

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LES RÔLES DES HABILETÉS SPATIALES ET DES CONNAISSANCES SPATIALES EN
RÉSOLUTION DE PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT EN ÉDUCATION

PAR

STEVE TREMBLAY

AOÛT 2025

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.12-2023). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Dans un premier temps, je remercie mon comité de direction au doctorat. D'abord, mon directeur de recherche, le professeur Denis Tanguay, pour son aide apportée durant ces 7 années de mon parcours au doctorat en éducation (didactique des mathématiques) à l'Université du Québec à Montréal (UQAM). Sa rigueur, son expertise (scientifique et méthodologique) et sa passion pour l'enseignement des mathématiques m'ont guidé dans chacune des étapes de ma recherche. Je remercie aussi ma co-directrice de recherche, la professeure Caroline Lajoie, pour son expertise, son encadrement, ses questions pertinentes et commentaires judicieux lors de mes études doctorales.

Je suis reconnaissant de l'appui financier du Syndicat des chargées et chargés de cours de l'Université du Québec en Outaouais (SCC-UQO) par l'octroi d'une bourse de perfectionnement pour compléter mes études doctorales.

Je remercie également les professeurs du département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal et plus particulièrement Luis Saldanha, Doris Jeannotte, Jérôme Proulx, Jean-François Maheux, Fernando Hitt, ainsi que Stéphane Cyr, qui m'ont apporté de l'aide à un moment ou à un autre de mes études en didactique des mathématiques.

Une mention spéciale à Luis Saldanha de l'UQAM, Souleymane Barry de l'UQAC et Joris Mithalal-Le Doze de l'Université Claude Bernard Lyon 1 (France), qui ont accepté de faire partie du jury pour l'évaluation de ma thèse.

Enfin, je remercie les membres de ma famille, qui ont m'ont toujours soutenu tout au long de mon parcours.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	ii
LISTE DES FIGURES	vii
LISTE DES TABLEAUX	xii
LISTE DES ABRÉVIATIONS, DES SIGLES ET DES ACRONYMES	xiii
RÉSUMÉ	xiv
ABSTRACT	xvi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 PROBLÉMATIQUE	4
1.1 La situation globale du problème de recherche	4
1.2 L’habileté de « visualisation spatiale » et les connaissances spatiales en géométrie 3D	5
1.2.1 Difficulté à identifier les constituants d’un objet 3D et à décoder la représentation 2D d’un objet 3D	8
1.2.2 Difficulté à se construire une image mentale; en particulier difficulté à (se) représenter un objet 3D lorsque le problème posé n’est donné qu’en mots	14
1.3 Le raisonnement spatial dans la résolution de problèmes de géométrie 3D	20
1.4 La résolution de problèmes en contexte de géométrie spatiale	23
1.4.1 La notion de « problème » dans le PFEQ – domaine de la mathématique	24
1.4.2 La notion de « problème » dans la littérature scientifique	26
1.4.3 La notion de « problème » en géométrie spatiale	28
1.4.4 La notion de « problème » dans la thèse : première caractérisation	29
1.5 Des habiletés à préciser	30
1.5.1 Premières définitions : habiletés spatiales et connaissances spatiales	30
1.6 Problème de recherche	32
CHAPITRE 2 CADRE THÉORIQUE	36
2.1 Le sens spatial	36
2.2 Le concept « habiletés spatiales » ou <i>spatial abilities</i>	38
2.2.1 La signification du terme <i>ability</i>	39
2.2.1.1 <i>Ability</i> traduit par « habileté »	39
2.2.1.2 <i>Ability</i> traduit par « capacité »	39
2.2.1.3 <i>Ability</i> traduit par « aptitude »	42
2.2.1.4 Le sens de <i>spatial ability</i> dans mon étude	42
2.2.2 Une première habileté : la visualisation spatiale	44

2.2.2.1	Premier courant de recherche : le concept de <i>visualisation spatiale</i> dans le domaine de la psychologie cognitive	44
2.2.2.2	Deuxième courant de recherche : la visualisation spatiale en géométrie	45
2.2.2.2.1	La visualisation spatiale selon Duroisin (2015)	45
2.2.2.2.2	La visualisation spatiale selon Mithalal (2010; 2014).....	45
2.2.2.2.3	La visualisation spatiale selon Duval (1999; 2002; 2003; 2005)	46
2.2.2.3	Discussion sur le concept de visualisation des deux courants de recherche	50
2.2.3	Deuxième habileté spatiale : les transformations	51
2.2.3.1	Les transformations traitées dans le cadre de l'enseignement au secondaire.....	51
2.2.3.1.1	Découpages et reconfigurations	52
2.2.3.1.2	Déplacements	53
2.2.3.1.3	Projections	54
2.2.3.2	L'orientation spatiale dans les études quantitatives	57
2.2.4	Le concept « habiletés spatiales » dans ma recherche doctorale	58
2.3	Les connaissances spatiales	58
2.3.1	Les connaissances spatiales selon Berthelot et Salin (1992; 1993-1994; 1999-2000)....	59
2.3.2	Les connaissances géométriques (Battista, 2007; Clements et Battista, 1992).....	60
2.3.2.1	Constituants des connaissances géométriques : les objets	60
2.3.2.2	Constituants des connaissances géométriques : les relations	61
2.3.2.3	Constituants des connaissances géométriques : les propriétés.....	61
2.3.3	Les connaissances spatiales selon Marchand (2004; 2006a; 2006b; 2009a; 2009b; 2020) 62	
2.3.4	Clarifications terminologiques sur les connaissances spatiales	63
2.3.5	Les caractérisation des <i>connaissances spatiales</i> dans la thèse.....	67
2.4	Articulation des connaissances spatiales et des connaissances géométriques avec les habiletés spatiales.....	67
2.4.1	Exemple : calculer le volume d'un solide décomposable dont la représentation 2D en perspective est donnée.	68
2.5	Les connaissances géométriques et le raisonnement déductif en géométrie de l'espace	69
2.6	Autres concepts clés du cadre théorique.....	72
2.6.1	Les images mentales liées à la visualisation spatiale	72
2.6.1.1	Le sens de l'image selon Marchand (2006)	72
2.6.1.2	Le sens de l'image mentale dans ma recherche	73
2.6.2	Les représentations internes/externes d'objets géométriques 3D	74
2.6.3	Les différences entre figure, dessin et représentation	75
2.6.4	La caractérisation de <i>problèmes</i> en géométrie spatiale.....	78
2.6.5	Le conflit « vu/su » (Parzysz, 1988; 2007)	78
2.6.6	Tableau-synthèse des concepts du cadre théorique.....	81
2.7	Intentions de recherche	83
	CHAPITRE 3 MÉTHODOLOGIE	84
3.1	Exposé critique des méthodologies dans le domaine relatif à la question traitée.....	84
3.2	Choix méthodologiques : justifications et particularités du <i>Design Research</i>	86

3.2.1 Les particularités de la méthodologie du <i>Design Research</i>	87
3.3 Opérationnalisation et instrumentation de la méthodologie retenue	92
3.3.1 Recrutement des participants	92
3.3.2 Opérationnalisation selon la méthode dite <i>Think aloud</i>	92
3.3.3 Considérations éthiques	92
3.3.4 Première phase : le design de la séquence d'enseignement	93
3.3.4.1 Élaboration d'une première version de la séquence	93
3.3.4.1.1 Séance 1 : révision des calculs de volume pour les solides usuels et représentations en perspective cavalière	95
3.3.4.2 Trajectoires hypothétiques d'apprentissage des 3 problèmes de géométrie spatiale .	102
3.3.4.2.1 Séances 2 et 3 : Problème 1 (le marchand de sable).....	103
3.3.4.2.2 Séances 4 et 5 : Problème 2 (triangle ΔABC situé à l'intérieur d'un prisme droit à base rectangulaire).....	126
3.3.4.2.3 Séances 6 et 7 : problème 3 (le cube tronqué).....	135
3.3.5 Deuxième phase : expérimentation en classe	152
3.3.6 Troisième phase : analyse rétrospective des données expérimentales	153
3.3.7 Quatrième phase : la révision, à la lumière de l'analyse rétrospective, des hypothèses théoriques, des choix didactiques, des trajectoires d'apprentissage anticipées.	154
3.3.8 Cinquième phase : ajustement du design de la séquence à partir duquel un nouveau cycle peut être amorcé.	154
CHAPITRE 4 ANALYSES	156
4.1 Présentation des données de recherche.....	156
4.1.1 Perspective retenue : le conflit « vu/su » de Parzysz (1988; 2007)	156
4.2 Grilles d'analyse des problèmes	157
4.2.1 Première grille d'analyse : visualisation externe	158
4.2.2 Deuxième grille d'analyse : visualisation interne	158
4.2.3 Troisième, quatrième et cinquième grilles d'analyse : le conflit cognitif « vu/su »	159
4.2.3.1 Troisième grille d'analyse : conflit « vu/su » pour le problème 1	160
4.2.3.2 Quatrième grille d'analyse : conflit « vu/su » pour le problème 2.....	162
4.2.3.3 Cinquième grille d'analyse : conflit « vu/su » pour le problème 3	164
4.3 Troisième phase : analyse rétrospective des données expérimentales.....	166
4.3.1 Analyse des solutions au problème 1	166
4.3.1.1 Présentation de la démarche d'analyse : comparaison de productions écrites	166
4.3.1.2 Phase 1 de l'analyse des solutions au problème 1	166
4.3.1.3 Phase 2 de l'analyse des solutions au problème 1	176
4.3.2 Analyse des solutions au Problème 2	183
4.3.2.1 Analyse d'une copie d'élèves (dyade #15) exposant plusieurs éléments adéquats de réponses au Problème 2.	183
4.3.2.2 Analyse des données relatives à la résolution du problème 2	186
4.3.3 Analyse des productions relatives au Problème 3	192
4.3.3.1 Analyse des données relatives à la phase 1 du Problème 3	192
4.3.3.2 Analyse des données relatives à la phase 2 du Problème 3	198

4.4	Quatrième phase : la révision, à la lumière de l'analyse rétrospective, des hypothèses théoriques, des choix didactiques, des trajectoires d'apprentissage anticipées.....	208
4.5	Cinquième phase : ajustement du design de la séquence à partir duquel un nouveau cycle peut être amorcé	211
4.5.1	Ajustements du design apportés au Problème 1	211
4.5.2	Ajustements du design apportés au Problème 2.....	213
4.5.3	Ajustements du design apportés au Problème 3.....	220
CHAPITRE 5 DISCUSSION ET RÉSULTATS		227
5.1	Validité des conclusions	227
5.1.1	Réponses aux questions de recherche	227
5.1.1.1	Discussion sur le problème 1 : le marchand de sable.....	227
5.1.1.2	Discussion sur le Problème 2 (triangle ΔABC situé à l'intérieur du prisme à base rectangulaire).....	232
5.1.1.3	Discussion sur le problème 3 (le cube tronqué)	235
5.2	Limites de l'étude.....	243
5.2.1	La collecte de données et la méthodologie	243
5.2.2	La posture du praticien-chercheur.....	244
5.2.3	L'analyse des données selon les grilles d'analyse du conflit « vu/su »	244
5.2.4	L'impréparation des élèves	245
CONCLUSION		246
ANNEXE A Recension des écrits traitant des habiletés spatiales et des connaissances spatiales dans la résolution de problèmes spatiaux.....		253
ANNEXE B Certificat d'approbation éthique		263
RÉFÉRENCES.....		264

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Représentation 2D d'une pyramide régulière à base hexagonale.....	8
Figure 1.2 Conflit entre « voir » et « savoir » dans une représentation 2D	9
Figure 1.3 Décomposition de l'hexagone	11
Figure 1.4 Boîtes ambiguës (Hoffman, 2000).....	12
Figure 1.5 Exemple d'une représentation 2D des deux solides décomposables	16
Figure 1.6 Représentation « prototypique », en perspective cavalière, d'une pyramide à base carrée	17
Figure 2.1 Cube ou dé (mon adaptation de Mithalal, 2014, p. 56)	49
Figure 2.2 Découpage dans un solide décomposable.....	52
Figure 2.3 Découpage d'un cube en 5 pyramides	52
Figure 2.4 Reconfiguration de 4 triangles en 2 rectangles	53
Figure 2.5 Reconfiguration : le développement plan d'un polyèdre	53
Figure 2.6 Projection centrale de deux points P et Q (Rüegg et Burmeister, 2010)	54
Figure 2.7 Projection parallèle d'un tétraèdre (Rüegg et Burmeister, 2010)	55
Figure 2.8 Projection orthogonale d'un prisme sur un plan	55
Figure 2.9 Projections orthogonales d'une pyramide régulière à base hexagonale	56
Figure 2.10 Le cône visuel dans un dessin en perspective (mon adaptation de Casalderrey, 2000)	57
Figure 2.11 Solide décomposable	68
Figure 2.12 Notion de distance et de perpendicularité en géométrie 2D et 3D	72
Figure 2.13 La triade référent-signifiant-signifié : l'exemple de la pyramide à base carrée	77
Figure 2.14 Dessin d'un lit – Bible de Naples (Parzys, 2007, p. 139).	79
Figure 2.15 Relations entre une figure et ses modes de représentations (Parzys, 1988, p. 80)...	80
Figure 2.16 Le conflit « vu/su » (mon adaptation de Parzys, 1988; 2007)	81

Figure 3.1 Cycle d'enseignement des mathématiques (Simon, 1995, p. 136)	89
Figure 3.2 Déroulement de la séquence d'enseignement	94
Figure 3.3 Développement plan articulé d'une pyramide	97
Figure 3.4 Représentation en perspective cavalière d'une pyramide régulière droite à base pentagonale.....	99
Figure 3.5 Triangle rectangle ΔPFO situé à l'intérieur de la pyramide	101
Figure 3.6 Problème 1 : le marchand de sable	105
Figure 3.7 Maquette assemblée de la pyramide-tétraèdre $DAEF$	106
Figure 3.8 Rectangle $ABCD$ (enveloppe).....	108
Figure 3.9 Représentation en perspective cavalière de la pyramide-tétraèdre	110
Figure 3.10 Maquette réalisée de la pyramide-tétraèdre $FADE$ ($[FM]$ été ajouté pour montrer la hauteur du solide).....	111
Figure 3.11 Représentation en perspective cavalière de la pyramide-tétraèdre $FADE$, avec les mesures des côtés et des angles droits identifiés.....	114
Figure 3.12 Théorème 2 (droite d perpendiculaire au plan α).....	119
Figure 3.13 Représentation de la pyramide-tétraèdre $DAEF$	123
Figure 3.14 Problème 2	126
Figure 3.15 Repérer les triangles rectangles dans le prisme à base rectangulaire	130
Figure 3.16 Cube en perspective cavalière.....	136
Figure 3.17 Face octogonale non régulière	138
Figure 3.18 Représentation en perspective cavalière du cube tronqué avec tous les sommets identifiés	140
Figure 3.19 Plan médiateur Π du segment $[AB]$	142
Figure 3.20 Représentations en perspective cavalière possibles de la pyramide $AA_1A_2A_3$	143
Figure 3.21 Centre de gravité X du triangle équilatéral $\Delta AA_1A_2A_3$	145
Figure 3.22 Triangles rectangles $\Delta A_2M_1A_3$, ΔAM_1A_3 , ΔAXM_1 dans la pyramide $AA_1A_2A_3$ et médianes $[M_1A_2]$, $[A_3M_3]$, $[A_1M_2]$ de $\Delta[A_1A_2A_3]$	146

Figure 3.23 Plans médiateurs M_1A_2A , M_2A_1A , M_3A_3A	147
Figure 3.24 Base triangulaire $A_1A_2A_3$ décomposée en deux triangles isométriques.....	150
Figure 4.1 Grille d'analyse : la visualisation directe d'un objet 3D	158
Figure 4.2 Grille d'analyse : la visualisation mentale d'un objet 3D.....	158
Figure 4.3 Calcul de la largeur de l'enveloppe (copie #1)	167
Figure 4.4 Erreur largeur enveloppe : conflit « vu/su » – problème 1 (copie #2).....	168
Figure 4.5 Maquette de la pyramide $FADE$ (copie #1)	169
Figure 4.6 Dessin en perspective cavalière adéquat – pyramide $FADE$ (copie #1)	170
Figure 4.7 Représentation en perspective du codage inadéquat de l'angle FME (copie #11 – problème 1)	171
Figure 4.8 Représentations 2D en perspective axonométrique (copies #7 et #16, problème 1) .	172
Figure 4.9 Verbatim de la dyade #16 (perspective cavalière de la pyramide)	172
Figure 4.10 Repérage des constituants d'un triangle rectangle (encadrés en rouge) (copie #13 – problème 1)	174
Figure 4.11 Transcription de la démarche de raisonnement (copie #5 - problème 1).....	175
Figure 4.12 Un tétraèdre régulier ? (copie #5 – problème 1)	175
Figure 4.13 Repérage d'une paire hauteur $[FM]$ – base $(\triangle DAE)$ de la pyramide $FADE$ (copie #1 – Problème 1)	177
Figure 4.14 Repérage d'une paire hauteur $[EM]$ – base $(\triangle DAF)$ de la pyramide $EADF$ (copie #10 – Problème 1)	177
Figure 4.15 Démonstration que $[FM]$ est perpendiculaire au plan DAE	178
Figure 4.16 Démonstration que $[FM]$ est perpendiculaire au plan DAE (copie #1 – Problème 1)	179
Figure 4.17 Début de démonstration (théorèmes 1 et 2) – (copie #6 – Problème 1)	181
Figure 4.18 Verbatim de l'échange de la dyade #6 – problème 1	182
Figure 4.19 Représentation en perspective cavalière des 6 triangles rectangles dans le parallélépipède rectangle (copie de la dyade #15)	184
Figure 4.20 Production écrite illustrant le raisonnement de la dyade #15 (problème 2)	185

Figure 4.21 Application de la contraposée du théorème de Pythagore (problème 2, dyade #15)	186
Figure 4.22 Exemple de résultats attendus – problème 2 (copie #11)	188
Figure 4.23 Représentations en perspective cavalière adéquates du codage des angles droits des triangles rectangles ΔDIC , ΔADC , ΔCHG , ΔBGC , ΔEFB , ΔAEB .	190
Figure 4.24 Représentations en perspective cavalière inadéquates du codage des angles droits (copies #8 et #12 – Problème 2).	191
Figure 4.25 Représentation en perspective inadéquate (copie #16 – problème 2).	191
Figure 4.26 Calculs des mesures du côté du polygone $EFGHLKJI$ (copie #6 – Problème 3)	192
Figure 4.27 Réponses obtenues à la question b (copie #6 – Problème 3)	194
Figure 4.28 Interaction entre des connaissances spatiales et la visualisation spatiale (copie #14 – Problème 3)	195
Figure 4.29 Échanges verbaux de la dyade #14 (question b – Problème 3)	196
Figure 4.30 Cube tronqué représenté en perspective cavalière (copie #7 – Problème 3)	197
Figure 4.31 Processus d’encodage/décodage inadéquat pour tracer les arêtes D_2D_3 , D_1D_3 , C_1C_3 , G_1G_3 et G_2G_3 des triangles (copie #8 – Problème 3)	198
Figure 4.32 Dessin en perspective cavalière adéquat de la pyramide $AA_1A_2A_3$ exposant la base $\Delta A_1A_2A_3$, la hauteur AX et les triangles rectangles (copie #14 – problème 3)	199
Figure 4.33 Dessin en perspective cavalière inadéquat (copie #10 – Problème 3)	200
Figure 4.34 Comparaison du dessin en perspective de la pyramide $AA_1A_2A_3$ de la dyade #14 avec celle de la dyade #10	201
Figure 4.35 Raisonnement mathématique de la dyade #14 (étapes 2 à 9)	202
Figure 4.36 Raisonnement mathématique de la dyade #14.	203
Figure 4.37 Raisonnement mathématique de la dyade #14 (étape 10).	203
Figure 4.38 Justifications à la question d (copie # 14, p. 5 – Problème 3)	206
Figure 4.39 Calcul du volume pyramide $AA_1A_2A_3$ (copie #14, p. 6 – Problème 3)	207
Figure 4.40 Calcul du volume du cube tronqué (copies #5 et 6 – Problème 3)	208
Figure 4.41 Nouvel échancier de la séquence d’enseignement	210

Figure 4.42	Cube $ABCDEFGH$ (exercice d'application 1 – problème 1).....	212
Figure 4.43	Angle dièdre entre deux plans Π_1 et Π_2	214
Figure 4.44	Représentation 2D du Théorème 3 (plans perpendiculaires).....	215
Figure 4.45	Exercice d'application 2 (relatif au Problème 2)	218
Figure 4.46	Représentation 2D de l'angle dièdre droit COB	220
Figure 4.47	Plan médiateur Π de $[AB]$	221
Figure 4.48	Cube $ABCDEFGH$ (exercice d'application – problème 3).....	222

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 Comparaison entre les concepts capacité/schème (Jonnaert, 2009, p. 50).....	40
Tableau 2.2 Synthèse des concepts du cadre théorique	81
Tableau 3.1 Contenu conceptuel des séances d'enseignement/apprentissage	95
Tableau 4.1 Grille d'analyse du problème 1 (le marchand de sable) : conflit « vu/su ».....	160
Tableau 4.2 Grille d'analyse du problème 2 ($\triangle ABC$ à l'intérieur d'un prisme) : conflit cognitif « vu/su »	162
Tableau 4.3 Grille d'analyse du problème 3 (le cube tronqué) : conflit cognitif « vu/su »	164
Tableau 4.4 Réponses obtenues à la question b (Problème 3)	193

LISTE DES ABRÉVIATIONS, DES SIGLES ET DES ACRONYMES

CREM : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (Belgique)

CST : Mathématique séquence Culture, société et technique 5^e secondaire

PDA : Progression des apprentissages

PFEQ : Programme de formation de l'école québécoise

MEES : Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur

MELS : Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport

MEQ : Ministère de l'Éducation du Québec

NCTM : National Council of Teachers of Mathematics

NRC : National Research Council

SRSG : The Spatial Reasoning Study Group

TBI : Tableau blanc interactif

TSD : Théorie des Situations Didactiques

RÉSUMÉ

Résumé

Les habiletés spatiales (visualisation et transformations spatiales), les connaissances spatiales et les connaissances géométriques en résolution de problèmes de géométrie de l'espace se constituent en un domaine d'études qui est ancré dans la recherche actuelle en didactique des mathématiques.

Je m'intéresse à l'apprentissage de la géométrie de l'espace chez les élèves du secondaire. Plus spécifiquement, au *modus operandi* du triplet « habiletés spatiales », « connaissances spatiales » et « connaissances géométriques » et de leurs interactions en résolution de problèmes. Sans m'y attacher exclusivement, les processus où le raisonnement déductif (la « preuve mathématique ») est impliqué feront l'objet d'une attention particulière.

Les différents rôles que peuvent jouer les habiletés spatiales (par ex. la visualisation mentale), les connaissances spatiales (par ex. celles à l'aide desquelles on élabore des représentations 2D selon des techniques établies, ou à l'aide desquelles on décode de telles représentations) et les connaissances géométriques (par ex. application d'un théorème traitant de la perpendicularité dans l'espace) dans l'apprentissage de la géométrie 3D au secondaire sont mal compris.

Le problème de recherche se résume ainsi : en résolution de problèmes, la mise en fonctionnement des habiletés spatiales, des connaissances spatiales et des connaissances géométriques — en particulier du point de vue de leur coordination — que l'élève fait intervenir, autant chez celui qui solutionne convenablement des problèmes spatiaux que chez celui qui éprouve des difficultés, doit être analysée et mieux comprise. Comment peut-on décrire et caractériser cette mise en fonctionnement ? En quoi les problèmes spatiaux soumis aux élèves, les solutions qu'ils élaboreront et les stratégies qu'ils mettront en œuvre pour résoudre, peuvent-ils aider à investiguer et mieux comprendre le rôle joué par les habiletés spatiales, les connaissances spatiales, les connaissances géométriques et leurs interactions ?

L'objectif de la recherche consiste à décrire et analyser les rôles possibles des habiletés spatiales, des connaissances spatiales et des connaissances géométriques ainsi que leurs interactions, dans un contexte d'apprentissage par résolution de problèmes en géométrie spatiale.

Les questions de recherche se déclinent ainsi : 1) Quels rôles peuvent jouer (potentiellement) ou jouent (réellement) les habiletés spatiales et les connaissances spatiales, notamment via les processus d'encodage et de décodage des représentations 2D ? Comment les décrire et les analyser à partir des démarches de résolution des problèmes proposés ? 2) En quoi les problèmes proposés ont-ils été propices à faire travailler de manière interdépendante les habiletés spatiales, les connaissances spatiales, les connaissances géométriques et leur coordination ? Sinon, peut-on retravailler ces problèmes, les revoir, les ajuster relativement à certains aspects des habiletés spatiales, des connaissances spatiales et géométriques qu'ils mettent en jeu ?

La méthodologie employée est celle du *Design Research*, selon laquelle j'ai élaboré une séquence d'enseignement de 7 séances de 75 minutes, qui est bâtie autour de trois problèmes de géométrie de l'espace. Ils ont été conçus pour que les habiletés spatiales, les connaissances spatiales et les connaissances géométriques soient fortement susceptibles d'être mobilisées concurremment pour la résolution. Les données sont constituées des solutions écrites à ces problèmes, provenant d'un

groupe de trente-deux élèves suivant le cours de mathématiques de 5^e secondaire, séquence *Culture, société et technique*, dans une école publique de l'Outaouais. À ces productions écrites s'ajoutent les échanges d'élèves en binômes, recueillis via la méthode *Think aloud* (van Someren *et al.*, 1994). Les données ont été examinées en s'appuyant sur des grilles d'analyse : visualisation externe, visualisation interne (mentale), conflit « vu/su » adaptées à chacun des problèmes. Les analyses résultantes ont permis de donner des éléments de réponse aux questions de recherche.

L'étude révèle des résultats de recherche qui éclairent les rôles que peuvent jouer les habiletés spatiales, les connaissances spatiales et les connaissances géométriques lors de la résolution de problèmes de géométrie de l'espace : 1) La visualisation spatiale (directe et interne), certaines connaissances spatiales (savoir représenter en perspective cavalière des objets 3D) mises en interaction avec des connaissances géométriques, constituent des éléments importants, gages de réussite en résolution de problèmes de géométrie de l'espace; 2) Dans la résolution d'un problème de géométrie de l'espace où le raisonnement déductif (processus de preuve) est impliqué, la visualisation spatiale (surtout interne) agit synergiquement avec une connaissance géométrique que je nomme « savoir faire le passage du repérage des plans perpendiculaires et des angles entre deux plans, au repérage des droites perpendiculaires et des angles entre deux droites incluses dans ces plans »; 3) La déconstruction dimensionnelle des formes (Duval, 2005; Mithalal, 2010; 2014) ainsi que le « raisonnement relationnel-inférentiel basé sur les propriétés » de Battista *et al.* (2019), viennent renforcer et bonifier le cadre théorique et aident à mieux comprendre comment se font les interactions; 4) Lorsque la visualisation spatiale (plus particulièrement *interne*) agit en interdépendance avec des connaissances spatiales (savoir représenter en perspective cavalière des objets 3D, savoir repérer des informations spatiales) dans la résolution d'un problème de géométrie de l'espace, cela implique qu'elle est étroitement liée à la capacité de structurer l'espace et de mener à bien le processus d'encodage/décodage d'éléments spatiaux clés dessinés dans la représentation 2D; 5) Les habiletés spatiales (visualisation et transformations spatiales) remplissent un rôle heuristique important lorsqu'elles fonctionnent en interaction avec le discours déductif pour élaborer une démonstration; 6) Les 3 problèmes et la séquence d'enseignement se constituent subsidiairement en véritables résultats de recherche.

L'analyse rétrospective de la séquence d'enseignement selon le *Design Research*, dont les ajustements proposés aux 3 problèmes dans les secondes phases, rend possible un traitement des justifications mathématiques par les élèves d'un point de vue déductif. Ces ajustements permettent de faire « basculer » chacun des 3 problèmes d'un problème de G1 (géométrie naturelle) à un problème de G2 (géométrie axiomatique naturelle). Ainsi, je pose l'hypothèse que la séquence d'enseignement « améliorée » permet de faire travailler aussi efficacement que possible la géométrie spatiale au secondaire.

Mots clés :

habiletés spatiales, visualisation, transformations spatiales, connaissances spatiales, connaissances géométriques, problèmes en géométrie 3D, formules de volume, représentations des objets 3D, raisonnement déductif, conflit « vu/su ».

ABSTRACT

Abstract

Spatial skills (visualization and spatial transformations), spatial knowledge and geometric knowledge in solving spatial geometry problems constitute a field of study that is anchored in current research in mathematics education.

I am interested in the learning of spatial geometry among secondary school students; more specifically, in the *modus operandi* of the triplet “spatial skills”, “spatial knowledge” and “geometric knowledge” and their interactions in problem solving. Without focusing exclusively on them, the processes where deductive reasoning (“mathematical proof”) is involved will be the subject of particular attention.

The different roles that spatial skills (e.g., mental visualization), spatial knowledge (e.g., that with which one develops 2D representations according to established techniques, or with which one decodes such representations), and geometric knowledge (e.g., application of a theorem dealing with perpendicularity in space) may play in learning 3D geometry in secondary school are poorly understood.

The research problem could be summarized as follows: in problem solving, the implementation of spatial skills, spatial knowledge, and geometric knowledge—particularly from the point of view of their coordination—that students bring to bear, both in the solver and in the problem solver, must be analyzed and better understood. How can this implementation be described and characterized? How can the spatial problems that will be presented to students, the solutions they propose, and the strategies they implement to solve them, help us investigate and better understand the role played by spatial abilities, spatial knowledge, geometric knowledge, and their interactions?

The aim of this research is to describe and analyze the possible roles of spatial skills, spatial knowledge, and geometric knowledge, as well as their interactions, in a problem-solving learning context in spatial geometry.

The research questions are as follows: 1) What roles can spatial skills and spatial knowledge play, particularly via the processes of encoding and decoding 2D representations? How can they be described and analyzed based on the proposed problem-solving approaches? 2) How did the proposed problems foster the interdependent development of spatial abilities, spatial knowledge, geometric knowledge, and their coordination? Otherwise, can we rework these problems, review them, adjust them in relation to certain aspects of spatial skills, spatial and geometric knowledge that they bring into play?

The methodology used is that of *Design Research*, according to which I developed a teaching sequence of 7 sessions of 75 minutes, which is built around three problems of spatial geometry. They were designed so that spatial skills, spatial knowledge and geometric knowledge need to be

mobilized concurrently for the resolution. The data consists of written solutions to these problems, from a group of thirty-two students taking the 5th year secondary mathematics course, Culture, society and technology sequence, in a public high school in Outaouais. In addition to these written productions, there are exchanges between students in pairs, collected via the *Think aloud protocol* (van Someren *et al.*, 1994). The data were examined using analysis grids adapted to each of the problems: external visualization, internal (mental) visualization, “knowing vs seeing” conflict. The resulting analyses made it possible to provide elements of response to the research questions.

The study reveals research results that shed light on the roles that spatial skills, spatial knowledge and geometric knowledge can play when solving spatial geometry problems: 1) Spatial visualization (direct and internal), certain spatial knowledge (knowing how to represent 3D objects in cavalier perspective) interacting with geometric knowledge, constitute important elements, guarantees of success in solving spatial geometry problems; 2) In solving a spatial geometry problem where deductive reasoning (proof process) is involved, spatial visualization (especially internal) acts synergistically with geometric knowledge that I call “knowing how to make the transition from identifying perpendicular planes and angles between two planes, to identifying perpendicular lines and angles between two lines included in these planes”; 3) The dimensional deconstruction of shapes (Duval, 2005; Mithalal, 2010; 2014) as well as the “relational-inferential reasoning based on properties” of Battista *et al.* (2019), reinforce and improve the theoretical framework and help to better understand how interactions occur; 4) When spatial visualization (particularly internal) acts in interdependence with spatial knowledge (knowing how to represent 3D objects in cavalier perspective, knowing how to identify spatial information) in solving a spatial geometry problem, this implies that it is closely linked to the ability to structure space and to successfully carry out the process of encoding/decoding key spatial elements that will be drawn in the 2D representation; 5) Spatial skills (visualization and spatial transformations) fulfill an important heuristic role when they function in interaction with deductive discourse to develop a demonstration; 6) The 3 problems and the teaching sequence constitute subsidiary real research results.

Retrospective analysis of the teaching sequence according to *Design research*, whose proposed adjustments to the 3 problems allow, in the second phases, to treat the mathematical justifications of the students from a deductive point of view. These adjustments make possible to “switch” each of the 3 problems from a G1 problem (natural geometry) to a G2 problem (natural axiomatic geometry). Thus, I assume that the “improved” teaching sequence allows to work as effectively as possible on spatial geometry in secondary school.

Keywords :

spatial skills, visualization, spatial transformations, spatial knowledge, geometric knowledge, 3D geometry problems, volume formulas, 3D object representations, deductive reasoning, “knowing vs seeing” conflict.

INTRODUCTION

Ma recherche s'intéresse à une question qui est au centre des préoccupations de plusieurs enseignants de mathématiques du secondaire : le problème de l'enseignement des connaissances spatiales, des connaissances géométriques et de leurs interactions avec les habiletés spatiales (visualisation et transformations spatiales), ainsi que leurs rôles dans l'apprentissage de la géométrie de l'espace, notamment quand il s'agit de résoudre des problèmes dans le traitement du volume des solides.

Dans le premier chapitre, je situe le problème de l'habileté « visualisation spatiale » et des connaissances spatiales à travers deux difficultés majeures vécues par les élèves du secondaire en résolution de problèmes : 1) difficulté à identifier les constituants d'un objet 3D et à décoder la représentation 2D d'un objet 3D; 2) difficulté à se construire une image mentale; en particulier difficulté à (se) représenter un objet 3D lorsque le problème posé n'est donné qu'en mots. Puis, j'aborde le raisonnement spatial dans la résolution de tels problèmes, ce qui m'amène à discuter du contexte : la notion de « problème » dans le PFEQ, dans la littérature scientifique et en géométrie spatiale. Une caractérisation de « problème » est présentée ainsi que les premières définitions de « habiletés spatiales » et de « connaissances spatiales ». Enfin, mon problème de recherche est exposé.

Dans le deuxième chapitre, j'effectue une analyse des concepts-clés de la recherche : 1) les habiletés spatiales; 2) la visualisation spatiale (directe et mentale); 3) les transformations spatiales; 4) les connaissances géométriques; 5) le raisonnement déductif en géométrie de l'espace; 6) les images mentales liées à la visualisation spatiale; 7) les représentations internes/externes d'objets géométriques 3D; 8) les différences entre dessin, figure et représentation; 9) la caractérisation de problèmes en géométrie spatiale et 10) le conflit « vu/su » (Parzysz, 1988; 2007).

Dans le chapitre trois, je présente l'approche méthodologique dite du *Design Research* (Cobb et Gravemeijer, 2008; Edelson, 2002) qui m'a permis d'élaborer une séquence d'enseignement (7 périodes de 75 min.) axée sur 3 problèmes de géométrie spatiale à résoudre en dyades. Pour arriver à répondre à mes questions de recherche, j'ai élaboré 3 problèmes (Problème 1 : le marchand de sable; Problème 2 : le triangle $\triangle ABC$ situé à l'intérieur d'un prisme droit à base rectangulaire; Problème 3 : le cube tronqué) axés sur les habiletés spatiales (visualisation et transformations spatiales), les connaissances spatiales, les connaissances géométriques ainsi que le raisonnement mathématique (déductif) pour calculer des volumes de solides. De plus, la méthode *Think aloud* (van Someren *et al.*, 1994) a été utilisée afin d'analyser plus finement les échanges verbaux des équipes dans leur démarche de résolution pour chacun des problèmes soumis. Dans ce chapitre, je présente aussi les trajectoires hypothétiques d'apprentissage (THA) (au sens de Simon, 1995) pour les 3 problèmes contenant la solution avec l'identification des connaissances spatiales, des connaissances géométriques et des habiletés spatiales nécessaires ainsi que l'anticipation de certaines difficultés et erreurs.

Dans le quatrième chapitre, je présente les grilles d'analyse pour traiter les données ainsi que les analyses des solutions pour chacun des problèmes (productions écrites en dyades et échanges en binômes), en utilisant la perspective du conflit « vu/su » (Parzysz, 1988; 2007). Les analyses des solutions des équipes ont été faites selon 2 phases distinctes pour les problèmes 1 et 3 et une phase pour le problème 2. La phase 1 illustre comment les dyades ont utilisé les habiletés spatiales, les connaissances spatiales et les connaissances géométriques liées aux calculs d'aire et de volume des solides ; la phase 2 illustre comment les équipes ont invoqué les définitions et les théorèmes relatifs à la perpendicularité dans l'espace pour justifier mathématiquement via des raisonnements déductifs.

Dans le cinquième chapitre, je discute des données expérimentales analysées par lesquelles j'ai obtenu des éléments de réponse à mes questions de recherche. Notamment je montre comment les habiletés spatiales (visualisation et transformations spatiales), les connaissances spatiales ainsi que les connaissances géométriques interviennent dans l'élaboration, par les élèves, d'une solution à chacun des 3 problèmes de géométrie de l'espace. Je compare aussi les données expérimentales

analysées (résultats) avec d'autres études (par ex. Battista *et al.*, 2019; Duval, 2005) pour faire ressortir comment la recherche bonifie le corpus de recherche actuel.

Dans la conclusion, j'aborde à nouveau les questions de recherche en faisant ressortir des éléments importants qui permettent de voir ce que l'étude apporte au domaine de recherche. J'ouvre par la suite sur des retombées (recommandations) sur l'apprentissage/enseignement de la géométrie spatiale au secondaire, et je termine avec la suggestion d'une piste pour des recherches ultérieures.

CHAPITRE 1

PROBLÉMATIQUE

Les habiletés spatiales de même que les connaissances spatiales constituent des atouts pour la vie chez l'être humain. Tout comme les connaissances du langage que l'individu a développées à travers les échanges verbaux, la lecture et l'écriture, les connaissances spatiales sont reconnues comme étant indispensables au développement de l'être humain. Nous vivons et interagissons dans un espace tridimensionnel et pour cela, devons constamment percevoir et situer des objets, nous déplacer, évaluer des distances, manipuler des objets, construire des objets tridimensionnels, etc.

1.1 La situation globale du problème de recherche

À l'ère du numérique et des nouvelles technologies de l'information et de la communication, il est reconnu (par ex. Davis *et al.*, 2015) que notre société aura besoin de personnes qualifiées détenant des habiletés spatiales et des connaissances spatiales pour exercer diverses professions. Par exemple, un niveau élevé de maîtrise des habiletés spatiales et des connaissances spatiales est nécessaire en architecture, pour piloter un avion ou un hélicoptère, pour opérer des excavatrices, pour réaliser des œuvres d'arts telles que des sculptures, pour l'éclairage ou la mise en scène d'un spectacle; cette maîtrise est nécessaire à un informaticien travaillant en animation 3D dans la création de jeux vidéo, à un chirurgien qui effectue des opérations délicates, à un chorégraphe qui organise des danses complexes, à un ingénieur qui manipule un logiciel de géométrie pour réaliser des plans de construction, etc. Plus généralement, les individus qui doivent comprendre, utiliser et apprécier les différentes productions et créations issues de ces disciplines spécialisées doivent à leur tour développer une meilleure compréhension des objets spatiaux et de leurs représentations.

En outre, la résolution de problèmes de nature scientifique ou technologique repose en grande partie sur le raisonnement spatial (Stieff et Uttal, 2015). Les habiletés spatiales constituent un élément déterminant dans le développement d'une expertise pour les domaines des Sciences, Technologie, Ingénierie et Mathématiques (STIM; STEM chez les anglo-saxons) (Sorby *et al.*, 2013). Ces disciplines nécessitent de visualiser, manipuler, transformer et comprendre des figures géométriques en deux et trois dimensions.

Toutefois, plusieurs études (Duroisin, 2015; Mithalal, 2010; 2014; Parzysz, 1991; 2007) montrent que les élèves de niveau secondaire éprouvent des difficultés à résoudre des problèmes de géométrie dans l'espace ainsi qu'à faire intervenir convenablement les habiletés spatiales. Mais, d'autres travaux récents, réalisés par exemple par Ramful *et al.* (2017), prétendent qu'il est possible d'aider les élèves de 11 à 13 ans (fin primaire et 1^{er} cycle du secondaire) à améliorer leurs capacités de raisonnement spatial dans des problèmes qui leur sont posés. Ramful et ses collaborateurs (2017) ont conçu et expérimenté un outil servant à évaluer les habiletés spatiales, le SRI (Spatial Reasoning Instrument), pouvant être utilisé à deux fins principales à savoir, comme mesure du raisonnement spatial et comme outil de recherche. Premièrement, il fournit une mesure de la capacité de raisonnement spatial des élèves de 11 à 13 ans. Deuxièmement, il peut être utilisé comme outil de recherche lors de pré- et post-test et dans les études corrélationnelles de la réussite en mathématiques. Cet outil peut être mis à profit pour dépister les élèves ayant des difficultés de raisonnement spatial et il nous renseigne sur des habiletés spatiales différentes : la rotation mentale, l'orientation spatiale et la visualisation spatiale.

Dans les études mentionnées précédemment (Duroisin, 2015; Mithalal, 2010; 2014; Parzysz, 1991; 2007; Ramful *et al.*, 2017), en lien avec notre objet de recherche, les chercheurs s'intéressent à évaluer les habiletés spatiales sans expliquer clairement comment les connaissances spatiales (par ex. élaborer des représentations 2D des objets 3D) et les connaissances géométriques (relations d'incidence, d'adjacence et de coplanarité, de parallélisme et de perpendicularité, etc.) interagissent avec certaines habiletés spatiales (par ex. visualisation mentale, rotation mentale). Ainsi, il nous apparaît que ces chercheurs n'apportent pas d'éclairages significatifs à propos de leurs mises en fonctionnement combinées dans la résolution de problèmes.

Dans notre thèse, l'objectif est de décrire et analyser les rôles possibles des habiletés spatiales et des connaissances spatiales ainsi que de leurs interactions, dans un contexte de résolution de problèmes en géométrie spatiale.

1.2 L'habileté de « visualisation spatiale » et les connaissances spatiales en géométrie 3D

Malgré que des études antérieures (Parzysz, 1988; 1991; 2007; Mithalal, 2010; 2014; Tremblay, 2016) relèvent les difficultés éprouvées par les élèves dans le domaine de la géométrie spatiale,

peu de recherches ont mis en évidence l'importance des rôles combinés des « habiletés spatiales » et des « connaissances spatiales », de leurs nécessaires interactions, dans l'apprentissage de la géométrie à l'école secondaire. Or, un cadre théorique récent élaboré par Marchand (2020) vient justifier l'importance de ces interactions dans la création de séquences d'enseignement au primaire. Ces séquences mettent davantage en évidence les connaissances spatiales et la visualisation (une des habiletés spatiales, voir plus loin) en provoquant volontairement, par des choix didactiques, des moments où les connaissances spatiales sont incontournables pour la résolution de problèmes spatiaux (par ex. en l'absence de l'objet physique) et où le questionnement durant l'institutionnalisation porte sur celles-ci.

Il n'y a pas d'étude empirique qui révèle les manifestations possibles de cette interaction dans les productions des élèves. Bien que plusieurs études, incluant des méta-analyses, aient été réalisées au sujet des habiletés spatiales aux niveaux primaire, secondaire, collégial et universitaire dans les domaines des STEM¹ (ex. : Buckley *et al.*, 2019; Carroll, 1993; Clements, 2008; Davis *et al.*, 2015; Linn et Petersen, 1985; Uttal *et al.*, 2013), aucune d'elles ne propose de liens significatifs entre les diverses habiletés spatiales (nous reviendrons plus loin sur ce que nous entendons par cette locution) ni explore leurs interactions avec les connaissances spatiales, illustrant leur mise en fonctionnement en résolution de problèmes. En conséquence, nous constatons qu'il y a un besoin pour que la recherche examine plus en profondeur comment les élèves utilisent, conjointement ou non, de façon synergique ou au contraire antagoniste, les habiletés spatiales et les connaissances spatiales, et pourquoi leurs interactions semblent si importantes — entre autres, pour les didacticiens en géométries 2D/3D, pour les chercheurs en géométrie dont *The Spatial Reasoning Study Group* (Davis *et al.*, 2015), les travaux dans la suite de ceux de l'équipe de Lille autour de Perrin-Glorian et Godin (2014), Duval (2005), Duval et Godin (2005), mais aussi de Mathé et Mithalal (2019), etc. — dans la résolution de problèmes de géométrie tridimensionnelle.

Plusieurs chercheurs soutiennent que les habiletés spatiales (incluant la visualisation) jouent un rôle essentiel dans la pensée mathématique et la résolution de problèmes (Eisenberg et Dreyfus,

¹ Acronyme maintenant standard chez les Anglo-Saxons, pour Science, Technology, Engineering and Mathematics.

