$ et qui forme un circuit de longueur $k - 1$.

(2) x n'est pas incident à cette corde arrière et dans ce cas, cette corde arrière existera dans $G \circ x$ et appartiendra à p , elle formera donc un circuit de longueur $k - 1$.

Dans tous les cas, l'arc (u_{l+k-1}, u_l) formant une corde arrière de p' dans G formera une corde arrière de p dans $G \circ x$.

Ainsi, le chemin p aura une corde arrière identifiable par $CHORD_k$ dans $G \circ x$, donc (p_x, v) sera identifié par $CHORD_k$ dans $G \circ x$.

- (c) $x = v$ et $s_x \in N_G^+(x)$ tel que $(u, s_x) \notin E$. Soit $p = (u_1 = s_x, u_2, \dots, u_\ell = u)$ un chemin de s_x vers u dans $G \circ x$. Le chemin p étant dans $G \circ x$, nous pouvons construire un chemin p' de x vers u dans G à partir de p en ajoutant le sommet x et en substituant l'arc (u, s_x) , qui n'existe pas dans G , par l'arc (x, s_x) , nous aurons donc,

$$p' = (u_0 = x, u_1 = s_x, u_2, \dots, u_\ell = u)$$

Comme p' est un chemin de x vers u et (u, x) est identifié par $CHORD_k$ dans G , alors p' a une corde

arrière et nous avons plusieurs possibilités.

- Soit c'est une boucle et comme $(x, x) \notin E$, alors cette boucle existe dans $G \circ x$ et ainsi un des sommets du chemin p' autre que x a une boucle, par conséquent, ce même sommet qui appartient à p gardera sa boucle dans $G \circ x$.
- Soit c'est un 2-circuit et dans ce cas nous 2 possibilités, soit x fait partie du 2-circuit, c'est-à-dire, c'est le 2-circuit (s_x, x, s_x) , ainsi s_x aura une boucle dans $G \circ x$ et donc p aura une boucle. Soit c'est un 2-circuit qui ne passe pas par x et par conséquent, il existera dans $G \circ x$ et ainsi p aura un 2-circuit.
- Soit c'est un arc (u_{l+k-1}, u_l) avec $k \geq 3$ formant donc un circuit de longueur k . Nous avons deux cas possibles.
 - (1) $(u_{l+k-1}, u_l) = (u_{k-1}, x)$ (pour $l = 0$ et $u_0 = x$), comme $k \geq 3$ et que le sommet $u_{k-1} \in N_G^-(x)$, alors cet arc sera transformé en (u_{k-1}, s_x) ce qui est une corde arrière de p qui existe dans $G \circ x$ et qui forme un circuit de longueur $k - 1$.
 - (2) x n'est pas incident à cette corde arrière et dans ce cas, cette corde arrière existera dans $G \circ x$ et appartiendra à p , elle formera donc un circuit de longueur $k - 1$.

Dans tous les cas, l'arc (u_{l+k-1}, u_l) formant une corde arrière de p' dans G formera une corde arrière de p dans $G \circ x$.

Ainsi, le chemin p aura une corde arrière identifiable par $CHORD_k$ dans $G \circ x$, donc (u, s_x) sera identifié par $CHORD_k$ dans $G \circ x$.

□

Nous utilisons le même formalisme que l'annexe A dans cette annexe, notamment les diagrammes commutatifs et les conventions de lectures énoncés. Nous énonçons des lemmes avec des digrammes commutatifs pour chacun paire de réductions applicables sur un même graphe. Dans ce qui suit, nous considérons un graphe orienté $G = (V, E)$.

Lemme B.2 (CHORD_k et LOOP) Pour un arc $(u, v) \in E$ et un sommet $x \in V$ nous avons les diagrammes suivants.

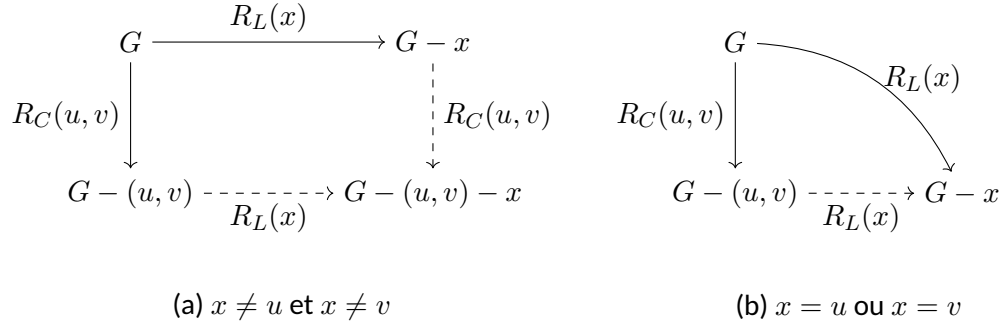


Diagramme B.1 – Le cas CHORD_k et LOOP

Preuve. Soient $(u, v) \in E$ et $x \in V$ tels que $R_C(u, v)$ et $R_L(x)$ sont applicables. Si x n'est pas incident à l'arc (u, v) , alors dans ce cas l'applicabilité d'une réduction n'affecte pas l'applicabilité de l'autre. En effet, la boucle (x, x) ne sera jamais identifié par CHORD_k car c'est un circuit minimal, donc $R_L(x)$ reste applicable dans $G - (u, v)$. De même, si l'arc (u, v) dont l'identification dépend d'une corde arrière incidente à x , alors il sera toujours identifié par CHORD_k , car tous les chemins de v vers u , passant par x n'existeront plus dans $G - x$.

Si au contraire x est incident à l'arc (u, v) , alors son retrait par CHORD_k ne changera pas le fait que $R_L(x)$ demeure applicable. Si nous appliquons $R_L(x)$ en premier, alors elle va retirer également l'arc (u, v) et nous nous retrouvons avec le graphe $G - x$ dans les deux cas.

Par conséquent, pour tout graphe G , il existe un graphe G' et un ensemble de réductions tels que les diagrammes B.1 sont commutatifs. $\square$

Lemme B.3 (CHORD_k et CHORD_k) Pour deux arcs $(u, v) \neq (x, y) \in E$ nous avons le diagramme suivant.

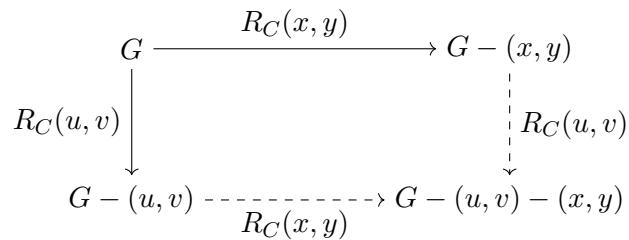


Diagramme B.2 – Le cas CHORD_k et CHORD_k

Preuve. Soient $(u, v) \neq (x, y) \in E$ tels que $R_C(u, v)$ et $R_C(x, y)$ sont applicables. Dans ce cas l'applicabilité d'une réduction n'affecte pas l'applicabilité de l'autre. En effet, la proposition 3.7 nous garantit que $CHORD_k$ reste applicable sur (u, v) dans $G - (x, y)$ et inversement. Par conséquent, pour tout graphe G , il existe un graphe G' et un ensemble de réductions tels que le diagramme B.2 est commutatif. À noter que le cas $(x, y) = (u, v)$ est trivial. $\square$

Lemme B.4 (CHORD_k et INDICLIQUE) Pour un arc $(u, v) \in E$ et un sommet $x \in V$ nous avons les diagrammes suivants, où $S_k(x) = \{s \in N_G^+(x) \mid (u, s) \notin E\}$ et $P_k(x) = \{p \in N_G^-(x) \mid (p, v) \notin E\}$.

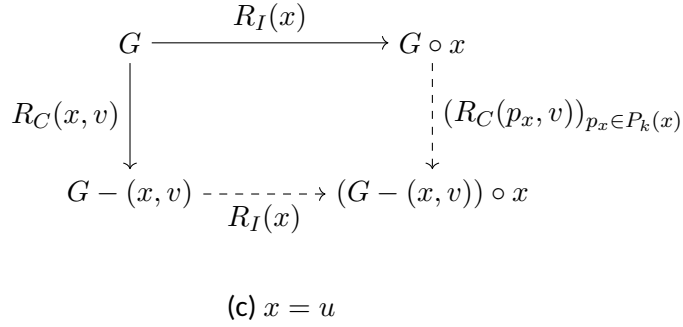
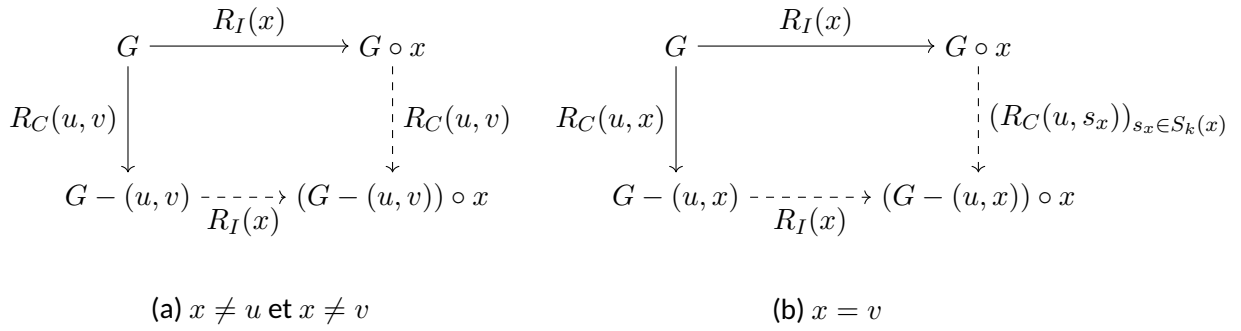


Diagramme B.3 – Le cas CHORD_k et INDICLIQUE

Preuve. Soient $(u, v) \in E$ et $x \in V$ tels que $R_C(u, v)$ et $R_I(x)$ sont applicables. Comme les arcs d'une diclique ne seront jamais identifiés par $CHORD_k$ et si $N_G^-(x)$ est une diclique, alors $N_{G-(p,x)}^-(x)$ demeure une diclique, pour tout $p \in N_G^-(x)$. Donc $R_I(x)$ sera toujours applicable peu importe l'arc qui sera retiré par une application de $R_C(u, v)$. Nous obtenons donc le graphe $(G - (u, v)) \circ x$ si nous appliquons $R_C(u, v)$ suivie de $R_I(x)$.

Si nous appliquons $R_I(x)$ en premier, nous avons donc plusieurs cas pour la réduction $CHORD_k$.

- (a) $x \neq u$ et $x \neq v$. Le lemme B.1-(a) nous garantit que $CHORD_k$ reste applicable après $R_I(x)$. Les deux réductions sont donc applicables dans n'importe quel ordre et le graphe résultant demeure le même $(G \circ x) - (u, v)$ qui est égale au graphe $(G - (u, v)) \circ x$, car x n'est pas incident à l'arc (u, v) .

Par conséquent, pour tout graphe G , il existe un graphe G' et un ensemble de réductions telsque le diagramme B.3-(a) est commutatif.

- (b) $x = v$. Le lemme B.1-(c) nous garantit que $CHORD_k$ reste applicable, après $R_I(x)$, sur tous les arcs (u, s_x) pour $s_x \in N_G^+(x)$ et $(u, s_x) \notin E$. Ainsi, tous les arcs de la forme (u, s_x) seront retirés par $R_C(u, s_x)$ à condition que $(u, s_x) \notin E$, donc nous obtenons le graphe $(G \circ x) - \cup_{s_x \in S_k(x)} (u, s_x)$. Nous avons $(G \circ x) - \cup_{s_x \in S_k(x)} (u, s_x) = (G - (u, x)) \circ x$, car les seuls arcs susceptibles de faire la différence entre ces deux graphes sont de la forme (u, s_x) avec $s_x \in N_G^+(x)$ et comme les arcs (u, s_x) sont soit retirés par $R_C(u, s_x)$ soit ils existent dans G et dans ce cas, ils ne seront retirés ni par $R_I(x)$ ni par $R_C(u, s_x)$.

Par conséquent, pour tout graphe G , il existe un graphe G' et un ensemble de réductions telsque le diagramme B.3-(b) est commutatif.

- (c) $x = u$. De même, le lemme B.1-(b) nous garantit que $CHORD_k$ reste applicable, après $R_I(x)$, sur tous les arcs (p_x, v) pour $p_x \in N_G^-(x)$ et $(p_x, v) \notin E$. Ainsi, tous les arcs de la forme (p_x, v) seront retirés par $R_C(p_x, v)$ à condition que $(p_x, v) \notin E$, donc nous obtenons le graphe $(G \circ x) - \cup_{p_x \in P_k(x)} (p_x, v)$. Nous avons $(G \circ x) - \cup_{p_x \in P_k(x)} (p_x, v) = (G - (x, v)) \circ x$, car les seuls arcs susceptibles de faire la différence entre ces deux graphes sont de la forme (p_x, v) avec $p_x \in N_G^-(x)$ et comme les arcs (p_x, v) sont soit retirés par $R_C(p_x, v)$ soit ils existent dans G et dans ce cas, ils ne seront retirés ni par $R_I(x)$ ni par $R_C(p_x, v)$.

Par conséquent, pour tout graphe G , il existe un graphe G' et un ensemble de réductions telsque le diagramme B.3-(c) est commutatif.

□

Lemme B.5 (CHORD_k et OUTDICLIQUE) Pour un arc $(u, v) \in E$ et un sommet $x \in V$ nous avons les diagrammes suivants, où $S_k(x) = \{s \in N_G^+(x) \mid (u, s) \notin E\}$ et $P_k(x) = \{p \in N_G^-(x) \mid (p, v) \notin E\}$.

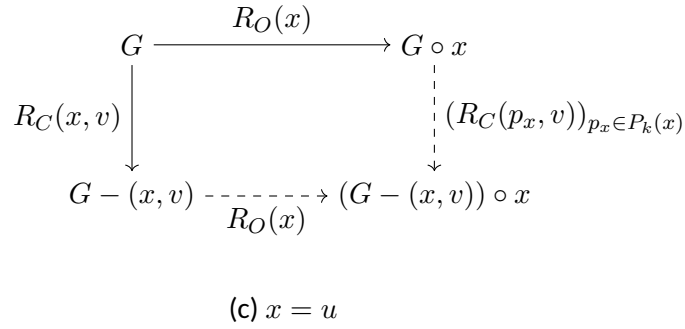
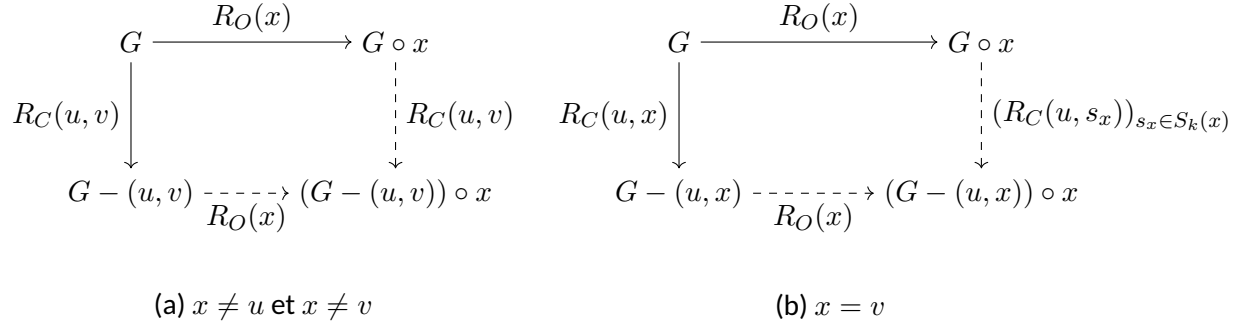


Diagramme B.4 – Le cas CHORD_k et OUTDICLIQUE

Preuve. Soient $(u, v) \in E$ et $x \in V$ tels que $R_C(u, v)$ et $R_O(x)$ sont applicables. Comme les arcs d'une diclique ne seront jamais identifiés par CHORD_k et si $N_G^+(x)$ est une diclique, alors $N_{G-(x,s)}^+(x)$ demeure une diclique, pour tout $s \in N_G^+(x)$. Donc $R_O(x)$ sera toujours applicable peu importe l'arc qui sera retiré par une application de $R_C(u, v)$. Nous obtenons donc le graphe $(G - (u, v)) \circ x$ si nous appliquons $R_C(u, v)$ suivie de $R_O(x)$.

Si nous appliquons $R_O(x)$ en premier, nous avons donc plusieurs cas pour la réduction CHORD_k .

- (a) $x \neq u$ et $x \neq v$. Le lemme B.1-(a) nous garantit que CHORD_k reste applicable après $R_O(x)$. Les deux réductions sont donc applicables dans n'importe quel ordre et le graphe résultant demeure le même $(G \circ x) - (u, v)$ qui est égale au graphe $(G - (u, v)) \circ x$, car x n'est pas incident à l'arc (u, v) .

