

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

OPTIMISATION DES PAIEMENTS DE DIVIDENDES AVEC INJECTIONS OBLIGATOIRES DANS LE MODÈLE
BROWNIEN

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
TOMMY MASTROMONACO

OCTOBRE 2025

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.12-2023). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier profondément mon superviseur, Jean-François Renaud, pour son support indéfectible le long de mon parcours, ainsi que toutes les heures consacrées à bonifier ma formation. Ses nombreux conseils, tant sur le plan académique que professionnel, ont fait de moi le mathématicien en herbe que je suis aujourd'hui.

Je remercie également les divers organismes de financement universitaires et gouvernementaux, grâce auxquels j'ai pu me consacrer pleinement à mes études et à ma recherche ces dernières années.

Je remercie les professeurs du département d'avoir assuré ma formation et alimenté mon amour des mathématiques, de même que mes collègues de bureau et de classe, avec qui j'ai entretenu des discussions fort intéressantes. Je porte une mention spéciale à Steven et Olivier, qui ont rendu mes études au baccalauréat bien plus riches et plaisantes, et à Dante, qui m'a accompagné dans la conception de ce mémoire.

Je me dois de remercier mes parents de tout cœur de m'avoir autant supporté et motivé dans mes projets durant toutes ces années. Enfin, je remercie les membres de mon groupe de musique pour les innombrables soirées passées à jouer et à composer de la musique.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	v
LISTE DES TABLEAUX	vi
ACRONYMES	vii
RÉSUMÉ	viii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 TRANSFORMÉES DE LAPLACE DE TEMPS DE PREMIER PASSAGE	5
1.1 Des transformées et leurs propriétés	6
1.2 Une autre transformée.....	12
CHAPITRE 2 PROBLÈME DE MAXIMISATION DE DIVIDENDES	22
2.1 Énoncé du problème	22
2.1.1 Objectif et stratégies linéaires	24
2.2 Calcul de la fonction de performance	29
2.2.1 Fonction de performance en zéro	32
2.3 Continuité de la dérivée seconde.....	40
2.3.1 Étude d'un point de continuité	40
2.3.2 Existence d'une racine.....	42
2.4 Vérification de l'optimalité	48
2.4.1 Propriétés de la fonction candidate	48
2.4.2 Vérification.....	52
2.4.3 Consolidation	59
CHAPITRE 3 ANALYSES NUMÉRIQUES	62
3.1 Confirmation des résultats par simulation	62

3.2	Effet des paramètres sur le seuil optimal	66
3.3	Effet des paramètres sur la fonction valeur	68
3.4	Moyenne asymptotique.....	72
	CONCLUSION.....	76
	ANNEXE A CODE PYTHON DES SIMULATIONS	78
A.1	Simulation pour la Figure 1.1	79
A.2	Simulation pour la Figure 1.2.....	79
A.3	Simulation pour la Figure 2.3	80
A.4	Simulation pour la Figure 2.4	81
A.5	Simulations pour les Figures 3.2 et 3.6	81
	RÉFÉRENCES	83

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Exemple de Y^b avec $b = 5$ et $x = 0$	12
Figure 1.2	Simulation de Y^b et $Y^{b,n}$ avec $b, n = 2$	16
Figure 2.1	Région couverte par $\mathcal{U}_{K,S}$ et exemples de stratégies admissibles	22
Figure 2.2	Stratégie linéaire pour une fonction candidate continûment différentiable	26
Figure 2.3	Simulation de X^b avec $b = 2$ et $x = 1$	28
Figure 2.4	Simulation de Z et Z^n avec $n = 2$	34
Figure 2.5	Exemple de g	43
Figure 2.6	Exemple de fonction valeur et de fonctions de performance sous-optimales	58
Figure 3.1	Estimation du reste de $D_{b^*}, R_{b^*}, V_{b^*}$ pour $x_0 = 1$ en fonction de T	63
Figure 3.2	Comparaison des fonctions $D_{b^*}, R_{b^*}, V_{b^*}$ à $N = 2000$ simulations	65
Figure 3.3	Valeur du seuil optimal b^* en fonction des paramètres	67
Figure 3.4	Fonction valeur V_{b^*} en fonction de K et S	69
Figure 3.5	Fonction valeur V_{b^*} en fonction des paramètres du modèle	71
Figure 3.6	Proportion du temps à verser/injecter en fonction de $\frac{\mu-S}{K} - b_K^*$ pour $x_0 = 1$	74

LISTE DES TABLEAUX

Table 3.1	Statistiques des estimations de la Figure 3.2	66
-----------	---	----

ACRONYMES

EDO Équation différentielle ordinaire.

EDS Équation différentielle stochastique.

HJB (Équation de) Hamilton-Jacobi-Bellman.

MB Mouvement brownien (standard).

MBA Mouvement brownien arithmétique.

O-U (Processus d')Ornstein-Uhlenbeck.

RÉSUMÉ

Ce mémoire porte sur la résolution d'un problème de contrôle stochastique à la (de Finetti, 1957) dans lequel on cherche à maximiser les paiements de dividendes, de taux borné par une fonction linéaire, et déduits du coût d'injections de capital obligatoires. Nous arrivons à la conclusion qu'une stratégie optimale est de verser des dividendes au taux maximal lorsque le surplus de capital excède un certain seuil, et de ne rien verser sinon.

Ce problème est un cas spécifique de celui résolu par (Renaud *et al.*, 2023) en utilisant la théorie des solutions de viscosité. Nous présentons une résolution plus directe et élémentaire qui a pour avantage d'approfondir la compréhension des différents objets que nous manipulons. Nous obtenons une forme explicite de la fonction de performance d'une stratégie linéaire pour un seuil quelconque, puis nous trouvons le seuil dont la fonction de performance est optimale parmi toutes les stratégies admissibles. De plus, nous vérifions numériquement que la fonction valeur de notre problème est une meilleure approximation de la fonction valeur de (Løkka et Zervos, 2008) que celle du problème de maximisation de dividendes dont le taux est borné par une constante.

Mots clés : contrôle stochastique ; maximisation de dividendes ; injections obligatoires ; transformées de Laplace ; mouvement brownien.

INTRODUCTION

Lorsqu'une firme possède d'importants surplus de capital, elle est susceptible d'en verser une partie à ses actionnaires; par exemple, sous forme de dividendes. À l'inverse, quand celle-ci frôle la faillite, elle peut obtenir du capital des actionnaires. Intuitivement, une firme devrait verser le plus de dividendes possible, et injecter le moins de capital en vue de satisfaire ses actionnaires. Cependant, une grande quantité de dividendes a pour effet de diminuer rapidement le surplus de capital, et d'accroître le besoin d'injecter du capital. Et inversement, s'il y a trop peu d'injections, le surplus de capital ne grimpe pas assez pour permettre à la firme de verser convenablement des dividendes. Il y a ainsi un équilibre optimal à trouver entre les versements et les injections.

Le surplus de capital évolue aléatoirement dans le temps, ce qui motive l'étude de ce type de problème en mathématiques actuarielles et financières. La littérature se base principalement sur la théorie du contrôle stochastique pour répondre à ces problèmes d'optimisation. Le surplus dit *non contrôlé* y est modélisé par un processus à temps continu $X = (X_t)_{t \geq 0}$, typiquement un mouvement brownien avec dérive μ et volatilité σ . Les versements de dividendes et les injections de capital cumulatifs sont représentés respectivement par les processus croissants $L = (L_t)_{t \geq 0}$ et $G = (G_t)_{t \geq 0}$. Le surplus *contrôlé* s'écrit alors intuitivement sous la forme $X - L + G$.

L'objectif du problème est d'identifier une stratégie, c'est-à-dire les processus de contrôle L et G , qui maximise une certaine *fonction de performance* mesurant la satisfaction des actionnaires. On cherche aussi une expression de cette fonction maximisée, appelée *fonction valeur*. Il existe une grande variété de tels problèmes, qui se distinguent essentiellement par le choix du modèle intrinsèque (c'est-à-dire X et quelques paramètres comme le taux d'actualisation, le coût des injections, des frais divers, etc.), et par la forme que prennent les processus de contrôle.

Bruno de Finetti fut le premier, dans (de Finetti, 1957), à proposer un problème de ce genre, dans lequel il utilise une marche aléatoire comme modèle intrinsèque, et considère uniquement les versements de dividendes. Les problèmes de maximisation de dividendes sans injections, donc avec $G \equiv 0$, ont été largement étudiés : voir notamment (Avanzi *et al.*, 2011; Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995; Locas et Renaud, 2024; Rao, 2023) ainsi que (Albrecher et Thonhauser, 2009; Avanzi, 2009) pour une revue de la littérature à ce sujet. L'absence d'injections nécessite toutefois d'introduire une notion de *faillite* qui arrête le processus

au moment de la ruine. Typiquement, la faillite survient à l'instant où le surplus contrôlé devient négatif.

Quant à la forme du contrôle (ou de la stratégie) L , on doit définir un ensemble de *stratégies admissibles* sur lequel sera performé l'optimisation. De manière générale, cet ensemble contient tout processus croissant et càdlàg (continu à droite avec limite à gauche) tel que la faillite ne peut être causée par un versement de dividendes. Une stratégie *barrière* est souvent optimale pour ce type de contrôle : dès que le surplus contrôlé excède une barrière fixée $b \geq 0$, l'excédent est distribué instantanément sous forme de dividendes (Avram *et al.*, 2007; Gerber et Shiu, 2004; Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995). Le processus L optimal comporte donc des sauts, et il est appelé contrôle *singulier* du fait que dans ce cas, la mesure induite par L est *singulière* par rapport à la mesure de Lebesgue (voir (Karatzas, 1983)).

Il est parfois utile de restreindre l'ensemble des stratégies admissibles aux contrôles dits *absolument continus* (Albrecher et Thonhauser, 2009), à savoir tels que leur mesure induite est *absolument continue*. Dans ce cas, une stratégie L admissible admet un processus positif et borné $\ell = (\ell_t)_{t \geq 0}$ tel que

$$L_t = \int_0^t \ell_s ds, \quad t \geq 0.$$

Le processus ℓ représente la densité ou le taux instantané de versement de dividendes. De cette façon, L est continu. Une stratégie *à seuil* est souvent optimale : les dividendes sont versés à un taux constant $\alpha > 0$ seulement lorsque le surplus contrôlé excède un seuil fixé $b \geq 0$ (Frostig, 2005; Gerber et Shiu, 2006; Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995).

Le lecteur aura peut-être remarqué que pour une stratégie à seuil, le contrôle L dépend du surplus contrôlé, qui dépend à son tour de L . L'équation $X - L$ caractérisant le surplus contrôlé devient alors une équation différentielle stochastique (EDS), dont une condition supplémentaire d'admissibilité est qu'elle admet une solution. Il est coutume d'exprimer ℓ par une fonction positive u du surplus contrôlé. On note dans ce cas le surplus contrôlé par $X^u = (X_t^u)_{t \geq 0}$, et le processus de contrôle L^u est donné par

$$L_t^u = \int_0^t u(X_s^u) ds.$$

En général, la fonction u est bornée supérieurement afin d'éviter toute singularité dans l'intégrale, et c'est précisément le type de borne qui caractérise l'ensemble des stratégies admissibles. La borne est habituellement une constante $S > 0$, donc $u(x) \leq S$ pour tout $x \geq 0$. Ce problème a été résolu dans (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995), où il a été montré que le problème de maximisation de dividendes *singuliers* est un cas limite ($S \rightarrow \infty$) de ce problème. Il y a aussi la borne linéaire $u(x) \leq Kx + S$, $x \geq 0$ avec $K, S > 0$,

dont le problème a été résolu par (Rao, 2023), et qui est une généralisation à la fois de la borne constante et de la borne $u(x) \leq Kx$, $x \geq 0$, dont le problème fut résolu par (Renaud et Simard, 2021). Récemment, (Locas et Renaud, 2024) ont proposé une borne encore plus générale, $u(x) \leq F(x)$, $x \geq 0$, où F est une fonction croissante et concave. Ces quatre problèmes tirent la conclusion que la stratégie optimale de versement de dividendes est de type *bang-bang*, c'est-à-dire que, soit on verse des dividendes au taux maximal, soit on n'en verse pas. Plus exactement, celle-ci prend la forme d'une stratégie à seuil qui verse au taux maximal lorsque X_t^u excède le seuil fixé, taux qui est exactement la borne imposée sur u par le problème.

Revenons aux problèmes avec injections de capital (tels que $G \not\equiv 0$). Nous nous intéressons ici aux problèmes avec injections **obligatoires** en zéro ; c'est-à-dire qui surviennent « automatiquement » lorsque le surplus contrôlé atteint 0. De cette façon, le processus G n'est pas un contrôle, donc il n'y a que les paiements de dividendes à optimiser. Ces problèmes sont très prisés (voir notamment (Avram *et al.*, 2007; Løkka et Zervos, 2008; Pérez *et al.*, 2018; Renaud *et al.*, 2023)), puisqu'ils constituent une étape intermédiaire aux problèmes généraux d'optimisation de (L, G) .

De plus, le contrôle optimal pour L dans les problèmes avec injections forcées est souvent du même type que pour le problème analogue sans injections. Par exemple, (Løkka et Zervos, 2008) résolvent le problème limite de (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995) en ajoutant les injections obligatoires, et concluent qu'une stratégie barrière est optimale pour les dividendes. Similairement, (Renaud *et al.*, 2023) considèrent des dividendes absolument continus et bornés par une fonction F croissante et concave, comme dans l'article de (Locas et Renaud, 2024), en y incorporant les injections forcées. Ils trouvent eux aussi qu'une stratégie bang-bang est optimale pour les paiements de dividendes.

Malgré les similitudes entre le problème de (Løkka et Zervos, 2008) et de (Renaud *et al.*, 2023), ces derniers emploient des méthodes de résolution différentes, bien qu'elles tournent autour de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman, ou équation HJB. Cette équation issue de la programmation dynamique a une forme particulière à chaque problème, et il est attendu qu'une solution de cette équation soit la fonction valeur. De plus, cette équation aide à l'identification du type de stratégie qui peut être optimale. Il reste enfin à confirmer que la fonction et la stratégie candidates sont bien optimales grâce à un Théorème de vérification faisant intervenir l'équation HJB.

Pour trouver une expression d'une fonction candidate à la fonction valeur, (Løkka et Zervos, 2008) utilisent les propriétés analytiques de l'équation HJB. (Renaud *et al.*, 2023), quant à eux, obtiennent d'abord une forme explicite de la fonction de performance d'une stratégie bang-bang quelconque, avant de trouver celle qui est optimale dans ce sous-ensemble de stratégies, en faisant le lien avec la caractérisation de la fonction valeur comme solution de viscosité de l'équation HJB.

Dans ce mémoire, nous appliquons cette méthode pour résoudre le problème de maximisation de dividendes avec injections obligatoires, mais sans utiliser la théorie des solutions de viscosité. Nous considérons des injections obligatoires en zéro, et des versements de dividendes absolument continus bornés par une fonction linéaire, de la forme $F(x) = Kx + S$, $x \geq 0$ avec $K, S > 0$. Nous étudions des stratégies de type bang-bang, que nous appellerons plutôt des *stratégies linéaires*. Il s'agit donc d'un cas spécifique du sous-problème avec injections obligatoires de (Renaud *et al.*, 2023). Cependant, la simplicité de la borne linéaire nous donne l'avantage de proposer une approche plus directe et élémentaire offrant une compréhension plus profonde et transparente des objets que nous manipulons.

Au Chapitre 1, nous présentons des transformées de Laplace de temps de premier passage qui sont centrales au calcul de la fonction de performance d'une stratégie linéaire. Le calcul de l'une de ces transformées nécessite une approximation d'un processus, dont nous présentons une preuve plus détaillée que dans (Locas et Renaud, 2024; Renaud *et al.*, 2023).

Au Chapitre 2, nous introduisons formellement le problème central à ce mémoire, puis donnons une forme explicite de la fonction de performance pour une stratégie linéaire quelconque. La valeur en zéro de cette fonction demande de calculer une certaine espérance que nous obtenons par une approche nouvelle, au mieux de nos connaissances, faisant intervenir une approximation similaire à celle du chapitre précédent. Enfin, nous montrons qu'il existe une telle stratégie dont la fonction de performance satisfait certaines conditions de régularité, et vérifions que cette dernière est optimale.

Au Chapitre 3, nous effectuons quelques analyses numériques qui nous aideront à bien saisir le comportement de la stratégie optimale et de la fonction valeur selon les paramètres du modèle.

CHAPITRE 1

TRANSFORMÉES DE LAPLACE DE TEMPS DE PREMIER PASSAGE

Comme il a été mentionné en introduction de ce mémoire, le calcul de la fonction de performance d'une stratégie linéaire fera intervenir diverses transformées de Laplace de temps de premier passage. Ces quantités sont au centre de la résolution du problème; elles méritent donc d'être dûment présentées. Nous commençons par introduire quelques transformées de Laplace « élémentaires » à la Section 1.1 avant de passer au calcul d'une transformée plus complexe à la Section 1.2.

Mais d'abord, nous nous intéressons à deux équations différentielles ordinaires, qui se trouvent en quelque sorte au cœur de notre problème. Soit $\mu, \sigma, q > 0$, la première équation différentielle est

$$\frac{\sigma^2}{2} f''(x) + \mu f'(x) - qf(x) = 0, \quad (1.1)$$

qui admet les solutions fondamentales

$$f_+(x) = e^{\frac{-\mu+\Delta}{\sigma^2}x}, \quad f_-(x) = e^{\frac{-\mu-\Delta}{\sigma^2}x},$$

avec $\Delta = \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 q}$. Ces solutions sont, respectivement, strictement croissante et décroissante.

La seconde équation différentielle est

$$\frac{\sigma^2}{2} f''(x) + (\mu - (Kx + S))f'(x) - qf(x) = 0, \quad (1.2)$$

qui admet les solutions fondamentales

$$H_+(x) = \exp\left(\frac{K}{2\sigma^2} \left(x - \frac{\mu - S}{K}\right)^2\right) D_{-\frac{q}{K}}\left(-\frac{\sqrt{2K}}{\sigma} \left(x - \frac{\mu - S}{K}\right)\right),$$

$$H_-(x) = \exp\left(\frac{K}{2\sigma^2} \left(x - \frac{\mu - S}{K}\right)^2\right) D_{-\frac{q}{K}}\left(\frac{\sqrt{2K}}{\sigma} \left(x - \frac{\mu - S}{K}\right)\right),$$

qui sont, respectivement, strictement croissante et décroissante (voir l'Annexe 2 de (Borodin et Salminen, 2002)). Pour $\lambda > 0$, $D_{-\lambda}$ est la fonction cylindre parabolique :

$$D_{-\lambda}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-xt - \frac{t^2}{2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On utilisera surtout H_- , ce pourquoi on notera plutôt $H(x) := H_-(x)$ afin d'alléger l'écriture.

Remarque 1.1 (Chapitre 16 de (Breiman, 1968)) Les solutions des équations (1.1) et (1.2) sont :

- positives ;
- continues ;
- finies en tout point (sauf à $\pm\infty$ selon la croissance) ;
- telles que toute autre solution continue est une combinaison linéaire de ces solutions.

1.1 Des transformées et leurs propriétés

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard. Nous considérons le mouvement brownien arithmétique (MBA) $X = (X_t)_{t \geq 0}$:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t,$$

ainsi que le processus $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ dont la dynamique est

$$dY_t = (\mu - S - KY_t) dt + \sigma dB_t.$$

Ce processus est bien connu, puisqu'il s'agit d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (O-U).

Définition 1.2 (Temps de premier passage) Pour un processus donné $A = (A_t)_{t \geq 0}$, on définit le temps d'arrêt suivant,

$$\tau_b^A = \inf\{t \geq 0 \mid A_t = b\}, \quad b \in \mathbb{R},$$

soit le premier instant où A atteint b .

Notation 1.3 Nous userons amplement de la notation $\mathbb{E}_x[\cdot]$ pour signifier que le processus (par exemple $(X_t)_{t \geq 0}$) dont nous prenons l'espérance est de valeur initiale x , c'est-à-dire $X_0 = x$. Nous ferons la même chose avec \mathbb{P}_x pour signifier la loi du processus sachant sa valeur initiale.

Voici maintenant nos premières transformées de Laplace de temps de premier passage :

Définition 1.4 Pour $b > 0$, les fonctions $\varphi_b, \psi_b, \Psi_b : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ sont définies par

$$\begin{aligned} \varphi_b(x) &= \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^X} \mathbf{1}_{\tau_b^X < \tau_0^X} \right], & 0 \leq x \leq b, \\ \psi_b(x) &= \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^X} \mathbf{1}_{\tau_0^X < \tau_b^X} \right], & 0 \leq x \leq b, \\ \Psi_b(x) &= \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^Y} \mathbf{1}_{\tau_b^Y < \infty} \right], & b \leq x. \end{aligned}$$

Notation 1.5 Il convient de préciser que cette notation peut porter à confusion avec celle de (Renaud et al., 2023). Il existe néanmoins une correspondance entre les deux notations, que nous dressons ci-dessous :

$$\begin{aligned}\varphi_b(x) &\longleftrightarrow \frac{\psi(x)}{\psi(b)}, \\ \psi_b(x) &\longleftrightarrow \Psi(x) - \Psi(b) \frac{\psi(x)}{\psi(b)}, \\ \Psi_b(x) &\longleftrightarrow \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)},\end{aligned}$$

où le côté gauche correspond à notre notation, et le côté droit à celle de (Renaud et al., 2023).

Il est connu (Borodin et Salminen, 2002; Breiman, 1968; Darling et Siegert, 1953) que φ_b et ψ_b sont solutions de l'équation différentielle (1.1) sur $(0, b)$ avec conditions aux bords

$$\begin{aligned}\varphi_b(0) &= 0, & \varphi_b(b) &= 1, \\ \psi_b(0) &= 1, & \psi_b(b) &= 0,\end{aligned}$$

et que Ψ_b est solution de l'équation différentielle (1.2) sur (b, ∞) avec conditions aux bords

$$\Psi_b(b) = 1, \quad \Psi_b(\infty) = 0,$$

où $\Psi_b(\infty)$ est une manière simplifiée d'écrire $\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi_b(x)$. On constate facilement à partir de leur définition que ces transformées satisfont bien les conditions aux bords.

Bien qu'il s'agit d'un résultat classique, nous en présentons ici une démonstration puisqu'elle a beaucoup en commun avec la démonstration du Théorème de vérification 2.20, ce dernier étant la pierre angulaire de notre problème.

Preuve. Tout d'abord, pour φ_b et ψ_b , soit ϕ une solution générale de l'EDO (1.1) sur $(0, b)$. Appliquons la Formule d'Itô au processus (t, X_t) avec la fonction $(t, x) \mapsto e^{-qt}\phi(x) \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. On trouve

$$\begin{aligned}d(e^{-qt}\phi(X_t)) &= -qe^{-qt}\phi(X_t)dt + e^{-qt}\phi'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}e^{-qt}\phi''(X_t)d[X]_t \\ &= -qe^{-qt}\phi(X_t)dt + e^{-qt}\phi'(X_t)(\mu dt + \sigma dB_t) + \frac{1}{2}e^{-qt}\phi''(X_t) \cdot \sigma^2 dt \\ &= e^{-qt} \left(\frac{\sigma^2}{2}\phi''(X_t) + \mu\phi'(X_t) - q\phi(X_t) \right) dt + \sigma e^{-qt}\phi'(X_t)dB_t.\end{aligned}$$

Sous forme intégrale, et en particulier pour $t = \tau_0^X \wedge \tau_b^X$, on obtient

$$\begin{aligned} e^{-q(\tau_0^X \wedge \tau_b^X)} \phi(X_{\tau_0^X \wedge \tau_b^X}) &= \phi(X_0) + \int_0^{\tau_0^X \wedge \tau_b^X} e^{-qt} \left(\frac{\sigma^2}{2} \phi''(X_t) + \mu \phi'(X_t) - q\phi(X_t) \right) dt \\ &\quad + \int_0^{\tau_0^X \wedge \tau_b^X} \sigma e^{-qt} \phi'(X_t) dB_t. \end{aligned}$$

Soit $x \in (0, b)$, alors la première intégrale est nulle, car $X_t \in (0, b)$ pour tout $t < \tau_0^X \wedge \tau_b^X$, et ϕ est solution de l'équation (1.1) sur $(0, b)$ par hypothèse. Prenons l'espérance avec $X_0 = x$ de chaque côté :

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-q(\tau_0^X \wedge \tau_b^X)} \phi(X_{\tau_0^X \wedge \tau_b^X}) \right] = \mathbb{E}_x [\phi(X_0)] + 0 + \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_0^X \wedge \tau_b^X} \sigma e^{-qt} \phi'(X_t) dB_t \right].$$

L'intégrande du dernier terme est borné pour tout $t < \tau_0^X \wedge \tau_b^X$, donc cette intégrale stochastique est une martingale. Comme le temps d'arrêt $\tau_0^X \wedge \tau_b^X$ est fini presque sûrement par les propriétés du mouvement brownien, alors cette espérance est nulle par le Théorème d'arrêt de Doob. Par conséquent,

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-q(\tau_0^X \wedge \tau_b^X)} \phi(X_{\tau_0^X \wedge \tau_b^X}) \right] = \mathbb{E}_x [\phi(X_0)] = \phi(x).$$

Développons l'espérance pour faire apparaître nos transformées de Laplace de temps de premier passage :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^X} \phi(X_{\tau_0^X}) \mathbf{1}_{\tau_0^X < \tau_b^X} \right] + \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^X} \phi(X_{\tau_b^X}) \mathbf{1}_{\tau_b^X < \tau_0^X} \right] \\ &= \phi(0) \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^X} \mathbf{1}_{\tau_0^X < \tau_b^X} \right] + \phi(b) \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^X} \mathbf{1}_{\tau_b^X < \tau_0^X} \right] \\ &= \phi(0) \psi_b(x) + \phi(b) \varphi_b(x). \end{aligned}$$

D'une part, si ϕ admet les conditions aux bords $\phi(0) = 0$ et $\phi(b) = 1$, alors on a $\phi = \varphi_b$. D'autre part, si ses conditions aux bords sont plutôt $\phi(0) = 1$ et $\phi(b) = 0$, alors $\phi = \psi_b$.

Par la suite, pour Ψ_b , la démarche est essentiellement la même. Soit η , une solution générale de l'EDO (1.2) sur (b, ∞) . On applique la Formule d'Itô au processus (t, Y_t) avec la fonction $(t, y) \mapsto e^{-qt} \eta(y)$, qui est $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} d(e^{-qt} \eta(Y_t)) &= -qe^{-qt} \eta(Y_t) dt + e^{-qt} \eta'(Y_t) dY_t + \frac{1}{2} e^{-qt} \eta''(Y_t) d[Y]_t \\ &= -qe^{-qt} \eta(Y_t) dt + e^{-qt} \eta'(Y_t) ((\mu - S - KY_t) dt + \sigma dB_t) + \frac{1}{2} e^{-qt} \eta''(Y_t) \cdot \sigma^2 dt \\ &= e^{-qt} \left(\frac{\sigma^2}{2} \eta''(Y_t) + (\mu - S - KY_t) \eta'(Y_t) - q\eta(Y_t) \right) dt + \sigma e^{-qt} \eta'(Y_t) dB_t. \end{aligned}$$

Sous forme intégrale et pour $t = \tau_b^Y$, on trouve

$$\begin{aligned} e^{-q\tau_b^Y} \eta(Y_{\tau_b^Y}) &= \eta(Y_0) + \int_0^{\tau_b^Y} e^{-qt} \left(\frac{\sigma^2}{2} \eta''(Y_t) + (\mu - S - KY_t) \eta'(Y_t) - q\eta(Y_t) \right) dt \\ &\quad + \int_0^{\tau_b^Y} \sigma e^{-qt} \eta'(Y_t) dB_t. \end{aligned}$$

Soit $x \in (0, b)$, nous prenons l'espérance avec $Y_0 = x$ de chaque côté :

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^Y} \eta \left(Y_{\tau_b^Y} \right) \right] = \mathbb{E}_x [\eta(Y_0)] + \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_b^Y} \sigma e^{-qt} \eta'(Y_t) dB_t \right] = \eta(x),$$

où la dernière égalité s'obtient par les mêmes arguments que plus haut. Enfin, on a

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^Y} \eta \left(Y_{\tau_b^Y} \right) \mathbf{1}_{\tau_b^Y < \infty} \right] \\ &= \eta(b) \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^Y} \mathbf{1}_{\tau_b^Y < \infty} \right] \\ &= \eta(b) \Psi_b(x). \end{aligned}$$

En spécifiant maintenant que η admet les conditions aux bords $\eta(b) = 1$ et $\eta(\infty) = 0$, on trouve $\eta = \Psi_b$. \square

Par le dernier point de la Remarque 1.1, il en découle que φ_b et ψ_b sont chacune une combinaison linéaire de f_+ , f_- , tandis que Ψ_b est une combinaison linéaire de H_+ , H_- . Elles prennent plus exactement la forme suivante :

Théorème 1.6 Les transformées de Laplace introduites à la Définition 1.4 s'expriment sur leur domaine respectif par

$$\begin{aligned} \varphi_b(x) &= \frac{f_+(x)f_-(0) - f_+(0)f_-(x)}{f_+(b)f_-(0) - f_+(0)f_-(b)} = e^{\frac{\mu}{\sigma^2}(b-x)} \frac{\sinh\left(\frac{\Delta}{\sigma^2}x\right)}{\sinh\left(\frac{\Delta}{\sigma^2}b\right)}, \\ \psi_b(x) &= \frac{f_+(b)f_-(x) - f_+(x)f_-(b)}{f_+(b)f_-(0) - f_+(0)f_-(b)} = e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x} \frac{\sinh\left(\frac{\Delta}{\sigma^2}(b-x)\right)}{\sinh\left(\frac{\Delta}{\sigma^2}b\right)}, \\ \Psi_b(x) &= \frac{H(x)}{H(b)} = \frac{\exp\left(\frac{K}{2\sigma^2}\left(x - \frac{\mu-S}{K}\right)^2\right) D_{-\frac{q}{K}}\left(\frac{\sqrt{2K}}{\sigma}\left(x - \frac{\mu-S}{K}\right)\right)}{\exp\left(\frac{K}{2\sigma^2}\left(b - \frac{\mu-S}{K}\right)^2\right) D_{-\frac{q}{K}}\left(\frac{\sqrt{2K}}{\sigma}\left(b - \frac{\mu-S}{K}\right)\right)}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Preuve. Puisque φ_b et ψ_b sont chacune une combinaison linéaire de f_+ , f_- , on a

$$\begin{cases} \varphi_b(x) = Af_+(x) + Bf_-(x), \\ \psi_b(x) = Cf_+(x) + Df_-(x), \end{cases}$$

pour tout $x \in [0, b]$, et avec $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, des coefficients à identifier. Pour cela, on utilise les conditions aux bords pour obtenir

$$\begin{cases} 0 = Af_+(0) + Bf_-(0), \\ 1 = Af_+(b) + Bf_-(b), \\ 1 = Cf_+(0) + Df_-(0), \\ 0 = Cf_+(b) + Df_-(b). \end{cases}$$

Il suffit de résoudre ce système pour obtenir les expressions données par l'équation (1.3).