1989; Pallascio *et al.*, 1991; Wheatley, 1990). La recherche suggère que le raisonnement spatial et l'utilisation de représentations spatiales deviennent encore plus importants chez les élèves à mesure qu'ils progressent dans l'apprentissage des mathématiques et dans des domaines connexes (Mix et Cheng, 2012). Aussi, il est établi que la relation entre le raisonnement spatial et les mathématiques en général est cruciale, ce qui signifie que les individus ayant de fortes habiletés spatiales réussissent généralement mieux en mathématiques (Mix et Cheng, 2012; Wai *et al.*, 2009).

Notons d'entrée de jeu qu'il y a un besoin pour clarifier ce qu'est le « raisonnement spatial » et en quoi il se distingue des habiletés spatiales et de la visualisation spatiale. Depuis une vingtaine d'années, il y a de nombreux échanges de vues sur les relations entre la « visualisation », le « raisonnement visuo-spatial » et le « raisonnement spatial ». Certains auteurs utilisent ces termes de manière interchangeable; d'autres chercheurs proposent des distinctions; certains soutiennent qu'ils ne doivent pas être confondus (Davis and the Spatial Reasoning Study Group, 2015). J'y reviendrai au chapitre II de la thèse.

Dans un environnement de plus en plus dominé par l'image, il est important pour les élèves de savoir décoder/encoder les représentations 2D des objets de l'espace. Certains domaines professionnels tels que l'architecture, le graphisme, l'animation 3D et la réalité virtuelle font grand usage de telles représentations 2D. Outre le fait que nous devons tous nous déplacer dans un monde à trois dimensions, les carrières dans les sciences, la technologie, le génie, et pratiquement tout ce qui requiert les mathématiques, nécessitent de solides habiletés spatiales (voir National Research Council, 2006; Shumway, 2013). En fait, des recherches ont démontré que les habiletés spatiales sont des indicateurs de succès dans ces domaines (Newcombe, 2010; 2013; Wai *et al.*, 2009). Pourtant, la mise en fonctionnement des habiletés spatiales dans la résolution de problèmes spatiaux suscite des questions dans la communauté scientifique (Bodner et Guay, 1997).

Dans les difficultés spécifiques qui sont souvent observées en géométrie, celles reliées à l'aspect visuo-spatial semblent être les plus importantes à surmonter pour assurer une bonne compréhension de ce domaine d'étude (Gravel, 2016; Wessels et Van Niekirk, 1998). La visualisation dans l'espace – une des habiletés spatiales (Carroll, 1993; van Garderen, 2006) – est fortement dépendante des représentations utilisées et des rôles que celles-ci doivent jouer dans la résolution des problèmes en géométrie 3D (Mithalal, 2014). Des chercheurs ont souligné le rôle de la

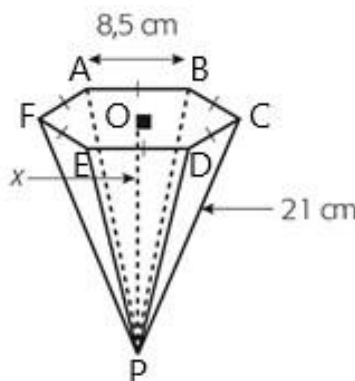
visualisation et des représentations 2D dans l'apprentissage de la géométrie plane (Duval, 2005; Fischbein, 1993), de la géométrie spatiale (Buckley *et al.*, 2018) et de la réussite en résolution de problèmes (Lowrie *et al.*, 2016; Markey, 2009). À cet égard, lorsque des élèves ont à décoder/encoder des représentations 2D, ils éprouvent de la difficulté à faire intervenir simultanément les habiletés de visualisation et les connaissances spatiales (Parzysz, 1988; Tremblay, 2016). Nous allons décrire ces difficultés, ce qui nous permettra en même temps de préciser certains éléments terminologiques.

1.2.1 Difficulté à identifier les constituants d'un objet 3D et à décoder la représentation 2D d'un objet 3D

La difficulté à identifier les constituants d'un objet 3D est susceptible d'apparaître lorsque l'élève visualise directement l'objet physique ou qu'il le visualise à partir d'une représentation 2D (Parzysz, 1988; 1991; Markopoulos, 2003). Pour Parzysz (1988; 1991; 2007) et Mithalal (2014), les élèves du secondaire éprouvent des difficultés de visualisation spatiale pour les représentations 2D entre autres parce qu'elles font apparaître des « aberrations » (ex. : des angles droits dans l'objet réel ne sont pas droits dans la représentation) à cause des techniques de représentation.

Pour illustrer nos propos, voici un premier exemple de problème (reproductible Fiche 3.2 #5b, de la collection Intersection Mathématiques, CST 5^e secondaire), où l'élève visualise directement la représentation 2D d'une pyramide régulière à base hexagonale dessinée en perspective cavalière. Dans ce problème, la mesure du côté AB de l'hexagone $ABCDEF$ est de 8,5 cm et la mesure de l'arête CP de la pyramide est de 21 cm. Il est demandé à l'élève de déterminer la mesure manquante OP .

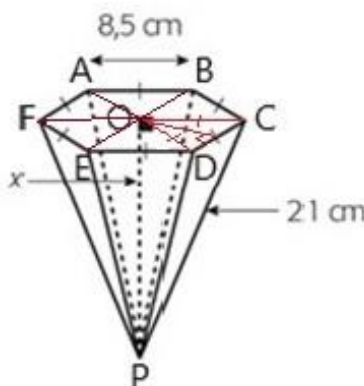
Figure 1.1 Représentation 2D d'une pyramide régulière à base hexagonale



Lorsque l'élève utilise l'habileté de visualisation spatiale, des éléments de la représentation 2D à décoder, tels que les côtés de l'hexagone, les angles intérieurs de l'hexagone, la hauteur du solide (OP), l'apothème de la base hexagonale et l'apothème de la pyramide, peuvent entrer en conflit avec des connaissances spatiales; par exemple les côtés de l'hexagone qu'on ne « voit » pas de la même longueur dans la représentation, alors qu'on « sait » qu'ils le sont dans le solide représenté. Voici des exemples de connaissances spatiales : décomposer l'hexagone en six triangles équilatéraux dont les angles en chaque sommet sont de 60° ; reconnaître (se remémorer) les propriétés des hauteurs et des angles droits dans le solide et dans des parties du solide, propriétés liées au concept de perpendicularité (l'apothème de la base hexagonale est aussi la hauteur de chacun des triangles équilatéraux formant l'hexagone); reconnaître et repérer des triangles rectangles dans la pyramide, pouvant servir à appliquer le théorème de Pythagore, etc.

Si nous traçons les segments formant les six triangles équilatéraux (de couleur rouge dans la figure 1.2) à même la représentation 2D, nous observons « à l'œil » qu'ils n'apparaissent pas isométriques. Aussi, la visualisation du triangle équilatéral $\triangle CDO$ permettra de constater que le segment $[OC]$ (qui servira dans le calcul de la mesure de $[OP]$) est une cathète dans le triangle rectangle $\triangle OCP$. Mais pour appliquer le théorème de Pythagore, il faut d'abord repérer où sont les angles droits, par exemple $\angle POB$. Or, dans la représentation plane, cet angle n'est pas droit. C'est là une des difficultés qui peuvent se poser à l'élève, à savoir bien décoder les éléments spatiaux dans la représentation plane (en 2D) de la pyramide.

Figure 1.2 Conflit entre « voir » et « savoir » dans une représentation 2D



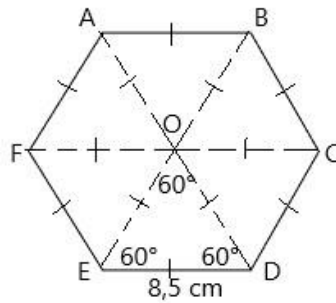
Bien que l'élève sache que les côtés d'un hexagone régulier sont isométriques (connaissances spatiales), ceux-ci ne sont pas de la même longueur dans le dessin (ce que l'élève voit) : les segments $[BC]$, $[CD]$, $[EF]$ et $[FA]$ ne sont pas de même longueur que $[AB]$ et $[DE]$ dans le dessin : c'est le conflit entre le voir et le savoir (Parzysz, 1988; 2007), sur lequel nous reviendrons dans le cadre théorique. Il est en de même des angles intérieurs de l'hexagone : ils ne sont pas représentés de façon à rendre compte des relations d'isométrie ou de similitude, c'est-à-dire que les mesures des angles $\angle FAB$, $\angle ABC$, $\angle CDE$, $\angle DEF$ ne sont pas égales, dans la représentation plane, aux mesures des deux angles $\angle BCD$, $\angle EFA$, alors que tous ces angles sont isométriques dans le solide. Par ailleurs, la visualisation de ces segments dans l'espace (c'est-à-dire l'habileté à se représenter mentalement, à « imaginer » ces segments dans le solide et l'espace) permet de constater que le segment $[OC]$ forme avec les segments $[OP]$ et $[CP]$ un triangle rectangle, ce qui permettra d'utiliser le théorème de Pythagore pour calculer la mesure manquante OP , qui est la hauteur de la pyramide. Nous constatons que la visualisation spatiale permet de repérer des informations clés sur la nature des constituants de ce solide, qu'elle agit en étroite relation avec certaines connaissances spatiales (organisation et imagination dans l'espace de ces informations clés : relation d'incidence, de perpendicularité, de parallélisme, etc.), mais qu'elle doit se faire en dépit des informations directes données par la vision immédiate, qui doivent en quelque sorte être réinterprétées.

Voici une démarche possible pour déterminer la mesure manquante x (soit OP , la mesure de $[OP]$, hauteur de la pyramide)².

– décomposer la base de la pyramide en 6 triangles équilatéraux, comme dans la Figure 1.3

² Voici les conventions utilisées dans la thèse pour noter les segments et leur mesure : OP signifie la mesure du segment et $[OP]$ signifie le segment lui-même. Je renvoie le lecteur à la p. 103 de la thèse où ces conventions sont détaillées.

Figure 1.3 Décomposition de l'hexagone



– valeur de c , la mesure du côté de la base (hexagonale) - voir figure 1.2

$$c = AB = 8,5 \text{ cm}$$

Or, en utilisant les connaissances géométriques de base,

$$AB = OC = 8,5 \text{ cm}$$

Puis, utiliser le théorème de Pythagore :

$$OP^2 + OC^2 = CP^2$$

$$OP^2 + 8,5^2 = 21^2 \Rightarrow OP = \sqrt{21^2 - 8,5^2}$$

$$OP \approx 19,2 \text{ cm}$$

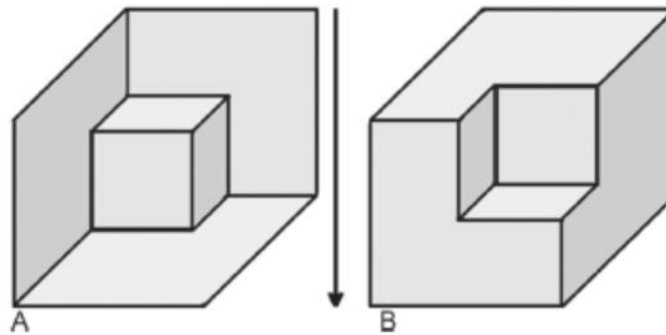
Dans le traitement des formules de volume, Janvier (1994; 1997) et Tanguay (2010) ont identifié les difficultés des élèves et l'une d'elles est de visualiser les éléments géométriques liés à la formule de volume dans la représentation du solide : repérer la hauteur et l'apothème provoque par exemple les confusions hauteur-arête, hauteur-apothème. D'après Parzysz (1991), Pittalis et Christou (2013) et Mithalal (2014), l'habileté à procéder au décodage/encodage exige de bien connaître les règles de représentation des objets 3D, et je fais référence à ces règles comme à des « connaissances spatiales ». Dans ce processus, Revina *et al.*, (2011) ont souligné que les élèves oublient souvent de tenir compte des « parties cachées » de l'objet 3D, c'est-à-dire qu'ils ont de la difficulté à imaginer l'objet sous d'autres angles que celui selon lequel il est représenté en 2D. Plusieurs études de la France dont celles de Parzysz (1988; 1991) et de Mithalal (2010; 2014) soulignent de plus

que l'apprentissage de ce décodage/encodage est particulièrement complexe et n'est généralement pas pris en charge par les institutions scolaires.

Voici un deuxième exemple (figure 1.4) exposant la difficulté à décoder une représentation 2D, et qui montre l'importance de comprendre les conventions (ou règles) de représentation des objets 3D. Ce problème a été proposé par Hoffman (2000) et a été repris par Francis et Whiteley (2015), qui en parlent comme du problème des « boîtes ambiguës ».

The two parts of figure [1.4] are “the same” (one is half-turned – turn the page or your head). Because we grew up with a “cue” that light comes from above (represented by the arrow), we initially “see” the lighter surfaces as “up.” In A, this leads to a box in the corner of a room, the most common interpretation. We interpret B as a box with a cube cut out of a corner. Some people can also see a third possibility: a smaller box touching a bigger box along an edge – but the shading cues would now require two distinct light sources – one from the top and one from the bottom). (Francis et Whiteley, 2015, p. 124)³

Figure 1.4 Boîtes ambiguës (Hoffman, 2000)



³ Traduction : les deux parties de la figure 1.4 sont les mêmes (l'une est à moitié tournée – tournez la page ou la tête). Parce que nous avons grandi avec le « signal » que la lumière vient d'en haut (représenté par la flèche), nous « voyons » initialement les surfaces plus pâles comme « orientée vers le haut ». En A, cela conduit à une boîte dans le coin d'une pièce, l'interprétation la plus courante. Nous interprétons B comme une boîte avec un cube découpé dans un coin. Certaines personnes peuvent également voir une troisième possibilité : une petite boîte touchant une plus grande boîte le long d'une arête — mais les repères d'ombrage nécessiteraient alors deux sources de lumière distinctes — une en haut et une en bas).

Cet exemple nous amène à nous interroger sur le mécanisme de fonctionnement du processus de décodage/encodage mis en œuvre lors de la visualisation spatiale : pourquoi y a-t-il 3 façons possibles de « voir » ces boîtes, telles qu'explicitées par Francis et Whiteley ? Je pense que la manière de « visualiser » une représentation 2D d'un objet 3D peut être influencée, d'une part, par les connaissances spatiales telles que le découpage de parties de l'objet 3D (le prisme droit versus le petit cube), la maîtrise des règles de représentations 2D des objets 3D (les boîtes ambiguës sont-elles bien représentées en perspective cavalière ?), l'accès à une banque d'objets géométriques standardisés, institutionnalisés autant en 2D qu'en 3D (figures planes et solides usuels : polyèdres et corps ronds, etc.), et d'autre part, par les habiletés spatiales telles que la visualisation spatiale, et l'habileté à focaliser cette visualisation sur des parties spécifiques de l'objet 3D (le petit cube et le prisme droit) et sur leurs positionnements relatifs.

Les deux exemples que j'ai présentés attirent l'attention sur le fait que les représentations 2D des objets 3D peuvent être ambiguës. Cela nécessite que les conventions (ou règles) des représentations 2D des objets 3D soient travaillées et intégrées, mais aussi relativisées puisque les mêmes règles et conventions (de la perspective cavalière par exemple) peuvent donner lieu à des interprétations différentes. Le fait que nous ayons tendance à interpréter un dessin comme si la lumière venait d'en haut n'a rien d'une règle de la perspective cavalière, et pourtant c'est cette disposition psychologique qui fait que nous interprétons différemment les deux grands cubes de la figure 1.4, même s'il s'agit en fait **du même dessin**. En conséquence, j'en conclus qu'il est important d'investiguer le *modus operandi* des habiletés spatiales, plus spécifiquement tout ce qui a trait au processus de décodage/encodage des représentations 2D des objets 3D. La reconnaissance de l'objet 3D à partir de sa représentation 2D ne va pas de soi, et le raisonnement spatial sur les objets 3D nécessite une reconstruction sans ambiguïté de l'objet (au moins mentalement). Les allers-retours que fait l'individu entre les représentations 2D qu'il visualise directement et les objets 3D qui leur sont associés nécessitent une acculturation aux conventions utilisées (techniques de représentation) et une pratique développée des façons dont on fait le passage entre la troisième dimension (3D) et la deuxième dimension (2D). En accord avec Furtuna (2008), il m'apparaît que la maîtrise de ce passage est essentielle pour raisonner en géométrie spatiale et y résoudre des problèmes.

Cela m'amène à discuter d'une autre difficulté relevée dans les écrits, et qui sera abordée dans la section suivante : la difficulté à se créer des images mentales, qui peut se manifester en parallèle avec la difficulté à représenter en 2D un objet 3D lorsque le problème n'est donné qu'en mots.

1.2.2 Difficulté à se construire une image mentale; en particulier difficulté à (se) représenter un objet 3D lorsque le problème posé n'est donné qu'en mots.

Considérée comme un indicateur de succès pour l'apprentissage de multiples disciplines, la visualisation spatiale correspondrait à la capacité qu'a l'individu à se représenter les informations spatiales (parties d'un objet 3D, leur agencement, les angles, les distances...), à analyser les relations entre les objets 3D d'une configuration et à les manipuler mentalement (par ex. avec des transformations) (Nagy-Kondor, 2014).

Dans l'apprentissage de la géométrie 3D, des chercheurs ont relevé que les élèves éprouvent des difficultés à visualiser mentalement une configuration spatiale à partir d'une représentation 2D (Parzysz, 1991; Duval, 1998; Berthelot et Salin, 1999-2000; Ryu *et al.*, 2007). Par exemple, Berthelot et Salin (1999-2000) montrent que lorsque l'élève n'a pas la possibilité de manipuler l'objet physique, il doit faire appel à la visualisation mentale et au transfert de propriétés, de l'objet 3D représenté en 2D à la représentation mentale qu'il s'en crée. Représenter l'objet en 2D est donc un processus complexe puisque l'élève doit transposer son image mentale pour la représenter en 2D. Il doit donc être capable de mettre en relation sa maîtrise de l'espace et ses techniques de représentation (de « dessin »).

Marchand (2006) souligne que la visualisation et les images mentales sont directement liées au développement des connaissances spatiales (dont les techniques de représentation (de dessin) font partie) étant donné leur nature d'intériorisation d'aspects ou propriétés physiques d'un objet : pour développer des connaissances spatiales, nous devons intérioriser les propriétés physiques d'objets et donc, nous référer à la visualisation qui est elle-même issue des images mentales. Aussi, la difficulté à élaborer des images mentales adéquates est liée à la difficulté de dessiner un objet 3D quand le problème n'est posé qu'en mots, sans figure, spécialement quand les objets 3D contiennent des arêtes parallèles et perpendiculaires (Pittalis et Christou, 2013; Lawrie *et al.*, 2000).

Voici un exemple de problème⁴ où l'élève doit décoder les informations données en mots, dessiner en 2D cet objet 3D par une technique de représentation, puis finalement calculer la valeur de la mesure manquante.

Deux solides décomposables sont équivalents. Le 1^{er} solide est composé d'un prisme régulier à base carrée dont la hauteur et les côtés de la base mesurent respectivement 62,5 mm et 14,8 mm. Ce prisme est surmonté d'une pyramide régulière à base carrée dont les faces latérales sont des triangles isocèles, ayant des angles à leur base de 65°. Le 2^e solide décomposable est formé d'un cylindre droit dont la hauteur est inconnue, et qui est fermé à chaque extrémité par une demi-boule dont le diamètre est de 22 mm. Il est demandé de produire les représentations 2D des solides décomposables, d'indiquer où est située la mesure manquante et de déterminer sa valeur.

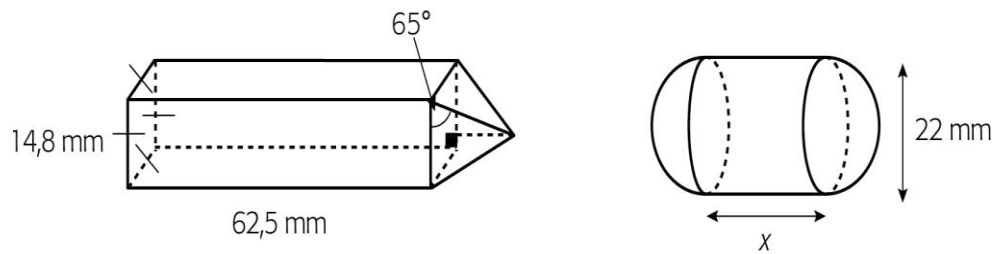
Une 1^{re} étape est le décodage des mots clés du texte :

- des solides décomposables sont des solides réguliers usuels tels que polyèdres (prismes et pyramides) et corps ronds (cônes, cylindres, boules), assemblés les uns avec les autres;
- des solides sont dits équivalents s'ils ont le même volume;
- ce qui est indiqué dans la phrase : « les faces latérales (de la pyramide) sont des triangles isocèles, ayant des angles à leur base de 65° » ; la visualisation mentale sera mobilisée pour repérer et représenter au bon endroit ces angles.

Une 2^e étape consiste à représenter en 2D par une technique de représentation (par ex. la perspective cavalière) les deux solides décomposables. Voici une représentation 2D possible :

⁴ Nous avons élaboré ce problème à partir d'un problème provenant de la collection *Intersection Mathématique*, 2^e cycle du secondaire (Boucher *et al.*, 2007).

Figure 1.5 Exemple d'une représentation 2D des deux solides décomposables



Une 3^e étape est de déterminer la mesure manquante, soit la hauteur du cylindre.

Il faut d'abord calculer le volume du 1^{er} solide décomposable. Voici une démarche possible pour le volume du prisme régulier à base carrée :

$$\text{Volume du prisme à base carrée} = \text{Aire base} \times h$$

$$= c^2 \times h,$$

où c est la mesure du côté du carré et h la hauteur du prisme

$$= 14,8^2 \times 62,5$$

$$\text{Volume du prisme} = 13690 \text{ mm}^3$$

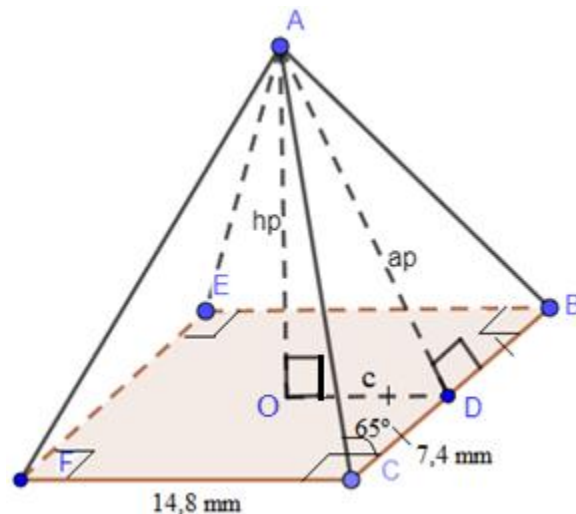
Ensuite, il faut calculer le volume de la pyramide régulière à base carrée. Avant de procéder au calcul, il faut déterminer la mesure de la hauteur de la pyramide qui elle-même nécessitera la mesure de l'apothème de la pyramide. L'élève doit se construire une image mentale des 3 constituants (les côtés) d'un triangle rectangle inscrit dans la pyramide (les deux cathètes : la hauteur de la pyramide et le « demi-côté » du carré; l'hypoténuse : l'apothème de la pyramide). Bien que dans cet exemple, la consigne demande de produire la représentation, nous posons comme hypothèse que la production de cette représentation 2D (voir figure 1.6) aidera à repérer correctement ces constituants, pour qu'ensuite soit utilisé adéquatement le théorème de Pythagore. Aussi, le fait d'effectuer mentalement une rotation de 90° de la pyramide à base carrée permettra de mieux visualiser les éléments spatiaux dans la représentation (apothème de la pyramide,

apothème de la base et hauteur du solide), éléments dont l'élève aura besoin pour résoudre le problème.

Or, la représentation 2D de la pyramide illustrée à la figure 1.5 n'est pas réalisée de façon prototypique, c'est-à-dire qu'elle n'est pas dessinée de façon habituelle, sur sa base, ce qui peut occasionner des difficultés à bien visualiser les angles ainsi qu'à repérer le triangle rectangle mentionné au paragraphe précédent. Nous précisons qu'une figure géométrique est en position prototypique lorsque qu'elle est présentée dans la position la plus courante, la plus fréquemment proposée dans les manuels. Cette position correspond le plus souvent à l'image mentale que nous en avons (voir par ex. Braconne-Michoux, 2018).

Dans la représentation en perspective cavalière de la pyramide régulière à base carrée, en position prototypique, h_p , a_p et c représentent respectivement la hauteur, l'apothème de la pyramide et le « demi-côté » de la base carrée.

Figure 1.6 Représentation « prototypique », en perspective cavalière, d'une pyramide à base carrée



Dans ce dessin en perspective cavalière, l'angle $\angle ACB$, qui mesure 65° , sera utile pour calculer la mesure de l'apothème de la pyramide (notée a_{pyr} dans l'équation ci-dessous). Utilisant la trigonométrie, on a :

$$\tan 65^\circ = \frac{a_{pyr}}{7,4} \Rightarrow a_{pyr} = 7,4 \times \tan 65^\circ \approx 15,87 \text{ mm.}$$

Représenter la pyramide à base carrée en position prototypique facilite le repérage de la mesure du segment OD (le « demi-côté » du carré), soit 7,4 mm. De plus, le fait de bien visualiser où se situent les angles droits (en O et en D) dans la représentation 2D de la pyramide faciliterait le repérage du triangle rectangle ΔAOD .

Puis, à l'aide du théorème de Pythagore, on calcule la mesure de la hauteur de la pyramide (notée h_p) :

$$h_p^2 + 7,4^2 = 15,87^2$$

$$\Rightarrow h_p = \sqrt{15,87^2 - 7,4^2}$$

$$\Rightarrow h_p \approx 14,04 \text{ mm}$$

On peut ensuite calculer le volume de la pyramide à base carrée :

$$\Rightarrow \text{Volume pyramide à base carrée} = \frac{c^2 \times h}{3},$$

où c est la mesure du côté du carré et h la hauteur de la pyramide,

$$\text{Volume pyramide} \approx \frac{14,8^2 \times 14,04}{3}$$

$$\approx 1025,11 \text{ mm}^3$$

Le reste de la démarche de résolution est davantage de nature algébrique. Voici en quoi elle consiste :

$$\text{volume solide décomposable 1} = \text{volume prisme} + \text{volume pyramide}$$

$$= 13690 + 1025,11$$

$$= 14715,11 \text{ mm}^3.$$

On a maintenant tout ce qu'il faut pour trouver la mesure manquante, soit la hauteur du cylindre (notée h_c). Dire que les deux solides décomposables sont équivalents signifie qu'ils ont le même volume.

$$\text{Volume solide décomposable 1} = \text{Volume solide décomposable 2}$$

$$14715,11 = \text{Volume cylindre} + 2 \times \text{volume (demi-boule)}$$

$$14715,11 = \pi r^2 \times h_c + 2 \times \frac{\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right)}{2}$$

$$14715,11 = \pi \times 11^2 \times h_c + 2 \times \frac{\left(\frac{4\pi \times 11^3}{3}\right)}{2}$$

$$14715,11 = 121\pi \times h_c + \frac{5324\pi}{3}$$

$$\Rightarrow h_c = \frac{\left(14715,11 - \frac{5324\pi}{3}\right)}{121\pi}$$

$$h_c \approx 24,04 \text{ mm.}$$

Cet exemple montre l'importance de bien comprendre et de maîtriser convenablement les processus d'encodage et de décodage des représentations 2D d'un objet 3D. Il met en évidence le rôle de la visualisation spatiale et de la création d'images mentales dans cette maîtrise. De plus, l'exemple permet de se questionner sur l'articulation des habiletés spatiales (la visualisation et la représentation mentale de la rotation d'un solide) avec les connaissances spatiales en jeu (par ex : savoir situer la hauteur de la pyramide et l'angle droit qu'elle fait avec la base, savoir calculer l'apothème de la pyramide en utilisant la trigonométrie) pour résoudre le problème.

En bref, en lien avec notre objet de recherche, les trois exemples que j'ai présentés viennent appuyer ce qui a été relevé par d'autres chercheurs (Ben-Chaim, 1989; Colmez et Parzysz, 1993; Gutiérrez, 1992; Ma *et al.*, 2009), à savoir que les élèves (du secondaire) qui n'ont pas la maîtrise dont je viens de parler éprouveront des difficultés en résolution de problèmes de géométrie spatiale. Plus spécifiquement, des études menées par Parzysz (1988; 1991) et Colmez et Parzysz⁵ (1993) ont montré que des élèves âgés de 15-16 ans de Seconde en France éprouvent de grandes difficultés dans le processus d'encodage (produire une représentation 2D d'un objet 3D) et de décodage (interpréter correctement les éléments de la représentation 2D) en géométrie tridimensionnelle. Je viens d'illustrer que ce processus d'encodage / décodage, — qui sera précisé de manière détaillée dans le chapitre 2 — nécessite des compétences de raisonnement spatial. Or, dans une étude antérieure (Tremblay, 2016), j'ai argumenté que pour développer la capacité des élèves à comprendre et maîtriser les représentations 2D, il est pertinent de soutenir les habiletés de visualisation et de développer les connaissances spatiales.

Dans la communauté de recherche s'intéressant aux habiletés spatiales, des auteurs ont relevé l'utilisation du raisonnement spatial pour résoudre des problèmes de géométrie 2D et 3D (Duval, 2003; Parzysz, 2007; Mithalal, 2010). Ceci m'amène à investiguer sur ce qu'est le « raisonnement spatial », en lien avec mon domaine d'étude.

1.3 Le raisonnement spatial dans la résolution de problèmes de géométrie 3D

La locution « raisonnement spatial » est polysémique dans la littérature scientifique, et englobe plusieurs aspects. Par exemple, selon le *National Research Council* (2006), le raisonnement spatial met en jeu trois composantes, soit le concept d'espace, les outils de représentation et le(s) processus de raisonnement. Il implique la compréhension de relations au sein des structures spatiales (et entre

⁵ François Colmez et Bernard Parzysz ont procédé à une expérimentation dans des classes (six à chaque niveau) du CE2 à la Seconde (âges allant de 8 à 17 ans), portant sur plus de 1200 élèves et près de 1500 dessins. Ils ont étudié la façon dont les élèves gèrent le conflit « vu/su » (ainsi que l'évolution de cette gestion) dans la représentation d'un solide géométrique (pyramide à base carrée déposée sur le pupitre de l'enseignant) au moyen d'un dessin, la tâche étant explicitement une tâche de communication.

celles-ci) à travers une vaste gamme de représentations possibles (tout aussi bien des dessins que des modèles informatiques), ainsi que des moyens de communiquer à leur sujet.

D'autres chercheurs, tels que Battista (2007) et Clements et Battista (1992), définissent le raisonnement spatial comme la capacité à « voir », inspecter des objets, des images, des relations et des transformations spatiales, et à réfléchir :

Underlying most geometric thought is spatial reasoning, which is the ability to “see”, inspect, and reflect on spatial objects, images, relationships, and transformations. Spatial reasoning includes generating images, inspecting images to answer questions about them, transforming and operating on images, and maintaining images in the service of other mental operations (Clements & Battista, 1992; Presmeg, 1997; Wheatley, 1997). Thus, spatial reasoning provides not only the “input” for formal geometric reasoning, but critical cognitive tools for formal geometric analyses.⁶ (Battista, 2007, p. 843)

Des auteurs ont relevé que le raisonnement spatial constitue un facteur déterminant dans l'apprentissage des mathématiques (Verdine *et al.*, 2017; Cheng et Mix, 2012) mais plus généralement pour les disciplines STEM (Chastenay, 2015; Davis et The spatial reasoning study group, 2015; Wai *et al.*, 2009). Plus spécifiquement, le développement du raisonnement spatial peut jouer un rôle important dans le développement de l'apprentissage algébrique, du calcul mental, de la résolution de problèmes et de l'apprentissage en géométrie 2D/3D (Tolar *et al.*, 2009; Clements et Sarama, 2011; Kalogirou et Gagatsis, 2012; Battista, 2008). De plus, il est généralement présenté comme un objectif en soi dans les programmes mathématiques des écoles primaire et secondaire (pays anglo-saxons et francophones).

Au Québec, les auteurs du PFEQ (domaine de la mathématique) discutent du « sens spatial » qu'ils associent au raisonnement spatial (voir PFEQ, 2007). Voici un exemple illustrant mes propos :

⁶ Traduction : À la base de toute pensée géométrique est le raisonnement spatial, qui est la capacité de « voir », d'inspecter des objets spatiaux, des images, des relations et des transformations, et d'y réfléchir. Le raisonnement spatial comprend la génération d'images, l'inspection d'images pour répondre à des questions à leur sujet, la transformation d'images, la capacité à opérer sur ces images et à les garder au service d'autres opérations mentales (Clements et Battista, 1992; Presmeg, 1997; Wheatley, 1997). Ainsi, le raisonnement spatial fournit non seulement « l'input » pour le raisonnement géométrique formel, mais aussi des outils cognitifs cruciaux pour les analyses géométriques formelles.

L'élève du premier cycle reconnaît différents polyèdres convexes et sait représenter leur développement. Il identifie les différents solides qui constituent un solide décomposable. Il estime et détermine plusieurs mesures d'angles, de longueurs et d'aires en s'exprimant avec l'unité de mesure appropriée. Il construit les formules nécessaires au calcul de ces mesures et anticipe l'effet de la modification d'un paramètre dans une formule. À partir des constructions et des transformations qu'il réalise, il dégage des propriétés et des invariants. Il raffine sa compréhension des concepts d'isométrie et de similitude, ce qui lui permet de développer son sens spatial, de justifier sa démarche et de s'initier au raisonnement déductif. Il s'appuie sur des définitions et des propriétés pour déterminer des mesures manquantes. (MELS, 2007, p. 61)

L'importance du sens spatial (au sens de raisonnement spatial) en mathématiques dans les écoles québécoises est reconnue, mais le niveau d'intégration spécifique dans le curriculum n'est pas aussi détaillé que celui des pays anglo-saxons (Marchand, 2009b; 2020). Toutefois, le référentiel d'intervention en mathématique – RIM (MELS, 2019) peut aider les enseignants à intégrer des stratégies qui favorisent le développement du raisonnement spatial chez les élèves, contribuant ainsi à améliorer leurs performances en mathématiques.

En lien avec le raisonnement spatial, le développement des connaissances spatiales fait partie depuis toujours des programmes de formation en mathématiques (plus ou moins implicitement inclus dans l'expression « sens spatial »), au primaire comme au secondaire. Cependant, elles n'y sont pas nécessairement intégrées d'une manière constante ou aussi approfondie d'une réforme scolaire à l'autre (Marchand, 2019). Or, globalement, les connaissances spatiales et le raisonnement spatial ont été négligés par les programmes de formation dans plusieurs pays (Verdine *et al.*, 2017; Moss *et al.*, 2016). Ainsi, dans un tel contexte, le raisonnement spatial ne semble pas facile à acquérir autant pour les élèves du primaire que pour ceux du secondaire, et beaucoup d'entre eux ont des difficultés avec cet apprentissage (Mithalal, 2014; Salin, 2008; Clements 1999; 2003; Parsysz, 1988). Voici des exemples des difficultés répertoriées par Marchand (2019) :

Pupils have difficulty locating and locating objects in space, with anticipating the result of an isometric transformation, imagining a decomposable solid and imagining the hidden cubes in the stack of cubes or interpreting a 2D representation of a 3D object. However, we are currently noticing that there is a significant shift being made in many countries to enhance the development of spatial reasoning in class and the benefits of this type of reasoning in the school career of students, especially pupils in primary levels (Davis & The spatial reasoning study group, 2015; Verdine *et al.*, 2017). (Marchand, 2019, p. 343)⁷

Bien que le raisonnement spatial ne soit généralement pas mis en évidence au-delà de certains domaines des sciences et des mathématiques, il est souvent identifié comme un élément central du fonctionnement des mathématiques (par exemple, Thurston, 1995; Burton, 2004; Whiteley, 2005; Sinclair et Gol Tabaghi, 2010).

Dans le cadre de notre thèse, voici une première définition de raisonnement spatial : la capacité à mobiliser les habiletés spatiales pour reconnaître, générer des objets 3D ou leurs représentations (mentales ou concrètes), à opérer et réfléchir sur ces objets et leurs représentations. Nous discuterons de ce que nous entendons par « habiletés spatiales » plus loin, en §1.5.

La prochaine section cherchera à clarifier, voire à caractériser ce qu'est un problème en géométrie spatiale, en lien avec notre objet de recherche.

1.4 La résolution de problèmes en contexte de géométrie spatiale

Dans le cadre de ma recherche, je veux développer une séquence d'enseignement à l'aide de l'approche méthodologique dite du *Design Research* (Cobb et Gravemeijer, 2008 ; Edelson, 2002). Elle sera centrée sur des problèmes nécessitant des habiletés spatiales (dont la visualisation) et des connaissances spatiales, entre autres liées aux processus de décodage/encodage des représentations 2D des objets 3D. Pour y arriver, j'ai besoin de réaliser une expérimentation en classe avec des

⁷ Traduction : Les élèves éprouvent des difficultés à se localiser et à localiser des objets dans l'espace, à anticiper le résultat d'une transformation isométrique, à imaginer un solide décomposable et à imaginer les cubes cachés dans une pile de cubes ou à interpréter une représentation 2D d'un objet 3D. Cependant, nous constatons présentement qu'un changement important est en train de se produire dans de nombreux pays pour favoriser le développement du raisonnement spatial en classe et augmenter les avantages de ce type de raisonnement dans le parcours scolaire des élèves, en particulier ceux du primaire (Davis & The spatial reasoning study group, 2015; Verdine *et al.*, 2017).

élèves du secondaire afin « d’observer » ce qui se produit lorsqu’ils résolvent ces problèmes, quels sont alors les démarches et raisonnements mis en œuvre et quels sont les processus d’apprentissage déclenchés. En conséquence, une première définition ou caractérisation de la notion de « problème » s’impose, dans ce cadre de la géométrie spatiale. Dans un premier temps, je vais identifier ce qu’en disent les auteurs du programme de formation de l’école québécoise – domaine de la mathématique (MELS, 2006). Puis, je vais répertorier ce qu’en dit la communauté de recherche en didactique des mathématiques.

1.4.1 La notion de « problème » dans le PFEQ – domaine de la mathématique

Historiquement au Québec, la notion de « problème » et ses multiples fonctions (par exemple : appliquer des connaissances, permettre la construction de nouvelles connaissances, développer des heuristiques, etc.) dans l’apprentissage et l’enseignement des mathématiques a évolué au fil du temps selon les réformes des programmes d’études des différentes instances ministérielles en place (voir Lajoie et Bednarz, 2014). Voici par exemple la définition de *problème*, telle que proposée dans le Fascicule K (MEQ, 1988) :

Pour un élève ou un groupe d'élèves, un problème en mathématiques est une situation où :

- il tente de répondre à une question posée ou d’accomplir une tâche déterminée, à la lumière de son expérience, ainsi que des informations qui lui sont fournis explicitement ou non,
- il lui faut réellement chercher pour trouver un moyen de répondre à cette question ou d’accomplir cette tâche,
- il doit faire appel à des mathématiques ou à des habiletés intellectuelles fréquemment utilisées en mathématiques pour y arriver (MEQ, 1988, p. 11).

Cette évolution du sens de la notion de problème est identifiée par Lajoie et Bednarz (2016) comme « le passage de la notion de problème à celle de situation-problème ». (*op. cit.*, p. 2).

Les auteurs du PFEQ pour le programme de 2006 présentent la notion de « situation-problème », alors que je veux investiguer ce qu’est un « problème ». Je précise que ce déplacement sémantique de « problème » à « situation-problème » est un choix des auteurs du PFEQ, une façon pour eux de mettre l’accent sur le développement des compétences, choix que rejoint plusieurs réformes

curriculaires tant au Québec que dans d'autres pays du monde. Lajoie et Bednarz (2016) expliquent :

C'est dans ce contexte particulier qu'apparaît la notion de « situation-problème » dans le Programme de formation de l'école québécoise, plus précisément par le biais d'une des trois compétences disciplinaires, soit « résoudre une situation-problème » (les deux autres étant « déployer un raisonnement mathématique » et « communiquer à l'aide du langage mathématique »). (Lajoie et Bednarz, 2016, p. 3)

Après une lecture attentive du programme de formation, je constate que les auteurs ne nous renseignent pas explicitement sur ce qu'ils conçoivent par « problème », car ils ont retenu le concept de « situation-problème ». Ils caractérisent une situation-problème ainsi :

En mathématique, une situation-problème doit satisfaire à l'une ou l'autre des conditions suivantes :

- la situation n'a pas été présentée antérieurement en cours d'apprentissage;
- l'obtention d'une solution satisfaisante exige le recours à une combinaison non apprise de règles ou de principes dont l'élève a fait ou non l'apprentissage;
- le produit, ou sa forme attendue, n'a pas été présenté antérieurement. (MELS, 2006, p. 19)

Pour ces auteurs, la résolution d'une situation-problème constitue un processus dynamique qui nécessite de nombreux allers-retours et fait appel à l'anticipation, au discernement et au jugement critique. De plus, ces auteurs nous informent que les situations-problèmes « varient selon les buts poursuivis par l'élève et l'enseignant » (p. 19). Voici d'autres caractéristiques des situations-problèmes :

Dans tous les cas, elles doivent susciter un conflit cognitif ou un besoin de résolution, permettre l'intégration de différents savoirs ou se prêter à l'exploitation de liens qui favorisent le transfert des apprentissages. (MELS, 2006, p. 19)

Voici quelques exemples décrits dans le PFEQ (2006) qui illustrent comment la compétence en résolution de situations-problèmes peut s'exercer dans le domaine de la géométrie.

En géométrie, l'élève qui décode une situation-problème fait appel à son sens spatial et à son sens de la mesure pour dégager la tâche à réaliser et explorer des pistes de solution. Il se donne une image mentale des figures qui font partie de la situation-problème. Il représente de diverses façons des objets en deux ou trois dimensions en s'aidant, au besoin, d'instruments ou de logiciels de géométrie. Dans l'élaboration d'une solution où il doit chercher des mesures manquantes de longueurs, d'aires ou de volumes, afin de les optimiser s'il y a lieu, il met à profit des définitions, des propriétés ou des relations en manipulant des expressions numériques et algébriques. Il structure et justifie les étapes de sa démarche à l'aide de propriétés et d'énoncés admis. Il s'assure que le résultat qu'il obtient est plausible d'après le contexte et l'exprime avec l'unité de mesure appropriée. Il profite du moment consacré à l'échange de solutions pour enrichir son réseau de relations et de stratégies. (MELS, 2006, p. 21)

Je précise que dans le PFEQ, il est prévu que l'élève développe la compétence « Résoudre une situation-problème » tandis que dans ma recherche, je m'intéresse davantage à la résolution de « problèmes ». Ainsi, je veux investiguer le processus de résolution que met en œuvre l'élève dans un problème de géométrie où les habiletés spatiales sont mises en interaction avec les connaissances spatiales. Je ne retiens pas la définition de « situation-problème » proposée par les auteurs du PFEQ parce qu'elle ajoute au simple « problème » des nuances qui sont inutilement compliquées pour le présent projet.

La prochaine section traitera de la notion de « problème » du point de vue de la recherche.

1.4.2 La notion de « problème » dans la littérature scientifique

Qu'est-ce qu'un problème en mathématiques ? Avant d'aborder ce qu'en dit la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques, je vais recourir à l'étymologie du mot « problème ». Selon le dictionnaire historique de la langue française (Rey, 2016), ce substantif provient du latin *problema* (question à résoudre) emprunté vers 1380 au grec *problêma*, qui désigne ce que l'on a devant soi, spécialement un obstacle, un sujet de controverse, une question à résoudre. Le mot est dérivé de *proballein*, composé de *pro* (devant) et de *ballein* (jeter), ce qui signifie *jeter devant* et, par abstraction, *mettre en avant comme argument, proposer une question*.

Pour Brousseau (1983; 1998), les problèmes (qui sont, dans ses travaux, intégrés à ce qu'il nomme les *situations*) sont au cœur du dispositif mathématique. L'enseignant, selon Brousseau, a pour rôle de proposer ces problèmes à travers des situations qui doivent permettre à l'élève de construire par lui-même le savoir mathématique.

Poser un problème consiste à trouver une situation avec laquelle l'élève va entreprendre une suite d'échanges relatifs à une même question qui fait « obstacle » pour lui, et sur laquelle il va prendre appui pour s'approprier, ou construire, une connaissance nouvelle (Brousseau, 1983, p. 178).

Dans leur étude portant sur l'évolution de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques au Québec, Bednarz et Lajoie (2012, p. 181) précisent que :

Les travaux de recherche en didactique des mathématiques se sont intéressés à la nature des problèmes, aux différents types de tâches, routinières et non routinières, qui offrent aux élèves des opportunités de construire et d'expérimenter le pouvoir d'une certaine activité mathématique (Arsac, Germain et Mante, 1988; Brousseau, 1983; Coffin, Dupraz, Manin et Payan, 2006; Douady, 1987; Grenier et Payan, 1998; Lunkenbein, 1984-1985; Mason, 1994).

Une conception du problème amène à évoquer l'idée de *défi*, c'est-à-dire de situation qui défie les connaissances mathématiques de l'élève. D'après Brousseau, « il y a problèmes lorsqu'on peut apporter des réponses par des raisonnements. Il faut qu'il y ait quelque chose à chercher et qu'il ne soit pas possible d'utiliser la mémoire seule » (Brousseau, 1998, p. 156).