Par conséquent, pour tout graphe G , il existe un graphe G' et un ensemble de réductions tels que le diagramme B.4-(a) est commutatif.

- (b) $x = v$. Le lemme B.1-(c) nous garantit que CHORD_k reste applicable, après $R_O(x)$, sur tous les arcs (u, s_x) pour $s_x \in N_G^+(x)$ et $(u, s_x) \notin E$. Ainsi, tous les arcs de la forme (u, s_x) seront retirés par

$R_C(u, s_x)$ à condition que $(u, s_x) \notin E$, donc nous obtenons le graphe $(G \circ x) - \cup_{s_x \in S_k(x)} (u, s_x)$. Nous avons $(G \circ x) - \cup_{s_x \in S_k(x)} (u, s_x) = (G - (u, x)) \circ x$, car les seuls arcs susceptibles de faire la différence entre ces deux graphes sont de la forme (u, s_x) avec $s_x \in N_G^+(x)$ et comme les arcs (u, s_x) sont soit retirés par $R_C(u, s_x)$ soit ils existent dans G et dans ce cas, ils ne seront retirés ni par $R_O(x)$ ni par $R_C(u, s_x)$.

Par conséquent, pour tout graphe G , il existe un graphe G' et un ensemble de réductions telsque le diagramme B.4-(b) est commutatif.

- (c) $x = u$. De même, le lemme B.1-(b) nous garantit que CHORD_k reste applicable, après $R_O(x)$, sur tous les arcs (p_x, v) pour $p_x \in N_G^-(x)$ et $(p_x, v) \notin E$. Ainsi, tous les arcs de la forme (p_x, v) seront retirés par $R_C(p_x, v)$ à condition que $(p_x, v) \notin E$, donc nous obtenons le graphe $(G \circ x) - \cup_{p_x \in P_k(x)} (p_x, v)$. Nous avons $(G \circ x) - \cup_{p_x \in P_k(x)} (p_x, v) = (G - (x, v)) \circ x$, car les seuls arcs susceptibles de faire la différence entre ces deux graphes sont de la forme (p_x, v) avec $p_x \in N_G^-(x)$ et comme les arcs (p_x, v) sont soit retirés par $R_C(p_x, v)$ soit ils existent dans G et dans ce cas, ils ne seront retirés ni par $R_O(x)$ ni par $R_C(p_x, v)$.

Par conséquent, pour tout graphe G , il existe un graphe G' et un ensemble de réductions telsque le diagramme B.4-(c) est commutatif.

□

Lemme B.6 (CHORD_k et SUBSET) Pour un arc $(u, v) \in E$ et deux sommets $x, y \in V$ tels que $x \neq u$ et $x \neq v$, nous avons le diagramme suivant.

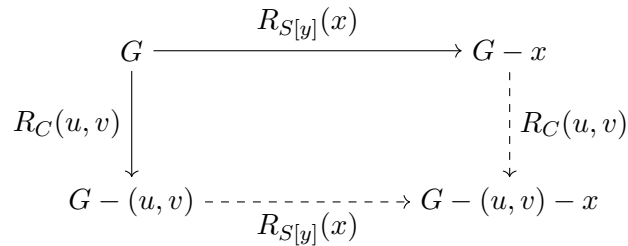


Diagramme B.5 – Le cas CHORD_k et SUBSET

Preuve. Soient $(u, v) \in E$ et $x, y \in V$ tels que $R_C(u, v)$ et $R_{S[y]}(x)$ sont applicables. Comme x n'est

pas incident à l'arc (u, v) , alors l'application de $R_C(u, v)$ n'affectera pas l'applicabilité de $R_{S[y]}(x)$, car les inclusions $N_{G-(u,v)}^-(y) \subseteq N_{G-(u,v)}^-(x) \cup \{x\}$ et $N_{G-(u,v)}^+(y) \subseteq N_{G-(u,v)}^+(x) \cup \{x\}$ restent vérifiées. Donc si nous appliquons $R_C(u, v)$ suivie de $R_{S[y]}(x)$, alors nous obtenons le graphe $G - (u, v) - x$.

Si nous appliquons $R_{S[y]}(x)$ en premier, alors $R_C(u, v)$ reste applicable, car pour tout chemin de v à u dans G va soit passer par x et il n'existera pas dans $G - x$ soit il ne passe pas par x et il existera, avec sa corde arrière identifiable par $CHORD_k$, dans $G - x$. Donc si nous appliquons $R_{S[y]}(x)$ suivie de $R_C(u, v)$, alors nous obtenons le graphe $G - x - (u, v) = G - (u, v) - x$, car x n'est pas incident à l'arc (u, v) .

Par conséquent, pour tout graphe G , il existe un graphe G' et un ensemble de réductions tels que le diagramme B.5 est commutatif. $\square$

À présent nous sommes prêt à démontrer le théorème 3.9. Nous rappelons son énoncé. Nous avons la relation binaire $\mathcal{R}_1$ suivante sur l'ensemble $\mathcal{G}$ de tous les graphes orientés finis,

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_L \cup \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}_O \cup \mathcal{R}_S \cup \mathcal{R}_C$$

Théorème B.7 $(\mathcal{G}, \mathcal{R}_1)$ a la propriété de finitude de Church-Rosser.

Preuve. D'après le théorème 1.7 il nous suffirait de démontrer que $(\mathcal{G}, \mathcal{R}_1)$ est fini et que pour tout $G, G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ si $(G, G_1) \in \mathcal{R}_1$ et $(G, G_2) \in \mathcal{R}_1$, alors il existe $G', G'' \in \mathcal{G}$ tels que $(G_1, G') \in \mathcal{R}_1^T$ et $(G_2, G'') \in \mathcal{R}_1^T$ avec $G' = G''$ ou $G' \cong G''$.

Pour rappel, $(\mathcal{G}, \mathcal{R}_1)$ est fini si pour tout $G, G' \in \mathcal{G}$, il existe une constante k telle que si $(G, G') \in \mathcal{R}_1^i$ alors $i \leq k$. Comme les réductions réduisent le nombre de sommets ou d'arcs, il suffit de prendre $k = |G|(|G|+1)$, avec $G = (V, E)$ et $|G| = |V|$, alors nous sommes certains que $(G, G') \in \mathcal{R}_1^i$ impliquera que $i \leq k$. Ainsi $(\mathcal{G}, \mathcal{R}_1)$ est fini.

À présent, soient $G = (V, E), G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2) \in \mathcal{G}$ tels que $(G, G_1) \in \mathcal{R}_1$ et $(G, G_2) \in \mathcal{R}_1$. Nous cherchons deux graphes $G', G'' \in \mathcal{G}$ avec les deux propriétés suivantes, pour $i, j \in \mathbb{N}$,

$$(G_1, G') \in \mathcal{R}_1^i \text{ et } (G_2, G'') \in \mathcal{R}_1^j \quad (P1)$$

$$G' \cong G'' \quad (P2)$$

Comme la relation $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \cup \{\mathcal{R}_C\}$ et que $\mathcal{R}$ est confluente, alors il suffirait de montrer que les propriétés P1 et P2 sont satisfaites pour les paires $(G, G_1) \in \mathcal{R}_C$ et tous les cas possibles pour (G, G_2) . Supposons donc qu'il existe un arc $(u, v) \in E$ tel que, $R_C(u, v)$ appliquée à G le réduit en $G_1 = G - (u, v)$. Alors nous avons les cas suivants pour $(G, G_2) \in \mathcal{R}_1$.

— $(G, G_2) \in \mathcal{R}_L$. Supposons qu'il existe un sommet $x \in V$ tel que $R_L(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G - x$. Nous distinguons alors les cas suivants.

(a) Si $x \neq u$ et $x \neq v$, alors nous pouvons appliquer $R_L(x)$ sur $G_1 = G - (u, v)$ qui le réduira au graphe $(G - (u, v)) - x$, ainsi $(G_1, G_1 - x) \in \mathcal{R}_L \subseteq \mathcal{R}_1^1$. Nous pouvons également appliquer $R_C(u, v)$ sur $G_2 = G - x$ qui le réduira au graphe $(G - x) - (u, v)$, ainsi $(G_2, G_2 - (u, v)) \in \mathcal{R}_C \subseteq \mathcal{R}_1^1$.

Comme $(G - (u, v)) - x = (G - x) - (u, v)$, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = (G - (u, v)) - x = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

(b) Si $x = u$ ou $x = v$ alors nous pouvons appliquer $R_L(x)$ sur G_1 qui le réduira au graphe $(G - (u, v)) - x$, ainsi $(G_1, G_1 - x) \in \mathcal{R}_L \subseteq \mathcal{R}_1^1$. Comme $x = u$ ou $x = v$, alors l'arc (u, v) est incident au sommet x , donc $(G - (u, v)) - x = G - x$. Nous n'avons donc pas besoin d'appliquer une réduction sur $G_2 = G - x$ et il suffit de prendre $i = 1, j = 0$ et $G' = G_2 = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

Voir le lemme B.2 pour les preuves d'existence des réductions et des graphes de ces cas.

— $(G, G_2) \in \mathcal{R}_C$. Supposons donc qu'il existe un arc $(x, y) \in E$ tel que $R_C(x, y)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G - (x, y)$. Comme la Proposition 3.7 nous garantit que le retrait d'un arc par CHORD_k dans G , n'affectera pas l'applicabilité de CHORD_k sur un autre arc, alors $R_C(x, y)$ reste applicable dans G_1 et $R_C(u, v)$ reste applicable dans G_2 . Donc $(G_1, G_1 - (x, y)), (G_2, G_2 - (u, v)) \in \mathcal{R}_C \subseteq \mathcal{R}_1^1$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = G'' = G - (u, v) - (x, y)$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites. Voir le lemme B.3 pour la preuve d'existence des réductions et des graphes de ce cas.

— $(G, G_2) \in \mathcal{R}_I$. Supposons donc qu'il existe un sommet $x \in V$ tel que, $R_I(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G \circ x$. Nous distinguons alors les cas suivants. Pour $S_k(x) = \{s \in N_G^+(x) \mid (u, s) \notin E\}$ et

$$P_k(x) = \{p \in N_G^-(x) \mid (p, v) \notin E\}.$$

(a) Si $x \neq u$ et $x \neq v$, alors nous pouvons appliquer $R_I(x)$ sur $G_1 = G - (u, v)$ qui le réduira au graphe $(G - (u, v)) \circ x$, ainsi $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathcal{R}_1^1$. Nous pouvons également appliquer $R_C(u, v)$ sur G_2 qui le réduira au graphe $(G \circ x) - (u, v)$, ainsi $(G_2, G_2 - (u, v)) \in \mathcal{R}_C \subseteq \mathcal{R}_1^1$.

Comme $(G - (u, v)) \circ x = (G \circ x) - (u, v)$, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = (G \circ x) - (u, v) = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

(b) Si $x = v$, alors nous pouvons appliquer $R_I(x)$ sur $G_1 = G - (u, x)$ qui le réduira au graphe $(G - (u, x)) \circ x$, ainsi $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathcal{R}_1^1$. Par contre, dans $G_2 = G \circ x$ l'arc $(u, v) = (u, x)$ n'existe plus et est remplacé par les arcs (u, s_x) pour $s_x \in N_G^+(x)$. Nous pouvons appliquer successivement les réductions $(R_C(u, s_x))_{s_x \in S_k(x)}$ sur G_2 pour le réduire au graphe $(G \circ x) - \bigcup_{s_x \in S_k(x)} (u, s_x) = (G - (u, x)) \circ x$. Donc $(G_2, G_2 - \bigcup_{s_x \in S_k(x)} (u, s_x)) \in \mathcal{R}_C^{|S_k(x)|} \subseteq \mathcal{R}_1^{|S_k(x)|}$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = 1$, $j = |S_k(x)|$ et $G' = (G - (u, x)) \circ x = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

(c) Si $x = u$, alors nous pouvons appliquer $R_I(x)$ sur $G_1 = G - (x, v)$ qui le réduira au graphe $(G - (x, v)) \circ x$, ainsi $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathcal{R}_1^1$. Par contre, dans $G_2 = G \circ x$ l'arc $(u, v) = (x, v)$ n'existe plus et est remplacé par les arcs (p_x, v) pour $p_x \in N_G^-(x)$. Nous pouvons appliquer successivement les réductions $(R_C(p_x, v))_{p_x \in P_k(x)}$ sur G_2 pour le réduire au graphe $(G \circ x) - \bigcup_{p_x \in P_k(x)} (p_x, v) = (G - (x, v)) \circ x$. Donc $(G_2, G_2 - \bigcup_{p_x \in P_k(x)} (p_x, v)) \in \mathcal{R}_C^{|P_k(x)|} \subseteq \mathcal{R}_1^{|P_k(x)|}$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = 1$, $j = |P_k(x)|$ et $G' = (G - (x, v)) \circ x = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

Voir le lemme B.4 pour les preuves d'existence des réductions et des graphes de ces cas.

— $(G, G_2) \in \mathcal{R}_O$. Supposons donc qu'il existe un sommet $x \in V$ tel que, $R_O(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G \circ x$. Nous distinguons alors les cas suivants. Pour $S_k(x) = \{s \in N_G^+(x) \mid (u, s) \notin E\}$ et $P_k(x) = \{p \in N_G^-(x) \mid (p, v) \notin E\}$.

(a) Si $x \neq u$ et $x \neq v$, alors nous pouvons appliquer $R_O(x)$ sur $G_1 = G - (u, v)$ qui le réduira au graphe $(G - (u, v)) \circ x$, ainsi $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_O \subseteq \mathcal{R}_1^1$. Nous pouvons également appliquer $R_C(u, v)$ sur G_2 qui le réduira au graphe $(G \circ x) - (u, v)$, ainsi $(G_2, G_2 - (u, v)) \in \mathcal{R}_C \subseteq \mathcal{R}_1^1$.

Comme $(G - (u, v)) \circ x = (G \circ x) - (u, v)$, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = (G \circ x) - (u, v) =$

G'' pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

- (b) Si $x = v$, alors nous pouvons appliquer $R_O(x)$ sur $G_1 = G - (u, x)$ qui le réduira au graphe $(G - (u, x)) \circ x$, ainsi $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_O \subseteq \mathcal{R}_1^1$. Par contre, dans $G_2 = G \circ x$ l'arc $(u, v) = (u, x)$ n'existe plus et est remplacé par les arcs (u, s_x) pour $s_x \in N_G^+(x)$. Nous pouvons appliquer successivement les réductions $(R_C(u, s_x))_{s_x \in S_k(x)}$ sur G_2 pour le réduire au graphe $(G \circ x) - \bigcup_{s_x \in S_k(x)} (u, s_x) = (G - (u, x)) \circ x$. Donc $(G_2, G_2 - \bigcup_{s_x \in S_k(x)} (u, s_x)) \in \mathcal{R}_C^{|S_k(x)|} \subseteq \mathcal{R}_1^{|S_k(x)|}$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = 1$, $j = |S_k(x)|$ et $G' = (G - (u, x)) \circ x = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

- (c) Si $x = u$, alors nous pouvons appliquer $R_O(x)$ sur $G_1 = G - (x, v)$ qui le réduira au graphe $(G - (x, v)) \circ x$, ainsi $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_O \subseteq \mathcal{R}_1^1$. Par contre, dans $G_2 = G \circ x$ l'arc $(u, v) = (x, v)$ n'existe plus et est remplacé par les arcs (p_x, v) pour $p_x \in N_G^-(x)$. Nous pouvons appliquer successivement les réductions $(R_C(p_x, v))_{p_x \in P_k(x)}$ sur G_2 pour le réduire au graphe $(G \circ x) - \bigcup_{p_x \in P_k(x)} (p_x, v) = (G - (x, v)) \circ x$. Donc $(G_2, G_2 - \bigcup_{p_x \in P_k(x)} (p_x, v)) \in \mathcal{R}_C^{|P_k(x)|} \subseteq \mathcal{R}_1^{|P_k(x)|}$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = 1$, $j = |P_k(x)|$ et $G' = (G - (x, v)) \circ x = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

Voir le lemme B.5 pour les preuves d'existence des réductions et des graphes de ces cas.

- $(G, G_2) \in \mathcal{R}_S$. Supposons donc qu'il existe deux sommets $x, y \in V$ tels que $R_{S[y]}(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G - x$. L'applicabilité de $CHORD_k$ dans G , n'affectera pas l'applicabilité de $SUBSET$ sur x et vice-versa. Donc $(G_1, G_1 - x) \in \mathcal{R}_S \subseteq \mathcal{R}_1^1$ et $(G_2, G_2 - (u, v)) \in \mathcal{R}_C \subseteq \mathcal{R}_1^1$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = G'' = G - (u, v) - x$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites. Voir le lemme B.6 pour la preuve d'existence des réductions et des graphes de ce cas.