Et quant à Ψ_b , il s'agit d'une combinaison linéaire de H_+ , H_- , donc

$$\Psi_b(x) = \alpha H_+(x) + \gamma H_-(x), \quad x \in [b, \infty),$$

où $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$. Il ne reste qu'à trouver ces coefficients, encore une fois grâce aux conditions aux bords :

$$\begin{cases} 1 = \alpha H_+(b) + \gamma H_-(b), \\ 0 = \alpha \lim_{x \rightarrow \infty} H_+(x) + \gamma \lim_{x \rightarrow \infty} H_-(x). \end{cases}$$

Par la croissance de H_+ et par la Remarque 1.1, on a $H_+(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$. Il faut dans ce cas que $\alpha = 0$ pour que la seconde équation égale bien 0. Et en posant $\alpha = 0$ dans la première équation, on trouve $\gamma = \frac{1}{H_-(b)}$.

Par conséquent,

$$\Psi_b(x) = \frac{H(x)}{H(b)},$$

où l'on rappelle que $H := H_-$. La forme explicite s'obtient ensuite par substitution de l'expression de H . \square

En définissant la fonction $W : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$W(x) := f_+(x)f_-(0) - f_+(0)f_-(x) = e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x} \sinh\left(\frac{\Delta}{\sigma^2}x\right),$$

on peut alors écrire

$$\varphi_b(x) = \frac{W(x)}{W(b)}.$$

Dans la littérature, la fonction W est connue comme étant, à un coefficient près, la *fonction d'échelle* d'un MBA (voir le Chapitre 8 de (Kyprianou, 2014)).

Nous nous intéressons maintenant à la dérivée première et seconde des transformées, qui sont évidemment continues et bien définies sur leur domaine. Cependant, leurs dérivées ne sont pas clairement définies aux extrémités de leur domaine. Afin d'alléger l'écriture, nous posons leurs dérivées aux extrémités comme étant la limite à droite ou à gauche des dérivées. Par exemple

$$\varphi'_b(0) := \lim_{x \downarrow 0} \varphi'_b(x), \quad \psi'_b(b) := \lim_{x \uparrow b} \psi'_b(x), \quad \Psi'_b(b) := \lim_{x \downarrow b} \Psi'_b(x).$$

Nous faisons la même chose avec les dérivées secondes. Ceci s'appliquera également à toute fonction qui sera introduite au cours de ce mémoire, et exprimée à partir des ces transformées.

Proposition 1.7 *Les dérivées premières et secondes des transformées sont telles que*

- $\varphi'_b(x) > 0$ pour tout $x \in [0, b]$, et
 - soit il existe un $s \in (0, b]$ tel que $\varphi''_b(s) = 0$, avec $\varphi''_b(x) < 0$ pour $x \in [0, s)$ et $\varphi''_b(x) > 0$ pour $x \in (s, b]$,
 - soit $\varphi''_b(x) < 0$ pour tout $x \in [0, b]$;
- $\psi'_b(x) < 0$ et $\psi''_b(x) > 0$ pour tout $x \in [0, b]$;
- $\Psi_b(x) < 0$ et $\Psi''_b(x) > 0$ pour tout $x \in [b, \infty)$.

Preuve. On sait par le Lemme 2.4 de (Ekström et Lindensjö, 2021) que les fonctions W et H sont telles que

- $W'(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$, et il existe un point d'inflexion $s > 0$ tel que $W''(s) = 0$, avec $W''(x) < 0$ pour $x < s$ et $W''(x) > 0$ pour $x > s$;
- $H'(x) < 0$ et $H''(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$.

Il s'ensuit que $\varphi_b(x) = \frac{W(x)}{W(b)}$ et $\Psi_b(x) = \frac{H(x)}{H(b)}$ ont les mêmes propriétés. Notons que pour φ''_b , les deux cas de figure dépendent de la valeur du point d'inflexion s ; on sera dans le premier cas si $s \leq b$, ou dans le second si $s > b$.

Et pour ψ_b , tout d'abord,

$$\psi'_b(x) = \frac{f_+(b)f'_-(x) - f'_+(x)f_-(b)}{f_+(b)f_-(0) - f_+(0)f_-(b)} < 0$$

pour tout $x \geq 0$ puisque le numérateur et le dénominateur sont, respectivement, négatif et positif par les propriétés de f_+ , f_- . Ensuite, ψ_b est solution de l'équation différentielle (1.1), donc

$$\psi''_b(x) = \frac{2}{\sigma^2} (q\psi_b(x) - \mu\psi'_b(x)) > 0$$

pour tout $x \geq 0$ étant donné que $q\psi_b(x) > 0$ et $\mu\psi'_b(x) < 0$. \square

Voici enfin une dernière propriété des transformées φ_b et ψ_b .

Lemme 1.8 *Pour $b > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \frac{\varphi'_b(x)}{\psi'_b(x)}$ est strictement décroissante pour tout $x \in [0, b]$.*

Preuve. Nous montrons que la dérivée de $x \mapsto \frac{\varphi'_b(x)}{\psi'_b(x)}$ est négative en utilisant le fait que φ_b , ψ_b sont positives

et solutions de l'équation différentielle (1.1) :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left(\frac{\varphi'_b(x)}{\psi'_b(x)} \right) &= \frac{\varphi''_b(x)\psi'_b(x) - \varphi'_b(x)\psi''_b(x)}{(\psi'_b(x))^2} \\
&= \frac{2/\sigma^2}{(\psi'_b(x))^2} \left[(q\varphi_b(x) - \mu\varphi'_b(x))\psi'_b(x) - \varphi'_b(x)(q\psi_b(x) - \mu\psi'_b(x)) \right] \\
&= \frac{2q/\sigma^2}{(\psi'_b(x))^2} [\varphi_b(x)\psi'_b(x) - \varphi'_b(x)\psi_b(x)] < 0
\end{aligned}$$

puisque $\psi'_b < 0 < \varphi'_b$. \square

1.2 Une autre transformée

On s'intéresse maintenant à $\Phi_b : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$, une nouvelle transformée de Laplace de temps de premier passage, définie ainsi :

$$\Phi_b(x) = \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^{Y^b}} \mathbf{1}_{\tau_0^{Y^b} < \infty} \right], \quad x \geq 0, \quad (1.4)$$

où $Y^b = (Y_t^b)_{t \geq 0}$ est de dynamique

$$dY_t^b = \left(\mu - (KY_t^b + S)\mathbf{1}_{Y_t^b \geq b} \right) dt + \sigma dB_t.$$

Du fait que la dérive de Y^b diminue abruptement lorsque Y^b excède b , on dit que le processus est *réfracté* au-dessus du *seuil de réfraction* b .

La Figure 1.1 illustre cette réfraction, que l'on peut comparer à la réfraction d'un rayon lumineux en optique physique. La première droite pointillée, de pente μ , indique la dérive du processus avant la réfraction. La

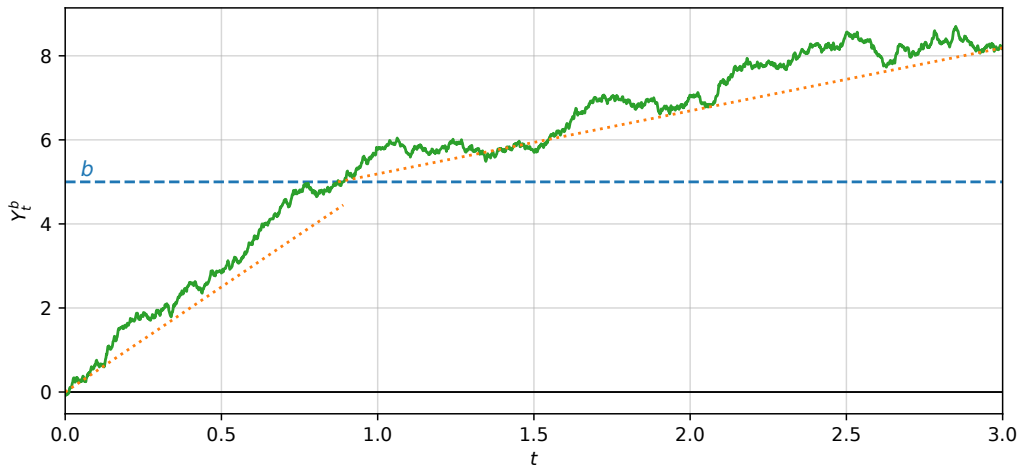


Figure 1.1 – Exemple de Y^b avec $b = 5$ et $x = 0$

Le pas de la simulation est $\Delta t \approx 0.0015$. Paramètres : $\mu = 5$, $\sigma^2 = 1$, $K = \frac{1}{2}$, $S = 1$.

seconde est de pente $\mu - (Kb + S)$, et représente approximativement la dérive du processus pendant la réfraction (elle surestime légèrement la vraie dérive puisque $Y_t^b \geq b$).

Comme le comportement de Y^b change autour du seuil b , l'expression de Φ_b est différente entre $x \in [0, b)$ et $x \in [b, \infty)$, tel que nous le verrons au Théorème 1.12. Le calcul de $\Phi_b(x)$ pour x différent de b est assez direct, alors que le calcul de $\Phi_b(b)$ est plus compliqué. C'est pourquoi il nous faut introduire une suite de processus $(Y^{b,n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui *approxime* Y^b (voir (Rao, 2023)) dans le but de calculer $\Phi_b(b)$ comme une limite d'une suite.

Le résultat présenté au Théorème 1.12 a été prouvé avec peu de détails dans le Lemme 5 de (Renaud et al., 2023). Nous fournissons, dans ce qui suit, une preuve complète.

Définition 1.9 Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et $x \geq 0$, on définit le processus $Y^{b,n} = (Y_t^{b,n})_{t \geq 0}$ de valeur initiale $Y_0^{b,n} = x$ par la dynamique suivante :

$$\begin{aligned} dY_t^{b,n} = & \left(dT_t^{0,x} \mathbb{1}_{0 \leq t < \kappa_1^n} + dU_t^{\kappa_1^n, b} \mathbb{1}_{\kappa_1^n \leq t < \lambda_1^n} \right) \mathbb{1}_{0 \leq x < b} + \left(dU_t^{0,x} \mathbb{1}_{0 \leq t < \lambda_1^n} \right) \mathbb{1}_{x \geq b} \\ & + \sum_{i=1}^n dT_t^{\lambda_i^n, b - \frac{1}{n}} \mathbb{1}_{\lambda_i^n \leq t < \kappa_{i+1}^n} + \sum_{i=2}^n dU_t^{\kappa_i^n, b} \mathbb{1}_{\kappa_i^n \leq t < \lambda_i^n}, \end{aligned}$$

où pour $\nu, y \geq 0$,

$$\begin{aligned} dT_t^{\nu,y} &= \mu dt + \sigma dB_t, \quad T_\nu^{\nu,y} = y, \quad t \geq \nu, \\ dU_t^{\nu,y} &= (\mu - S - KU_t^{\nu,y}) dt + \sigma dB_t, \quad U_\nu^{\nu,y} = y, \quad t \geq \nu, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \kappa_1^n &= \inf\{t \geq 0 \mid Y_t^{b,n} > b\}, \\ \lambda_i^n &= \inf\left\{t > \kappa_i^n \mid Y_t^{b,n} < b - \frac{1}{n}\right\}, \quad i = 1, 2, \dots, \\ \kappa_i^n &= \inf\{t > \lambda_{i-1}^n \mid Y_t^{b,n} > b\}, \quad i = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Bien que la définition de $Y^{b,n}$ soit plutôt *velue*, celle-ci s'interprète de la manière suivante :

- lorsque $Y^{b,n}$ excède b , donc pour $t \in [\kappa_i^n, \lambda_i^n]$, sa dérive est $\mu - S - KU_t^{\kappa_i^n, b}$;
- lorsqu'il descend sous $b - 1/n$, donc pour $t \in [\lambda_i^n, \kappa_{i+1}^n]$, sa dérive devient μ .

Le processus $Y^{b,n}$ alterne entre ces deux régimes. De plus, les processus Y^b et $Y^{b,n}$ diffèrent uniquement par leur dérive ; ils ont la même volatilité stochastique σB .

L'inégalité présentée dans le lemme qui suit est centrale à la démonstration du Lemme 1.11. Nous proposons ici une preuve de cette inégalité qui fut introduite par (Locas et Renaud, 2024).

Lemme 1.10 Pour $Y_0^b = b = Y_0^{b,n}$, les processus Y^b et $Y^{b,n}$ satisfont l'inégalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq Y_t^b - Y_t^{b,n} \leq \frac{1}{n}, \quad t \geq 0. \quad (1.5)$$

Preuve. Pour démontrer l'inégalité (1.5), nous vérifions pour tout $i \in \mathbb{N}$ que l'inégalité est respectée, et ce d'abord pour tout $t \in [\kappa_i^n, \lambda_i^n]$, puis pour tout $t \in [\lambda_i^n, \kappa_{i+1}^n]$. Sans perte de généralité, fixons un $i \in \mathbb{N}$ quelconque.

Commençons par $[\kappa_i^n, \lambda_i^n]$. Dans cet intervalle, on a $Y_t^{b,n} = U_t^{\kappa_i^n, b}$ par définition de $Y^{b,n}$. De plus, la dérive de $Y^{b,n}$ est $\mu - S - KU_t^{\kappa_i^n, b}$, tandis que Y^b alterne entre un O-U de dérive $\mu - S - KY_t^b$, et un MBA de dérive μ lorsqu'il franchit le seuil b . C'est pourquoi nous considérons séparément les intervalles où Y^b se comporte comme l'un ou l'autre de ces processus, et nous montrons que si l'inégalité est respectée au début d'un tel intervalle, alors elle l'est sur tout l'intervalle.

— Soit $s_1, t_1 \in [\kappa_i^n, \lambda_i^n]$ avec $s_1 < t_1$ tels que pour tout $t \in [s_1, t_1]$, la dynamique de $Y^b - Y^{b,n}$ est

$$\begin{aligned} d(Y_t^b - Y_t^{b,n}) &= \left[(\mu - S - KY_t^b) - (\mu - S - KU_t^{\kappa_i^n, b}) \right] dt \\ &= -K(Y_t^b - U_t^{\kappa_i^n, b}) dt \\ &= -K(Y_t^b - Y_t^{b,n}) dt. \end{aligned}$$

Supposons que l'inégalité est respectée à l'instant initial s_1 . Ce processus s'exprime explicitement par $Y_t^b - Y_t^{b,n} = (Y_{s_1}^b - Y_{s_1}^{b,n}) e^{-K(t-s_1)}$, qui est bien borné par $[0, 1/n]$ pour tout $t \in [s_1, t_1]$ puisque $e^{-K(t-s_1)}$ est positive et décroissante, et que $0 \leq Y_{s_1}^b - Y_{s_1}^{b,n} \leq \frac{1}{n}$ par hypothèse.

— Soit $s_2, t_2 \in [\lambda_i^n, \kappa_{i+1}^n]$ avec $s_2 < t_2$ tels que pour tout $t \in [s_2, t_2]$, la dynamique de $Y^b - Y^{b,n}$ est

$$d(Y_t^b - Y_t^{b,n}) = \left[\mu - (\mu - S - KU_t^{\kappa_i^n, b}) \right] dt = (KU_t^{\kappa_i^n, b} + S) dt.$$

Supposons que l'inégalité est respectée à l'instant initial $t = s_2$. La dynamique de $Y^b - Y^{b,n}$ est positive, donc le processus est croissant. Avec l'hypothèse initiale, il en découle que $0 \leq Y_t^b - Y_t^{b,n}$

pour tout $t \in [s_2, t_2[$. Ensuite, notons que $b - \frac{1}{n} \leq Y_{s_2}^{b,n} \leq Y_{s_2}^b < b$, et que l'on quitte $[s_2, t_2[$ soit lorsque Y^b dépasse b pour se comporter comme un O-U, soit lorsque $Y^{b,n}$ descend sous $b - \frac{1}{n}$, auquel cas on quitte $[\kappa_i^n, \lambda_i^n[$. De ce fait, on a $b - \frac{1}{n} \leq Y_t^{b,n} \leq Y_t^b < b$ pour tout $t \in [s_2, t_2[$, et par conséquent, $Y_t^b - Y_t^{b,n} \leq \frac{1}{n}$ sur cet intervalle.

Terminons avec $[\lambda_i^n, \kappa_{i+1}^n[$. Dans cet intervalle, la dérive de $Y^{b,n}$ est μ , tandis que Y^b alterne encore une fois entre un processus O-U et un MBA, ce qui motive de séparer à nouveau les deux cas par intervalles comme nous l'avons fait ci-haut.

- Soit $s_3, t_3 \in [\lambda_i^n, \kappa_{i+1}^n[$ avec $s_3 < t_3$ tels que pour tout $t \in [s_3, t_3[$, le processus $Y^b - Y^{b,n}$ est de dynamique

$$d(Y_t^b - Y_t^{b,n}) = [\mu - \mu] dt = 0.$$

Supposons que l'inégalité est respectée à l'instant initial $t = s_3$. Trivialement, elle est respectée pour tout $t \in [s_3, t_3[$ puisque $Y^b - Y^{b,n}$ est constant sur l'intervalle, et que par hypothèse, on a $0 \leq Y_{s_3}^b - Y_{s_3}^{b,n} \leq \frac{1}{n}$.

- Soit $s_4, t_4 \in [\lambda_i^n, \kappa_{i+1}^n[$ tel que pour tout $t \in [s_4, t_4[$, le processus $Y^b - Y^{b,n}$ a comme dynamique

$$d(Y_t^b - Y_t^{b,n}) = \left[(\mu - S - KY_t^b) - \mu \right] dt = -(KY_t^b + S) dt.$$

Supposons que l'inégalité est respectée à l'instant initial $t = s_4$. La dynamique de $Y^b - Y^{b,n}$ est négative, donc le processus est décroissant. Avec l'hypothèse initiale, il s'ensuit que $Y_t^b - Y_t^{b,n} \leq \frac{1}{n}$ pour tout $t \in [s_4, t_4[$. Ensuite, notons que $b - \frac{1}{n} \leq Y_{s_4}^{b,n} \leq b \leq Y_{s_4}^b$, et que l'on quitte $[s_4, t_4[$ soit lorsque Y^b descend sous b pour se comporter comme un MBA, soit lorsque $Y^{b,n}$ atteint b , auquel cas on quitte $[\lambda_i^n, \kappa_{i+1}^n[$. De ce fait, on a $Y_t^{b,n} \leq b \leq Y_t^b$ pour tout $t \in [s_4, t_4[$, et par conséquent, $0 \leq Y_t^b - Y_t^{b,n}$ sur cet intervalle.

□

La Figure 1.2 illustre les processus Y^b et $Y^{b,n}$ ainsi que l'inégalité (1.5). En effet, le processus $Y^b - Y^{b,n}$, représenté par la courbe rouge, est visiblement borné dans $[0, 1/n]$. De manière équivalente, on voit que $Y^{b,n}$ reste confiné dans la zone mauve pâle.

Rappelons que l'intérêt de l'approximation $Y^{b,n}$ est de définir une suite convergeant vers $\Phi_b(b)$.

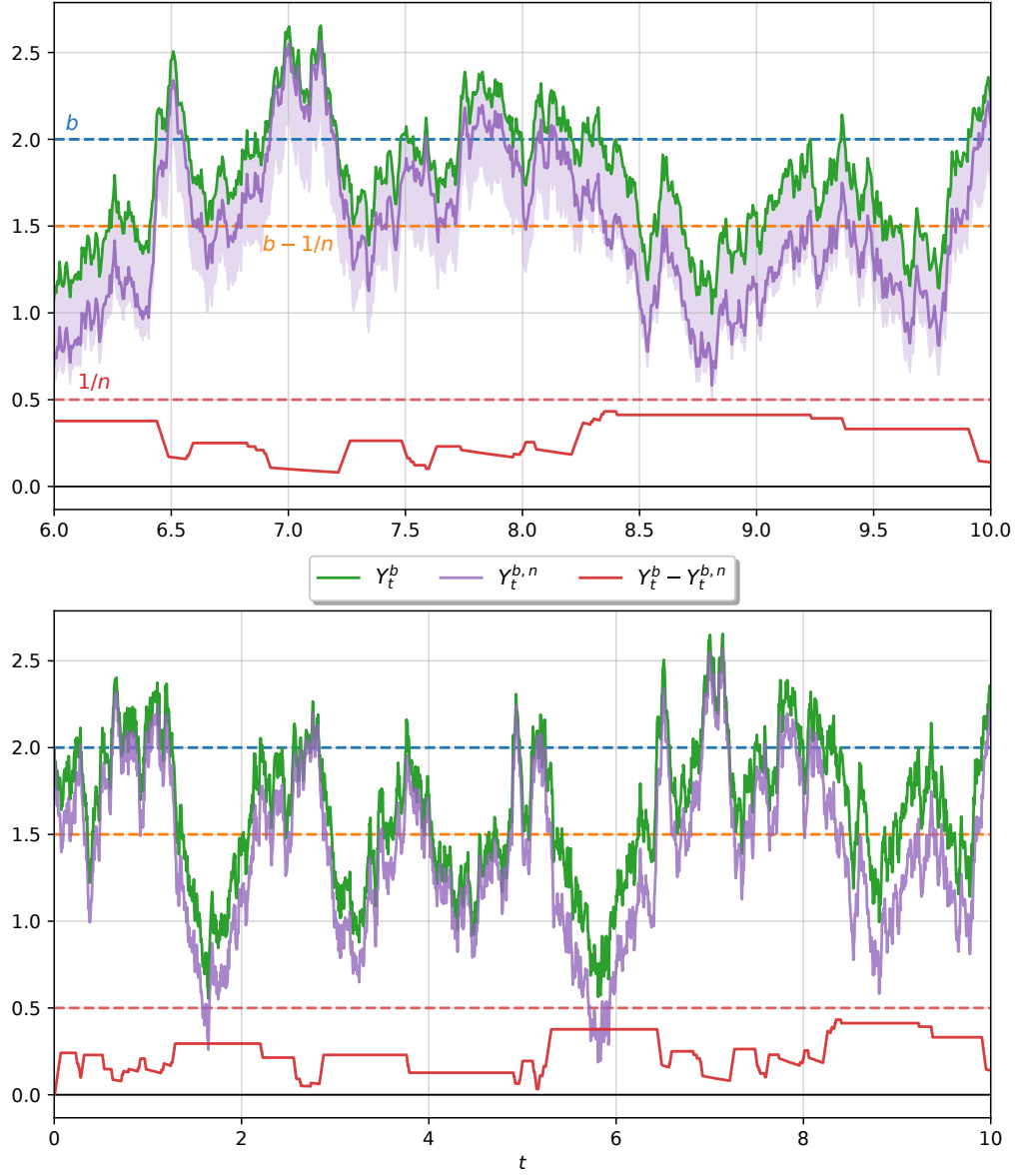


Figure 1.2 – Simulation de Y^b et $Y^{b,n}$ avec $b, n = 2$

Les deux graphes montrent la même simulation, mais sur des intervalles différents. La région mauve pâle sur le graphe du haut couvre $[Y_t^b - \frac{1}{n}, Y_t^b]$ en ordonnée. Le pas de la simulation est $\Delta t \approx 0.005$. Paramètres : $\mu = 1$, $\sigma^2 = 1$, $K = 1$, $S = 2$.

Lemme 1.11 La suite réelle $(\Phi_b^n(b))_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par

$$\Phi_b^n(b) := \mathbb{E}_b \left[e^{-q\tau_0^{Y^{b,n}}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^{b,n}} < \infty} \right]$$

converge vers $\Phi_b(b)$.

Preuve. De l'inégalité (1.5) évaluée en $t = \tau_0^{Y^b}$, on obtient $Y_{\tau_0^{Y^b}}^{b,n} \leq 0$, donc $\tau_0^{Y^{b,n}} \leq \tau_0^{Y^b}$. On voit aussi, avec $t = \tau_0^{Y^{b,n}}$, que $0 \leq Y_{\tau_0^{Y^{b,n}}}^b \leq \frac{1}{n}$. Ainsi, $(\tau_0^{Y^{b,n}})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de temps d'arrêt telle que $\tau_0^{Y^{b,n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tau_0^{Y^b}$ par la continuité du MB. De cette façon, étant donné que $x \mapsto e^{-qx} \mathbb{1}_{x < \infty}$ est bornée dans $[0, 1]$, alors par le Théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_b^n(b) = \mathbb{E}_b \left[\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-q\tau_0^{Y^{b,n}}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^{b,n}} < \infty} \right] = \Phi_b(b).$$

□

Rappelons que les processus de diffusion, tels que X , Y et Y^b , satisfont la **Propriété forte de Markov**, que nous utiliserons abondamment dans ce mémoire. Il convient en ce cas de la présenter : un processus en temps continu $(A_t)_{t \geq 0}$ à d dimensions satisfait la Propriété forte de Markov si, pour un temps d'arrêt τ et une fonctionnelle $\Upsilon : \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}_x [\mathbb{1}_{\tau < \infty} \Upsilon((A_{\tau+t})_{t \geq 0}) \mid \mathcal{F}_\tau] = \mathbb{1}_{\tau < \infty} \mathbb{E}_{A_\tau} [\Upsilon((A_t)_{t \geq 0})], \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

où $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions continues de \mathbb{R}_+ vers \mathbb{R}^d (voir par exemple le Corollaire 7.6 de (Le Gall, 2013)).

Nous avons enfin tout ce qu'il nous faut pour trouver une forme explicite de Φ_b , donnée par le Théorème 1.12 ci-dessous. On peut la comparer au Lemme 5 de (Renaud et al., 2023).

Théorème 1.12 La transformée Φ_b définit par l'équation (1.4) s'écrit comme

$$\Phi_b(x) = \begin{cases} \psi_b(x) - \frac{\varphi_b(x)\psi'_b(b)}{\varphi'_b(b) - \Psi'_b(b)}, & x < b, \\ -\frac{\Psi_b(x)\psi'_b(b)}{\varphi'_b(b) - \Psi'_b(b)}, & x \geq b. \end{cases}$$

Preuve. Nous montrons que Φ_b est donnée par

$$\Phi_b(x) = \begin{cases} \psi_b(x) + \Phi_b(b)\varphi_b(x), & x < b, \\ \Phi_b(b)\Psi_b(x), & x \geq b, \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\text{où } \Phi_b(b) = -\frac{\psi'_b(b)}{\varphi'_b(b) - \Psi'_b(b)}. \quad (1.7)$$

La preuve est séparée en deux parties : la première portant sur l'équation (1.6), et la seconde sur l'équation (1.7).

Premièrement, pour $x \geq b$, on a clairement que $\tau_b^{Y^b} \leq \tau_0^{Y^b}$ par la continuité du processus Y^b , donc on peut séparer l'exponentielle ainsi :

$$\Phi_b(x) = \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^{Y^b}} \mathbb{1}_{\tau_b^{Y^b} < \infty} \cdot e^{-q(\tau_0^{Y^b} - \tau_b^{Y^b})} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^b} < \infty} \right]$$

puis utiliser la Loi des espérances itérées et la $\mathcal{F}_{\tau_b^{Y^b}}$ -mesurabilité de $e^{-q\tau_b^{Y^b}} \mathbb{1}_{\tau_b^{Y^b} < \infty}$ pour obtenir

$$\Phi_b(x) = \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^{Y^b}} \mathbb{1}_{\tau_b^{Y^b} < \infty} \mathbb{E}_x \left[e^{-q(\tau_0^{Y^b} - \tau_b^{Y^b})} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^b} < \infty} \mid \mathcal{F}_{\tau_b^{Y^b}} \right] \right].$$

On applique la Propriété forte de Markov à la fonctionnelle $F : \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$F(y) = e^{-q \inf\{z > 0 \mid y(z) = 0\}} \mathbb{1}_{\inf\{z > 0 \mid y(z) = 0\} < \infty},$$

où $y = (y(z))_{z \geq 0}$ est une fonction continue de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} . Ainsi,

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-q(\tau_0^{Y^b} - \tau_b^{Y^b})} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^b} - \tau_b^{Y^b} < \infty} \mid \mathcal{F}_{\tau_b^{Y^b}} \right] = \mathbb{E}_{Y_{\tau_b^{Y^b}}^b} \left[e^{-q\tau_0^{Y^b}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^b} < \infty} \right],$$

et comme $Y_{\tau_b^{Y^b}}^b = b$, on trouve enfin que

$$\begin{aligned} \Phi_b(x) &= \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^{Y^b}} \mathbb{1}_{\tau_b^{Y^b} < \infty} \mathbb{E}_{Y_{\tau_b^{Y^b}}^b} \left[e^{-q\tau_0^{Y^b}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^b} < \infty} \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_b \left[e^{-q\tau_0^{Y^b}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^b} < \infty} \right] \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^{Y^b}} \mathbb{1}_{\tau_b^{Y^b} < \infty} \right] \\ &= \Phi_b(b) \Psi_b(x), \end{aligned}$$

puisque $(Y_t^b)_{0 \leq t < \tau_b^{Y^b}}$ est de même loi que $(Y_t)_{0 \leq t < \tau_b^Y}$.

Pour $x < b$, la démarche est très similaire, à la différence près qu'on sépare le cas où Y^b atteint 0 avant b

et vice-versa :

$$\begin{aligned}
\Phi_b(x) &= \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^{Y^b}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^b} < \infty} \cdot \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^b} < \tau_b^{Y^b}} \right] + \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^{Y^b}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^b} < \infty} \cdot \mathbb{1}_{\tau_b^{Y^b} < \tau_0^{Y^b}} \right] \\
&= \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^{Y^b}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^b} < \tau_b^{Y^b}} \right] + \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^{Y^b}} \mathbb{1}_{\tau_b^{Y^b} < \tau_0^{Y^b}} \cdot e^{-q(\tau_0^{Y^b} - \tau_b^{Y^b})} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^b} < \infty} \right] \\
&= \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^X} \mathbb{1}_{\tau_0^X < \tau_b^X} \right] + \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^{Y^b}} \mathbb{1}_{\tau_b^{Y^b} < \tau_0^{Y^b}} \mathbb{E}_x \left[e^{-q(\tau_0^{Y^b} - \tau_b^{Y^b})} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^b} < \infty} \mid \mathcal{F}_{\tau_b^{Y^b}} \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^X} \mathbb{1}_{\tau_0^X < \tau_b^X} \right] + \mathbb{E}_b \left[e^{-q\tau_0^{Y^b}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^b} < \infty} \right] \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_b^X} \mathbb{1}_{\tau_b^X < \tau_0^X} \right] \\
&= \psi_b(x) + \Phi_b(b) \varphi_b(x),
\end{aligned}$$

puisque $(Y_t^b)_{0 \leq t < \tau_0^{Y^b} \wedge \tau_b^{Y^b}}$ et $(X_t)_{0 \leq t < \tau_0^X \wedge \tau_b^X}$ sont de même loi. De plus, on a utilisé $\{\tau_b^{Y^b} < \tau_0^{Y^b}\} \in \mathcal{F}_{\tau_b^{Y^b}}$ à la troisième ligne.