Dans le même sens, Brun (1999) précise que :

Dans une perspective psychologique, un problème est généralement défini comme une situation initiale avec un but à atteindre, demandant au sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but.

... Il n'y a problème que dans un rapport sujet/situation, où la solution n'est pas disponible d'emblée mais possible à construire. C'est dire aussi qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur développement intellectuel par exemple. (Brun, 1999, p. 143)

D'autres chercheurs (Newell et Simon, 1972) proposent que tout problème comporte trois caractéristiques : un état initial qui décrit les éléments de la situation au début du problème, un état final (la solution) et des états intermédiaires. Pour ces auteurs, la résolution fait passer de l'état initial à l'état final par bonds successifs, en fonction des connaissances et des stratégies mises en œuvre.

Trois attributs caractérisent un problème à résoudre selon Mayer (1977; 1992) : a) un état initial – le problème commence par une situation de départ jugée insatisfaisante; b) un état-objectif – la situation désirée (et poursuivie) est différente de la situation de départ et il est nécessaire de réfléchir pour transformer l'état initial; c) des obstacles – la façon de passer de l'état initial à l'état-objectif n'est pas connue et n'est pas évidente. Ainsi pour cet auteur, la résolution de problèmes se produit lorsqu'est déterminé comment résoudre le problème, c'est-à-dire comment passer avec succès de l'état initial à l'état-objectif.

Les problèmes peuvent aller de « trouver quel nombre ajouter à 29 pour obtenir une somme de 73 » pour un élève du 1^{er} cycle du primaire, à « résoudre l'hypothèse de Riemann » pour un mathématicien professionnel. Dans les deux cas, il y a un obstacle qui ne permet pas d'emblée de structurer conceptuellement la nature et la compréhension du problème. Dans l'un ou l'autre de ces cas, il y a un manque de connexion cruciale, de connaissance conceptuelle, ou le manque d'une approche algorithmique appropriée, et ces manques déstabilisent celui qui résout. Dans d'autres cas, ce peut être le manque de connaissance d'un théorème (un principe, une propriété, une généralisation), un blocage émotionnel, ou un défaut d'accès aux outils, qui crée l'obstacle entre celui qui résout et la solution. En raison d'un ou de plusieurs de ces obstacles, la situation peut persister et le problème n'est pas résolu. Selon la motivation de celui qui résout — un autre obstacle quand elle n'y est pas — il peut ou non revenir à un autre moment pour réessayer de résoudre le problème (Funke, 2010).

1.4.3 La notion de « problème » en géométrie spatiale

Nous faisons le constat que les chercheurs ne définissent pas systématiquement ce qu'est un problème en géométrie spatiale (voir Buckley *et al.*, 2019; Escueta, 2015; Gorgorio, 1996; Hartmann et Reiss, 2018; Hegarty et Kozhevnikov, 1999; Owens et Outhred, 2006; Weckbacher, 2007). En fait, ces auteurs exposent plutôt les rôles des habiletés spatiales comme outils pour résoudre des problèmes dans l'espace. Par exemple, des chercheurs ont relevé que lorsqu'il s'agit de résoudre un problème de l'espace, la capacité à mettre en œuvre les habiletés spatiales, dont la visualisation, est souvent citée comme un « outil » puissant qui aide à la représentation (Denis, 1991; Kosslyn et Koenig, 1992; Piaget et Inhelder, 1966). Ici, le sens attribué à « représentation » concerne l'habileté de visualisation mentale.

Weckbacher (2007) soutient dans sa thèse doctorale que la résolution de problèmes géométriques dans l'enseignement primaire et secondaire est largement négligée, malgré un important besoin (Kozhevnikov *et al.*, 1999 ; 2002), et a tendance à être le domaine de contenu le plus faible pour les élèves américains (tests nationaux NAEP et TIMSS⁸), tout particulièrement en géométrie spatiale. L'objet de son étude est de décrire plus en détails le fonctionnement de la visualisation en tant qu'outil de résolution de problèmes géométriques. L'étude montre que les individus enclins à utiliser la visualisation ont tendance à résoudre plus efficacement des problèmes de géométrie.

1.4.4 La notion de « problème » dans la thèse : première caractérisation

À la lumière de ce qui a été discuté jusqu'à maintenant et selon ma compréhension de ce qu'est un « problème » en géométrie, voici une première caractérisation de « problème », dans le contexte de l'enseignement de la géométrie spatiale :

- l'élève doit être confronté à une question de géométrie spatiale avec un but à atteindre, et pour laquelle la démarche et la solution ne sont pas connues d'emblée (Brun, 1999; Mayer, 2010);
- un problème de géométrie n'est pas un exercice routinier ou d'application (Fascicule K, MEQ, 1988);
- le problème exige de l'élève qui résout une suite d'actions (ou opérations) pour atteindre ce but (recherche d'une solution);
- puisque les connaissances et les habiletés de chacun diffèrent, un problème est toujours relatif à l'élève qui cherche à le résoudre (Schoenfeld, 1985).

⁸ Le *National Assessment of Educational Progress* (NAEP) est la plus grande évaluation continue et représentative au niveau national de ce que les élèves américains savent et peuvent faire dans diverses matières. Le *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) est une enquête internationale sur les acquis scolaires, coordonnée par l'*International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA). Elle porte sur les mathématiques et les sciences.

À la suite de ma discussion sur les habiletés spatiales, le raisonnement spatial et la mobilisation des connaissances spatiales intervenant dans la résolution de problèmes de géométrie spatiale, une première clarification s'impose sur ces différentes notions : ce sera l'objet de la prochaine section.

1.5 Des habiletés à préciser

Ma recherche part de l'hypothèse que la résolution de problèmes occupe une place centrale pour expliquer la mise en fonctionnement conjointe des habiletés spatiales et des connaissances spatiales. À la suite du constat des difficultés présentées antérieurement dans ce texte, j'affirme que les élèves ont besoin de développer des habiletés spatiales et des connaissances spatiales, et d'apprendre à les coordonner efficacement.

1.5.1 Premières définitions : habiletés spatiales et connaissances spatiales

Souvent décrites par une liste de caractéristiques qui les sous-tendent, les habiletés spatiales sont rarement définies comme un concept en soi. Quelques auteurs proposent une définition unique : Linn et Peterson (1985) les décrivent au singulier "spatial ability" : "skill in representing, transforming, generating and recalling symbolic, nonlinguistic information" (Linn et Petersen, 1985, p. 1482). Lohman fait état d'une capacité à « générer, conserver, récupérer et transformer des images visuelles bien structurées » (Lohman, 1993, p. 3, notre traduction) et Carroll mentionne :

individuals' abilities in searching the visual field, apprehending the forms, shapes, and positions of objects as visually perceived, forming mental representations of those forms, shapes, and positions, and manipulating such representations "mentally".
(Carroll, 1993, p. 304)⁹

Dans les trois descriptions, il s'agit de reconnaître, créer et transformer des formes et des objets mentalement.

⁹ Les habiletés des individus à explorer le champ visuel, à appréhender les formes, les contours, les positions des objets tels qu'ils sont visuellement perçus, à former des représentations mentales de ces formes, contours et positions et à manipuler ces représentations 'mentalement' (notre traduction).

Parmi ceux identifiés par la littérature traitant des habiletés spatiales, les éléments les plus fréquemment cités sont la visualisation spatiale (Carroll, 1993; Connor et Serbin, 1980; Duroisin, 2015; French, 1951; Linn et Petersen, 1985; Lohman, 1988; Maier, 1996; McGee, 1979; Michael *et al.*, 1957; Tartre, 1990; Thurstone, 1950) et la capacité à opérer des transformations spatiales telles que rotation mentale, projections, reconfigurations, etc. (Connor et Serbin, 1980; Duroisin, 2015; French, 1951; Lohman, 1988; Maier, 1996; McGee, 1979; NRC, 2006; Tartre, 1990; Thurstone, 1950).

Ainsi, dans ma recherche, les habiletés spatiales comporteront deux aspects interreliés : la visualisation spatiale et les transformations spatiales.

1) La **visualisation spatiale** se présenterait sous deux catégories : la *visualisation externe* est la perception par la vue d'un objet réel ou d'un objet donné par une représentation 2D, tandis que la *visualisation interne (ou mentale)* se réaliserait par la construction d'images mentales, d'abord à partir d'une ou plusieurs visualisations externes, ensuite issue de la mémorisation de ces visualisations externes, et finalement à un stade plus avancé à partir de l'imagination qu'on peut avoir de possibles visualisations externes.

2) Les **transformations spatiales** relèvent de la capacité à imaginer et manipuler mentalement les transformations appliquées à des objets sur lesquels la visualisation spatiale s'est exercée, telles que la rotation mentale, des reconfigurations, des déplacements, des découpages-réorganisations, des projections, l'anticipation de changements de l'orientation spatiale, etc.

Les **connaissances spatiales**, elles, concerneraient les aspects suivants :

- les notions de plan, droite, parallélisme, perpendicularité, angle, relations d'incidence, le découpage des objets 3D (Tremblay, 2016);
- les propriétés liées à ces notions et leurs interrelations (par ex. « deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles »);
- une banque d'objets géométriques standardisés (polyèdres et corps ronds) (Tremblay, 2016);
- les propriétés de ces objets 3D et leurs interrelations;
- les règles et conventions de représentation de ces objets (Tremblay, 2016).

Je fais l'hypothèse de travail que la visualisation et les connaissances spatiales interviennent nécessairement dans l'apprentissage des processus d'encodage et de décodage des représentations 2D des objets spatiaux chez l'élève du secondaire.

1.6 Problème de recherche

Dans les prochaines lignes, je vais procéder à une synthèse des éléments montrant qu'il y a une difficulté réelle chez l'élève du secondaire qui doit résoudre des problèmes de géométrie de l'espace, et je chercherai à mettre en évidence l'importance des habiletés et connaissances spatiales en jeu.

Des recherches insistent sur les rôles possibles des habiletés spatiales dans l'apprentissage de la géométrie 3D et la réussite en résolution de problèmes (Markey, 2009; Lowrie *et al.*, 2016; Pittalis et Christou, 2013). D'autres chercheurs ont réalisé des études sur les connaissances spatiales impliquant soit la visualisation (Johnson-Laird, 1998; Presmeg, 2008), soit les représentations (images) mentales d'objets 3D (Halpern *et al.*, 2015). Ces études suggèrent que la visualisation spatiale (générant des images mentales) et les connaissances spatiales se développeraient de manière interdépendante. Des chercheurs ont étudié le volume et ses formules du point de vue de l'enseignement, et ont proposé soit des séquences d'enseignement (Revina *et al.*, 2011; Janvier, 1994; 1997), soit des démarches cherchant à minimiser les difficultés des élèves face à l'apprentissage du volume (Tanguay, 2010). Des recherches soulignent que l'étude des connaissances spatiales (plan, droite, parallélisme, perpendicularité, angles, angles droits, relations d'incidence, etc.) doit être articulée entre la géométrie plane et la géométrie spatiale (Furtuna *et al.*, 2012).

Des recherches ont démontré l'utilité dans l'apprentissage des mathématiques d'avoir recours au visuel, à des dessins et à des représentations 2D d'objets 3D pour faire comprendre divers concepts mathématiques aux élèves, et pas seulement en géométrie (Eisenberg et Dreyfus, 1989). Encore faut-il que les élèves soient capables de décoder et comprendre ces représentations qu'on leur propose. Il faut pour cela que l'on puisse enseigner certaines techniques de représentations spécifiques (ex. : perspective cavalière, vues de face, droite, dessus, ...) leur permettant de développer leur habileté à représenter les objets de l'espace. Et où réaliser cela si ce n'est par exemple à travers la résolution des problèmes de géométrie spatiale au secondaire ? Cela suggère

qu'il est pertinent de créer des séquences d'enseignement incluant des « problèmes », que les élèves pourraient résoudre en s'appuyant sur leurs habiletés spatiales et sur leur mise en fonctionnement conjointe avec les connaissances spatiales.

Au sujet de la représentation des objets 3D, Parzysz (1988; 1991; 2007) ainsi que Colmez et Parzysz (1993) ont mis en évidence, chez l'élève du secondaire, le conflit entre le voir (visualisation externe) et le savoir (connaissances spatiales). À l'encodage, les élèves essaient de conserver au maximum, dans la représentation 2D, les informations qu'ils connaissent de l'objet 3D, en déformant parfois pour cela l'aspect visuel que devrait avoir l'objet en 2D. Lors du décodage, à l'inverse, ils transfèrent à l'objet 3D certaines propriétés géométriques de la représentation 2D qui ne sont pas nécessairement vérifiées par l'objet réel. Ces conflits « vu/su » font partie des difficultés — et peuvent parfois en être la cause — que nous avons exposées antérieurement dans la problématique (voir §1.2.1 et §1.2.2).

Des résultats de recherches empiriques (Marchand et Braconne-Michoux, 2013) au niveau de l'enseignement à l'école primaire montrent que le développement des connaissances spatiales et des habiletés spatiales (plus spécifiquement, la visualisation spatiale) peut être important pour les élèves, mais nous commençons tout juste à avoir des informations sur la façon de les développer en classe et sur les lignes directrices qui soutiennent ce développement (voir par ex. Davis and The Spatial Reasoning Study Group, 2015; Marchand, 2020). En ce sens, ce développement est une avenue prometteuse, mais nous manquons encore d'informations sur les moyens de le promouvoir en classe aux niveaux primaire et secondaire (Marchand et Sinclair, 2017; Marchand et Braconne-Michoux, 2013). S'il existe un certain nombre d'outils d'enseignement disponibles pour le primaire (ex. : le Spatial Reasoning Instrument (SRI) de Ramful *et al.* (2017) servant à évaluer les habiletés spatiales; l'outil théorique « structure génératrice d'activités » (SGA) élaborée par Marchand (2020) qui a pour objectif d'approfondir la réflexion théorique entourant le développement des connaissances spatiales et des habiletés spatiales à l'école en proposant certaines balises issues des travaux en didactique des mathématiques, en psychologie et en éducation physique) visant à supporter l'apprentissage de la géométrie spatiale ou plus globalement, pour le développement des habiletés spatiales (Marchand, 2006; Marchand et Bisson, 2017; Bessot, 1994; CREM, 2001...), il en va autrement au secondaire, où de tels outils sont très peu développés (Lowrie *et al.*, 2016; Parzysz, 1991).

De plus, des difficultés sont liées aux connaissances spatiales. En effet, l'apprentissage de la géométrie chez les élèves du secondaire repose sur une structuration de l'espace qui dépend étroitement de leurs connaissances spatiales (Marchand et Bisson, 2017; Battista, 2007; Parzysz, 2007). En classe de mathématiques de niveau secondaire (12 à 17 ans), des chercheurs (Marchand, 2004; Marchand et Braconne-Michoux, 2013) précisent qu'il y a peu d'outils disponibles pour soutenir les enseignants dans l'enseignement des connaissances spatiales de manière globale. Ce manque d'outils se traduit par une lacune au point de vue de la continuité d'un niveau scolaire à l'autre, à l'intérieur des programmes de formation de mathématiques des niveaux primaires et secondaires (Marchand, 2004). Cette réalité reflète le contexte québécois, mais des résultats semblables ont été observés en France par Berthelot et Salin (1993).

Les différents rôles que peuvent jouer les habiletés spatiales (par ex. la visualisation mentale) et les connaissances spatiales (par ex. celles à l'aide desquelles on élabore des représentations 2D selon des techniques établies) dans l'apprentissage de la géométrie 3D au secondaire sont mal compris. Des recherches (Duroisin, 2015; Lowrie *et al.*, 2016; Mithalal, 2010; 2014) soulignent les difficultés qu'éprouvent les élèves en résolution de problèmes quand des solides faisant appel aux connaissances spatiales et à la visualisation sont en jeu, entre autres vis-à-vis leur encodage dans une possible représentation 2D, ou le décodage d'une telle représentation (Pittalis et Christou, 2013).

Dans les manuels scolaires québécois du secondaire, notamment en 3^e secondaire, où le sens spatial détient une plus grande importance que la 4^e et 5^e secondaire (voir programme de mathématique du 2^e cycle du MELS (2007)), les outils présentés pour son enseignement se limitent à une description des systèmes de représentation des objets de l'espace (ex. : perspective cavalière, perspective à 1 et 2 points de fuite, vues de face, de droite, de gauche, etc.) ainsi que des exercices d'application. De plus, le temps consacré à l'enseignement du sens spatial en 3^e secondaire est limité à 3 périodes de 75 minutes, selon les recommandations des guides pédagogiques produits par les auteurs des manuels scolaires (voir les collections Intersection mathématique, Grand Duc et Vision mathématique), ce qui semble minimal pour assurer le développement de sens spatial (voir Marchand, 2020).

Je conclus que les outils d'enseignement disponibles sont majoritairement pour le primaire et donc, qu'il y a un manque à cet égard pour le secondaire. De plus, les connaissances spatiales à acquérir et les habiletés spatiales à développer au secondaire dans le cadre de la géométrie tridimensionnelle sont plus pointues, et doivent être en phase avec celles de la géométrie plane (2D) (Furtuna *et al.*, 2012), un problème qui ne se pose pas de façon aussi aiguë au primaire.

Voici donc le **problème de recherche** : en résolution de problèmes, la mise en fonctionnement des habiletés spatiales, des connaissances spatiales et des connaissances géométriques — en particulier du point de vue de leur coordination — que l'élève fait intervenir, autant chez celui qui solutionne convenablement des problèmes spatiaux que chez celui qui éprouve des difficultés, doit être analysée et mieux comprise. Comment peut-on décrire et caractériser cette mise en fonctionnement ? En quoi les problèmes spatiaux soumis aux élèves, les solutions qu'ils élaboreront et les stratégies qu'ils mettront en œuvre pour résoudre, peuvent-ils aider à investiguer et mieux comprendre le rôle joué par les habiletés spatiales, les connaissances spatiales, les connaissances géométriques et leurs interactions ?

CHAPITRE 2

CADRE THÉORIQUE

Dans ce 2^e chapitre, je vais proposer, dans un premier temps, une analyse des concepts clés liés à ma recherche, puis dans un deuxième temps je vais établir les assises théoriques encadrant mon problème de recherche.

Au chapitre 1 de la thèse, j'ai exposé le problème de l'habileté de « visualisation spatiale » et des connaissances spatiales en géométrie 3D (§1.2) se manifestant par les difficultés suivantes :

- difficulté à identifier les constituants d'un objet 3D et à décoder la représentation 2D d'un objet 3D (§1.2.1);
- difficulté à se construire une image mentale (§1.2.2);
- difficulté à dessiner un objet 3D lorsque le problème n'est donné qu'en mots (§1.2.2).

J'ai montré que ces difficultés amènent le besoin d'investiguer sur le *modus operandi* des habiletés spatiales en interaction avec les connaissances spatiales (plus particulièrement en ce qui a trait aux processus de décodage/encodage des représentations 2D des objets 3D) dans un contexte de résolution de problèmes en géométrie spatiale. Ceci m'amène à définir et analyser les concepts-clés qui seront utilisés dans cette recherche : 1) le sens spatial; 2) les habiletés spatiales; 3) les connaissances spatiales et les connaissances géométriques; 4) les images mentales, représentations mentales, représentations comme signifiants d'un signe, différences entre figure, dessin et représentations; 5) « problème » en géométrie spatiale; 6) le conflit « vu/su ».

2.1 Le sens spatial

Lorsque les chercheurs font référence au sens spatial, ils le décrivent comme une forme d'intuition des figures 2D et 3D (Cabot-Thibault, 2013; Del Grande, 1990; Hoffer, 1977; Khin et Wai Oo,

2020; NCTM, 2000) et les relations qu'il peut y avoir entre de telles figures (Sarama et Clements, 2009, cité dans Walle *et al.*, 2013).

Dans mon étude, le sens spatial est un concept parapluie qui englobe les habiletés spatiales, l'imagerie mentale et leurs interrelations ainsi que la structuration de l'espace. Celle-ci est associée à l'abstraction et au raisonnement grâce à la perception ou la mémoire (voir par ex. Dersoir, 2015).

L'imagerie mentale peut être considérée comme un mécanisme cognitif qui permet de se représenter des objets (concrets ou abstraits) à travers des images mentales formées à partir de processus multisensoriels (visuelles, tactiles), ou des représentations mentales d'objets perçus ou remémorés. L'imagerie mentale implique aussi la mémorisation des images mentales et la convocation de celles-ci lors de résolution de problèmes en géométrie (voir par ex. Jones et Bills, 1998). J'expliquerai ultérieurement ce qu'est une image mentale dans ma recherche.

Dans le cadre de la présente recherche, posséder ou développer un « bon » sens spatial peut se présenter sous les aspects suivants :

- observer et visualiser (images mentales) les objets 2D/3D et leurs propriétés de manière discriminante, par exemple, les changements de position, de taille, de forme, les relations entre les objets;
- opérer des transformations spatiales telles que des translations, rotations, réflexions, reconfigurations, etc.;
- générer des informations qui ne peuvent pas être observées directement, par exemple déduire des relations d'incidences dans des parties « cachées » d'un solide, déterminer des distances, des superficies, des volumes, etc.;
- décrire et représenter des objets spatiaux en 2D/3D sur une feuille de papier ou sur un écran numérique;
- interpréter des représentations 2D d'objets 3D (ex. : dessins en perspective).

En m'appuyant sur les principes et normes du NCTM (2000), j'ajoute que le sens spatial implique l'utilisation de la visualisation, du raisonnement spatial et de la modélisation géométrique en 2D et 3D. De plus, pour avoir un sens spatial adéquatement développé, un individu doit aussi maîtriser l'espace dans lequel il vit, et construire de façon concomitante des connaissances spatiales, celles qui lui permettront d'agir et de communiquer dans son environnement spatial. Voici des exemples de connaissances spatiales :

- savoir lire (décoder), savoir écrire — au sens de tracer — (encoder) et savoir utiliser les plans d'un édifice, d'une salle d'un quartier, etc. (Berthelot et Salin, 1992; 1993; Weill-Fassina et Rachedi, 1993);
- savoir se repérer dans l'espace;
- être capable d'interpréter une représentation 2D (par ex. prise en compte des faces cachées d'un objet 3D) (Marchand, 2020).

J'expliquerai ultérieurement dans la thèse la *caractérisation* des connaissances spatiales. Auparavant, je vais présenter les définitions de plusieurs chercheurs à propos des habiletés spatiales ou *spatial ability*, et expliquer ce que j'en retiens dans le cadre de ma recherche.

2.2 Le concept « habiletés spatiales » ou *spatial abilities*

Avant de définir le concept « habiletés spatiales », il est nécessaire de clarifier le sens du vocable « ability » afin de lever l'ambiguïté lorsqu'il est utilisé chez les chercheurs. Le terme anglais « ability » possède des significations différentes lorsqu'il est traduit en français. En effet, selon des chercheurs (De Landsheere, 1979; Legendre, 2005), *ability* peut être traduit par les termes « capacité », « aptitude », « habileté » et parfois, il est lié au concept de compétence (par ex. Cauchy, 1995; Wolf, 1998), ce qui rend difficile d'en donner une définition claire.

2.2.1 La signification du terme *ability*

2.2.1.1 *Ability* traduit par « habileté »

Le terme « habileté » semble davantage relever du savoir-faire et ressemble au terme de « compétence » (Matri, 2020). Pour Legendre (2005), une « habileté » rappelle « un objet d'apprentissage qui se réfère à l'utilisation efficace de processus cognitif, affectif, moral, moteur, etc. relativement stables, dans la réalisation efficace d'une tâche ou d'un agir » (*op. cit.*, p. 371). Pour cet auteur, le terme « habileté » est plus spécifique que le terme « capacité » et est centré sur une tâche facilement identifiable. Legendre (2005) ajoute que l'habileté réfère à l'application, à la pratique; tandis que la capacité, à l'étendue des aptitudes et des connaissances.

Dans les programmes d'études, les habiletés font référence à des éléments du savoir codifié (c'est-à-dire, le savoir prescrit par les instances officielles), organisés pour être utilisés tels quels (Jonnaert, 2009).

En apprentissage par résolution de problèmes, Laforest (1984-1985) précise que le terme « habileté » veut dire « capacité de mettre en œuvre adéquatement une série de processus mentaux ou d'utiliser à bon escient des connaissances pour attaquer et vaincre un problème » (*op. cit.*, p. 28).

2.2.1.2 *Ability* traduit par « capacité »

Pour Gérard et Roegiers (1993), une capacité est l'actualisation d'un savoir-reproduire¹⁰, d'un savoir-faire ou d'un savoir-être qui permet la réalisation de performances. Celles-ci sont, dans le contexte de l'apprentissage, la plupart du temps des performances scolaires (*op. cit.*, p. 66).

¹⁰ Voici ce que signifie savoir-reproduire, savoir-faire et savoir être selon ces auteurs : « Les savoir-reproduire consistent à pouvoir redire ou refaire un message, un geste, un acte appris ou donné, sans y apporter de transformation significative. La situation dans laquelle s'exerce l'activité est semblable à celle dans laquelle s'est réalisé l'apprentissage. Les savoir-faire nécessitent par contre un travail de transformation d'un message, d'un geste, d'un acte donné ou non donné. La situation dans laquelle ils s'exercent n'est pas structurellement semblable à la situation qui a servi à leur apprentissage. Les savoir-être manifestent quant à eux la façon d'appréhender sa propre personne, les autres, les situations et la vie en général, dans sa manière de réagir et d'agir. C'est la façon de se comporter face au changement, d'aborder une situation nouvelle. Il s'agit en fait de comportements qui s'installent dans l'habituel. » (Gérard *et al.*, 2000, p. 2).

Afin de mieux circonscrire le concept de capacité, Jonnaert (2009) fait un détour par celui de schème, défini par Vergnaud (1991). Pour ce dernier, un schème est l'organisation invariante de la conduite d'un sujet face à une classe de situations donnée. Dans les schèmes, Vergnaud (1991) fait intervenir les « connaissances-en-acte » (ou connaissances opératoires) du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs, non nécessairement formulés ou explicitement identifiés par le sujet, qui permettent à son action d'être opératoire.

Tableau 2.1 Comparaison entre les concepts capacité/schème (Jonnaert, 2009, p. 50)

	La capacité	Le schème opératoire
Caractère stable	Une activité intellectuelle stabilisée. (Meirieu, 1988, p. 153)	Ce qu'il y a de commun aux diverses répétitions d'une même action (Piaget, 1963; p. 46)
Transférable dans plusieurs situations	Une activité reproductible dans des champs divers (Meirieu, 1988, p. 153)	Une organisation invariante de la conduite pour une classe de situations (Vergnaud, 1991, p. 137)
Constitutif de la compétence	Une compétence met en jeu plusieurs capacités dans une même situation (Cardinet, 1988, p. 133)	Les compétences sont elles-mêmes sous-tendues par des schèmes organisateurs de la conduite (Vergnaud, 1991, p. 137)
Dimension opératoire	L'idée d'activité est présente chez de nombreux auteurs (Meirieu, 1988; Cardinet; 1988; Gillet, 1991; etc.)	Est relatif aux transformations et se rapporte à tout ce qui modifie l'objet, à partir de l'action jusqu'à l'opération (Piaget, 1972, p. 79)
Est réversible		Piaget (1972, p. 79) parle d'actions réversibles, c'est-à-dire qui peuvent se dérouler dans les deux sens, et qui comportent la possibilité d'une action inverse qui annule le résultat de la première. ¹¹
Est intériorisée		Piaget (1972, pp. 78-79) parle d'opérations en termes d'actions intériorisées ou intériorisables.

¹¹ Peut-être y aurait-il lieu d'apporter ici un élément de précision sur les propos de Jonnaert. Piaget parle d'action réversible quand on peut **imaginer** l'action inverse, quand on est capable de prévoir quel serait le résultat de l'action inverse. Mais ça ne suppose pas nécessairement qu'elle soit réalisable. Si je vide la moitié d'une bouteille d'eau dans l'évier (pour mesurer un volume par immersion par exemple), ça n'est pas réversible, je ne peux pas récupérer l'eau. Mais je suis capable de concevoir ce qu'aurait donné une (éventuelle) action inverse.

Selon Jonnaert (2009), cette comparaison montre d'une part, que le concept de schème opératoire est mieux circonscrit que celui de capacité et, d'autre part, qu'il englobe au minimum tous les caractères de la capacité. En ce sens, il me paraît intéressant d'adopter les caractéristiques du concept de schème opératoire pour mieux préciser celui de capacité. À la suite de la présentation des définitions de « capacité » par les chercheurs sus-nommés, je retiens les caractéristiques suivantes exposées par Jonnaert (2009) pour définir ce que j'entends par capacité. Ainsi, en me basant sur Jonnaert (2009, p. 50), je clarifie ce concept en précisant ses attributs et ses fonctions à l'aide de la définition établie du concept de schème.

Les attributs d'une capacité :

- c'est une structure cognitive stabilisée, (elle a déjà fait l'objet d'une construction antérieure par le sujet et est disponible dans son répertoire cognitif);
- elle présente une organisation invariante pour une classe de situations;
- elle est opératoire : c'est une action intériorisée par le sujet et réversible;
- elle porte sur un contenu précis et clairement défini; (une capacité est déterminée par une dimension particulière d'un savoir codifié¹²; elle n'est pas indépendante d'une ou de plusieurs disciplines scolaires);
- la capacité a cependant aussi un caractère transversal (certaines capacités transversales sont utilisées par plusieurs disciplines scolaires);
- elle est constitutive d'une ou de plusieurs compétences (les compétences reposent sur des capacités mobilisées, sélectionnées, coordonnées et mises en œuvre par le sujet en situation). (Joannert, 2009, p. 50).

Les fonctions d'une capacité :

- une capacité permet, au départ d'un contenu déterminé, de réaliser une ou plusieurs opérations (physiques ou intellectuelles) sur un ou plusieurs éléments d'une situation;
- elle peut fonctionner seule ou être coordonnée à d'autres capacités [...];

¹² Le savoir codifié selon Jonnaert, fait référence « au savoir prescrit dans les programmes d'études et décrit d'une façon prescriptive, propre à son enseignement. Le savoir codifié dans les programmes d'études (comme dans les manuels scolaires) est le résultat de processus de transpositions didactiques qui ont fait cheminer le savoir, depuis ses origines (savoir savant, pratiques sociales de référence, etc.) jusqu'à la construction de connaissances par les élèves à son propos » (Joannert, 2009, p. 50).

– l’activation d’une capacité, pour être efficace en situation, comprend les éléments qui permettent l’évaluation de la réussite de son utilisation en situation. (Jonnaert, 2009, p. 50).

2.2.1.3 *Ability* traduit par « aptitude »

En éducation, les aptitudes sont décrites comme des dispositions, innées ou acquises, à effectuer des apprentissages spécifiques, à fournir un rendement appréciable dans un domaine défini (Legendre, 2005). D’après Dion (1986), l’aptitude est une disposition naturelle qui sert de support à une capacité. La méprise entre ces termes vient probablement du terme anglais *ability* qui recouvre sans distinction les notions d’aptitude et de capacité. Les aptitudes peuvent être d’ordre plus général comme les aptitudes psychomotrices, cognitives ou perceptives, ou elles peuvent être d’ordre plus spécifique, comme les aptitudes verbales, le raisonnement ou la dextérité (Guédon *et al.*, 2011).

Un des modèles sur lequel se sont basées plusieurs batteries de tests d’aptitudes est le modèle des aptitudes spécifiques de Thurstone (Thorndike *et al.*, 1990; Thurstone, 1947). Ce modèle comprend les aptitudes perceptives (perception spatiale, perception des formes, perceptions d’écriture), les aptitudes cognitives et les aptitudes psychomotrices (voir Joyal, 2015).

2.2.1.4 Le sens de *spatial ability* dans mon étude

Tout d’abord, je fais le constat que plusieurs chercheurs (Bishop, 1980; Buckley *et al.*, 2018; Carroll, 1993; Hegarty et Waller, 2004; Lohman, 1988; Lowrie *et al.*, 2020; Linn et Pettersen, 1985; McGee, 1979; Pittalis et Christou, 2010; Ramful *et al.*, 2017) attribuent au concept *spatial ability* le sens de « aptitude » dont je viens de discuter. À cet égard, le modèle de Carroll (1993) fait figure de référence dans le domaine. Dans sa méta-analyse, il définit le concept *spatial ability* comme les aptitudes (dispositions cognitives) nécessaires au traitement d’informations visuelles ou spatiales. Elles renvoient aux capacités de chacun à se représenter mentalement, transformer et manipuler des informations visuelles perçues souvent en 3D. Carroll a identifié quatre aptitudes spatiales : la visualisation spatiale, l’orientation spatiale, la rotation mentale et la navigation spatiale.

Dans ma recherche, je ne m’intéresse pas à évaluer les habiletés spatiales à l’aide de tests psychométriques où le terme « ability » signifie « aptitude ». Je considère que les concepts « habiletés » et « connaissances opératoires » sont très proches. Ainsi, dans mon étude, les

habiletés spatiales se réfèrent à ce qui relève de l'application, de la pratique, dans des problèmes à résoudre tout ce qui constitue des **connaissances opératoires** ou « **connaissance-en-actes** » (Vergnaud, 1991), à savoir les formes opératoires de la connaissance, qui permettent d'agir en situation. Vergnaud les oppose aux « connaissances prédicatives », qui sont les connaissances identifiées, explicitement formulées, institutionnalisées, celles que Brousseau caractérise comme les « savoirs ». Ces connaissances opératoires ...

[...] sont, par nature, rattachées à des situations tangibles d'action effective. Ce sont elles qui « chargent de sens » les connaissances prédicatives auxquelles elles sont sous-jacentes. Ce sont également elles qui leur permettent d'être applicables, d'être mises en œuvre dans des situations données et d'être rattachées à des situations d'action (Merri et Pichat, 2007, p. 83, cité dans Mathieu-Soucy et Tanguay, 2017, p. 8).

Les recherches concernant les habiletés spatiales sont anciennes et relèvent initialement du domaine de la psychologie. Elles constituent une partie d'une réflexion plus générale concernant les capacités cognitives (Schlosser, 2014). Dans la communauté scientifique, il n'existe pas de consensus sur la catégorisation des habiletés spatiales. Toutefois, j'ai relevé que les travaux de Thurstone (1950), Lohman (1988), Hegarty et Kozhevnikov (1999), Carroll (1993), Hegarty et Waller (2004) mettent en lumière une définition commune des habiletés spatiales, comme étant la capacité à représenter et manipuler mentalement des informations de nature spatiale visuellement perçues, tout en intégrant les relations spatiales entre les éléments d'informations. Historiquement, en psychologie cognitive expérimentale, le concept de *spatial ability*, dénommé ainsi chez les chercheurs anglo-saxons, est considéré comme un facteur (ou une caractéristique) essentiel(le) dans l'étude et la définition de l'intelligence (Hawes *et al.*, 2015).

Dans la littérature pertinente, les chercheurs conviennent que *spatial ability* n'est pas une construction unitaire, mais qu'elle est une combinaison de composantes et de facteurs. À cet égard, l'une des méthodes les plus couramment utilisées pour décrire la structure sous-jacente des habiletés spatiales est l'analyse factorielle. Les chercheurs ont largement utilisé l'analyse factorielle dans le but de décomposer le concept « habiletés spatiales » en caractéristiques spécifiques (Colom *et al.*, 2001; Hegarty et Waller, 2005). Les méta-analyses de Lohman (1988), de Linn et Petersen (1985) et de Carroll (1993) en sont des exemples souvent cités dans la littérature.

2.2.2 Une première habileté : la visualisation spatiale

Il existe un courant de recherche qui considère la visualisation spatiale comme l'habileté à créer, combiner et modifier des images mentales relativement complexes d'objets 2D ou 3D physiquement présents ou non (Battista *et al.*, 2019; Carroll, 1993; Fujita *et al.*, 2020; Linn et Petersen, 1985; Lohman, 1988; 1996; Lowrie *et al.*, 2020; McGee, 1979; Mix *et al.*, 2016; Ramful *et al.*, 2017; Uttal *et al.*, 2013). Un autre courant de recherche est celui des chercheurs français Duval et Mithalal, ainsi que celui des chercheurs belges Duroisin et Demeuse, qui rapportent plus spécifiquement la visualisation spatiale à l'étude de la géométrie. Dans ce qui suit, je vais présenter ces deux courants en concluant par ce que j'en retiens quant à mon objet de recherche.

2.2.2.1 Premier courant de recherche : le concept de *visualisation spatiale* dans le domaine de la psychologie cognitive

J'ai relevé que les définitions de la visualisation spatiale proposées, majoritairement par des chercheurs anglo-saxons, concernent les aspects suivants :

- la création et la manipulation d'images mentales relativement complexes d'objets 2D/3D impliquées dans des tâches à résoudre (Lohman, 1988; 1996);
- la visualisation est un terme générique pour un certain nombre de manipulations spatiales (Ramful *et al.*, 2017) menées intérieurement ;
- implique les « processus d'appréhension, d'encodage et de transformation mentale des formes spatiales » (Carroll, 1993, p. 309);
- la rotation spatiale menée intérieurement est parfois incluse comme un type de visualisation spatiale (Linn et Petersen, 1985; McGee, 1979; Sorby, 2009), et souvent considérée à part des autres transformations;
- la visualisation spatiale inclut pour plusieurs auteurs l'imagination, à partir d'informations relatives à l'espace, de transformations (transformations mentales) telles que des rotations d'objets 2D/3D physiquement présents ou non, ou la décomposition/recomposition d'objets 2D/3D (Battista *et al.*, 2018; Battista *et al.*, 2017; Mix *et al.*, 2016; Uttal *et al.*, 2013);
- une manière d'évaluer l'habileté de visualisation spatiale consiste à soumettre des tâches spatiales qui nécessitent une séquence de transformations de représentations 2D d'objets 3D, par exemple, le *Paper Folding Test* (voir Hawes *et al.*, 2015);

- il s’agit d’un processus mental. Ainsi, la conception de la visualisation spatiale dans la littérature correspond à une visualisation *interne*, telle que je l’ai identifiée au chapitre I de la thèse (voir §1.5.1).

D’après mes lectures et ma compréhension des ouvrages des chercheurs du 1^{er} courant de recherche, j’en conclus qu’ils n’apportent pas d’explications éclairantes sur la mise en fonctionnement de la visualisation spatiale avec les connaissances spatiales en résolution de problèmes spatiaux.

2.2.2.2 Deuxième courant de recherche : la visualisation spatiale en géométrie

Puisque la visualisation spatiale revient dans de nombreuses études, en particulier dans le domaine de la géométrie, je présente ce qu’il en est dans les études se rapportant davantage à mon objet de recherche : Duroisin (2015), Mithalal (2010; 2014) et Duval (2002; 2003; 2005).

2.2.2.2.1 La visualisation spatiale selon Duroisin (2015)

Duroisin, s’appuyant entre autres sur les travaux de Marchand (2006b) et Eme (2003), spécifie que l’habileté de « visualisation spatiale » est une capacité « qu’a l’individu de se représenter les informations spatiales non verbales, d’analyser les relations entre les objets d’une configuration et de les manipuler mentalement » (Duroisin, 2015, p. 123). À cela, elle ajoute que la visualisation spatiale « conduit à anticiper l’apparence d’objets complexes (Killonen *et al.*, 1984; Hegarty et Waller, 2004) » (*Ibid.*, p. 123). En accord avec Barisnikov et Pizzo (2013), elle précise que la visualisation spatiale conduit à réaliser des opérations mentales (transformations) sur des objets en 2D ou en 3D à la suite de leur visualisation directe.

Je relève que Duroisin conçoit la visualisation spatiale comme une visualisation à la fois *interne* et *externe*. Cette conceptualisation rejoint mon argumentation présentée dans la *Problématique* (§1.5.1).

2.2.2.2.2 La visualisation spatiale selon Mithalal (2010; 2014)

Dans sa thèse doctorale, Mithalal (2010) soutient que la géométrie spatiale constitue un domaine d’études particulièrement délicat pour l’enseignement des mathématiques, car la difficulté à « voir dans l’espace » pose problème. Ce chercheur spécifie que « l’apparente unité de cette difficulté cache en réalité deux approches radicalement différentes de cette question, conditionnées par les

visées sous-tendues » (Mithalal, 2010, p. 30). La première approche est appelée « visée cognitive » et la deuxième, « visée géométrique ». Cet auteur soutient que :

La problématique de la visualisation et de l'utilisation des représentations n'est alors plus une problématique proprement cognitive, mais doit s'appuyer sur une étude approfondie des représentations, du point de vue de la résolution de problèmes de géométrie. (Mithalal, 2010, p. 32)

Mithalal associe le « voir » en géométrie spatiale aux trois fonctions principales du dessin en ce qui a trait aux représentations des objets 3D :

- une **fonction d'illustration** [le caractère gras est de l'auteur], qui intervient pour illustrer un énoncé, un problème, des étapes de raisonnement, ou une réponse au problème;
- une **fonction de prise en charge d'hypothèses**, qui traduit la capacité du dessin à laisser apparaître des informations éventuellement absentes relatives à l'objet géométrique;
- une **fonction d'expérimentation**, qui dépend de la fonction d'illustration, mais aussi du domaine de fonctionnement et d'interprétation du dessin (Mithalal, 2014, p. 55).

Ainsi, il considère que les problèmes de visualisation, dans le cas de la géométrie spatiale, dépendent profondément de la capacité des représentations disponibles à remplir ces fonctions. De plus, pour cet auteur, la visualisation spatiale est un outil de résolution de problèmes de géométrie, sur lequel s'appuie le raisonnement géométrique et déductif (preuves), et qui est lui-même basé sur l'étude approfondie des représentations 2D d'objets 3D.

2.2.2.2.3 La visualisation spatiale selon Duval (1999; 2002; 2003; 2005)

Duval (2002) examine trois processus cognitifs qui ont cours dans la pensée mathématique : les représentations, la vision et la visualisation. Avant d'aborder la visualisation, Duval discute d'abord de *vision*, en précisant que la vision a deux fonctions cognitives : la première, qu'il nomme *fonction épistémologique*, est de donner un accès direct à un objet 3D concret. Je l'associe à la visualisation *externe* (directe), comme discuté dans la problématique (chapitre 1). Il ajoute que « la vision est à l'opposé de la représentation, même des “images mentales”, parce que la représentation est quelque chose qui se tient à la place d'autre chose (Peirce) » (Duval, 2002, p. 320); la deuxième fonction, appelée par Duval *fonction synoptique*, fait référence chez cet auteur au processus cognitif

qui consiste à appréhender globalement et synthétiquement un objet ou un ensemble d'objets, ou même de phénomènes.

Duval distingue la visualisation de la vision. Contrairement à la vision qui donne un accès direct à l'objet, la visualisation repose sur des représentations sémiotiques, qu'elles soient à produire ou déjà produites. Pour cet auteur, la visualisation rend intelligible tout ce qui n'est pas accessible à la vision. Duval explique le point de rupture entre la vision et la visualisation :

A semiotic representation does not show things as they are in the 3D environment or as they can be physically projected on a small 2D material support. That is the matter of visual perception. A semiotic representation shows relations or, better, organization of relations between representational units. These representational units can be 1D or 2D shapes (geometrical figures), coordinates (cartesian graphs), propositions (propositional deductive graphs or "proof graph"), or words (semantic networks). And these units must be bi-dimensionally connected, because any organization requires at least two dimensions to become obvious. In a string of discrete units (words, symbols, propositions) not any organization can be displayed. Thus, inasmuch as text or reasoning, understanding involves grasping their whole structure, there is no understanding without visualization. And that is why visualization should not be reduced to vision, that is to say: visualization makes visible all that is not accessible to vision. We can see now the gap between visual perception and visualization. Visual perception needs exploration through physical movements because it never gives a complete apprehension of the object. On the contrary, visualization can get at once a complete apprehension of any organization of relations. We say "can get" and "cannot get" because visualization requires a long training¹³. (Duval, 1999, p. 13)

¹³ Ma traduction : Une représentation sémiotique ne montre pas les choses telles qu'elles sont dans l'environnement 3D ou telles qu'elles peuvent être projetées physiquement sur un petit support matériel 2D. Ceci serait du ressort de la perception visuelle. Une représentation sémiotique montre des relations ou, mieux, une organisation des relations entre les unités de représentation. Ces unités de représentation peuvent être des formes 1D ou 2D (figures géométriques), des coordonnées (plan cartésien), des propositions (graphiques déductifs propositionnels ou "graphe de preuve"), ou des mots (réseaux sémantiques). Et ces unités doivent être bidimensionnellement connectées, car toute organisation nécessite au moins deux dimensions pour devenir évidente. Dans une chaîne d'unités discrètes (mots, symboles, propositions) aucune organisation ne peut être donnée à voir. Ainsi, en ce qui a trait aux textes ou au raisonnement, la compréhension implique qu'on en saisisse toute la structure, il n'y a pas de compréhension sans visualisation. Et c'est pourquoi la visualisation ne doit pas se réduire à la vision, c'est-à-dire : la visualisation rend visible tout ce qui n'est pas accessible à la vision. Nous pouvons maintenant comprendre l'écart entre la vision et la visualisation. La vision a besoin d'être explorée à travers les mouvements physiques car elle ne donne jamais une appréhension complète de l'objet. Au contraire, la visualisation permet d'obtenir d'emblée une appréhension complète de toute organisation de relations. Nous disons « permet d'obtenir » et « ne permet pas d'obtenir » parce que la visualisation nécessite un long entraînement.