Nous pouvons donc conclure que $(\mathcal{G}, \mathcal{R}_1)$ a bien la propriété de Church-Rosser. $\square$

ANNEXE C

CONFLUENCE DE LA RÉDUCTION DAV^-

Dans cette annexe nous démontrons le théorème 3.16, c'est-à-dire, la confluence de l'ensemble des réductions $\{\text{LOOP}, \text{INDICLIQUE}, \text{OUTDICLIQUE}, \text{SUBSET}, \text{DAV}^-\}$.

Nous énonçons d'abord deux résultats qui formalisent des arguments que nous utilisons à plusieurs reprises dans les démonstrations des lemmes plus bas dans cette annexe.

Lemme C.1 *Étant donné un graphe orienté $G = (V, E)$ et un sommet $x \in V$ tels que $(x, x) \notin E$. Soient $p_x \in N_G^-(x)$, $s_x \in N_G^+(x)$ et $(u, v) \in E$. Nous avons les deux cas suivants.*

- (a) *Si (p_x, x) est identifié par DARC_G^- , alors pour tout $s \in N_G^+(x)$, (p_x, s) sera identifié par $\text{DARC}_{G \circ x}^-$.*
- (b) *Si (x, s_x) est identifié par DARC_G^- , alors pour tout $p \in N_G^-(x)$ tel que $(p, s_x) \notin E$, (p, s_x) sera identifié par $\text{DARC}_{G \circ x}^-$.*
- (c) *Si (u, v) est identifié par DARC_G^- et $u \neq x$, $v \neq x$, alors (u, v) est identifié par $\text{DARC}_{G \circ x}^-$.*

Preuve.

- (a) Soient $s \in N_G^+(x)$ et $c = (u_1 = s, u_2, \dots, u_\ell = p_x)$ un chemin de s vers p_x dans $G \circ x$. Nous construisons un nouveau chemin de x vers p_x dans G en ajoutant l'arc (x, s) ce qui donne $c_x = (u_0 = x, u_1 = s, u_2, \dots, u_\ell = p_x)$. Comme (p_x, x) est identifié par DARC_G^- , le chemin c_x a une corde arrière et nous avons les cas suivants.

- (i) Soit c'est une boucle et comme $(x, x) \notin E$, alors c a également cette boucle.
- (ii) Soit c'est un 2-circuit qui se retrouvera également dans c , à moins que ça soit un 2-circuit formé par x et s , auquel cas, s aura une boucle dans $G \circ x$ et donc c aura une corde arrière.
- (iii) Soit c'est un arc de la forme (p', x) qui deviendra un arc (p', s) dans $G \circ x$, ce qui en fait une corde arrière de c .

Dans tous les cas c a une corde arrière d'un format identifiable par DARC^- . Donc, tout chemin de s vers p_x a une corde arrière, par conséquent, l'arc (p_x, s) sera identifié par $\text{DARC}_{G \circ x}^-$.

- (b) Soient $p \in N_G^-(x)$ tel que $(p, s_x) \notin E$ et $c = (u_1 = s_x, u_2, \dots, u_\ell = p)$ un chemin de s_x vers p dans $G \circ x$. Nous construisons un nouveau chemin de s_x vers x dans G en ajoutant l'arc (p, x) ce qui donne

$c_x = (u_1 = s_x, u_2, \dots, u_\ell = p, u_{\ell+1} = x)$. Comme (x, s_x) est identifié par DARC_G^- , le chemin c_x a une corde arrière et nous avons les cas suivants.

- (i) Soit c'est une boucle et comme $(x, x) \notin E$, alors c a également cette boucle.
- (ii) Soit c'est un 2-circuit qui se retrouvera également dans c , à moins que ça soit un 2-circuit formé par x et p , auquel cas, p aura une boucle dans $G \circ x$ et donc c aura une corde arrière.
- (iii) Soit c'est un arc de la forme (p', s_x) qui demeurera un arc dans $G \circ x$ et comme $(p, s_x) \notin E$, alors $p \neq p'$ et donc (p', s_x) sera une corde arrière de c .

Dans tous les cas c a une corde arrière d'un format identifiable par DARC^- . Donc, tout chemin de s_x vers p a une corde arrière, par conséquent, l'arc (p, s_x) sera identifié par $\text{DARC}_{G \circ x}^-$.

- (c) Supposons que (u, v) est identifié par DARC_G^- , avec $u \neq x, v \neq x$ et soit $c = (u_1 = v, u_2, \dots, u_\ell = u)$ un chemin de v vers u dans $G \circ x$. Nous avons les cas suivants.

- (i) Soit le chemin c existe dans G et comme (u, v) est identifié par DARC_G^- , alors c a une corde arrière.

- (1) Soit c'est une boucle ou un 2-circuit et comme c est un chemin dans $G \circ x$ alors $x \notin c$, ainsi la boucle ou le 2-circuit existera également dans $G \circ x$.
- (2) Soit c'est un arc (p, v) . Comme $v \neq x$ et p doit être un sommet du chemin c qui ne contient pas x , cet arc existera dans $G \circ x$ et il sera également une corde arrière.

Dans tous les cas le chemin c a une corde arrière d'un format identifiable par DARC^- dans $G \circ x$.

- (ii) Soit le chemin c n'existe pas dans G , ce qui veut dire que c passe par un ou plusieurs arcs de la forme (p_x, s_x) avec $p_x \in N_G^-(x)$ et $s_x \in N_G^+(x)$ qui n'existent pas dans G . Sans perte de généralité, supposons qu'il passe par un seul arc de cette forme. Soit le chemin $c_x = (u_1 = v, u_2, \dots, p_x, x, s_x, \dots, u_\ell = u)$ de v vers u dans G . Comme (u, v) est identifié par DARC_G^- , alors c_x a une corde arrière.

- (1) Soit c'est une boucle et comme $(x, x) \notin E$, cette boucle existera dans $G \circ x$.
- (2) Soit c'est un 2-circuit qui est formé par x et l'un de ses voisins p_x ou s_x , ce qui donnera une boucle sur p_x ou s_x dans $G \circ x$. Boucle qui sera dans c car $p_x, s_x \in c$. Soit le 2-circuit ne contient pas x et il existera donc dans $G \circ x$ et ses sommets appartiendront à c .
- (3) Soit c'est un arc (p, v) . Dans ce cas, soit $p = x$ et donc (p_x, v) sera également une corde arrière de c dans $G \circ x$. Soit $p \neq x$ et donc l'arc (p, v) existera également dans $G \circ x$ et constituera une corde arrière pour c .

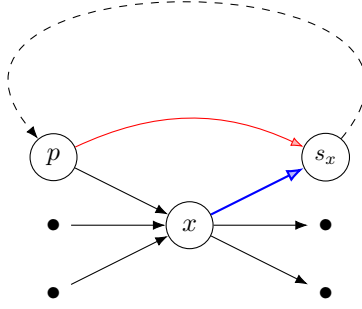


Figure C.1 – Illustration du cas (b) du lemme C.1. Ci-haut, un sous-graphe d'un graphe $G = (V, E)$. Nous supposons qu'il existe un unique chemin en pointillés de s_x vers x et que l'arc (p, s_x) est la unique corde arrière identifiable par DARC^- . Ainsi, l'arc (x, s_x) sera retiré par $\text{DAV}_G^-(s_x)$.

Dans tous les cas le chemin c a une corde arrière d'un format identifiable par DARC^- dans $G \circ x$.

À noter que si plusieurs arcs de la forme (p_x, s_x) avec $p_x \in N_G^-(x)$ et $s_x \in N_G^+(x)$ existent dans c , il y a un premier sommet p_x et un dernier s_x par lesquels c passe, nous pouvons donc suivre le même raisonnement et construire un chemin dans G avec ces deux sommets et x et conclure à l'existence d'une corde arrière.

Par conséquent, (u, v) sera identifié par $\text{DARC}_{G \circ x}^-$.

□

Pour un graphe $G = (V, E)$ et deux sommets $x \neq u \in V$ tels que $(x, x) \notin E$, le lemme C.1 nous indique que les arcs qui sont retirés par $\text{DAV}_G^-(u)$ seront également retirés par $\text{DAV}_{G \circ x}^-(u)$ ou c'est les arcs qui vont les remplacer après le contournement du sommet x qui le seront.

Reste le cas (b) du lemme C.1 où nous avons un arc $(x, u) = (x, s_x)$ identifié par DARC_G^- , avec un arc $(p, s_x) \in E$. Un tel arc (x, s_x) sera donc retiré par $\text{DAV}_G^-(u = s_x)$, mais il est possible qu'il ne soit pas identifié par $\text{DAV}_{G \circ x}^-(s_x)$, car justement il est possible que l'arc (p, s_x) soit la unique corde arrière d'un chemin c dans G de $u = s_x$ vers x qui passe par p . En effet, nous pouvons construire un nouveau chemin, dans $G \circ x$, à partir de c de $u = s_x$ vers p en retirant simplement l'arc (p, x) du chemin c . Ainsi ce nouveau chemin n'aura pas de corde arrière identifiable par DARC^- . Voir la figure C.1 pour une illustration de ce cas. Sans restreindre la généralité, supposons que (p, s_x) est l'unique arc de cette forme, c'est-à-dire, qu'il n'existe pas d'autres sommets $p_x \in N_G^-(x)$ tel que $(p_x, s_x) \in E$.

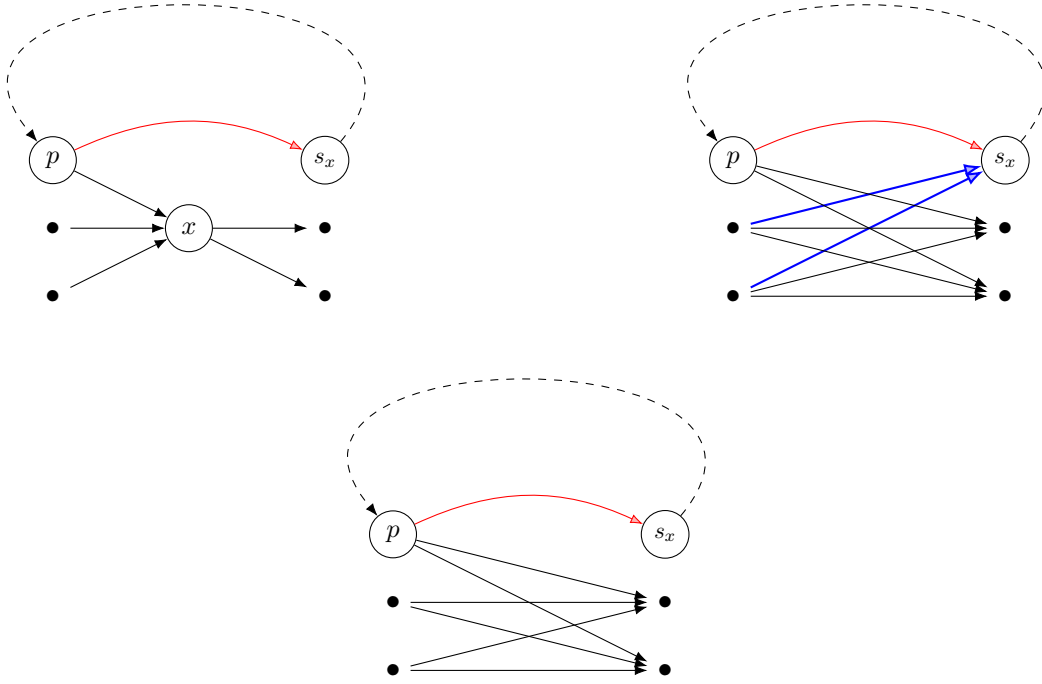


Figure C.2 – Illustration du lemme C.1 après application des réductions. À gauche l'application de $\text{DAV}_G^-(s_x)$ et à droite l'application du contournement du sommet x . En bleu, les arcs identifiables par DARC^- d'après le lemme C.1-(b). Ainsi, si nous appliquons $\text{DAV}_{G \circ x}^-(s_x)$ à droite, ça va *au moins* retirer les arcs bleus et nous obtenons le graphe en bas. De même, si nous appliquons le contournement de x à gauche, nous obtenons le même graphe en bas.

Ainsi, si nous appliquons $\text{DAV}_G^-(u)$ en premier, l'arc (x, s_x) sera retiré et si nous appliquons le contournement du sommet x , d'après le lemme C.1-(b) tous les arcs (p_x, s_x) seront identifiés par DARC^- sauf (p, s_x) (qui existait déjà avant le contournement de x). Donc, après l'application du contournement du sommet x dans $G - \text{DAV}_G^-(s_x)$ et l'application de $\text{DAV}_{G \circ x}^-(s_x)$, en ce qui concerne les arcs entre les sommets dans $N_G^-(x)$ et les sommets dans $N_G^+(x)$, nous aboutissons à la même chose.

Voir la figure C.2 pour une illustration des deux cas.

$\text{DAV}_{G \circ x}^-(u = s_x)$ peut identifier davantage d'arcs, qui seront également identifiés par $\text{DAV}_{(G - \text{DAV}_G^-(s_x)) \circ x}^-(s_x)$ car, localement au voisinage de s_x , les arcs identifiés par DARC^- dans $G \circ x$ sont soit des arcs qui seront également identifiés dans $(G - \text{DAV}_G^-(s_x)) \circ x$, soit c'est les arcs qui ont remplacé des arcs dans $\text{DAV}_G^-(s_x)$ et retirés par le contournement de x . Et inversement, les arcs identifiés par DARC^- dans G ou dans $(G - \text{DAV}_G^-(s_x)) \circ x$ seront tous identifiés dans $G \circ x$.

Par conséquent, nous pouvons énoncer le corollaire suivant.

Corollaire C.2 Soient un graphe orienté $G = (V, E)$ et deux sommets $u \neq x \in V$ tels que $(x, x) \notin E$. Alors nous avons,

$$(G \circ x) - \text{DAV}_{G \circ x}^-(u) = ((G - \text{DAV}_G^-(u)) \circ x) - \text{DAV}_{(G - \text{DAV}_G^-(u)) \circ x}^-(u)$$

Preuve. Dans ce qui suit, nous notons $(G \circ x) - \text{DAV}_{G \circ x}^-(u) = G_1 = (V_1, E_1)$ et $((G - \text{DAV}_G^-(u)) \circ x) - \text{DAV}_{(G - \text{DAV}_G^-(u)) \circ x}^-(u) = G_2 = (V_2, E_2)$.

D'abord, comme le contournement du sommet x se fait qu'une seule fois dans les deux graphes G_1 et G_2 , alors $V_1 = V_2 = V \setminus \{x\}$.

Ensuite, il faut noter qu'en dehors des sommets x et u et leurs voisinages les deux graphes G_1 et G_2 sont identiques. En effet, DAV^- n'affecte que les arcs entrants de u et le contournement du sommet x n'affecte que le voisinage de ce dernier.

Enfin, d'après le lemme C.1 et la discussion précédente, les arcs qui sont retirés par $\text{DAV}_G^-(u)$ seront directement retirés par $\text{DAV}_{G \circ x}^-(u)$ ou les arcs qui vont les remplacer après le contournement du sommet x . Et comme au voisinage de u , $(G \circ x) - \text{DAV}_{G \circ x}^-(u)$ et $((G - \text{DAV}_G^-(u)) \circ x) - \text{DAV}_{(G - \text{DAV}_G^-(u)) \circ x}^-(u)$ sont identiques, nous obtenons l'égalité des ensembles E_1 et E_2 . Autrement dit,

$$(G \circ x) - \text{DAV}_{G \circ x}^-(u) = ((G - \text{DAV}_G^-(u)) \circ x) - \text{DAV}_{(G - \text{DAV}_G^-(u)) \circ x}^-(u)$$

Voir la figure C.3 pour une illustration de cette égalité dans le cas $u \in N_G^+(x)$. $\square$

Nous utilisons le même formalisme que l'Annexe A dans cette annexe, notamment les diagrammes commutatifs et les conventions de lectures énoncés. Nous énonçons des lemmes avec des digrammes commutatifs pour chacun paire de réductions applicables sur un même graphe. Dans ce qui suit, nous considérons un graphe orienté $G = (V, E)$.

Lemme C.3 (DAV⁻ et LOOP) Pour deux sommets $u \neq x \in V$ nous avons le diagramme suivant.