Deuxièmement, pour calculer $\Phi_b(b)$, nous passons par l'approximation introduite plus tôt. Par le fait que $Y^{b,n}$ commence en b , et que sa dérive égale $\mu - (KY_t^{b,n} + S)$ jusqu'à ce que le processus descende sous $b - 1/n$, le calcul de $\Phi_b^n(b)$ est dans ce cas analogue au calcul de $\Phi_b(x)$ pour $x \geq b$. On obtient

$$\Phi_b^n(b) = \mathbb{E}_{b-\frac{1}{n}} \left[e^{-q\tau_0^{Y^{b,n}}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^{b,n}} < \infty} \right] \mathbb{E}_b \left[e^{-q\tau_{b-\frac{1}{n}}^{Y^{b,n}}} \mathbb{1}_{\tau_{b-\frac{1}{n}}^{Y^{b,n}} < \infty} \right] = \Phi_b^n(b - 1/n) \Psi_{b-\frac{1}{n}}(b). \quad (1.8)$$

Le calcul de $\Phi_b^n(b - 1/n)$ est quant à lui comme le calcul de $\Phi_b(x)$ pour $x < b$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\Phi_b^n(b - 1/n) &= \mathbb{E}_{b-\frac{1}{n}} \left[e^{-q\tau_0^{Y^{b,n}}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^{b,n}} < \tau_b^{Y^{b,n}}} \right] \\
&\quad + \mathbb{E}_{b-\frac{1}{n}} \left[e^{-q\tau_b^{Y^{b,n}}} \mathbb{1}_{\tau_b^{Y^{b,n}} < \tau_0^{Y^{b,n}}} \right] \mathbb{E}_b \left[e^{-q\tau_0^{Y^{b,n}}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^{b,n}} < \infty} \right] \\
&= \psi_b(b - 1/n) + \Phi_b^n(b) \varphi_b(b - 1/n),
\end{aligned} \quad (1.9)$$

car en partant de $b - \frac{1}{n}$, les processus $(Y_t^{b,n})_{0 \leq t < \tau_b^{Y^{b,n}}}$ et $(Y_t^b)_{0 \leq t < \tau_b^{Y^b}}$ sont de même loi. Notons que le calcul des équations (1.8) et (1.9) fait intervenir la Propriété forte de Markov. Or, $Y^{b,n}$ n'est pas markovien, a priori, puisque sa dynamique à un instant t varie pour $t \in [\kappa_i^n, \lambda_i^n[$ ou $t \in [\lambda_i^n, \kappa_{i+1}^n[$. Toutefois, couplé avec le processus $H_t^{b,n} := \mathbb{1}_{t \in \bigcup_{i=1}^{\infty} [\kappa_i^n, \lambda_i^n]}$ qui encode binairement l'information sur la forme de la dynamique de $Y^{b,n}$ à chaque instant, la paire $(Y_t^{b,n}, H_t^{b,n})_{t \geq 0}$ est quant à elle markovienne. Bref, en remplaçant l'expression de l'équation (1.9) dans l'équation (1.8), puis en isolant le terme $\Phi_b^n(b)$, on a

$$\Phi_b^n(b) = \frac{\Psi_{b-\frac{1}{n}}(b) \psi_b(b - 1/n)}{1 - \Psi_{b-\frac{1}{n}}(b) \varphi_b(b - 1/n)} = \frac{\psi_b(b - 1/n)}{\frac{H(b-1/n)}{H(b)} - \varphi_b(b - 1/n)},$$

où l'on rappelle que $\Psi_{b-\frac{1}{n}}(b) = \frac{H(b)}{H(b-1/n)}$. En utilisant $\varphi_b(b) = 1$ et $\psi_b(b) = 0$, nous pouvons faire apparaître des quotients différentiels de la manière suivante :

$$\Phi_b^n(b) = \frac{\frac{\psi_b(b-1/n) - \psi_b(b)}{1/n}}{\frac{1}{H(b)} \left(\frac{H(b-1/n) - H(b)}{1/n} \right) - \frac{\varphi_b(b-1/n) - \varphi_b(b)}{1/n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\psi'_b(b)}{\frac{H'(b)}{H(b)} - \varphi'_b(b)} = \Phi_b(b).$$

Pour conclure, on remarque que

$$\Psi'_b(b) = \frac{d\Psi_b}{dx} \Big|_{x=b} = \frac{d}{dx} \left(\frac{H(x)}{H(b)} \right) \Big|_{x=b} = \frac{H'(b)}{H(b)},$$

donc on a bien démontré l'équation (1.7). \square

Proposition 1.13 La fonction Φ_b est strictement décroissante et strictement convexe sur \mathbb{R}_+ .

Preuve. Rappelons pour commencer que par définition de Φ_b , on a $\Phi_b(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$, et en particulier, $\Phi_b(b) > 0$.

Pour $x \geq b$, on a $\Phi_b(x) = \Phi_b(b)\Psi_b(x)$, où Ψ_b est telle que $\Psi'_b(x) < 0$ et $\Psi''_b(x) > 0$ (par la Proposition 1.7). Ainsi, Φ_b satisfait aussi ces inégalités puisque $\Phi_b(b) > 0$, ce qui conclut la preuve sur cet intervalle.

Pour $0 \leq x < b$, on a $\Phi_b(x) = \psi_b(x) + \Phi_b(b)\varphi_b(x)$, donc

$$\begin{aligned} \Phi'_b(x) &= \psi'_b(x) - \frac{\psi'_b(b)}{\varphi'_b(b) - \Psi'_b(b)} \varphi'_b(x) \\ &= \frac{1}{\varphi'_b(b) - \Psi'_b(b)} (\psi'_b(x)\varphi'_b(b) - \psi'_b(b)\varphi'_b(x) - \psi'_b(x)\Psi'_b(b)) \\ &\leq -\frac{\psi'_b(x)\Psi'_b(b)}{\varphi'_b(b) - \Psi'_b(b)} < 0, \end{aligned}$$

où la dernière ligne est due à $\psi'_b(x)\varphi'_b(b) - \psi'_b(b)\varphi'_b(x) \leq 0$ (qui est une conséquence directe du Lemme 1.8) et à la croissance/décroissance des transformées. Enfin, sur cet intervalle, Φ_b est une combinaison de linéaire de φ_b, ψ_b , qui sont solutions de l'équation différentielle (1.1), donc par la Remarque 1.1, Φ_b satisfait aussi cette EDO. Conséquemment,

$$\Phi''_b(x) = \frac{2}{\sigma^2} (q\Phi_b(x) - \mu\Phi'_b(x)) > 0.$$

\square

On remarquera que Φ_b est continûment différentiable sur $(0, \infty)$. En effet, elle l'est de toute évidence sur $(0, \infty) \setminus \{b\}$ par la continuité des transformées. Pour ce qui est de $x = b$, il est clair que $\Phi_b(b-) = \Phi_b(b+)$, et l'équation (1.7) fait en sorte que $\Phi'_b(b-) = \Phi'_b(b+)$.

CHAPITRE 2

PROBLÈME DE MAXIMISATION DE DIVIDENDES

Dans ce chapitre, nous étudions en détail le problème principal de ce mémoire, à savoir un problème de maximisation de dividendes au taux de versement borné par une fonction linéaire dans un modèle avec injections obligatoires où le surplus de capital intrinsèque est un MBA. À la Section 2.1, nous présentons formellement ce problème avant d'entreprendre sa résolution par après.

2.1 Énoncé du problème

Comme au Chapitre 1, on se place sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, et on considère encore le MBA $X = (X_t)_{t \geq 0}$ tel que

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t,$$

avec $\mu, \sigma > 0$ qui sont donnés et fixés.

Soit $0 < K, S < \infty$ fixés, l'ensemble des stratégies admissibles pour ce problème est caractérisé par l'ensemble de fonctions suivant :

$$\mathcal{U}_{K,S} = \{u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid 0 \leq u(x) \leq Kx + S \text{ pour tout } x \geq 0\}.$$

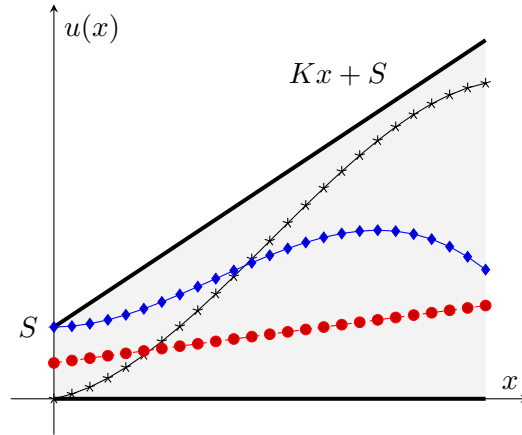


Figure 2.1 – Région couverte par $\mathcal{U}_{K,S}$ et exemples de stratégies admissibles

Soit $u \in \mathcal{U}_{K,S}$, on veut définir un processus $(X_t^u)_{t \geq 0}$ contrôlé par la fonction u et réfléchi vers les positifs lorsque $X_t^u = 0$. On dénote la paire de processus $(X_t^u, G_t^u)_{t \geq 0}$ comme étant solution du problème de Skorokhod suivant :

$$dX_t^u = (\mu - u(X_t^u))dt + \sigma dB_t + dG_t^u, \quad X_0^u = x, \quad G_0^u = 0,$$

où

- $X_t^u \geq 0$ pour tout $t \geq 0$;
- G^u est croissant;
- $\int_0^t \mathbb{1}_{X_s^u > 0} dG_s^u = 0$ (ou de façon équivalente, $G_t^u = \int_0^t \mathbb{1}_{X_s^u = 0} dG_s^u$) pour tout $t \geq 0$.

On se référera à (Pilipenko, 2014) et à la Section 3.6 de (Karatzas et Shreve, 1991) en ce qui concerne le problème de Skorokhod et les processus réfléchis.

Dans le contexte financier présenté en introduction de ce mémoire, le processus contrôlé X^u représente le surplus de capital d'une entreprise qui verse des dividendes à un taux dicté par u , et qui injecte du capital automatiquement lorsque X_t^u touche 0 de manière à éviter la faillite. Le processus G^u correspond dans ce cas à l'accumulation de ces injections; il s'agit du processus qui réfléchit X^u au niveau 0.

Notation 2.1 Nous utiliserons à nouveau $\mathbb{E}_x[\cdot]$ pour signifier que le processus dont nous prenons l'espérance est de valeur initiale x . Dans le cas où le processus est un couple (par exemple $(X_t^u, G_t^u)_{t \geq 0}$), nous écrirons $\mathbb{E}_{x,g}[\cdot]$. Cependant, si $g = 0$, nous l'omettrons et noterons simplement $\mathbb{E}_x[\cdot]$.

Le problème consiste alors à trouver une stratégie admissible u^* qui optimise la mesure de performance exprimée comme suit :

Définition 2.2 (Fonction de performance) Fixons $q > 0$ et $\beta > 1$. Pour $u \in \mathcal{U}_{K,S}$, la fonction de performance $V_u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$V_u(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} u(X_t^u) dt - \beta \int_0^\infty e^{-qt} dG_t^u \right], \quad x \geq 0.$$

Intuitivement, la fonction de performance mesure l'efficacité d'une stratégie admissible u en récompensant l'accumulation de dividendes et en pénalisant l'accumulation d'injections, le tout actualisé au taux d'intérêt continu q . Il s'agit donc d'une fonction que l'on cherche à maximiser par rapport à u .

Le paramètre β dénote le coût proportionnel d'injection de capital, et la condition $\beta > 1$ implique que les injections soient plus coûteuses que les dividendes, ce qui est nécessaire au vu du contexte. En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait verser instantanément les injections sous forme de dividendes, ce qui garantirait un gain infini.

Remarque 2.3 *Il convient de noter que V_u peut très bien être négative en certains points, puisqu'elle est définie par une différence de deux intégrales positives. Autrement dit, cela survient si le coût moyen des injections surpasse celui des dividendes.*

2.1.1 Objectif et stratégies linéaires

Tel que susmentionné, notre objectif est de maximiser la fonction V_u . On pourrait se contenter de chercher un $u_x \in \mathcal{U}_{K,S}$, pour $x \geq 0$ fixé, tel que $V_{u_x}(x) \geq V_u(x)$ pour tout $u \in \mathcal{U}_{K,S}$. Mais ce que nous cherchons ici, en réalité, est une stratégie admissible u^* qui maximise V_u uniformément pour tout $x \geq 0$, à supposer qu'une telle stratégie existe.

Autrement dit, nous cherchons $u^* \in \mathcal{U}_{K,S}$ telle que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $u \in \mathcal{U}_{K,S}$, on ait $V_{u^*}(x) \geq V_u(x)$. De plus, nous souhaitons trouver une forme explicite de cette fonction optimale, dite *fonction valeur*, que l'on note

$$V(x) = \sup_{u \in \mathcal{U}_{K,S}} V_u(x), \quad x \geq 0.$$

Pour résumer, l'objectif du problème est de trouver

- la fonction valeur $V(x) = \sup_{u \in \mathcal{U}_{K,S}} V_u(x)$;
- un contrôle optimal $u^* \in \mathcal{U}_{K,S}$ tel que $V_{u^*}(x) = V(x)$ pour tout $x \geq 0$.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction de ce mémoire, une approche courante pour la résolution de problèmes de ce genre est de considérer d'abord un sous-ensemble des stratégies admissibles. Cela est justifié par l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman, dont il est attendu qu'une solution de cette équation soit précisément la fonction valeur V . Pour un problème donné, la forme exacte de cette équation est déterminée généralement de façon heuristique, mais peut l'être aussi formellement en utilisant la programmation dynamique stochastique et la Propriété forte de Markov (voir (Touzi, 2013)). Pour ce problème-ci, l'équation

HJB est donnée par¹

$$\max \left\{ \frac{\sigma^2}{2} \hat{V}''(x) + \mu \hat{V}'(x) - q \hat{V}(x) + \max_{0 \leq v \leq Kx+S} \left[v \left(1 - \hat{V}'(x) \right) \right], \hat{V}'(x) - \beta \right\} = 0, \quad x \geq 0.$$

On note \hat{V} ici pour clarifier qu'il s'agit bien d'une fonction *candidate*, et non pas de la fonction valeur V . On voit que le membre de droite dans le \max extérieur fait intervenir β ; cette partie de l'équation dicte en quelque sorte l'apport des injections obligatoires sur la fonction valeur, là où le membre de gauche concerne plutôt les versements de dividendes. En effet, l'équation HJB du problème analogue sans injections (voir (Rao, 2023)) est

$$\frac{\sigma^2}{2} \hat{V}''(x) + \mu \hat{V}'(x) - q \hat{V}(x) + \max_{0 \leq v \leq Kx+S} \left[v \left(1 - \hat{V}'(x) \right) \right] = 0, \quad x \geq 0.$$

Le terme $\hat{V}'(x) - \beta$ y est effectivement absent. Dans l'objectif de déceler le type de stratégie potentiellement optimal pour les dividendes, concentrons-nous sur cette équation. La variable v dans le \max peut nous informer sur le comportement d'une stratégie optimale. Pour chaque $x \geq 0$ fixé, sa valeur correspond au taux optimal de versement de dividendes. Autrement dit, nous pouvons *construire* une stratégie candidate \hat{u} en posant $\hat{u}(x) = \operatorname{argmax}_{0 \leq v \leq Kx+S} \left[v \left(1 - \hat{V}'(x) \right) \right]$ pour chaque $x \geq 0$ fixé. On remarquera qu'en fonction du signe de $1 - \hat{V}'(x)$, la valeur de v qui maximise $v(1 - \hat{V}'(x))$ est soit 0 ou $Kx+S$. Par conséquent, on s'attend à ce qu'une stratégie optimale soit de type *bang-bang* donnée par

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} 0, & \hat{V}'(x) > 1, \\ Kx + S, & \hat{V}'(x) \leq 1. \end{cases}$$

Une stratégie possiblement optimale serait donc de ne pas verser du tout lorsque $\hat{V}'(x) > 1$, et de verser maximalement lorsque $\hat{V}'(x) \leq 1$. Autrement dit, on ne verse pas quand un ajout au surplus initial augmente la fonction valeur plus que l'ajout, et on verse au maximum quand ce n'est plus le cas (voir (Avanzi, 2009)).

La fonction valeur \hat{V} dans ce genre de problème est typiquement concave, puisqu'une fonction de performance est en quelque sorte une fonction d'utilité. Il existe en économie le *principe de l'utilité marginale décroissante*, qui dit que la satisfaction (ou l'utilité) gagnée à l'ajout d'une unité d'un bien s'amoindrit à mesure que les biens s'accumulent. Par conséquent, si on s'attend à ce que \hat{V} soit concave, à savoir que \hat{V}'

1. Voir (Pérez et al., 2018), dont la forme de l'équation HJB diffère quelque peu de la nôtre puisqu'ils modélisent le surplus de capital par un processus de Lévy, dont le MBA est un cas particulier. De plus, ils considèrent une borne constante pour le taux de dividendes.

soit décroissante, il en découle que la stratégie candidate \hat{u} est de verser au taux maximal lorsque le surplus initial x dépasse un certain seuil $b > 0$ donné par $b = \inf\{c > 0 \mid \hat{V}'(c) \leq 1\}$:

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} 0, & x < b, \\ Kx + S, & x \geq b. \end{cases} \quad (2.1)$$

Cette conclusion concorde également avec le contexte financier du modèle : intuitivement, il est préférable de verser des dividendes à un plus haut taux lorsque le surplus de capital est élevé. Autrement dit, on souhaite que \hat{u} soit croissante. Parmi les stratégies bang-bang déduites plus haut, seules celles données par l'équation (2.1) sont telles que \hat{u} est monotone.

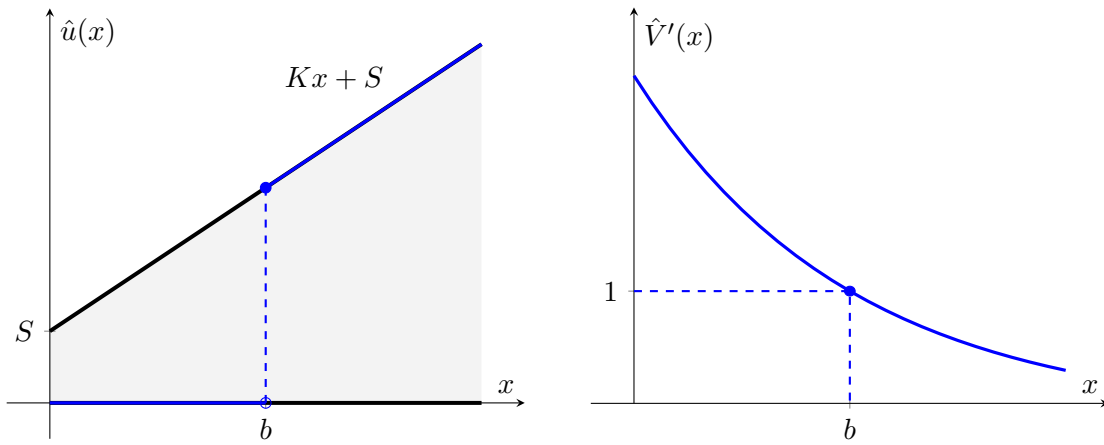


Figure 2.2 – Stratégie linéaire pour une fonction candidate continûment différentiable

Notons que si l'on suppose que \hat{V}' est continue, alors le seuil $b > 0$ est tel que $\hat{V}'(b) = 1$, ce qu'illustre la Figure 2.2. Cette condition sur la fonction valeur est commune à beaucoup de problèmes de maximisation de dividendes (voir (Albrecher et Thonhauser, 2009; Avanzi, 2009)), dont le problème de ce mémoire, comme nous le verrons aux Sections 2.3 et 2.4.

On appelle les stratégies de la forme (2.1) des stratégies *linéaires différées*, ou plus simplement *linéaires*. Nous nous concentrerons particulièrement sur ces stratégies à partir d'ici.

Définition 2.4 (Stratégies linéaires) L'ensemble des stratégies linéaires est défini par

$$\mathcal{U}_{K,S}^{\text{lin}} = \{u_b(x) = (Kx + S)\mathbf{1}_{x \geq b} \mid b > 0\} \subseteq \mathcal{U}_{K,S}.$$

De cette façon, chaque stratégie linéaire est caractérisée par un seuil $b > 0$. Afin d'alléger la notation, nous

noterons $(X^b, G^b) := (X^{u_b}, G^{u_b})$ et $V_b := V_{u_b}$. On a donc, pour chaque $b > 0$, la paire (X^b, G^b) qui est solution du problème de Skorokhod suivant :

$$dX_t^b = \left(\mu - (KX_t^b + S)\mathbb{1}_{X_t^b \geq b} \right) dt + \sigma dB_t + dG_t^b, \quad X_0^b = x, \quad G_0^b = 0, \quad (2.2)$$

où

- $X_t^b \geq 0$ pour tout $t \geq 0$;
- G^b est croissant;
- $\int_0^t \mathbb{1}_{X_s^b > 0} dG_s^b = 0$ (ou de façon équivalente, $G_t^b = \int_0^t \mathbb{1}_{X_s^b = 0} dG_s^b$) pour tout $t \geq 0$;

dont il existe une solution forte (voir (Renaud et al., 2023)). On dit que X^b est réfracté au niveau b et réfléchi en 0. La fonction de performance d'une stratégie linéaire de seuil b est alors

$$V_b(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} (KX_t^b + S)\mathbb{1}_{X_t^b \geq b} dt - \beta \int_0^\infty e^{-qt} dG_t^b \right], \quad x \geq 0.$$

Comme on prévoit qu'une stratégie linéaire soit optimale grâce à l'étude de l'équation HJB, l'objectif du problème revient dans ce cas à trouver un $b^* > 0$ tel que la stratégie linéaire u_{b^*} soit optimale parmi toutes les stratégies admissibles. Autrement dit, on veut montrer que $V_{b^*}(x) \geq V_u(x)$ pour tout $x \geq 0$ et pour tout $u \in \mathcal{U}_{K,S}$ (ce qu'on aura ultimement au Théorème 2.20).

La Figure 2.3 illustre une simulation de $(X_t^b)_{t \geq 0}$ pour $t \in [0, 10]$ avec $b = 2$ et $x = 1$, en plus des divers processus sous-jacents, comme les injections cumulatives G^b , mais aussi le processus des dividendes cumulatifs $L^b = (L_t^b)_{t \geq 0}$ donné par

$$L_t^b = \int_0^t (KX_s^b + S)\mathbb{1}_{X_s^b \geq b} ds, \quad L_0^b = 0,$$

de telle sorte que l'équation (2.2) se simplifie ainsi :

$$dX_t^b = \mu dt + \sigma dB_t - dL_t^b + dG_t^b, \quad X_0^b = x, \quad L_0^b = 0, \quad G_0^b = 0.$$

Cette forme de la dynamique de X^b a pour avantage de mettre en exergue les fluctuations du surplus de capital causées par L^b et G^b .

Pour finir, le processus $U^b = (U_t^b)_{t \geq 0}$ représente en quelque sorte X^b avant d'être réfléchi en 0, et s'exprime par

$$dU_t^b = \mu dt + \sigma dB_t - dL_t^b, \quad U_0^b = x, \quad L_0^b = 0,$$

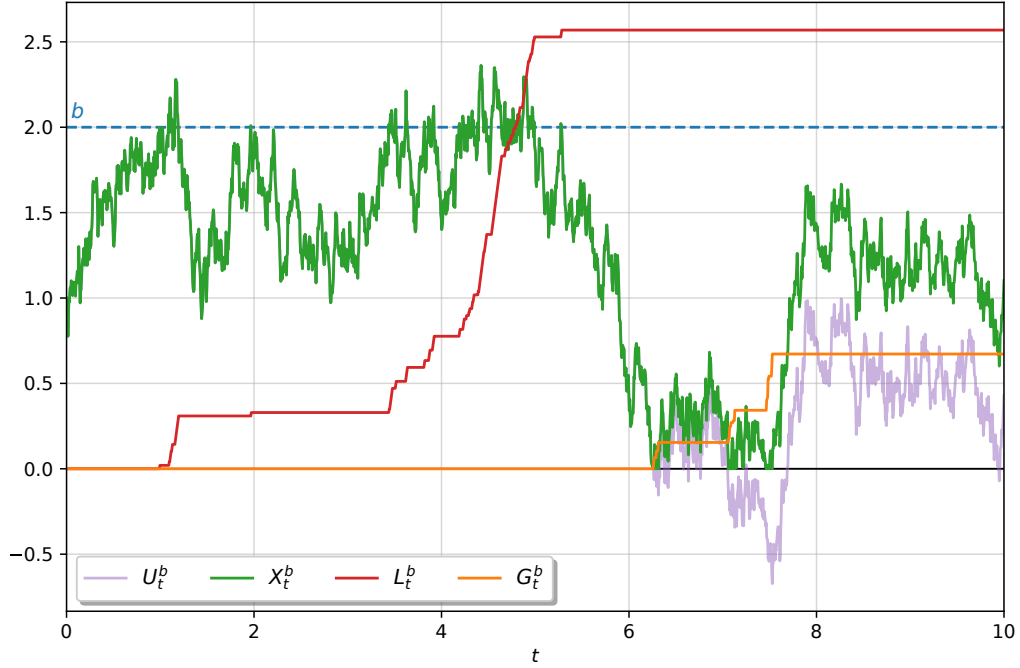


Figure 2.3 – Simulation de X^b avec $b = 2$ et $x = 1$

Le pas de la simulation est $\Delta t \approx 0.005$. Paramètres : $\mu = 1$, $\sigma^2 = 1$, $K = 1$, $S = 2$.

bien qu'il dépende de X^b . En effet, en explicitant dL_t^b , on obtient

$$dU_t^b = \left(\mu - (KX_t^b + S)\mathbb{1}_{X_t^b \geq b} \right) dt + \sigma dB_t,$$

à ne pas confondre avec le processus Y^b présenté au Chapitre 1, dont la dynamique est

$$dY_t^b = \left(\mu - (KY_t^b + S)\mathbb{1}_{Y_t^b \geq b} \right) dt + \sigma dB_t.$$

De cette façon, par (Pilipenko, 2014), on a les expressions simplifiées qui suivent pour tout $t \geq 0$:

$$X_t^b = U_t^b + G_t^b, \quad G_t^b = - \min_{0 \leq s \leq t} (U_s^b \wedge 0).$$

Rappelons que les solutions du problème de Skorokhod sont des processus de Markov.

Nous sommes fin prêts à nous attaquer à la résolution du problème, qui se fera essentiellement en trois étapes :

1. Calculer explicitement la fonction de performance V_b d'une stratégie de seuil quelconque $b > 0$ (Section 2.2);
2. Prouver l'existence d'un $b^* \geq 0$ tel que V_{b^*} satisfait des conditions de régularité qui sont nécessaires à la vérification (Section 2.3);

3. Vérifier que le candidat V_{b^*} est bien optimal parmi toutes les stratégies admissibles (Section 2.4).

Précisons que les conditions de régularité imposées à V_{b^*} consistent en ce qu'elle soit $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$, étant donné que la vérification fait intervenir la Formule d'Itô.

2.2 Calcul de la fonction de performance

Rappelons que les fonctions $\varphi_b, \psi_b, \Psi_b$ et Φ_b sont les transformées de Laplace de temps de premier passage de divers processus telles que nous les avons présentées et étudiées au Chapitre 1.

Soit $J_b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, la fonction de performance d'une stratégie linéaire de seuil $b \geq 0$, mais dans le problème de maximisation de dividendes sans injection, c'est-à-dire

$$J_b(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_0^{Y^b}} e^{-qt} (KY_t^b + S) \mathbb{1}_{Y_t^b \geq b} dt \right], \quad x \geq 0. \quad (2.3)$$

Il a été montré par (Rao, 2023) qu'elle s'exprime explicitement de la manière suivante :

$$J_b(x) = \begin{cases} J_b(b)\varphi_b(x), & x < b, \\ \frac{K}{q+K} \left(x + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) + \left[J_b(b) - \frac{K}{q+K} \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right] \Psi_b(x), & x \geq b, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\text{où } J_b(b) = \frac{\frac{K}{q+K} \left[1 - \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \Psi'_b(b) \right]}{\varphi'_b(b) - \Psi'_b(b)}. \quad (2.5)$$

Par les propriétés des transformées, on constate que J_b est continûment différentiable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{b\}$. Comme pour Φ_b , l'équation (2.5) fait en sorte que $J'_b(b-) = J'_b(b+)$, donc que J_b soit, en fait, continûment différentiable sur tout \mathbb{R}_+ . Évidemment, J_b est positive vu que l'intégrande dans (2.3) est positif.

Lemme 2.5 Pour tout $b > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \frac{J'_b(x)}{\Phi'_b(x)}$ est décroissante pour tout $x \geq 0$.

Preuve. La dérivée de $x \mapsto \frac{J'_b(x)}{\Phi'_b(x)}$ étant

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{J'_b(x)}{\Phi'_b(x)} \right) = \frac{J''_b(x)\Phi'_b(x) - J'_b(x)\Phi''_b(x)}{(\Phi'_b(x))^2},$$

il suffit de montrer que $J'_b(x)\Phi''_b(x) \geq J''_b(x)\Phi'_b(x)$ pour tout $x \geq 0$. Nous considérons séparément les intervalles $[0, b)$ et $[b, \infty)$ dans le but d'utiliser les équations (1.6) et (2.4).

Pour $0 \leq x < b$, les fonctions J_b et Φ_b sont toutes deux une combinaison linéaire de φ_b, ψ_b , qui sont solutions de l'équation différentielle (1.1). De cette façon, J_b et Φ_b sont aussi solutions de cette EDO sur cet intervalle, donc $J'_b(x)\Phi''_b(x) \geq J''_b(x)\Phi'_b(x)$ si et seulement si

$$J'_b(x) \cdot \frac{2}{\sigma^2} (q\Phi_b(x) - \mu\Phi'_b(x)) \geq \frac{2}{\sigma^2} (qJ_b(x) - \mu J'_b(x)) \Phi'_b(x).$$

Après simplifications, on voit que cette inégalité est équivalente à

$$J'_b(x)\Phi_b(x) \geq J_b(x)\Phi'_b(x),$$

cette dernière étant toujours vraie puisque $J'_b(x)\Phi_b(x) \geq 0 \geq J_b(x)\Phi'_b(x)$ par la croissance de J_b et la décroissance de Φ_b ainsi que la positivité de ces fonctions.

Et pour $x \geq b$, on a que $J'_b(x)\Phi''_b(x) \geq J''_b(x)\Phi'_b(x)$ équivaut à

$$\begin{aligned} \left[\frac{K}{q+K} + \left(J_b(b) - \frac{K}{q+K} \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right) \Psi'_b(x) \right] \Phi_b(b) \Psi''_b(x) \\ \geq \left[J_b(b) - \frac{K}{q+K} \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right] \Psi''_b(x) \cdot \Phi_b(b) \Psi'_b(x), \end{aligned}$$

qui se simplifie pour donner $\frac{K}{q+K} \geq 0$, ce qui est évidemment toujours vrai. \square

On peut exprimer V_b en fonction de J_b et de Φ_b .