Pour Duval (2003; 2005), l'apprentissage de la géométrie suppose la mise en place de fonctionnements cognitifs spécifiques coordonnant une activité sur des objets graphiques (les dessins) et d'idéalités géométriques dont ils sont des représentants nécessairement imparfaits. Duval souligne que la pratique géométrique nécessite une articulation délicate entre des compétences de visualisation spécifiques et des compétences discursives (c'est-à-dire d'*organisation verbale*, orale ou écrite, selon l'acception du terme par ce chercheur). Duval oppose deux types de visualisation :

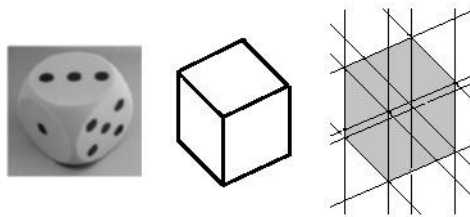
1) La *visualisation iconique* ou la reconnaissance discriminative des objets de la géométrie s'appuie sur la reconnaissance globale de contours fermés, de formes : on reconnaît un carré, car il ressemble aux carrés connus. Duval précise que les impasses de la visualisation iconique pour l'apprentissage de la géométrie sont bien connues : a) lorsque nous n'arrivons pas à voir que les formes peuvent se transformer en d'autres formes, différentes ou semblables; b) lorsque la « dissociation entre les opérations constituant l'acte de voir est d'autant plus nécessaire qu'il peut y avoir conflit entre la reconnaissance des formes par simple ressemblance à un exemple type et l'identification de l'objet auquel correspond la forme reconnue »; c) lorsque « toutes les propriétés qui ne sont pas directement liées au contour caractéristique d'une forme [celles liées aux diagonales des quadrilatères remarquables par exemple] restent hors champ et donc moins facilement mobilisables quand les énoncés de problèmes ne les mentionnent pas explicitement » (Duval, 2005, p. 15).

Duval rattache fortement la visualisation iconique à la reconnaissance visuelle des unités figurales de plus grande dimension, en s'appuyant sur la *Gestalttheorie*¹⁴. Ce type d'identification est problématique pour la géométrie dans la mesure où la forme devient définitoire de l'objet et qu'il n'est plus possible d'opérer sur ce dernier au risque de le dénaturer. Par exemple, lorsqu'un cube est assimilé à un dé, il devient impossible de prolonger ses arêtes, car alors on obtient un objet

¹⁴ La psychologie de la forme, théorie de la Gestalt ou gestaltisme (de l'allemand, *Gestaltpsychologie*) est une théorie psychologique et philosophique proposée au début du xx^e siècle, selon laquelle les processus de la perception et de la représentation mentale traitent les phénomènes comme des formes globales plutôt que comme l'addition ou la juxtaposition d'éléments simples. Les trois fondateurs Max Wertheimer, Wolfgang Köhler et Kurt Koffka sont les pionniers du groupe de Berlin sur la psychologie de la forme dans les années 1920.

quelconque dérivé d'un dé, mais la forme est perdue. Dans la figure 2.1, le dernier des 3 cubes présentés ne sera donc pas, dans ce cas, identifié comme un cube. En outre, les propriétés perçues sont liées à la forme, au contour, et il sera délicat d'isoler les éléments constitutifs (par ex. les segments formant les arêtes) pour les considérer séparément, ou encore d'accéder aux éléments à l'intérieur de cette forme tels que des diagonales. Dans ce cas, le dessin est l'objet d'étude à part entière — ou une reproduction à l'identique de l'objet d'étude plutôt qu'une représentation —, et la « figure » n'est pas prise en compte (je reviendrai plus loin sur la distinction entre dessin et figure). Duval (2005) montre ainsi que ce type de visualisation se pose en obstacle à l'enseignement de la géométrie.

Figure 2.1 Cube ou dé (mon adaptation de Mithalal, 2014, p. 56)



2) La *visualisation non iconique*, qui est issue ou qui provoque ce que Duval appelle la *déconstruction dimensionnelle des formes*, s'oppose à la visualisation iconique en ce qu'elle repose justement sur l'identification des constituants de la figure (des sous-figures de même dimension ou des unités figurales (faces, arêtes, sommets...) de dimensions inférieures dans le processus de déconstruction dimensionnelle), et des relations entre ceux-ci.

Dans le cas de la visualisation non-iconique, les objets ne sont plus caractérisés par leur forme, mais par l'assemblage d'objets de plus petite dimension — les unités figurales — sous des contraintes données.

Ainsi, un cube n'est pas un objet de forme cubique, mais l'assemblage de segments sous des contraintes précises d'incidence, d'égalité de longueur et d'orthogonalité. Les dessins peuvent alors être des représentations d'objets théoriques, il est possible d'agir dessus sans les dénaturer, ce qui lève les obstacles à l'utilisation du dessin pour les fonctions précédemment énoncées. (Mithalal, 2014, p. 57)

Pour Duval, la forme de visualisation qui est fonctionnelle en géométrie passe par la déconstruction dimensionnelle des formes :

La manière mathématique de voir les figures consiste à décomposer n'importe quelle forme discriminée, c'est-à-dire reconnue comme une forme nD/2D, en unités figurales d'un nombre de dimensions inférieur à celui de cette forme. (Duval, 2005, p. 20)

Après avoir décrit les différentes caractéristiques de la visualisation dans les deux courants de recherche, je vais faire ressortir les ressemblances et les différences afin d'aider à préciser ma définition.

2.2.2.3 Discussion sur le concept de visualisation des deux courants de recherche

Voici les points communs des deux courants de recherche concernant la visualisation :

- elle est une habileté permettant d'anticiper l'apparence d'objets 3D complexes (Duroisin, 2015);
- elle consiste à imaginer, à réaliser des manipulations mentales (transformations) sur des objets 2D et 3D à la suite d'une visualisation directe ou non; (Duroisin, 2015; Duval, 2005; Lohman, 1988; 1996; Uttal *et al.*, 2013).

Des définitions de Duval et Mithalal sur la « visualisation », je relève un premier aspect commun qui est lié à mon objet de recherche, à savoir que la compréhension du fonctionnement de la visualisation spatiale doit s'appuyer sur l'analyse des représentations 2D des objets 3D, que ce soit lors du décodage ou de l'encodage. Un deuxième élément commun évoqué par ces auteurs concerne la déconstruction dimensionnelle des objets 3D, qui constitue un processus central dans la visualisation géométrique. Elle consiste à se représenter les objets comme des assemblages d'objets de dimensions inférieures, les unités figurales : points, droites, segments, faces. La cohérence de ces assemblages est assurée par les propriétés géométriques (incidence, parallélisme, orthogonalité, etc.). Par exemple, lorsque l'élève est en présence de représentations 2D d'objets 3D qu'il doit décoder (ex. : une pyramide régulière à base octogonale dessinée en perspective cavalière), le processus de décodage repose sur la prise en compte des relations entre différents constituants de la représentation 2D et en cela, sa complexité est proche de celle de la déconstruction dimensionnelle, elle est en partie tributaire de celle-ci mais elle va plus loin. En effet, le décodage fait intervenir plus que les simples relations d'incidence (tel point est à l'intersection de tels et tels côtés, etc.), mais aussi des relations métriques sur les angles et les longueurs, dont la déconstruction dimensionnelle ne rend pas compte.

En lien avec mon objet de recherche, je considère que la déconstruction dimensionnelle concerne également les connaissances spatiales issues de la modélisation ensembliste « à la Euclide » de la géométrie, telles que les notions de points, de segments, de faces, de plans, etc. (voir par exemple, Furtuna, 2008) lorsque ces notions sont liées aux relations d'incidence. Le décodage/encodage 3D/2D concerne en sus les connaissances sur le parallélisme, l'orthogonalité, la coplanarité dans l'espace, mais aussi sur certaines isométries entre côtés et angles dans les objets géométriques standard.

La définition de la visualisation de Duroisin (2015) ne contient pas d'éléments communs avec les définitions de Duval et de Mithalal, mis à part ce que conçoit Duval à propos du concept de « vision », synonyme de visualisation *directe (externe)* (voir §2.1.1c). Néanmoins, des éléments de la définition de Duroisin (§2.1.1a) me permettent d'affirmer qu'elle associe la visualisation spatiale principalement à la visualisation *interne* (ou mentale) dont j'ai discuté antérieurement. En fait, les travaux de Duroisin n'abordent pas (directement) la question de la mise en fonctionnement de la visualisation spatiale en lien avec les représentations 2D des objets 3D.

Deux autres habiletés spatiales sont souvent discutées dans la littérature. Ce sont l'orientation spatiale et la rotation mentale. Je vais les regrouper en une seule catégorie que je nomme *transformations spatiales*.

2.2.3 Deuxième habileté spatiale : les transformations

Je vais d'abord décrire ce qu'est une transformation. Puis, j'exposerai comment les transformations sont considérées chez les chercheurs en psychologie cognitive.

2.2.3.1 Les transformations traitées dans le cadre de l'enseignement au secondaire

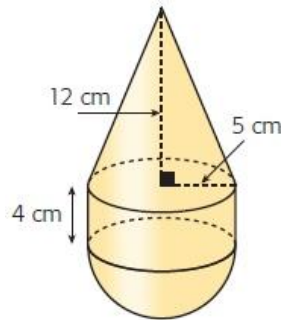
Les transformations qui sont étudiées dans l'enseignement secondaire au Québec (voir PFEQ — domaine de la mathématique, MELS, 2007), en France ainsi que dans la plupart des autres pays du monde sont principalement des transformations géométriques : les isométries (translation, rotation, réflexion, réflexion glissée pour le plan; la liste est plus longue et complexe pour l'espace) et les similitudes (homothéties et autres types de similitude). Ces transformations permettent principalement de déplacer un objet dans une scène, répliquer un objet ou bien encore, dilater ou contracter un objet. Il existe d'autres types de transformations qui sont utilisées dans la résolution

de problèmes en géométrie : les découpages et reconfigurations, les déplacements (qui incluent certaines des isométries déjà nommées) et les projections qui contrairement aux autres, ne sont pas bijectives et entraînent une chute de dimension.

2.2.3.1.1 Découpages et reconfigurations

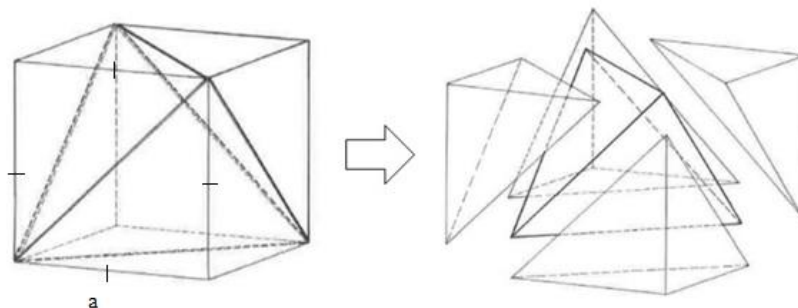
Le découpage d'une figure plane ou d'un objet 3D consiste à en identifier et sélectionner, en tant que sous-figure, des parties spécifiques. Par exemple, en géométrie plane, décomposer un hexagone régulier en six triangles isométriques pour calculer son aire. Voici un exemple en géométrie spatiale : un solide complexe (décomposable) que l'on peut séparer en plusieurs solides plus simples (cône, cylindre, demi-boule) pour en calculer l'aire ou le volume. Nous allons considérer que les développements plans des polyèdres sont des cas particuliers de reconfiguration de leur frontière 2D.

Figure 2.2 Découpage dans un solide décomposable



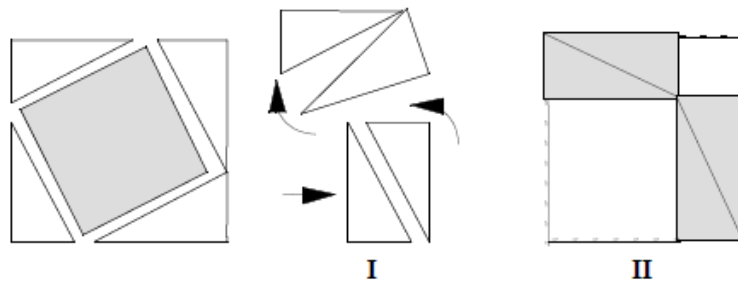
Voici un 2^e exemple de découpage en 3D : imaginer qu'on retire d'un grand cube 4 pyramides de base $\frac{a^2}{2}$ et de hauteur a , inscrites dans ce cube, pour découvrir un tétraèdre régulier d'arête $\sqrt{2}a$ (où a est la mesure de l'arête du cube).

Figure 2.3 Découpage d'un cube en 5 pyramides



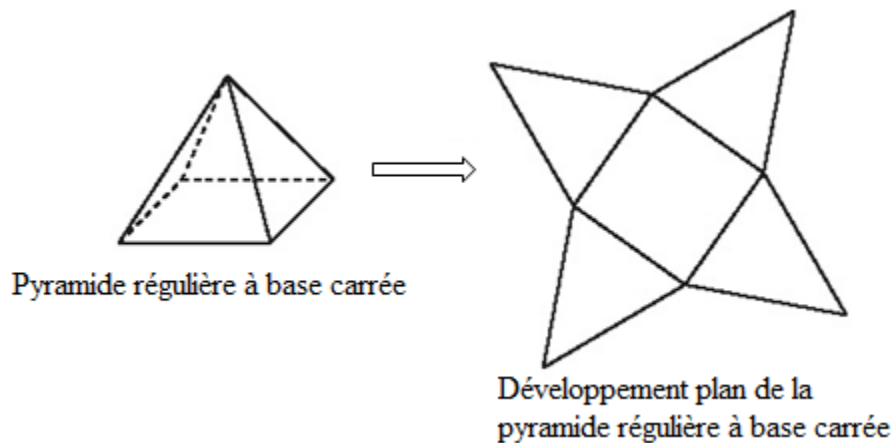
Une reconfiguration est une réorganisation d'une figure plane ou d'un solide dans le plan ou dans l'espace. Voici un 1^{er} exemple : une preuve classique du théorème de Pythagore illustrée à la figure 2.4. Les quatre triangles de la 1^{re} figure doivent être reconfigurés en deux rectangles, puis ceux-ci doivent être disposés dans le cadre du carré initial de manière à y faire apparaître deux carrés.

Figure 2.4 Reconfiguration de 4 triangles en 2 rectangles



Voici un 2^e exemple de reconfiguration : le développement plan d'un polyèdre. Mais, attention, je précise que le développement plan d'un solide n'est pas la reconfiguration du solide lui-même mais plutôt, la reconfiguration de la frontière (2D) du solide 3D.

Figure 2.5 Reconfiguration : le développement plan d'un polyèdre



2.2.3.1.2 Déplacements

Un déplacement est une isométrie du plan ou de l'espace qui préserve l'orientation. Les translations et les rotations et leurs composées (par exemple les déplacements hélicoïdaux dans l'espace, à

savoir les composées d'une rotation avec une translation parallèle à l'axe de rotation) sont des déplacements. Les réflexions et les réflexions glissées ne sont pas des déplacements parce qu'elles ne préservent pas l'orientation.

2.2.3.1.3 Projections

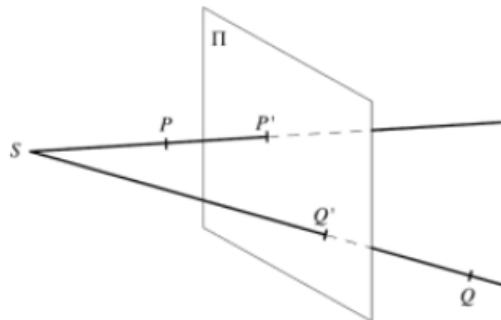
Dans ma thèse, je distingue trois types de projections :

1) Projection centrale (voir figure 2.6)

Considérons un point S nommé centre de projection et un plan Π ne passant pas par S , appelé **plan de projection** ou **écran**. Si P est un point de l'espace, son **image** P' par la projection est définie comme l'intersection de la droite **projetante** SP et du plan Π :

$$P' = SP \cap \Pi$$

Figure 2.6 Projection centrale de deux points P et Q (Rüegg et Burmeister, 2010)



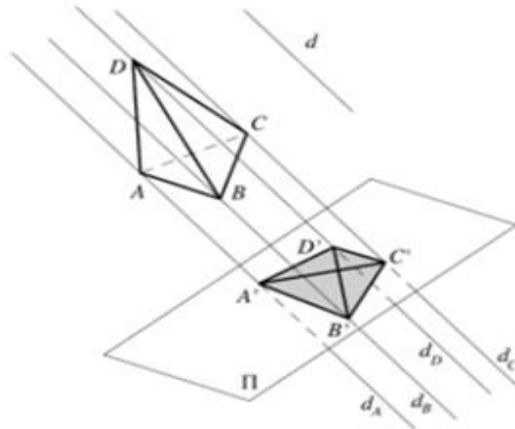
2) Projection parallèle (voir figure 2.7)

Considérons un plan Π et une droite d non parallèle à Π , appelée **direction de projection**. L'image P' du point P par la projection est alors définie par

$$P' = d_P \cap \Pi$$

où la projetante d_P de P est la parallèle à d passant par P .

Figure 2.7 Projection parallèle d'un tétraèdre (Rüegg et Burmeister, 2010)

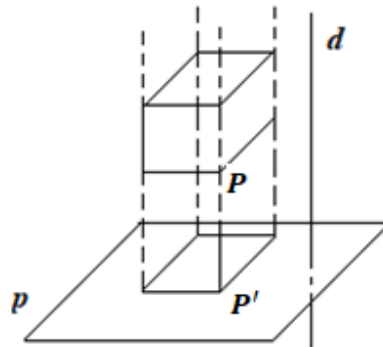


3) Les projections orthogonales (vues de face, dessus, droite, gauche, arrière, dessous).

Une projection orthogonale est une projection parallèle dans laquelle la direction de projection est perpendiculaire à la cible (ou écran) de projection (voir figure 2.8). La figure cible peut être une droite, un plan, une sphère, etc. Dans le cadre de ma thèse, je m'intéresse à la projection orthogonale sur un plan dans l'espace, que je définis ainsi :

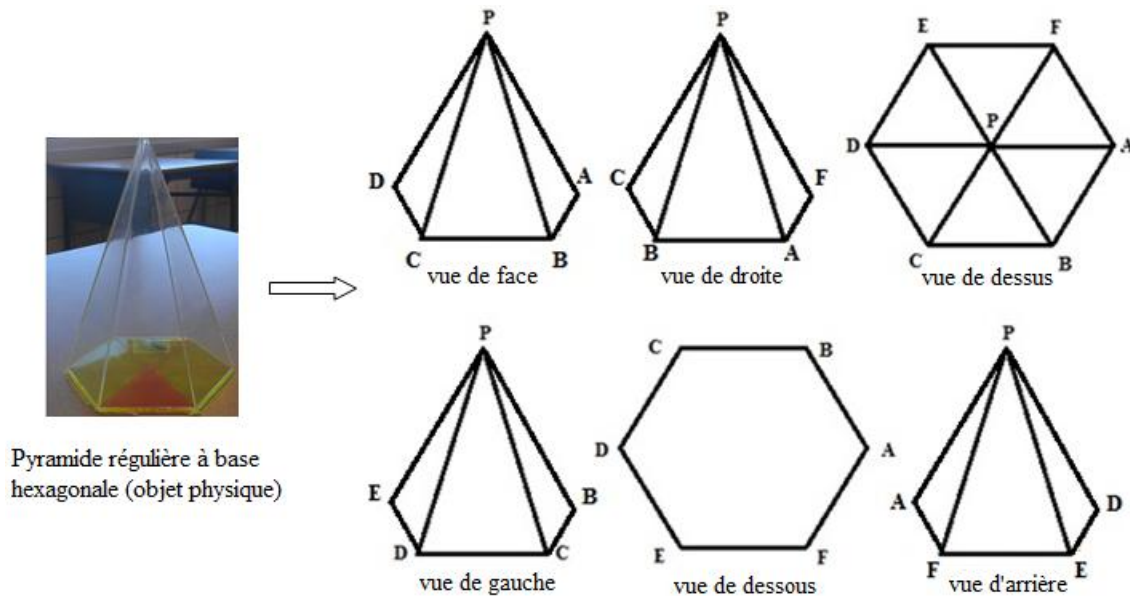
Transformation dans l'espace déterminée par un plan p (plan sur lequel les figures sont projetées) et une droite d (qui détermine la direction de projection) perpendiculaire à p . La transformation applique tout point P du plan sur un point P' tel que P' est le point d'intersection de p avec la parallèle à d qui passe par P .

Figure 2.8 Projection orthogonale d'un prisme sur un plan



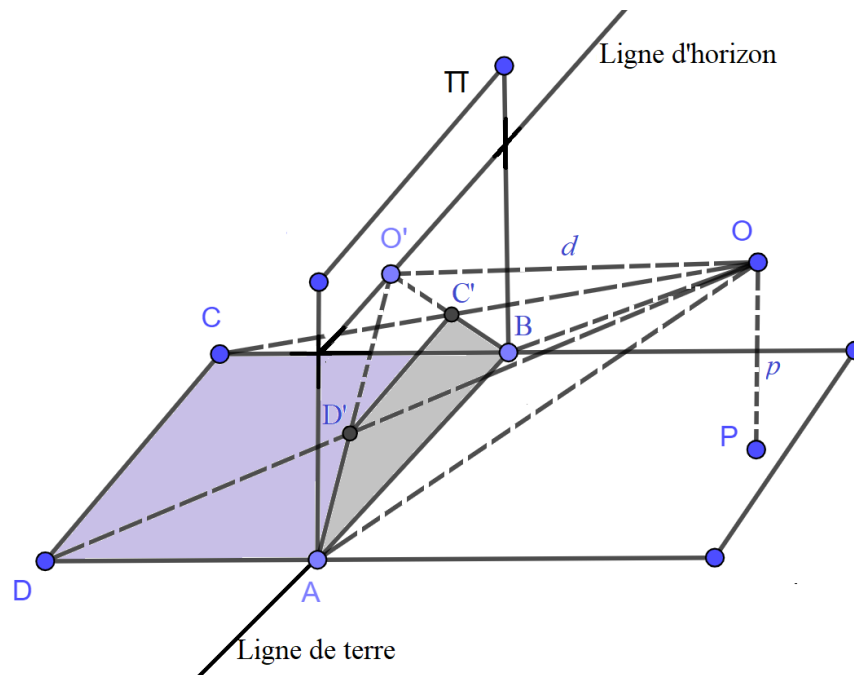
- Les projections orthogonales sur un plan conservent l'ordre des points et le parallélisme dans les figures pour les portions de ces figures qui ne sont pas situées sur une même droite perpendiculaire au plan de projection;
- Les projections orthogonales peuvent être utilisées pour représenter un objet de l'espace tridimensionnel sur 6 plans perpendiculaires les uns aux autres, appelés vues de face, de droite, de dessus, de gauche, de dessous et d'arrière (voir figure 2.9).

Figure 2.9 Projections orthogonales d'une pyramide régulière à base hexagonale



Il convient de préciser ce que j'entends par un dessin en perspective dans le contexte de la thèse. L'idée mathématique sous-jacente au dessin en perspective se base sur la notion de cône visuel. Il s'agit d'un cône dont le sommet correspond à l'œil du peintre, supposé unique, ponctuel et immobile, et dont la base correspond au contour visible de l'objet à représenter. Le dessin en perspective sera l'intersection entre ce cône visuel et le plan du dessin. Si, par exemple, nous voulons représenter, sur la surface du plan pictural π , un rectangle $ABCD$ situé sur le sol, de manière à ce qu'il soit observé à partir d'un point P du sol, l'œil du spectateur étant situé à une hauteur p et à une distance d du plan π , soit au point O , nous devons alors tracer la pyramide visuelle $OABCD$, qui coupe le plan π aux points $ABC'D'$. Alors le trapèze $ABC'D'$ est la représentation en perspective du rectangle $ABCD$ (voir figure 2.10).

Figure 2.10 Le cône visuel dans un dessin en perspective (mon adaptation de Casallerrey, 2000)



2.2.3.2 L'orientation spatiale dans les études quantitatives

Dans les études quantitatives traitant du sens spatial, plusieurs chercheurs (Fujita *et al.*, 2020; Pittalis et Christou, 2010; Hegarty et Waller, 2005; Khin Khin et Wai Oo, 2020; Lowrie *et al.*, 2020; Münzer *et al.*, 2018; Panaoura *et al.*, 2007; Tartre, 1990; Xie *et al.*, 2020) décrivent « l'orientation spatiale » comme l'habileté à imaginer l'apparence d'objets à partir de différents points de vue adoptés par l'observateur (impliquant un changement de perspective¹⁵). D'autres chercheurs (Barisnikov et Pizzo, 2013; Duroisin, 2015) indiquent que l'orientation spatiale concerne les habiletés dont dispose l'individu à analyser et à comprendre des relations entre des objets visuellement perçus. Il peut aussi s'agir, comme par exemple chez Marchand et Bisson (2017), de la facilité, ou non, à s'orienter (dans une pièce, dans une ville, par rapport à des objets). L'orientation spatiale requiert des habiletés à se repérer dans un espace donné, à se diriger pour aller d'un endroit à un autre ou à suivre des directions données en les traduisant par un trajet dans

¹⁵ Cette habileté spatiale a été appelée « prise de perspective » (par ex., Frick *et al.*, 2014) et « orientation spatiale » (par ex., Hegarty et Waller, 2004), bien que les deux termes impliquent d'imaginer la vue d'un autre point de vue. Les mesures psychométriques dans ce type d'études impliquent que le sujet imagine se déplacer le long d'un plan horizontal (Lowrie *et al.*, 2020, p. 181).

un espace donné (Marchand et Bisson, 2017). J'évalue que ces habiletés spécifiques, certes essentielles, n'interviendront pas dans les problèmes qui seront à l'étude dans la thèse.

Dans le cadre de mon étude, l'orientation spatiale relève davantage des transformations. Plus spécifiquement, je conçois qu'il y a deux possibilités : soit un individu s' imagine tourner autour de l'objet (changement de point de vue), soit il fait tourner l'objet lui-même (concrètement ou dans son imagination). Dans les deux cas on peut considérer qu'il y a transformation, plus précisément une rotation (peut-être combinée à une translation), imaginée par l'individu.

2.2.4 Le concept « habiletés spatiales » dans ma recherche doctorale

À la lumière de mon analyse, les habiletés spatiales qui sont les plus souvent mobilisées en contexte de résolution de problèmes géométriques et qui sont étudiées par les chercheurs dans ce domaine d'études (Duroisin, 2015; Duval, 2002; 2005; Mithalal, 2010; 2014) sont les suivantes :

1) La **visualisation spatiale** se subdivise en deux sous-composantes : d'abord, la visualisation *directe* (ou externe) qui est la perception par la vision (au sens de Duval, 2002) d'un objet physique, d'une représentation 2D sur papier ou sur un écran numérique. Puis, la visualisation *mentale* (interne) induite par la création d'images mentales, en premier lieu à partir de la visualisation externe d'un objet ou d'une représentation, ensuite issue de la mémorisation d'une telle visualisation externe, et à un stade plus avancé, à partir de l'imagination de possibles visualisations externes.

La visualisation spatiale peut être liée spécifiquement à un aspect des connaissances spatiales (voir ultérieurement), à savoir le processus de **décodage/encodage** des représentations 2D des objets 3D.

2) Les **transformations spatiales** relèvent d'une habileté à imaginer et manipuler mentalement les transformations d'objets telles que la rotation mentale (incluant l'anticipation de l'orientation de l'objet), des reconfigurations, des déplacements, des découpages-réorganisations, des projections, etc.

2.3 Les connaissances spatiales

À la suite d'une première définition de « connaissances spatiales » exposée au chapitre I (voir §1.5.1), je vais investiguer ce qu'en disent les chercheurs dans l'enseignement de la géométrie

scolaire (primaire et secondaire). En lien avec mon objet de recherche, je présente les définitions de « connaissances spatiales » de Berthelot et Salin (1992; 1993-1994; 1999-2000), de Marchand (2004; 2006a; 2006b; 2009a; 2009b; 2020), puis j'exposerai ma définition.

2.3.1 Les connaissances spatiales selon Berthelot et Salin (1992; 1993-1994; 1999-2000)

Un des buts visés par la recherche de Berthelot et Salin (1992) est d'éclaircir le statut et le rôle des connaissances spatiales dans le travail scolaire de la géométrie, au cours de la scolarité obligatoire et plus particulièrement, à l'école primaire et dans les deux premières années du collège en France (5^e-6^e années du primaire et deux premières années du secondaire au Québec).

Étant donné la variété de ce type de connaissances dans les pratiques journalières de chaque individu et le manque d'informations relatives à ces connaissances (classifications, taxonomies, par exemple), l'acquisition et la structuration des connaissances spatiales sont moins connues. Berthelot et Salin (1992), mentionnent que les connaissances spatiales permettent de « maîtriser l'anticipation des effets de ses actions sur l'espace, leur contrôle ainsi que la communication d'informations spatiales » (Berthelot et Salin, 1992, p. 9).

Dans une étude consacrée à l'enseignement de l'espace au niveau de l'école primaire, ces chercheurs décrivent leur définition des « connaissances spatiales » :

Par connaissances spatiales nous désignons les connaissances qui permettent à un sujet un contrôle convenable de ses relations avec l'espace sensible. Ce contrôle se traduit par la possibilité pour lui de :

- reconnaître, décrire, fabriquer ou transformer des objets;
- déplacer, trouver, communiquer la position d'objets;
- reconnaître, décrire, construire ou transformer un espace de vie ou de déplacement. La maîtrise de l'espace est l'objet d'apprentissage bien avant l'entrée dans la scolarité et elle continue de se développer par des voies parallèles tout au long de l'enfance et de l'adolescence, voire de l'âge adulte. (Berthelot et Salin, 1999-2000, p. 38)

De cette définition, je retiens que les connaissances spatiales sont des connaissances qui permettent aux élèves de contrôler et d'analyser l'espace dans lequel ils se trouvent et de communiquer à propos de celui-ci. Cet espace met en jeu les objets qui s'y trouvent, leur position, leur déplacement et leur transformation. Je fais le constat que la définition de Berthelot et Salin fait référence à ce que des chercheurs en psychologie cognitive utilisent dans leurs travaux lorsqu'ils parlent

d'habiletés spatiales, sauf qu'il s'y ajoute un aspect d'identification et de communication qui suppose la capacité du sujet à être conscient de ces habiletés, à les reconnaître, à les désigner, à pouvoir « en parler ». J'y reviendrai ultérieurement.

Avant de poursuivre ma clarification des connaissances spatiales, il est judicieux de présenter ce que j'entends par *connaissances géométriques* afin d'indiquer en quoi et comment elles se distinguent des connaissances spatiales.

2.3.2 Les connaissances géométriques (Battista, 2007; Clements et Battista, 1992)

D'abord, les connaissances géométriques sont des connaissances issues du savoir géométrique et mises en jeu dans la résolution de problèmes de l'espace. Elles font référence aux contenus scolaires qui deviennent théorisés, voire même axiomatisés à un niveau plus avancé, afin de créer un système cohérent (Battista, 2007; Clements et Battista, 1992). Je réserve la locution « connaissances géométriques » aux connaissances liées aux géométries plane et spatiale, institutionnalisées dans l'institution « école ». Ce sont les connaissances scolaires qui ont trait spécifiquement aux **objets** de la géométrie (plane ou spatiale), aux **relations** entre ces objets et aux **propriétés** que peuvent avoir (ou non) ces objets. Les termes associés peuvent désigner aussi bien des objets et propriétés théoriques que les formes ou les propriétés des objets matériels existant dans l'espace sensible (rectangle, pyramide, bord, sommet, extérieur, intérieur, etc.) — ils sont alors communs au lexique de tous les jours et au lexique mathématique —, ou au contraire être spécifique de la géométrie (segment, polyèdre, apothème, etc.)

2.3.2.1 Constituants des connaissances géométriques : les objets

Les « objets » cités dans les textes officiels du PFEQ (MELS, 2007), domaine de la mathématique (un point, un segment, un rectangle, etc.) sont les objets de la géométrie scolaire. Certains de ces objets sont spécifiques de la théorie géométrique (segment, polyèdre...) ou sont aussi intégrés à la vie (et au langage) de tous les jours : rectangle, cône, pyramide, etc. Par ailleurs, certains de ces objets n'ont d'existence que dans la théorie; par exemple la droite (en tant qu'objet infini).

Les objets géométriques rencontrés dans les apprentissages à l'école secondaire sont nombreux, en voici quelques-uns : point, point milieu, point de partage, droite, plan, droite (perpendiculaire, parallèle), cercle, disque, centre, rayon; triangle, triangles particuliers (isocèle, rectangle,

équilatéral), polygone, polygone régulier, polyèdre, polyèdres réguliers, sommet, arête, face, angle, angle droit, angle aigu, angles saillant et rentrant, angle dièdre...

2.3.2.2 Constituants des connaissances géométriques : les relations

Le terme « relations » est pris dans son sens habituel en mathématiques et désigne des liens de la théorie pouvant exister entre les objets. Comme pour les objets, les relations peuvent aussi être des modélisations de relations qui existent entre les objets dans l'espace sensible, par exemple, l'appartenance d'un point à un segment, modèle idéalisé, ou théorisé, d'une tache ponctuelle faite sur un trait de crayon.

Les relations habituellement rencontrées sont en général abordées dans le plan au primaire et au secondaire : la relation d'incidence et l'alignement; le parallélisme; la perpendicularité; l'égalité des longueurs (à travers la notion de « milieu » par exemple); l'isométrie, la similitude d'objets (l'agrandissement ou la réduction).

Les relations dans l'espace (surtout au 2^e cycle du secondaire et au collégial) : relation d'incidence; relation d'adjacence; les relations d'alignement et de coplanarité; le parallélisme; la perpendicularité.

2.3.2.3 Constituants des connaissances géométriques : les propriétés

Les énoncés permettent de décrire les relations entre les objets (telle droite est parallèle à telle autre...). Certains énoncés expriment des propriétés d'objets qui peuvent être des éléments d'une définition (ex : un cube a huit sommets, un parallélogramme a ses côtés opposés parallèles ou un parallélogramme est un polygone qui a 4 côtés parallèles deux à deux) ou des théorèmes (ex : théorème de Pythagore, théorème de Thalès, etc.). À l'école secondaire, ces propriétés constituent aussi des outils pour valider une solution ou permettent de la compléter. Elles sont donc souvent nécessaires pour des problèmes spatiaux.

Je parlerai de connaissances géométriques quand :

- elles se réfèrent à un savoir mathématique, relatif à des concepts théoriques, organisés autour de définitions et théorèmes;

- elles permettent de résoudre des problèmes spatiaux par l’intermédiaire d’une modélisation et des problèmes théoriques en s’appuyant sur des représentations;
- alors que l’enfant dispose de connaissances spatiales avant son entrée à l’école, les connaissances géométriques doivent être enseignées pour exister;
- leur mise en œuvre pour résoudre un problème de géométrie nécessite un raisonnement.

2.3.3 Les connaissances spatiales selon Marchand (2004; 2006a; 2006b; 2009a; 2009b; 2020)

Revenons maintenant aux « connaissances spatiales », via la signification qu’en donne Marchand, qui a évolué au fil de ses recherches. Dans sa recherche doctorale (2004) et dans le cadre de ses premières recherches publiées (Marchand, 2006a; 2006b; 2009a; 2009b) ainsi que dans un ouvrage destiné à la formation des enseignants du primaire (Marchand et Bisson, 2017), cette chercheuse propose une définition des « connaissances spatiales » en lien avec celle élaborée par Berthelot et Salin (1999-2000) :

Connaissances spatiales : résultent du processus qui, par le biais des cinq sens, amène l’apprenant à contrôler, anticiper et communiquer les états, les transformations ou les déformations des données (forme, position, orientation) d’objets relatifs à l’espace en deux ou en trois dimensions. Par exemple, être en mesure d’anticiper la forme, l’apparence, d’un solide d’après son développement relève des connaissances spatiales. (Marchand, 2006b, p. 107)

Récemment, Marchand (2020) a construit un outil théorique dans le cadre d’une recherche portant sur l’élaboration de séquences d’enseignement visant le développement des connaissances spatiales des élèves du primaire. Elle ajoute à sa définition de connaissances spatiales (publiée en 2006b) le rôle des IM (images mentales), en posant l’hypothèse que les connaissances spatiales

peuvent se développer dans l'espace géométrique¹⁶ où la visualisation mentale occupe une place importante :

Ainsi par CS¹⁷, nous désignons les connaissances qui, physiquement (action concrète) ou mentalement (IM), amènent l'apprenant à contrôler, anticiper et communiquer les états, les transformations ou les déformations d'objets de l'espace sensible, de l'espace graphique et, hypothétiquement, de l'espace géométrique (au sens de Perrin-Glorian et Godin, 2017) [...] Mais, en prenant en compte le caractère mental des CS, il est possible, par exemple, de considérer la manipulation mentale d'un patron pour déduire le solide résultant, l'anticipation du solide de révolution à partir de la rotation d'une figure donnée, ou encore l'anticipation de la forme d'une troncature comme des tâches qui articulent CG et CS (Davis *et al.*, 2015; Marchand et Sinclair, 2017; Gobert, 2001). (Marchand, 2020, p. 8)

Pour cette auteure, l'acquisition des connaissances spatiales est tout aussi importante que celle des connaissances géométriques. En fait, les connaissances spatiales sont nécessaires dans la réalisation de diverses activités quotidiennes telles que dessiner, écrire, construire des objets en 3D, se déplacer, pratiquer des sports, etc. (Gutiérrez, 1996; Marchand, 2009b). Plusieurs études ont insisté sur leur importance autant dans le contexte scolaire que non scolaire (Bishop, 1980; Gutiérrez, 1996; Marchand, 2009b; Presmeg, 2006).

2.3.4 Clarifications terminologiques sur les connaissances spatiales

Dans une première approche, j'assimile espace spatial et espace sensible. L'espace sensible est l'espace directement perceptible par les sens (Gonseth, 1945-1955; Chevallard et Jullien, 1990-1991), il est propice à une appréhension par l'expérience et l'intuition.

¹⁶ Perrin-Glorian et Godin (2018) proposent de considérer 3 types d'espace : 1) l'espace sensible qui concerne le monde des objets matériels dans des « problèmes pratiques »; 2) une partie spécifique de l'espace sensible qu'ils désignent par « l'espace graphique des représentations ». On y trouve des représentations d'objets du monde sensible ou d'objets géométriques sous forme de schémas ou de figures en dimension 2; 3) l'espace géométrique, où la théorie de référence peut être une théorie physique ou une théorie axiomatique de l'espace.

¹⁷ Dans cet article, Marchand utilise les abréviations CG pour connaissances géométriques et CS pour connaissances spatiales.

Les connaissances spatiales sont définies dans les travaux français en référence à des situations — au sens de la Théorie des Situations Didactiques — qui font intervenir des connaissances ou savoirs se rapportant au plan et à l'espace, connaissances le plus souvent de nature géométrique :

Ainsi les connaissances spatiales d'un sujet sont celles qui lui permettent de résoudre des problèmes spatiaux, qu'il ait ou non la possibilité de les formuler. Un problème spatial est un problème dont la résolution requiert effectivement la mise en œuvre d'une connaissance que l'observateur reconnaît comme bien décrite par un savoir de nature spatiale et plus particulièrement géométrique. (Brousseau, 2001, p.5-6)

Brousseau (2001) cherche à préciser les formes des connaissances spatiales : modèles implicites d'action mis en jeu dans les situations spatiales (désignées par vision spatiale, images mentales...), souvent non explicites; langages en jeu dans des situations de communication, qui ne seraient pas descriptibles en termes géométriques; énoncés :

Les véritables connaissances sur l'espace se manifestent dans des anticipations ou dans des inférences qui dépassent la perception, la reconnaissance ou la description de l'environnement. (Brousseau, 2001, p. 72)

Les connaissances spatiales dépendent du type d'espace dans lequel elles s'exercent (Berthelot et Salin, 1992; Brousseau, 1983; 2001; Berthelot et Salin, 2000-2001; Galvez, 1985; Salin, 2014b). Ces chercheurs distinguent trois types d'espace¹⁸, qui dépendent à la fois de leur grandeur, de la perception que nous en avons et des outils dont nous disposons pour y œuvrer. Parmi les connaissances spatiales, il y a celles qui concernent davantage le méso-espace et le macro-espace. En voici des exemples :

- savoir comment se diriger, se déplacer dans une école, dans une ville, en forêt ou en mer;

¹⁸ Pour tout objet, trois types d'espace peuvent être considérés (Brousseau, 1983). Le *micro-espace* représente l'espace des petits objets comme les solides que les élèves manipulent en classe ou encore, l'espace d'une feuille de papier. Le *méso-espace* représente par exemple l'espace d'une classe ou d'une école, qui incluent l'espace où l'élève et les objets se situent. Dans cet espace, l'élève peut se déplacer pour voir les objets qui le composent selon différentes perspectives, il peut aussi se déplacer et y déplacer les objets. Le *macro-espace* représente par exemple l'espace d'un quartier, d'une ville, d'une région, d'un pays. La grandeur de cet espace exige une reconstruction mentale chez l'élève. De plus, la nature des informations est multiple (rues, maisons, fleuve, parcs, etc.)

- savoir comment utiliser et produire un plan pour déterminer une position et prévoir un trajet;
- savoir prévoir ses déplacements dans un grand bâtiment inconnu;
- savoir représenter ses propres mouvements, ses déplacements par rapport aux objets environnants.

Les connaissances spatiales auxquelles je vais m'intéresser dans ma recherche concernent le micro-espace. Plus particulièrement, je parlerai de connaissances spatiales quand il s'agira de :

- savoir lire (décoder) des représentations 2D des objets 3D et savoir représenter (encoder) des objets 3D en 2D par des techniques de représentation (perspective cavalière, vues de face, de dessus, de droite, de gauche, etc., développement plan) (Parzysz, 1988; 2007; Tremblay, 2016). Dans la littérature, il y a consensus pour placer l'utilisation des représentations de l'espace au cœur du champ des connaissances spatiales (voir Soury-Lavergne et Maschietto, 2019);
- savoir représenter physiquement des objets géométriques (par exemple, construction de solides avec des « polydrons style frameworks »);
- savoir décrire les figures planes, les objets en 3D (solides géométriques), leurs transformations, les directions de l'espace, les distances entre les objets;
- savoir se repérer dans le plan (sur une feuille de papier), sur une droite, dans l'espace (ex. à partir d'une maquette) (voir Braconne-Michoux, 2018).

Berthelot et Salin (1993-1994; 1999-2000) font référence aux connaissances spatiales comme à des habiletés à propos desquelles les élèves sont capables de communiquer, ce qui suppose qu'ils les ont repérées, qu'ils sont conscients que ce sont des habiletés, qu'ils sont capables de les identifier et d'en parler. À cet égard, je vais réserver le mot « habileté » à ce qui est mis spontanément en œuvre, sans que ce soit identifié par l'élève, c'est-à-dire aux « connaissances opératoires » de Vergnaud (2001), dont j'ai discuté antérieurement (§2.2.1.4).

À la suite de mon argumentation sur les connaissances spatiales et les connaissances géométriques, je précise que les connaissances géométriques sont incluses dans les connaissances spatiales lorsqu'elles ont fait l'objet d'une institutionnalisation au sens de Brousseau (1998). Plus spécifiquement, les objets (§2.3.2.1), les relations (§2.3.2.2), les propriétés géométriques (§2.3.2.3),

les définitions, les théorèmes en géométries plane et spatiale sont des connaissances géométriques (les connaissances prédicatives au sens de Vergnaud (2001)).

Voici des exemples de connaissances spatiales institutionnalisées (connaissances géométriques) :

- savoir lire (décoder) des représentations 2D des objets 3D et savoir représenter (encoder) des objets 3D en 2D par des techniques de représentation (perspective cavalière, vues de face, de dessus, de droite, de gauche, etc., développement plan) (Parzysz, 1988; 2007; Tremblay, 2016);
- les connaissances des propriétés, des définitions et des théorèmes (ex. : médiane, médiatrice, centre de gravité d'un triangle, théorème de Pythagore et sa contraposée, définition de polygone régulier, notion de parallélisme et de perpendicularité, formules d'aire des figures planes, loi des cosinus, etc.);
- les connaissances des propriétés des solides (types de solides : prisme, pyramide, cône, sphère, cylindre; faces, arêtes, sommets d'un solide), formules d'aire et de volume des solides, etc.;
- les connaissances des théorèmes de perpendicularité dans l'espace (droite perpendiculaire à un plan, plan médiateur, angle dièdre entre 2 plans, etc.);
- les relations d'incidence, d'adjacence, d'alignement et de coplanarité dans des solides connus et déjà étudiés.