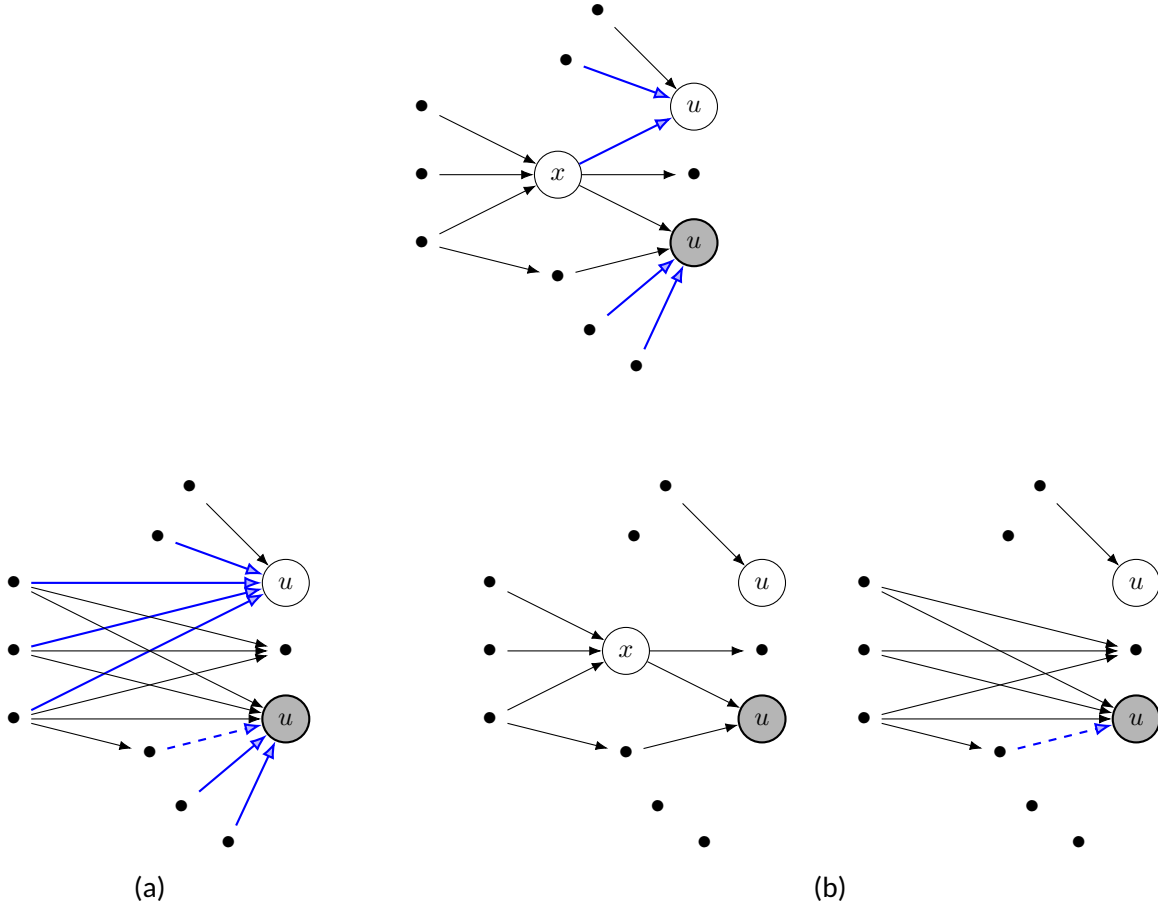


Figure C.3 – Illustration de l'égalité du corollaire C.2 dans le cas $u \in N_G^+(x)$. En haut, nous considérons un graphe $G = (V, E)$ dont nous représentons le voisinage des sommets u et x . Noter que nous représentons le sommet u dans deux cas pour réduire le nombre d'illustrations. Un premier cas où $(x, u) \in DAV_G^-(u)$ et un deuxième cas où $(x, u) \notin DAV_G^-(u)$ (sommets en gris). Les arcs bleus incidents au sommet u sont les arcs de $DAV_G^-(u)$. (a) Le voisinage des sommets x et u dans le graphe $G \circ x$. Tous les arcs en bleus seront retirés par $DAV_{G \circ x}^-(u)$ (b) Le voisinage de x et u dans le graphe $G - DAV_G^-(u)$ suivi du même voisinage dans $(G - DAV_G^-(u)) \circ x$.

À noter que pour (a) et (b) le cas $(x, u) \notin DAV_G^-(u)$ (sommets en gris), il est possible qu'un nouvel arc soit identifié par $DARC_{G \circ x}^-$ après le contournement de x (en pointillés bleus). Donc pour le sommet u en gris, l'arc en pointillés bleus, s'il est bien identifié par $DARC_{G \circ x}^-$, il sera retiré dans (a). Pour (b), par contre, ça nécessitera de réappliquer $DAV_{(G - DAV_G^-(u)) \circ x}^-(u)$. Dans les deux situations, si l'arc en pointillés bleus n'est pas identifié par $DARC_{G \circ x}^-$, alors $DAV_{(G - DAV_G^-(u)) \circ x}^-(u)$ n'identifiera aucun nouvel arc dans $(G - DAV_G^-(u)) \circ x$. Ainsi nous aurons l'égalité énoncée dans le corollaire C.2.

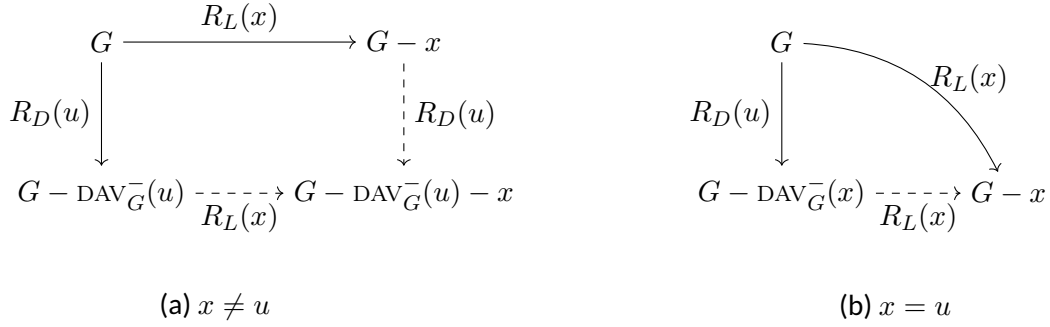


Diagramme C.1 – Le cas DAV^- et LOOP

Preuve. Soient $x, u \in V$ tels que $R_D(u)$ et $R_L(x)$ sont applicables. Si $x \neq u$, alors l'applicabilité d'une réduction n'affecte pas l'applicabilité de l'autre. En effet, la boucle (x, x) ne sera jamais identifié par DARC^- car c'est un circuit minimal, donc $R_L(x)$ reste applicable dans $G - \text{DAV}_G^-(u)$. De même, tout arc $(p, u) \in \text{DAV}_G^-(u)$ dont l'identification dépend d'une corde arrière incidente à x (boucle (x, x) , 2-circuit passant par x ou l'arc (x, u)), sera toujours identifié par DARC_{G-x}^- , car tous les chemins de u vers p , passant par x n'existeront plus dans $G - x$. À noter qu'à cause de la boucle (x, x) , nous n'aurons pas de nouveaux arcs dans $\text{DAV}_{G-x}^-(u)$, autrement dit, $\text{DAV}_G^-(u) = \text{DAV}_{G-x}^-(u)$. Par conséquent, pour tout graphe G , il existe un graphe G' et un ensemble de réductions telsque le diagramme C.1-(a) est commutatif.

Si $x = u$, alors $R_L(x)$ reste applicable dans $G - \text{DAV}_G^-(x)$ car la boucle (x, x) ne sera pas retirée par DARC_G^- . Nous obtenons donc le graphe $(G - \text{DAV}_G^-(x)) - x = G - x$. Ainsi, pour tout graphe G , il existe un graphe G' et un ensemble de réductions telsque le diagramme C.1-(b) est commutatif. $\square$

Lemme C.4 (DAV^- et DAV^-) Pour deux sommets $u \neq x \in V$ nous avons le diagramme suivant.

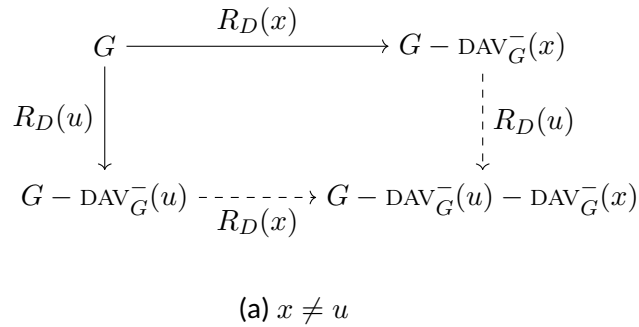


Diagramme C.2 – Le cas DAV^- et DAV^-

Preuve. Soient $x, u \in V$ tels que $R_D(u)$ et $R_D(x)$ sont applicables. Si $x \neq u$, alors l'applicabilité d'une réduction n'affecte pas l'applicabilité de l'autre. En effet, la proposition 3.15 nous garantit que $DAV_G^-(u) = DAV_{G-DAV_G^-(x)}^-(u)$ et inversement $DAV_G^-(x) = DAV_{G-DAV_G^-(u)}^-(x)$. Par conséquent, pour tout graphe G , il existe un graphe G' et un ensemble de réductions tels que le diagramme C.2 est commutatif. À noter que le cas $x = u$ est trivial. $\square$

Lemme C.5 (DAV⁻ et INDICLIQUE) Pour deux sommets $u, x \in V$ nous avons les diagrammes suivants.

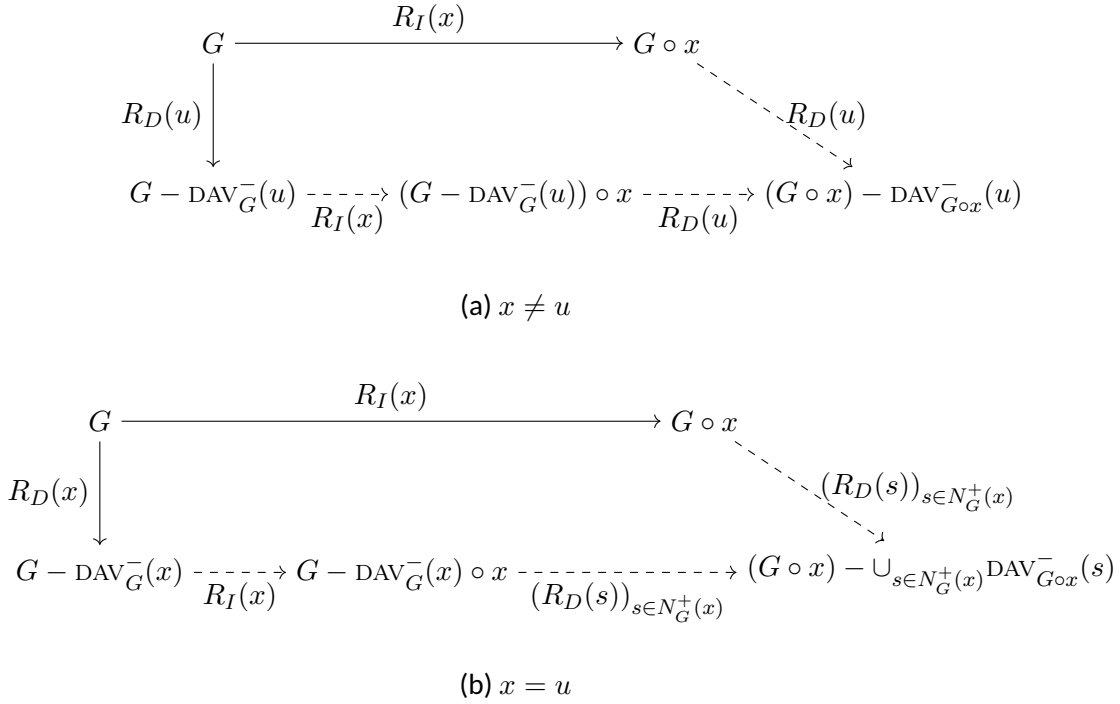


Diagramme C.3 – Le cas DAV⁻ et INDICLIQUE

Preuve. Soient $x, u \in V$ tels que $R_D(u)$ et $R_I(x)$ sont applicables. Comme les arcs d'une diclique ne seront jamais identifiés par $DARC^-$ et si $N_G^-(x)$ est une diclique, alors $N_{G-(p,x)}^-(x)$ demeure une diclique, pour tout $p \in N_G^-(x)$, alors $R_I(x)$ sera toujours applicable peu importe le nombre d'arcs qui seront retirés par une application de $R_D(u)$.

Il est également à noter que dans tous les cas, d'après le lemme C.1-(c) nous avons $DAV_G^-(u) \subseteq DAV_{G \circ x}^-(u)$ et la remarque 3.8 nous indique que de nouveaux arcs identifiables par $DARC^-$ peuvent être créés après l'application de $R_I(x)$, il est donc nécessaire d'appliquer une deuxième fois $R_D(u)$ (voir également la dis-

cussion de la figure C.3). La proposition 3.15 nous garantit qu'au plus une deuxième application de $R_D(u)$ suffira à couvrir tous les arcs identifiables par $DARC^-$ incidents à u .

(a) $x \neq u$ avec $(x, u) \in DAV_G^-(u)$. D'une part, si nous appliquons $R_I(x)$ sur G suivi de $R_D(u)$ sur $G \circ x$, nous obtenons le graphe $(G \circ x) - DAV_{G \circ x}^-(u)$. À noter que d'après le lemme C.1-(b), pour tout $p \in N_G^-(x)$ tel que $(p, u) \notin E$, nous aurons $(p, u) \in DAV_{G \circ x}^-(u)$. Ainsi, après l'application de $R_I(x)$, chaque arc (x, u) sera remplacé par les arcs (p, u) qui seront retirés par $DAV_{G \circ x}^-(u)$ lors de l'application de $R_D(u)$ dans $G \circ x$. Si $(p, u) \in E$, alors nous n'avons pas besoin de le retirer. Donc $DAV_{G \circ x}^-(u)$ va retirer tous les arcs que $DAV_G^-(u)$, sauf (x, u) car c'est ses remplaçants qui seront retirés, en plus des potentiels nouveaux arcs qui peuvent être identifiables par $DARC^-$ dans $G \circ x$ comme indiqué plus haut.

D'autre part, si nous appliquons $R_D(u)$ en premier, comme dit plus haut $R_I(x)$ reste applicable dans $G - DAV_G^-(u)$ et comme le contournement du sommet x peut créer de nouveaux arcs identifiables par $DARC^-$, une deuxième application de $R_D(u)$ est nécessaire. Nous obtenons donc le graphe $((G - DAV_G^-(u)) \circ x) - DAV_{(G - DAV_G^-(u)) \circ x}^-(u)$ et d'après le lemme C.1 et son Corollaire C.2, nous avons

$$(G \circ x) - DAV_{G \circ x}^-(u) = ((G - DAV_G^-(u)) \circ x) - DAV_{(G - DAV_G^-(u)) \circ x}^-(u)$$

Si $(x, u) \notin DAV_G^-(u)$, alors l'application des deux réductions ne s'affectent pas l'une l'autre.

Ainsi, le diagramme C.3 (a) est commutatif.

(b) $x = u$. D'une part, si nous appliquons $R_I(x)$ sur G , d'après le lemme C.1-(a) pour tout $p \in N_G^-(x)$ tel que $(p, x) \in DAV_G^-(x)$, nous aurons $(p, s) \in DAV_{G \circ x}^-(s)$ pour tout $s \in N_G^+(x)$. Ainsi, après l'application de $R_I(x)$, nous aurons besoin d'appliquer $R_D(s)$ dans $G \circ x$ pour tout $s \in N_G^+(x)$ et pour chaque arc $(p, x) \in DAV_G^-(x)$, tout arc (p, s) sera retiré par $DAV_{G \circ x}^-(s)$. Nous obtenons le graphe $(G \circ x) - \bigcup_{s \in N_G^+(x)} DAV_{G \circ x}^-(s)$.

D'autre part, si nous appliquons $R_D(x)$ en premier, comme dit plus haut $R_I(x)$ reste applicable dans $G - DAV_G^-(x)$ et comme le contournement du sommet x peut créer de nouveaux arc identifiables par $DARC^-$, une deuxième application de $R_D(s)$ pour tout sommet $s \in N_G^+(x)$ est nécessaire. Nous obtenons donc le graphe $((G - DAV_G^-(x)) \circ x) - \bigcup_{s \in N_G^+(x)} DAV_{(G - DAV_G^-(x)) \circ x}^-(s)$.

D'après le lemme C.1, pour tout $s \in N_G^+(x)$, nous savons que tous les arcs $(p, x) \in DAV_G^-(x)$ seront

identifiés et retirés dans $G \circ x$ par chaque application $R_D(s)$, en plus des potentiels nouveaux arcs créés par le contournement de x , sans oublier tous les arcs $(p_s, s) \in \text{DAV}_G^-(s)$. De même, si nous retirons d'abord les arcs $(p, x) \in \text{DAV}_G^-(x)$ avant de contourner le sommet x , pour chaque sommet $s \in N_G^+(x)$, les potentiels nouveaux arcs créés par le contournement de x et tous les arcs $(p_s, s) \in \text{DAV}_G^-(s)$ seront identifiés et retirés par $R_D(s)$ dans $(G - \text{DAV}_G^-(x)) \circ x$. En effet, si de potentiels arcs $(p, s) \in \text{DAV}_G^-(s)$ existent, qui ne seront donc pas retirés par $\text{DAV}_G^-(x)$, toujours d'après le lemme C.1-(c), ils seront identifiés dans $(G - \text{DAV}_G^-(x)) \circ x$ par $R_D(s)$ pour chaque $s \in N_G^+(x)$. Ainsi, nous avons,

$$(G \circ x) - \bigcup_{s \in N_G^+(u)} \text{DAV}_{G \circ x}^-(s) = ((G - \text{DAV}_G^-(x)) \circ x) - \bigcup_{s \in N_G^+(x)} \text{DAV}_{(G - \text{DAV}_G^-(x)) \circ x}^-(s)$$

Par conséquent, le diagramme C.3 (b) est commutatif.