Théorème 2.6 La fonction de performance d'une stratégie linéaire de seuil $b > 0$ est donnée par

$$V_b(x) = \begin{cases} V_b(b)\varphi_b(x) + V_b(0)\psi_b(x), & x < b, \\ \frac{K}{q+K} \left(x + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) + \left[V_b(b) - \frac{K}{q+K} \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right] \Psi_b(x), & x \geq b. \end{cases} \quad (2.6)$$

Preuve. Nous allons plutôt montrer que V_b s'écrit sous la forme compacte qui suit :

$$V_b(x) = J_b(x) + V_b(0)\Phi_b(x), \quad x \geq 0. \quad (2.7)$$

Pour $x = 0$, la relation est triviale puisque $J_b(0) = 0$ et $\Phi_b(0) = 1$. Pour $x > 0$, lorsque $X_0^b = x$, il n'y a aucune injection avant le temps d'arrêt $\tau_0^{X^b}$, c'est-à-dire que $G_t^b = 0$ pour tout $t \in [0, \tau_0^{X^b})$. Il en découle

que $(X_t^b)_{0 \leq t < \tau_0^{X^b}}$ et $(Y_t^b)_{0 \leq t < \tau_0^{Y^b}}$ sont de même loi. Ainsi,

$$\begin{aligned} V_b(x) &= \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_0^{X^b}} e^{-qt} (KX_t^b + S) \mathbb{1}_{X_t^b \geq b} dt \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\tau_0^{X^b} < \infty} \int_{\tau_0^{X^b}}^\infty e^{-qt} \left((KX_t^b + S) \mathbb{1}_{X_t^b \geq b} dt - \beta dG_t^b \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_0^{Y^b}} e^{-qt} (KY_t^b + S) \mathbb{1}_{Y_t^b \geq b} dt \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^{X^b}} \mathbb{1}_{\tau_0^{X^b} < \infty} \int_0^\infty e^{-qs} \left(\left(KX_{s+\tau_0^{X^b}}^b + S \right) \mathbb{1}_{X_{s+\tau_0^{X^b}}^b \geq b} ds - \beta dG_{s+\tau_0^{X^b}}^b \right) \right], \end{aligned}$$

où l'on a procédé au changement de variable $s = t - \tau_0^{X^b}$ dans l'intégrale de la seconde espérance. Comme dans la démonstration du Théorème 1.12, on applique la Loi des espérances itérées à cette espérance, qui devient donc

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^{X^b}} \mathbb{1}_{\tau_0^{X^b} < \infty} \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qs} \left(\left(KX_{s+\tau_0^{X^b}}^b + S \right) \mathbb{1}_{X_{s+\tau_0^{X^b}}^b \geq b} ds - \beta dG_{s+\tau_0^{X^b}}^b \right) \mid \mathcal{F}_{\tau_0^{X^b}} \right] \right].$$

Étant donné que (X^b, G^b) est un couple markovien (voir (Pilipenko, 2014)), on applique la Propriété forte de Markov à la fonctionnelle $F : \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$F(y, g) = \int_0^\infty e^{-qz} (Ky(z) + S) \mathbb{1}_{y(z) \geq b} dz - \beta \int_0^\infty e^{-qz} dg(z),$$

où $(y, g) = (y(z), g(z))_{z \geq 0}$ est une fonction continue de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}^2 , ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qs} \left(\left(KX_{s+\tau_0^{X^b}}^b + S \right) \mathbb{1}_{X_{s+\tau_0^{X^b}}^b \geq b} ds - \beta dG_{s+\tau_0^{X^b}}^b \right) \mid \mathcal{F}_{\tau_0^{X^b}} \right] \\ = \mathbb{E}_{X_{\tau_0^{X^b}}^b} \left[\int_0^\infty e^{-qs} \left((KX_s^b + S) \mathbb{1}_{X_s^b \geq b} ds - \beta dG_s^b \right) \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent, puisque $X_{\tau_0^{X^b}}^b = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} V_b(x) &= \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_0^{Y^b}} e^{-qt} (KY_t^b + S) \mathbb{1}_{Y_t^b \geq b} dt \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_0 \left[\int_0^\infty e^{-qs} \left((KX_s^b + S) \mathbb{1}_{X_s^b \geq b} ds - \beta dG_s^b \right) \right] \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^{X^b}} \mathbb{1}_{\tau_0^{X^b} < \infty} \right] \\ &= J_b(x) + V_b(0) \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^{Y^b}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Y^b} < \infty} \right] \\ &= J_b(x) + V_b(0) \Phi_b(x). \end{aligned}$$

Pour terminer, par substitution directe dans l'équation (2.7) de la forme explicite de J_b et Φ_b , ainsi qu'avec la relation $V_b(b) = J_b(b) + V_b(0)\Phi_b(b)$, la fonction de performance s'écrit comme en (2.6). \square

2.2.1 Fonction de performance en zéro

Il nous faut maintenant expliciter $V_b(0)$. Pour cela, on considère le premier moment où X^b atteint b , soit le temps d'arrêt $\tau_b^{X^b}$. Si $X_0^b = 0$, alors aucun dividende n'est versé avant $\tau_b^{X^b}$. De cette façon, on a

$$V_b(0) = \mathbb{E}_0 \left[-\beta \int_0^{\tau_b^{X^b}} e^{-qt} dG_t^b \right] + \mathbb{E}_0 \left[\mathbb{1}_{\tau_b^{X^b} < \infty} \int_{\tau_b^{X^b}}^{\infty} e^{-qt} \left((KX_t^b + S) \mathbb{1}_{X_t^b \geq b} dt - \beta dG_t^b \right) \right].$$

Pour le second terme, on applique la même démarche que dans la démonstration du Théorème 2.6, en passant par la Loi des espérances itérées et la Propriété forte de Markov. On trouve

$$\begin{aligned} V_b(0) &= \mathbb{E}_0 \left[-\beta \int_0^{\tau_b^{X^b}} e^{-qt} dG_t^b \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_b^{X^b}} \mathbb{1}_{\tau_b^{X^b} < \infty} \mathbb{E}_{X_{\tau_b^{X^b}}^b} \left[\int_0^{\infty} e^{-qt} \left((KX_t^b + S) \mathbb{1}_{X_t^b \geq b} dt - \beta dG_t^b \right) \right] \right] \\ &= -\beta \mathbb{E}_0 \left[\int_0^{\tau_b^{X^b}} e^{-qt} dG_t^b \right] + V_b(b) \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_b^{X^b}} \mathbb{1}_{\tau_b^{X^b} < \infty} \right]. \end{aligned}$$

Soit le couple $(Z_t, G_t)_{t \geq 0}$ solution du problème de Skorokhod suivant :

$$dZ_t = \mu dt + \sigma dB_t + dG_t,$$

dont

- $Z_t \geq 0$ pour tout $t \geq 0$;
- G est croissant;
- $\int_0^t \mathbb{1}_{Z_s > 0} dG_s = 0$ (ou de façon équivalente, $G_t = \int_0^t \mathbb{1}_{Z_s = 0} dG_s$) pour tout $t \geq 0$.

Comme il s'agit d'une solution d'un problème de Skorokhod, alors pour tout $t \geq 0$,

$$G_t = - \min_{0 \leq s \leq t} (X_s \wedge 0),$$

où X est le MBA donné par

$$X_t = Z_0 + \mu t + \sigma B_t, \quad t \geq 0.$$

De plus, du fait que $Z_0 = 0$, et donc $X_0 = 0$, on a plus particulièrement

$$G_t = - \min_{0 \leq s \leq t} X_s.$$

De facto, le processus Z est un MBA réfléchi en 0. On remarquera que, en dessous de b , le processus contrôlé X^b se comporte comme Z . Ainsi, $(X_t^b, G_t^b)_{0 \leq t < \tau_b^{X^b}}$ est de même loi que le couple $(Z_t, G_t)_{0 \leq t < \tau_b^Z}$.

Par conséquent, posons

$$\Lambda_b := \mathbb{E}_0 \left[\int_0^{\tau_b^Z} e^{-qt} dG_t \right], \quad \Theta_b := \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_b^Z} \mathbf{1}_{\tau_b^Z < \infty} \right], \quad (2.8)$$

alors

$$V_b(0) = -\beta\Lambda_b + V_b(b)\Theta_b. \quad (2.9)$$

Pour déterminer Λ_b et Θ_b , nous procédons par approximation de manière semblable à ce que nous avons fait au Chapitre 1. Il s'agit, à notre connaissance, d'une approche novatrice.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on considère le couple de processus $(Z_t^n, G_t^n)_{t \geq 0}$ tel que

$$dZ_t^n = \mu dt + \sigma dB_t + dG_t^n, \quad Z_0^n = 0, \quad G_0^n = \frac{1}{n},$$

avec G^n de telle sorte que Z_t^n saute instantanément à $\frac{1}{n}$ dès qu'il touche en zéro. La dérive et la volatilité de Z^n étant constantes, ce processus se comporte donc comme le MBA X entre chaque saut. Pour $i \in \mathbb{N}$, le i^e saut survient lorsque X_t (on rappelle que $X_0 = 0$) atteint $-\frac{i-1}{n}$ pour la première fois, auquel cas $G_t^n = \frac{i}{n}$.

De cette façon, G^n s'écrit pour tout $t \geq 0$ par

$$G_t^n = \frac{1}{n} \left(1 - \left[n \min_{0 \leq s \leq t} X_s \right] \right) = \frac{\lfloor nG_t \rfloor + 1}{n},$$

puisque $-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $G_t = -\min_{0 \leq s \leq t} X_s$. Sous cette forme, on constate aisément que $dG_t^n = 0$ pour tout $t > 0$ sauf lorsque $nG_t = -i$, auquel cas $dG_t^n = \frac{1}{n}$ vu que $\lfloor nG_t \rfloor$ augmente d'un entier. Et comme

$$\{t > 0 \mid nG_t = -i; i \in \mathbb{N}\} = \left\{ \tau_{-\frac{i}{n}}^X; i \in \mathbb{N} \right\},$$

alors

$$dG_t^n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & t = \tau_{-\frac{i}{n}}^X, i \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.10)$$

On pourra se référer à la Figure 2.4 pour une illustration de ces processus.

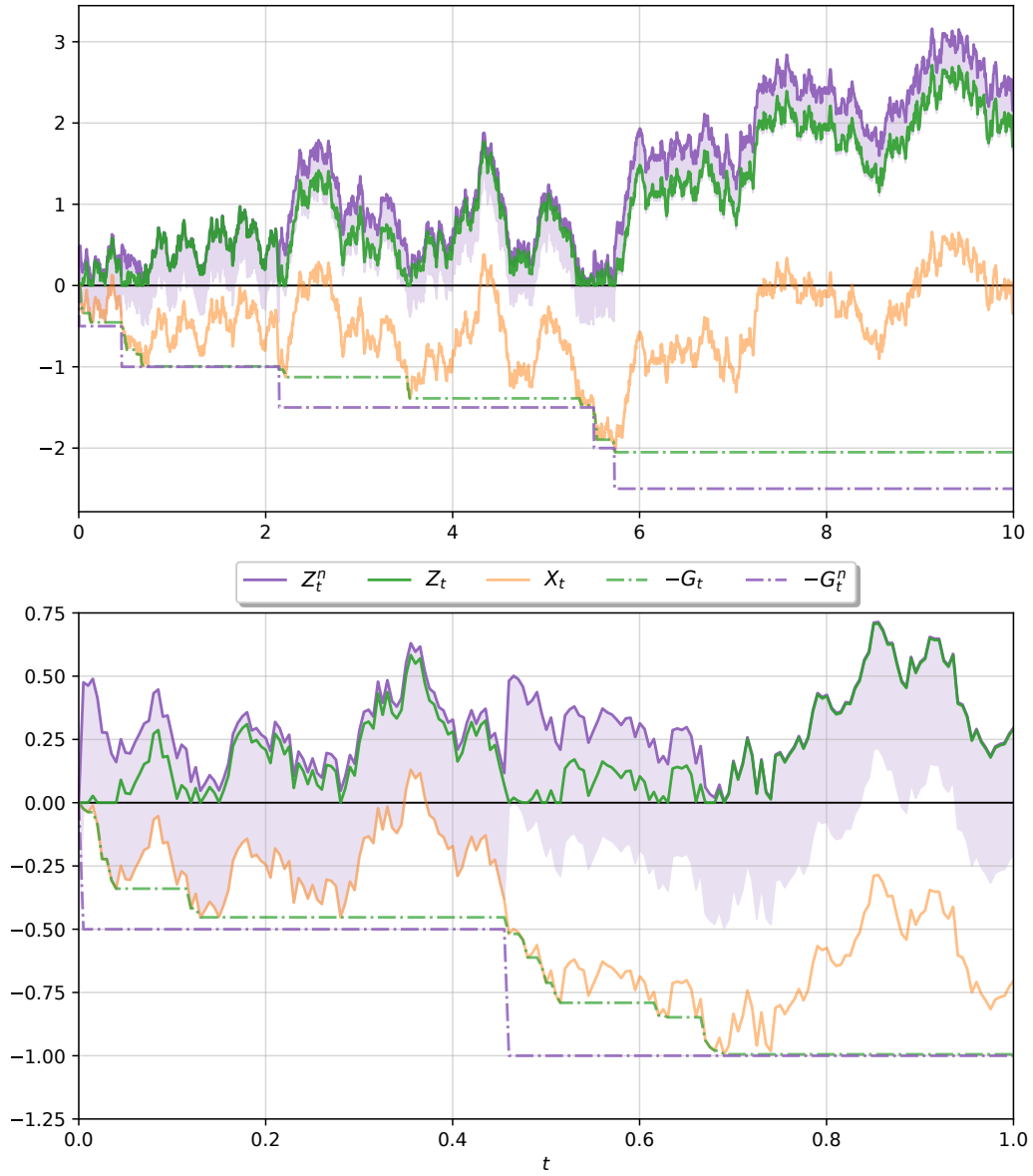


Figure 2.4 – Simulation de Z et Z^n avec $n = 2$

Les deux graphes montrent la même simulation, mais sur des intervalles différents. La région mauve pâle couvre $[Z_t^n - \frac{1}{n}, Z_t^n]$ en ordonnée. Le pas de la simulation est $\Delta t \approx 0.005$. Paramètres : $\mu = 0.1$, $\sigma^2 = 1$.

Lemme 2.7 Les expressions Λ_b et Θ_b données par l'équation (2.8) satisfont

$$\begin{aligned}\Theta_b^n &:= \mathbb{E}_{0, \frac{1}{n}} \left[e^{-q\tau_b^{Z^n}} \mathbb{1}_{\tau_b^{Z^n} < \infty} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Theta_b, \\ \Lambda_b^n &:= \mathbb{E}_{0, \frac{1}{n}} \left[\int_0^{\tau_b^{Z^n}} e^{-qt} dG_t^n \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Lambda_b,\end{aligned}$$

où $\mathbb{E}_{0, \frac{1}{n}}$ est l'espérance avec $Z_0^n = 0$ et $G_0^n = \frac{1}{n}$ (voir la Notation 2.1).

Preuve. Comme $0 < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} - x \leq \frac{1}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, et que $G_t^n = \frac{\lfloor nG_t \rfloor + 1}{n}$, alors on obtient les deux relations suivantes, qui sont équivalentes pour tout $t \geq 0$ (puisque $Z^n = X + G^n$) :

$$0 < G_t^n - G_t \leq \frac{1}{n}, \quad 0 < Z_t^n - Z_t \leq \frac{1}{n}.$$

Pour $t = \tau_b^Z$ dans la seconde inégalité, on voit que $\tau_b^{Z^n} > b$, donc $\tau_b^{Z^n} \leq \tau_b^Z$. Et avec $t = \tau_b^{Z^n}$ dans cette même inégalité, on trouve $b - \frac{1}{n} < Z_{\tau_b^{Z^n}} \leq b$. Par la continuité du MB, il s'ensuit que $\tau_b^{Z^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tau_b^Z$. En conséquence, comme $x \mapsto e^{-qx} \mathbb{1}_{x < \infty}$ est bornée dans $[0, 1]$, alors par le Théorème de convergence dominée, on a bien que $\Theta_b^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Theta_b$.

Et pour Λ_b^n , notons d'abord que

$$\int_0^{\tau_b^{Z^n}} e^{-qt} dG_t^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{\tau_b^Z} e^{-qt} dG_t,$$

puisque

$$\begin{aligned}\left| \int_0^{\tau_b^{Z^n}} e^{-qt} dG_t^n - \int_0^{\tau_b^Z} e^{-qt} dG_t \right| &= \left| \int_0^{\tau_b^{Z^n}} e^{-qt} (dG_t^n - dG_t) - \int_{\tau_b^{Z^n}}^{\tau_b^Z} e^{-qt} dG_t \right| \\ &\leq \frac{1}{n} + \left| \int_{\tau_b^{Z^n}}^{\tau_b^Z} e^{-qt} dG_t \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,\end{aligned}$$

par l'inégalité du triangle et le fait que $0 < G_t^n - G_t \leq \frac{1}{n}$ pour tout $t \geq 0$. Pour finir, on a $\Lambda_b^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Lambda_b$ par le Théorème de convergence dominée, vu que

$$\int_0^{\tau_b^{Z^n}} e^{-qt} dG_t^n \leq G_{\tau_b^{Z^n}}^n \leq \frac{1}{n} + G_{\tau_b^{Z^n}} \leq 1 - \min_{0 \leq s \leq \tau_b^{Z^n}} X_s \leq 1 - \min_{0 \leq s < \infty} X_s,$$

et que la variable aléatoire $-\min_{0 \leq s < \infty} X_s$ est d'espérance finie (voir la démonstration du Lemme 2.18). \square

Il ne reste maintenant qu'à trouver la forme explicite de Λ_b^n et de Θ_b^n , puis à calculer leur limite pour $n \rightarrow \infty$.

Proposition 2.8 Pour tout $b > 0$, la fonction de performance V_b évaluée en $x = 0$ est

$$V_b(0) = \frac{\beta - J'_b(0)}{\Phi'_b(0)}. \quad (2.11)$$

Preuve. La preuve est divisée en trois parties : les deux premières servent à calculer respectivement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_b^n = -\frac{1}{\psi'_b(0)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_b^n = -\frac{\varphi'_b(0)}{\psi'_b(0)},$$

que nous utiliserons pour calculer $V_b(0)$ à la dernière partie.

Pour déterminer Λ_b^n et Θ_b^n , nous séparons les espérances selon que Z^n atteigne 0 ou b en premier.

Premièrement, pour Λ_b^n , si $\tau_b^{Z^n} < \tau_0^{Z^n}$, alors $\int_0^{\tau_b^{Z^n}} e^{-qt} dG_t^n = 0$. Sinon, le processus G^n fait un premier de saut de hauteur $\frac{1}{n}$ lorsque $t = \tau_0^{Z^n} = \tau_{-1/n}^X$, par l'équation (2.10). Ainsi,

$$\begin{aligned} \Lambda_b^n &= \mathbb{E}_{0, \frac{1}{n}} \left[\mathbb{1}_{\tau_0^{Z^n} < \tau_b^{Z^n}} \int_0^{\tau_b^{Z^n}} e^{-qt} dG_t^n \right] \\ &= \mathbb{E}_{0, \frac{1}{n}} \left[\mathbb{1}_{\tau_0^{Z^n} < \tau_b^{Z^n}} \left(\frac{1}{n} e^{-q\tau_0^{Z^n}} + \int_{\tau_0^{Z^n}}^{\tau_b^{Z^n}} e^{-qt} dG_t^n \right) \right] \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_0^{Z^n}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Z^n} < \tau_b^{Z^n}} \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{0, \frac{1}{n}} \left[e^{-q\tau_0^{Z^n}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Z^n} < \tau_b^{Z^n}} \mathbb{E}_{0, \frac{1}{n}} \left[\int_0^{\tau_b^{Z^n} - \tau_0^{Z^n}} e^{-qs} dG_{s+\tau_0^{Z^n}}^n \mid \mathcal{F}_{\tau_0^{Z^n}} \right] \right], \end{aligned}$$

la seconde espérance étant obtenue par le changement de variable $s = t - \tau_0^{Z^n}$ dans l'intégrale, puis par la Loi des espérances itérées et la $\mathcal{F}_{\tau_0^{Z^n}}$ -mesurabilité de $e^{-q\tau_0^{Z^n}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Z^n} < \tau_b^{Z^n}}$. En lui appliquant ensuite la Propriété forte de Markov, on trouve

$$\begin{aligned} \Lambda_b^n &= \frac{1}{n} \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_0^{Z^n}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Z^n} < \tau_b^{Z^n}} \right] + \mathbb{E}_{0, \frac{1}{n}} \left[e^{-q\tau_0^{Z^n}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Z^n} < \tau_b^{Z^n}} \mathbb{E}_{Z^n_{\tau_0^{Z^n}}} \left[\int_0^{\tau_b^{Z^n}} e^{-qs} dG_s^n \right] \right] \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_0^{Z^n}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Z^n} < \tau_b^{Z^n}} \right] + \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_0^{Z^n}} \mathbb{1}_{\tau_0^{Z^n} < \tau_b^{Z^n}} \right] \mathbb{E}_{0, \frac{1}{n}} \left[\int_0^{\tau_b^{Z^n}} e^{-qs} dG_s^n \right] \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E}_{\frac{1}{n}} \left[e^{-q\tau_0^X} \mathbb{1}_{\tau_0^X < \tau_b^X} \right] + \mathbb{E}_{\frac{1}{n}} \left[e^{-q\tau_0^X} \mathbb{1}_{\tau_0^X < \tau_b^X} \right] \Lambda_b^n, \end{aligned}$$

car $(Z^n)_{0 \leq t < \tau_0^{Z^n}}$ est de même loi par rapport à \mathbb{P}_0 que $(X_t)_{0 \leq t < \tau_0^X}$ par rapport à $\mathbb{P}_{\frac{1}{n}}$. De cette façon, en isolant Λ_b^n ,

$$\Lambda_b^n = \frac{1}{n} \cdot \frac{\mathbb{E}_{\frac{1}{n}} \left[e^{-q\tau_0^X} \mathbb{1}_{\tau_0^X < \tau_b^X} \right]}{1 - \mathbb{E}_{\frac{1}{n}} \left[e^{-q\tau_0^X} \mathbb{1}_{\tau_0^X < \tau_b^X} \right]} = \psi_b(1/n) \frac{1/n}{1 - \psi_b(1/n)},$$

et en prenant la limite pour $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_b^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_b(1/n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1 - \psi_b(1/n)} = \psi_b(0) \left[- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_b(1/n) - \psi_b(0)}{1/n} \right]^{-1} = - \frac{1}{\psi'_b(0)},$$

puisque $\psi_b(0) = 1$.

Deuxièmement, pour Θ_b^n , on procède essentiellement comme avec $\Phi_b(x)$ pour $x < b$:

$$\begin{aligned} \Theta_b^n &= \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_b^{Z^n}} \mathbf{1}_{\tau_b^{Z^n} < \tau_0^{Z^n}} \right] + \mathbb{E}_0 \left[\mathbf{1}_{\tau_b^{Z^n} < \tau_0^{Z^n}} \cdot e^{-q\tau_b^{Z^n}} \mathbf{1}_{\tau_0^{Z^n} < \tau_b^{Z^n}} \right] \\ &= \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_b^{Z^n}} \mathbf{1}_{\tau_b^{Z^n} < \tau_0^{Z^n}} \right] + \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_0^{Z^n}} \mathbf{1}_{\tau_0^{Z^n} < \tau_b^{Z^n}} \mathbb{E}_0 \left[e^{-q(\tau_b^{Z^n} - \tau_0^{Z^n})} \mathbf{1}_{\tau_b^{Z^n} < \infty} \mid \mathcal{F}_{\tau_0^{Z^n}} \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_b^{Z^n}} \mathbf{1}_{\tau_b^{Z^n} < \tau_0^{Z^n}} \right] + \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_0^{Z^n}} \mathbf{1}_{\tau_0^{Z^n} < \tau_b^{Z^n}} \right] \mathbb{E}_{Z_0^{Z^n}} \left[e^{-q\tau_b^{Z^n}} \mathbf{1}_{\tau_b^{Z^n} < \infty} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\frac{1}{n}} \left[e^{-q\tau_b^X} \mathbf{1}_{\tau_b^X < \tau_0^X} \right] + \mathbb{E}_{\frac{1}{n}} \left[e^{-q\tau_0^X} \mathbf{1}_{\tau_0^X < \tau_b^X} \right] \mathbb{E}_0 \left[e^{-q\tau_b^{Z^n}} \mathbf{1}_{\tau_b^{Z^n} < \infty} \right] \\ &= \varphi_b(1/n) + \psi_b(1/n) \Theta_b^n. \end{aligned}$$

On isole Θ_b^n dans cette équation :

$$\Theta_b^n = \frac{\varphi_b(1/n)}{1 - \psi_b(1/n)}.$$

On fait apparaître des quotients différentiels en utilisant $\varphi_b(0) = 0$ et $\psi_b(0) = 1$ pour obtenir

$$\Theta_b^n = - \frac{\frac{\varphi_b(1/n) - \varphi_b(0)}{1/n}}{\frac{\psi_b(1/n) - \psi_b(0)}{1/n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} - \frac{\varphi'_b(0)}{\psi'_b(0)}.$$

Finalement, par l'équation (2.9) et le calcul des limites ci-dessus, on trouve

$$V_b(0) = \frac{\beta - V_b(b)\varphi'_b(0)}{\psi'_b(0)}. \quad (2.12)$$

On remplace $V_b(b) = J_b(b) + V_b(0)\Phi_b(b)$ (par l'équation (2.7)) dans cette équation, puis on isole $V_b(0)$ d'un côté, ce qui nous donne

$$V_b(0) = \frac{\beta - J_b(b)\varphi'_b(0)}{\psi'_b(0) + \Phi_b(b)\varphi'_b(0)}. \quad (2.13)$$

Enfin, on voit que $J_b(b)\varphi'_b(0) = J'_b(0)$ et $\psi'_b(0) + \Phi_b(b)\varphi'_b(0) = \Phi'_b(0)$, ce qui conclut la démonstration. \square

Nous pouvons dès lors obtenir une forme explicite pour $V_b(b)$. En combinant les équations (2.12) et (2.13), on trouve

$$\frac{\beta - V_b(b)\varphi'_b(0)}{\psi'_b(0)} = \frac{\beta - J_b(b)\varphi'_b(0)}{\psi'_b(0) + \Phi_b(b)\varphi'_b(0)}.$$

Il suffit qu'à isoler $V_b(b)$ d'un côté, ce qui nous donne

$$V_b(b) = \frac{\beta \Phi_b(b) + J_b(b) \psi'_b(0)}{\psi'_b(0) + \Phi_b(b) \varphi'_b(0)}.$$

Par conséquent, V_b admet la forme explicite suivante :

Théorème 2.9 *La fonction de performance d'une stratégie linéaire de seuil $b > 0$ est donnée par*

$$V_b(x) = \begin{cases} A_b \varphi_b(x) + C_b \psi_b(x), & x < b, \\ \frac{K}{q+K} \left(x + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) + \left[A_b - \frac{K}{q+K} \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right] \Psi_b(x), & x \geq b, \end{cases}$$

où $A_b = \frac{\beta \Phi_b(b) + J_b(b) \psi'_b(0)}{\psi'_b(0) + \Phi_b(b) \varphi'_b(0)}$ et $C_b = \frac{\beta - J_b(b) \varphi'_b(0)}{\psi'_b(0) + \Phi_b(b) \varphi'_b(0)}.$

Une question pertinente à se poser est celle de la continuité de V_b en $x = 0$, à savoir si $V_b(0+) = V_b(0)$. Or, pour $x \in [0, b)$, grâce à l'équation (2.6), V_b est donnée par $V_b(x) = V_b(b) \varphi_b(x) + V_b(0) \psi_b(x)$. Ainsi, on a bien la continuité en 0 de V_b étant donné que $\varphi_b(0+) = \varphi_b(0) = 0$ et $\psi_b(0+) = \psi_b(0) = 1$. Par conséquent, $V_b \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$.

En ce qui a trait à $V'_b(0)$ et $V''_b(0)$, rappelons qu'au Chapitre 1, nous avons défini les dérivées premières et secondes des transformées de Laplace aux extrémités de leur domaine. De cette façon,

$$V'_b(0) := \lim_{x \downarrow 0} V'_b(x), \quad V''_b(0) := \lim_{x \downarrow 0} V''_b(x).$$

Proposition 2.10 *Pour tout $b > 0$, la dérivée de V_b est telle que pour tout $x \geq 0$,*

$$V'_b(x) \geq 0, \tag{2.14}$$

et en particulier,

$$V'_b(0) = \beta. \tag{2.15}$$

Preuve. L'équation (2.15) se démontre facilement en dérivant la fonction V_b donnée par l'équation (2.7), ce qui nous donne

$$V'_b(0) = J'_b(0) + V_b(0) \Phi'_b(0) = J'_b(0) + \frac{\beta - J'_b(0)}{\Phi'_b(0)} \Phi'_b(0) = \beta.$$

Une autre façon d'arriver au même résultat est de dériver l'expression de V_b dans l'équation (2.6) pour trouver $V'_b(0) = V_b(b)\varphi'_b(0) + V_b(0)\psi'_b(0)$, et enfin utiliser l'équation (2.12).

Pour l'inégalité (2.14), on a par l'équation (2.7) et la Proposition 2.8, que

$$\begin{aligned} V'_b(x) &= J'_b(x) + \frac{\beta - J'_b(0)}{\Phi'_b(0)} \Phi'_b(x) \\ &= \beta \frac{\Phi'_b(x)}{\Phi'_b(0)} + \frac{J'_b(x)\Phi'_b(0) - J'_b(0)\Phi'_b(x)}{\Phi'_b(0)}. \end{aligned}$$

On a l'inégalité $J'_b(x)\Phi'_b(0) - J'_b(0)\Phi'_b(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$ comme conséquence du Lemme 2.5, et avec $\Phi'_b < 0$ par la Proposition 1.13, on trouve

$$\frac{J'_b(x)\Phi'_b(0) - J'_b(0)\Phi'_b(x)}{\Phi'_b(0)} \geq 0.$$

Et comme $\beta \frac{\Phi'_b(x)}{\Phi'_b(0)} \geq 0$, alors $V'_b(x) \geq 0$. \square

Par définition de V_b , on peut décomposer l'espérance ainsi :

$$V_b(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} (KX_t^b + S) \mathbb{1}_{X_t^b \geq b} dt \right] - \beta \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} dG_t^b \right], \quad x \geq 0,$$

de manière à distinguer l'effet marginal des versements de dividendes et des injections de capital sur la fonction de performance. Nous définissons alors les fonctions $D_b, R_b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ données par

$$\begin{aligned} D_b(x) &:= \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} (KX_t^b + S) \mathbb{1}_{X_t^b \geq b} dt \right], \\ R_b(x) &:= \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} dG_t^b \right], \end{aligned}$$

de telle sorte que $V_b(x) = D_b(x) - \beta R_b(x)$. Par l'équation (2.7) et la Proposition 2.8, on trouve, pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} V_b(x) &= J_b(x) + \frac{\beta - J'_b(0)}{\Phi'_b(0)} \Phi_b(x) \\ &= \left[J_b(x) - \frac{J'_b(0)}{\Phi'_b(0)} \Phi_b(x) \right] - \beta \left[-\frac{\Phi_b(x)}{\Phi'_b(0)} \right], \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$D_b(x) = J_b(x) - \frac{J'_b(0)}{\Phi'_b(0)} \Phi_b(x), \quad R_b(x) = -\frac{\Phi_b(x)}{\Phi'_b(0)}. \quad (2.16)$$

On peut trouver les mêmes expressions par un calcul direct des espérances. Ces deux fonctions ont quelques propriétés intéressantes, que nous présentons dès à présent.

Proposition 2.11 *Pour tout $b > 0$, les fonctions D_b et R_b sont positives. De plus, D_b est croissante avec $D'_b(0) = 0$, et R_b est décroissante et convexe, avec $R'_b(0) = -1$.*

Preuve. Tout d'abord, la positivité de D_b et R_b est triviale, puisqu'elles sont définies comme l'espérance d'une intégrale d'une fonction positive (et G^b est croissante).

Ensuite, pour D_b , on trouve, pour tout $x \geq 0$, que

$$D'_b(x) = J'_b(x) - \frac{J'_b(0)}{\Phi'_b(0)} \Phi'_b(x) = \frac{J'_b(x)\Phi'_b(0) - J'_b(0)\Phi'_b(x)}{\Phi'_b(0)} \geq 0,$$

comme on l'a vu dans la démonstration de la Proposition 2.10. En particulier, un calcul direct nous donne $D'_b(0) = 0$.

Pour R_b , notons que $R_b(x) = -\frac{1}{\Phi'_b(0)} \Phi_b(x)$. Vu que le coefficient $-\frac{1}{\Phi'_b(0)}$ est positif, R_b est décroissante et convexe pour tout $x \geq 0$ comme Φ_b (voir la Proposition 1.7). Enfin, $R'_b(0) = -\frac{\Phi'_b(0)}{\Phi'_b(0)} = -1$. \square

Cette décomposition nous aidera pour l'analyse de l'effet des paramètres sur les dividendes et les injections séparément plutôt que sur l'entièreté de la fonction de performance. On y reviendra au Chapitre 3.