Il existe des connaissances spatiales qui ne sont pas géométriques, et sont liées aux connaissances procédurales (les connaissances opératoires au sens de Vergnaud (2001)). Elles sont des connaissances spatiales qui permettent d'agir en situation, d'effectuer des actions, de résoudre des problèmes dans des situations concrètes. En voici des exemples :

- savoir décrire les figures planes, les objets en 3D (solides géométriques), leurs transformations, les directions de l'espace, les distances entre les objets;
- reconnaître, décrire, fabriquer ou transformer des objets;
- déplacer, trouver, communiquer la position d'objets;
- savoir se repérer dans le plan (sur une feuille de papier), sur une droite, dans l'espace (ex. à partir d'une maquette) (voir Braconne-Michoux, 2018).

À l'instar de Charnay et Mante (2008), je considère que le développement des connaissances spatiales « se fait par l'intériorisation des actions du sujet, c'est-à-dire par l'aptitude à penser les actions sans les exécuter » (Charnay et Mante, 2008, p. 223).

2.3.5 Les caractérisation des *connaissances spatiales* dans la thèse

À la suite des clarifications terminologiques discutées en §2.3.4, je spécifie que les connaissances spatiales permettent à un individu un contrôle convenable de ses relations avec l'espace sensible (Berthelot et Salin, 1999-2000). Ainsi, bien qu'elles débordent largement du cadre scolaire, elles concernent plus spécifiquement les cinq aspects suivants de la géométrie de l'école secondaire :

- savoir repérer, trouver et communiquer la position des objets avant, pendant ou après déplacement (Berthelot et Salin, 1999-2000);
- savoir reconnaître (après les avoir mémorisés) une banque d'objets géométriques institutionnalisés, standardisés en 2D et 3D (Grenier et Tanguay, 2008; Tanguay et Grenier, 2010) dans des objets physiques concrets ou dans des représentations;
- reconnaître certaines des propriétés de ces objets (qui se manifestent par exemple au découpage), les interrelations entre ces propriétés (Parzysz, 1989; 1991);
- être capable de décrire ces objets et leurs propriétés;
- les connaissances géométriques, qui sont les connaissances spatiales ayant fait l'objet d'une institutionnalisation (les connaissances prédicatives de Vergnaud (2001)).

2.4 Articulation des connaissances spatiales et des connaissances géométriques avec les habiletés spatiales

Après avoir distingué les connaissances spatiales des connaissances géométriques, il est important de considérer que ces deux types de connaissances sont intimement liés et que l'un ne peut être appréhendé sans l'autre (voir Berthelot et Salin, 1993-1994; Marchand, 2006b). Lorsqu'un élève résout un problème de géométrie dans l'espace, les connaissances spatiales entrent en relation avec les connaissances géométriques et les habiletés spatiales. Elles sont donc interdépendantes.

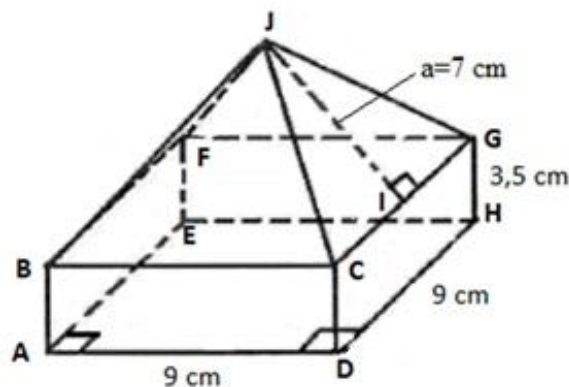
Battista (2007) nous indique que derrière l'étude des concepts géométriques se cachent des connaissances spatiales, puisque les élèves doivent « voir » et analyser les objets géométriques. Ils doivent s'en faire une image mentale, les mettre en relation et les transformer selon la situation pour les conceptualiser. Les connaissances spatiales représentent non seulement une porte d'entrée

pour l'étude de la géométrie — et en particulier pour le développement des connaissances géométriques —, mais elles constituent également un outil cognitif puissant pour l'étude de la géométrie formelle (Moss *et al.*, 2016; Clements et Battista, 1992).

Je vais présenter un exemple de problème démontrant mon point de vue :

2.4.1 Exemple : calculer le volume d'un solide décomposable dont la représentation 2D en perspective est donnée.

Figure 2.11 Solide décomposable



Dans la figure 2.11, un élève doit être capable de percevoir les découpages des objets formant le solide décomposable (connaissances spatiales), mais aussi de les organiser (connaissances spatiales) dans un début de modèle théorique, par exemple en prenant conscience de l'organisation des différents segments en cause (mesures des côtés du prisme et de la pyramide, hauteur du prisme, hauteur de la pyramide, apothème de la pyramide, etc.). De plus, et c'est là que ça se complique pour l'élève, il y a des éléments de connaissances spatiales qui exigent une structuration géométrique de l'espace, avec un appui sur des connaissances géométriques dont les notions de plan, de dimension, d'incidence, de parallélisme, de perpendicularité et d'angle (entre deux arêtes, entre deux faces).

Par exemple, le repérage des angles (droits, dièdres, entre deux arêtes...) dans le solide décomposable constitue une difficulté pour certains élèves (le repérage des angles relève de la visualisation spatiale et des connaissances spatiales). Ainsi, les angles DAE , HDA , AEH , EHD , JIG n'apparaissent pas droits dans le dessin 2D, mais ils le sont bel et bien dans la réalité (conflit entre la visualisation et les connaissances spatiales). Il y a présence aussi d'angles dièdres dont la

mesure est de 90° , entre les faces $ABFE$ et $FGHE$, $FGHE$ et $CGHD$ ainsi que $CGHD$ et $ABCD$. Il y a d'autres angles dièdres, entre les faces triangulaires JCB et JBK , JBK et JFG , JFB et JCG , et JCG et JBC de la pyramide droite à base carrée surmontant le prisme droit.

Lorsqu'on regarde les angles dièdres dans le dessin 2D du solide décomposable 3D, on constate qu'ils ne semblent pas isométriques entre chacune des faces rectangulaires, alors qu'ils le sont dans la réalité. L'élève doit prendre conscience que ce qu'il voit dans le dessin 2D entre en conflit avec ce qu'il sait (le conflit « vu/su » de Parzysz (1988), qui sera discuté ultérieurement). Il y a donc à effectuer un décodage d'informations clés et ce décodage peut se révéler une difficulté, pouvant mener à des interprétations erronées. En conséquence, les connaissances spatiales entrent en jeu avec les habiletés spatiales, spécifiquement la visualisation, dans le décodage d'un dessin 2D réalisé en perspective cavalière.

Avoir en tête (et savoir les reconnaître) une banque d'objets géométriques standardisés autant en 2D qu'en 3D (triangles, rectangles, quadrilatères, polyèdres et corps ronds) fait aussi partie des connaissances spatiales à acquérir. Dans la figure 2.11, l'élève doit mobiliser ses connaissances spatiales antérieures pour reconnaître le prisme droit à base carrée ainsi que la pyramide droite à base carrée.

D'autres connaissances spatiales concernent la reconnaissance des objets géométriques dans des objets concrets, par exemple imaginer une maison ayant la forme du solide décomposable de la figure 2.11, dans des représentations telles qu'un dessin 2D en perspective (cavalière, à 1 ou à 2 points de fuite), connaître certaines de leurs propriétés, etc.

Dans la prochaine section de la thèse, il sera question de l'aspect « raisonnement géométrique » des connaissances géométriques qui interviennent lors de démonstrations (ou preuves) en géométrie de l'espace et qui font appel à ce que Duval (1991) nomme le « raisonnement déductif ».

2.5 Les connaissances géométriques et le raisonnement déductif en géométrie de l'espace

Lorsqu'il est question de démontrer ou de justifier un théorème, une loi ou une définition en géométrie (2D et 3D), le raisonnement déductif entre en jeu. Selon Duval (1991; 1994; 1998), un raisonnement déductif est un raisonnement exprimé en langue naturelle, lié à la figure comme outil

heuristique, soumis à certaines règles et dont la validité peut être contrôlée suivant une structure particulière. Ce type de raisonnement permet d'établir le caractère de vérité d'une proposition par le biais d'une chaîne de propositions intermédiaires admises ou prouvées comme vraies. Il devient ainsi un outil de preuve.

Du point de vue de la preuve et du raisonnement géométrique (voir Vadcard, 1999), il s'avérerait que la géométrie de l'espace donnerait accès à des preuves et à des justifications qui seraient plus riches (arguments élaborés) que celles réalisées en géométrie plane. Selon des chercheurs (Mithalal, 2010; Grenier et Tanguay, 2008; Tanguay et Grenier, 2010), lorsque l'on demande aux élèves du secondaire de produire des preuves en géométrie plane, ceux-ci ne comprennent pas cette exigence (ou ce qui est attendu) car selon eux, tout se voit (au sens de « visualisation directe ») sur la figure ou la représentation 2D. Lorsqu'il est question du rôle de la démonstration à l'école secondaire dans la résolution d'un problème de géométrie, Mithalal (2010) soutient dans sa thèse doctorale que :

Le passage du dessin à la figure géométrique se heurte fortement dans l'enseignement secondaire, à l'évidence visuelle : pourquoi démontrer quand on peut se contenter de lire sur le dessin (Mithalal, 2010, p. 255).

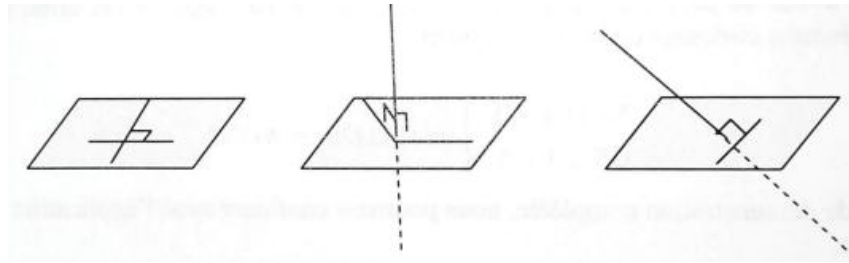
Furtuna (2008) et Furtuna *et al.* (2010) soutiennent que la majorité des enseignants font comme si le passage de la perpendicularité en géométrie plane à la perpendicularité en géométrie 3D allait de soi, alors qu'elle est plus complexe en 3D. En géométrie de l'espace, la perpendicularité ne se présente pas de la même manière qu'en géométrie 2D. En effet, dans les représentations où la perpendicularité est en jeu, il n'y a pas perte d'informations en géométrie plane comme c'est souvent le cas en géométrie spatiale. En conséquence, il m'apparaît qu'en géométrie 3D, cela peut se révéler un moyen de convaincre les élèves de la nécessité de produire une preuve, car les propriétés de la figure en 3D ne se voient pas si facilement : il ne s'agit pas de « voir directement » sur la figure comme c'est le cas en géométrie plane, car il y a des pertes d'informations (présence du conflit « vu/su » dont je discuterai ultérieurement : par ex., les angles droits d'une pyramide à base carrée dessinée en perspective cavalière ne sont pas représentés physiquement droits).

Aussi, des complications peuvent s'ajouter quand des parties sont cachées dans la figure 3D dont les angles ou les segments ne sont pas représentés de façon à rendre compte des relations d'isométrie ou de similitude. En somme, visualiser (directement ou mentalement) la perpendicularité dans l'espace se révèle difficile et complexe pour les élèves (Mithalal, 2010; 2014). La représentation 2D d'un objet 3D ne rend jamais compte exactement de qui est perpendiculaire à quoi dans l'objet 3D. Par exemple, en ce qui a trait au codage de la perpendicularité dans l'espace lors de la production d'un dessin en perspective cavalière d'une pyramide à base triangulaire, on peut penser qu'il faut que l'élève le sache d'avance pour rajouter le bon symbole de perpendicularité (traits en coin) relativement à une hauteur dans ce solide.

Je vais apporter une clarification importante lorsqu'il s'agit de produire des preuves en géométrie 3D : elles se révèlent plus difficiles et complexes à réaliser qu'en géométrie plane (2D) car la visualisation spatiale entre en jeu et pose problème, davantage en géométrie 3D qu'en géométrie plane. Afin d'illustrer les différences entre la géométrie plane et celle de l'espace, prenons l'exemple de la notion de « distance » d'un point à un objet où intervient le concept de « perpendicularité ». Dans le plan, la distance entre un point extérieur à une droite et cette droite est définie comme la longueur du segment qui joint le point au pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite (voir dessin de gauche à la figure 2.12). Ce segment est en fait le plus court parmi les segments qui joignent le point à un point de la droite. Dans l'espace, la distance d'un point à un plan est elle aussi définie comme le minimum des longueurs des segments joignant le point à un point du plan. Toutefois, la réalisation de ce minimum implique, du point de vue de la perpendicularité avec les droites incluses dans le plan, l'existence d'au moins deux relations de perpendicularité (voir dessin au centre à la figure 2.12). Ainsi, il ne suffit plus, comme dans le plan, d'avoir une seule relation de perpendicularité pour que la droite soit perpendiculaire au plan (voir dessin de droite à la figure 2.12), et trouver la perpendiculaire sur laquelle mesurer la distance du point au plan ne va plus de soi.

Figure 2.12 Notion de distance et de perpendicularité en géométrie 2D et 3D

(Furtuna *et al.*, 2012, p. 289)



2.6 Autres concepts clés du cadre théorique

Dans ma définition de « visualisation spatiale », j'ai discuté de visualisation *interne* impliquant la création d'images mentales. Lorsqu'il est question de résoudre un problème de géométrie 3D, l'élève doit être capable de s'appuyer sur des représentations 2D, sur des représentations mentales et des images mentales. Dans la prochaine section, j'apporterai des clarifications terminologiques sur ces concepts.

2.6.1 Les images mentales liées à la visualisation spatiale

De quoi est faite une image mentale et comment se forme-t-elle ? Dans la communauté de recherche, deux types d'approches ont permis d'étudier la nature des images mentales : une première s'attache à la relation existant entre l'image mentale et la perception, tandis que la deuxième explore la structure de l'image elle-même (voir Kosslyn et Koenig, 1992).

Dans mon étude, le sens qui m'intéresse est celui évoqué, en l'absence d'objets physiques, par les représentations 2D d'objets 3D sur papier ou sur un écran numérique. Mais avant de définir précisément ce que j'entends par *image mentale*, je vais présenter le sens que lui donne la chercheuse Marchand.

2.6.1.1 Le sens de l'image selon Marchand (2006)

Marchand (2006b) a élaboré un cadre de référence pour la création d'activités visant le développement des images mentales dans l'apprentissage de la géométrie 3D. Elle définit le concept « image mentale » de cette façon :

Image mentale : représentation mentale d'objets ou d'événements qui ne sont pas physiquement présents. Il y a trois types d'images mentales : statique, cinétique (transformation isométrique) et transformatrice (déformation). Ces types d'images peuvent être reproductrices dans le cas où l'objet/événement a déjà été vu concrètement par le sujet, ou anticipatrices quand l'objet/événement n'a jamais été vu concrètement. (Marchand, 2006b, p. 107)

Pour cette auteure, le sens d'image mentale est lié spécifiquement au processus de visualisation d'un individu, que ce soit avec des objets 3D déjà vus ou non. Par exemple, quand une personne parle de la figure « cube », elle a en mémoire une représentation particulière de cet objet géométrique. Cette personne a donc une image mentale de la figure, créée à un moment donné de son parcours. Une fois l'image mentale élaborée, il est aussi possible de la modifier, soit en la mettant en mouvement (par exemple en appliquant une rotation), soit en la transformant en une autre forme (par exemple en la divisant en sous-figures de mêmes dimensions). C'est là que le processus de visualisation d'un objet géométrique est mis à l'œuvre.

2.6.1.2 Le sens de l'image mentale dans ma recherche

En psychologie cognitive, une image mentale est une représentation mentale résultant d'un processus dynamique, d'une abstraction permettant au cerveau d'emmagasiner et de manipuler l'information perceptive puisée à même l'environnement, par une schématisation de ses traits essentiels (Legendre, 2005).

Je vais définir ce que j'entends par « image mentale » en restreignant spécifiquement cette signification à mon domaine d'étude. Pour moi, une **image mentale** constitue une représentation cognitive d'objets géométriques 3D qui résulte d'un processus de visualisation spatiale. Ces représentations cognitives peuvent s'appuyer sur et s'intégrer à des propriétés connues de l'objet 3D en question, quand l'individu a bien assimilé ces propriétés. Il y a deux types d'images mentales : images concrètes et images dynamiques. Ces types d'images peuvent être reproductrices dans le cas où l'objet/phénomène a déjà été vu concrètement par le sujet, ou anticipatrices quand l'objet/phénomène n'a jamais été vu concrètement. L'image mentale créée par un individu peut provenir d'un objet concret vu dans le passé, d'un dessin 2D, d'un modèle 3D, d'une description verbale ou écrite, d'une définition ou même encore, à un niveau plus avancé, d'un énoncé symbolique.

Voici un lien important concernant mes définitions de « connaissances spatiales », « visualisation » et « image mentale » : le développement des connaissances spatiales est directement lié à la visualisation étant donné la nature d'intériorisation d'aspects physiques d'un objet : pour développer des connaissances spatiales, nous devons intérioriser les propriétés physiques d'objets et donc faire référence à la visualisation, qui elle-même fait référence aux images mentales. Ainsi, pour développer les connaissances spatiales, le passage de l'espace physique vers l'espace représentatif est nécessaire. Ce passage relèverait de la visualisation, et s'appuierait sur des images mentales.

2.6.2 Les représentations internes/externes d'objets géométriques 3D

Dans ma recherche, je distingue les **représentations internes** et les **représentations externes**. Les représentations internes concernent plus particulièrement les images mentales correspondant à des organisations internes (configurations mentales possibles des individus) que nous construisons à partir de la réalité (Dufour *et al.*, 1987; Goldin, 1987; Kaput, 1987). Quant aux représentations externes, elles font référence à toutes les organisations symboliques externes : mots, symboles, schémas, diagrammes, équations, etc. (Janvier, 1987; Goldin et Kaput, 1996; Goldin, 1998) qui ont pour objectif de représenter extérieurement une certaine « réalité mathématique » (Dufour-Janvier *et al.*, 1987).

Dans le cadre de mon étude, une **représentation mentale** est synonyme d'une image mentale qui pourrait être décrite comme un stimulus cérébral qui déclenche chez l'individu une référence (cognitive) à l'objet en cause, que cet objet soit (physiquement) en face de lui ou non, ou soit extérieurement « représenté » ou non; extérieurement représenté par exemple par une photo, un dessin, une reproduction, ou même un symbole; bref par ce que les sémioticiens appellent le signifiant d'un signe. Dans le cas particulier des objets mathématiques, Duval (1993) a nommé et caractérisé ces signes (combinaison du signifiant et du signifié) comme les représentations sémiotiques des concepts mathématiques. La locution « représentation mentale » sera le plus souvent préférée à « image mentale » parce qu'elle fait plus explicitement référence à cet aspect « sémiotique » des images de l'intellect.

Par exemple, la représentation plane (en perspective cavalière) d'un objet tridimensionnel en est une représentation sémiotique possible. Ses projections orthogonales en sont d'autres mais aussi,

une phrase mathématique comme « la pyramide à base carrée $ABCDE$ », ou une phrase du langage courant comme « la forme de la boîte à chapeau que tu as devant toi ». Il conviendrait donc d'éclaircir la polysémie du verbe « représenter », et de préciser à chaque fois qu'on l'emploie de quelle « représentation » il s'agit, afin de lever l'ambiguïté.

Dans ma recherche, lorsque je discute de représentations mentales d'objets 3D, cela désignera les images mentales qu'un élève se construit d'un objet 3D, combinées aux éléments (cognitifs) d'organisation, aux informations spatiales, qui les accompagnent. Quant aux représentations d'objets 3D, il s'agira de dessins 2D d'objets tridimensionnels tels que : représentations d'objets 3D en perspective cavalière; projections orthogonales d'objets 3D (face, droite, dessus, gauche, dessous, arrière). Les représentations mentales des objets 3D constituent des connaissances relativement sophistiquées, complexes. Elles sont peut-être suffisantes pour maîtriser et bien appliquer les formules de volume, mais sont-elles vraiment nécessaires ? Je fais l'hypothèse que oui, du moins dans les contextes scolaires où les problèmes sont donnés discursivement ou à partir d'un dessin 2D.

Mais l'élève doit aussi être capable d'analyser, de « manipuler dans sa tête » (faire tourner, visualiser à partir de différents points de vue, repositionner dans l'espace, etc.) ces représentations mentales. Pour cela, il y a un travail, voire un « entraînement » préalable à réaliser et cet entraînement vise le développement de deux habiletés :

- la visualisation spatiale (qui se développe à travers la vision — le « vu » de Parzys, j'y reviendrai — et dans une moindre mesure, à travers le toucher);
- les transformations spatiales.

Cet entraînement implique aussi la mise-en-œuvre des connaissances spatiales (le « su » de Parzys). Pour que ces connaissances puissent intervenir adéquatement, il est important que l'élève différencie ce qu'est une représentation comme dessin, d'une représentation comme figure.

2.6.3 Les différences entre figure, dessin et représentation

Dans le domaine de la didactique de la géométrie, il est usuel de distinguer, voire d'opposer dessin et figure. En géométrie, la figure existe en effet indépendamment du dessin ou des multiples dessins qui en seront faits, puisque la figure est l'objet et le dessin en est une représentation : la figure est

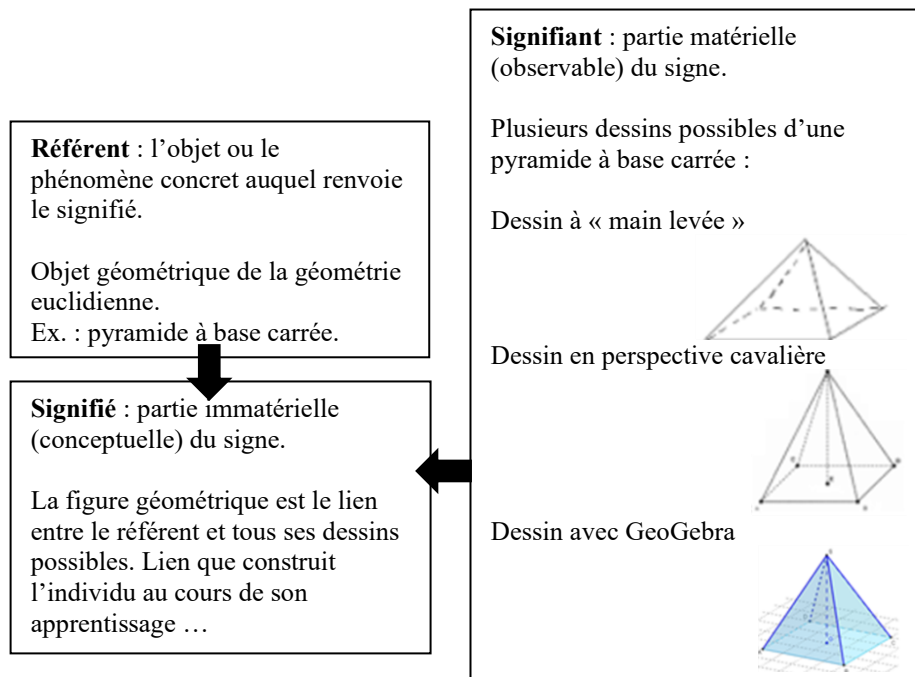
immuable et idéale, le dessin est tributaire des matériaux utilisés, de l'habileté manuelle du dessinateur, mais aussi de ses connaissances, de l'interprétation qu'il donne à ce qu'il doit dessiner, etc.

Une **figure** est une idéalité, c'est-à-dire une conception de l'esprit; ses propriétés, de ce fait, sont exactement celles qui sont annoncées : les côtés du parallélogramme-figure sont rigoureusement parallèles, ceux du parallélogramme-dessin ne le sont pas forcément. Ainsi, face à la perfection de la figure, l'imperfection du dessin est inévitable, du fait de l'impossibilité de rendre sur papier des points sans dimension ou des droites sans épaisseur; elle est donc plus ou moins accentuée selon les instruments de dessin; mais elle est aussi tributaire de l'exécutant — ou de celui qui doit interpréter la représentation qu'il a devant lui, justement comme un dessin ou comme une figure selon le cas —, en particulier de la familiarité qu'il a ou non avec les savoirs sous-jacents, familiarité qu'il acquiert avec l'usage et le temps.

La distinction entre dessin, figure et objet géométrique a été et continue d'être au centre de plusieurs travaux de recherche. Par exemple, Parzysz (1989) réserve le mot « figure » à l'objet géométrique et le mot « dessin » à une représentation graphique de cette figure, autant en géométrie plane qu'en géométrie de l'espace. Laborde et Capponi (1994) reprennent cette distinction entre dessin, figure et objet géométrique en se plaçant dans la triade « référent, signifiant, signifié », empruntée à la sémiotique ou à la linguistique :

En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique [...]. La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant un de ses dessins qui le représente [...]. Le terme figure géométrique renvoie dans cette acception à l'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles. (Laborde et Capponi, 1994, p. 168)

Figure 2.13 La triade référent-signifiant-signifié : l'exemple de la pyramide à base carrée



Dans la communauté des chercheurs, tous s'accordent pour dire qu'un dessin géométrique n'est pas une figure, bien que l'expression « tracer une figure » entretienne l'ambiguïté. Pour certains, le dessin devient figure dès qu'il est complété par l'énoncé de ses propriétés. Parzysz (1989) affirme que « la figure géométrique est l'objet géométrique décrit par le texte qui la définit, une idée, une création de l'esprit tandis que le dessin en est une représentation ».

Laborde et Capponi (1994) précisent cette idée en définissant la figure géométrique comme la « relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles ». Dans tous les cas, il y a bien, d'une part un objet idéal, dont on peut énoncer des propriétés et sur lequel porte le raisonnement, d'autre part des représentations de cet objet. Il semble que dans l'usage scolaire courant, le même mot, par exemple le mot « carré », serve à désigner à la fois l'objet idéal et les représentations de cet objet.

Dans ma thèse, je vais tenir compte de cette distinction entre figure, dessin et représentation d'un objet 3D. Dans les problèmes que je vais présenter aux élèves, lorsque je discuterai de figure et de dessin, je vais faire référence aux mêmes sens que ceux que donne Parzysz, à savoir qu'une figure

concerne l'objet géométrique et qu'un dessin constitue une représentation sur un support matériel (papier, tableau d'une salle de classe ou sur un tableau blanc interactif « TBI », écran d'un ordinateur) de cette figure.

2.6.4 La caractérisation de *problèmes* en géométrie spatiale

À la lumière de ce qui a été discuté dans la problématique et selon ma définition de ce qu'est un « problème » en géométrie, voici ma caractérisation de « problème », dans le contexte de ce que je compte expérimenter dans ma thèse en enseignement de la géométrie spatiale :

- l'élève doit être confronté à une question géométrique avec un but à atteindre, et pour laquelle la démarche et la solution ne sont pas connues d'emblée (Brun, 1999; Mayer, 2010);
- exige de l'élève qui résout une suite d'actions (ou opérations) pour atteindre ce but (recherche d'une solution) qui est à sa portée (Newell et Simon, 1972);
- des obstacles (Brousseau, 2003; Mason *et al.*, 2012) sont susceptibles de se manifester lors de la résolution;
- un problème de géométrie n'est pas un exercice routinier ou d'application (MEQ, 1988); puisque les connaissances et les habiletés de chacun diffèrent, un problème est toujours relatif à l'élève qui cherche à le résoudre (Schoenfeld, 1985).

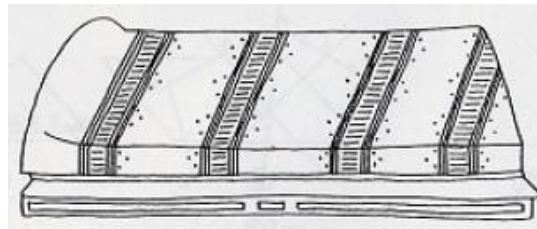
2.6.5 Le conflit « vu/su » (Parzysz, 1988; 2007)

Comme discuté dans la Problématique (voir §1.2.2), la représentation plane (2D) des objets 3D est difficile en raison de la perte d'informations entre le 3D et le tracé (2D). Je m'appuie sur les travaux de Parzysz (1988; 2007) ainsi que de Colmez et Parzysz (1993), qui proposent une analyse en fonction de deux pôles, le « vu » et le « su », qui constituent pour Parzysz les deux principes auxquels il se réfère pour interpréter les rapports des élèves du secondaire aux dessins de géométrie.

De façon générale, lorsqu'il s'agit de représenter un objet tridimensionnel, et si l'on veut qu'il soit facilement identifié, on le dessine selon un point de vue habituel (le « vu »), c'est-à-dire, le plus souvent, à peu près de face (mais pas complètement) et légèrement de dessus. Mais ceci ne permet pas de conserver la totalité des propriétés spatiales de l'objet (le « su »), car certaines parties sont cachées et d'autres déformées par la perspective. Il est donc nécessaire de « négocier » – ce qui se fait le plus souvent de façon non réfléchie – la coexistence du vu et du su, afin d'arriver à une représentation synthétique de l'objet. (Parzysz, 2007, p. 138)

Selon Parzysz (2007), cette « coexistence » entre le « vu » et le « su » dans une même représentation n'est pas toujours « pacifique » et peut donner lieu à des conflits, voire à des interprétations erronées comme celles illustrées à la figure 2.13, dessin réalisé à partir d'une partie de la miniature de la mort de Moïse illustrée dans la Bible de Naples (XIV^e siècle). Ce lit est représenté en perspective, avec des fuyantes (le vu) ; les bandes parallèles qui ornent la couverture sont représentées par des parallèles (le su). Le conflit apparaît en bas du dessin à droite, où la dernière bande décorative est oblique par rapport au pied du lit, au lieu de lui être parallèle comme on s'y attendrait.

Figure 2.14 Dessin d'un lit – Bible de Naples (Parzysz, 2007, p. 139).



Il en va de même dans les représentations 2D des objets 3D produites par les élèves. Comme ils ne peuvent pas gérer simultanément les deux pôles (le « vu » et le « su »), les élèves composent pour obtenir une représentation satisfaisante pour eux. La gestion de plus en plus fine de ce conflit associée à une mise en place de règles de codage permet aux élèves de produire et de lire différentes représentations planes.

Le **conflit « vu/su »** (Parzysz, 1988; 2007) sera utilisé comme outil théorique, aux fins des analyses. Parzysz a établi les relations entre une figure et ses différentes représentations, que ce soit en géométrie plane ou en géométrie 3D. La figure 2.14 schématise ces relations, où 3 niveaux de représentation sont distingués :

- le niveau 0 qui constitue la figure elle-même, c'est-à-dire l'objet géométrique;
- le niveau 1 qu'il nomme « représentation fidèle » (ma traduction de *close representation*), selon laquelle la représentation « ressemble » à la figure géométrique : même dimension, en dehors du passage de l'abstrait au concret;

- le niveau 2 qu'il nomme « représentation éloignée » (ma traduction de *distant representation*), où la dimension de la représentation est strictement inférieure à celle de la figure.

Dans les niveaux 1 et 2, la représentation peut être en 2D (dessin), si la figure appartient à la géométrie plane, en 2D ou en 3D (modèle) si elle appartient à la géométrie de l'espace.

Figure 2.15 Relations entre une figure et ses modes de représentations (Parzysz, 1988, p. 80)

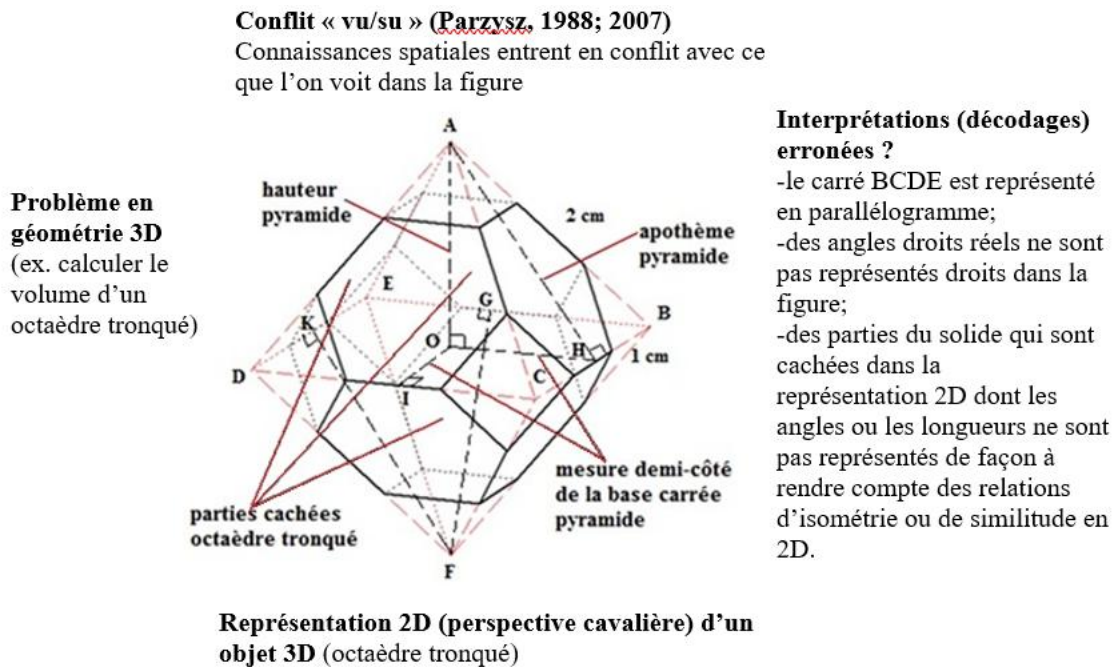
		Géométrie	
		2D	3D
	Niveau 0	figure	
<i>Représentation fidèle</i>	Niveau 1	dessin	modèle
<i>Représentation éloignée</i>	Niveau 2		dessin


 Perte d'information

Les problèmes de codage d'une figure géométrique 3D en un seul dessin ont leur origine dans l'impossibilité de donner une représentation fidèle de la figure, et dans l'obligation de se rabattre sur une représentation éloignée, dans laquelle il y a une perte d'information. L'émetteur est effectivement confronté à un dilemme, en raison du fait que ce que l'on sait d'un objet 3D entre en conflit avec ce que l'on voit de sa représentation (Parzysz, 1988, p. 83-84).

Lorsque, dans un problème de géométrie spatiale, il y a présence de représentations 2D d'objets 3D, ou quand l'élève doit en produire une pour résoudre le problème, alors le conflit « vu/su » est susceptible de se manifester : on ne peut dessiner certaines figures de l'espace que si l'on sait d'avance comment en sont disposés les divers constituants. Mais par ailleurs ces connaissances peuvent entrer en conflit avec ce que l'on voit dans la figure, par exemple l'angle droit entre deux faces d'un cube qui n'est pas (physiquement) droit dans sa représentation en perspective cavalière. Les représentations 2D ne facilitent pas nécessairement le repérage des éléments et peuvent être source d'illusions, peuvent donner lieu à des interprétations (décodages) erronées. En conséquence, dans le développement des habiletés spatiales, nous devons trouver comment favoriser celui des connaissances spatiales sans entraver la compétence à visualiser; autrement dit, il s'agit de trouver comment les différentes habiletés spatiales et les connaissances spatiales peuvent se développer en se soutenant plutôt qu'en entrant en conflit.

Figure 2.16 Le conflit « vu/su » (mon adaptation de Parzysz, 1988; 2007)



2.6.6 Tableau-synthèse des concepts du cadre théorique

Je présente un tableau-synthèse afin de voir rapidement les différences entre chacun des concepts-clés du cadre théorique.

Tableau 2.2 Synthèse des concepts du cadre théorique

Sens spatial	Concept parapluie qui englobe les habiletés spatiales, l'imagerie mentale et leurs interrelations ainsi que la structuration de l'espace.
Habiletés spatiales (visualisation et transformations)	
Visualisation spatiale : – peut être liée spécifiquement à un aspect des connaissances spatiales, à savoir le processus de décodage/encodage des représentations 2D des objets 3D.	– visualisation <i>directe</i> (ou externe) qui est la perception par la vision (au sens de Duval, 2002) d'un objet physique, d'une représentation 2D sur papier ou sur un écran numérique; – visualisation <i>mentale</i> (interne) induite par la création d'images mentales, en premier lieu à partir de la visualisation externe d'un objet ou d'une représentation, ensuite issue de la mémorisation d'une telle visualisation externe et à un stade ultérieur, à partir de l'imagination de possibles visualisations externes.
Transformations	– géométriques : les isométries (translation, rotation, réflexion, réflexion glissée pour le plan; la liste est plus longue et complexe pour l'espace) et les similitudes (homothéties et autres types de similitude); – autres types de transformations utilisées dans la résolution de problèmes en géométrie : découpages et reconfigurations, déplacements (qui incluent certaines des isométries déjà nommées) et projections.

Connaissances spatiales	– savoir repérer, trouver et communiquer la position des objets avant, pendant ou après déplacement; – savoir reconnaître une banque d’objets géométriques institutionnalisés, standardisés, en 2D et 3D; – reconnaître certaines des propriétés de ces objets (qui se manifestent par exemple au découpage), les interrelations entre ces propriétés; – être capable de décrire ces objets et leurs propriétés – les connaissances géométriques, à savoir les connaissances spatiales ayant fait l’objet d’une institutionnalisation (connaissances prédictives de Vergnaud (2001)).
Connaissances géométriques	– issues du savoir géométrique et mises en jeu dans la résolution de problèmes de l’espace; – incluses dans les connaissances spatiales : – savoir lire (décodage) et savoir écrire ou dessiner (encodage) des représentations 2D d’objets 3D; – propriétés, définitions et théorèmes des figures planes (ex. : médiane et médiatrice d’un triangle, théorème de Pythagore et sa contraposée, définition de polygone régulier, notion de parallélisme et de perpendicularité, formule d’aire d’un triangle quelconque, loi des cosinus, etc.); – propriétés des solides (types de solides : prisme, pyramide, cône, sphère, cylindre; faces, arêtes, sommets d’un solide, formule de volume des solides, etc.); – théorèmes de perpendicularité dans l’espace (droite perpendiculaire à un plan, plan médiateur, angle dièdre droit entre 2 plans, etc.); – les relations d’incidence, d’adjacence et de coplanarité dans les objets connus, déjà étudiés.
Image mentales (représentations mentales)	– représentations cognitives d’objets géométriques 3D, et qui résultent d’un processus de visualisation spatiale. Ces représentations cognitives peuvent s’appuyer sur et s’intégrer à des propriétés connues de l’objet 3D en question, quand l’individu a bien assimilé ces propriétés.
Problème (caractérisation)	– l’élève doit être confronté à une question géométrique avec un but à atteindre, et pour laquelle la démarche et la solution ne sont pas connues d’emblée (Brun, 1999; Mayer, 2010); – exige de l’élève qui résout une suite d’actions (ou opérations) pour atteindre ce but (recherche d’une solution) qui est à sa portée (Newell et Simon, 1972); – des obstacles (Brousseau, 2003; Mason <i>et al.</i>, 2012) sont susceptibles de se manifester lors de la résolution; – un problème de géométrie n’est pas un exercice routinier ou d’application (MEQ, 1988); puisque les connaissances et les habiletés de chacun diffèrent, un problème est toujours relatif à l’élève qui cherche à le résoudre (Schoenfeld, 1985).
Conflit « vu/su »	Lorsque, dans un problème de géométrie spatiale, il y a présence de représentations 2D d’objets 3D, ou quand l’élève doit en produire une pour résoudre le problème, alors le conflit « vu/su » est susceptible de se manifester : on ne peut dessiner certaines figures de l’espace que si l’on sait d’avance comment en sont disposés les divers constituants, mais par ailleurs ces connaissances peuvent entrer en conflit avec ce que l’on voit dans la figure.

2.7 Intentions de recherche

L'objet de recherche est de comprendre le fonctionnement des habiletés spatiales et des connaissances spatiales de l'élève en proposant à celui-ci des problèmes de géométrie spatiale conçus avec l'intention de développer ces habiletés et connaissances en interdépendance.

Conséquemment à la problématique et au cadre théorique ici en cause, l'objectif de cette étude est le suivant : décrire et analyser les rôles possibles des habiletés spatiales, des connaissances spatiales et des connaissances géométriques ainsi que leurs interactions, dans un contexte d'apprentissage par résolution de problèmes en géométrie spatiale.

Les **questions de recherche** se déclinent ainsi :

- 1) Quels rôles peuvent jouer les habiletés spatiales et les connaissances spatiales, notamment via les processus d'encodage et de décodage des représentations 2D, dans la résolution de problèmes de géométrie spatiale de niveau secondaire ? Comment décrire et analyser ces rôles à partir des démarches de résolution, par les élèves, des problèmes proposés ?
- 2) En quoi les problèmes proposés ont-ils été propices à faire travailler de manière interdépendante les habiletés spatiales, les connaissances spatiales, les connaissances géométriques et leur coordination ? Sinon, peut-on retravailler ces problèmes, les revoir, les ajuster relativement à certains aspects des habiletés spatiales, des connaissances spatiales et géométriques qu'ils mettent en jeu ?

CHAPITRE 3

MÉTHODOLOGIE

Dans ce chapitre, je présente un exposé critique des méthodologies pouvant être adoptées pour mon objet de recherche (*Design Research*, ingénierie didactique, *Teaching experiment*) en justifiant mes choix méthodologiques, notamment celui d’opter pour le *Design Research*. Puis, je décris comment s’est fait l’opérationnalisation et l’instrumentation de la méthodologie retenue (recrutement des participants, considérations éthiques, phases du *Design Research*). Une description des trajectoires hypothétiques d’apprentissage relatives aux trois problèmes de géométrie spatiale pour l’expérimentation en classe sera proposée.

3.1 Exposé critique des méthodologies dans le domaine relatif à la question traitée

Compte tenu de la nature de la problématique et des objectifs de ma recherche, l’approche méthodologique du *Design Research* a été retenue (Edelson, 2002; Cobb et Gravemeijer, 2008). Néanmoins, il apparaît pertinent d’examiner d’autres méthodologies de recherche adoptées dans les travaux relatifs à la question traitée par mon étude. Ainsi, une recension des écrits traitant des habiletés spatiales et des connaissances spatiales dans la résolution de problèmes spatiaux a été réalisée, et exhibe des études quantitatives et qualitatives (voir Annexe A). La plupart des études traitant des habiletés spatiales utilisent des méthodologies quantitatives à travers lesquelles les chercheurs recueillent des données via des questionnaires, dans la tradition des tests psychométriques. Une analyse factorielle est issue de ces tests, et vise à décomposer les habiletés spatiales en sous-composantes pour aider à leur compréhension (Colom *et al.*, 2001; Hegarty et Waller, 2005). Plus précisément, ces tests permettent aux chercheurs d’évaluer la performance des élèves sur des habiletés spatiales telles que la visualisation spatiale, la rotation mentale, etc. Cependant, aucune de ces recherches ne permet de comprendre comment agissent les habiletés spatiales lorsqu’elles sont en interactions avec les connaissances spatiales. En outre, des chercheurs ont produit des méta-analyses (quantitatives) portant sur les habiletés spatiales (Carroll, 1993; Höffler, 2010; Lohman, 1988; Uttal *et al.*, 2013). Leur objectif est d’établir une typologie des habiletés spatiales. Bien qu’elles ne renseignent pas sur les rôles des habiletés spatiales, une de ces méta-analyses (Uttal *et al.*, 2013) soutient que les habiletés spatiales seraient malléables et qu’elles pourraient se développer par un entraînement.

Selon ma recension, un nombre restreint d'études (Pittalis et Christou, 2010; 2013; Pittalis *et al.*, 2010) avec méthodologie mixte (quantitative avec analyse factorielle et qualitative comportant quelques entrevues) présentent un modèle décrivant des types de raisonnement de la géométrie 3D et leur relation avec les habiletés spatiales – à partir de problèmes élaborés dans d'autres études dont Battista (1999), Parzysz (1988) et Gutiérrez (1992). Les résultats indiquent que la pensée géométrique 3D peut être décrite par quatre types distincts de raisonnement, se rapportant à la représentation d'objets 3D, la structuration spatiale, la conceptualisation des propriétés mathématiques et la mesure (aire et volume des solides). Bien que les auteurs de ces études discutent de certaines habiletés spatiales (ex. visualisation), des connaissances spatiales (ex. lecture (décodage) et écriture (encodage) de représentations 2D d'objets 3D) et des connaissances géométriques (ex. les relations d'incidence et d'adjacence), elles n'apportent pas d'informations nouvelles sur le *modus operandi* de ces habiletés spatiales et des connaissances spatiales et géométriques en contexte de résolution de problèmes spatiaux.