□

Lemme C.6 (DAV⁻ et OUTDICLIQUE) Pour deux sommets $u, x \in V$ nous avons les diagrammes suivants.

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{R_O(x)} & G \circ x & & \\ R_D(u) \downarrow & & \searrow R_D(u) & & \\ G - \text{DAV}_G^-(u) & \xrightarrow{R_O(x)} & (G - \text{DAV}_G^-(u)) \circ x & \xrightarrow{R_D(u)} & (G \circ x) - \text{DAV}_{G \circ x}^-(u) \end{array}$$

(a) $x \neq u$

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{R_O(x)} & G \circ x & & \\ R_D(x) \downarrow & & \searrow (R_D(s))_{s \in N_G^+(x)} & & \\ G - \text{DAV}_G^-(x) & \xrightarrow{R_O(x)} & G - \text{DAV}_G^-(x) \circ x & \xrightarrow{(R_D(s))_{s \in N_G^+(x)}} & (G \circ x) - \bigcup_{s \in N_G^+(x)} \text{DAV}_{G \circ x}^-(s) \end{array}$$

(b) $x = u$

Diagramme C.4 – Le cas DAV⁻ et OUTDICLIQUE

Preuve. Noter que cette preuve est quasiment identique à celle du lemme C.5.

Soient $x, u \in V$ tels que $R_D(u)$ et $R_O(x)$ sont applicables. Comme les arcs d'une diclique ne seront jamais identifiés par $DARC^-$ et si $N_G^+(x)$ est une diclique, alors $N_{G-(x,s)}^+(x)$ demeure une diclique, pour tout $s \in N_G^+(x)$, alors $R_O(x)$ sera toujours applicable peu importe le nombre d'arcs qui seront retirés par une application de $R_D(u)$.

Il est également à noter que dans tous les cas, d'après le lemme C.1-(c) nous avons $DAV_G^-(u) \subseteq DAV_{G \circ x}^-(u)$ et la remarque 3.8 nous indique que de nouveaux arcs identifiabiles par $DARC^-$ peuvent être créés après l'application de $R_O(x)$, il est donc nécessaire d'appliquer une deuxième fois $R_D(u)$. La proposition 3.15 nous garantit qu'au plus une deuxième application de $R_D(u)$ suffira à couvrir tous les arcs identifiabiles par $DARC^-$ incidents à u .

(a) $x \neq u$ avec $(x, u) \in DAV_G^-(u)$. D'une part, si nous appliquons $R_O(x)$ sur G suivi de $R_D(u)$ sur $G \circ x$, nous obtenons le graphe $(G \circ x) - DAV_{G \circ x}^-(u)$. À noter que d'après le lemme C.1-(b) pour tout $p \in N_G^-(x)$ tel que $(p, u) \notin E$, nous aurons $(p, u) \in DAV_{G \circ x}^-(u)$. Ainsi après l'application de $R_O(x)$, chaque arc (x, u) sera remplacé par les arcs (p, u) qui seront retirés par $DAV_{G \circ x}^-(u)$ lors de l'application de $R_D(u)$ dans $G \circ x$, si $(p, u) \notin E$. Si $(p, u) \in E$, alors nous n'avons pas besoin de les retirer. Donc $DAV_{G \circ x}^-(u)$ va retirer tous les arcs que $DAV_G^-(u)$, sauf (x, u) car c'est ses remplaçants qui seront retirés, en plus des potentiels nouveaux arcs qui peuvent être identifiabiles par $DARC^-$ dans $G \circ x$ comme indiqué plus haut.

D'autre part, si nous appliquons $R_D(u)$ en premier, comme dit plus haut $R_O(x)$ reste applicable dans $G - DAV_G^-(u)$ et comme le contournement du sommet x peut créer de nouveaux arc identifiabiles par $DARC^-$, une deuxième application de $R_D(u)$ est nécessaire. Nous obtenons donc le graphe $((G - DAV_G^-(u)) \circ x) - DAV_{(G - DAV_G^-(u)) \circ x}^-(u)$ et d'après le lemme C.1 et son Corollaire C.2, nous avons

$$(G \circ x) - DAV_{G \circ x}^-(u) = ((G - DAV_G^-(u)) \circ x) - DAV_{(G - DAV_G^-(u)) \circ x}^-(u)$$

Si $(x, u) \notin DAV_G^-(u)$, alors l'application des deux réductions ne s'affectent pas l'une l'autre.

Ainsi le diagramme C.4 (a) est commutatif.

(b) $x = u$. D'une part, si nous appliquons $R_O(x)$ sur G , d'après le lemme C.1-(a) pour tout $p \in N_G^-(x)$ tel que $(p, x) \in DAV_G^-(x)$, nous aurons $(p, s) \in DAV_{G \circ x}^-(s)$ pour tout $s \in N_G^+(x)$. Ainsi, après

l'application de $R_O(x)$, nous aurons besoin d'appliquer $R_D(s)$ dans $G \circ x$ pour tout $s \in N_G^+(x)$ et pour chaque arc $(p, x) \in \text{DAV}_G^-(x)$, tout arc (p, s) sera retiré par $\text{DAV}_{G \circ x}^-(s)$. Nous obtenons le graphe $(G \circ x) - \bigcup_{s \in N_G^+(x)} \text{DAV}_{G \circ x}^-(s)$.

D'autre part, si nous appliquons $R_D(x)$ en premier, comme dit plus haut $R_O(x)$ reste applicable dans $G - \text{DAV}_G^-(x)$ et comme le contournement du sommet x peut créer de nouveaux arcs identifiables par DARC^- , une deuxième application de $R_D(s)$ pour tout sommet $s \in N_G^+(x)$ est nécessaire. Nous obtenons donc le graphe $((G - \text{DAV}_G^-(x)) \circ x) - \bigcup_{s \in N_G^+(x)} \text{DAV}_{(G - \text{DAV}_G^-(x)) \circ x}^-(s)$.

D'après le lemme C.1, pour tout $s \in N_G^+(x)$, nous savons que tous les arcs $(p, x) \in \text{DAV}_G^-(x)$ seront identifiés et retirés dans $G \circ x$ par chaque application $R_D(s)$, en plus des potentiels nouveaux arcs créés par le contournement de x , sans oublier tous les arcs $(p_s, s) \in \text{DAV}_G^-(s)$. De même, si nous retirons d'abord les arcs $(p, x) \in \text{DAV}_G^-(x)$ avant de contourner le sommet x , pour chaque sommet $s \in N_G^+(x)$, les potentiels nouveaux arcs créés par le contournement de x et tous les arcs $(p_s, s) \in \text{DAV}_G^-(s)$ seront identifiés et retirés par $R_D(s)$ dans $(G - \text{DAV}_G^-(x)) \circ x$. En effet, si de potentiels arcs $(p, s) \in \text{DAV}_G^-(s)$ existent, qui ne seront donc pas retirés par $\text{DAV}_G^-(x)$, toujours d'après le lemme C.1-(c), ils seront identifiés dans $(G - \text{DAV}_G^-(x)) \circ x$ par $R_D(s)$ pour chaque $s \in N_G^+(x)$. Ainsi, nous avons,

$$(G \circ x) - \bigcup_{s \in N_G^+(x)} \text{DAV}_{G \circ x}^-(s) = ((G - \text{DAV}_G^-(x)) \circ x) - \bigcup_{s \in N_G^+(x)} \text{DAV}_{(G - \text{DAV}_G^-(x)) \circ x}^-(s)$$

Par conséquent, le diagramme C.4 (b) est commutatif.

□

Lemme C.7 (DAV⁻ et SUBSET) Pour trois sommets $u \neq x, y \in V$ nous avons le diagramme suivant.

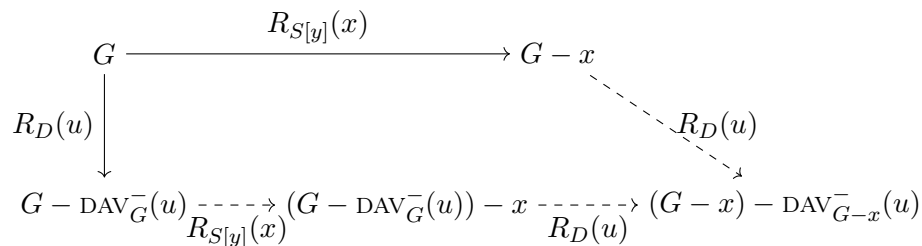


Diagramme C.5 – Le cas DAV⁻ et SUBSET

Preuve. Soient $u \neq x, y \in V$ tels que $R_D(u)$ et $R_{S[y]}(x)$ sont applicables. Dans ce cas l'applicabilité d'une réduction n'affecte pas l'applicabilité de l'autre. En effet, le voisinage du sommet x ne sera pas affecté par $R_D(u)$ car, par définition de $DArc^-$, aucun arc incident au sommet x ne sera identifié par $DArc^-$. Ainsi nous avons l'égalité suivante $N_G(x) = N_{G-DAV_G^-(u)}(x)$ et par conséquent les inclusions $N_G^-(y) \subseteq N_G^-(x) \cup \{x\}$ et $N_G^+(y) \subseteq N_G^+(x) \cup \{x\}$ demeurent vraies dans $G - DAV_G^-(u)$. Donc $R_{S[y]}(x)$ reste applicable dans $G - DAV_G^-(u)$ et nous obtenons le graphe $(G - DAV_G^-(u)) - x$. Comme le retrait du sommet x va potentiellement engendrer de nouveaux arcs identifiables par $DArc^-$, nous appliquons une deuxième fois $DAV_{(G-DAV_G^-(u))-x}^-(u)$ pour au final obtenir le graphe $((G - DAV_G^-(u)) - x) - DAV_{(G-DAV_G^-(u))-x}^-(u)$.

Si nous appliquons $R_{S[y]}(x)$ en premier, $R_D(u)$ reste applicable et $DArc^-$ va potentiellement identifier davantage d'arcs car le sommet x a été retiré. Nous obtenons le graphe $(G - x) - DAV_{G-x}^-(u)$.

Reste à démontrer que

$$((G - DAV_G^-(u)) - x) - DAV_{(G-DAV_G^-(u))-x}^-(u) = (G - x) - DAV_{G-x}^-(u)$$

Notons $G_1 = ((G - DAV_G^-(u)) - x) - DAV_{(G-DAV_G^-(u))-x}^-(u) = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (G - x) - DAV_{G-x}^-(u) = (V_2, E_2)$. Comme le retrait du sommet x se fait qu'une seule fois dans les deux graphes G_1 et G_2 , alors $V_1 = V_2 = V \setminus \{x\}$. Ainsi pour démontrer que $E_1 = E_2$, il suffit de montrer que $N_{G_1}^-(u) = N_{G_2}^-(u)$, car c'est le seul sommet où une différence entre G_1 et G_2 est susceptible d'apparaître.

Pour ce faire, il suffit de montrer que $DAV_G^-(u) \cup DAV_{(G-DAV_G^-(u))-x}^-(u) = DAV_{G-x}^-(u)$.

Nous procédons par double inclusions. Soit $(a, u) \in DAV_G^-(u) \cup DAV_{(G-DAV_G^-(u))-x}^-(u)$, nous raisonnons par l'absurde pour démontrer que $(a, u) \in DAV_{G-x}^-(u)$. Supposons donc que $(a, u) \notin DAV_{G-x}^-(u)$, il existe donc un chemin $c = (u_1 = u, u_2, \dots, u_\ell = a)$ dans $G - x$ qui n'a aucune corde arrière identifiable par $DArc^-$. Comme le chemin c existe dans G et que $(a, u) \in DAV_G^-(u) \cup DAV_{(G-DAV_G^-(u))-x}^-(u)$ alors nous avons deux cas.

1. Soit $(a, u) \in DAV_G^-(u)$, autrement dit, le chemin c a une corde arrière dans G . Comme c est un chemin dans $G - x$, donc c ne passe pas par le sommet x , cette corde arrière devrait exister dans $G - x$ et est identifiable par $DArc^-$ ce qui est une contradiction.
2. Soit $(a, u) \notin DAV_G^-(u)$, donc $(a, u) \in DAV_{(G-DAV_G^-(u))-x}^-(u)$. Le chemin c va exister dans $G - DAV_G^-(u)$, autrement ça voudra dire qu'un arc (u_i, u) est dans c ce qui est une contradiction, car un

tel arc est une corde arrière identifiable par $DAVC^-$ est aurait due impliquer que $(a, u) \in DAV_G^-(u)$. Comme le chemin c est un chemin dans $G - x$ et il existe dans $G - DAV_G^-(u)$, alors il existera également dans $(G - DAV_G^-(u)) - x$. Comme $(a, u) \in DAV_{(G-DAV_G^-(u))-x}^-(u)$, alors (a, u) a une corde arrière qui devrait exister également dans $G - x$, car $G - x$ a les mêmes arcs et même plus que $(G - DAV_G^-(u)) - x$. Ainsi, avec cette corde arrière $DAVC^-$ devrait identifier (a, u) dans $G - x$ et nous aurons $(a, u) \in DAV_{G-x}^-(u)$ ce qui est une contradiction.

Dans tous les cas nous avons une contradiction, ainsi $(a, u) \in DAV_{G-x}^-(u)$ et donc

$$DAV_G^-(u) \cup DAV_{(G-DAV_G^-(u))-x}^-(u) \subseteq DAV_{G-x}^-(u)$$

Soit maintenant $(a, u) \in DAV_{G-x}^-(u)$. Il nous suffit de démontrer que, si $(a, u) \notin DAV_G^-(u)$ alors $(a, u) \in DAV_{(G-DAV_G^-(u))-x}^-(u)$.

Si cette implication est vraie, nous pouvons conclure que $(a, u) \in DAV_G^-(u) \cup DAV_{(G-DAV_G^-(u))-x}^-(u)$ ce qui démontre l'inclusion

$$DAV_{G-x}^-(u) \subseteq DAV_G^-(u) \cup DAV_{(G-DAV_G^-(u))-x}^-(u)$$

Nous procédons par preuve directe pour démontrer l'implication plus haut et nous supposons donc que $(a, u) \notin DAV_G^-(u)$. Soit le chemin $c = (u_1 = u, u_2, \dots, u_\ell = a)$ dans $(G - DAV_G^-(u)) - x$. Le chemin c va exister dans $G - x$, car ce graphe a les mêmes arcs, et même plus, que le graphe $(G - DAV_G^-(u)) - x$ et comme $(a, u) \in DAV_{G-x}^-(u)$, alors le chemin c a une corde arrière identifiable par $DAVC^-$ dans $G - x$. Nous avons les 3 cas suivants.

1. Soit c'est une boucle, qui ne peut donc pas être retirée par $DAV_G^-(u)$, autrement dit, elle va exister dans $G - DAV_G^-(u)$. Aussi, cette boucle ne peut pas être (x, x) car c'est une boucle dans $G - x$, autrement dit, cette boucle va également exister dans $(G - DAV_G^-(u)) - x$, ce qui fait que c aura une boucle dans $(G - DAV_G^-(u)) - x$.
2. Soit c'est un 2-circuit entre deux sommets u_{i+1} et u_i , c'est-à-dire, qu'il existe un arc (u_{i+1}, u_i) . Soit l'arc (u_{i+1}, u_i) va exister dans $G - DAV_G^-(u)$ et par conséquent dans $(G - DAV_G^-(u)) - x$ et ainsi, c aura un 2-circuit dans $(G - DAV_G^-(u)) - x$. Soit l'arc (u_{i+1}, u_i) a été retiré par $DAV_G^-(u)$, ce qui veut dire que soit u_i ou u_{i+1} a une boucle vu que cet arc fait partie d'un 2-circuit. Dans ce dernier cas, nous revenons au cas où c a donc une boucle, ce qui mène, d'après le point précédent, au fait que c a une boucle dans $(G - DAV_G^-(u)) - x$.
3. Soit c'est un arc de la forme (u_i, u) avec $i > 1$. Si cet arc existe dans $G - DAV_G^-(u)$, alors il existera

dans $(G - \text{DAV}_G^-(u)) - x$. Soit (u_i, u) n'est pas dans $G - \text{DAV}_G^-(u)$, ce qui veut dire qu'il a été retiré par $\text{DAV}_G^-(u)$, ce qui veut dire que tout chemin de u vers u_i a une corde arrière identifiable par DARC^- dans G , incluant la portion suivante du chemin c , $c_1 = (u_1 = u, u_2, \dots, u_i)$. Donc, le chemin c_1 a soit une boucle, soit un 2-circuit, soit un arc de la forme (u_j, u) avec $1 < j$. Dans les cas de boucle ou de 2-circuit, nous revenons exactement aux deux premiers cas que nous avons traités plus haut, qui mènent au fait que c_1 aura soit une boucle soit un 2-circuit dans $(G - \text{DAV}_G^-(u)) - x$. Soit c'est un arc (u_j, u) et au quel cas nous pouvons reprendre le même raisonnement. À savoir, soit cet arc existera dans $(G - \text{DAV}_G^-(u)) - x$, soit il est retiré par $\text{DAV}_G^-(u)$ et nous pouvons donc construire un chemin plus petit $c_2 = (u_1 = u, u_2, \dots, u_j)$ et reprendre les mêmes arguments.