2.3 Continuité de la dérivée seconde

Nous voulons montrer qu'il existe un $b^* > 0$ tel que $V_{b^*} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$ dans le but d'appliquer la Formule d'Itô dans le Théorème de vérification 2.20.

2.3.1 Étude d'un point de continuité

Comme J_b et Φ_b sont $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ pour tout $b > 0$, alors il en est de même pour V_b . De plus, il est clair que V''_b est continue sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{b\}$. Il suffit dans ce cas à trouver $b^* > 0$ tel que $V''_{b^*}(b^*+) = V''_{b^*}(b^*-)$ pour avoir la continuité de la dérivée seconde.

Théorème 2.12 *Soit $b > 0$, alors $V''_b(b+) = V''_b(b-)$ si et seulement si $V'_b(b) = 1$.*

Preuve. En dérivant l'équation (2.6), on trouve

$$\begin{aligned} V'_b(b+) &= \frac{K}{q+K} + \left[V_b(b) - \frac{K}{q+K} \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right] \Psi'_b(b), \\ V'_b(b-) &= V_b(b) \varphi'_b(b) + V_b(0) \psi'_b(b). \end{aligned}$$

On dérive à nouveau, puis on utilise le fait que Ψ_b est solution de l'équation (1.2) et que φ_b, ψ_b sont solutions de l'équation (1.1) pour obtenir

$$\begin{aligned} V''_b(b+) &= \left[V_b(b) - \frac{K}{q+K} \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right] \Psi''_b(b) \\ &= \left[V_b(b) - \frac{K}{q+K} \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right] \frac{2}{\sigma^2} (q + (Kb + S - \mu) \Psi'_b(b)), \\ V''_b(b-) &= V_b(b) \varphi''_b(b) + V_b(0) \psi''_b(b) \\ &= V_b(b) \frac{2}{\sigma^2} (q \varphi_b(b) - \mu \varphi'_b(b)) + V_b(0) \frac{2}{\sigma^2} (q \psi_b(b) - \mu \psi'_b(b)) \\ &= \frac{2}{\sigma^2} [V_b(b) (q - \mu \varphi'_b(b)) - V_b(0) \mu \psi'_b(b)], \end{aligned}$$

puisque $\varphi_b(b) = 1$ et $\psi_b(b) = 0$. En égalisant les deux expressions finales, l'équation $V''_b(b+) = V''_b(b-)$ devient

$$\left[V_b(b) - \frac{K}{q+K} \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right] (q + (Kb + S - \mu) \Psi'_b(b)) = V_b(b) (q - \mu \varphi'_b(b)) - V_b(0) \mu \psi'_b(b),$$

puis

$$\begin{aligned} (Kb + S - \mu) \left[V_b(b) - \frac{K}{q+K} \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right] \Psi'_b(b) - \frac{qK}{q+K} \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \\ = -\mu (V_b(b) \varphi'_b(b) + V_b(0) \psi'_b(b)). \end{aligned}$$

On reconnaît les expressions de $V'_b(b+)$ et $V'_b(b-)$, donc

$$(Kb + S - \mu) \left[V'_b(b+) - \frac{K}{q+K} \right] - \frac{qK}{q+K} \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) = -\mu V'_b(b-),$$

et par la continuité de V'_b , il s'ensuit que

$$(Kb + S) V'_b(b) = \frac{K}{q+K} (Kb + S - \mu) + \frac{qK}{q+K} \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right).$$

Quelques manipulations algébriques sur le côté droit de l'égalité nous font remarquer qu'il est égal à $Kb + S$.

Par conséquent, on a bien l'équivalence entre $V''_b(b+) = V''_b(b-)$ et $V'_b(b) = 1$. \square

Ce Théorème est commun à beaucoup de problèmes de maximisation de dividendes (voir (Albrecher et Thonhauser, 2009; Avanzi, 2009)), et il nous aidera à trouver une relation équivalente de la forme $g(b) = 0$.

Isolons $V_b(b)$ dans $V'_b(b+) = \frac{K}{q+K} + \left[V_b(b) - \frac{K}{q+K} \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right] \Psi'_b(b) = 1$:

$$V_b(b) = \frac{K}{q+K} \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) + \frac{q}{q+K} \frac{1}{\Psi'_b(b)}.$$

Isolons maintenant $V_b(b)$ dans $V'_b(b-) = V_b(b)\varphi'_b(b) + V_b(0)\psi'_b(b) = 1$:

$$V_b(b) = \frac{1 - V_b(0)\psi'_b(b)}{\varphi'_b(b)}. \quad (2.17)$$

Enfin, posons l'égalité entre ces deux expressions de $V_b(b)$, ce qui nous donne

$$g(b) := \frac{K}{q+K} \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) + \frac{q}{q+K} \frac{1}{\Psi'_b(b)} - \frac{1 - V_b(0)\psi'_b(b)}{\varphi'_b(b)} = 0, \quad (2.18)$$

où $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $(0, \infty)$, puisqu'elle est composée de nos transformées de Laplace, qui sont des combinaisons linéaires de solutions continues d'équations différentielles.

En conséquence, tout $b > 0$ solution de l'équation $g(b) = 0$ est tel que $V_b \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$. Il suffit donc de montrer qu'il existe au moins une solution positive b^* de cette équation.

2.3.2 Existence d'une racine

Typiquement, dans les problèmes de paiements de dividendes *absolument continus*, le seuil optimal est inférieur à la barrière optimale du problème avec dividendes *singuliers* (voir (Ekström et Lindensjö, 2021; Renaud et Simard, 2021)), ce dernier étant un cas limite du problème absolument continu lorsque la borne sur le taux de versements de dividendes croît vers l'infini. Dans notre cas, le problème limite s'obtient en faisant tendre K ou S vers l'infini, et il s'agit du problème avec injections obligatoires de (Løkka et Zervos, 2008), dont la barrière optimale c^* est l'unique solution positive de l'équation (2.19) ci-dessous.

$$(\Delta - \mu)e^{\frac{\Delta+\mu}{\sigma^2}c^*} + (\Delta + \mu)e^{\frac{\Delta-\mu}{\sigma^2}c^*} = 2\beta\Delta, \quad (2.19)$$

qui s'écrit aussi avec φ_b et ψ_b par

$$-\frac{\varphi'_{c^*}(c^*)}{\psi'_{c^*}(c^*)} = \beta. \quad (2.20)$$

Conséquemment, nous conjecturons que $b^* < c^*$. Pour prouver l'existence de ce seuil optimal b^* , nous montrons, à la Proposition 2.14, que $g(0+) > 0$ et $g(c^*) < 0$. Il en découle, par la continuité de g et le

Théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe un $b^* \in (0, c^*)$ tel que $g(b^*) = 0$. La Figure 2.5 illustre cela en traçant un exemple de courbe de g . On voit bien qu'une racine de g existe entre 0 et c^* .

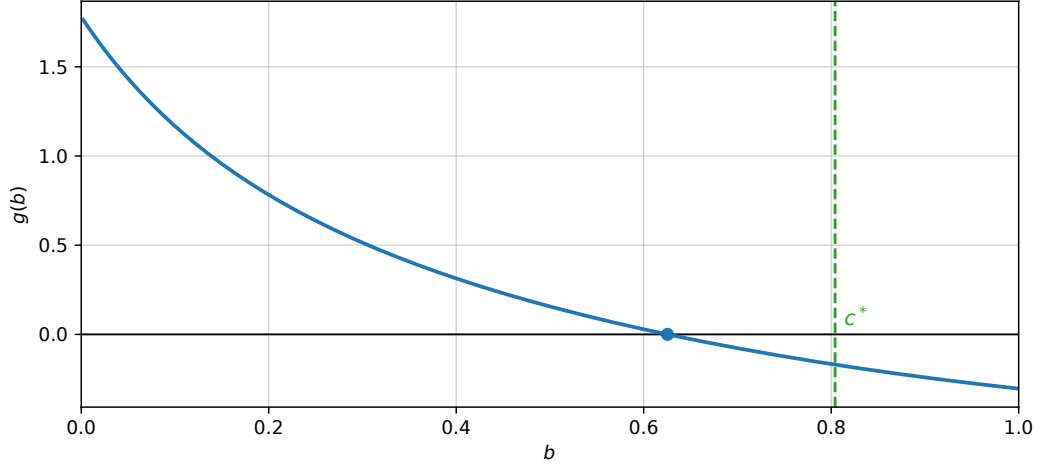


Figure 2.5 – Exemple de g

Paramètres : $\mu = 1$, $\sigma^2 = 1$, $K = 1$, $S = 2$, $q = 0.4$, $\beta = 1.5$.

Il est possible d'évaluer directement $g(0+) = \lim_{b \downarrow 0} g(b)$, ce que nous faisons au Lemme 2.13. Mais avant, étant donné que le calcul de $g(0+)$ fait intervenir la fonction J_b avec $b = 0$, rappelons que, par (Locas et Renaud, 2024), J_0 est bien définie, et qu'elle est donnée par

$$J_0(x) = \frac{K}{q + K} \left[x + \left(\frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) (1 - \Psi_0(x)) \right], \quad x \geq 0,$$

où l'on définit Ψ_0 par

$$\Psi_0(x) := \lim_{b \downarrow 0} \Psi_b(x) = \lim_{b \downarrow 0} \frac{H(x)}{H(b)} = \frac{H(x)}{H(0)}, \quad x \geq 0.$$

Ainsi,

$$J'_0(0) = \frac{K}{q + K} \left[1 - \left(\frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \Psi'_0(0) \right]. \quad (2.21)$$

Rappelons enfin que, pour $x \in [0, b]$,

$$\varphi_b(x) = \frac{W(x)}{W(b)}, \quad \psi_b(x) = \frac{f_+(b)f_-(x) - f_+(x)f_-(b)}{W(b)},$$

et que $W(0) = 0$.

Lemme 2.13 *La fonction g donnée par l'équation (2.18) est telle que*

$$g(0+) = -\frac{\beta - 1}{\Psi'_0(0)}.$$

Preuve. Pour commencer, on a

$$g(0+) = \frac{K}{q+K} \left(\frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) + \frac{q}{q+K} \frac{1}{\lim_{b \downarrow 0} \Psi'_b(b)} - \lim_{b \downarrow 0} \frac{1 - V_b(0) \psi'_b(b)}{\varphi'_b(b)}.$$

La première limite est

$$\lim_{b \downarrow 0} \Psi'_b(b) = \lim_{b \downarrow 0} \frac{H'(b)}{H(b)} = \frac{H'(0)}{H(0)} = \Psi'_0(0).$$

Quant à la seconde limite, puisque la croissance et décroissance strictes de f_+ et f_- , respectivement, impliquent que $f'_+(0)f_-(0) - f_+(0)f'_-(0) > 0$, alors par l'équation (1.3),

$$\frac{\psi'_b(b)}{\varphi'_b(b)} = \frac{f_+(b)f'_-(b) - f'_+(b)f_-(b)}{f'_+(b)f_-(0) - f_+(0)f'_-(b)} \xrightarrow{b \downarrow 0} \frac{f_+(0)f'_-(0) - f'_+(0)f_-(0)}{f'_+(0)f_-(0) - f_+(0)f'_-(0)} = -1.$$

De même, on a

$$\frac{1}{\varphi'_b(b)} = \frac{f_+(b)f_-(0) - f_+(0)f_-(b)}{f'_+(b)f_-(0) - f_+(0)f'_-(b)} \xrightarrow{b \downarrow 0} \frac{f_+(0)f_-(0) - f_+(0)f_-(0)}{f'_+(0)f_-(0) - f_+(0)f'_-(0)} = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{b \downarrow 0} \frac{1 - V_b(0) \psi'_b(b)}{\varphi'_b(b)} = \lim_{b \downarrow 0} \frac{1}{\varphi'_b(b)} - \lim_{b \downarrow 0} V_b(0) \cdot \lim_{b \downarrow 0} \frac{\psi'_b(b)}{\varphi'_b(b)} = \lim_{b \downarrow 0} V_b(0),$$

et donc

$$g(0+) = \frac{K}{q+K} \left(\frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) + \frac{q}{q+K} \frac{1}{\Psi'_0(0)} - \lim_{b \downarrow 0} V_b(0).$$

Montrons maintenant que

$$\lim_{b \downarrow 0} V_b(0) = \frac{\beta - J'_0(0)}{\Psi'_0(0)}.$$

Par l'équation (2.11),

$$\lim_{b \downarrow 0} V_b(0) = \lim_{b \downarrow 0} \frac{\beta - J'_b(0)}{\Phi'_b(0)},$$

donc on doit vérifier les deux limites suivantes pour compléter :

$$\lim_{b \downarrow 0} J'_b(0) = J'_0(0), \quad \lim_{b \downarrow 0} \Phi'_b(0) = \Psi'_0(0).$$

Pour la première limite, on a

$$\begin{aligned} \lim_{b \downarrow 0} J'_b(0) &= \lim_{b \downarrow 0} \left\{ \frac{K}{q+K} + \left[J_b(b) - \frac{K}{q+K} \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right] \Psi'_b(0) \right\} \\ &= \frac{K}{q+K} + \left[\lim_{b \downarrow 0} J_b(b) - \frac{K}{q+K} \left(\frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right] \Psi'_0(0), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\lim_{b \downarrow 0} J_b(b) &= \lim_{b \downarrow 0} \frac{\frac{K}{q+K} \left[1 - \left(b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \Psi'_b(b) \right]}{\varphi'_b(b) - \Psi'_b(b)} \\
&= \frac{\frac{K}{q+K} \left[1 - \left(\frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \Psi'_0(0) \right]}{\lim_{b \downarrow 0} \varphi'_b(b) - \Psi'_0(0)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

étant donné que $\varphi'_b(b) \xrightarrow{b \downarrow 0} \infty$. Ainsi, on a bien, par l'équation (2.21), que

$$\lim_{b \downarrow 0} J'_b(0) = \frac{K}{q+K} \left[1 - \left(\frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \Psi'_0(0) \right] = J'_0(0).$$

Quant à la seconde limite, par le Théorème 1.12,

$$\begin{aligned}
\lim_{b \downarrow 0} \Phi'_b(0) &= \lim_{b \downarrow 0} \left(\psi'_b(0) - \frac{\psi'_b(b)\varphi'_b(0)}{\varphi'_b(b) - \Psi'_b(b)} \right) \\
&= \lim_{b \downarrow 0} \frac{\psi'_b(0)\varphi'_b(b) - \psi'_b(0)\Psi'_b(b) - \psi'_b(b)\varphi'_b(0)}{\varphi'_b(b) - \Psi'_b(b)} \\
&= \lim_{b \downarrow 0} \Psi'_b(b) \cdot \lim_{b \downarrow 0} \frac{-\psi'_b(0)}{\varphi'_b(b) - \Psi'_b(b)} + \lim_{b \downarrow 0} \frac{\psi'_b(0)\varphi'_b(b) - \psi'_b(b)\varphi'_b(0)}{\varphi'_b(b) - \Psi'_b(b)} \\
&= \Psi'_0(0) \left(\lim_{b \downarrow 0} \frac{\Psi'_b(b) - \varphi'_b(b)}{\psi'_b(0)} \right)^{-1} + \lim_{b \downarrow 0} \frac{\psi'_b(0)\varphi'_b(b) - \psi'_b(b)\varphi'_b(0)}{\frac{W'(b)}{W(b)} - \Psi'_b(b)} \\
&= \Psi'_0(0) \left(\frac{\Psi'_0(0)}{\lim_{b \downarrow 0} \psi'_b(0)} - \lim_{b \downarrow 0} \frac{\varphi'_b(b)}{\psi'_b(0)} \right)^{-1} + \lim_{b \downarrow 0} \frac{W(b)[\psi'_b(0)\varphi'_b(b) - \psi'_b(b)\varphi'_b(0)]}{W'(b) - W(b)\Psi'_b(b)} \\
&= \Psi'_0(0) (0 - (-1))^{-1} + \frac{\lim_{b \downarrow 0} W(b)[\psi'_b(0)\varphi'_b(b) - \psi'_b(b)\varphi'_b(0)]}{W'(0) - W(0)\Psi'_0(0)} \\
&= \Psi'_0(0) + \frac{\lim_{b \downarrow 0} W(b)[\psi'_b(0)\varphi'_b(b) - \psi'_b(b)\varphi'_b(0)]}{W'(0)},
\end{aligned}$$

où l'on a pu inverser la limite à la quatrième ligne, car $\frac{-\psi'_b(0)}{\varphi'_b(b) - \Psi'_b(b)} > 0$. Le terme de gauche à la ligne subséquente s'explique par $\psi'_b(0) \xrightarrow{b \downarrow 0} \infty$ et

$$\frac{\varphi'_b(b)}{\psi'_b(0)} = \frac{f'_+(b)f_-(0) - f_+(0)f'_-(b)}{f_+(b)f'_-(0) - f'_+(0)f_-(b)} \xrightarrow{b \downarrow 0} -1.$$

Enfin, puisque $W'(0) > 0$, il reste à montrer que $\lim_{b \downarrow 0} W(b)[\psi'_b(0)\varphi'_b(b) - \psi'_b(b)\varphi'_b(0)] = 0$:

$$\begin{aligned}
W(b)[\psi'_b(0)\varphi'_b(b) - \psi'_b(b)\varphi'_b(0)] &= \frac{1}{W(b)} \left\{ [f_+(b)f'_-(0) - f'_+(0)f_-(b)] [f'_+(b)f_-(0) - f_+(0)f'_-(b)] \right. \\
&\quad \left. - [f_+(b)f'_-(b) - f'_+(b)f_-(b)] [f'_+(0)f_-(0) - f_+(0)f'_-(0)] \right\} \\
&= \frac{1}{W(b)} \left\{ f_+(b)f'_+(b)f_-(0)f'_-(0) + f_+(0)f'_+(0)f_-(b)f'_-(b) \right. \\
&\quad \left. - f_+(b)f'_+(0)f_-(0)f'_-(b) - f_+(0)f'_+(b)f_-(b)f'_-(0) \right\} \\
&= \frac{1}{W(b)} \left\{ W(b)f'_+(b)f'_-(0) - W(b)f'_+(0)f'_-(b) \right\} \\
&= f'_+(b)f'_-(0) - f'_+(0)f'_-(b) \xrightarrow{b \downarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Avec l'équation (2.11), on trouve

$$\begin{aligned}
g(0+) &= \frac{K}{q+K} \left(\frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) + \frac{q}{q+K} \frac{1}{\Psi'_0(0)} - \frac{\beta - J'_0(0)}{\Psi'_0(0)} \\
&= \frac{K}{q+K} \left(\frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) - \frac{1}{\Psi'_0(0)} \left(\beta - \frac{q}{q+K} - J'_0(0) \right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, en substituant $J'_0(0)$ par le côté droit de l'équation (2.21), on trouve

$$\begin{aligned}
g(0+) &= \frac{K}{q+K} \left(\frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) - \frac{1}{\Psi'_0(0)} \left(\beta - \frac{q}{q+K} - \frac{K}{q+K} + \frac{K}{q+K} \left(\frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \Psi'_0(0) \right) \\
&= \frac{K}{q+K} \left(\frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) - \frac{\beta - 1}{\Psi'_0(0)} - \frac{K}{q+K} \left(\frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \\
&= -\frac{\beta - 1}{\Psi'_0(0)}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.14 La fonction g donnée par l'équation (2.18) est telle que

$$g(c^*) < 0 < g(0+).$$

Donc, il existe un $b^* \in (0, c^*)$ par la continuité de g et le Théorème des valeurs intermédiaires.

Preuve. Grâce au Lemme 2.13, on voit aisément que

$$g(0+) = -\frac{\beta - 1}{\Psi'_0(0)} > 0,$$

puisque $\beta > 1$, et que $\Psi'_0(0) < 0$ par la décroissance de Ψ_0 .

Quant à $g(c^*) < 0$, il revient au même de démontrer

$$\Psi'_{c^*}(c^*)g(c^*) > 0$$

vu que $\Psi'_{c^*}(c^*) < 0$. On rappelle que c^* satisfait $\frac{\varphi'_{c^*}(c^*)}{\psi'_{c^*}(c^*)} = -\beta$ par l'équation (2.20), donc

$$\begin{aligned} \Psi'_{c^*}(c^*)g(c^*) &= \frac{K}{q+K} \left(c^* + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \Psi'_{c^*}(c^*) + \frac{q}{q+K} \\ &\quad - \frac{\Psi'_{c^*}(c^*)}{\varphi'_{c^*}(c^*)} + V_{c^*}(0) \frac{\psi'_{c^*}(c^*)}{\varphi'_{c^*}(c^*)} \Psi'_{c^*}(c^*) \\ &= -\frac{K}{q+K} \left[1 - \left(c^* + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \Psi'_{c^*}(c^*) \right] + \frac{K}{q+K} + \frac{q}{q+K} \\ &\quad - \frac{\Psi'_{c^*}(c^*)}{\varphi'_{c^*}(c^*)} - \frac{V_{c^*}(0)}{\beta} \Psi'_{c^*}(c^*). \end{aligned}$$

Le premier terme est exactement le numérateur de $J_{c^*}(c^*)$ (voir l'équation (2.5)), donc

$$\begin{aligned} \Psi'_{c^*}(c^*)g(c^*) &= -J_{c^*}(c^*)(\varphi'_{c^*}(c^*) - \Psi'_{c^*}(c^*)) + \left(1 - \frac{\Psi'_{c^*}(c^*)}{\varphi'_{c^*}(c^*)} \right) - \frac{V_{c^*}(0)}{\beta} \Psi'_{c^*}(c^*) \\ &= \left(\frac{1}{\varphi'_{c^*}(c^*)} - J_{c^*}(c^*) \right) (\varphi'_{c^*}(c^*) - \Psi'_{c^*}(c^*)) - \frac{V_{c^*}(0)}{\beta} \Psi'_{c^*}(c^*). \end{aligned}$$

Il est possible de factoriser le second terme en développant $V_{c^*}(0)$. Par les équations (2.11) et (1.7),

$$\begin{aligned} V_{c^*}(0) &= \frac{\beta - J_{c^*}(c^*)\varphi'_{c^*}(0)}{\psi'_{c^*}(0) - \frac{\psi'_{c^*}(c^*)}{\varphi'_{c^*}(c^*) - \Psi'_{c^*}(c^*)}\varphi'_{c^*}(0)} \\ &= \frac{\beta - J_{c^*}(c^*)\varphi'_{c^*}(0)}{\psi'_{c^*}(0)(\varphi'_{c^*}(c^*) - \Psi'_{c^*}(c^*)) - \psi'_{c^*}(c^*)\varphi'_{c^*}(0)} (\varphi'_{c^*}(c^*) - \Psi'_{c^*}(c^*)) \\ &= \frac{\beta - J_{c^*}(c^*)\varphi'_{c^*}(0)}{[\psi'_{c^*}(0)\varphi'_{c^*}(c^*) - \psi'_{c^*}(c^*)\varphi'_{c^*}(0)] - \psi'_{c^*}(0)\Psi'_{c^*}(c^*)} (\varphi'_{c^*}(c^*) - \Psi'_{c^*}(c^*)) \\ &> -\frac{\beta - J_{c^*}(c^*)\varphi'_{c^*}(0)}{\psi'_{c^*}(0)\Psi'_{c^*}(c^*)} (\varphi'_{c^*}(c^*) - \Psi'_{c^*}(c^*)), \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est due à $\psi'_{c^*}(0)\varphi'_{c^*}(c^*) - \psi'_{c^*}(c^*)\varphi'_{c^*}(0) < 0$, qui découle du Lemme 1.8. De fait, comme $\Psi'_{c^*}(c^*) < 0$, on a

$$-\frac{V_{c^*}(0)}{\beta} \Psi'_{c^*}(c^*) > \frac{\beta - J_{c^*}(c^*)\varphi'_{c^*}(0)}{\beta\psi'_{c^*}(0)} (\varphi'_{c^*}(c^*) - \Psi'_{c^*}(c^*)),$$

et donc

$$\begin{aligned} \Psi'_{c^*}(c^*)g(c^*) &> \left(\frac{1}{\varphi'_{c^*}(c^*)} - J_{c^*}(c^*) + \frac{\beta - J_{c^*}(c^*)\varphi'_{c^*}(0)}{\beta\psi'_{c^*}(0)} \right) (\varphi'_{c^*}(c^*) - \Psi'_{c^*}(c^*)) \\ &= \left(\frac{1}{\varphi'_{c^*}(c^*)} + \frac{1}{\psi'_{c^*}(0)} - J_{c^*}(c^*) + J_{c^*}(c^*) \cdot -\frac{\varphi'_{c^*}(0)}{\beta\psi'_{c^*}(0)} \right) (\varphi'_{c^*}(c^*) - \Psi'_{c^*}(c^*)). \end{aligned}$$

Encore une fois, par le Lemme 1.8, on a

$$-\beta = \frac{\varphi'_{c^*}(c^*)}{\psi'_{c^*}(c^*)} < \frac{\varphi'_{c^*}(0)}{\psi'_{c^*}(0)},$$

donc

$$J_{c^*}(c^*) \cdot \left(-\frac{\varphi'_{c^*}(0)}{\beta \psi'_{c^*}(0)} \right) > J_{c^*}(c^*).$$

Conséquemment,

$$\Psi'_{c^*}(c^*)g(c^*) > \left(\frac{1}{\varphi'_{c^*}(c^*)} + \frac{1}{\psi'_{c^*}(0)} \right) (\varphi'_{c^*}(c^*) - \Psi'_{c^*}(c^*)),$$

et le membre de droite est un produit de deux termes strictement positifs. En effet, le second terme est positif du fait que $\Psi'_{c^*} < 0 < \varphi'_{c^*}$, et le premier terme est positif si et seulement si $\varphi'_{c^*}(c^*) < -\psi'_{c^*}(0)$. On sait par l'équation (2.20) que $\frac{\varphi'_{c^*}(c^*)}{\psi'_{c^*}(c^*)} = -\beta$, donc

$$\varphi'_{c^*}(c^*) = -\beta \psi'_{c^*}(c^*) < -\psi'_{c^*}(c^*) < -\psi'_{c^*}(0)$$

par la croissance de ψ'_{c^*} . \square

2.4 Vérification de l'optimalité

Comme nous savons qu'il existe un $b^* > 0$ tel que $g(b^*) = 0$, c'est-à-dire tel que $V_{b^*} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$, nous devons vérifier que la fonction candidate V_{b^*} est optimale. Autrement dit, nous confirmons que la stratégie linéaire u_{b^*} , associée à la fonction de performance V_{b^*} , est optimale parmi toutes les stratégies admissibles.

Par $V_{b^*}(b^*) = \frac{K}{q+K} \left(b^* + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) + \frac{q}{q+K} \frac{1}{\Psi'_{b^*}(b^*)}$ et par le Théorème 2.9, V_{b^*} s'écrit ainsi :

$$V_{b^*}(x) = \begin{cases} A_{b^*}\varphi_{b^*}(x) + C_{b^*}\psi_{b^*}(x), & x < b^*, \\ \frac{K}{q+K} \left(x + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) + \frac{q}{q+K} \frac{\Psi_{b^*}(x)}{\Psi'_{b^*}(b^*)}, & x \geq b^*. \end{cases} \quad (2.22)$$

2.4.1 Propriétés de la fonction candidate

Le Théorème de vérification 2.20 nécessitera plusieurs résultats que nous introduisons dès maintenant.

Proposition 2.15 *La fonction de performance V_{b^*} est strictement concave, c'est-à-dire que $V''_{b^*}(x) < 0$ pour tout $x \geq 0$.*

Preuve. Commençons par démontrer la concavité de V_{b^*} pour $x \geq b^*$. En dérivant deux fois la seconde branche de l'équation (2.22), on obtient, pour tout $x \geq b^*$,

$$V_{b^*}''(x) = \frac{q}{q+K} \frac{\Psi_{b^*}''(x)}{\Psi_{b^*}'(b^*)} < 0,$$

puisque $\Psi_{b^*}'' > 0$ et $\Psi_{b^*}' < 0$ par la Proposition 1.7.

Et pour $0 \leq x < b^*$, la démonstration repose avant tout sur le fait que sur cet intervalle, V_{b^*} satisfait l'EDO (1.1), à savoir

$$\frac{\sigma^2}{2} V_{b^*}''(x) + \mu V_{b^*}'(x) - q V_{b^*}(x) = 0, \quad x \in [0, b^*]. \quad (2.23)$$

En effet, par l'équation (2.22), V_{b^*} est une combinaison linéaire de $\varphi_{b^*}, \psi_{b^*}$. Vérifions d'abord que $V_{b^*}''(0) < 0$. La fonction V_{b^*} étant C^2 , elle satisfait l'équation (2.23) également au point $x = b^*$, donc

$$\frac{\sigma^2}{2} V_{b^*}''(0) + \mu V_{b^*}'(0) - q V_{b^*}(0) = 0 = \frac{\sigma^2}{2} V_{b^*}''(b^*) + \mu V_{b^*}'(b^*) - q V_{b^*}(b^*).$$

En substituant $V_{b^*}'(0) = \beta$ et $V_{b^*}'(b^*) = 1$ puis en réarrangeant, on trouve

$$\frac{\sigma^2}{2} (V_{b^*}''(b^*) - V_{b^*}''(0)) = \mu(\beta - 1) + q(V_{b^*}(b^*) - V_{b^*}(0)) > 0,$$

car $\beta > 1$ et V_{b^*} est croissante par la Proposition 2.10. Conséquemment, $V_{b^*}''(b^*) - V_{b^*}''(0)$ est strictement positif, donc $V_{b^*}''(0) < V_{b^*}''(b^*) < 0$.

Et maintenant, de manière similaire à la démonstration du Théorème 3.4 de (Zhu, 2015), nous prouvons par contradiction que $V_{b^*}''(x) \leq 0$ pour tout $x \in (0, b^*)$. Supposons qu'il existe un $x_0 \in (0, b^*)$ tel que $V_{b^*}''(x_0) > 0$. Par la continuité de V_{b^*}'' et du fait qu'elle est négative aux extrémités de $(0, b^*)$, il existe x_1 et x_2 avec $0 < x_1 < x_0 < x_2 < b^*$ tels que

$$V_{b^*}''(x_1) = 0 = V_{b^*}''(x_2) \text{ et } V_{b^*}''(x) > 0 \text{ pour tout } x \in (x_1, x_2). \quad (2.24)$$

De facto, V_{b^*}' est croissante sur (x_1, x_2) et

$$V_{b^*}'(x_2) > V_{b^*}'(x_1). \quad (2.25)$$

Posons $x \in (x_1, x_2)$ à partir d'ici. L'équation (2.24) implique que

$$\frac{\sigma^2}{2} V_{b^*}''(x) > \frac{\sigma^2}{2} V_{b^*}''(x_1), \quad \frac{\sigma^2}{2} V_{b^*}''(x) > \frac{\sigma^2}{2} V_{b^*}''(x_2),$$

et par l'équation (2.23), ces deux inégalités deviennent

$$qV_{b^*}(x) - \mu V_{b^*}'(x) > qV_{b^*}(x_1) - \mu V_{b^*}'(x_1), \quad qV_{b^*}(x) - \mu V_{b^*}'(x) > qV_{b^*}(x_2) - \mu V_{b^*}'(x_2).$$

Nous divisons la première inégalité par $x - x_1 > 0$ et la seconde par $x - x_2 < 0$ dans le but de faire apparaître des quotients différentiels, puis nous réarrangeons les expressions pour obtenir

$$q \frac{V_{b^*}(x) - V_{b^*}(x_1)}{x - x_1} - \mu \frac{V'_{b^*}(x) - V'_{b^*}(x_1)}{x - x_1} > 0,$$

$$q \frac{V_{b^*}(x) - V_{b^*}(x_2)}{x - x_2} - \mu \frac{V'_{b^*}(x) - V'_{b^*}(x_2)}{x - x_2} < 0.$$

En prenant la limite lorsque $x \downarrow x_1$ et $x \nearrow x_2$ respectivement, il s'ensuit que

$$qV'_{b^*}(x_1) - \mu V''_{b^*}(x_1) \geq 0 \geq qV'_{b^*}(x_2) - \mu V''_{b^*}(x_2).$$

On rappelle que $V''_{b^*}(x_1) = 0 = V''_{b^*}(x_2)$, donc

$$qV'_{b^*}(x_1) \geq 0 \geq qV'_{b^*}(x_2),$$

cela impliquant que $V'_{b^*}(x_1) \geq V'_{b^*}(x_2)$, ce qui entre en contradiction avec l'inégalité (2.25). Par conséquent, $V''_{b^*}(x) \leq 0$ pour tout $x \in (0, b^*)$.