Les études qualitatives recensées (Colmez et Parzysz, 1993; Duroisin, 2015; Parzysz, 1991a; 1991b; Marchand, 2020; Mithalal, 2014; Tremblay, 2016) traitant de la visualisation spatiale et des connaissances spatiales utilisent l'ingénierie didactique, pouvant inclure ou non un modèle interprétatif présentant des tâches sous forme de problèmes à résoudre. Ces études se rapprochent davantage de mon objectif de recherche. Par exemple, celle de Parzysz (1991a) constitue une ingénierie didactique visant à outiller les élèves dans la résolution de problèmes spatiaux. Parzysz précise que la résolution d'un problème en géométrie 3D implique trois aspects : l'espace physique, la géométrie élaborée comme une modélisation de l'espace et un système de représentation 2D des objets 3D. Ces aspects sont reliés à trois questions qui ont trait à l'apprentissage des élèves en Seconde (en France; grosso modo la 5^e secondaire au Québec) : le développement des habiletés spatiales, la construction d'un système de règles en géométrie et l'encodage/décodage des représentations 2D. De plus, ces mêmes aspects sont liés, interdépendants, et sont à la base d'une certaine efficacité dans la résolution des problèmes spatiaux. Parzysz suggère de mettre au point une ingénierie didactique pouvant gérer les conventions, les ambiguïtés des représentations 2D et le conflit « vu/su », de même que les rapports entre géométrie et représentations 2D. Dans son expérimentation, il souligne que la représentation en perspective parallèle paraît bien adaptée à l'apprentissage visé, comme outil pour la résolution de problèmes. Une bonne utilisation de cet

outil demande cependant, selon Parzysz, un apprentissage spécifique (contrôle du transfert des propriétés), sans quoi il perd de son efficacité. De plus, le recours à la manipulation de maquettes apparaît bénéfique. Les images mentales des élèves suscitées par ces maquettes étaient, à court terme, réinvesties de façon efficace dans la résolution des problèmes où elles intervenaient.

3.2 Choix méthodologiques : justifications et particularités du *Design Research*

Pour choisir la méthodologie la plus susceptible de permettre la réalisation de la recherche, plusieurs éléments ont été considérés. D'abord, une attention spécifique a été portée à la problématique. Elle relève d'une recherche fondamentale qui suggère des approches qualitatives (Paillé, 2009b). Mon étude constitue une recherche qualitative/interprétative au sens de Karsenti et Savoie-Zajc (2004).

Puisque les questions de recherche m'amènent à chercher des problèmes de géométrie spatiale appropriés à mes objectifs et à les soumettre à la classe sous forme d'expérimentation, il apparaît que la méthodologie du *Design Research* (Edelson, 2002; Cobb et Gravemeijer, 2008) se prête bien à ces visées.

L'élément clé dans le choix de la méthodologie a trait au rôle (ou sens) des « problèmes ». Le sens de « problème » selon la TSD (Brousseau, 1998) — qui constitue le cadre théorique générale de la méthodologie de l'ingénierie didactique (Artigue, 1990) —, peut être considéré comme celui de présenter à l'élève un obstacle qu'il ou elle doit franchir pour développer une nouvelle connaissance. Dans ma thèse, les problèmes constituent un « outil » pour mieux comprendre les mises en fonctionnement des habiletés spatiales et des connaissances spatiales. Cela implique qu'il pourrait être nécessaire de « revenir » sur ces problèmes après les avoir « expérimentés » une première fois auprès des élèves, afin de mieux les calibrer. C'est pourquoi l'ingénierie didactique n'est peut-être pas idéale comme méthodologie dans ce contexte, alors que le *Design Research* se révèle plus approprié. En effet, cette méthodologie est intéressante pour son caractère cyclique et pour la position centrale qu'y occupe l'élaboration des activités d'enseignement et d'apprentissage. Chaque cycle est composé de cinq phases, les phases 4 et 5 pouvant être plus ou moins simultanées. Avant de décrire de façon détaillée chacune de ces phases, dans le contexte de ma recherche, j'argumente davantage sur le choix du *Design Research*, en quoi il constitue une approche méthodologique susceptible de permettre l'atteinte des objectifs de recherche.

D'abord, en soumettant aux élèves des problèmes spatiaux élaborés dans la phase 1 (le design de la séquence d'enseignement), je veux comprendre comment fonctionnent et interviennent les connaissances spatiales, les connaissances géométriques et les habiletés spatiales avec un groupe d'élèves (phase 2 : expérimentation en classe), en particulier comment se manifeste (ou non) le conflit « vu/su » dans la résolution de ces problèmes. Il en a suivi une analyse des données expérimentales (phase 3) obtenues principalement via les productions écrites des élèves, mais aussi via le travail en binôme d'élèves (travail qui a été capté sur vidéo), selon la méthodologie dite du *Think aloud* (pensée à voix haute; van Someren *et al.*, 1994; Webb, 1991), dont je discuterai ultérieurement (§3.3.2). La phase 4 a consisté en une révision, à la lumière de l'analyse, des hypothèses théoriques, des choix didactiques et des trajectoires d'apprentissages anticipées. S'en est suivi une « mise-à-niveau » des problèmes soumis aux élèves lorsque les analyses de la phase 3 ont révélé que dans tel ou tel problème initialement posé, certaines habiletés spatiales et connaissances spatiales n'interagissaient pas de façon optimale, ou même entraient en conflit, ou encore ne se manifestaient pas, ne se révélaient pas nécessaires, et que par conséquent la conception initiale des problèmes gagnerait à être révisée. La phase 5 a consisté en l'ajustement du design de la séquence découlant de cette révision, à partir duquel un nouveau cycle pourrait être amorcé.

3.2.1 Les particularités de la méthodologie du *Design Research*

Une préoccupation communément exprimée à propos du *Design Research* est la certitude relative de ses résultats par rapport aux recherches empiriques (Edelson, 2002). Contrairement aux résultats de la recherche empirique, le *Design Research* ne conduit pas à des résultats avec des niveaux de confiance statistiquement déterminés. Les théories développées dans le *Design Research* étant généralement liées à un apprentissage spécifique (ex. : la géométrie spatiale) autour d'objectifs d'apprentissage ciblés, les résultats obtenus sont difficiles à généraliser. Cette préoccupation met en évidence deux contrastes importants entre le *Design Research* et la recherche expérimentale. La première est que l'objectif du *Design Research* est différent de celui de la recherche empirique. Par conséquent, ces deux méthodologies ne devraient pas être jugées selon les mêmes critères. Le *Design Research* vise à générer de nouvelles théories utiles. Ainsi, deux paramètres d'évaluation importants pour cette méthodologie sont la nouveauté et l'utilité. Le but du *Design Research* est de générer des théories qui ne pourraient être engendrées ni par une analyse isolée, ni par des approches empiriques traditionnelles (Patton, 1990). Le second contraste entre le *Design Research*

et la recherche empirique est leur force. Les méthodes empiriques tirent leur force de l'échantillonnage statistique. Comme d'autres chercheurs l'ont souligné, la force des théories développées grâce au *Design Research* vient de leur pouvoir explicatif et de leur enracinement dans des expériences spécifiques (Cobb, 2001; Steffe et Thompson, 2000). Une théorie élaborée dans le cadre du *Design Research* est convaincante dans la mesure où elle est cohérente et qu'elle rend compte finement des problèmes soulevés au cours du processus de conception, d'expérimentation et d'évaluation.

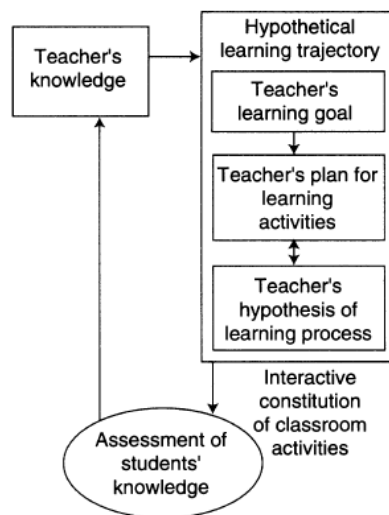
La subjectivité du chercheur joue un rôle certain dans le *Design Research* puisque celui-là se situe au cœur des décisions de conception. Ses expériences antérieures de même que son bagage théorique viendront sans doute teinter la prise de décisions et l'analyse des données. La mise en lumière de ces éléments dans l'analyse de l'expérience et le recours à des méthodes de triangulation faisant appel à des sources de données et des méthodes de collecte de données multiples permettront toutefois de mieux étayer les positions du chercheur (voir Van den Akker, 1999).

Je précise que l'objectif principal des recherches utilisant la méthodologie du *Design Research* n'est pas d'élaborer une séquence d'enseignement *per se*, mais d'observer à travers elle les trajectoires d'apprentissage des élèves. La locution « trajectoire hypothétique d'apprentissage » désigne la prédiction du chercheur à propos de la voie par laquelle l'apprentissage peut se dérouler, au sens de Simon¹⁹ (1995) :

¹⁹ Notre traduction : La trajectoire hypothétique d'apprentissage est constituée de trois composantes : l'objectif d'apprentissage qui définit la direction, les activités d'apprentissage et le processus hypothétique d'apprentissage – une prédiction de la façon dont la pensée et la compréhension des élèves évolueront dans le contexte des activités d'apprentissage. La création et la modification continue de la trajectoire hypothétique d'apprentissage est l'élément central du modèle qui est schématisé à la figure 4 [Figure 3.1 dans la thèse]. La notion de trajectoire hypothétique d'apprentissage n'est pas censée suggérer que l'enseignant poursuit toujours un but à la fois ou qu'une seule trajectoire est considérée. Elle vise plutôt à souligner l'importance d'avoir un objectif et une justification pour les décisions dans l'enseignement, et la nature hypothétique d'une telle ligne de pensée. Il est à noter que le développement d'un processus d'apprentissage hypothétique et le développement des activités d'apprentissage ont une relation symbiotique; la génération d'idées pour les activités d'apprentissage dépend des hypothèses de l'enseignant sur le développement de la pensée et de l'apprentissage des élèves; la génération subséquente d'hypothèses sur le développement conceptuel des élèves dépend de la nature des activités anticipées. (Simon, 1995, p. 136).

The hypothetical learning trajectory is made up of three components: the learning goal that defines the direction, the learning activities, and the hypothetical learning process—a prediction of how the students' thinking and understanding will evolve in the context of the learning activities. The creation and ongoing modification of the hypothetical learning trajectory is the central piece of the model that is diagrammed in Figure 4 [Figure 3.1 dans la thèse]. The notion of a hypothetical learning trajectory is not meant to suggest that the teacher always pursues one goal at a time or that only one trajectory is considered. Rather, it is meant to underscore the importance of having a goal and rationale for teaching decisions and the hypothetical nature of such thinking. Note that the development of a hypothetical learning process and the development of the learning activities have a symbiotic relationship; the generation of ideas for learning activities is dependent on the teacher's hypotheses about the development of students' thinking and learning; further generation of hypotheses of student conceptual development depends on the nature of anticipated activities. (Simon, 1995, p. 136).

Figure 3.1 Cycle d'enseignement des mathématiques (Simon, 1995, p. 136)



La trajectoire élaborée par le chercheur est hypothétique, en ce sens qu'il s'agit de la trajectoire anticipée, la trajectoire réelle n'étant pas connue à l'avance. Une trajectoire hypothétique d'apprentissage fournit à l'enseignant une raison d'élaborer un enseignement particulier; ainsi, je prendrai mes décisions à propos de la conception des problèmes en me fondant sur les hypothèses que j'aurai avancées sur la manière dont l'apprentissage pourrait se dérouler.

Dans mon étude, une trajectoire d'apprentissage est le processus d'apprentissage chez les élèves tel qu'il est soit conjecturé *a priori*, soit observé *a posteriori* lorsque l'on a pu suivre les élèves impliqués dans la séquence. Je précise que la séquence d'enseignement, les trois problèmes ainsi

que les objectifs constituent les moyens qui permettent de faire les observations *a posteriori* (sur la trajectoire d'apprentissage empruntée par les élèves). Je formulerai au préalable (*a priori*) des conjectures (prédictions) sur les changements importants dans le raisonnement des élèves (Cobb et Gravemeijer, 2008). La trajectoire d'apprentissage détaillée pour chacun des problèmes sera présentée ultérieurement (§3.3.4). Il est possible que le chercheur-enseignant ressente le besoin d'ajuster une trajectoire hypothétique d'apprentissage ou le problème qui lui est dédié pour la prochaine leçon. Des modifications dans la trajectoire d'apprentissage sont généralement apportées en raison d'incidents dans la classe telles que les stratégies non prévues des élèves, des activités trop difficiles, etc. De tels ajustements ne sont généralement pas bienvenus dans les recherches expérimentales comparatives mais dans le *Design Research*, ces modifications sont effectuées pour créer de meilleures conditions et sont considérées comme des éléments du corpus de données (Bakker et van Eerde, 2015).

Dans le cadre de ma recherche, j'emprunte certains éléments au courant dit du *Practitioner research* : je suis enseignant de mathématiques auprès de 4 classes régulières en 5^e année du secondaire, je veux développer des connaissances, des compétences et une compréhension sur le sujet enseigné (Merritt, 2013). Divers objectifs de recherche de ce courant sont suggérés : servir les pratiques professionnelles (Dadds et Hart, 2001), améliorer les pratiques (Middlewood *et al.*, 1999) et apporter des changements significatifs (Gitlin *et al.*, 1992). Le *Practitioner research* profite aux enseignants en contribuant à leur développement en connaissances, compétences et compréhension, et établit un lien entre l'amélioration de l'enseignement à l'école et l'apprentissage professionnel des enseignants.

Puisque j'ai été l'enseignant et le chercheur qui a piloté la séquence d'enseignement auprès de mes élèves de mathématiques en 5^e secondaire, je considère mon rôle de praticien-chercheur comme une « plus-value ». En effet, plusieurs éléments ont été mis à profit pour mener l'expérimentation en classe : mes connaissances sur les capacités des élèves à utiliser adéquatement une démarche de résolution de problèmes, leur niveau de compréhension des connaissances spatiales (ex. : avoir ou non la capacité d'élaborer des représentations 2D d'objets 3D) ainsi que leur maîtrise de certaines habiletés spatiales (ex. : visualisation spatiale), la qualité des échanges enseignant-élèves, etc. De plus, en ce qui a trait plus spécifiquement à mon rôle de chercheur, l'organisation, la collecte et la gestion des données de mon étude en ont été facilitées puisqu'elles se sont déroulées sur mon lieu

de travail. Également, comme j'ai eu des informations sur les compétences en raisonnement mathématique de mes élèves, j'ai pu élaborer une séquence d'enseignement qui a été mieux adaptée à leurs forces et leurs difficultés. Je précise que j'ai été à même d'analyser les forces et les difficultés de mes élèves à la suite des évaluations prévues dans le cadre de mon travail d'enseignant pour les deux compétences du programme de mathématiques : *déployer un raisonnement mathématique et résoudre une situation-problème*.

Un autre courant méthodologique où le praticien-chercheur détient un rôle important dans la recherche est le *Teaching experiment* (Steffe et Thompson, 2000). Selon cette méthodologie, l'enseignant-chercheur dirige une suite organisée de séances d'enseignement avec un ou quelques élèves, où ceux-ci sont dans un mode de construction soutenu (Ackermann, 1995). Par le biais de ces séances, le chercheur a l'intention d'élaborer des modèles viables de compréhension mathématique chez les élèves et à documenter l'évolution de ces compréhensions.

Pour arriver à comprendre les modèles conceptuels des élèves sur tel ou tel concept mathématique, l'enseignant-chercheur planifie des séances d'enseignement plus ou moins longues en élaborant une trajectoire d'apprentissage au sens de Simon (1995), c'est-à-dire qu'il pronostique la construction des « opérations mentales » des élèves et d'un itinéraire, à propos de ce qu'ils pourraient apprendre et de la façon dont ils pourraient l'apprendre. Un élément-clé de cette méthodologie repose donc sur les prédictions de l'enseignant-chercheur à propos des compréhensions possibles par les élèves d'un concept spécifique.

Je n'ai pas retenu les méthodologies du *Teaching experiment* et du *Practitioner research* car elles exigent beaucoup de temps et de ressources pour la planification des séances d'enseignement, l'expérimentation et l'analyse, qui nécessitent alors du temps qui s'ajoute au temps scolaire normalement prévu. Les résultats obtenus à l'aide de ces méthodologies sont souvent spécifiques à un contexte donné et peuvent ne pas être généralisables à d'autres situations. Ayant précisé le rôle du chercheur dans le *Practitioner research*, le *Teaching experiment* et le *Design Research*, je peux mieux cerner un de mes rôles, qui sera de me concentrer sur des aspects directement liés à la conception d'une séquence d'apprentissage-enseignement (appuyée sur une trajectoire d'apprentissage) comme un objet et un processus de recherche.

3.3 Opérationnalisation et instrumentation de la méthodologie retenue

3.3.1 Recrutement des participants

Il s'agit d'un de mes groupes d'élèves, soit 31 élèves, âgés de 16-17 ans, de l'année scolaire 2022-2023, inscrits en 5^e secondaire de la séquence *Mathématique Culture, société et technique* dans une école secondaire de l'Outaouais. Je pose comme hypothèse de travail initiale de développer leurs habiletés spatiales ainsi que certaines connaissances spatiales (liées notamment aux représentations 2D d'objets 3D) pour résoudre les problèmes.

3.3.2 Opérationnalisation selon la méthode dite *Think aloud*

Selon le devis du *Design Research* à élaborer, tous les élèves ont résolu les problèmes en même temps, à l'écrit en binômes, durant les séances pendant lesquelles la séquence d'enseignement a été opérationnalisée. Les élèves ont laissé des traces de leurs démarches de résolution dans un cahier qui a été recueilli à la fin de la séquence d'enseignement. Une caméra fixe a été installée pour enregistrer les échanges de la classe. En parallèle, j'ai sélectionné 4 équipes dont les échanges verbaux ont été enregistrés (un enregistrement pour chacune des 4 équipes) par quatre caméras. Afin d'assurer une meilleure qualité d'enregistrement des échanges et minimiser les bruits parasites, j'ai isolé 3 équipes dans une salle à part à proximité de ma classe, où ont été placées 3 des 4 caméras.

3.3.3 Considérations éthiques

Il y a eu d'abord présentation du projet à la direction et aux enseignants de mathématiques de mon école. Un formulaire d'information et de consentement a été transmis aux parents de chaque élève participant, par courriel et par lettre. J'ai rencontré le groupe d'élèves pour leur présenter le projet de recherche. Les problèmes soumis aux élèves ont été travaillés pendant les heures normales d'enseignement, au moment où j'ai enseigné les concepts de la géométrie spatiale en 5^e secondaire. Les élèves qui ont refusé de participer à la recherche ont résolu les problèmes de toutes façons puisque ces problèmes ont fait partie intégrante de mon enseignement de la géométrie de l'espace, lui-même conforme au programme de formation. Les productions écrites de ces élèves n'ont pas été conservées parmi les données de la recherche et leur travail a servi dans le processus normal de leurs apprentissages en mathématiques de 5^e secondaire. Avant de procéder à la cueillette des données, j'ai complété une demande de certificat éthique qui a été approuvée par le Comité d'éthique de la recherche avec les êtres humains de la Faculté des sciences de l'éducation de

l'UQAM (CERPE-3), ainsi qu'un formulaire d'informations et de consentement pour les participants.

Pour éviter des conflits d'autorité ou d'influence auprès des participants — mes élèves ! —, je précise que les problèmes n'ont servi d'aucune façon à les évaluer sommativement, mais s'inscrivaient dans le parcours normal et prévu de l'enseignement de la géométrie de l'espace. De plus, les trois problèmes réalisés et les productions écrites qui s'y rapportent ont servi uniquement pour guider l'enseignement. Ils n'ont d'aucune façon été pris en compte pour l'évaluation sommative et le résultat compilé de la 2^e étape, qui s'est terminée le 17 février 2023.

3.3.4 Première phase : le design de la séquence d'enseignement

Cette phase se subdivisera en quatre « sous-phases ».

3.3.4.1 Élaboration d'une première version de la séquence

Cette étape a consisté en l'élaboration d'une séquence d'enseignement contenant un exercice de révision sur le calcul de volume et la détermination de mesures manquantes, ainsi que 3 problèmes qui constituent le cœur de la séquence. Ils ont été conçus pour que les habiletés spatiales (visualisation et transformations spatiales), des connaissances spatiales et des connaissances géométriques nécessitent d'être mobilisées pour la résolution.

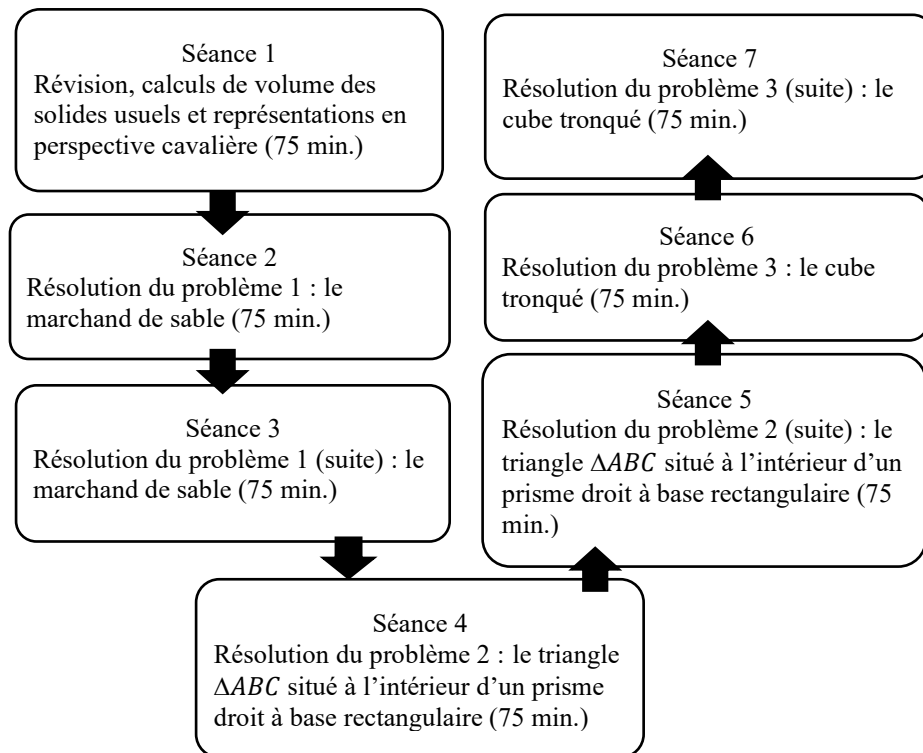
Un critère important pour élaborer ces problèmes est leur rôle potentiel dans la trajectoire d'apprentissage de l'élève. Il s'agit de s'assurer que les problèmes lui permettent de mettre en œuvre les habiletés spatiales en synergie avec les connaissances spatiales. À cet égard, je me suis inspiré du matériel existant (manuels scolaires, cahiers d'activité de diverses maisons d'édition) ainsi que de mon expérience d'enseignant de mathématiques. Je peux dès lors présenter les premières esquisses de ces 3 problèmes. Ils seront par la suite revus et « mis à jour » selon les cycles prévus par le *Design Research*.

Comme praticien-chercheur, j'ai élaboré la séquence d'enseignement à partir de mon travail d'enseignant de mathématiques et selon un gabarit de planification du dispositif d'enseignement et d'apprentissage (voir Monney *et al.*, 2020). Une séquence d'enseignement est un ensemble de plusieurs séances articulées dans le temps et organisées autour d'une ou plusieurs activités en vue

d'atteindre les objectifs fixés par les programmes d'enseignement (Rougier, 2009). Dans ma recherche, la séquence d'enseignement a consisté en sept séances réparties sur trois semaines (voir figure 3.2), qui ont ciblé la trajectoire d'apprentissage projetée.

La séance 1 (75 minutes) a constitué une révision de la géométrie spatiale abordée en 3^e année du secondaire et était axée sur le volume des solides usuels et la représentation en perspective cavalière de tels solides. Les séances 2-3 ont été consacrées au problème 1 (marchand de sable); les séances 4-5 ont concerné le problème 2 (triangle $\triangle ABC$ situé à l'intérieur d'un prisme droit à base rectangulaire) et les séances 6-7 ont porté sur la résolution du problème 3 (cube tronqué). À la fin des séances 3, 5 et 7, un bilan des apprentissages a été réalisé, à savoir une « institutionnalisation » au sens de Brousseau (1998). Il est à noter qu'il y a une progression du niveau de difficulté d'un problème à l'autre, les habiletés spatiales et les connaissances spatiales à mobiliser exigeant un niveau croissant de sophistication et de maîtrise de la visualisation mentale, dû à la structuration spatiale des solides en jeu dans ces problèmes.

Figure 3.2 Déroulement de la séquence d'enseignement



L'objectif de la séquence est de faire travailler aussi efficacement que possible la géométrie spatiale. Il s'agit de voir comment les élèves utilisent leurs habiletés spatiales, leurs connaissances spatiales et leurs connaissances géométriques pour résoudre les problèmes.

Tableau 3.1 Contenu conceptuel des séances d'enseignement/apprentissage

Séance 1 : Révision, calculs de volume des solides usuels et dessins en perspective cavalière	▪ sens spatial et analyse de situations faisant appel à des figures géométriques ▪ solides : développements plans, projections et perspective cavalière ▪ théorème de Pythagore ▪ volume d'une pyramide
Séances 2 et 3 : Le marchand de sable	▪ sens spatial et analyse de situations faisant appel à des figures géométriques ▪ théorème de Pythagore et sa contraposée ▪ volume d'une pyramide ▪ représentation en perspective cavalière d'un solide usuel (tétraèdre) ▪ relations trigonométriques ▪ perpendicularité dans l'espace (entre une droite et un plan)
Séances 4 et 5 : Le triangle $\triangle ABC$ situé à l'intérieur d'un prisme droit à base rectangulaire	▪ sens spatial et analyse de situations faisant appel à des figures géométriques (ex. : reconnaître et construire des segments et des droites remarquables : médiane, hauteur, médiatrice, diagonale, cathète, hypoténuse) ▪ théorème de Pythagore et sa réciproque ▪ représentation en perspective cavalière d'un solide ▪ perpendicularité dans l'espace (entre deux plans et les droites incluses dans ces plans)
Séances 6 et 7 : Le cube tronqué	▪ sens spatial et analyse de situations faisant appel à des figures géométriques (décrire des solides : sommet, face, arête, hauteur, apothème, face latérale) ▪ théorème de Pythagore ▪ représentations en perspective cavalière d'un solide (cube tronqué et pyramide à base triangulaire) ▪ volume d'un prisme et d'une pyramide ▪ médianes-hauteurs dans un triangle isocèle, point de rencontre des médianes, trigonométrie du triangle ▪ perpendicularité dans l'espace ▪ notion de plan médiateur d'un segment de l'espace

3.3.4.1.1 Séance 1 : révision des calculs de volume pour les solides usuels et représentations en perspective cavalière

Afin de réactiver les connaissances géométriques antérieures et les connaissances spatiales chez mes élèves, j'ai piloté une séance d'enseignement de 75 minutes axée sur certains concepts de géométrie spatiale abordés en 3^e secondaire :

- sens spatial et analyse de situations faisant appel à des figures géométriques;
- solides : développement plan, projection et perspective cavalière;
- théorème de Pythagore (en 2D et en 3D);
- mesure : volume.

Je précise qu'il a été nécessaire de faire un retour sur la géométrie spatiale de la 3^e secondaire car la géométrie spatiale n'est pas au programme de mathématiques en 4^e secondaire. En effet, les concepts mathématiques de la séquence *Culture, société et technique* de 4^e secondaire concernent la géométrie analytique dans le plan.

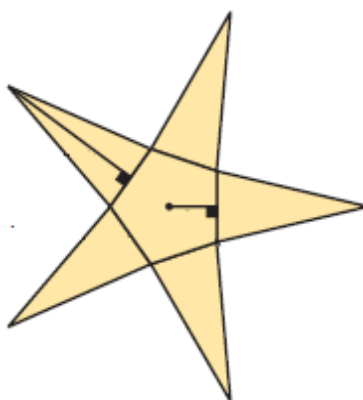
Les objectifs de la séance 1 sont les suivants :

- 1) Identifier les éléments de la formule de volume d'un solide (pyramide régulière à base pentagonale) à partir d'une maquette transparente articulée (patron).
- 2) Faire passer les élèves d'un registre de représentation « concret » à un registre de représentation figurale « en perspective ».

Voici le déroulement de la séance. J'ai présenté (≈ 5 min.) à mon groupe d'élèves l'exercice 1 (figure 3.3), soit la maquette articulée d'une pyramide régulière à base pentagonale. À même la maquette transparente sont tracés (en trait rouge) l'apothème de la pyramide, l'apothème de la base pentagonale et son côté. J'ai indiqué aux élèves qu'ils devaient calculer le volume de ce solide au centième près. J'ai fourni une maquette pour chaque équipe (binôme) en leur demandant de bien identifier, lors de la manipulation, les éléments de la formule du volume de la pyramide et de représenter celle-ci en perspective cavalière dans leur cahier. La durée de l'exercice a été d'environ 10 minutes.

Exercice 1. Voici le développement plan articulé d'une boîte-cadeau. Le côté de la base (la base est un pentagone régulier) mesure 1,5 dm, l'apothème de la base mesure 0,9 dm et l'apothème de la pyramide mesure 2,3 dm. Tu dois les dessiner sur la maquette et dans la figure fournie. Représente en perspective cavalière la pyramide. Quel est le volume de la boîte une fois repliée ? (Exercice inspiré du manuel Intersection, mathématique, 3^e secondaire, tome B, #14, p. 69)

Figure 3.3 Développement plan articulé d'une pyramide



Dans la 2^e partie de la séance, j'ai demandé aux élèves d'inscrire sur leur maquette les mesures du côté de la base, de l'apothème de la base et de l'apothème de la pyramide. Ensuite, j'ai corrigé en plénière l'exercice au tableau (≈ 10 min.), tout en montrant sur la maquette les éléments de la représentation spatiale dont j'ai eu besoin pour calculer le volume. D'abord, repérer sur la base le côté du pentagone et son apothème. Après avoir replié mentalement les faces triangulaires de la pyramide, j'ai demandé aux élèves de trouver où se trouve physiquement le triplet du triangle rectangle « apothème de la pyramide », « apothème de la base » et « hauteur du solide »; ensuite, je leur ai montré en circulant dans la classe. J'ai fait remarquer que la hauteur de la pyramide n'est pas indiquée dans le développement plan, ce qui contraint à se construire une image mentale de celle-ci.

Dans la 3^e partie de la séance (≈ 20 min.), mon objectif était de faire passer les élèves d'un registre de représentation « concret » à un registre de représentation figurale « en perspective ». Je

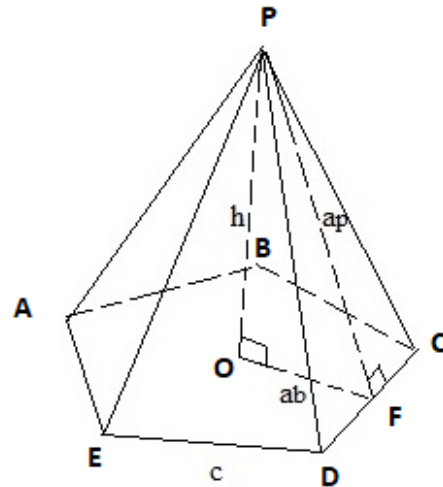
m'appuie sur les résultats de recherche (Bayart *et al.*, 1998; Douady et Parzysz, 1998; Parzysz, 1991) indiquant que c'est la pratique des passages d'un registre de représentation à l'autre (ici, maquette articulée d'un développement plan versus représentation en perspective) qui permet aux élèves d'élaborer des représentations mentales dans l'espace et d'acquérir progressivement des habiletés spatiales.

Ensuite, j'ai fait un exposé magistral d'environ 20 minutes, où j'ai tracé sur le tableau blanc interactif (TBI) un dessin en perspective cavalière d'une pyramide régulière à base pentagonale (voir figure 3.4) tout en expliquant chacune des étapes de la technique de représentation :

- une face de l'objet se trouve dans le même plan que la feuille (ou l'écran numérique) sur laquelle l'objet 3D est représenté;
- les arêtes obliques ou « fuyantes » sont toutes du même côté de cette face et sont parallèles entre elles. L'angle de profondeur est d'environ 45°;
- les mesures des fuyantes sont réduites environ de moitié par rapport aux arêtes de la face située au premier plan.

Dans cet exposé, j'ai informé les élèves que les dessins en perspective cavalière présentés dans les manuels scolaires du secondaire concernent surtout des solides simples à représenter tels que des cubes, des prismes à base carrée ou rectangulaire, des pyramides droites à base carrée, etc. Or, dans le cas des solides plus complexes tels que des pyramides à base polygonale (pentagone, hexagone, etc.) ou des solides décomposables (ex. : un prisme à base heptagonale surmonté d'une pyramide à base heptagonale), les règles de représentation de la perspective cavalière sont plus difficiles à mettre en œuvre et doivent être bien maîtrisées. Ainsi, en référence à mon cadre théorique, je considère essentiel d'enseigner ces règles de dessin (voir, Parzysz, 1991) en utilisant l'exemple d'un solide plus difficile à représenter comme une pyramide à base pentagonale (figure 3.4) pour étayer l'apprentissage (au sens de Bruner, 1998) chez les élèves.

Figure 3.4 Représentation en perspective cavalière d'une pyramide régulière droite à base pentagonale



J'ai précisé que la perspective cavalière conserve :

- l'alignement, c'est-à-dire que 3 points alignés de l'espace sont représentés par 3 points alignés du plan. Donc, une droite est représentée en général par une droite;
- le parallélisme, c'est-à-dire deux droites parallèles sont représentées en général par des droites parallèles du plan;
- les milieux, c'est-à-dire le milieu d'un segment de l'espace est représenté par le milieu du segment dessiné.

J'ai ajouté que la perspective cavalière ne conserve pas nécessairement :

- les longueurs, c'est-à-dire la longueur dessinée n'est pas forcément égale à la longueur du segment dans l'espace;
- les angles, c'est-à-dire un angle de l'espace n'est pas nécessairement représenté par un angle qui lui est isométrique dans le plan du dessin. C'est le cas en particulier des angles droits, qui pourraient ne pas être droits dans le dessin;

- la congruence des angles des segments.

Toutefois, si le plan considéré dans l'espace est parallèle au plan du dessin, alors la face du solide de l'espace est représentée en « vraie proportion » dans le plan du dessin. En particulier, il y a alors conservation des angles et des proportions entre longueurs. Les segments (ou les arcs) visibles sont dessinés en traits pleins, les éléments cachés sont dessinés en pointillés.

J'ai montré à l'aide du dessin en perspective l'importance de bien visualiser, de repérer, de tracer sur la représentation 2D et d'indiquer par des symboles conventionnels (lettres ou autres) les éléments caractéristiques d'un solide (ex. : dans le cas de la pyramide régulière à base pentagonale (voir figure 3.4) — hauteur du solide (h), apothème de la base pentagonale (a_b), arêtes des côtés des triangles isocèles, apothème de la pyramide (a_p) —, afin de bien repérer les éléments nécessaires pour répondre aux questions posées.

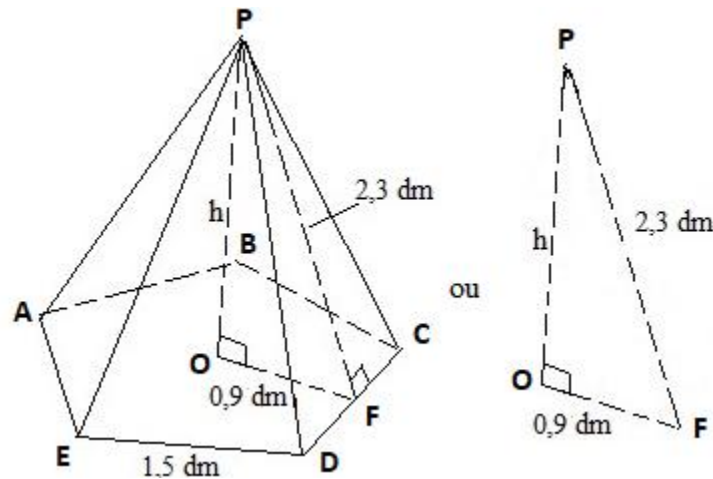
De plus, j'ai représenté au TBI la pyramide régulière à base pentagonale en développement plan (patron) afin de montrer aux élèves son utilité : repérer les éléments de la représentation spatiale (apothème de la base pentagonale, apothème de la pyramide, côtés des triangles isocèles) de même que les angles indiqués dans la représentation, qui serviront aux calculs d'aire et de volume.

Voici des exemples de conflit « vu/su » pouvant se produire chez les élèves (figure 3.4) :

- lors de l'encodage pour représenter la pyramide en perspective cavalière, percevoir (le « vu ») que les angles POF , PFC et PFD ne sont pas physiquement droits, alors que l'élève sait qu'ils le sont dans la réalité (connaissances spatiales);
- les triangles rectangles $\triangle POF$, $\triangle PFC$ et $\triangle PFD$ ne sont pas représentés de façon à rendre compte des relations d'isométrie ou de similitude (ni en position prototypique);
- les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$ et $[EA]$ du pentagone $ABCDE$ de même que les angles intérieurs de celui-ci ne sont pas représentés de façon à rendre compte des relations d'isométrie ou de similitude.

Dans cet exercice, la visualisation mentale sera mobilisée car il sera nécessaire de se représenter mentalement la hauteur de la pyramide et de la repérer une fois le solide formé, soit par la production d'un dessin en perspective cavalière, soit en dessinant uniquement l'un des triangles rectangles situés à l'intérieur (voir figure 3.5). De plus, la manipulation mentale qui consiste à reconstituer (en imagination) la pyramide à partir de son développement plan est une activité qui articule connaissances géométriques et connaissances spatiales (ex. : repérer le triplet « apothème de la pyramide », « apothème de la base pentagonale » et « hauteur de la pyramide »; repérer les angles droits dans le solide, les triangles rectangles, etc.).

Figure 3.5 Triangle rectangle ΔPFO situé à l'intérieur de la pyramide



Application du théorème de Pythagore :

$$h^2 + a_b^2 = a_p^2$$

où h est la hauteur, a_b l'apothème de la base et a_p l'apothème de la pyramide.

$$h^2 + 0,9^2 = 2,3^2 \Rightarrow h = \sqrt{2,3^2 - 0,9^2}$$

$$\Rightarrow h \approx 2,12 \text{ dm}$$

Enfin, il est nécessaire d'appliquer la formule du volume d'une pyramide :

$$Volume\ pyramide = \frac{Aire_{base} \times hauteur}{3}$$

$$= \frac{\left(\frac{c \times n \times a_b}{2}\right) \times h}{3}$$

où c représente la mesure du côté de la base polygonale, n le nombre de côtés de cette base, a_b l'apothème de la base et h la hauteur de la pyramide.

$$= \frac{\left(\frac{1,5 \times 5 \times 0,9}{2}\right) \times 2,12}{3}$$

$$\approx 2,38\ dm^3.$$

Enfin, j'ai terminé par une discussion (≈ 10 min) avec les élèves en les faisant verbaliser sur leur processus de résolution. Par exemple en posant les questions suivantes : « Pour ceux qui l'ont fait, comment avez-vous pensé à utiliser le théorème de Pythagore ici ? Qu'est-ce qui vous a permis de repérer qu'il y avait un triangle rectangle ici ? »

Dans la prochaine section, en même temps que les problèmes eux-mêmes, je vais présenter les trajectoires hypothétiques d'apprentissage pour chacun des 3 problèmes.

3.3.4.2 Trajectoires hypothétiques d'apprentissage des 3 problèmes de géométrie spatiale

Dans cette section, j'expose les trajectoires hypothétiques d'apprentissage liées aux problèmes. Le cadre méthodologique de l'Hypothetical Learning Trajectory (Trajectoire hypothétique d'apprentissage), proposé par Simon (1995), amène une façon de concevoir les processus hypothétiques d'apprentissage dans la séquence d'enseignement. La trajectoire hypothétique d'apprentissage (THA) est composée de trois éléments : l'objectif d'apprentissage qui définit la trajectoire; les activités d'apprentissage (les 3 problèmes de la thèse); le processus hypothétique d'apprentissage (Simon, 1995).

Pour chacune des trajectoires d'apprentissage, l'intention globale est décrite. Puis, je formule des conjectures au sens de Simon (1995), c'est-à-dire mes prédictions sur le processus d'apprentissage chez les élèves. De plus, j'illustre les conjectures à l'aide d'exemples détaillés de raisonnements spatiaux possibles dans la résolution des problèmes soumis. Les THA exposeront ce que les élèves peuvent acquérir comme apprentissages en géométrie (plane et spatiale) lorsqu'ils résolvent les 3 problèmes. Je vais indiquer la solution incluant l'identification des connaissances spatiales et des connaissances géométriques nécessaires, ainsi qu'une anticipation des difficultés et erreurs qui pourraient se manifester.

Je précise que les THA ont joué le rôle d'analyse *a priori*, au sens de l'ingénierie didactique (Artigue, 1990), de la séquence d'enseignement-apprentissage, mais ont également servi d'outil en cours d'expérimentation.

3.3.4.2.1 Séances 2 et 3 : Problème 1 (le marchand de sable)

Les concepts abordés dans les séances 2 et 3 concernent le théorème de Pythagore (en 2D et en 3D) ainsi que sa réciproque, le volume d'une pyramide, la perpendicularité dans l'espace et la représentation en perspective cavalière d'un solide usuel.

Trajectoire hypothétique d'apprentissage du Problème 1

Intention globale de la trajectoire d'apprentissage :

Le développement de l'habileté de visualisation spatiale (directe et interne) s'exerçant sur une paire hauteur-base (hauteur $[FM]$ et base $\triangle ADE$) de la pyramide à base triangulaire, celle-ci mise en interaction avec des connaissances spatiales (représentation 2D de la pyramide $ADEF$ et de sa maquette) ainsi qu'avec des connaissances géométriques (relation de perpendicularité dans l'espace : hauteur $[FM] \perp$ base $\triangle ADE$, $[FM] \perp [AD]$, $[FM] \perp [EM]$, théorème de Pythagore et sa réciproque) impliquant le calcul du volume d'un tétraèdre non régulier.

L'objectif des séances 2 et 3 est le suivant :

- Calculer le volume d'un tétraèdre non régulier, en procédant à la reconfiguration d'une enveloppe de manière à faire interagir la visualisation spatiale avec les connaissances spatiales et les connaissances géométriques.

J'ai présenté sur TBI le Problème 1, dont l'énoncé ainsi qu'une représentation 2D du problème 1 ont été aussi fournis aux élèves sur une feuille. Une enveloppe (en carton souple) du bon format a été donnée à chaque équipe, avec du ruban gommé.

Problème 1 : le marchand de sable²⁰.

Pour apporter un peu de sable de mes vacances, je dispose d'une enveloppe usagée ouverte sur le pli BC .

Avant de procéder au pliage, je précise que le point E est au milieu d'une des tranches du pli BC , et que le point F est au milieu de l'autre tranche de BC . Au départ, les points E et F sont superposés. Par pliage, je fais un tétraèdre en amenant le point B sur le point C , et en éloignant en même temps les points E et F .

Je remplis de sable le tétraèdre $AEDF$ ainsi obtenu, puis je ferme en recollant le bord.

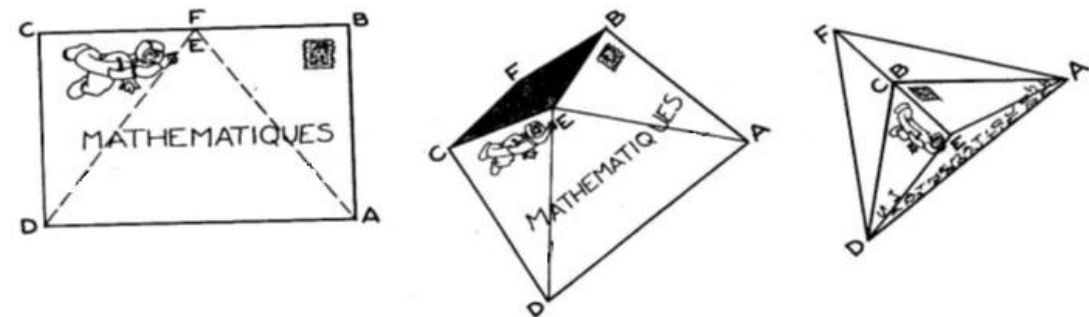
La longueur de l'enveloppe est de 16 cm et le rapport longueur sur largeur est égal à $\sqrt{2}$.

Représente en perspective cavalière le tétraèdre, puis calcule à 1 cm^3 près le volume de sable que je peux emporter.

²⁰ Ce problème est inspiré du Concours *Mathématiques sans frontières*, Académie de Strasbourg (1995), où il a été soumis à des élèves de Seconde (équivalent de la 5^e secondaire au Québec). L'image des enveloppes a été prise telle quelle de ce concours.

Indices : tu as 4 choix pour la base (une des 4 faces) mais tu dois bien repérer quelle sera la hauteur issue de l'apex selon la base que tu retiens. Attention, pour conclure qu'il s'agit bien d'une hauteur, tu dois préciser où se trouve l'angle droit et **justifier** qu'il s'agit bien d'un angle droit. La réciproque du théorème de Pythagore pourrait alors t'être utile.

Figure 3.6 Problème 1 : le marchand de sable



Je précise que dans la thèse, les segments sont notés avec des crochets, les droites sans crochet, de même que les mesures des segments. Ainsi $[AX]$ est le segment (l'objet géométrique) et AX est sa mesure (un nombre réel positif) ou encore, la droite qui porte ce segment. Le contexte permet à chaque fois de déterminer s'il s'agit de la droite ou de la mesure du segment. Ces conventions sont celles utilisées dans le contexte scolaire français et sont différentes de celles du contexte scolaire québécois. Nous les avons retenues essentiellement parce qu'elles permettent d'alléger de beaucoup la rédaction et l'édition, notamment dans tous les calculs où interviennent les mesures de segments.