Ultimement, nous arriverons au cas où nous avons un chemin qui est lui même un 2-circuit (u, u_2, u) et nous pouvons donc suivre le même raisonnement que dans le point précédent. Dans tous les cas, soit l'arc de la forme (u_k, u) va exister dans $(G - \text{DAV}_G^-(u)) - x$, soit nous construisons un sous-chemin qui va lui contenir une boucle ou un 2-circuit.

Donc dans tous les cas, le chemin c a une corde arrière d'une forme identifiable par DARC^- dans $(G - \text{DAV}_G^-(u)) - x$, ce qui veut dire que l'arc $(a, u) \in \text{DAV}_{(G - \text{DAV}_G^-(u)) - x}^-(u)$. Ainsi, nous avons bien $\text{DAV}_{G-x}^-(u) \subseteq \text{DAV}_G^-(u) \cup \text{DAV}_{(G - \text{DAV}_G^-(u)) - x}^-(u)$.

Par conséquent, $\text{DAV}_{G-x}^-(u) = \text{DAV}_G^-(u) \cup \text{DAV}_{(G - \text{DAV}_G^-(u)) - x}^-(u)$ et donc nous avons bien l'égalité

$$((G - \text{DAV}_G^-(u)) - x) - \text{DAV}_{(G - \text{DAV}_G^-(u)) - x}^-(u) = (G - x) - \text{DAV}_{G-x}^-(u)$$

Donc, pour tout graphe G , il existe un graphe G' et un ensemble de réductions telsque le diagramme C.5 est commutatif. $\square$

À présent nous sommes prêt à démontrer le théorème 3.16. Nous rappelons son énoncé. Nous avons la relation binaire $\mathcal{R}_2$ suivante sur l'ensemble $\mathcal{G}$ de tous les graphes orientés finis,

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_L \cup \mathcal{R}_I \cup \mathcal{R}_O \cup \mathcal{R}_S \cup \mathcal{R}_D$$

Théorème C.8 $(\mathcal{G}, \mathcal{R}_2)$ a la propriété de finitude de Church-Rosser.

Preuve. D'après le théorème 1.7 il nous suffirait de démontrer que $(\mathcal{G}, \mathcal{R}_2)$ est fini et que pour tout $G, G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ si $(G, G_1) \in \mathcal{R}_2$ et $(G, G_2) \in \mathcal{R}_2$, alors il existe $G', G'' \in \mathcal{G}$ tels que $(G_1, G') \in \mathcal{R}_2^T$ et $(G_2, G'') \in \mathcal{R}_2^T$ avec $G' = G''$ ou $G' \cong G''$.

Pour rappel, $(\mathcal{G}, \mathcal{R}_2)$ est fini si pour tout $G, G' \in \mathcal{G}$, il existe une constante k telle que si $(G, G') \in \mathcal{R}_2^i$ alors $i \leq k$. Comme les réductions réduisent le nombre de sommets ou d'arcs, il suffit de prendre $k = |G|(|G|+1)$, avec $G = (V, E)$ et $|G| = |V|$, alors nous sommes certains que $(G, G') \in \mathcal{R}_2^i$ impliquera que $i \leq k$. Ainsi $(\mathcal{G}, \mathcal{R}_2)$ est fini.

À présent, soient $G = (V, E), G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2) \in \mathcal{G}$ tels que $(G, G_1) \in \mathcal{R}_2$ et $(G, G_2) \in \mathcal{R}_2$. Nous cherchons deux graphes $G', G'' \in \mathcal{G}$ avec les deux propriétés suivantes, pour $i, j \in \mathbb{N}$,

$$(G_1, G') \in \mathcal{R}_2^i \text{ et } (G_2, G'') \in \mathcal{R}_2^j \quad (\text{P1})$$

$$G' \cong G'' \quad (\text{P2})$$

Comme la relation $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \cup \{\mathcal{R}_D\}$ et que $\mathcal{R}$ est confluente, alors il suffirait de montrer que les propriétés P1 et P2 sont satisfaites pour les paires $(G, G_1) \in \mathcal{R}_D$ et tous les cas possibles pour (G, G_2) . Supposons donc qu'il existe un arc $u \in V$ tel que, $R_D(u)$ appliquée à G le réduit en $G_1 = G - \text{DAV}_G^-(u)$. Alors nous avons les cas suivants pour $(G, G_2) \in \mathcal{R}_2$.

— $(G, G_2) \in \mathcal{R}_L$. Supposons qu'il existe un sommet $x \in V$ tel que $R_L(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G - x$. Nous distinguons alors les cas suivants.

(a) Si $x \neq u$, alors nous pouvons appliquer $R_L(x)$ sur $G_1 = G - \text{DAV}_G^-(u)$ qui le réduira au graphe $(G - \text{DAV}_G^-(u)) - x$, ainsi $(G_1, G_1 - x) \in \mathcal{R}_L \subseteq \mathcal{R}_2^1$. Nous pouvons également appliquer $R_D(u)$ sur $G_2 = G - x$ qui le réduira au graphe $(G - x) - \text{DAV}_G^-(u)$, ainsi $(G_2, G_2 - \text{DAV}_G^-(u)) \in \mathcal{R}_D \subseteq \mathcal{R}_2^1$.

Comme $(G - \text{DAV}_G^-(u)) - x = (G - x) - \text{DAV}_G^-(u)$, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = (G - \text{DAV}_G^-(u)) - x = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

(b) Si $x = u$, alors nous pouvons appliquer $R_L(x)$ sur G_1 qui le réduira au graphe $(G - \text{DAV}_G^-(x)) - x$, ainsi $(G_1, G_1 - x) \in \mathcal{R}_L \subseteq \mathcal{R}_2^1$. Comme $x = u$, alors les arcs dans $\text{DAV}_G^-(x)$ sont incidents au sommet x , donc $(G - \text{DAV}_G^-(x)) - x = G - x$. Nous n'avons donc pas besoin d'appliquer une réduction sur $G_2 = G - x$ et il suffit de prendre $i = 1, j = 0$ et $G' = G_2 = G''$ pour que

les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

Voir le lemme C.3 pour les preuves d'existence des réductions et des graphes de ces cas.

- $(G, G_2) \in \mathcal{R}_D$. Supposons donc qu'il existe un sommet $x \neq u \in E$ tel que $R_D(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G - \text{DAV}_G^-(x)$. Comme $x \neq u$, alors $\text{DAV}_{G_2}^-(u)$ et $\text{DAV}_{G_1}^-(x)$ restent applicable et nous aurons $(G_1, G_1 - \text{DAV}_{G_1}^-(x)) = (G_1, G_1 - \text{DAV}_G^-(x)) \in \mathcal{R}_D \subseteq \mathcal{R}_2^1$ et $(G_2, G_2 - \text{DAV}_{G_2}^-(u)) = (G_2, G_2 - \text{DAV}_G^-(u)) \in \mathcal{R}_D \subseteq \mathcal{R}_2^1$

Ainsi, il suffit de prendre $i = j = 1$ et $G' = G'' = G - \text{DAV}_G^-(u) - \text{DAV}_G^-(x)$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites. Voir le lemme C.4 pour la preuve d'existence des réductions et des graphes de ce cas.

- $(G, G_2) \in \mathcal{R}_I$. Supposons donc qu'il existe un sommet $x \in V$ tel que, $R_I(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G \circ x$. Nous distinguons alors les cas suivants.

- (a) Si $x \neq u$, alors nous pouvons appliquer $R_I(x)$ sur $G_1 = G - \text{DAV}_G^-(u)$ qui le réduira au graphe $(G - \text{DAV}_G^-(u)) \circ x$. Comme le contournement du sommet x peut créer de nouveaux arcs identifiables par DARC^- , alors nous appliquons $R_D(u)$ une deuxième fois pour les couvrir. Ainsi, $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathcal{R}_2^1$ et $(G_1 \circ x, (G_1 \circ x) - \text{DAV}_{G \circ x}^-(u)) \in \mathcal{R}_D \subseteq \mathcal{R}_2^1$. Nous pouvons également appliquer $R_D(u)$ sur G_2 qui le réduira au graphe $(G \circ x) - \text{DAV}_{G \circ x}^-(u)$, ainsi $(G_2, G_2 - \text{DAV}_{G \circ x}^-(u)) \in \mathcal{R}_D \subseteq \mathcal{R}_2^1$.

Comme $((G - \text{DAV}_G^-(u)) \circ x) = (G \circ x) - \text{DAV}_{G \circ x}^-(u)$, il suffit de prendre $i = 2, j = 1$ et $G' = (G \circ x) - \text{DAV}_{G \circ x}^-(u) = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

- (b) Si $x = u$, alors nous pouvons appliquer $R_I(x)$ sur $G_1 = G - \text{DAV}_G^-(x)$ qui le réduira au graphe $(G - \text{DAV}_G^-(x)) \circ x$, ainsi $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_I \subseteq \mathcal{R}_2^1$. De même, le contournement du sommet x peut créer de nouveaux arcs identifiables par DARC^- , nous appliquons $R_D(s)$ une deuxième fois, mais cette fois sur tous les successeurs de x , car $x \notin (G - \text{DAV}_G^-(x)) \circ x$. Nous obtenons donc $(G_1 \circ x, (G_1 \circ x) - \bigcup_{s \in N_G^+(x)} \text{DAV}_{G_1}^-(s)) \in \mathcal{R}_D^{|N_G^+(x)|} \subseteq \mathcal{R}_2^{|N_G^+(x)|}$

Par contre, dans $G_2 = G \circ x$ le sommet x n'existe plus et les arcs qui lui sont incidents identifiés par DARC^- sont remplacés par les arcs de la forme (p, s) avec $p \in N_G^-(x)$ et $s \in N_G^+(x)$, nous devons donc appliquer $R_D(s)$ pour tout $s \in N_G^+(x)$ pour les retirer. Nous allons donc appliquer successivement les réductions $(R_D(s))_{s \in N_G^+(x)}$ sur G_2 pour le réduire au graphe $(G \circ x) - \bigcup_{s \in N_G^+(x)} \text{DAV}_{G \circ x}^-(s)$. Donc $(G_2, G_2 - \bigcup_{s \in N_G^+(x)} \text{DAV}_{G \circ x}^-(s)) \in \mathcal{R}_D^{|N_G^+(x)|} \subseteq \mathcal{R}_2^{|N_G^+(x)|}$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = 1, j = |N_G^+(x)|$ et $G' = (G - \circ x) \cup_{s \in N_G^+(x)} \text{DAV}_{G \circ x}^-(s) = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

Voir le lemme C.5 pour les preuves d'existence des réductions et des graphes de ces cas.

- $(G, G_2) \in \mathcal{R}_O$. Supposons donc qu'il existe un sommet $x \in V$ tel que, $R_O(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G \circ x$. Nous distinguons alors les cas suivants.

- (a) Si $x \neq u$, alors nous pouvons appliquer $R_O(x)$ sur $G_1 = G - \text{DAV}_G^-(u)$ qui le réduira au graphe $(G - \text{DAV}_G^-(u)) \circ x$. Comme le contournement du sommet x peut créer de nouveaux arcs identifiables par DARC^- , alors nous appliquons $R_D(u)$ une deuxième fois pour les couvrir. Ainsi, $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_O \subseteq \mathcal{R}_2^1$ et $(G_1 \circ x, (G_1 \circ x) - \text{DAV}_{G \circ x}^-(u)) \in \mathcal{R}_D \subseteq \mathcal{R}_2^1$. Nous pouvons également appliquer $R_D(u)$ sur G_2 qui le réduira au graphe $(G \circ x) - \text{DAV}_{G \circ x}^-(u)$, ainsi $(G_2, G_2 - \text{DAV}_{G \circ x}^-(u)) \in \mathcal{R}_D \subseteq \mathcal{R}_2^1$.

Comme $((G - \text{DAV}_G^-(u)) \circ x) = (G \circ x) - \text{DAV}_{G \circ x}^-(u)$, il suffit de prendre $i = 2, j = 1$ et $G' = (G \circ x) - \text{DAV}_{G \circ x}^-(u) = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

- (b) Si $x = u$, alors nous pouvons appliquer $R_O(x)$ sur $G_1 = G - \text{DAV}_G^-(x)$ qui le réduira au graphe $(G - \text{DAV}_G^-(x)) \circ x$, ainsi $(G_1, G_1 \circ x) \in \mathcal{R}_O \subseteq \mathcal{R}_2^1$. De même, le contournement du sommet x peut créer de nouveaux arcs identifiables par DARC^- , nous appliquons $R_D(s)$ une deuxième fois, mais cette fois sur tous les successeurs de x , car $x \notin (G - \text{DAV}_G^-(x)) \circ x$. Nous obtenons donc $(G_1 \circ x, (G_1 \circ x) - \cup_{s \in N_G^+(x)} \text{DAV}_{G_1}^-(s)) \in \mathcal{R}_D^{|N_G^+(x)|} \subseteq \mathcal{R}_2^{|N_G^+(x)|}$

Par contre, dans $G_2 = G \circ x$ le sommet x n'existe plus et les arcs qui lui sont incidents identifiés par DARC^- sont remplacés par les arcs de la forme (p, s) avec $p \in N_G^-(x)$ et $s \in N_G^+(x)$, nous devons donc appliquer $R_D(s)$ pour tout $s \in N_G^+(x)$ pour les retirer. Nous allons donc appliquer successivement les réductions $(R_D(s))_{s \in N_G^+(x)}$ sur G_2 pour le réduire au graphe $(G \circ x) - \cup_{s \in N_G^+(x)} \text{DAV}_{G \circ x}^-(s)$. Donc $(G_2, G_2 - \cup_{s \in N_G^+(x)} \text{DAV}_{G \circ x}^-(s)) \in \mathcal{R}_D^{|N_G^+(x)|} \subseteq \mathcal{R}_2^{|N_G^+(x)|}$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = 1, j = |N_G^+(x)|$ et $G' = (G - \circ x) \cup_{s \in N_G^+(x)} \text{DAV}_{G \circ x}^-(s) = G''$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites.

Voir le lemme C.6 pour les preuves d'existence des réductions et des graphes de ces cas.

- $(G, G_2) \in \mathcal{R}_S$. Supposons donc qu'il existe deux sommets $x, y \in V$ tels que $R_{S[y]}(x)$ appliquée à G le réduit en $G_2 = G - x$. L'applicabilité de $R_D(u)$ dans G , n'affectera pas l'applicabilité de SUBSET sur x et vice-versa. Par contre, le retrait du sommet x peut créer de nouveaux arcs identifiables par

$DARC^-$, il faudra donc appliquer $R_D(u)$ après $R_{S[y]}(x)$. Donc $(G_1, G_1 - x) \in \mathcal{R}_S \subseteq \mathcal{R}_2^1$, ensuite $(G_1 - x, G_1 - x - DAV_{G-x}^-(u)) \in \mathcal{R}_D \subseteq \mathcal{R}_2^1$ et $(G_2, G_2 - DAV_{G-x}^-(u)) \in \mathcal{R}_D \subseteq \mathcal{R}_2^1$.

Ainsi, il suffit de prendre $i = 2, j = 1$ et $G' = G'' = (G - x) - DAV_{G-x}^-(u)$ pour que les propriétés P1 et P2 soient satisfaites. Voir le lemme C.7 pour la preuve d'existence des réductions et des graphes de ce cas.