Pour terminer, il reste à montrer que l'inégalité est stricte, à savoir que $V''_{b^*}(x) < 0$ pour tout $x \in (0, b^*)$.

Soit $x \in (0, b^*)$, on sait que l'équation (2.23) est satisfaite en x et en b^* , donc

$$\frac{\sigma^2}{2} V''_{b^*}(x) + \mu V'_{b^*}(x) - qV_{b^*}(x) = 0 = \frac{\sigma^2}{2} V''_{b^*}(b^*) + \mu V'_{b^*}(b^*) - qV_{b^*}(b^*).$$

Un simple réarrangement des termes nous donne

$$\frac{\sigma^2}{2} (V''_{b^*}(x) - V''_{b^*}(b^*)) = \mu (V'_{b^*}(b^*) - V'_{b^*}(x)) + q (V_{b^*}(x) - V_{b^*}(b^*)) \leq 0,$$

car V'_{b^*} est décroissante et V_{b^*} est croissante. En conséquence, $V''_{b^*}(x) \leq V''_{b^*}(b^*) < 0$, ce qui conclut la preuve. \square

Le résultat qui suit est crucial à la vérification de l'optimalité de V_{b^*} , et découle directement de $V'_{b^*}(b^*) = 1$ et de la concavité de V_{b^*} .

Corollaire 2.16 La dérivée de V_{b^*} satisfait

$$\begin{cases} V'_{b^*}(x) > 1, & x < b^*, \\ V'_{b^*}(x) \leq 1, & x \geq b^*. \end{cases}$$

À la Sous-section 2.1.1, nous avons mentionné l'équation HJB, couramment utilisée dans la résolution de problèmes de contrôle stochastique. Dans le Théorème 2.17 ci-dessous, nous affirmons que V_{b^*} satisfait l'équation HJB de ce problème, ou plutôt ici l'inégalité HJB.

Théorème 2.17 (HJB) *La fonction de performance V_{b^*} satisfait aux équations suivantes pour tout $x \geq 0$:*

$$\mathcal{L}V_{b^*}(x) + \max_{0 \leq v \leq Kx+S} \left[v(1 - V'_{b^*}(x)) \right] = 0, \quad V'_{b^*}(x) - \beta \leq 0, \quad (2.26)$$

où \mathcal{L} est l'opérateur différentiel linéaire donné par

$$\mathcal{L}f = \frac{\sigma^2}{2} f'' + \mu f' - qf.$$

Preuve. L'inégalité à droite de l'équation (2.26) découle directement de $V'_{b^*}(0) = \beta$ et de la décroissance de V'_{b^*} .

Quant à l'égalité à gauche, pour $0 \leq x < b^*$, on sait par le Corollaire 2.16 que $1 - V'_{b^*}(x) < 0$, donc

$$\max_{0 \leq v \leq Kx+S} \left[v(1 - V'_{b^*}(x)) \right] = 0.$$

De plus, on a mentionné précédemment que V'_{b^*} est solution de l'EDO (1.1) sur cet intervalle, donc

$$\mathcal{L}V_{b^*}(x) = 0, \quad x \in [0, b^*),$$

ce qui nous permet de conclure.

Pour $x \geq b^*$, on sait par le Corollaire 2.16 que $1 - V'_{b^*}(x) \geq 0$, donc

$$\max_{0 \leq v \leq Kx+S} \left[v(1 - V'_{b^*}(x)) \right] = (Kx + S)(1 - V'_{b^*}(x)).$$

Pour calculer $\mathcal{L}V_{b^*}(x)$, on utilise la linéarité de \mathcal{L} et le fait que Ψ_{b^*} est solution de l'équation (1.2), c'est-à-dire

$\mathcal{L}f(x) = (Kx + S)f'(x)$, $x \in [b^*, \infty)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_{b^*}(x) &= \frac{K}{q+K} \mathcal{L} \left(x + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) + \frac{q}{q+K} \frac{1}{\Psi'_{b^*}(b^*)} \mathcal{L}\Psi_{b^*}(x) \\ &= \frac{K}{q+K} \left[\mu - q \left(x + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right] + \frac{q}{q+K} (Kx + S) \frac{\Psi'_{b^*}(x)}{\Psi'_{b^*}(b^*)} \\ &= -\frac{q}{q+K} (Kx + S) + (Kx + S) \left[\frac{q}{q+K} \frac{\Psi'_{b^*}(x)}{\Psi'_{b^*}(b^*)} \right] \\ &= -(Kx + S) \frac{q}{q+K} + (Kx + S) \left[V'_{b^*}(x) - \frac{K}{q+K} \right] \\ &= (Kx + S)(V'_{b^*}(x) - 1), \end{aligned}$$

soit l'opposé de $\max_{0 \leq v \leq Kx+S} \left[v(1 - V'_{b^*}(x)) \right] = (Kx + S)(1 - V'_{b^*}(x))$. Conséquentement, leur somme est nulle. \square

On déduit du Théorème 2.17 que V_{b^*} satisfait

$$\max \left\{ \mathcal{L}V_{b^*}(x) + \max_{0 \leq v \leq Kx+S} \left[v(1 - V'_{b^*}(x)) \right], V'_{b^*}(x) - \beta \right\} = 0, \quad x \geq 0,$$

soit précisément l'équation HJB telle qu'introduite à la Sous-section 2.1.1.

2.4.2 Vérification

Rappelons que le couple $(Z_t, G_t)_{t \geq 0}$ est tel que Z est un MBA réfléchi en 0, de dynamique

$$dZ_t = \mu dt + \sigma dB_t + dG_t,$$

donc

$$G_t = - \min_{0 \leq s \leq t} (X_s \wedge 0), \quad X_t = Z_0 + \mu t + \sigma B_t.$$

Les deux Lemmes suivants présentent des résultats que nous utiliserons pour conclure la démonstration du Théorème de vérification 2.20.

Lemme 2.18 *Le couple $(Z_t, G_t)_{t \geq 0}$ est tel que pour tout $t \geq 0$ et $x \geq 0$,*

$$G_t \leq - \min_{0 \leq s \leq t} (\mu s + \sigma B_s), \quad \mathbb{E}_x[Z_t] \leq x + \mu t + \frac{\sigma^2}{2\mu}.$$

Preuve. Pour la première inégalité, remarquons que

$$\min_{0 \leq s \leq t} (X_s \wedge 0) = \min_{0 \leq s \leq t} X_s, \quad t \geq \tau_0^X. \quad (2.27)$$

Dans le cas où $Z_0 = 0$, on a $\tau_0^X = 0$, donc

$$G_t = - \min_{0 \leq s \leq t} ((\mu s + \sigma B_s) \wedge 0) = - \min_{0 \leq s \leq t} (\mu s + \sigma B_s), \quad t \geq 0,$$

ce qui vérifie l'inégalité. De la même façon, pour $Z_0 > 0$, étant donné que, pour tout $t \geq 0$,

$$\min_{0 \leq s \leq t} X_s = Z_0 + \min_{0 \leq s \leq t} (\mu s + \sigma B_s) > \min_{0 \leq s \leq t} (\mu s + \sigma B_s)$$

alors l'inégalité est bien vérifiée pour $t \in [\tau_0^X, \infty)$ par l'équation (2.27). Enfin, pour $t \in [0, \tau_0^X)$, du fait que $X_t > 0$ sur cet intervalle, on a

$$-G_t = \min_{0 \leq s \leq t} (X_s \wedge 0) = 0 \geq \min_{0 \leq s \leq t} (\mu s + \sigma B_s),$$

ce qui conclut la démonstration de cette première inégalité.

Et pour la seconde inégalité, étant donné que $Z_t = Z_0 + \mu t + \sigma B_t + G_t$, $t \geq 0$, alors

$$\mathbb{E}_x[Z_t] = \mathbb{E}_x[Z_0] + \mu t + \mathbb{E}_x[G_t].$$

En utilisant la première inégalité et le fait que $\mathbb{E}_x[Z_0] = x$, on a

$$\mathbb{E}_x[Z_t] \leq x + \mu t + \mathbb{E} \left[- \min_{0 \leq s \leq t} (\mu s + \sigma B_s) \right] \leq x + \mu t + \mathbb{E} \left[- \min_{0 \leq s < \infty} (\mu s + \sigma B_s) \right].$$

Par l'équation 1.2.4(1) de (Borodin et Salminen, 2002), on a $-\min_{0 \leq s < \infty} (\alpha t + B_t) \sim \text{Exp}(2\alpha)$ pour $\alpha > 0$, donc

$$-\min_{0 \leq s < \infty} (\mu s + \sigma B_s) = \sigma \cdot \left[- \min_{0 \leq s < \infty} \left(\frac{\mu}{\sigma} t + B_t \right) \right] \sim \text{Exp}(2\mu/\sigma^2).$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E} \left[- \min_{0 \leq s < \infty} (\mu s + \sigma B_s) \right] = \frac{\sigma^2}{2\mu}.$$

□

Rappelons que la paire $(X_t^0, G_t^0)_{t \geq 0}$, c'est-à-dire une paire $(X_t^b, G_t^b)_{t \geq 0}$ avec $b = 0$, est de dynamique

$$dX_t^0 = (\mu - S - KX_t^0) dt + \sigma dB_t + dG_t^0,$$

à savoir un processus d'Ornstein-Uhlenbeck réfléchi en 0.

Lemme 2.19 Nous avons les deux inégalités suivantes presque sûrement pour tout $t \geq 0$:

$$-|V_{b^*}(0)| e^{-qt} \leq e^{-qt} V_{b^*}(X_t^u) < e^{-qt} (Z_t + V_{b^*}(b^*)), \quad (2.28)$$

$$\left| \int_0^t e^{-qs} (u(X_s^u) ds - \beta dG_s^u) \right| \leq \int_0^\infty e^{-qs} (KZ_s + S) ds + \beta \int_0^\infty e^{-qs} dG_s^0. \quad (2.29)$$

De plus, $\int_0^\infty e^{-qs} (KZ_s + S) ds$ et $\int_0^\infty e^{-qs} dG_s^0$ sont d'espérance finie.

Preuve. Pour l'inégalité (2.28), on remarquera, du fait que $e^{-qt} > 0$ pour tout $t \geq 0$, qu'il suffit de montrer l'inégalité

$$-|V_{b^*}(0)| \leq V_{b^*}(X_t^u) < Z_t + V_{b^*}(b^*).$$

La fonction V_{b^*} est croissante, donc $V_{b^*}(0) \leq V_{b^*}(x)$ pour tout $x \geq 0$. Et comme $V_{b^*}(0)$ peut être positive ou négative, nous écrivons $-|V_{b^*}(0)| \leq V_{b^*}(x)$ afin d'éviter toute ambiguïté sur le signe du côté gauche de l'inégalité. Pour le côté droit, on rappelle que V_{b^*} est concave, donc elle est majorée par sa tangente en $x = b^*$, que l'on définit par $T_{b^*} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Cette fonction est telle que, pour tout $x \geq 0$,

$$T_{b^*}(x) = V_{b^*}(b^*) + V'_{b^*}(b^*)(x - b^*) = V_{b^*}(b^*) + x - b^* < V_{b^*}(b^*) + x,$$

puisque $V'_{b^*}(b^*) = 1$ et $b^* > 0$. Ainsi, $V_{b^*}(X_t^u) < V_{b^*}(b^*) + X_t^u$. Par (Piera et Mazumdar, 2008), nous pouvons comparer des processus réfléchis en comparant leur dérive. Autrement dit, la dérive de Z étant supérieure à la dérive de X^u pour tout $u \in \mathcal{U}_{K,S}$, nous avons $X_t^u \leq Z_t$ presque sûrement pour tout $t \geq 0$. Par conséquent,

$$V_{b^*}(X_t^u) < V_{b^*}(b^*) + X_t^u \leq V_{b^*}(b^*) + Z_t \quad \text{p.s.}$$

Quant à l'inégalité (2.29), on a, par l'inégalité du triangle,

$$\left| \int_0^t e^{-qs} (u(X_s^u) ds - \beta dG_s^u) \right| \leq \left| \int_0^t e^{-qs} u(X_s^u) ds \right| + \beta \left| \int_0^t e^{-qs} dG_s^u \right|.$$

Les deux intégrales de droite sont positives, et $u(x) \leq Kx + S$ pour tout $x \geq 0$, donc

$$\left| \int_0^t e^{-qs} (u(X_s^u) ds - \beta dG_s^u) \right| \leq \int_0^t e^{-qs} (KX_s^u + S) ds + \beta \int_0^t e^{-qs} dG_s^u.$$

Comme il fut mentionné ci-haut, $X_t^u \leq Z_t$ presque sûrement pour tout $t \geq 0$. De cette façon,

$$\int_0^t e^{-qs} (KX_s^u + S) ds \leq \int_0^t e^{-qs} (KZ_s + S) ds \leq \int_0^\infty e^{-qs} (KZ_s + S) ds,$$

vu que l'intégrande est positif. De plus, la dérive de X^0 étant inférieure à la dérive de X^u pour tout $u \in \mathcal{U}_{K,S}$, nous avons par (Piera et Mazumdar, 2008) que $G_t^u - G_s^u \leq G_t^0 - G_s^0$ presque sûrement pour tout $t \geq s \geq 0$.

Ainsi,

$$\int_0^t e^{-qs} dG_s^u \leq \int_0^t e^{-qs} dG_s^0 \leq \int_0^\infty e^{-qs} dG_s^0 \quad \text{p.s.}$$

comme l'intégrande est positif, ce qui conclut la démonstration de l'inégalité (2.29).

Pour terminer, nous montrons que les deux intégrales du côté droit de l'inégalité (2.29) sont d'espérance finie. Pour la première intégrale,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} (KZ_t + S) dt \right] &= \int_0^\infty e^{-qt} (K\mathbb{E}_x[Z_t] + S) dt \\
&\leq \int_0^\infty e^{-qt} \left(K \left(x + \mu t + \frac{\sigma^2}{2\mu} \right) + S \right) dt \\
&= K\mu \int_0^\infty t e^{-qt} dt + \left(Kx + K\frac{\sigma^2}{2\mu} + S \right) \int_0^\infty e^{-qt} dt \\
&= \frac{K\mu}{q^2} + \frac{Kx + K\frac{\sigma^2}{2\mu} + S}{q} < \infty.
\end{aligned}$$

Et quant à la seconde intégrale, commençons par $x = 0$. Par définition de V_b avec $b = 0$,

$$V_0(0) = \mathbb{E}_0 \left[\int_0^\infty e^{-qt} (KX_t^0 + S) dt \right] - \beta \mathbb{E}_0 \left[\int_0^\infty e^{-qt} dG_t^0 \right].$$

Cependant, $V_0(0)$ et $\mathbb{E}_0 \left[\int_0^\infty e^{-qt} (KX_t^0 + S) dt \right]$ sont finies, donc $\mathbb{E}_0 \left[\int_0^\infty e^{-qt} dG_t^0 \right]$ l'est également. Enfin, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} dG_t^0 \right] &= \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_0^{X^0}} e^{-qt} dG_t^0 \right] + \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\tau_0^{X^0} < \infty} \int_{\tau_0^{X^0}}^\infty e^{-qt} dG_t^0 \right] \\
&= 0 + \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^{X^0}} \mathbf{1}_{\tau_0^{X^0} < \infty} \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qs} dG_{s+\tau_0^{X^0}}^0 \mid \mathcal{F}_{\tau_0^{X^0}} \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^{X^0}} \mathbf{1}_{\tau_0^{X^0} < \infty} \mathbb{E}_{X_{\tau_0^{X^0}}^0} \left[\int_0^\infty e^{-qs} dG_s^0 \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_0 \left[\int_0^\infty e^{-qs} dG_s^0 \right] \mathbb{E}_x \left[e^{-q\tau_0^{X^0}} \mathbf{1}_{\tau_0^{X^0} < \infty} \right] < \infty.
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.20 (Vérification) Pour tout $x \geq 0$ et pour toute stratégie $u \in \mathcal{U}_{K,S}$, on a $V_{b^*}(x) \geq V_u(x)$.

Preuve. Soit $u \in \mathcal{U}_{K,S}$, on applique la Formule d'Itô à (t, X_t^u) avec la fonction $(t, x) \mapsto e^{-qt} V_{b^*}(x)$ qui est $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+^2)$. On trouve

$$d(e^{-qt} V_{b^*}(X_t^u)) = -qe^{-qt} V_{b^*}(X_t^u) dt + e^{-qt} V_{b^*}'(X_t^u) dX_t^u + \frac{1}{2} e^{-qt} V_{b^*}''(X_t^u) d[X^u]_t.$$

Le processus G^u étant continu et croissant, on a $d[G^u]_t = 0$, donc $d[X^u]_t = \sigma^2 dt$. En développant dX_t^u ,

on obtient

$$\begin{aligned}
d(e^{-qt}V_{b^*}(X_t^u)) &= -qe^{-qt}V_{b^*}(X_t^u)dt + e^{-qt}V_{b^*}'(X_t^u) [(\mu - u(X_t^u))dt + \sigma dB_t + dG_t^u] \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2}e^{-qt}V_{b^*}''(X_t^u)dt \\
&= e^{-qt} \left[\left(\frac{\sigma^2}{2}V_{b^*}''(X_t^u) + \mu V_{b^*}'(X_t^u) - qV_{b^*}(X_t^u) \right) - u(X_t^u)V_{b^*}'(X_t^u) \right] dt \\
&\quad + e^{-qt}V_{b^*}'(X_t^u)dG_t^u + \sigma e^{-qt}V_{b^*}'(X_t^u)dB_t \\
&= e^{-qt} [\mathcal{L}V_{b^*}(X_t^u) - u(X_t^u)V_{b^*}'(X_t^u)] dt + e^{-qt}V_{b^*}'(X_t^u)dG_t^u + dM_t,
\end{aligned}$$

où l'intégrale stochastique $M_t := \int_0^t \sigma e^{-qs}V_{b^*}'(X_s^u)dB_s$ est une martingale du fait que

$$\int_0^t \mathbb{E} [e^{-qs}V_{b^*}'(X_s^u)]^2 ds \leq \int_0^t (\beta e^{-qs})^2 ds < \infty.$$

Sous forme intégrale, la dernière équation devient

$$\begin{aligned}
e^{-qt}V_{b^*}(X_t^u) &= V_{b^*}(X_0^u) + \int_0^t e^{-qs}(\mathcal{L}V_{b^*}(X_s^u) - u(X_s^u)V_{b^*}'(X_s^u))ds \\
&\quad + \int_0^t e^{-qs}V_{b^*}'(X_s^u)dG_s^u + M_t.
\end{aligned}$$

Nous faisons apparaître les intégrales $\int_0^t e^{-qs}u(X_s^u)ds$ et $-\beta \int_0^t e^{-qs}dG_s^u$ du côté droit de l'égalité pour obtenir

$$\begin{aligned}
e^{-qt}V_{b^*}(X_t^u) &= V_{b^*}(X_0^u) + \int_0^t e^{-qs} \left(\mathcal{L}V_{b^*}(X_s^u) + u(X_s^u)(1 - V_{b^*}'(X_s^u)) \right) ds + M_t \\
&\quad + \int_0^t e^{-qs}(V_{b^*}'(X_s^u) - \beta)dG_s^u - \int_0^t e^{-qs}(u(X_s^u)ds - \beta dG_s^u).
\end{aligned}$$

Notons que les intégrandes des deux premières intégrales correspondent à l'inégalité HJB. Donc, par le Théorème 2.17,

$$\mathcal{L}V_{b^*}(X_s^u) + u(X_s^u)(1 - V_{b^*}'(X_s^u)) \leq 0, \quad V_{b^*}'(X_s^u) - \beta \leq 0,$$

pour tout $s \geq 0$, et il s'ensuit que les deux intégrales sont négatives (la deuxième en particulier en raison de la croissance de G^u). Ainsi, on a

$$e^{-qt}V_{b^*}(X_t^u) \leq V_{b^*}(X_0^u) - \int_0^t e^{-qs}(u(X_s^u)ds - \beta dG_s^u) + M_t.$$

En réarrangeant l'inégalité puis en prenant l'espérance \mathbb{E}_x avec $x \geq 0$ des deux côtés, on trouve

$$V_{b^*}(x) \geq \mathbb{E}_x [e^{-qt}V_{b^*}(X_t^u)] + \mathbb{E}_x \left[\int_0^t e^{-qs}(u(X_s^u)ds - \beta dG_s^u) \right].$$

Nous prenons la limite pour $t \rightarrow \infty$ de cette expression, ce qui donne

$$V_{b^*}(x) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [e^{-qt} V_{b^*}(X_t^u)] + \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x \left[\int_0^t e^{-qs} (u(X_s^u) ds - \beta dG_s^u) \right].$$

En appliquant \mathbb{E}_x à l'inégalité (2.28) ainsi que la linéarité de l'espérance, on trouve

$$-|V_{b^*}(0)| e^{-qt} \leq \mathbb{E}_x [e^{-qt} V_{b^*}(X_t^u)] \leq e^{-qt} (\mathbb{E}_x [Z_t] + V_{b^*}(b^*)).$$

Rappelons que $\mathbb{E}_x [Z_t] \leq x + \mu t + \frac{\sigma^2}{2\mu}$ par le Lemme 2.18, et donc en prenant la limite pour $t \rightarrow \infty$ de chaque côté, l'inégalité devient

$$-|V_{b^*}(0)| \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-qt} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [e^{-qt} V_{b^*}(X_t^u)] \leq \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-qt} \left(x + \mu t + \frac{\sigma^2}{2\mu} + V_{b^*}(b^*) \right).$$

Ainsi, par le Théorème des gendarmes,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x [e^{-qt} V_{b^*}(X_t^u)] = 0,$$

et par conséquent,

$$V_{b^*}(x) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x \left[\int_0^t e^{-qs} (u(X_s^u) ds - \beta dG_s^u) \right].$$

Maintenant, nous utilisons le Théorème de convergence dominée pour entrer la limite dans l'espérance, étant donné que par l'inégalité (2.29), on a

$$\left| \int_0^t e^{-qs} (u(X_s^u) ds - \beta dG_s^u) \right| \leq \int_0^\infty e^{-qs} (K Z_s + S) ds + \beta \int_0^\infty e^{-qs} dG_s^0,$$

et que les deux intégrales du côté droit sont toutes deux d'espérance finie par le Lemme 2.19. Par conséquent,

$$\begin{aligned} V_{b^*}(x) &\geq \mathbb{E}_x \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-qs} (u(X_s^u) ds - \beta dG_s^u) \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qs} (u(X_s^u) ds - \beta dG_s^u) \right] \\ &= V_u(x). \end{aligned}$$

□

Rappelons que la fonction valeur V est donnée par

$$V(x) = \sup_{u \in \mathcal{U}_{K,S}} V_u(x), \quad x \geq 0.$$

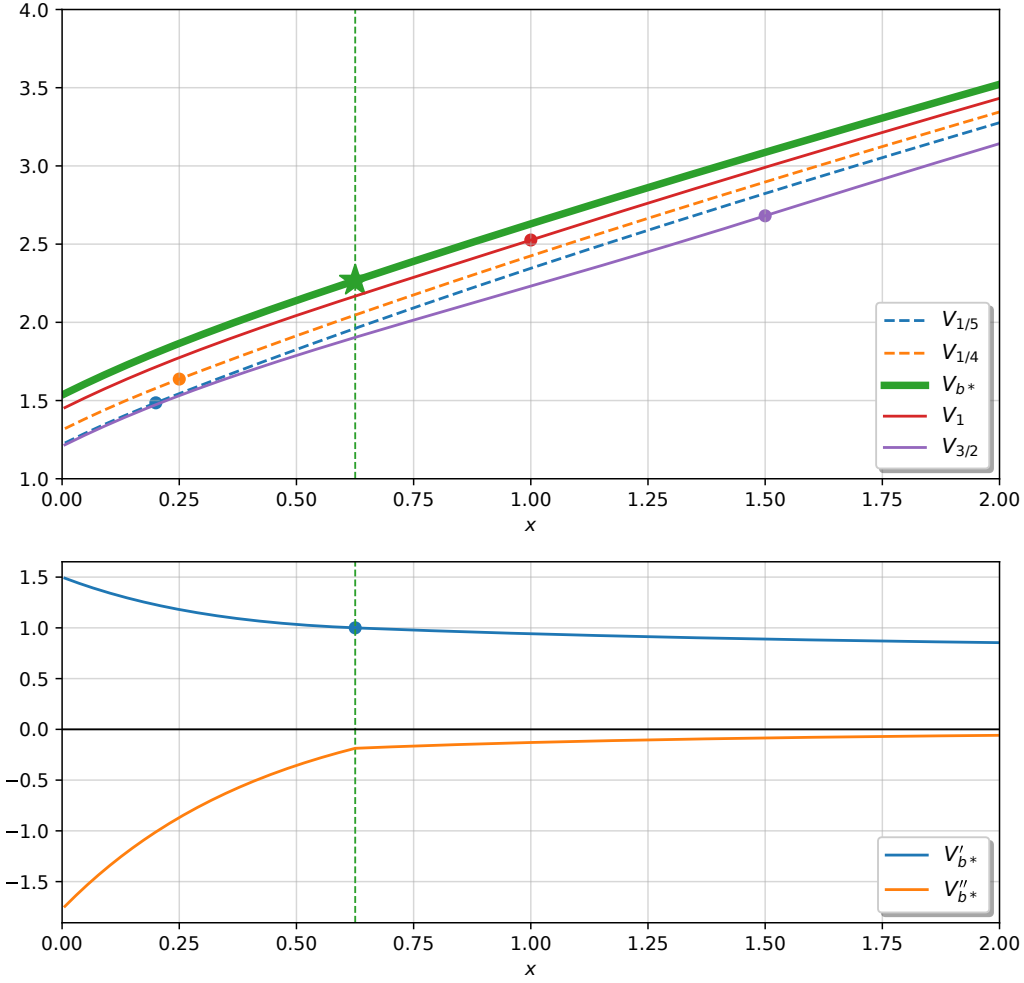


Figure 2.6 – Exemple de fonction valeur et de fonctions de performance sous-optimales

Paramètres : $\mu = 1$, $\sigma^2 = 1$, $K = 1$, $S = 2$, $q = 0.4$, $\beta = 1.5$.

Par le Théorème 2.20, on en conclut que $V_{b^*} \geq V$. En même temps, la stratégie linéaire de seuil b^* est admissible, donc $V_{b^*} \leq V$. Par conséquent,

$$V_{b^*} = V.$$

Maintenant que nous savons que V_{b^*} est bien la fonction valeur, et donc que nous avons essentiellement résolu le problème, nous pouvons aisément montrer que b^* est unique. Supposons qu'il existe un $b_0 \neq b^*$ tel que $V_{b_0} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$. Ainsi, on a $V'_{b_0}(b_0) = 1$, et par le Théorème de vérification, $V_{b_0}(x) \geq V_u(x)$ pour tout $x \geq 0$ et pour toute stratégie $u \in \mathcal{U}_{K,S}$. Comme $u_{b^*}, u_{b_0} \in \mathcal{U}_{K,S}$, alors $V_{b_0}(x) \geq V_{b^*}(x)$ et $V_{b^*}(x) \geq V_{b_0}(x)$ pour tout $x \geq 0$. Par conséquent,

$$V_{b_0} = V_{b^*}.$$

Rappelons que $V'_{b_0}(b_0) = 1 = V'_{b^*}(b^*)$, ou de manière équivalente, $V'(b_0) = 1 = V'(b^*)$. Toutefois, V est strictement concave par la Proposition 2.15, donc V' est strictement décroissante. De fait, $V'(b_0) \neq V'(b^*)$, et on arrive à une contradiction. Par conséquent, $b_0 = b^*$.

La Figure 2.6 illustre, dans le graphique du haut, un exemple de fonction valeur (en vert gras), et la compare à des fonctions de performance d'autres stratégies linéaires qui sont quant à elles sous-optimales. Les points et l'étoile indiquent le seuil pour chaque fonction. Dans le graphique du bas sont affichées la première et seconde dérivée de la fonction valeur $V = V_{b^*}$ (en bleu et en orange, respectivement). D'une part, nous voyons bien que $V'(0) = \beta = 1.5$ et $V'(b^*) = 1$, comme il est attendu. D'autre part, la dérivée seconde est bien continue, en particulier en $x = b^*$.

2.4.3 Consolidation

Grâce à la condition $V'_{b^*}(b^*) = 1$ satisfaite par la fonction valeur, nous pouvons l'utiliser de manière à obtenir une expression « simplifiée » de la fonction valeur. En fait, nous proposons deux formulations équivalentes de V : l'une étant plus compacte car composée de J_{b^*} et Φ_{b^*} ; l'autre étant définie par parties et formée uniquement de nos transformées élémentaires.