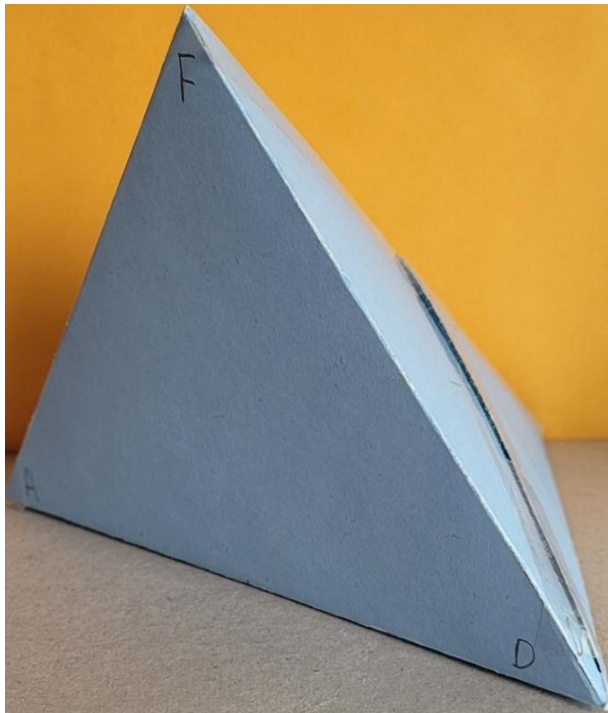
1^{er} élément de la THA (Problème 1) : *Réaliser une transformation spatiale (habileté spatiale) en ayant à sa disposition une enveloppe et en la reconfigurant en une pyramide droite à base triangulaire.*

L'aspect important de ce 1^{er} élément de la THA est que l'élève comprenne qu'une reconfiguration est une réorganisation d'une figure plane ou d'un solide dans le plan ou dans l'espace. À l'aide de la manipulation (pliage) et de la visualisation directe, il reconfigure (transformation spatiale) les

faces rectangulaires de l'enveloppe en 4 triangles isocèles isométriques formant un tétraèdre non régulier (pyramide droite à base triangulaire dont une base possible est un triangle isocèle).

Il faudra que les élèves soient très méticuleux dans leurs manipulations des enveloppes (passage des faces rectangulaires aux faces triangulaires). Lorsque la maquette sera complétée, ils pourront utiliser la visualisation *directe* pour constater que la face triangulaire $\triangle DAF$ est bien verticale lorsque la face $\triangle DAE$ est à plat sur la table. Cela permettra de visualiser directement que la hauteur de la face $\triangle DAF$ coïncide avec la hauteur du tétraèdre $DAEF$ (voir figure 3.7). Toutefois, il est possible que l'élève ne puisse visualiser directement que la face $\triangle DAF$ est bien verticale à cause des distorsions créées par le collage. Puisque je demande aux élèves de produire une représentation en perspective cavalière de la pyramide-tétraèdre $DAEF$, cela pourrait les aider à bien voir que comme segment, la hauteur de la face DAF est perpendiculaire au plan de la face $\triangle DAE$; une autre visualisation possible et qui peut aider consiste à « voir » que les plans des faces $\triangle DAF$ et $\triangle DAE$ sont perpendiculaires, ou autrement dit que l'angle dièdre entre les faces $\triangle DAF$ et $\triangle DAE$ est de 90° .

Figure 3.7 Maquette assemblée de la pyramide-tétraèdre $DAEF$



2^e élément de la THA (Problème 1) : *Calculer des mesures manquantes (largeur de l'enveloppe, côtés de la pyramide-tétraèdre DAEF), représenter en perspective cavalière la pyramide-tétraèdre et visualiser les triangles rectangles utiles ou reproduire les triangles rectangles sur l'enveloppe fournie à partir de la représentation 2D du problème 1.*

1) Déterminer la largeur de l'enveloppe avant sa reconfiguration (voir figure 3.8)

Puisque l'enveloppe est un rectangle, il appert que $AD = BC = 16 \text{ cm}$.

Dans le rectangle $ABCD$, le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est de $\sqrt{2}$, ce qui implique que :

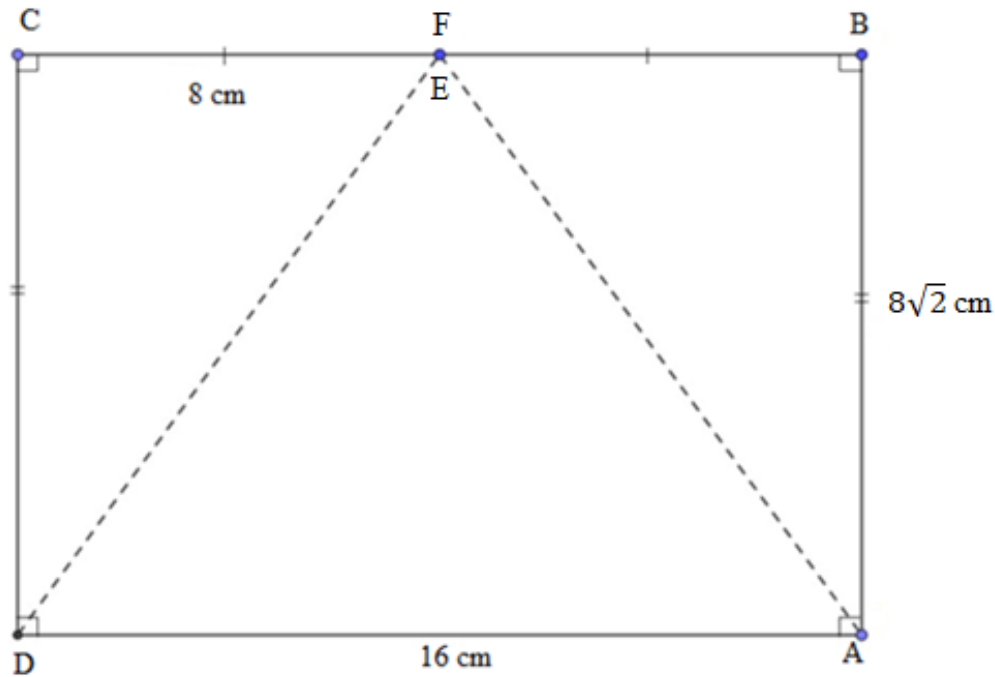
$$\frac{16 \text{ cm}}{\text{largeur}} = \sqrt{2}, \text{ où la variable } \textit{largeur} \text{ est la mesure de } [CD] \text{ ou de } [AB].$$

$$\Rightarrow CD = AB = \frac{16}{\sqrt{2}} \text{ cm} = 8\sqrt{2} \text{ cm}.$$

2) Visualiser directement les triangles rectangles sur l'enveloppe avant sa reconfiguration en une pyramide-tétraèdre.

Les angles droits sont : $(\angle DCF, \angle ABF, \angle DCE, \angle ABE)$ et les triangles rectangles sont les suivants : $\triangle DCF, \triangle DCE, \triangle ABF, \triangle ABE$.

Figure 3.8 Rectangle $ABCD$ (enveloppe)



- 3) Déterminer les mesures des côtés de la pyramide-tétraèdre $DAEF$ et la représenter en perspective cavalière.

Dans cette étape, des connaissances spatiales seront mobilisées puisque l'élève aura à repérer les faces triangulaires ($\triangle AEF, \triangle ADF, \triangle DEF, \triangle ADE$) de la pyramide-tétraèdre $AECD$ en décrivant comment elles sont obtenues et quelles sont les mesures des côtés de chacune des faces. Plus précisément, la face triangulaire $\triangle AEF$ sera obtenue à la suite de la superposition de B sur C lors de la manipulation. Ainsi, $\triangle AEF$ est composé de 2 triangles isométriques, soit les triangles rectangles $\triangle ABE$ et $\triangle ABF$. De même, la face $\triangle DEF$ sera obtenue par la juxtaposition de B et de C et elle sera composée de deux triangles rectangles isométriques : $\triangle DCF$ et $\triangle DCE$.

Afin de faciliter la détermination des mesures manquantes (côtés des triangles), l'élaboration d'une représentation en perspective cavalière de la pyramide permettra de bien coordonner des connaissances spatiales (ex. : savoir représenter correctement en perspective cavalière les faces triangulaires et les angles droits de la pyramide), et de les combiner avec des connaissances géométriques (ex. : théorème de Pythagore). Tel que mentionné précédemment, il est possible que lors de la visualisation directe, l'élève évalue que l'angle dièdre entre la face triangulaire $\triangle DAF$ et

la face triangulaire $\triangle DAE$ n'est pas de 90° (ou plus concrètement, que la face $\triangle DAE$ n'est pas verticale quand $\triangle DAF$ est à l'horizontal). À cet égard, l'élève devra penser à introduire le point M , qui est le point milieu du segment $[AD]$. Puis, il mettra en œuvre un raisonnement spatial pour déterminer la mesure de l'angle EMF (qui est de 90°). L'élève devra démontrer, à l'aide de connaissances géométriques, que l'angle EMF est droit, pour conclure que MF fait deux angles droits, un avec EM et un autre avec MD (ou AD); il pourra en conclure que les plans AED et ADF sont perpendiculaires et que $[MF]$ est une hauteur pour la pyramide $AEDF$. Je rediscuterai de ces éléments ultérieurement.

Il existe une autre manière de procéder. Il s'agit de déterminer la mesure manquante des côtés des triangles en deux dimensions, à partir de la représentation 2D fournie du problème 1. Puis, indiquer que la mesure manquante dans le triangle isocèle est l'hypothénuse du triangle rectangle et procéder aux calculs.

1) Déterminer les mesures de $[AE]$, $[AD]$ et $[DE]$ dans $\triangle DAE$ (voir figure 3.8).

Calculer la mesure de $[CD]$. D'abord, visualiser directement sur l'enveloppe que $\angle ECD$ est droit. Puis, mobiliser des connaissances géométriques : le rectangle (ici $ABCD$) est une figure plane qui a quatre angles droits :

$$m\angle ABF = m\angle BCD = m\angle CDA = m\angle DAB = 90^\circ,$$

et des côtés opposés $[AB]$ et $[CD]$, $[AD]$ et $[BC]$ qui sont isométriques et parallèles par paire ($AB = CD = 8\sqrt{2} \text{ cm}$; $AD = BC = 16 \text{ cm}$). La combinaison de la visualisation directe avec ces connaissances géométriques permettra de conclure que $\triangle ECD$ est rectangle en C .

Par la suite, appliquer le théorème de Pythagore pour calculer la mesure de $[DE]$:

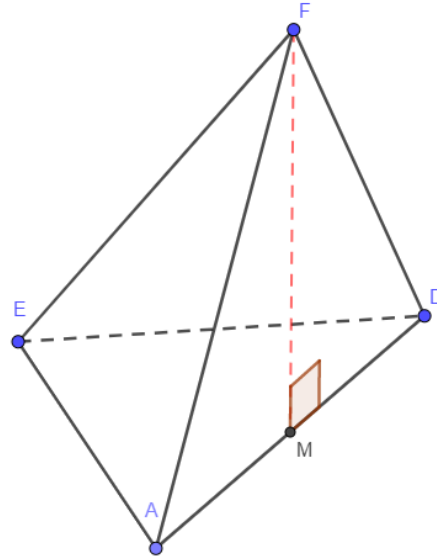
$$CD^2 + CE^2 = DE^2,$$

où $[CD]$, $[CE]$ sont des cathètes et $[DE]$ l'hypoténuse de $\triangle ECD$

$$\Rightarrow (8\sqrt{2})^2 + 8^2 = DE^2$$

$$\Rightarrow 128 + 64 = DE^2 \Rightarrow DE = 8\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Figure 3.9 Représentation en perspective cavalière de la pyramide-tétraèdre



Calculer la mesure de $[AE]$. Le calcul est exactement le même que pour $[DE]$, car la situation est parfaitement symétrique. Ainsi, $AE = DE = 8\sqrt{3} \text{ cm}$.

2) Déterminer les mesures de $[AF]$, $[AD]$ et $[DF]$ du triangle $\triangle AFD$.

On sait que $AD = 16 \text{ cm}$. De plus, la superposition de B sur C fait apparaître le triangle $\triangle AFD$.

De même par juxtaposition, il appert que $AF = AE = 8\sqrt{3} \text{ cm}$ et que $DF = DE = 8\sqrt{3} \text{ cm}$.

3) Déterminer les mesures de $[AE]$, $[AF]$ et $[EF]$ du triangle $\triangle AEF$.

Par superposition de B sur C , il vient que $EF = 16 \text{ cm}$.

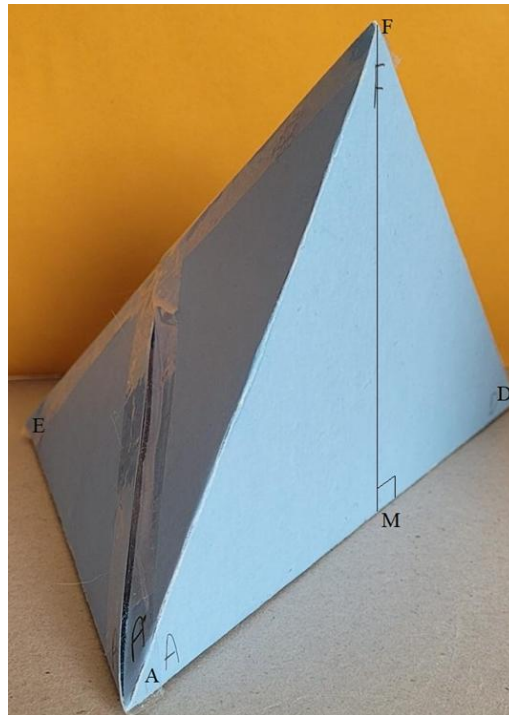
4) Déterminer les mesures de $[DE]$, $[DF]$ et $[EF]$ du triangle $\triangle DEF$.

On sait que $DE = DF = 8\sqrt{3} \text{ cm}$ et que $EF = 16 \text{ cm}$.

3^e élément de la THA (problème 1) : *Identification des éléments spatiaux pour calculer le volume d'un tétraèdre et mobilisation de connaissances géométriques ad hoc (médiane, médiatrice, hauteur, théorème de Pythagore, sa réciproque).*

Après avoir reconfiguré l'enveloppe (voir figure 3.10), l'élève mobilise la visualisation *directe* en repérant sur la maquette qu'il a construite les éléments de la formule du volume de la pyramide : d'abord, la base triangulaire (mesure des côtés); quant à la hauteur du solide, l'élève ne peut la repérer directement car elle n'est pas tracée sur la maquette. Il y aura forcément des connaissances géométriques à mobiliser.

Figure 3.10 Maquette réalisée de la pyramide-tétraèdre *FADE* ([*FM*] été ajouté pour montrer la hauteur du solide)



- 1) Déterminer la hauteur de la pyramide-tétraèdre *AECD*.

La difficulté majeure dans ce problème sera de repérer une paire hauteur-base appropriée dans la pyramide afin de calculer son volume. En fait, il y a essentiellement 2 choix possibles :

1^{er} choix possible. Sélectionner pour base le triangle qui est déjà complet sur chacun des côtés de l'enveloppe, à savoir $\triangle DAE$ ou $\triangle DAF$. Choisissons $\triangle DAE$. Le point F est alors l'apex de la pyramide-tétraèdre $DAEF$. Si j'appelle M le milieu de $[AD]$, il s'agit de visualiser directement que $\angle EMF$ est droit et donc, que $[FM]$ est la hauteur de la pyramide issue du sommet F (voir figure 3.11 et justifications au paragraphe suivant). Mais cela ne va pas de soi. Quand on fait la « maquette » soigneusement, on voit bien que la face $\triangle DAF$ est verticale quand $\triangle DAE$ est à plat sur la table. Mais « voir » directement ne suffit pas à justifier géométriquement. La justification est tout de même accessible. Il s'agit de calculer que $FM = EM$, qui est la même mesure que celle de $[AB]$ ou $[CD]$, soit $8\sqrt{2}$ cm. Et, $[EF]$ mesure 16 cm par construction puisqu'il résulte de la juxtaposition de $[EB]$ avec $[BF]$ (ou de $[EC]$ avec $[CF]$). Il s'agit alors d'utiliser la réciproque du théorème de Pythagore pour montrer que $\triangle FME$ vérifie le théorème de Pythagore (avec hypoténuse $[EF]$) et donc, que $\angle EMF$ est droit.

À montrer : $EM^2 + FM^2 = EF^2$.

$$\text{Or, } EM^2 + FM^2 = (8\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{2})^2 = 16^2 = 256 = EF^2.$$

Je vais expliquer mon raisonnement géométrique en indiquant toutes les étapes.

- 1) Dans le triangle isocèle $\triangle EAD$, je mobilise des connaissances géométriques, à savoir que $[EM]$ est médiane (par choix de M comme milieu), et donc également médiatrice et hauteur. J'en déduis que $\angle EMA$ est droit. J'applique le théorème de Pythagore dans $\triangle EAM$, sachant que $AE = 8\sqrt{3}$ cm et $AM = 8$ cm (mesures qui ont été calculées antérieurement),

$$AM^2 + EM^2 = AE^2 \Rightarrow EM = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 - 8^2} = 8\sqrt{2} \text{ cm.}$$

- 2) Appliquer la réciproque du théorème de Pythagore dans $\triangle EMF$ pour conclure que ce triangle est rectangle en M . Sachant que $FM = 8\sqrt{2}$ cm, $EM = 8\sqrt{2}$ cm et $EF = 16$ cm, on a bien :

$$EM^2 + FM^2 = (8\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{2})^2 = 256 = 16^2 = EF^2$$

Maintenant, le volume cherché est :

$$Volume\ pyramide = \frac{Aire\ \Delta DAE \times FM}{3}$$

$$= \frac{\frac{AD \times EM}{2} \times FM}{3}$$

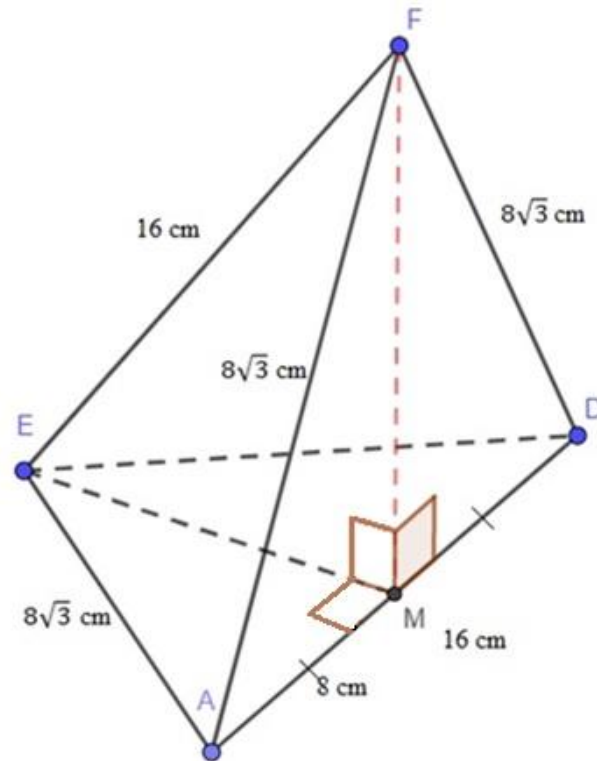
$$= \frac{\frac{16 \times 8\sqrt{2}}{2} \times 8\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{64 \times \sqrt{2} \times 8\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{512 \times 2}{3}$$

$$= \frac{1024}{3} \approx 341,3\text{ cm}^3$$

Figure 3.11 Représentation en perspective cavalière de la pyramide-tétraèdre $FADE$, avec les mesures des côtés et des angles droits identifiés



4^e élément de la THA (Problème 1) : *Mettre en œuvre des connaissances géométriques : ici la relation de perpendicularité dans l'espace pour déterminer l'angle entre une droite et un plan, combinée à la mobilisation de la visualisation directe (hauteur des triangles, angles droits) en interaction avec des connaissances spatiales et d'autres connaissances géométriques.*

Je prévois que la mobilisation de la connaissance géométrique « relation de perpendicularité dans l'espace » constituera un vrai obstacle pour l'élève, car il devra repérer les angles droits et les triangles rectangles auxquels on applique le théorème de Pythagore dans le solide. Cela découle de la nécessité de repérer et calculer la mesure d'une hauteur dans une pyramide.

L'élève ne pourra voir directement la hauteur de la pyramide, car elle n'est pas indiquée sur la face triangulaire $\triangle DAF$. Il devra donc penser à ajouter le point M sur cette face, comme le point milieu de $[AD]$ (voir figure 3.11). L'élève devra mettre en œuvre un raisonnement géométrique pour déterminer la mesure de l'angle entre FM et le plan DAE , c'est-à-dire l'angle entre une droite (FM) et un plan (DAE).

Je prévois que des élèves présentent des solutions accessibles, mais avec très peu de justifications qui soient mathématiquement complètes. Par exemple, certains affirmeront comme une évidence perceptive qu'une des faces du tétraèdre est verticale quand la base est posée à plat (ex. face $\triangle DAE$) sur une table; et donc, que la hauteur $[FM]$ du tétraèdre coïncide avec la hauteur de cette face verticale ($\triangle ADF$). Mais alors, déterminer la mesure de cette hauteur et ensuite le volume se réduit à un exercice relativement standard.

Avant d'aller plus loin, je précise le rôle crucial de la **relation de perpendicularité dans l'espace** (connaissances géométriques) :

Bien que le concept de perpendicularité dans l'espace et les théorèmes qui lui sont associés ne fassent pas partie intégrante du programme de formation de mathématiques de 5^e secondaire, je compte les aborder au moment opportun. Dans un 1^{er} temps, je vais laisser les élèves à eux-mêmes dans leur résolution (≈ 30 minutes). Puis, en cours de résolution (après 30 minutes), je vais introduire le concept de perpendicularité dans l'espace, comme un outil de résolution qui concerne plus spécifiquement l'angle entre une droite et un plan.

Je ferai le tour de chacune des équipes pour vérifier où ils en sont dans leur démarche. Pour les aider à poursuivre leur résolution et à parvenir à des solutions plus rigoureuses parce que les élèves ne connaissent pas ces définitions et théorèmes pertinents relevant de la géométrie de l'espace, je vais les présenter au TBI tout en les illustrant.

J'indiquerai aux élèves qu'ils peuvent utiliser ces définitions et ces théorèmes pour étoffer la résolution et les justifications. Une fois la maquette de la pyramide assemblée (voir figure 3.10), l'élève repère le triangle isocèle qui est à la base (ex. : $\triangle AEF$ ou $\triangle DAE$) ainsi que la hauteur du solide. En faisant intervenir la visualisation directe, il constate qu'une des faces (par ex. : $\triangle AFD$) se dresse verticalement par rapport à la base à l'horizontale et donc, que la hauteur $[FM]$ du tétraèdre non régulier coïncide avec la hauteur de cette face verticale. Mais il doit le démontrer (à l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore) en repérant et précisant où se trouvent les deux angles droits (ex. : $\angle AMF$ et $\angle FME$), et en justifiant qu'il s'agit bien d'angles droits. À cette fin, l'élève mobilise des connaissances spatiales (ex. : $\triangle AED$ est dans le plan AED , qui est

perpendiculaire au plan ADF ; pour s'assurer de cette perpendicularité, savoir que $\angle AMF$ est droit ne suffit pas, on a besoin d'un autre angle droit de sommet M .)]

L'angle droit qui est capital dans la résolution de ce problème est l'angle EMF , angle dièdre entre les plans EAD et AFD , qui permet d'affirmer que ces 2 plans sont perpendiculaires. À cet égard, je vais élaborer sur le concept de perpendicularité entre une droite et un plan de l'espace, afin de bien faire ressortir que cette connaissance géométrique est déterminante dans la résolution de ce problème.

Tout d'abord, on peut se poser la question : quand est-ce qu'une droite d (ou un segment s) est perpendiculaire à un plan P dans l'espace ? C'est ce qui permet de dire qu'un segment est une « hauteur » dans une pyramide, un cône, un prisme, un cylindre... La droite qui porte ce segment-hauteur doit être perpendiculaire au plan qui porte la base de la pyramide, du cône, du prisme, etc. Mais cela veut dire quoi exactement ? Je dois présenter quelques éléments de contexte mathématique, qui relèvent des connaissances géométriques en jeu ici. Voici les éléments que je vais présenter au TBI (après une trentaine de minutes de résolution) afin de guider les élèves pour les aider à compléter la résolution du problème 1 (lesdits éléments sont mis entre crochets) :

[Je vous demande d'indiquer tous les sommets de la pyramide $FADE$. Indiquer aussi le point milieu du segment $[AD]$ et nommez-le M .]

[Ensuite, je pose une **1^{re} question** : « OK, mais qu'est-ce qui m'assure que $[FM]$ est bien une hauteur pour la pyramide $FADE$? Ou autrement dit qu'est-ce qui m'assure que la droite FM est perpendiculaire au plan de la base du $\triangle EAD$? »]

Temps de réflexion (environ 5 min.) et réponses des élèves...

[Réponse attendue : “Si M est le milieu de $[AD]$, comme $\triangle AFD$ est isocèle, $[FM]$ qui est la médiane est aussi la hauteur, ce qui veut dire que $\angle AMF$ est droit. C'est ce qu'on veut, un angle droit.”]

[**Question 2** : « OK, mais est-ce que c'est suffisant de savoir que $[FM]$ fait un angle droit avec une des droites du plan EAD , ici la droite AD ? Quand est-ce qu'une droite (ici la droite FM) est perpendiculaire à un plan (ici EAD) ? Quelles conditions il faut vérifier pour cela ? »

Je fais une démonstration visuelle aux élèves en utilisant :

- une équerre,
- une feuille de carton bien rigide, assez grande, cette feuille sera le plan α .

Dans ce carton, quelque part au milieu, je perce un petit trou (ce sera le point P du plan α) et dans ce trou je fais passer une corde (ce sera la droite d), bien voyante, pas trop grosse qu'on soit convaincu qu'elle représente une droite. J'aurai fait un petit nœud dans la corde pour qu'elle reste bloquée dans le trou (au point P).

[Je vais bouger la corde (en la gardant bien tendue) et faire varier l'angle entre la droite et le plan (entre la corde et le carton). Quels que soient les angles, toutes les droites que je vais montrer passent par P (à cause du nœud). Je vais varier l'angle et je demande à chaque fois : « Est-ce que cette droite est perpendiculaire au plan ? » Les élèves répondent par oui ou par non.

Je place finalement la corde dans la position de perpendicularité et je demande : « celle-ci, est-elle perpendiculaire ? » Réponse attendue : oui.

Question 3 : « Combien y a-t-il de droites de l'espace qui passe par P et qui sont perpendiculaires au plan α ? » Réponse attendue : une seule !]

[Écrit au tableau : Par un point P dans le plan α passe une unique droite qui est perpendiculaire à α .

« Bon, la perpendiculaire passant par un point fixé du plan est unique. Mais, qu'est-ce qui la caractérise, cette perpendiculaire ? Si je dis “elle fait un angle droit avec une des droites de α qui passe par P ”, est-ce suffisant ? J'affirme que non et je vais vous montrer pourquoi. »]

[Illustration :

« Je place une droite qui n'est nettement pas perpendiculaire au plan » (Je place la corde pour qu'elle fasse un angle aigu bien prononcé avec le plan). « Regardez bien, avec l'équerre, en la plaçant de façon appropriée, je peux toujours aller chercher un angle droit avec une des droites du plan. » (J'exhibe plusieurs exemples).]

[« Bon alors je relance ma question, qu'est-ce qui caractérise la perpendiculaire au plan α qui passe par P ? »

Je reprends la manipulation du carton et de la corde mais cette fois, je place la corde dans la position de perpendicularité. Je demande à un élève de m'assister pour tenir le carton (le plan). Je fais tourner l'équerre autour de la corde (autour de l'axe d) et je laisse les élèves commenter.

Réponse attendue : “la perpendiculaire fait un angle droit avec toutes les droites du plan α qui passent par P ”]

[« Maintenant, vous allez écrire sur votre document la définition et les théorèmes suivants » :

Définition 1 : une droite d de l'espace qui coupe le plan α au point P est dite perpendiculaire à α si et seulement si d fait un angle droit avec chacune des droites de α qui passe par P .

Théorème 1 : si α est un plan fixé dans l'espace et P est un point de ce plan, alors il existe une et une seule droite d qui passe par P et qui est perpendiculaire à α .]

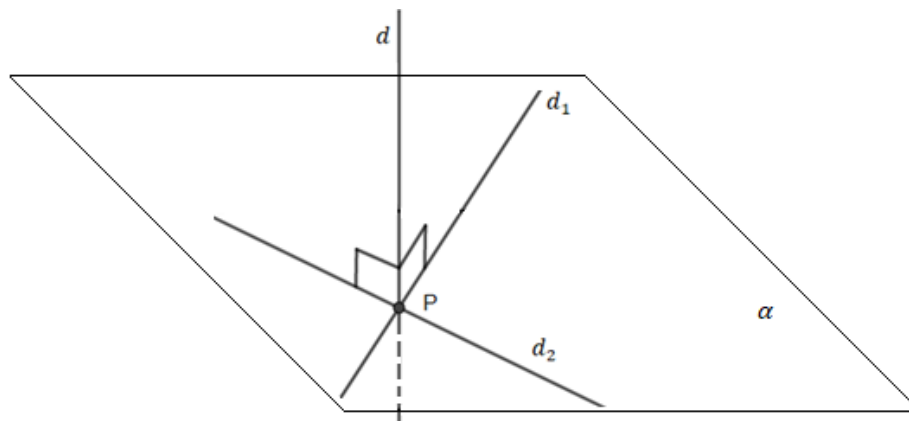
[« Revenons maintenant au problème de l'enveloppe. Je vous avais demandé de justifier que la droite FM est bien perpendiculaire au plan EAD de la base. On vient de voir qu'affirmer que FM fait un angle droit avec AD , ça ne suffit pas. Mais ce faisant, on s'est placé dans l'eau chaude, on a maintenant un sérieux problème : pour justifier mathématiquement que FM est perpendiculaire au plan EAD , il faudrait faire une infinité de vérifications, il faudrait montrer que FM fait un angle droit avec n'importe quelle droite du plan EAD qui passe par M . Comment faire cela ?]

[Heureusement les mathématiciens ont étudié la question et ont réussi à prouver le théorème suivant, dont la preuve, passablement compliquée, peut être vue dans un cours de géométrie universitaire. »]

[**Théorème 2** : α est un plan fixé dans l'espace, P est un point de α et d est une droite de l'espace qui passe par P et qui n'est pas incluse dans α . Alors, il suffit que d fasse des angles droits avec deux droites distinctes incluses dans α et passant par P pour que d soit perpendiculaire à α . Autrement dit, si d fait au point P des angles droits avec deux droites distinctes de α , alors elle fera des angles droits avec n'importe quelle autre droite de α passant par P (et pourra ainsi être dite perpendiculaire à α).]

[« Avec ce théorème, vous avez maintenant ce qu'il faut pour compléter la justification que FM est perpendiculaire au plan EAD .]

Figure 3.12 Théorème 2 (droite d perpendiculaire au plan α)



[Vous devez pour cela trouver, dans le plan EAD , une 2^e droite distincte de AD et qui fait un angle droit avec FM . Pour montrer que l'angle que vous proposez est bien droit, la réciproque du théorème de Pythagore pourrait vous être utile. Au travail ! »]

Ce théorème est utilisé directement dans le problème 1 pour identifier des hauteurs dans des pyramides. L'élève devra démontrer que $\angle EMF = 90^\circ$ et que les plans EAD et AFD sont bien perpendiculaires en vertu du Théorème 2.

Voici un exemple possible de démonstration que devra produire l'élève :

À montrer : la droite FM est perpendiculaire au plan EAD .

Il suffit que la droite FM fasse un angle droit avec 2 droites distinctes, par exemple les droites EM et AD qui sont incluses dans le plan EAD passant par le point M (voir *infra* figure 3.11) :

1) Montrons que la droite FM est perpendiculaire à la droite AD .

On sait que $\triangle FAD$ est isocèle de sommet F , la médiane $[FM]$ et la hauteur $[FM]$, toutes deux issues de F , sont donc confondues. Or, $[FM]$ est médiane par hypothèse (M étant milieu de $[AD]$), je conclus que $[FM]$ est aussi hauteur et donc, que $\angle AMF$ est droit.

2) Il faut ensuite montrer que FM est perpendiculaire à la droite EM .

Je vais aller chercher un 2^e angle droit ($\angle EMF$) en déterminant qu'il est bien droit via la réciproque (ou la contraposée selon le cas) du théorème de Pythagore. Or, j'ai vérifié (voir *infra* p. 112) que dans $\triangle EMF$, $EM^2 + FM^2 = EF^2$. Donc, je peux conclure que la droite FM est bien perpendiculaire au plan EAD (de la base de la pyramide $FADE$) et qu'il s'agit bien d'une hauteur.

Deuxième choix possible. Sélectionner pour base une des 2 faces créées par juxtaposition de 2 triangles rectangles dans le coin de l'enveloppe, à savoir la face $\triangle EDF$ créée par juxtaposition (le long de DC) de $\triangle EDC$ avec $\triangle FDC$; ou encore la face $\triangle EAF$ créée par juxtaposition (le long de AB) de $\triangle EAB$ avec $\triangle FAB$. Ici, on voit peut-être plus « naturellement » la hauteur à considérer. Si la base est $\triangle EDF$, la hauteur est $[AB] \cong [AC]$ et on peut vérifier en appliquant la réciproque du théorème de Pythagore que $\angle ABD$ est droit :

Montrer que $BD^2 + AB^2 = AD^2$ et conclure que $[BD]$ et $[AB]$ sont des cathètes et $[AD]$ l'hypoténuse de $\triangle ABD$, rectangle en B .

$$BD^2 + AB^2 = (8\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{2})^2 = 256 + 256 = 512 = 16^2 = AD^2$$

Le volume cherché est alors :

$$\text{Volume pyramide} = \frac{\text{Aire } \triangle DEF \times AB}{3}$$

$$= \frac{\frac{EF \times AB}{2} \times AB}{3}$$

$$= \frac{\frac{16 \times 8\sqrt{2}}{2} \times 8\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{1024}{3} \approx 341,3 \text{ cm}^3$$

Si la base est $\triangle EAF$, la hauteur est $DB = DC$ et l'angle droit est le même, à savoir $\angle DBA = \angle ABD$.

Le calcul du volume donne :

$$\text{Volume pyramide} = \frac{\text{Aire } \triangle EAF \times DC}{3}$$

$$= \frac{\frac{EF \times AC}{2} \times DC}{3}$$

$$= \frac{\frac{16 \times 8\sqrt{2}}{2} \times 8\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{1024}{3} \approx 341,3 \text{ cm}^3$$

Il existe d'autres façons de montrer que $m(\angle ABD) = 90^\circ$, par exemple en appliquant la loi des cosinus, concept que les élèves maîtrisent relativement bien (ayant fait l'objet d'une évaluation dans le cadre de mon travail d'enseignant). Je vais considérer les triangles $\triangle ABD$, $\triangle BDF$ et $\triangle BDE$.

J'ai besoin de déterminer BD . Je sais que $\triangle DEF$ est isocèle, car j'ai calculé antérieurement que $DE = DF = 8\sqrt{3}$. Ceci implique que $[BD]$ est une médiane et une médiatrice qui coupe le

segment $[EF]$ (16 cm) en deux segments isométriques ($BF = BE = 8\text{ cm}$). J'applique le théorème de Pythagore ($\triangle BDF$) pour calculer la mesure de $[BD]$:

$$(BD)^2 + (BF)^2 = (DF)^2, \text{ où } [BD], [BF] \text{ sont des cathètes, et } [DF] \text{ l'hypoténuse de } \triangle BDF$$

$$(BD)^2 + (8)^2 = (8\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow BD = 8\sqrt{2}\text{ cm.}$$

Pour déterminer la mesure de la cathète $[AB]$, il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore.

$$(BD)^2 + (AB)^2 = (AD)^2, \text{ où } [AB] \text{ et } [BD] \text{ sont des cathètes, et } [AD] \text{ l'hypoténuse de } \triangle ABD,$$

$$\Rightarrow (8\sqrt{2})^2 + (AB)^2 = (16)^2$$

$$\Rightarrow AB = 8\sqrt{2}\text{ cm.}$$

Appliquant la loi des cosinus pour déterminer la mesure de $\angle ABD$, on obtient :

$$(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2 - 2 \times AB \times BD \times \cos \angle ABD$$

$$\Rightarrow (16)^2 = (8\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{2})^2 - 2 \times 8\sqrt{2} \times 8\sqrt{2} \times \cos \angle ABD$$

$$\Rightarrow 256 = 128 + 128 - 256 \times \cos \angle ABD$$

$$\Rightarrow 256 = 256 - 256 \times \cos \angle ABD$$

$$\Rightarrow 0 = -256 \times \cos \angle ABD$$

$$\Rightarrow 0 = \cos \angle ABD \Rightarrow m\angle ABD = \cos^{-1}(0)$$

$$\Rightarrow m\angle ABD = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABD \text{ est rectangle en } B.$$

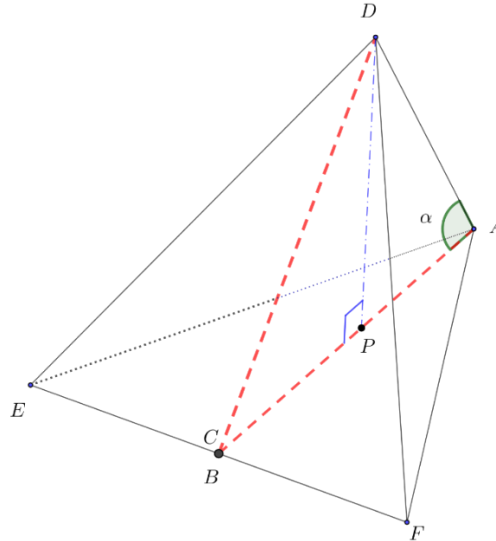
Par le fait même, je déduis que la hauteur $[AB]$ du triangle isocèle $\triangle AEF$ est aussi la hauteur de la pyramide-tétraèdre $ADEF$.

Pour bien comprendre ce problème, essayons de voir comment il se généralise et dans quelles conditions les faces du tétraèdre sont perpendiculaires à la base.

Dans le cas général, soit a la mesure du grand côté de l'enveloppe et b la mesure du petit côté. Pour que les deux triangles rectangles, qui sont juxtaposés pour faire une face dans un (éventuel) tétraèdre, soient dans le même plan, comme une arête de cette face mesurera a , on doit avoir $a < 2b$ sans quoi on ne peut juxtaposer les 2 triangles dans un même plan.

Si $a = 2b$, alors le tétraèdre sera plat (dégénéré). Si $a > 2b$, on ne peut juxtaposer les deux triangles rectangles dans un même plan (à moins de tout défaire) et le tétraèdre n'est pas « faisable ». Si $a < 2b$, le tétraèdre ressemblera à ceci :

Figure 3.13 Représentation de la pyramide-tétraèdre $DAEF$



On va prendre pour base le $\triangle AEF$, qui résulte du collage, le long de $[BD]$, des deux triangles rectangles $\triangle EBA$ et $\triangle FBA$. L'angle qui nous intéresse est $\alpha = \angle DAB = \angle DAC$ parce que le connaissant, on peut calculer la mesure de la hauteur $[PD]$ en utilisant de la trigonométrie élémentaire, sachant que $[AD]$ mesure a (long côté de l'enveloppe).

Pour calculer cet angle α , on applique la loi des cosinus à $\triangle CDA \cong \triangle BDA$, sachant que $AD = a$, $CD = AB = b$. On a alors :

$$CD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle DAB, \text{ c'est-à-dire}$$

$$b^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \alpha,$$

$$\text{ce qui implique que } \cos \alpha = \frac{a}{2b}.$$

On retrouve bien qu'il n'y a pas de solution quand $a > 2b$ (un cosinus plus grand que 1), que $\alpha = \arccos(1)$ est nul quand $a = 2b$ (le tétraèdre est « aplati ») et que quand $a/b = \sqrt{2}$, $\alpha = \arccos((\sqrt{2})/2) = 45^\circ$, ce qui implique que $\triangle CAD \cong \triangle BAD$ est un triangle isocèle ($45^\circ - 90^\circ - 45^\circ$). Mais alors $\angle ABD = \angle ACD$ est droit, ce qui implique que la mesure de $[BD] \cong [CD]$ est la hauteur.

Conclusion : il faut une enveloppe de format spécial pour que le tétraèdre obtenu ait deux faces à angle droit. Pour une enveloppe de format autre, ça ne sera pas le cas et la hauteur est plus compliquée à calculer, son calcul faisant intervenir la loi des cosinus.

Remarque : ce format d'enveloppe, où le grand côté est $\sqrt{2}$ fois plus long que le petit côté, est standard en Europe (mais pas en Amérique) : c'est le format A6, qui donne un rectangle semblable à la feuille de format A4.

En Europe et dans une majorité de pays, le format standard A4 se caractérise par le fait que quand on le plie en deux, on obtient un rectangle qui a exactement les mêmes proportions que le rectangle initial; ce qui présente toutes sortes d'avantages pour le stockage, l'agrandissement ou la réduction, la découpe, etc. Autrement dit, si b est la largeur et a la hauteur d'une feuille qui a les proportions du format A4, alors $\frac{a}{b} = \frac{b}{a/2}$, d'où l'on tire aisément que $a = \sqrt{2}b$. Ainsi A3 est une feuille 2 fois plus grande que A4, elle-même 2 fois plus grande que A5 et 4 fois plus grande que A6 (enveloppe standard en Europe).

5^e élément de la THA (problème 1) : *Conduire le raisonnement qui confirmera que la hauteur de la pyramide est aussi la hauteur d'une face triangulaire (ex. : $\triangle AED$). La production de la représentation 2D en perspective cavalière pourrait s'avérer décisive pour cela.*

Je veux amener l'élève à comprendre que la visualisation directe ne suffit pas pour démontrer que la hauteur $[FM]$ de la pyramide coïncide avec la hauteur de la face triangulaire $\triangle ADF$ qui est perpendiculaire à la face triangulaire $\triangle DAE$.

L'élève ne pourra voir directement la hauteur de la pyramide (la maquette n'est pas translucide : on ne voit pas ce qui se passe à l'intérieur) car elle n'apparaît pas sur la face triangulaire $\triangle DAF$. À cet égard, il devra penser à introduire le point M sur cette face qui est le point milieu de $[AD]$ (voir *infra* figure 3.11). L'angle EMF est caché à l'intérieur de la pyramide et avec l'élaboration du dessin en perspective cavalière, cela permet de l'exhiber et de montrer où il intervient. L'élève devra mettre en œuvre un raisonnement géométrique pour déterminer la mesure de l'angle EMF .

6^e élément de la THA (problème 1) : *Appliquer correctement la formule du volume de la pyramide (connaissances géométriques).*

L'élève repère, dans la représentation en perspective qu'il aura produite, la base de la pyramide, qui est un triangle isocèle, ainsi que la hauteur associée. Il se remémore la formule de volume d'une pyramide :

$$\text{Volume pyramide} = \frac{\text{Aire base} \times h}{3}, \text{ où } h \text{ est la hauteur de la pyramide } ADEF.$$

Pour calculer l'aire de la base triangulaire, il utilise le théorème de Pythagore. Le calcul de volume a été présenté à l'élément 3 de la THA du problème 1.

À la fin de la séance 3 (environ 25 min.), j'ai fait un bilan des apprentissages chez les élèves. À cet égard, j'ai demandé à ceux et à celles qui en avaient envie de partager ce qu'ils avaient appris et ce qu'ils avaient retenu de la résolution du problème 1 en leur posant les questions suivantes :

- Quelle a été la plus grande difficulté pour résoudre ce problème ? Expliquez.

- Expliquez sommairement ce que vous avez fait pour calculer le volume de la pyramide ?
- Qu'avez-vous fait des énoncés et théorèmes portant sur la relation de perpendicularité dans l'espace ?

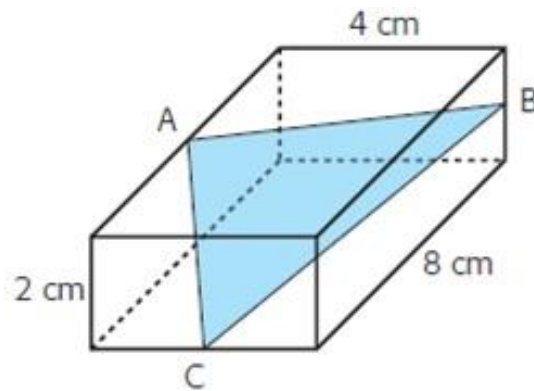
3.3.4.2.2 Séances 4 et 5 : Problème 2 (triangle $\triangle ABC$ situé à l'intérieur d'un prisme droit à base rectangulaire)

J'ai présenté, sur le TBI, le Problème 2, inspiré du manuel Intersection mathématique 3^e secondaire. Les concepts abordés durant les séances 4 et 5 sont la perpendicularité dans l'espace (entre 2 plans et les droites incluses dans ce plan), le théorème de Pythagore (en 2D et en 3D), la réciproque de ce théorème et la perspective cavalière.