Nous pouvons donc conclure que $(\mathcal{G}, \mathcal{R}_2)$ a bien la propriété de Church-Rosser. $\square$

ANNEXE D
TABLEAUX STATISTIQUES

	Dictionnaire			Noyau		
	Sommets	Arcs	Densité	Sommets	Arcs	CFC
WordNet	146 498	765 481	0.000036	7 131	33 284	253
	52 153	311 321	0.000114	11 277	50 620	88
	52 153	644 046	0.000237	17 404	413 204	30
MWC	97 495	495 385	0.000052	9 070	46 405	460
	59 411	337 376	0.000096	13 495	58 260	198
	59 411	613 854	0.000174	18 978	360 707	90
WEDT	52 565	273 432	0.000099	6 694	33 580	387
	32 650	190 470	0.000179	9 148	35 308	126
	32 650	365 621	0.000343	12 594	228 169	41
LDOCE	35 599	173 737	0.000137	1 988	10 014	168
	21 869	147 319	0.000308	3 450	16 058	80
	21 869	263 937	0.000552	6 184	144 093	27
CIDE	21 095	107 638	0.000242	1 711	9 792	65
	18 912	144 308	0.000403	3 602	17 459	30
	18 912	226 148	0.000632	5 104	107 021	23
WCDT	12 379	61 282	0.000400	2 700	13 929	126
	10 620	56 102	0.000497	3 252	10 295	74
	10 620	96 692	0.000857	4 586	55 900	27
WLDI	4 508	19 133	0.000941	1 103	4 459	50
	4 475	21 683	0.001083	1 451	4 306	30
	4 475	36 475	0.001821	1 974	20 721	6
WILD	3 213	22 667	0.002196	1 291	8 618	18
	3 064	16 579	0.001766	1 068	3 728	22
	3 064	27 247	0.002902	2 077	20 456	3

Table D.1 – Les graphes et leur noyau pour chacun des dictionnaires numériques. Pour chaque dictionnaire, les lignes rouges représentent les graphes associés, les lignes blanches représentent les graphes désambiguïsés et, enfin, les lignes bleues représentent les graphes RAS. La colonne CFC représente le nombre de composante fortement connexe.

	Mots non désamb.	Noyaux associés et désambiguïsés			Noyaux désambiguïsés et RAS		
		Noyau ass. (seulement)	Commun	Noyau dés. (seulement)	Noyau dés. (seulement)	Commun	Noyau RAS (seulement)
WordNet	2 760	1 262	3 109	8 168	730	10 547	6 857
MWC	2 954	2 050	4 066	9 429	997	12 498	6 480
WEDT	2 570	1 364	2 760	6 388	853	8 295	4 299
LDOCE	688	391	909	2 541	179	3 271	2 913
CIDE	509	296	906	2 696	249	3 353	1 751
WCDT	943	771	986	2 266	216	3 036	1 550
WLDI	432	229	442	1 009	65	1 386	588
WILD	447	481	363	705	12	1 056	1 021

Table D.2 – Comparaison entre les tailles des noyaux des graphes associés, désambiguïsés et RAS. La colonne en rouge indique le nombre de mots qui n'ont pas été transformés par le processus RAS.

	Réductions					Noyau réduit	
	LOOP	INDICLIQUE	OUTDICLIQUE	SUBSET	PIE	Sommets	Arcs
WordNet	409	431	4 084	3	193	2 204	14 446
	258	495	3 137	1	78	7 386	32 018
	880	1 570	5 638	10	734	9 306	171 335
MWC	818	924	5 051	2	284	2 273	13 458
	417	929	3 487	0	46	8 662	32 851
	912	2 135	6 071	8	631	9 852	156 434
WEDT	814	427	3 763	3	282	1 683	10 292
	360	433	2 414	0	179	5 941	18 787
	578	1 536	3 718	2	354	6 760	109 635
LDOCE	341	199	963	3	70	482	2 356
	155	147	961	0	28	2 187	8 788
	565	456	2 762	7	295	2 394	37 968
CIDE	162	113	717	2	61	717	4 673
	93	113	779	0	13	2 617	11 847
	407	464	1 809	4	131	2 420	36 720
WCDT	415	374	1 477	6	259	428	2 103
	253	205	1082	2	3	1 710	3 410
	285	588	1 512	4	236	2 197	22 869
WLDT	185	193	550	1	36	173	647
	133	160	504	1	14	653	1 015
	128	249	598	2	32	997	7 862
WILD	160	126	585	1	110	419	2 699
	68	35	360	0	0	605	1 760
	209	263	1 060	0	36	545	3 420

Table D.3 – Les réductions sur les noyaux des graphes associés, désambiguïsés et RAS. Les lignes rouges représentent les graphes associés, les lignes blanches représentent les graphes désambiguïsés et enfin les lignes bleues représentent les graphes RAS.

		Concrétude					AOA	
		[1, 2[	[2, 3[	[3, 4[	[4, 5[	5 ≤	≤ 10	10 <
WordNet	Noyau	766	1789	1360	1420	57	3619	1773
		460	1101	1066	1721	74	2872	1550
		730	1663	1628	2946	115	4518	2564
	Noyau réd.	309	767	538	557	23	1487	707
		294	721	660	919	36	1747	883
		456	1043	1040	1899	87	2929	1596
MWC	Noyau	908	2149	1551	1728	59	4147	2248
		579	1266	1113	1783	74	3082	1733
		789	1788	1668	2883	114	4544	2698
	Noyau réd.	326	884	606	588	23	1585	842
		343	787	685	921	37	1795	978
		460	1075	1003	1773	84	2789	1606
WEDT	Noyau	835	1879	1405	1616	74	4011	1798
		442	975	900	1497	62	2595	1281
		607	1371	1307	2480	98	3882	1981
	Noyau réd.	321	744	567	605	19	1552	704
		279	638	551	763	29	1495	765
		317	763	736	1439	71	2264	1062
LDOCE	Noyau	183	433	439	716	37	1286	522
		132	268	315	739	44	1051	447
		208	491	568	1445	84	1947	849
	Noyau réd.	86	177	182	292	14	523	228
		86	172	190	398	17	604	259
		105	233	247	678	50	884	429
CIDE	Noyau	134	369	410	663	34	1062	548
		147	335	399	716	38	1153	482
		180	425	535	1146	70	1643	713
	Noyau réd.	76	208	226	321	17	546	302
		117	256	288	445	22	788	340
		106	229	269	590	31	823	402
WCDT	Noyau	258	612	665	1041	66	1888	754
		135	275	317	663	35	995	430
		166	382	473	1097	64	1557	625
	Noyau réd.	78	180	211	348	17	550	284
		74	146	184	302	14	506	214
		95	189	241	528	29	723	359
WLDT	Noyau	98	261	292	415	28	722	372
		64	126	161	261	18	408	222
		81	156	206	392	26	571	290
	Noyau réd.	36	77	98	134	11	235	121
		31	62	83	104	5	193	92
		46	88	119	188	13	287	167
WILD	Noyau	78	210	301	640	52	851	430
		40	75	105	231	17	299	169
		68	157	193	507	40	642	323
	Noyau réd.	36	82	132	304	22	362	214
		22	39	58	105	8	151	81
		29	53	73	156	10	199	122

Table D.4 – Les caractéristiques psycholinguistiques des mots dans les noyaux des graphes associés, désambiguïsés et RAS et leur graphe réduit correspondant. Les lignes rouges représentent les graphes associés, les lignes blanches représentent les graphes désambiguïsés et enfin les lignes bleues représentent les graphes RAS.

ANNEXE E

ARBRE UNION-CAT

Nous présentons ici quelques opérations de base sur les arbres union-cat. Évidemment, il existe de nombreuses autres requêtes et modifications qui pourraient être définies sur les UCT, telles que la complémentation, l'union, l'intersection et la différence.

Avant ça, il est important de souligner que les arbres union-cat et les BDDs/ZDDs peuvent être convertis naturellement l'un en l'autre. Les deux conversions sont illustrées dans la figure E.1. Pour transformer un BDD en UCT, il suffit d'utiliser des nœuds d'union et de concaténation de manière à inclure (dans le sous-arbre gauche) ou exclure (dans le sous-arbre droit) une valeur k . Cette opération s'effectue en un seul parcours du BDD, avec insertion locale des nœuds, ce qui conduit à une complexité globale en $\mathcal{O}(n)$.

Inversement, il est possible de transformer un UCT en BDD. Pour cela, il suffit d'utiliser le modificateur `SOUSFAMILLE` (décrit plus bas dans cette annexe) pour partitionner l'arbre actuel selon que la valeur k est incluse ou non. La complexité de cette transformation est en $\mathcal{O}(n^2)$, puisque `SOUSFAMILLE` s'exécute en $\mathcal{O}(n)$ et est appliqué au plus deux fois pour chaque valeur. Cependant, dans le cas où le UCT est « bien équilibré », on peut raisonnablement s'attendre à une complexité plus proche de $\mathcal{O}(n \log n)$.

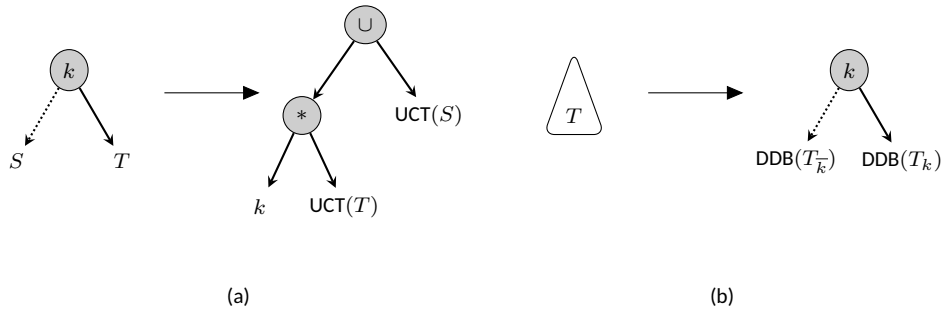


Figure E.1 – Relation entre un BDD/ROBDD/ZDD et un UCT. (a) Transformation d'un BDD/ROBDD/ZDD en UCT. Il suffit d'appliquer UCT sur les deux nœuds enfants S et T , puis de les combiner comme illustré. (b) Transformation d'un UCT en BDD. À chaque étape, une variable k est choisie, puis DDB est appelée sur $T_{\bar{k}} = \text{SOUSFAMILLE}(T, S - \{k\})$ et $T_k = \text{SOUSFAMILLE}(T, \{k\})$.

E.1 Requêtes

Les requêtes sont des opérations utilisées pour récupérer des informations d'une structure de données sans la modifier. Étant donnée une famille $\mathcal{F}$ sur un ensemble S , on pourrait s'intéresser aux questions suivantes.

1. Calcul de la cardinalité d'une famille, $\text{CARD}(\mathcal{F})$.
2. Vérification de l'appartenance d'un ensemble donné E , vérifier si $A \in \mathcal{F}$.
3. Extraction aléatoire d'un ensemble avec probabilité uniforme, $\text{ALEATOIRE}(\mathcal{F})$.

Ces opérateurs s'étendent naturellement aux nœuds d'un UCT donné. Par exemple, pour calculer $\text{CARD}(\mathcal{F})$, il suffit de définir CARD récursivement sur les nœuds feuilles, les nœuds d'union et les nœuds de concaténation, puis de calculer $\text{CARD}(\mathcal{F}) = \text{CARD}(r)$, où r est la racine de T ,

$$\text{CARD}(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \text{ est une feuille;} \\ \sum_{w \in v.\text{ENFANTS}} \text{CARD}(w) & \text{si } v \text{ est un nœud d'union;} \\ \prod_{w \in v.\text{ENFANTS}} \text{CARD}(w) & \text{si } v \text{ est un nœud de concaténation.} \end{cases}$$

De manière similaire, pour vérifier si un ensemble $A \in \mathcal{F}$, nous procédons comme suit pour chaque nœud v .

1. Si v est une feuille, retourner vrai si et seulement si $A = \{v\}$.
2. Si v est un nœud de concaténation, pour chaque nœud enfant w , vérifier si $A \cap \text{VALEURS}(w)$ appartient à la famille induite par le sous-arbre enraciné en w (si c'est le cas, retourner vrai, sinon, retourner faux).
3. Si v est un nœud d'union, retourner vrai si et seulement si A appartient à au moins une des familles induites par un nœud enfant de v .

Pour extraire un ensemble aléatoire avec probabilité uniforme, nous suivons ces étapes pour chaque nœud v .

1. Si v est une feuille, retourner $\{\text{CONTENU}(v)\}$.
2. Si v est un nœud de concaténation, retourner $\bigcup_{w \in v.\text{ENFANTS}} \text{ALEATOIRE}(w)$.
3. Si v est un nœud d'union, choisir un nœud enfant w avec une probabilité égale à $\text{CARD}(w)/\text{CARD}(v)$ pour chaque enfant, puis retourner $\text{ALEATOIRE}(w)$.

La complexité de ces opérations est linéaire par rapport à la taille de l'UCT :

Théorème E.1 Soit T un arbre union-cat avec n nœuds. Alors, les opérateurs $CARD$, $\in$ et $ALEATOIRE$ ont une complexité $\mathcal{O}(n)$.

Preuve. $CARD$ effectue un unique parcours de l'arbre, ce qui est trivialement en $\mathcal{O}(n)$. L'opération $\in$ est aussi linéaire, à condition que $VALEURS(v)$ soit connu pour chaque nœud v de T . Ces valeurs peuvent soit être stockées directement dans la structure de données, soit prétraitées en temps linéaire, garantissant ainsi une complexité totale de $\mathcal{O}(n)$. L'extraction aléatoire est également linéaire, car elle effectue un parcours de l'arbre et s'appuie sur $CARD$, qui est en $\mathcal{O}(n)$. $\square$

E.2 Modificateurs

De manière similaire aux requêtes, on peut définir des opérateurs pratiques qui modifient la structure d'un arbre union-cat (UCT). Nous nous concentrons sur trois d'entre eux :

1. Aplatissement de l'arbre, $APLATIR(v)$, où v est un nœud quelconque.
2. Binarisation de l'arbre, $BINAIRE(v)$, où v est un nœud quelconque.
3. Extraction d'une sous-famille en excluant certaines valeurs, $SOUSFAMILLE(v, K)$, où v est un nœud et K un sous-ensemble des valeurs dans S .

E.2.1 Aplatissement de l'arbre

L'aplatissement permet de compresser les données pour économiser de l'espace mémoire. Cela produit aussi une structure où les types de nœuds alternent entre *union* et *concaténation* à chaque niveau. Les règles sont,

- Si un nœud interne v n'a qu'un enfant w , v est supprimé et remplacé par w .
- Si un nœud interne v a un enfant w du même type, i.e., $CONTENU(v) = CONTENU(w)$, les enfants de w deviennent enfants de v , puis w est supprimé.

L'aplatissement s'implémente naturellement de manière ascendante.

E.2.2 Binarisation de l'arbre

Pour simplifier l'implémentation des opérateurs, nous pouvons transformer l'arbre en une structure binaire (deux enfants au maximum par nœud). Cela s'effectue par un parcours descendant.

- Si un nœud v a un seul enfant, v peut être supprimé.
- Si v a plus de deux enfants, on insère autant de nœuds intermédiaires du même type que nécessaire pour respecter la contrainte binaire.

E.2.3 Extraction d'une sous-famille

L'extraction d'une sous-famille d'ensembles autorisés/interdits (K) peut se faire sans énumérer explicitement la famille complète. Les règles sont.

- Si v est une feuille, supprimez-la si elle ne figure pas dans K .
- Si v est un nœud d'union, appliquez $\text{SOUSFAMILLE}(w, K)$ à chaque enfant w de v . Si un sous-arbre est vide, supprimez-le. Si tous sont vides, supprimez v . Sinon, renvoyez un sous-arbre avec une racine $\cup$ et les nœuds enfants résultants.
- Si v est un nœud de concaténation, appliquez $\text{SOUSFAMILLE}(w, K)$ à chaque enfant w . Si un sous-arbre est vide, supprimez v , sinon, renvoyez un sous-arbre avec une racine $*$ et les nœuds enfants calculés récursivement.

Comme pour les requêtes, ces opérateurs sont linéaires.