La première est déduite de l'équation (2.7), qu'on dérive et évalue en b^* pour obtenir

$$1 = J'_{b^*}(b^*) + V_{b^*}(0)\Phi'_{b^*}(b^*),$$

puis

$$V_{b^*}(0) = \frac{1 - J'_{b^*}(b^*)}{\Phi'_{b^*}(b^*)}.$$

En remplaçant dans l'équation (2.7), on trouve enfin

$$V(x) = J_{b^*}(x) + (1 - J'_{b^*}(b^*)) \frac{\Phi_{b^*}(x)}{\Phi'_{b^*}(b^*)}, \quad x \geq 0.$$

Pour la seconde forme, nous partons de l'équation (2.22). La branche avec $x \geq b^*$ étant suffisamment développée, il nous reste alors la branche avec $0 \leq x < b^*$. Il nous faut pour cela écrire explicitement $V_{b^*}(0)$ et $V_{b^*}(b^*)$. D'abord, en combinant les équations (2.9) et (2.17) (cette dernière étant satisfaite avec b^*), on trouve

$$V_{b^*}(0) = \frac{\beta - \frac{1 - V_{b^*}(0)\psi'_{b^*}(b^*)}{\varphi'_{b^*}(b^*)}}{\psi'_{b^*}(0)}.$$

On isole $V_{b^*}(0)$, et on obtient

$$V_{b^*}(0) = \frac{\frac{1}{\psi'_{b^*}(0)} \left(\beta - \frac{\varphi'_{b^*}(0)}{\varphi'_{b^*}(b^*)} \right)}{1 - \frac{\psi'_{b^*}(b^*)}{\varphi'_{b^*}(b^*)} \frac{\varphi'_{b^*}(0)}{\psi'_{b^*}(0)}} = \frac{\beta \varphi'_{b^*}(b^*) - \varphi'_{b^*}(0)}{\psi'_{b^*}(0) \varphi'_{b^*}(b^*) - \psi'_{b^*}(b^*) \varphi'_{b^*}(0)}.$$

Ensuite, vu que $V'_{b^*}(0) = \beta$ par l'équation (2.15), on a

$$\beta = V_{b^*}(b^*) \varphi'_{b^*}(0) + V_{b^*}(0) \psi'_{b^*}(0).$$

En isolant $V_{b^*}(b^*)$, puis en utilisant ce qu'on vient d'obtenir pour $V_{b^*}(0)$:

$$V_{b^*}(b^*) = \frac{1}{\varphi'_{b^*}(0)} \left(\beta - \frac{\beta \varphi'_{b^*}(b^*) - \varphi'_{b^*}(0)}{\psi'_{b^*}(0) \varphi'_{b^*}(b^*) - \psi'_{b^*}(b^*) \varphi'_{b^*}(0)} \psi'_{b^*}(0) \right) = \frac{\psi'_{b^*}(0) - \beta \psi'_{b^*}(b^*)}{\psi'_{b^*}(0) \varphi'_{b^*}(b^*) - \psi'_{b^*}(b^*) \varphi'_{b^*}(0)}.$$

Par conséquent, pour $0 \leq x < b^*$, la fonction valeur s'écrit par

$$V(x) = \frac{\varphi_b(x) (\psi'_{b^*}(0) - \beta \psi'_{b^*}(b^*)) + \psi_b(x) (\beta \varphi'_{b^*}(b^*) - \varphi'_{b^*}(0))}{\psi'_{b^*}(0) \varphi'_{b^*}(b^*) - \psi'_{b^*}(b^*) \varphi'_{b^*}(0)}.$$

Nous avons mentionné plus haut que les fonctions de performance de notre problème peuvent être négatives si la pénalité due aux injections est significative. En pratique, il est d'intérêt que la fonction valeur soit positive. En raison de sa croissance, la fonction valeur est positive sur \mathbb{R}_+ si et seulement si $V_{b^*}(0) \geq 0$, ce qui est équivalent à

$$\frac{\beta \varphi'_{b^*}(b^*) - \varphi'_{b^*}(0)}{\psi'_{b^*}(0) \varphi'_{b^*}(b^*) - \psi'_{b^*}(b^*) \varphi'_{b^*}(0)} \geq 0.$$

On sait, par le Lemme 1.8, que

$$\psi'_{b^*}(0) \varphi'_{b^*}(b^*) - \psi'_{b^*}(b^*) \varphi'_{b^*}(0) < 0.$$

Conséquemment, V est positive si et seulement si

$$\beta \leq \frac{\varphi'_{b^*}(0)}{\varphi'_{b^*}(b^*)}.$$

Pour finir, le Théorème suivant réunit les deux formes de la fonction valeur que l'on vient d'obtenir, en plus de consolider la solution de ce problème.

Théorème 2.21 (Solution du problème) Soit $b^* \in (0, c^*)$ solution de l'équation (2.18). La stratégie linéaire $u_{b^*} \in \mathcal{U}_{K,S}$ telle que $u_{b^*}(x) = (Kx + S)\mathbb{1}_{x \geq b^*}$ est optimale, et la fonction valeur V est donnée par

$$V(x) = J_{b^*}(x) + (1 - J'_{b^*}(b^*)) \frac{\Phi_{b^*}(x)}{\Phi'_{b^*}(b^*)}, \quad x \geq 0,$$

ou de manière équivalente par

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\varphi_b(x)(\psi'_{b^*}(0) - \beta\psi'_{b^*}(b^*)) + \psi_b(x)(\beta\varphi'_{b^*}(b^*) - \varphi'_{b^*}(0))}{\psi'_{b^*}(0)\varphi'_{b^*}(b^*) - \psi'_{b^*}(b^*)\varphi'_{b^*}(0)}, & 0 \leq x < b^*, \\ \frac{K}{q+K} \left(x + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) + \frac{q}{q+K} \frac{\Psi_{b^*}(x)}{\Psi'_{b^*}(b^*)}, & x \geq b^*. \end{cases}$$

CHAPITRE 3

ANALYSES NUMÉRIQUES

Dans ce dernier chapitre, nous effectuons quelques analyses numériques qui nous aideront à mieux saisir les mécanismes du problème. Nous voyons la manière dont se comportent la solution optimale (Section 3.2) et les différentes fonctions (Section 3.3) selon les paramètres du problème tout en les comparant à celles du problème limite de (Løkka et Zervos, 2008). Nous voyons également l'impact de la moyenne asymptotique du processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur la fonction valeur. Mais avant, nous confirmons numériquement la fonction valeur à la Section 3.1 à partir de simulations.

Rappelons que l'on peut séparer la fonction de performance d'une stratégie linéaire au niveau b en deux fonctions D_b, R_b définies ainsi pour tout $x \geq 0$:

$$D_b(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} dL_t^b \right], \quad R_b(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} dG_t^b \right],$$

où

$$L_t^b = \int_0^t (KX_s^b + S) \mathbb{1}_{X_s^b \geq b} ds, \quad L_0^b = 0.$$

La fonction de performance s'écrit alors comme $V_b = D_b - \beta R_b$, ce qui nous permet d'isoler l'effet des dividendes et des injections dans V_b . De plus, on connaît la forme explicite de ces fonctions, qui est donnée par l'équation (2.16).

3.1 Confirmation des résultats par simulation

Il est possible d'estimer D_{b^*}, R_{b^*} et V_{b^*} ponctuellement grâce à des simulations. Si l'on souhaite estimer ces fonctions au point $x_0 \geq 0$ fixé, il suffit de simuler les processus sur un intervalle $[0, T]$ où $T \in (0, \infty)$ est fixé, et en démarrant la simulation de X^{b^*} en x_0 .

Sans perte de généralité, prenons R_{b^*} : cette démarche s'applique tout aussi bien à D_{b^*} et V_{b^*} . Pour une simulation donnée, effectuée sur une partition $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$, on calcule une somme de Riemann-Stieltjes pour approximer

$$\int_0^T e^{-qt} dG_t^{b^*} \approx \sum_{i=1}^n e^{-qt_{i-1}} \left(\hat{G}_{t_i}^{b^*} - \hat{G}_{t_{i-1}}^{b^*} \right),$$

où \hat{G}^{b*} est la simulation de G^{b*} . Il ne reste qu'à produire un nombre N (élevé) de simulations, et par la Méthode de Monte-Carlo, on a

$$\mathbb{E}_{x_0} \left[\int_0^T e^{-qt} dG_t^{b*} \right] \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n e^{-qt_{i-1}} \left(\hat{G}_{t_i}^{b*,k} - \hat{G}_{t_{i-1}}^{b*,k} \right),$$

où $\hat{G}^{b*,k}$ est le processus G^{b*} obtenu lors de la k^e simulation. Cette espérance n'est pas tout à fait $R_{b*}(x_0)$ puisque l'intégrale est sur $[0, T]$ et non pas sur \mathbb{R}_+ . Néanmoins, on peut décomposer $R_{b*}(x_0)$ pour faire apparaître cette espérance, tel qu'on l'a fait à multiples reprises dans les chapitres précédents, c'est-à-dire par un changement de variable et par la Propriété forte de Markov :

$$\begin{aligned} R_{b*}(x_0) &= \mathbb{E}_{x_0} \left[\int_0^T e^{-qt} dG_t^{b*} \right] + \mathbb{E}_{x_0} \left[\int_T^\infty e^{-qt} dG_t^{b*} \right] \\ &= \mathbb{E}_{x_0} \left[\int_0^T e^{-qt} dG_t^{b*} \right] + \mathbb{E}_{x_0} \left[e^{-qT} \mathbb{E}_{x_0} \left[\int_0^\infty e^{-qs} dG_{s+T}^{b*} \mid \mathcal{F}_T \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_{x_0} \left[\int_0^T e^{-qt} dG_t^{b*} \right] + \mathbb{E}_{x_0} \left[e^{-qT} \mathbb{E}_{X_T^{b*}} \left[\int_0^\infty e^{-qs} dG_s^{b*} \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_{x_0} \left[\int_0^T e^{-qt} dG_t^{b*} \right] + e^{-qT} \mathbb{E}_{x_0} \left[R_{b*}(X_T^{b*}) \right]. \end{aligned}$$

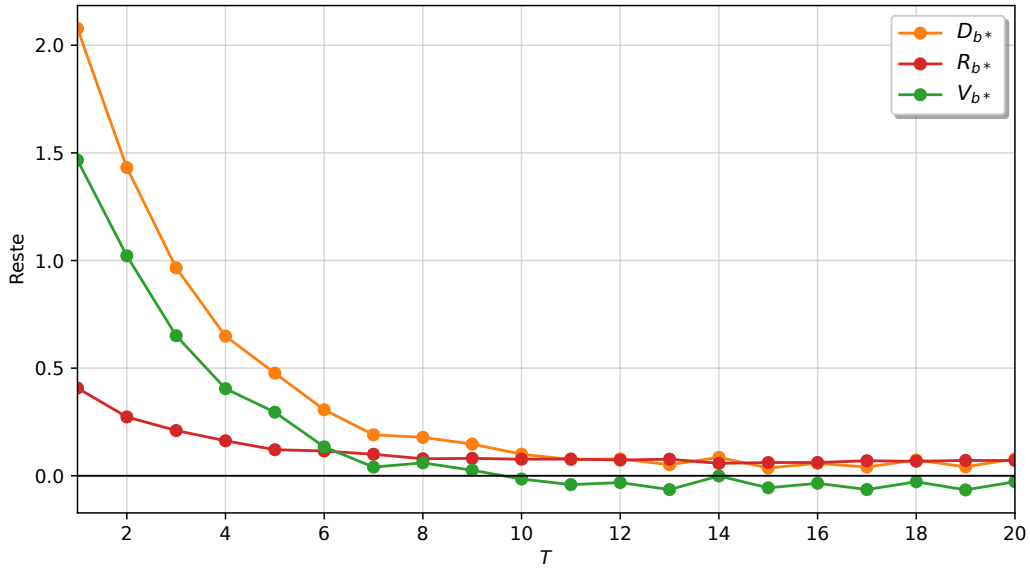


Figure 3.1 – Estimation du reste de D_{b*} , R_{b*} , V_{b*} pour $x_0 = 1$ en fonction de T

$N = 2000$ simulations de pas $\Delta t \approx 0.005$ pour chaque T . Paramètres : $\mu = 1$, $\sigma^2 = 1$, $K = 1$, $S = 2$, $q = 0.4$, $\beta = 1.5$.

De toute évidence, cette démarche nous donne aussi une expression semblable pour D^* et V_b^* , soit

$$D_{b^*}(x_0) = \mathbb{E}_{x_0} \left[\int_0^T e^{-qt} dL_t^{b^*} \right] + e^{-qT} \mathbb{E}_{x_0} \left[D_{b^*}(X_T^{b^*}) \right],$$

$$V_{b^*}(x_0) = \mathbb{E}_{x_0} \left[\int_0^T e^{-qt} \left(dL_t^{b^*} - \beta dG_t^{b^*} \right) \right] + e^{-qT} \mathbb{E}_{x_0} \left[V_{b^*}(X_T^{b^*}) \right],$$

où le premier terme est celui qu'on approxime par la méthode de Monte-Carlo, et le second représente en quelque sorte un « reste », dont on s'attend qu'il soit faible lorsque T est grand (voir la Figure 3.1).

En fait, il est aisé de montrer que ce reste est $o(1)$ pour les trois fonctions. Tout d'abord, pour R_{b^*} , on a $R_{b^*}(0) = -\frac{1}{\Phi'_{b^*}(0)} < \infty$, et $R_{b^*}(x) \leq R_{b^*}(0)$ pour tout $x \geq 0$ par la Proposition 2.11. Ainsi, comme R_{b^*} est positive, alors

$$0 \leq e^{-qT} \mathbb{E}_{x_0} \left[R_{b^*}(X_T^{b^*}) \right] \leq R_{b^*}(0) e^{-qT},$$

et par le Théorème des gendarmes, on a

$$e^{-qT} \mathbb{E}_{x_0} \left[R_{b^*}(X_T^{b^*}) \right] \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Ensuite, quant à V_{b^*} , nous savons déjà par la démonstration du Théorème de vérification 2.20 que

$$e^{-qT} \mathbb{E}_{x_0} \left[V_{b^*}(X_T^{b^*}) \right] \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Pour finir, on a $D_{b^*} = V_{b^*} + \beta R_{b^*}$, donc

$$e^{-qT} \mathbb{E}_{x_0} \left[D_{b^*}(X_T^{b^*}) \right] = e^{-qT} \mathbb{E}_{x_0} \left[V_{b^*}(X_T^{b^*}) \right] + \beta e^{-qT} \mathbb{E}_{x_0} \left[R_{b^*}(X_T^{b^*}) \right] \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

De cette manière, nous pouvons confirmer les résultats théoriques en prenant T suffisamment grand, ce que nous montre la Figure 3.1. À partir de $T = 10$, la différence entre nos fonctions évaluées en $x_0 = 1$ et les estimations par la Méthode de Monte-Carlo se stabilise autour de zéro pour devenir négligeable (certaines valeurs pour V_{b^*} sont négatives à cause de fluctuations aléatoires). C'est pourquoi nous simulons nos processus jusqu'à $T = 10$ pour produire la Figure 3.2 ci-dessous.

Dans cette Figure, les diagrammes en violon illustrent la distribution des estimations en chaque point ainsi que la moyenne des estimations. Cette moyenne est précisément notre approximation par la Méthode de Monte-Carlo, que l'on compare à la fonction représentée par une courbe. Plusieurs caractéristiques se dégagent de ces graphiques, que nous quantifions dans le Tableau 3.1 pour supporter nos observations. En

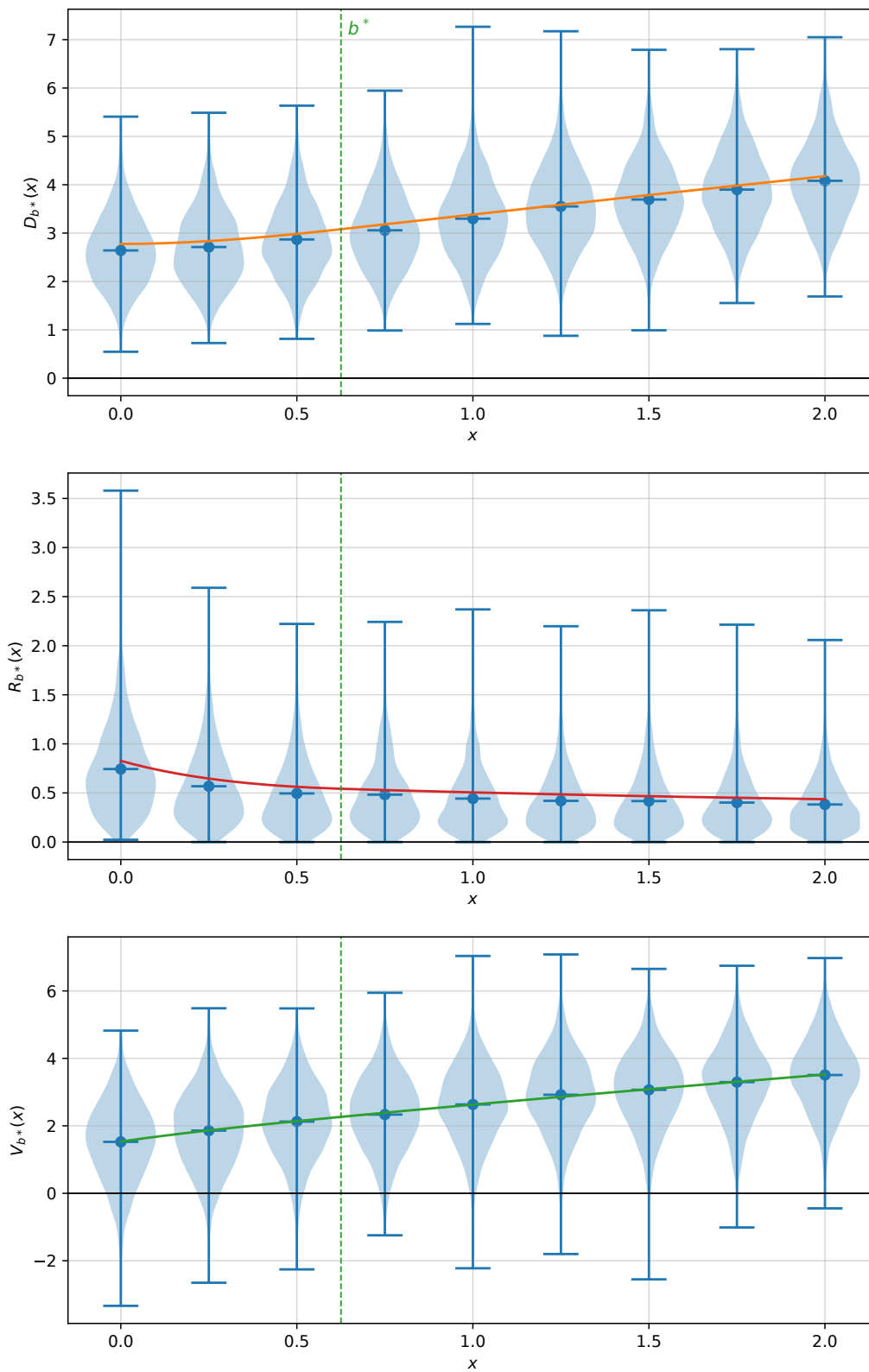


Figure 3.2 - Comparaison des fonctions D_{b^*} , R_{b^*} , V_{b^*} à $N = 2000$ simulations

Chaque simulation est de pas $\Delta t \approx 0.005$, et se termine en $T = 10$. Paramètres : $\mu = 1$, $\sigma^2 = 1$, $K = 1$, $S = 2$, $q = 0.4$, $\beta = 1.5$.

Statistique	D_{b^*}	R_{b^*}	V_{b^*}
Erreur absolue	0.0998	0.0617	0.0214
Erreur relative	0.0306	0.1141	0.0084
Écart-type	0.8042	0.33406	1.1504
Asymétrie	0.2700	1.2490	-0.2128

Tableau 3.1 – Statistiques des estimations de la Figure 3.2

chaque point x_0 est calculée une certaine statistique sur les $N = 2000$ estimations. Le Tableau 3.1 affiche la moyenne de cette statistique sur les 9 points x_0 choisis.

On constate que l'erreur relative de R_{b^*} est bien plus élevée que celle de D_{b^*} : les erreurs absolues de D_{b^*} et de R_{b^*} sont similaires alors que les valeurs de R_{b^*} sont plus faibles, ce qui peut expliquer cette différence. Néanmoins, V_{b^*} s'obtient en soustrayant R_{b^*} de D_{b^*} , ce qui a pour effet d'amoindrir l'erreur absolue de V_{b^*} . L'impact sur l'erreur relative de V_{b^*} est toutefois moindre vu que $V_{b^*} < D_{b^*}$. On observe que l'écart-type de R_{b^*} est la plus faible étant donné que R_{b^*} est proche de zéro et que toutes les estimations sont évidemment positives.

On voit graphiquement que la densité des estimations de R_{b^*} est très asymétrique vers la droite, ce qui est corroboré par un coefficient d'asymétrie¹ élevé dans le Tableau 3.1. Cela a pour effet de tirer la moyenne vers le bas, mais aussi d'accroître légèrement la variabilité de V_{b^*} par rapport à D_{b^*} . Mais surtout, cela affecte l'asymétrie de V_{b^*} : le coefficient est positif pour D_{b^*} , mais devient négatif pour V_{b^*} en raison de la forte asymétrie de R_{b^*} .

3.2 Effet des paramètres sur le seuil optimal

Analysons maintenant l'impact qu'ont les divers paramètres du problème sur le seuil optimal b^* , comme montré par la Figure 3.3. Tout d'abord, rappelons que le problème avec injections obligatoires résolu par (Løkka et Zervos, 2008) est un cas limite de notre problème lorsqu'on tend K ou S vers l'infini. On sait également par la Proposition 2.14 que $b^* < c^*$, où c^* est le seuil optimal de (Løkka et Zervos, 2008). Par

1. Rappelons que ce coefficient est positif lorsque la distribution est asymétrique vers la droite, c'est-à-dire quand sa queue est plus longue à droite ; et vice-versa. Et plus le coefficient est faible, plus la distribution est symétrique.

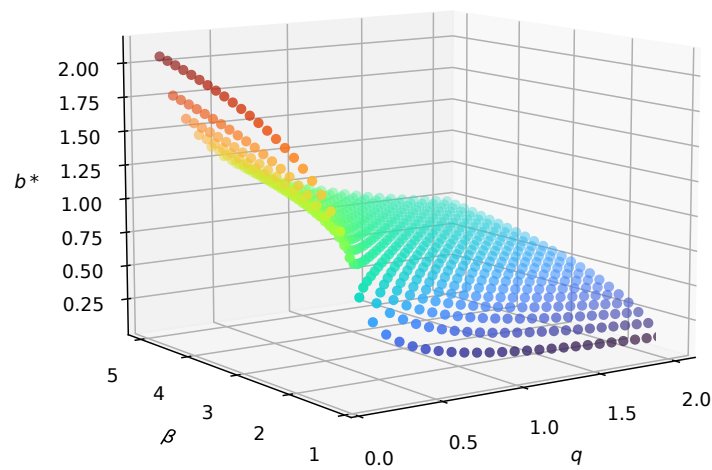
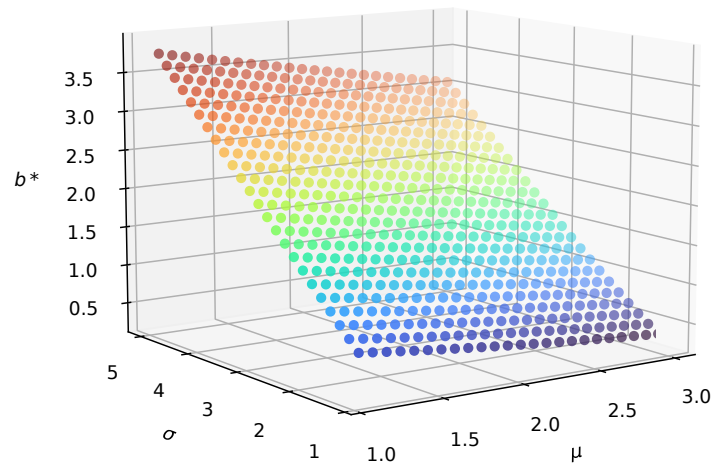
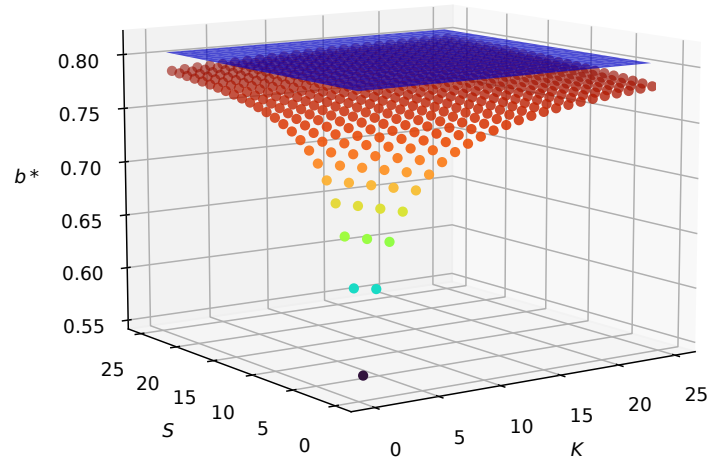


Figure 3.3 – Valeur du seuil optimal b^* en fonction des paramètres

Valeur des paramètres fixés pour chaque graphe : $\mu = 1$, $\sigma^2 = 1$, $K = 1$, $S = 2$, $q = 0.4$, $\beta = 1.5$.

conséquent, $b^* \rightarrow c^*$ lorsqu'on augmente K ou S . Le graphique du haut de la Figure 3.3 illustre cette convergence. Le plan horizontal bleu est au niveau de c^* sur l'axe vertical. On remarque que b^* augmente rapidement pour de petites valeurs de K, S , et que b^* est déjà très près de c^* pour $K, S \approx 25$.

Ensuite, le graphique du centre suggère une relation presque linéaire entre μ, σ et b^* . D'une part, le seuil optimal est décroissant avec μ , parce que pour μ élevé, le processus du surplus a une forte tendance à la hausse. Il y a dans ce cas peu de retours en zéro, et la réfraction au-dessus du seuil est moins prononcée, ce qui étire la durée des versements. D'autre part, b^* est croissant avec σ , puisqu'une haute volatilité du surplus le fait parcourir \mathbb{R}_+ plus rapidement. Il n'est donc pas nécessaire que le seuil de versements de dividendes soit faible pour que des versements surviennent régulièrement, sans oublier qu'un seuil faible cause le surplus à atteindre davantage la barrière en zéro.

Pour finir, le graphique du bas montre une même relation de croissance/décroissance pour q, β sauf que la tendance n'est clairement pas linéaire ici :

- b^* est décroissant et convexe avec q , mais de manière plus prononcée quand β est élevé. Lorsque q augmente, les flux de capitaux perdent en valeur plus rapidement, donc il est d'intérêt de diminuer le seuil pour verser des dividendes plus vite. La tendance est convexe, car l'actualisation est de la forme e^{-qt} , fonction convexe de q . La variation de b^* est plus importante pour un grand β en raison de la plus haute pénalité pour les injections : une petite variation de q crée une différence notable dans le coût des injections, le seuil optimal devant s'ajuster en conséquence ;
- b^* est croissant et concave avec β , mais moindre lorsque q est grand. Quand β augmente, les injections sont plus coûteuses, donc le seuil augmente pour éviter que la réfraction ramène le surplus trop souvent vers zéro. La concavité s'explique peut-être par le *principe de l'utilité marginale décroissante*, à savoir que l'effet d'une variation du coût des injections est moins important quand les coûts sont déjà élevés au départ. Enfin, la variation de b^* en β est moindre pour q élevé puisque les flux perdent vite en valeur, donc il n'est pas nécessaire d'ajuster grandement b^* quand β varie.

3.3 Effet des paramètres sur la fonction valeur

Maintenant que nous avons étudié l'effet des paramètres sur le seuil optimal b^* , il est d'intérêt d'analyser le comportement de la fonction valeur vis-à-vis des paramètres, et de la comparer à la fonction valeur du problème limite de (Løkka et Zervos, 2008), donnée par V_c , mais que l'on note ici V_{LZ} pour éviter toute confusion. Il est possible de lier notre ensemble de stratégies admissibles $\mathcal{U}_{K,S}$ à l'ensemble des processus

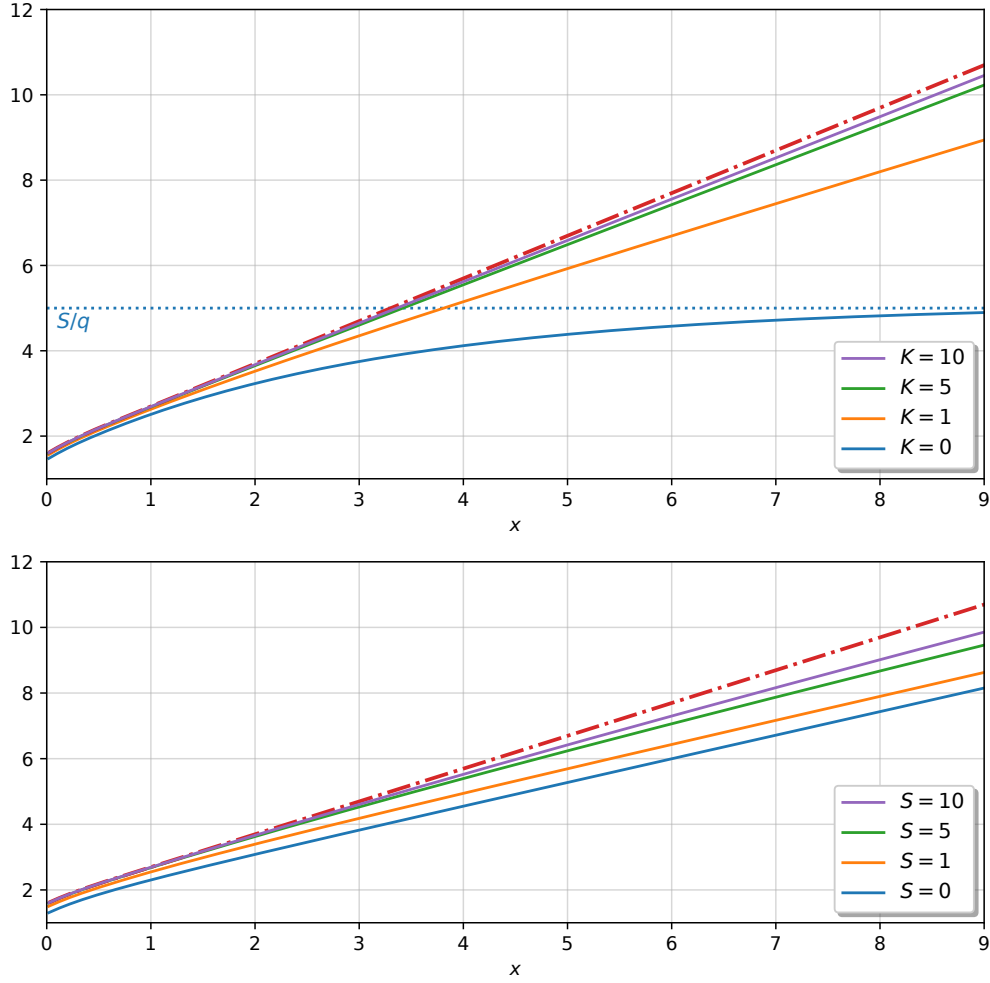


Figure 3.4 - Fonction valeur V_{b*} en fonction de K et S

La courbe tiretée est V_{LZ} . Valeur des paramètres fixés pour chaque graphe : $\mu = 1$, $\sigma^2 = 1$, $K = 1$, $S = 2$, $q = 0.4$, $\beta = 1.5$.

admissibles $\mathcal{A}_c(x)$, $x \geq 0$ de (Løkka et Zervos, 2008), dont V_{LZ} est la fonction valeur. Pour $u \in \mathcal{U}_{K,S}$ donné, on définit le processus de dividendes accumulés $L^u = (L_t^u)_{t \geq 0}$ comme étant

$$L_t^u = \int_0^t u(X_s^u) ds, \quad t \geq 0.$$

Pour un $x \geq 0$ fixé, nous pouvons donc écrire l'ensemble de processus admissibles pour notre problème ainsi :

$$\mathcal{A}_{K,S}(x) := \{(L^u, G^u) \mid u \in \mathcal{U}_{K,S}, X_0^u = x\}.$$

De cette façon, notre fonction valeur V s'écrit également comme

$$V(x) = \sup_{(L^u, G^u) \in \mathcal{A}_{K,S}(x)} V_u(x), \quad x \geq 0,$$

vu que $\mathcal{U}_{K,S}$ et $\mathcal{A}_{K,S}(x)$ sont isomorphes pour chaque $x \geq 0$ fixé, et que le même $u^* \in \mathcal{U}_{K,S}$ optimise V_u pour tout $x \geq 0$. Mais surtout, nous constatons que $\mathcal{A}_{K,S}(x) \subseteq \mathcal{A}_c(x)$ pour tout $x \geq 0$, ce qui implique que

$$V_{b^*}(x) \leq V_{LZ}(x), \quad x \geq 0.$$

On s'attend aussi que V_{b^*} tende ponctuellement vers V_{LZ} lorsque K ou S tend vers l'infini, tout comme avec b^* à la section précédente. Malgré que notre fonction valeur soit sous-optimale dans le cadre du problème de (Løkka et Zervos, 2008), il est préférable, en pratique, de verser des dividendes de façon régulière et continue plutôt que de manière ponctuelle et dispersée dans le temps (voir (Avanzi et Wong, 2012)).

La Figure 3.4 illustre la convergence de V vers V_{LZ} (représentée par la courbe rouge tiretée) en fonction de K et S , qui se fait assez rapidement. Ce qu'on voit surtout, dans le graphique du haut, est l'écart flagrant entre $K = 0$ et $K \geq 1$. Lorsque $K \rightarrow 0$, on se retrouve dans le problème de maximisation de dividendes bornés par la constante S , avec injections obligatoires. Autrement dit, si l'on note $W := W_{b_0^*}$ la fonction valeur de ce problème dont le seuil optimal est b_0^* , alors $V_{b^*} \xrightarrow{K \rightarrow 0} W_{b_0^*}$, où $b^* \xrightarrow{K \rightarrow 0} b_0^*$. Cette fonction valeur a la particularité d'être bornée par S/q :

$$W_{b_0^*}(x) \leq \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-qt} S \mathbb{1}_{x \geq b_0^*} dt \right] \leq \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty S e^{-qt} dt \right] = \frac{S}{q},$$

là où la fonction valeur de notre problème est bornée par une fonction linéaire, tel que vu dans la démonstration du Lemme 2.19.

La fonction valeur de (Løkka et Zervos, 2008) est telle que $V'_{LZ}(x) = 1$ pour $x > c^*$, donc linéaire au-dessus du seuil c^* . Comparons sa croissance à celle de W et de V . Rappelons que pour $x > b^*$,

$$V'(x) = \frac{K}{q+K} + \frac{q}{q+K} \frac{\Psi'_{b^*}(x)}{\Psi'_{b^*}(b^*)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{K}{q+K},$$

donc en faisant tendre K vers 0, on trouve, pour $x > b_0^*$,

$$W'(x) = \frac{\Psi'_{b_0^*}(x)}{\Psi'_{b_0^*}(b_0^*)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi, $W_{b_0^*}$ et V s'éloignent de V_{LZ} quand x augmente vu que leur croissance est inférieure à celle de V_{LZ} . Cependant, $W_{b_0^*}$ devient asymptotiquement constante, et elle est bornée par S/q , ce qui l'éloigne de V_{LZ} plus rapidement que V dont la croissance tend vers $\frac{K}{q+K} \approx 1$ pour K grand.

En conséquence, on voit la valeur ajoutée d'une borne linéaire sur les dividendes par rapport à une borne constante. Bien que ce problème soit plus simple à résoudre étant donné que le processus du surplus reste

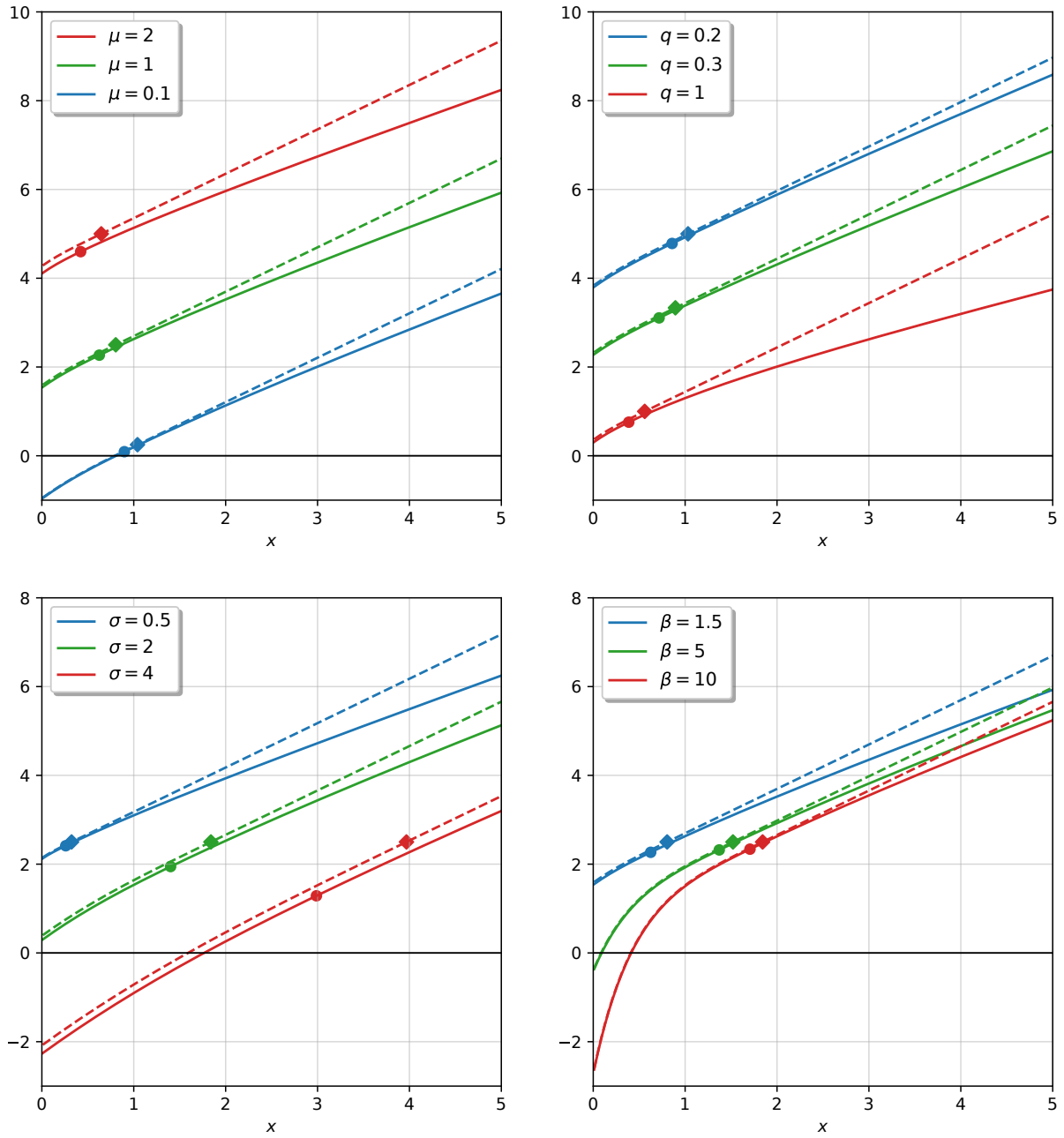


Figure 3.5 – Fonction valeur V_{b^*} en fonction des paramètres du modèle

Les courbes tiretées sont V_{LZ} , et les pleines sont V . Les points indiquent b^* , et les diamants c^* . Valeur des paramètres fixés pour chaque graphe :

$$\mu = 1, \sigma^2 = 1, K = 1, S = 2, q = 0.4, \beta = 1.5.$$

un MBA au-dessus du seuil, notre problème offre une meilleure approximation de la solution de (Løkka et Zervos, 2008), prise dans la littérature.

Quant aux autres paramètres du problème, la Figure 3.5 compare V à V_{LZ} en fonction des paramètres. Elle montre également les seuils optimaux b^* (sous forme de points) et c^* (sous forme de diamants) en chaque courbe. Avant d'analyser l'effet de chaque paramètre, notons un phénomène intéressant : si l'on fixe un $x \geq 0$, l'écart est plus important entre $V(x)$ et $V_{LZ}(x)$ lorsque les seuils optimaux sont faibles. Effectivement, davantage de versements de dividendes surviennent dans ce cas, ce qui accentue l'effet d'opter pour une stratégie linéaire, qui est sous-optimale dans le problème limite.

Et pourtant, ce n'est pas tout à fait ce qu'on observe avec σ . Lorsqu'il est élevé, l'écart semble se répartir sur le domaine, ce qui peut s'expliquer par la forte volatilité du surplus, « brouillant » l'avantage de la stratégie LZ -optimale. De plus, l'écart entre b^* et c^* y est plus important, et la fonction valeur est plus basse.

La fonction valeur est croissante en μ , parce que pour μ élevé, le surplus a une tendance vers le haut favorisant les versements de dividendes. Quant à q , elle est décroissante en q en raison de la forte actualisation occasionnant une perte de valeur plus rapide. Enfin, la fonction valeur est décroissante en β en raison d'un plus haut coût des injections. La différence est marquée près de zéro, justement car le surplus initial est proche de zéro, et que davantage d'injections surviennent dès le départ.

3.4 Moyenne asymptotique

Rappelons qu'au-dessus du seuil optimal b^* , le surplus contrôlé X^{b^*} se comporte comme un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, plus précisément comme le processus Y de dynamique

$$dY_t = (\mu - S - KY_t) dt + \sigma dB_t.$$

Cette EDS a comme solution explicite

$$Y_t = Y_0 e^{-Kt} + \frac{\mu - S}{K} (1 - e^{-Kt}) + \sigma e^{-Kt} \int_0^t e^{Ks} dB_s, \quad t \geq 0.$$

L'intégrande est déterministe, donc Y est un processus gaussien (voir le Théorème 4.11 de (Klebaner, 2012)) d'espérance

$$\mathbb{E}[Y_t] = Y_0 e^{-Kt} + \frac{\mu - S}{K} (1 - e^{-Kt}),$$

puisque l'intégrale stochastique est une martingale, et de covariance

$$\begin{aligned}\mathbb{Cov}(Y_s, Y_t) &= \sigma^2 e^{-Ks} e^{-Kt} \int_0^{s \wedge t} e^{2Ku} du \\ &= \frac{\sigma^2}{2K} e^{-K(s+t)} \left(e^{2K(s \wedge t)} - 1 \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2K} \left(e^{-K|s-t|} - e^{-K(s+t)} \right).\end{aligned}$$

En plus d'être markovien, Y est asymptotiquement stationnaire, et sa distribution limite est une loi normale d'espérance $\frac{\mu-S}{K}$ et de variance $\frac{\sigma^2}{2K}$. Ce processus est du type *retour vers la moyenne*, c'est-à-dire qu'au cours du temps, Y tend à revenir vers sa *moyenne asymptotique* $\frac{\mu-S}{K}$. En effet, quand $Y_t > \frac{\mu-S}{K}$, sa dérive est négative, et il a une tendance à la baisse. Lorsque $Y_t < \frac{\mu-S}{K}$, sa dérive est positive, le ramenant vers le haut.

Dans notre problème, le surplus contrôlé X^{b^*} se comporte comme un O-U seulement lorsque $X_t^{b^*} \geq b^*$, lors de versements de dividendes. Intuitivement, il serait alors préférable, d'un point de vue de performance, que le surplus reste le plus possible au-dessus du seuil b^* . Si $\frac{\mu-S}{K} > b^*$, alors le processus va « graviter » autour de sa moyenne, qui est au-dessus du seuil. On s'attend donc à des paiements de dividendes plus « stables » dans le temps (voir (Avanzi et Wong, 2012)), là où si $\frac{\mu-S}{K} < b^*$, le surplus a une dérive négative au-delà du seuil. Il aura tendance à redescendre rapidement sous b^* , donc à verser des dividendes sur de plus courtes durées.

Si on augmente μ ou modifie les autres paramètres de manière à réduire b^* pour que $\frac{\mu-S}{K} > b^*$, cela a bien pour effet d'accroître la fonction valeur. Ce n'est toutefois pas toujours le cas. De ce qu'on peut voir à la Figure 3.3, le seuil optimal b^* est plutôt faible pour des valeurs *raisonnables* de nos paramètres. Ainsi, il faudrait baisser significativement K et S pour que $\frac{\mu-S}{K}$ descende sous b^* , ce qui à son tour diminuerait la fonction valeur puisque ce faisant, les paiements de dividendes vaudraient beaucoup moins.

La Figure 3.6 illustre ce phénomène. Les diagrammes en violon du haut et du centre montrent la distribution de la proportion du temps passé, respectivement, à verser des dividendes et à injecter du capital. En abscisse, on varie K de sorte que $\frac{\mu-S}{K} - b_K^*$ se promène des négatifs jusqu'aux positifs (nous écrivons b_K^* pour souligner que b^* dépend de K). Les points orange indiquent b^* en ordonnée, et le graphique du bas montre la valeur de $V_{b^*}(x_0)$ correspondante. Tout d'abord, on constate effectivement que la durée totale de versements est plus importante lorsque la moyenne asymptotique du processus O-U est au-dessus du seuil optimal, quoique la variation y est moins significative. On constate aussi que les injections surviennent

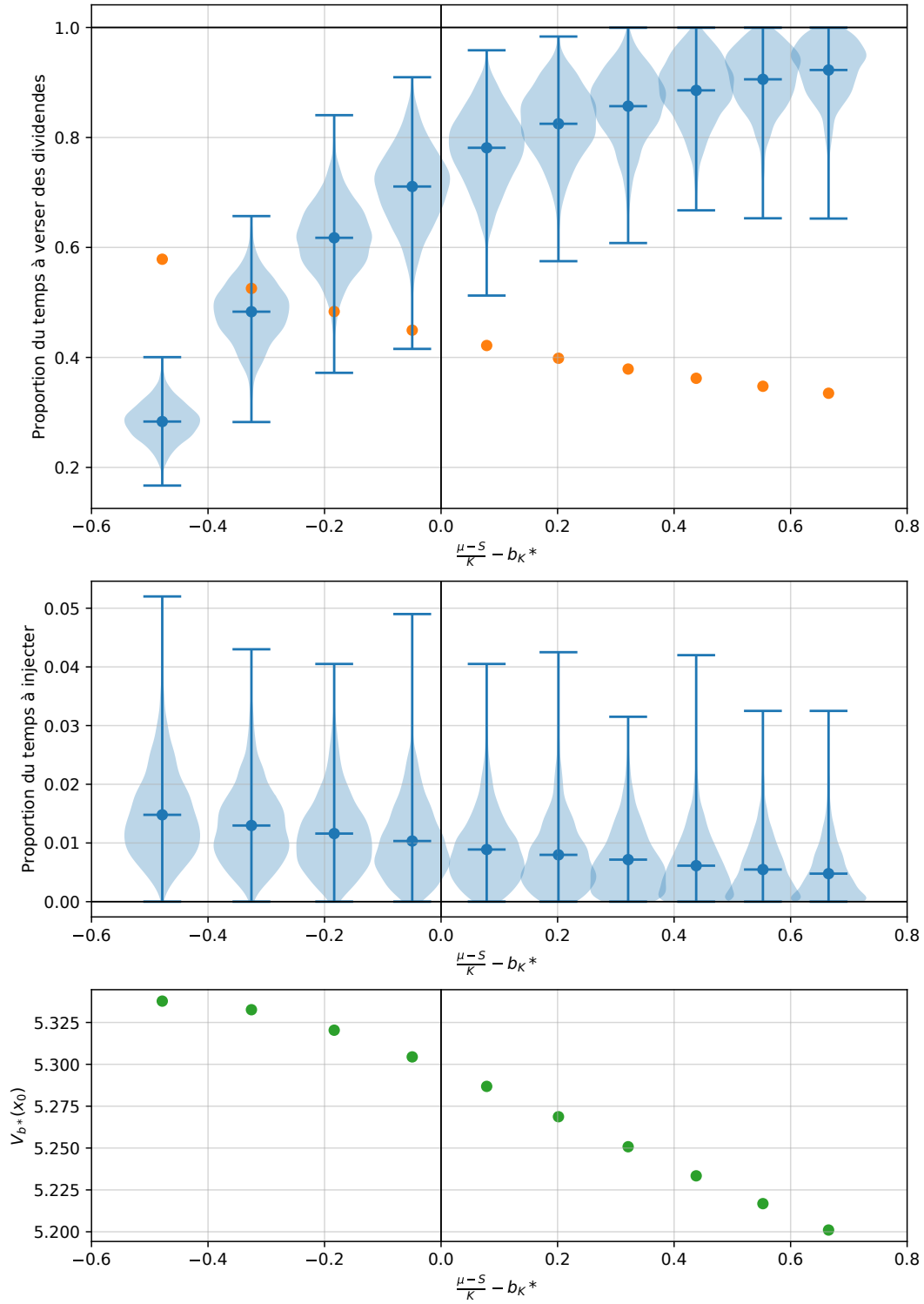


Figure 3.6 - Proportion du temps à verser/injecter en fonction de $\frac{\mu-S}{K} - b_K^*$ pour $x_0 = 1$

Pour chaque $K \in \left\{ \frac{10}{1}, \frac{10}{2}, \dots, \frac{10}{10} \right\}$, il y a $N = 2000$ simulations de pas $\Delta t \approx 0.005$ se terminant en $T = 10$. Paramètres :

$$\mu = 2, \sigma^2 = 1, S = 1, q = 0.4, \beta = 1.5.$$

moins souvent, ce qui va de soi. Cependant, tel que nous l'avons mentionné, bien que la durée de versements soit supérieure, ceux-ci ont moins de valeur, ce qui affecte négativement la fonction valeur.

Par conséquent, contrairement à l'intuition, il n'est pas assuré qu'une moyenne asymptotique supérieure au seuil optimal soit avantageuse d'un point de vue performatif. Elle l'est si l'on ajuste les paramètres autres que K et S en conséquence, mais ces paramètres sont intrinsèques au modèle. Ils sont probablement hors du contrôle de la firme, là où K et S définissent notre ensemble de stratégies admissibles et peuvent être choisis, a priori, par la firme. Il y a dans ce cas un compromis à faire entre la stabilité des versements de dividendes à travers le temps et la performance de la stratégie optimale.

CONCLUSION

Nous avons résolu un problème de maximisation de paiements de dividendes avec injections de capital obligatoires lorsque le surplus, modélisé par un mouvement brownien arithmétique, atteint zéro. Les processus de dividendes admissibles étaient absolument continus, de taux de versement borné par une fonction linéaire du surplus. Nous cherchions une stratégie dont la fonction de performance est la plus grande parmi toutes les stratégies admissibles, ainsi que l'expression de cette fonction. Pour la résolution, nous avons utilisé une approche probabiliste semblable, quoique plus simple et élémentaire, à celle de (Renaud *et al.*, 2023).

Prévoyant qu'une stratégie linéaire serait optimale par une analyse heuristique de l'équation HJB de ce problème, nous avons obtenu une forme explicite de la fonction de performance d'une stratégie linéaire quelconque. Pour cela, nous avons utilisé plusieurs identités de temps de premier passage que nous avons préalablement obtenues et étudiées. Puis, nous avons identifié une stratégie linéaire de seuil b^* dont la fonction de performance satisfait certaines conditions de régularité dans l'optique d'appliquer un Théorème de vérification. Ce Théorème nous a permis de montrer que cette stratégie est bel et bien optimale, et que sa fonction de performance majore toutes les autres.

Enfin, en plus de vérifier nos résultats par des simulations, nous avons mené quelques analyses numériques, notamment sur l'effet des paramètres du modèle sur le seuil optimal b^* et sur la fonction valeur. Nous avons comparé la fonction valeur de notre problème à celle du problème limite de (Løkka et Zervos, 2008), ainsi qu'à celle du problème avec dividendes bornés par une constante. Notre fonction valeur a l'avantage de mieux approcher celle de (Løkka et Zervos, 2008), que nous savons la meilleure, par rapport à celle avec borne constante, tout en conservant une certaine simplicité grâce à la borne linéaire. Elle a aussi un intérêt conceptuel, puisque le taux optimal de paiements de dividendes est proportionnel au surplus : une firme serait sans doute portée à verser davantage lorsque son surplus excède grandement le seuil b^* .

Néanmoins, il existe un défaut apparent à autoriser des injections obligatoires dans le but d'éviter la faillite : selon les paramètres du modèle, la fonction valeur est potentiellement négative sur une partie de son domaine. Cela signifie que pour un surplus initial x suffisamment petit pour que $V(x) < 0$, la firme demanderait, en valeur présente moyenne, plus d'injections qu'elle ne verserait de dividendes. Dans une telle situation où les paramètres du marché sont aussi défavorables à la pérennité de l'entreprise, il serait sans

doute préférable de retirer les injections forcées et de permettre la faillite. En réalité, il s'agit précisément de la solution optimale dans le cadre général où l'on optimise simultanément L et G , comme l'ont montré (Løkka et Zervos, 2008; Renaud *et al.*, 2023). Si les paramètres du modèle sont de sorte que $V_{b^*}(0) > 0$, alors la solution de notre problème est optimale et $V = V_{b^*}$. Sinon, la solution optimale est celle du problème sans injections résolu par (Rao, 2023).

Contextuellement, une telle dichotomie pour la solution optimale peut paraître extrême à mettre en pratique. En supposant qu'une firme estime ses paramètres par des données, doit-on s'attendre à ce que ses décisions financières à long terme dépendent si fortement de son estimation des paramètres? Un compromis intéressant serait de considérer des injections de capital *absolument continues* tout en permettant la possibilité de faillite. Les injections pourraient être de taux borné par une constante, ou bien par une fonction décroissante du surplus; intuitivement, on voudrait injecter moins lorsque le surplus s'éloigne de zéro.

Dans l'hypothèse qu'une stratégie optimale pour les injections soit de type bang-bang, dans le problème général où l'on optimise le couple (L, G) , on pourrait d'abord considérer le problème de maximisation des dividendes avec injections obligatoires survenant au taux maximal lorsque le surplus descend sous un seuil fixé. Ce type de problème permettrait à une firme d'injecter du capital lorsque le surplus est faible de manière à retarder la faillite, tout en laissant la possibilité de faire faillite plus rapidement si les paramètres du modèle sont désavantageux.

ANNEXE A

CODE PYTHON DES SIMULATIONS

Nous fournissons ici du code en langage Python pour simuler les divers processus de ce mémoire, code que nous avons utilisé pour produire les quelques Figures illustrant lesdites simulations. La méthode employée pour simuler en temps discret des solutions d'EDS est celle d'Euler-Maruyama (voir le Chapitre 9 de (Kloeden et Platen, 1999) pour plus de détails à ce sujet).

Voici les packages importés :

```
import numpy as np
import scipy.optimize as opt
```

Les Sous-sections suivantes affichent le code des simulations, qui nécessite plusieurs variables. Il y a les paramètres du problèmes choisis, par exemple,

```
mu = 1.0
sigma = 1.0
K = 1.0
S = 2.0
q = 0.4
beta = 1.5
```

mais aussi le surplus initial x , ainsi que le seuil de réfraction b ou la variable n lorsqu'on simule un processus d'approximation :

```
x = 1.0
b = 2.0
n = 2
```

Enfin, pour la simulation des trajectoires, nous devons spécifier le nombre de points de discrétisation et l'instant où la simulation s'arrête, par exemple :

```
points = 2000
t = 10.0
dt = t/(points-1)
t_axis = np.linspace(0, t, points)
```

Dans un objectif de reproductibilité, les simulations de chaque Figure ont été produites à partir d'une graine fixée, donnée par une commande du type `rng = np.random.default_rng(...)`.

A.1 Simulation pour la Figure 1.1

```
rng = np.random.default_rng(15)
N = rng.normal(0, 1, points)
X = x*np.ones(points)
Yb = np.copy(X)
Lb = np.zeros(points)

for i in range(points - 1):
    dXt = mu*dt + sigma*np.sqrt(dt)*N[i+1]
    uYbdt = (K*Yb[i]+S)*(Yb[i] >= b)*dt
    X[i+1] = X[i] + dXt
    Lb[i+1] = Lb[i] + uYbdt
    Yb[i+1] = Yb[i] + dXt - uYbdt
```

A.2 Simulation pour la Figure 1.2

```
rng = np.random.default_rng(40)
N = rng.normal(0, 1, points)
X = x*np.ones(points)
L = np.zeros(points)
```



```

Ln = np.zeros(points)
Y = np.copy(X)
Yn = np.copy(X)

for i in range(points - 1):
    if Yn[i]>=b: sur_b = True
    if Yn[i]<=(b-1/n): sur_b = False
    dXt = mu*dt + sigma*np.sqrt(dt)*N[i+1]
    uYdt = (K*Y[i]+S)*(Y[i] >= b)*dt
    uYndt = (K*Yn[i]+S)*sur_b*dt
    X[i+1] = X[i] + dXt
    L[i+1] = L[i] + uYdt
    Ln[i+1] = Ln[i] + uYndt
    Y[i+1] = Y[i] + dXt - uYdt
    Yn[i+1] = Yn[i] + dXt - uYndt

```

A.3 Simulation pour la Figure 2.3

```

rng = np.random.default_rng(2)
N = rng.normal(0, 1, points)
X = x*np.ones(points)
Lb = np.zeros(points)
Ub = np.copy(X)
Xb = np.copy(X)
Gb = np.zeros(points)
minUb = x

for i in range(points - 1):
    dXt = mu*dt + sigma*np.sqrt(dt)*N[i+1]
    uXbdt = (K*Xb[i]+S)*(Xb[i] >= b)*dt
    X[i+1] = X[i] + dXt
    Lb[i+1] = Lb[i] + uXbdt

```

```

Ub[i+1] = Ub[i] + dXt - uXbdt
minUb = min(minUb, Ub[i+1])
Gb[i+1] = -min(minUb,0)
Xb[i+1] = Ub[i+1] + Gb[i+1]

```

A.4 Simulation pour la Figure 2.4

```

rng = np.random.default_rng(215)
N = rng.normal(0, 1, points)
X = x*np.ones(points)
Z = np.copy(X)
Zn = np.copy(X)
G = np.zeros(points)
Gn = 1/n*np.zeros(points)
minX = x

for i in range(points - 1):
    dXt = mu*dt + sigma*np.sqrt(dt)*N[i+1]
    X[i+1] = X[i] + dXt
    minX = min(minX, X[i+1])
    G[i+1] = -min(minX,0)
    Gn[i+1] = (np.floor(n*G[i+1])+1)/n
    Z[i+1] = X[i+1] + G[i+1]
    Zn[i+1] = X[i+1] + Gn[i+1]

```

A.5 Simulations pour les Figures 3.2 et 3.6

```

rng = np.random.default_rng(42)
N = rng.normal(0, 1, (paths,points))
dLb = np.zeros((paths,points))
Ub = x*np.ones((paths,points))
Xb = np.copy(Ub)
Gb = np.copy(dLb)

```

```

dGb = np.copy(dLb)
minUb = x*np.ones(paths)

for i in range(points - 1):
    dXt = mu*dt + sigma*np.sqrt(dt)*N[:, i+1]
    dLb[:, i+1] = (K*Xb[:, i]+S)*(Xb[:, i] >= b)*dt
    Ub[:, i+1] = Ub[:, i] + dXt - dLb[:, i+1]
    minUb = np.minimum(minUb, Ub[:, i+1])
    Gb[:, i+1] = -np.minimum(minUb, np.zeros(paths))
    dGb[:, i+1] = Gb[:, i+1] - Gb[:, i]
    Xb[:, i+1] = Ub[:, i+1] + Gb[:, i+1]

```

RÉFÉRENCES

- Albrecher, H. et Thonhauser, S. (2009). Optimality results for dividend problems in insurance. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 103(2), 295–320.
- Avanzi, B. (2009). Strategies for dividend distribution : A review. *North American Actuarial Journal*, 13(2), 217–251.
- Avanzi, B., Shen, J. et Wong, B. (2011). Optimal dividends and capital injections in the dual model with diffusion. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 41(2), 611–644.
- Avanzi, B. et Wong, B. (2012). On a mean reverting dividend strategy with Brownian motion. *Insurance Math. Econom.*, 51(2), 229–238.
- Avram, F., Palmowski, Z. et Pistorius, M. R. (2007). On the optimal dividend problem for a spectrally negative Lévy process. *Ann. Appl. Prob.*, 17, 156–180.
- Borodin, A. N. et Salminen, P. (2002). *Handbook of Brownian motion—facts and formulae* (2e éd.). Birkhäuser Verlag, Basel.
- Breiman, L. (1968). *Probability*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Darling, A. et Siegert, A. (1953). The first passage problem for a continuous Markov process. *The Annals of Mathematical Statistics*, 24(4), 624 – 639.
- de Finetti, B. (1957). Su un’ impostazione alternativa dell teoria collettiva del rischio. *Transactions of the XVth International Congress of Actuaries*, 2, 433–443.
- Ekström, E. et Lindensjö, K. (2021). De Finetti’s control problem with competition. *App. Math. Optim.*, 87, 1–26.
- Frostig, E. (2005). On the expected time to ruin and the expected dividends when dividends are paid while the surplus is above a constant barrier. *Journal of Applied Probability*, 42(3), 595–607.
- Gerber, H. U. et Shiu, E. S. W. (2004). Optimal dividends : analysis with Brownian motion. *N. Am. Actuar. J.*, 8(1), 1–20.
- Gerber, H. U. et Shiu, E. S. W. (2006). On optimal dividend strategies in the compound Poisson model. *North American Actuarial Journal*, 10(2), 76–93.
- Jeanblanc-Picqué, M. et Shiryaev, A. N. (1995). Optimization of the flow of dividends. *Uspekhi Mat. Nauk*, 50(2(302)), 25–46.
- Karatzas, I. (1983). A class of singular stochastic control problems. *Advances in Applied Probability*, 15(2), 225–254.
- Karatzas, I. et Shreve, S. E. (1991). *Brownian motion and stochastic calculus* (2e éd.). New York : Springer-Verlag.

- Klebaner, F. C. (2012). *Introduction to Stochastic Calculus with Applications* (3e éd.). World Scientific Publishing Company.
- Kloeden, P. E. et Platen, E. (1999). *Numerical solution of Stochastic Differential Equations* (corr. 3rd print éd.). Numéro 23 de Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer.
- Kyprianou, A. E. (2014). *Fluctuations of Lévy processes with applications - Introductory lectures* (2e éd.). Universitext. Springer, Heidelberg.
- Le Gall, J.-F. (2013). *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*. Mathématiques et Applications. Springer-Verlag.
- Locas, F. et Renaud, J.-F. (2024). De Finetti's control problem with a concave bound on the control rate. *J. Appl. Prob.*, 61(3).
- Løkka, A. et Zervos, M. (2008). Optimal dividend and issuance of equity policies in the presence of proportional costs. *Insur. : Math. Econ.*, 42(3), 954–961.
- Piera, F. et Mazumdar, R. (2008). Comparison results for reflected jump-diffusions in the orthant with variable reflection directions and stability applications. *Electronic Journal of Probability*, 13, 1886 – 1908.
- Pilipenko, A. (2014). *An introduction to stochastic differential equations with reflection* (1re éd.). Lectures in Pure and Applied Mathematics. Potsdam University Press.
- Pérez, J.-L., Yamazaki, K. et Yu, X. (2018). On the bail-out optimal dividend problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 179(2), 553–568.
- Rao, N. (2023). *Problème d'optimisation de De Finetti pour des stratégies absolument continues dont le taux est borné linéairement*. (Mémoire de maîtrise). Université du Québec à Montréal.
- Renaud, J.-F., Roch, A. et Simard, C. (2023). An optimization dichotomy for capital injections and absolutely continuous dividend strategies. arXiv :2311.10191.
- Renaud, J.-F. et Simard, C. (2021). A stochastic control problem with linearly bounded control rates in a Brownian model. *SIAM J. Control Optim.*, 59(5), 3103–3117.
- Touzi, N. (2013). *Optimal Stochastic Control, Stochastic Target Problems, and Backward SDE* (1re éd.). Fields Institute Monographs. Springer New York.
- Zhu, J. (2015). Dividend optimization for general diffusions with restricted dividend payment rates. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2015(7), 592–615.