Théorème E.2 *Pour tout UCT T contenant n nœuds, les opérateurs APLATIR , BINAIRE et SOUSFAMILLE ont une complexité $\Theta(n)$.*

Preuve. Dans tous les cas, chaque nœud est visité une fois, et les modifications sont locales (suppression ou assignation de pointeurs/références) et donc en temps constant. Pour BINAIRE , bien que des nœuds supplémentaires soient créés, leur nombre total ne dépasse pas celui des nœuds de l'arbre original. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

- A. V. Aho, R. S. et Ullman, J. D. (1972). *Code optimization and finite Church-Rosser systems*, in “*Design and Optimization of Compilers*”. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall.
- Abdenbi, M., Blondin Massé, A., Goupil, A. et Marcotte, O. (2024a). On the confluence of directed graph reductions preserving feedback vertex set minimality. Dans S. Brlek et L. Ferrari (dir.). *Proceedings of the 13th edition of the conference on Random Generation of Combinatorial Structures. Polyominoes and Tilings*, Bordeaux, France, 24-28th June 2024, volume 403 de *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, 6–11. Open Publishing Association. <http://dx.doi.org/10.4204/EPTCS.403.6>
- Abdenbi, M., Blondin Massé, A., Goupil, A., Lapointe, M. et Lavoie, M. (2024b). Enumerating minimum feedback vertex sets in directed graphs with union-cat trees. *RAIRO-Theor. Inf. Appl.*, 58, 18. <http://dx.doi.org/10.1051/ita/2024015>. Récupéré de <https://doi.org/10.1051/ita/2024015>
- Abdenbi, M., Blondin Massé, A., Goupil, A. et Marcotte, O. (2025). Superfluous arcs and confluent reductions in the minimum feedback vertex set problem. *RAIRO-Theor. Inf. Appl.*, 59, 12. <http://dx.doi.org/10.1051/ita/2025010>. Récupéré de <https://doi.org/10.1051/ita/2025010>
- Angrick, S., Bals, B., Casel, K., Cohen, S., Friedrich, T., Hastrich, N., Hradilak, T., Issac, D., Kißig, O., Schmidt, J. et Wendt, L. (2023). Solving directed feedback vertex set by iterative reduction to vertex cover. Dans L. Georgiadis (dir.). *21st International Symposium on Experimental Algorithms (SEA 2023)*, volume 265 de *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, 10 :1–10 :14., Dagstuhl, Germany. Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik. <http://dx.doi.org/10.4230/LIPIcs.SEA.2023.10>. Récupéré de <https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.SEA.2023.10>
- Aronoff, M. et Rees-Miller, J. (2003). *The Handbook of Linguistics*. Blackwell Handbooks in Linguistics. Wiley. Récupéré de <https://books.google.ca/books?id=r18LDiR11nYC>
- Baader, F. et Nipkow, T. (1998). *Term Rewriting and All That*. Cambridge University Press. <http://dx.doi.org/10.1017/CB09781139172752>
- Bader, D. et Madduri, K. (2006). Designing multithreaded algorithms for breadth-first search and st-connectivity on the cray mta-2. *Proceedings of the International Conference on Parallel Processing*. <http://dx.doi.org/10.1109/ICPP.2006.34>
- Balasubramanian, R., Fellows, M. R. et Raman, V. (1998). An improved fixed-parameter algorithm for vertex cover. *Information Processing Letters*, 65(3), 163–168. [http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/S0020-0190\(97\)00213-5](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/S0020-0190(97)00213-5). Récupéré de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020019097002135>
- Banarescu, L., Bonial, C., Cai, S., Georgescu, M., Griffitt, K., Hermjakob, U., Knight, K., Koehn, P., Palmer, M. et Schneider, N. (2013). Abstract meaning representation for sembanking. Dans *Proceedings of the 7th linguistic annotation workshop and interoperability with discourse*, 178–186.

- Becker, B., Behle, M., Eisenbrand, F. et Wimmer, R. (2005). Bdds in a branch and cut framework. Dans *Proceedings of the 4th International Conference on Experimental and Efficient Algorithms, WEA'05*, p. 452–463., Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag. http://dx.doi.org/10.1007/11427186_39
- Benini, L., Nardini, C., Yoon, S. et De Micheli, G. (2005). Discovering coherent biclusters from gene expression data using zero-suppressed binary decision diagrams. *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics*, 2(04), 339–354.
<http://dx.doi.org/10.1109/TCBB.2005.55>
- Blondin Massé, A., Chicoisne, G., Gargouri, Y., Harnad, S., Picard, O. et Marcotte, O. (2008). How is meaning grounded in dictionary definitions? Dans *Proceedings of the 3rd Textgraphs Workshop on Graph-Based Algorithms for Natural Language Processing*, TextGraphs-3, p. 17–24., USA. Association for Computational Linguistics.
- Bryant, R. E. (1986). Graph-based algorithms for boolean function manipulation. *IEEE Transactions on Computers*, C-35(8), 677–691.
- Brysbaert, M., Warriner, A. et Kuperman, V. (2014). Concreteness ratings for 40 thousand generally known english word lemmas. *Behavior research methods*, 46(3), 904–911.
<http://dx.doi.org/10.3758/s13428-013-0403-5>
- Chakrabarti, D., Zhan, Y. et Faloutsos, C. (2004). R-mat : A recursive model for graph mining. volume 6.
<http://dx.doi.org/10.1137/1.9781611972740.43>
- Chang, O., Flokas, L., Lipson, H. et Spranger, M. (2023). Assessing satnet's ability to solve the symbol grounding problem. Récupéré de <https://arxiv.org/abs/2312.11522>
- Chomsky, N. (1957). *Syntactic Structures*. A Mouton classic. Mouton de Gruyter. Récupéré de https://books.google.ca/books?id=a6a_b-CXYAkC
- Church, A. et Rosser, J. B. (1936). Some properties of conversion. *Transactions of the American Mathematical Society*, 39, 472–482.
- Diestel, R. (2010). *Graph theory* (fourth éd.), volume 173 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Heidelberg.
- Dijkstra, E. W. (1962). Over de sequentialiteit van procesbeschrijvingen. circulated privately
- Ehrig, H., Ehrig, K., Prange, U. et Taentzer, G. (2010). *Fundamentals of Algebraic Graph Transformation* (1st éd.). Springer Publishing Company, Incorporated.
- Erdos, P. L. et Rényi, A. (1984). On the evolution of random graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 286, 257–257. Récupéré de <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:6829589>
- Fellows, M. R., Jaffke, L., Király, A. I., Rosamond, F. A. et Weller, M. (2018). What Is Known About Vertex Cover Kernelization ?, Dans H.-J. Böckenhauer, D. Komm, et W. Unger (dir.). *Adventures Between Lower Bounds and Higher Altitudes : Essays Dedicated to Juraj Hromkovič on the Occasion of His 60th Birthday*, (p. 330–356). Springer International Publishing : Cham

- Fodor, J. A. (1987). *Psychosemantics : The Problem of Meaning in the Philosophy of Mind*. MIT Press.
- Fomin, F. V., Gaspers, S., Pyatkin, A. V. et Razgon, I. (2008). On the minimum feedback vertex set problem : Exact and enumeration algorithms. *Algorithmica*, 52(2), 293–307.
- Fomin, F. V., Grandoni, F. et Kratsch, D. (2009). A measure & conquer approach for the analysis of exact algorithms. *J. ACM*, 56(5). <http://dx.doi.org/10.1145/1552285.1552286>. Récupéré de <https://doi-org.proxy.bibliotheques.uqam.ca/10.1145/1552285.1552286>
- Garey, M. R. et Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness* (first éd.). W. H. Freeman.
- Golovach, P. A., Heggernes, P., Kratsch, D. et Saei, R. (2014). Subset feedback vertex sets in chordal graphs. *Journal of Discrete Algorithms*, 26, 7–15. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jda.2013.09.005>. Récupéré de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1570866713000853>
- Gonzalez, J. E., Low, Y., Gu, H., Bickson, D. et Guestrin, C. (2012). Powergraph : distributed graph-parallel computation on natural graphs. Dans *Proceedings of the 10th USENIX Conference on Operating Systems Design and Implementation, OSDI'12*, p. 17–30., USA. USENIX Association.
- Grama, A., Karypis, G., Kumar, V. et Gupta, A. (2003). *Introduction to Parallel Computing* (second éd.). Addison-Wesley.
- Griffiths, T. L., Kemp, C. et Tenenbaum, J. B. (2008). *Bayesian models of cognition*. New York, NY, US : Cambridge University Press. <http://dx.doi.org/CB09780511816772.006>
- Gross J.L., Yellen J., A. M. (2018). *Graph Theory and Its Applications* (3rd éd.). Chapman and Hall/CRC.
- Harnad, S. (1990). The symbol grounding problem. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 42(1), 335–346. [http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0167-2789\(90\)90087-6](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0167-2789(90)90087-6). Récupéré de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278990900876>
- Honnibal, M., Montani, I., Van Landeghem, S. et Boyd, A. (2020). *spaCy : Industrial-strength Natural Language Processing in Python*. Zenodo. <http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.1212303>. Récupéré de <https://doi.org/10.5281/zenodo.1212303>
- Jascob, B. (2023). Amrlib models [software]. <https://github.com/bjascob/amrlib-models>. GitHub repository.
- Johnston, B. et Williams, M.-A. (2009). A formal framework for the symbol grounding problem. Dans *Proceedings of the 2nd Conference on Artificial General Intelligence (2009)*, 50–55. Atlantis Press. <http://dx.doi.org/10.2991/agi.2009.12>. Récupéré de <https://doi.org/10.2991/agi.2009.12>
- Jurafsky, D. et Martin, J. H. (2025). *Speech and Language Processing : An Introduction to Natural Language Processing, Computational Linguistics, and Speech Recognition with Language Models* (3rd éd.). Online manuscript released January 12, 2025. Récupéré de <https://web.stanford.edu/~jurafsky/slp3/>

- Karp, R. M. (1972). *Reducibility among Combinatorial Problems*, Dans R. E. Miller, J. W. Thatcher, et J. D. Bohlinger (dir.). *Complexity of Computer Computations : Proceedings of a symposium on the Complexity of Computer Computations*, (p. 85–103). Springer US : Boston, MA
- Kiesel, R. et Schidler, A. (2022). A dynamic maxsat-based approach to directed feedback vertex sets.
- Knuth, D. E. (2008a). Fun with bdds. Récupéré de <http://www.youtube.com/watch?v=axUgEAgSB8>
- Knuth, D. E. (2008b). Fun with zdds. Récupéré de <http://www.youtube.com/watch?v=axUgEAgSB8>
- Kumar, V. et Kanal, L. (1984). Parallel branch-and-bound formulations for and/or tree search. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions, PAMI-6*(6), 768–778.
- Kuperman, V., Stadthagen-Gonzalez, H. et Brysbaert, M. (2012). Age-of-acquisition ratings for 30,000 english words. *Behavior Research Methods*, 44(4), 978–990. Récupéré de <https://doi.org/10.3758/s13428-012-0210-4>
- Lemaic, M. (2008). *Markov-Chain-Based Heuristics for the Feedback Vertex Set Problem for Digraphs*. (Thèse de doctorat). Universität zu Köln. Récupéré de <https://kups.ub.uni-koeln.de/2547/>
- Levy, H. et Low, D. W. (1988). A contraction algorithm for finding small cycle cutsets. *Journal of Algorithms*, 9(4), 470–493. [http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0196-6774\(88\)90013-2](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0196-6774(88)90013-2). Récupéré de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0196677488900132>
- Lin, H.-M. et Jou, J.-Y. (2000). On computing the minimum feedback vertex set of a directed graph by contraction operations. *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 19, 295 – 307. <http://dx.doi.org/10.1109/43.833199>
- Loekito, E. et Bailey, J. (2006). Fast mining of high dimensional expressive contrast patterns using zero-suppressed binary decision diagrams. p. 307–316.
- Lubiw, A. (1988). A note on odd/even cycles. *Discrete Applied Mathematics*, 22(1), 87–92. [http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0166-218X\(88\)90125-4](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0166-218X(88)90125-4). Récupéré de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0166218X88901254>
- Luger, G. F. et A., W. (1993). *Stubblefield. Artificial intelligence - structures and strategies for complex problem solving*. enjamin/Cummings.
- Malewicz, G., Austern, M. H., Bik, A. J., Dehnert, J. C., Horn, I., Leiser, N. et Czajkowski, G. (2010). Pregel : a system for large-scale graph processing. Dans *Proceedings of the 2010 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data, SIGMOD '10*, p. 135–146., New York, NY, USA. Association for Computing Machinery. <http://dx.doi.org/10.1145/1807167.1807184>. Récupéré de <https://doi-org.proxy.bibliotheques.uqam.ca/10.1145/1807167.1807184>
- McCool, M., Reinders, J. et Robison, A. (2012). *Structured Parallel Programming : Patterns for Efficient Computation* (1st éd.). San Francisco, CA, USA : Morgan Kaufmann Publishers Inc.
- Merriam-Webster (2003). *Merriam-Webster's Collegiate Dictionary*.

- Minato, S.-i. (1993). Zero-suppressed bdds for set manipulation in combinatorial problems. Dans *Proceedings of the 30th International Design Automation Conference, DAC '93*, p. 272–277., New York, NY, USA. Association for Computing Machinery.
<http://dx.doi.org/10.1145/157485.164890>
- OpenMP Architecture Review Board (2024). OpenMP application program interface version 6.0. Récupéré de
<https://www.openmp.org/wp-content/uploads/OpenMP-API-Specification-6-0.pdf>
- Oram, P. (2001). Wordnet : An electronic lexical database. christiane fellbaum (ed.). cambridge, ma : Mit press, 1998. pp. 423. *Applied Psycholinguistics*, 22(1), 131–134.
<http://dx.doi.org/10.1017/S0142716401221079>
- Palmer, M., Gildea, D. et Kingsbury, P. (2005). The proposition bank : An annotated corpus of semantic roles. *Computational linguistics*, 31(1), 71–106.
- Picard, O., Blondin Massé, A. et Harnad, S. (2010). Learning word meaning from dictionary definitions : Sensorimotor induction precedes verbal instruction.
- Polguère, A. (2003). *Lexicologie et sémantique lexicale : notions fondamentales*. Parametres Series. Presses de l'Université de Montréal. Récupéré de
<https://books.google.ca/books?id=rI74jhDqso4C>
- Poulin, J.-M., Blondin Massé, A. et Fonseca, A. (2018). Strategies for learning lexemes efficiently : A graph-based approach. Dans *The Tenth International Conference on Advanced Cognitive Technologies and Applications COGNITIVE 2018. Barcelona, Spain*, 18–22.
- Procter, P. (1995). *Cambridge International Dictionary of English (CIDE)*.
- Pylyshyn, Z. W. (1980). Computation and cognition : issues in the foundations of cognitive science. *Behavioral and Brain Sciences*, 3(1), 111–132.
<http://dx.doi.org/10.1017/S0140525X00002053>
- Quammen, C. (2005). Introduction to programming shared-memory and distributed-memory parallel computers. *XRDS*, 12(1), 2. <http://dx.doi.org/10.1145/1144382.1144384>. Récupéré de
<https://doi-org.proxy.bibliotheques.uqam.ca/10.1145/1144382.1144384>
- Rumelhart, D. E., McClelland, J. L. et PDP Research Group, C. (dir.) (1986). *Parallel Distributed Processing : Explorations in the Microstructure of Cognition, Vol. 1 : Foundations*. Cambridge, MA, USA : MIT Press.
- Sathe, S. (2008). Python web graph generator. Récupéré de <http://pywebgraph.sourceforge.net>
- Schröer, O. et Wegener, I. (1998). The theory of zero-suppressed bdds and the number of knight's tours. *Formal Methods in System Design*, 13(3), 235–253.
- Searle, J. (1980). Minds, brains, and programs. *The Behavioral and Brain Sciences*, 3, 417–457.
<http://dx.doi.org/10.1017/S0140525X00005756>

- Smolensky, P. (1988). The proper treatment of connectionism. *Behavioral and Brain Sciences - BEHAV BRAIN SCI*, 11. <http://dx.doi.org/10.1017/S0140525X00052432>
- Sterling, T., Anderson, M. et Brodowicz, M. (2018). Chapter 2 - hpc architecture 1 : Systems and technologies. In T. Sterling, M. Anderson, et M. Brodowicz (dir.), *High Performance Computing* 43–82. Boston : Morgan Kaufmann
- Taddeo, M. et Floridi, L. (2007). A praxical solution of the symbol grounding problem. *Minds and Machines*, 17(4), 369 – 389. <http://dx.doi.org/10.1007/s11023-007-9081-3>
- Topan, S., Rolnick, D. et Si, X. (2021). Techniques for symbol grounding with satnet. Récupéré de <https://arxiv.org/abs/2106.11072>
- Turing, A. M. (1950). I.—COMPUTING MACHINERY AND INTELLIGENCE. *Mind*, LIX(236), 433–460. <http://dx.doi.org/10.1093/mind/LIX.236.433>. Récupéré de <https://doi.org/10.1093/mind/LIX.236.433>
- UQAM. (2019). *Le jeu du dictionnaire*. UQAM. Récupéré de <http://lexis.uqam.ca:8080/dictGame/index.jsp#no-back-button>
- Vincent-Lamarre, P., Massé, A. B., Lopes, M., Lord, M., Marcotte, O. et Harnad, S. (2016). The latent structure of dictionaries. Récupéré de <https://arxiv.org/abs/1411.0129>
- Wang, P.-W., Donti, P. L., Wilder, B. et Kolter, Z. (2019). Satnet : Bridging deep learning and logical reasoning using a differentiable satisfiability solver. Récupéré de <https://arxiv.org/abs/1905.12149>
- Wordsmyth. (2017). *Wordsmyth*. Récupéré de <https://www.wordsmyth.net>
- Xiao, M. et Nagamochi, H. (2013). Confining sets and avoiding bottleneck cases : A simple maximum independent set algorithm in degree-3 graphs. *Theoretical Computer Science*, 469, 92–104. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.tcs.2012.09.022>