Triangle $\triangle ABC$ situé à l'intérieur d'un prisme droit à base rectangulaire.

Les sommets du triangle $\triangle ABC$ sont situés aux points milieux de certaines arêtes de ce prisme droit à base rectangulaire. Ce triangle semble être rectangle en A . L'est-il ? Justifie ta réponse.

Figure 3.14 Problème 2



(Inspiré du manuel Intersection Mathématique 3^e sec. (2007), tome A, #6, p. 245)

En lien avec les questions de recherche, ce que je vise en proposant le problème 2 est de :

- Décrire les rôles de la visualisation spatiale lorsqu'elle interagit avec les connaissances spatiales et les connaissances géométriques, pour démontrer que $\triangle ABC$ est rectangle en A ou ne l'est pas.

Ce problème est axé sur les connaissances spatiales (plusieurs triangles rectangles à repérer dans l'espace), la visualisation spatiale (externe et interne : par ex., voir les angles droits qui ne seront pas représentés de façon à rendre compte des relations d'isométrie ou de similitude, dans le dessin en perspective complété par l'élève). Les élèves ont eu à leur disposition une représentation en perspective cavalière sur papier, celle qui a été fournie avec l'énoncé.

Les élèves ont eu 150 minutes pour compléter la résolution du problème 2. Ensuite, j'ai réalisé un bilan des apprentissages (environ 15 minutes) incluant la correction. Dans le cadre de mon travail d'enseignant de mathématiques, j'ai donné à faire ce problème à maintes reprises à des élèves de 3^e secondaire, et j'ai fait le constat qu'il oblige les élèves à raisonner dans l'espace à cause des nombreux triangles rectangles à repérer dans la représentation 2D. De plus, le problème est d'un niveau de difficulté relativement élevé car il exige des élèves qu'ils mobilisent la visualisation spatiale en créant d'une part, des images mentales de ces triangles rectangles sur les faces et à l'intérieur du prisme droit à base rectangulaire et d'autre part, qu'ils coordonnent cette visualisation avec les connaissances spatiales (encodage/décodage des représentations 2D, c'est-à-dire, dessiner à même la représentation donnée tous les triangles rectangles), mises en œuvre dans la résolution avec la visualisation directe (ex. : angles droits).

Trajectoire d'apprentissage hypothétique du Problème 2 : le triangle rectangle $\triangle ABC$ situé à l'intérieur d'un prisme droit à base rectangulaire

L'intention globale :

- Les habiletés spatiales « visualisation directe » ($\triangle BFE$, $\triangle DIC$, angles droits $\triangle DIC$, $\triangle KGH$, $\triangle BFE$, $\triangle AEF$, $\triangle ADJ$, $\triangle FJD$, $\triangle KIC$, $\triangle CHG$, $\triangle EFJ$, $\triangle IHG$) et « visualisation interne » ($\triangle ADC$, $\triangle CGH$, $\triangle BGC$, $\triangle AEB$) interagissent concomitamment avec les connaissances spatiales (décodage et encodage des triangles rectangles à l'intérieur du prisme droit) et les connaissances géométriques (théorème de Pythagore, sa contraposée, théorèmes relatifs à

la perpendicularité dans l'espace) pour permettre de démontrer si le triangle $\triangle ABC$ est rectangle ou non au sommet A .

1^{er} élément de la THA (problème 2) : *Interaction de la visualisation interne avec les connaissances spatiales liées à la déconstruction dimensionnelle.*

L'élève mobilise l'habileté de visualisation spatiale et certaines connaissances spatiales dont le repérage et le découpage qui concerne la déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005). Celle-ci se manifestera en sélectionnant des parties du prisme droit à base rectangulaire (voir *infra* figure 3.14)— ses bases et ses faces latérales —, en les décomposant en segments formant des triangles rectangles, et en utilisant des points situés au milieu de ces segments pour localiser des longueurs (cathètes et hypoténuses), etc. De plus, l'élève peut analyser plus précisément la nature de certaines relations entre les éléments du problème 2 (perpendicularité des segments, égalité des longueurs, etc.).

2^e élément de la THA (problème 2) : *Pour déterminer les mesures manquantes dans des triangles rectangles bien choisis, combiner la visualisation directe avec des connaissances géométriques (théorème de Pythagore et sa contraposée, angle dièdre, plans perpendiculaires) et des connaissances spatiales; le tout à l'aune de la représentation en perspective du prisme.*

Une **mise au point** s'impose ici, et elle concerne le Théorème 3, sur lequel je reviendrai plus loin. Dans l'expérimentation, il y a bien eu une 2^e phase, où j'ai demandé des justifications sur les angles droits à partir des notions d'angle dièdre, de plans perpendiculaires et d'un théorème, le Théorème 3, qui par une malencontreuse distraction, a été énoncé en oubliant une hypothèse. De cette omission a résulté un énoncé non valable, et a rendu caduques toutes les argumentations attendues (et proposées par les élèves) dans cette phase 2. Pour cette raison, j'ai choisi de reporter tout ce qui a trait à cette phase 2 – hormis la présente remarque – au chapitre 4.

Ainsi, ce que je m'attends à obtenir comme solutions du problème 2 comportera une seule phase, c'est-à-dire celle qui concerne les calculs et qui mobilise la visualisation spatiale (externe et interne) interagissant avec les connaissances spatiales. De plus, la partie « raisonnement déductif » de la résolution du problème, où les élèves doivent justifier mathématiquement leur démarche, ne sera

mise en œuvre que dans des versions améliorées de la séquence d'enseignement, où les équipes devront invoquer le Théorème 3. Je préciserai ultérieurement comment cela sera traité.

Dans ce qui suit, je présente des étapes possibles de résolution correspondant au 2^e élément de la THA du problème 2.

Afin d'aider les élèves à développer l'image mentale d'un angle dièdre entre 2 plans, je vais présenter aux élèves une maquette translucide plastifiée où seront indiqués les plans Π_1 , Π_2 la droite δ , et les droites d_1 et d_2 .

J'ajoute que tracer en traits pointillés tous les triangles rectangles, ainsi que les codages des angles droits sur la représentation 2D initiale fournie, relève à la fois des connaissances spatiales (voir §2.3.5) et de connaissances géométriques (par ex., savoir appliquer adéquatement les règles de la perspective cavalière).

Étape 1 : visualiser $\triangle ABC$ dans l'espace

Afin de représenter en 3D les triangles rectangles dans le prisme droit à base rectangulaire, l'élève développe et applique les conventions de la perspective cavalière. Il est possible que le conflit « vu/su » (Parzysz, 1988; 2007) se manifeste à la suite de la visualisation directe de la représentation 2D fournie (voir *supra* figure 3.16), c'est-à-dire que l'angle BAC soit perçu (le « vu ») comme étant droit par l'élève. Pour déterminer s'il y a ou non un angle droit en A , l'élève devra utiliser le théorème de Pythagore ou sa contraposée.

Ce qui rend difficile l'application de la contraposée du théorème de Pythagore pour le triangle $\triangle ABC$, c'est qu'il est nécessaire de déterminer les longueurs des cathètes $[AB]$, $[AC]$ et celle de l'hypoténuse $[BC]$. En effet, pour trouver ces valeurs, il faut d'abord repérer (connaissances spatiales) d'autres triangles rectangles ainsi que leur angle droit dans le prisme (les triangles $\triangle CID$, $\triangle ADC$, $\triangle GHC$, $\triangle BGC$, $\triangle BFE$, $\triangle AEB$), puis calculer les mesures de leurs cathètes ou de leur hypoténuse en appliquant le théorème de Pythagore à plusieurs reprises.

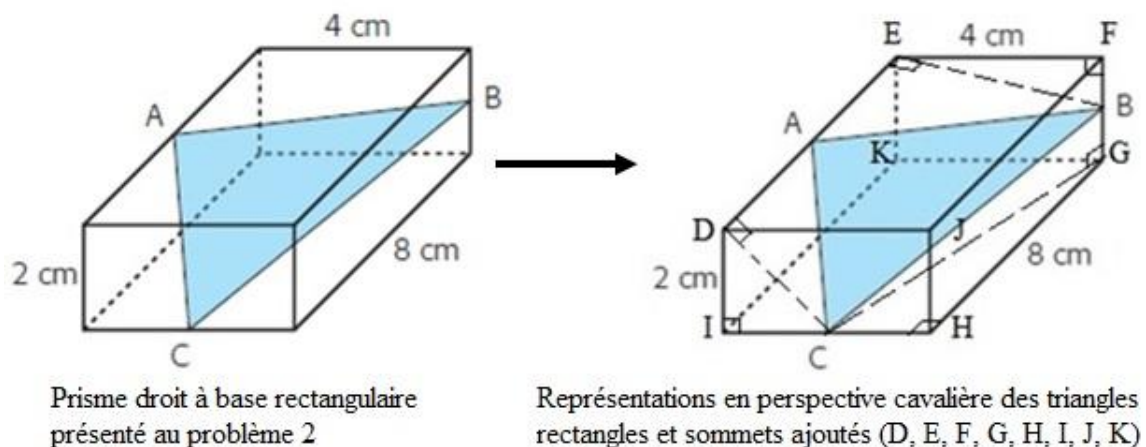
Ainsi, pour calculer les mesures de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ dans $\triangle ABC$, il sera nécessaire de déterminer préalablement les mesures des côtés $[CD]$, $[BE]$, $[CG]$ en appliquant le théorème de Pythagore à six reprises. La visualisation des triangles rectangles $\triangle CID$, $\triangle ADC$, $\triangle GHC$, $\triangle BGC$, $\triangle BFE$, $\triangle AEB$ pourra être réalisée dans la représentation 2D fournie (figure 3.16) en y traçant en pointillés ces triangles rectangles (cathètes et hypoténuses).

Étape 2 : déterminer les mesures manquantes des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ de $\triangle ABC$.

a) Déterminer la mesure de $[AC]$

Je vais montrer comment s'articulent les habiletés spatiales avec les connaissances spatiales et les connaissances géométriques. Soit les prismes droits à base rectangulaire illustrés à la figure 3.16 : le prisme de gauche est la figure initialement donnée tandis que le prisme de droite est celui sur lequel j'ai identifié, en les nommant, les sommets du prisme, et ai représenté en perspective cavalière les triangles rectangles et les angles droits pertinents. Je m'attends à ce que les élèves produisent ces éléments. La visualisation *externe* (angle droit CID) combinée au découpage du triangle $\triangle CID$ (connaissances spatiales) illustre que l'angle CID constitue un angle droit puisque la base $DJHI$ du prisme est un rectangle et qu'il y a des angles droits en chacun de ses sommets (connaissances géométriques).

Figure 3.15 Repérer les triangles rectangles dans le prisme à base rectangulaire



Ensuite, appliquer le théorème de Pythagore (connaissances géométriques) :

$DI^2 + CI^2 = CD^2$, où $[DI]$, $[CI]$ sont les cathètes de $\triangle DCI$ et où $[CD]$ est l'hypoténuse.

On sait que $DI = 2 \text{ cm}$ et que $CI = \frac{1}{2} \times IH$, car C est le point milieu de $[IH]$

$$\Rightarrow CI = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \text{ cm.}$$

Puis calculer, $DI^2 + CI^2 = CD^2$

$$\Rightarrow 2^2 + 2^2 = CD^2 \Rightarrow CD = \sqrt{8} \text{ cm.}$$

Maintenant, on peut déterminer la mesure de $[AC]$. Il est possible que l'élève éprouve une difficulté à visualiser l'angle droit ADC à cause du conflit «vu/su». Même si l'élève sait (le « su ») que l'angle ADC est droit (car il aura représenté le codage de cet angle selon la technique de la perspective cavalière), il peut le percevoir (le « vu ») comme étant non droit. Aussi, il est nécessaire de visualiser que l'hypoténuse CD de $\triangle CID$ représente aussi une cathète de $\triangle ADC$. Ensuite, application du théorème de Pythagore pour déterminer la mesure de $[AC]$:

$AD^2 + CD^2 = AC^2$, où $[AD]$, $[CD]$ sont les cathètes de $\triangle ADC$ et où $[AC]$ est l'hypoténuse.

On sait que $CD = \sqrt{8} \text{ cm}$ et que $AD = \frac{1}{2} \times DE$, car A est le point milieu de $[DE]$.

$$\Rightarrow AD = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ cm}$$

Puis, $AD^2 + CD^2 = AC^2$

$$4^2 + (\sqrt{8})^2 = AC^2$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{24} \approx 4,90 \text{ cm.}$$

b) Déterminer la mesure de $[BC]$.

Avant de déterminer la mesure de $[BC]$, il faut visualiser que $[BC]$ est l'hypoténuse de $\triangle BGC$ et calculer la mesure de $[CG]$. De plus, l'élève doit visualiser que la cathète $[CG]$ de $\triangle BGC$ est aussi l'hypoténuse de $\triangle CHG$. Ce qui peut compliquer la visualisation pour l'élève, c'est que la représentation du codage de l'angle droit GHC n'est pas physiquement droit, ce qui implique que le conflit « vu/su » peut se manifester chez l'élève. Une fois que l'élève aura complété la représentation en perspective cavalière de $\triangle GHC$, il est aussi possible qu'une autre difficulté se produise car ce triangle ne sera pas représenté en position prototypique (voir Braconne-Michoux, 2018).

Pour déterminer la mesure de $[CG]$, on applique le théorème de Pythagore dans $\triangle GHC$:

$CH^2 + HG^2 = CG^2$ où $[CH]$, $[HG]$ sont les cathètes de $\triangle GHC$ et où $[CG]$ est l'hypoténuse.

On sait que $HG = 8\text{ cm}$ et que $CH = \frac{1}{2} \times IH$, car C est le point milieu de $[IH]$.

$$\Rightarrow CH = \frac{1}{2} \times 4 = 2\text{ cm}$$

Puis, $CH^2 + HG^2 = CG^2$

$$\Rightarrow 2^2 + 8^2 = CG^2$$

$$\Rightarrow CG = \sqrt{68} \approx 8,25\text{ cm}.$$

Maintenant, il devient possible de déterminer la mesure de $[BC]$ tout en faisant coordonner la visualisation spatiale avec les connaissances spatiales puisque l'élève doit imaginer le $\triangle BGC$ et représenter en perspective le codage de l'angle droit BGC de ce triangle. Puis, il vient le calcul de la mesure de $[BC]$ en appliquant le théorème de Pythagore :

$CG^2 + BG^2 = BC^2$, où $[CG]$, $[BG]$ sont les cathètes de $\triangle BGC$ et où $[BC]$ est l'hypoténuse.

On sait que $CG = \sqrt{68} \text{ cm}$ et que $BG = \frac{1}{2} \times FG$, car B est le point milieu de $[FG]$.

$$\Rightarrow BG = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ cm}$$

Puis, $CG^2 + BG^2 = BC^2$

$$(\sqrt{68})^2 + 1^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{69} \text{ cm.}$$

c) Déterminer la mesure de $[BE]$

L'élève doit visualiser que $[BE]$ constitue l'hypoténuse de $\triangle BFE$ et $[BE]$ représente aussi une cathète de $\triangle AEB$. Il y aura possiblement la manifestation du conflit « vu /su » pour l'angle droit AEB .

Voici le calcul pour le calcul de la mesure de $[BE]$:

$BF^2 + EF^2 = BE^2$, où $[BF]$, $[EF]$ sont les cathètes de $\triangle BFE$ et où $[BE]$ est l'hypoténuse.

On sait que $EF = 4 \text{ cm}$ et que $BF = \frac{1}{2} \times FG$, car B est le point milieu de $[FG]$.

$$\Rightarrow BF = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ cm}$$

Puis, $BF^2 + EF^2 = BE^2$

$$1^2 + 4^2 = BE^2$$

$$\Rightarrow BE = \sqrt{17} \text{ cm.}$$

d) Déterminer la mesure de $[AB]$.

Application du théorème de Pythagore

$AE^2 + BE^2 = AB^2$, où $[AE]$, $[BE]$ sont les cathètes de $\triangle AEB$ et où $[AB]$ est l'hypoténuse.

On sait que $BE = \sqrt{17} \text{ cm}$ et que $AE = \frac{1}{2} \times DE$, car A est le point milieu de $[DE]$.

$$\Rightarrow AE = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Puis, } AE^2 + BE^2 = AB^2$$

$$4^2 + (\sqrt{17})^2 = AB^2$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{33} \text{ cm.}$$

Étape 3 : appliquer la contraposée du théorème de Pythagore (connaissances géométriques) pour vérifier si l'angle au sommet A est droit ou ne l'est pas.

À vérifier, $AB^2 + AC^2 = BC^2$, sachant que $AB = \sqrt{33} \text{ cm}$, $AC = \sqrt{24} \text{ cm}$ et $BC = \sqrt{69} \text{ cm}$.

Or,

$$AB^2 + AC^2 = (\sqrt{33})^2 + (\sqrt{24})^2 = 57 \neq 69 = BC^2,$$

$$\text{donc } AB^2 + AC^2 \neq BC^2.$$

Puisque la relation de Pythagore n'est pas vérifiée, la contraposée du théorème permet de conclure que $m\angle BAC \neq 90^\circ$, c'est-à-dire que l'angle BAC n'est pas droit.

À la fin de la séance 5 (environ 15 min.), je ferai un bilan des apprentissages avec les élèves. À cet égard, je vais demander à ceux et à celles qui en ont l'envie de partager ce qu'ils ont appris et ce qu'ils retiennent de la résolution du problème 2, en leur posant les questions suivantes :

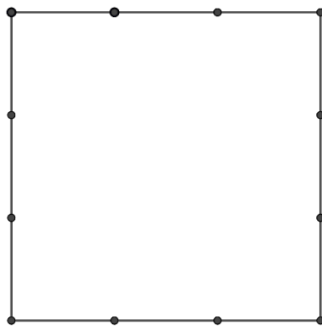
- Quelle a été la plus grande difficulté pour résoudre ce problème ? Expliquez.
- Expliquez sommairement ce que vous avez fait pour démontrer ou justifier que le triangle $\triangle ABC$ a ou n'a pas un angle droit au sommet A ?

3.3.4.2.3 Séances 6 et 7 : problème 3 (le cube tronqué)

Problème 3 : « le cube tronqué »

On tronque un cube en coupant un morceau en chaque sommet. Au sommet S , le plan de coupe passe par les trois points qui sont au premier tiers des trois arêtes adjacentes en S .

a) Sur le carré ci-dessous, qui est une des faces du cube et dont le côté mesure 3 unités, trace ce que devient la face après la troncature. Calcule la mesure de chacun des côtés du polygone ainsi obtenu. Ce polygone est-il régulier ? Justifie ta réponse.

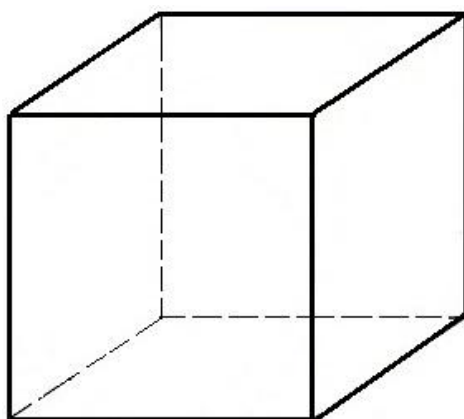


b) Décris le polyèdre obtenu par troncature : combien a-t-il de sommets, d'arêtes, de faces, combien y a-t-il d'arêtes adjacentes en chaque sommet, de quels types de polygones sont constituées les faces et comment sont-ils agencés ?

c) Dessine le polyèdre obtenu, le « cube tronqué », en perspective cavalière à partir d'une reproduction, sur ta feuille, du cube ci-dessous.

Un cube en perspective cavalière est donné.

Figure 3.16 Cube en perspective cavalière



d) En chaque sommet, la troncature retire du cube un polyèdre. De quel type est ce polyèdre ? Calcule les mesures de ses arêtes et son volume.

e) Finalement, calcule le volume du cube tronqué.

Les concepts en jeu dans le problème 3 sont les suivants : théorème de Pythagore, représentation en perspective cavalière d'un solide usuel, volume d'un prisme et d'une pyramide, la perpendicularité dans l'espace (qui intervient dans la considération des hauteurs des pyramides « enlevées »), polygones réguliers et non réguliers, propriétés des triangles isocèles et équilatéraux.

En lien avec les questions de recherche, les objectifs d'apprentissage des séances 6 et 7 sont les suivants :

- 1) À la suite de la troncature d'un cube aux tiers de chaque arête, décrire le polyèdre obtenu (sommets, arêtes, faces, type de polygones des faces, etc.)
- 2) Représenter en perspective cavalière le cube tronqué.
- 3) Calculer le volume des polyèdres retirés par troncature et calculer le volume du solide tronqué.

Trajectoire hypothétique d'apprentissage du Problème 3 (le cube tronqué)

L'intention globale :

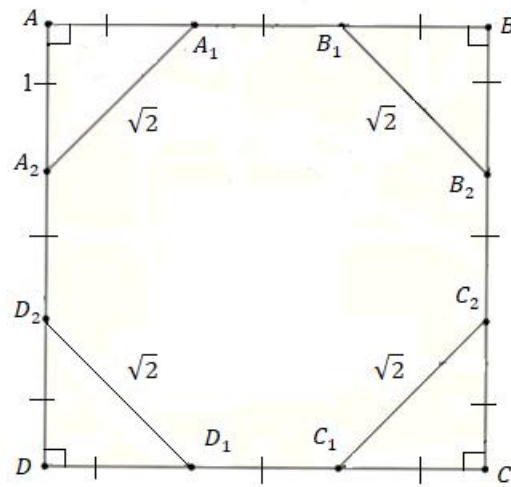
Les habiletés spatiales « visualisation directe » (ex. : voir les arêtes, les faces et les sommets résultant d'une troncature) et « visualisation interne » (images mentales des faces triangulaires équilatérales des petites pyramides résultant de la troncature) agissent concomitamment avec les connaissances spatiales (encodage/décodage d'une représentation 2D) et les connaissances géométriques (ex. : théorème de Pythagore, réciproque de ce théorème, relation de perpendicularité dans l'espace) pour calculer le volume d'un cube tronqué.

1^{er} élément de la THA (problème 3) : *faire agir la visualisation spatiale (directe et interne) avec des connaissances géométriques (théorème de Pythagore) pour calculer la mesure de chacun des côtés du polygone obtenu à la suite de la troncature aux tiers de chaque arête, puis établir que l'octogone obtenu n'est pas régulier.*

a) Calcule la mesure de chacun des côtés du polygone ainsi obtenu. Le polygone obtenu est-il régulier ? Justifie ta réponse.

Je vais utiliser la face $ABCD$ du cube pour montrer que l'octogone $A_2A_1B_1B_2C_2C_1D_1D_2A_2$ est irrégulier. Je précise que j'ai indiqué aux élèves de nommer tous les sommets de la même façon afin que les échanges en chaque équipe et en grand groupe se déroulent convenablement.

Figure 3.17 Face octogonale non régulière



À la suite de la troncature réalisée sur le cube aux tiers de chaque arête, l'élève utilise la visualisation *directe* pour tracer correctement une première face octogonale passant par les points $A_1B_1B_2C_2C_1D_1D_2A_2$ (voir figure 3.18).

Voici le raisonnement géométrique :

1) Ce que l'on sait

À l'aide de connaissances géométriques sur le carré, l'élève sait que celui-ci possède 4 angles droits en chacun de ses sommets A , B , C et D (figure 3.18). De plus, il constate que les triangles A_2AA_1 , B_1BB_2 , C_2CC_1 et D_2DD_1 sont des triangles rectangles (combinaison de connaissances géométriques jumelées à la visualisation directe des petits symboles d'angle droit qu'il a tracés dans la représentation 2D) car $\angle A_2AA_1$, $\angle B_1BB_2$, $\angle C_2CC_1$ et $\angle D_2DD_1$ mesurent 90° .

2) Les polygones obtenus comme faces du cube tronqué sont-ils réguliers ou non ?

Pour déterminer les longueurs A_2A_1 , B_1B_2 , C_1C_2 et D_1D_2 , il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore.

1) Déterminer A_2A_1 : $(A_2A_1)^2 = (AA_2)^2 + (AA_1)^2$ où AA_2 et AA_1 sont les mesures des cathètes et où A_1A_2 la mesure de l'hypoténuse,

$$\Rightarrow (A_2A_1)^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow A_2A_1 = \sqrt{2} \text{ unité.}$$

2) L'élève procède de manière identique pour ΔB_1BB_2 , ΔC_1CC_2 et ΔD_1DD_2 . Il en conclut que $B_1B_2 = C_1C_2 = D_1D_2 = \sqrt{2}$ unité.

3) Conclusion

Comme la troncature se fait au tiers de chacune des arêtes, les longueurs de $[A_2D_2]$, $[A_1B_1]$, $[B_2C_2]$ et $[C_1D_1]$ sont de 1 unité. Ainsi, on vient de montrer que l'octogone $A_2A_1B_1B_2C_2C_1D_1D_2A_2$ n'est pas régulier. De plus, puisque les autres faces du cube sont des carrés, on peut conclure que les 5 autres faces octogonales résultant de la troncature seront isométriques et non régulières.

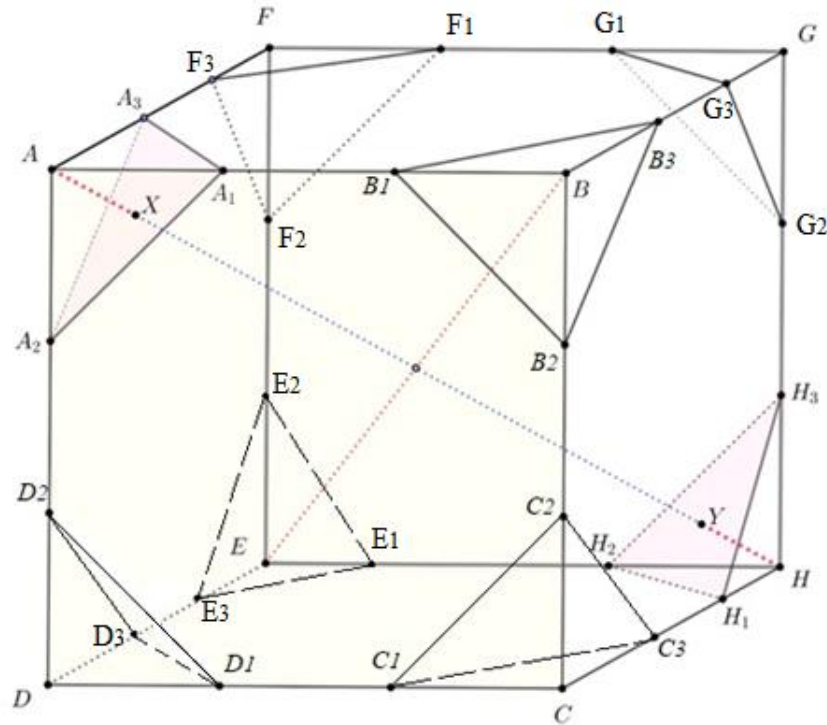
b) Décris le polyèdre obtenu par troncature : combien a-t-il de sommets, d'arêtes, de faces, combien y a-t-il d'arêtes adjacentes en chaque sommet, de quels types de polygones sont constituées les faces et comment sont-ils agencés ? Dessine en perspective cavalière le polyèdre obtenu, le « cube tronqué », à partir d'une reproduction, sur ta feuille, du cube ci-dessous.

2^e élément de la THA (problème 3) : *L'élève complète une représentation en perspective cavalière (connaissances spatiales) du cube tronqué en indiquant sur son dessin les sommets, les arêtes ainsi que les angles droits. À partir de cette représentation en perspective cavalière, l'élève met en œuvre des connaissances géométriques afin d'identifier et nommer le type de faces (octogones non réguliers, triangles équilatéraux) formant le solide résultant de la troncature.*

Dans la description du polyèdre obtenu par troncature, l'élève visualise directement sur le dessin en perspective qu'il a produit, les 6 faces octogonales non régulières. Je prévois que l'élève produira une représentation 2D adéquate (cube tronqué) où les 8 tétraèdres seront aussi représentés à même le cube (voir figure 3.19). Les sommets du cube sont $ABCDEFGH$.

Le plan de troncature au sommet A intercepte les trois arêtes adjacentes en A aux points A_1 , A_2 et A_3 . J'applique le même raisonnement aux autres sommets : H (H_1, H_2, H_3), B (B_1, B_2, B_3), E (E_1, E_2, E_3), C (C_1, C_2, C_3), F (F_1, F_2, F_3), D (D_1, D_2, D_3) et G (G_1, G_2, G_3).

Figure 3.18 Représentation en perspective cavalière du cube tronqué avec tous les sommets identifiés



En mobilisant des connaissances géométriques à partir du dessin en perspective du cube tronqué, l'élève dénombre à l'aide de la visualisation directe à même le dessin en perspective qu'il a élaboré, les arêtes, les faces, les sommets et indique que le nouveau solide obtenu est un polyèdre non régulier ayant les caractéristiques suivantes :

- type de polygones : 14 faces; 6 faces octogonales non régulières (avec des côtés de 1 unité et $\sqrt{2}$ unité qui alternent) et 8 faces triangulaires équilatérales dont chaque côté mesure $\sqrt{2}$ unité;
- le nouveau solide a 36 arêtes et 24 sommets; en effet chacun des 8 sommets du cube initial donne lieu à 3 sommets après troncature, donc $3 \times 8 = 24$ sommets en tout. Or, il y a 3 arêtes adjacentes en chaque sommet (voir figure 3.19), mais en calculant $3 \times 24 = 72$, on compte chaque arête 2 fois

puisque chaque arête relie 2 sommets. Pour avoir le bon nombre d'arêtes, il faut donc diviser par 2, ce qui donne $72 \div 2 = 36$.

Je prédis que la représentation 2D des triangles équilatéraux sera plus difficile pour certains élèves, car cela exigera qu'ils maîtrisent très bien les règles de la perspective cavalière combinées à d'autres connaissances spatiales et géométriques telles que l'agencement des arêtes incidentes et adjacentes en chaque sommet (ex. : arêtes $[HH_1]$, $[HH_2]$, $[HH_3]$).

Voici des exemples de conventions de la perspective cavalière relevant des connaissances spatiales qui doivent être bien maîtrisées :

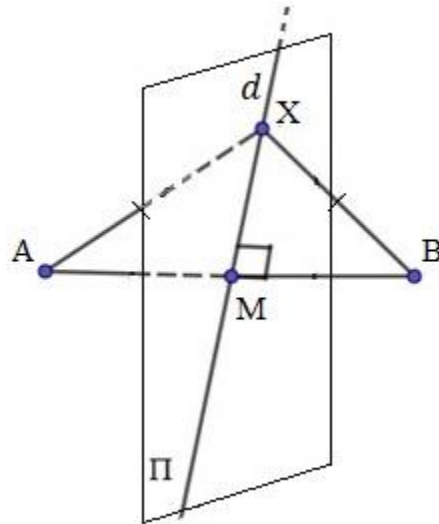
- la face octogonale $A_1B_1B_2C_2C_1D_1D_2$ est située dans le plan frontal;
- réduire de moitié les segments (appelés fuyantes) $[CH]$, $[DE]$, $[AF]$, $[BG]$. De même pour les segments $[CC_3]$, $[C_3H_1]$, $[H_1H]$, etc.;
- conservation du parallélisme des fuyantes ($[C_1C_3]$ et $[E_1E_3]$, $[D_1D_3]$ et $[H_1H_2]$).

3^e élément de la THA (problème 3) : *mettre en œuvre la visualisation directe à la suite de la troncature d'un cube, puis imaginer mentalement que le polyèdre retiré en chaque sommet sera un tétraèdre non régulier dont la base est un triangle équilatéral. Ensuite, calculer le volume de chacun des tétraèdres non réguliers à base triangulaire équilatérale en mobilisant la visualisation (entre autres d'une hauteur), des connaissances géométriques et des connaissances spatiales.*

4^e élément de la THA (problème 3) : *invoquer les Théorèmes 4 et 5 (connaissances géométriques) relatifs au plan médiateur d'un segment, pour démontrer mathématiquement (raisonnement déductif) que le segment qu'on pense être la hauteur de la pyramide est bien perpendiculaire au plan de la base.*

Définition 4 : Le plan médiateur Π d'un segment $[AB]$ est l'unique plan perpendiculaire à AB qui passe par le milieu M de $[AB]$.

Figure 3.19 Plan médiateur Π du segment $[AB]$



Théorème 4 : si Π est le plan médiateur de $[AB]$, alors tous les points de Π sont à égales distances de A et de B .

Théorème 5 : si tous les points d'un plan Ω de l'espace sont à égales distances des extrémités A et B de $[AB]$, alors ce plan est le plan médiateur de $[AB]$ (c'est-à-dire que Ω est perpendiculaire à AB et coupe $[AB]$ en son milieu).

c) En chaque sommet, la troncature retire du cube un polyèdre. De quel type est ce polyèdre ? Calcule ses mesures et son volume.

Je précise que le niveau de difficulté de cette question est élevé si l'on s'attend à ce que les affirmations invoquées pour le calcul de la hauteur des pyramides « enlevées » soient mathématiquement justifiées. En effet, démontrer la relation de perpendicularité impliquant la hauteur d'une pyramide dans l'espace exige des preuves géométriques rigoureuses auxquelles les élèves de ce niveau d'études (5^e secondaire) ne sont pas nécessairement habitués. C'est pourquoi je vais les guider en leur rappelant le théorème 2 que j'ai expliqué à la séance 2.

Chaque pyramide est composée d'une base triangulaire équilatérale (ex. : $\Delta A_1 A_2 A_3$) dont l'arête mesure $\sqrt{2}$ unité (côtés $[A_1 A_2]$, $[A_2 A_3]$, $[A_1 A_3]$) et de 3 faces latérales triangulaires isocèles dont 2 arêtes mesurent 1 unité et une arête mesure $\sqrt{2}$ unité.

L'élève a déjà calculé antérieurement les mesures des côtés de la base triangulaire (voir question a). Pour l'aider à calculer le volume d'une petite pyramide-tétraèdre et selon la consigne demandée, il élabore une représentation en perspective cavalière (figure 3.21), ce qui lui permettra d'inscrire sur ce dessin les éléments de la formule de volume dont il a besoin : les mesures A_1A_2 , A_2A_3 , A_1A_3 de la base triangulaire, la hauteur $[A_2M_1]$ de cette base et la hauteur $[AX]$ de la pyramide :

Ensuite, afin de justifier un peu mieux cette affirmation, je vais les guider dans leurs raisonnements en mentionnant : « Considérez la diagonale $[AH]$ du cube (voir infra figure 3.19). Tenons pour acquis, toujours par symétrie, que tous ses points sont à égales distances de A_1 , de A_2 et de A_3 . Considérons son intersection X avec le plan $A_1A_2A_3$. Pourquoi X serait-il le centre de gravité de

$\Delta A_1 A_2 A_3$? Proposez un raisonnement en vous appuyant sur les propriétés des triangles équilatéraux. Trouvez deux angles droits formés par $[AX]$ et des droites à l'intérieur du plan $A_1 A_2 A_3$, en justifiant pourquoi ils sont droits. »

1) Ce que l'on sait

Je vais justifier maintenant mon raisonnement géométrique. On considère la diagonale $[AH]$ du cube (voir figure 3.19), qui joint 2 points diamétralement opposés. Cette diagonale $[AH]$ est en fait une des deux diagonales du rectangle $AGHD$, l'autre étant la diagonale $[DG]$.

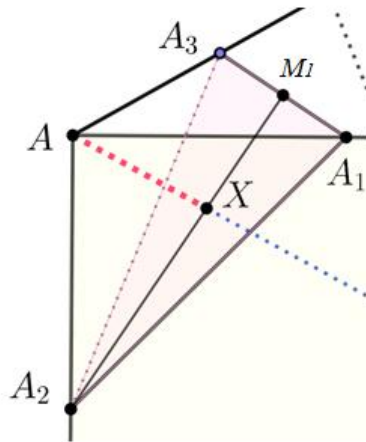
2) À montrer : le point X est le centre de gravité du triangle $\Delta A_1 A_2 A_3$.

Par symétrie, la diagonale $[AG]$ du carré $AFGB$ coupe le segment $[A_1 A_3]$ en son milieu, point que nous nommons M_1 (figure 3.22). Dans le triangle équilatéral $\Delta A_1 A_2 A_3$ (la base du tétraèdre $AA_1 A_2 A_3$ qui nous intéresse), le segment $[A_2 M_1]$ est donc médiane et hauteur, et la droite $A_2 M_1$ est médiatrice du segment $[A_1 A_3]$. Appelons X le point de croisement de la diagonale $[AH]$ avec le plan $A_1 A_2 A_3$.

3) Conclusion

Toujours par symétrie, ce point est à égale distance des points A_1 , A_2 et A_3 , ce point est donc le centre du cercle circonscrit de $\Delta A_1 A_2 A_3$ (point de rencontre des trois médiatrices), c'est donc aussi le centre de gravité, point de rencontre des médianes, puisque $\Delta A_1 A_2 A_3$ est équilatéral.

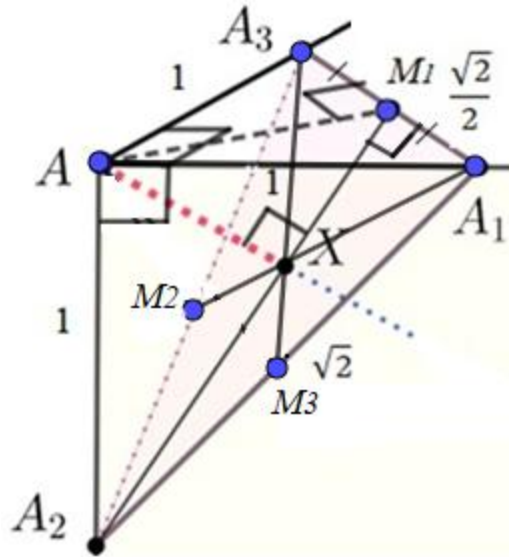
Figure 3.21 Centre de gravité X du triangle équilatéral $\Delta A_1A_2A_3$



Le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur le plan $A_1A_2A_3$, c'est parmi les points du plan $A_1A_2A_3$ le point le plus rapproché de A . Or, A est à égales distances de A_1 , de A_2 et de A_3 (à distance 1). Par symétrie, X doit donc lui-même être à égales distances de A_1 , A_2 et A_3 (si on rapproche X d'un des 3 points, on voit bien que l'angle ne peut plus rester droit), et X doit donc être au centre du cercle circonscrit.

Après avoir justifié que X est le centre de gravité du triangle $\Delta A_1A_2A_3$, il faudra démontrer que le triangle ΔAXM_1 est rectangle en X . Toutefois, je prévois que cette justification sera difficile pour les élèves car ils n'ont pas toutes les connaissances géométriques pour le faire (entre autres la notion de « plan médiateur »).

Figure 3.22 Triangles rectangles $\Delta A_2M_1A_3$, ΔAM_1A_3 , ΔAXM_1 dans la pyramide $AA_1A_2A_3$ et médianes $[M_1A_2]$, $[A_3M_3]$, $[A_1M_2]$ de $\Delta A_1A_2A_3$



Une façon de démontrer que $[AX]$ est perpendiculaire au plan $A_1A_2A_3$ (et donc que $[AX]$ est bien la hauteur abaissée de A sur la base $\Delta A_1A_2A_3$) consiste à utiliser une connaissance géométrique : le **plan médiateur** d'une arête (ou segment). C'est l'équivalent pour l'espace de ce qu'est la droite médiatrice du segment dans le plan. Le plan médiateur d'un segment est l'unique plan perpendiculaire au segment qui le croise en son milieu. Les théorèmes 4 et 5 énoncent les deux implications qui permettent d'établir que, de façon équivalente, le plan médiateur est le lieu géométrique des points de l'espace équidistants des extrémités du segment.

Soit M_1 le milieu de l'arête $[A_1A_3]$.

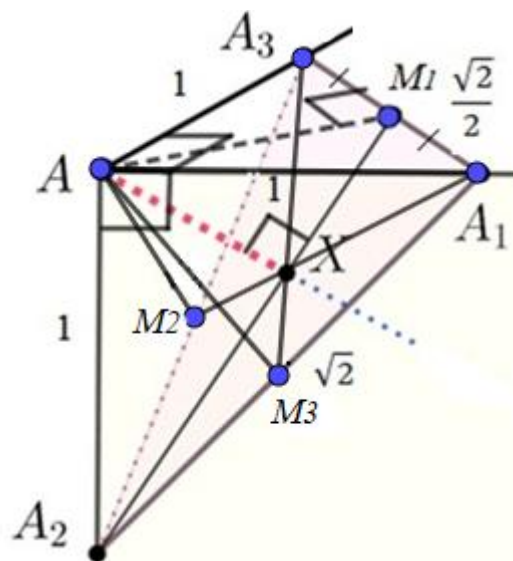
Le plan médiateur de $[A_1A_3]$ est le plan M_1A_2A .

En effet, M_1 est évidemment, comme point milieu, équidistant de A_1 et de A_3 (à une distance $\frac{\sqrt{2}}{2}$), A est situé à distance 1 de A_1 et de A_3 et A_2 est situé à distance $\sqrt{2}$ de A_1 et de A_3 . Or, les points M_1 , A_2 et A ne sont pas alignés et par 3 points non alignés de l'espace passe un unique plan. C'est bien ici le plan médiateur de $[A_1A_3]$.

Par un raisonnement analogue :

- le plan médiateur de $[A_1A_2]$ est M_3A_3A où M_3 est le milieu de $[A_1A_2]$;
- le plan médiateur de $[A_2A_3]$ est M_2A_1A où M_2 est le milieu de $[A_2A_3]$.

Figure 3.23 Plans médiateurs M_1A_2A , M_2A_1A , M_3A_3A



Ces trois plans ont en commun le point A . De plus :

- le plan médiateur M_1A_2A inclut $[M_1A_2]$, médiane du triangle $\Delta A_1A_2A_3$;
- le plan médiateur M_2A_1A inclut $[M_2A_1]$, médiane du triangle $\Delta A_1A_2A_3$;
- le plan médiateur M_3A_3A inclut $[M_3A_3]$, médiane du triangle $\Delta A_1A_2A_3$.

1) Ce que l'on sait.

On sait que ces médianes se coupent en X , centre de gravité du triangle $\Delta A_1A_2A_3$. Les trois plans médiateurs ont donc en commun les points A et X , ils ont ainsi $[AX]$ en commun.

2) À montrer : $[A_1M_2] \perp [AX]$ et $[A_2M_1] \perp [AX]$

Comme M_1A_2A est le plan médiateur de $[A_1A_3]$, cela implique que $[A_1A_3]$ est perpendiculaire à ce plan (par définition de « plan médiateur »). La droite A_1A_3 est donc orthogonale à toutes les droites incluses dans M_1A_2A , en particulier :

$$[A_1M_2] \perp [AX].$$

De la même façon, M_2A_1A étant le plan médiateur de $[A_2A_3]$, $[A_2A_3]$ est perpendiculaire à ce plan. La droite A_2A_3 est donc orthogonale à toutes les droites incluses dans M_2A_1A , en particulier :

$$[A_2M_1] \perp [AX].$$

La droite AX est donc orthogonale à $[A_1M_2]$ et à $[A_2M_1]$, deux droites sécantes en X et incluses dans le plan $A_1A_2A_3$.

3) Conclusion

En vertu du critère d'orthogonalité d'une droite et d'un plan, nous avons bien $[AX] \perp A_1A_2A_3$. Donc $[AX]$ est bien une hauteur du tétraèdre $AA_1A_2A_3$.

Une difficulté sera de calculer le volume du tétraèdre. Voici une démarche de résolution possible :

J'ai justifié antérieurement que les mesures des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_1A_3]$ sont de $\sqrt{2}$ unité. De plus, puisque les 8 petites pyramides-tétraèdres sont isométriques, je peux conclure qu'elles seront équivalentes (c'est-à-dire de même volume).

1) $Volume\ tétraèdre = \frac{Aire\ base \times h}{3}$, où la base est le triangle $\Delta A_1A_2A_3$ et h est la mesure de la hauteur, qui est ici $[AX]$.

2) Calcul de l'aire de la base $\Delta A_1A_2A_3$. Il y a plusieurs façons de calculer l'aire de la base triangulaire $\Delta A_1A_2A_3$:

Une 1^{re} façon est d'utiliser la formule de l'aire trigonométrique d'un triangle (connaissances géométriques). Le triangle $\Delta A_1 A_2 A_3$ est équilatéral, cela implique que :

$$m\angle A_1 A_2 A_3 = m\angle A_2 A_3 A_1 = m\angle A_3 A_1 A_2 = 60^\circ$$

$$\text{Aire trigonométrique } \Delta A_1 A_2 A_3 = \frac{A_1 A_2 \cdot A_2 A_3 \cdot \sin \angle A_1 A_2 A_3}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sin 60^\circ}{2}$$

$$\approx 0,87 \text{ unité carrée.}$$

Une 2^e façon de calculer l'aire du triangle équilatéral $\Delta A_1 A_2 A_3$ est d'appliquer le théorème de Pythagore pour déterminer $[A_2 M_1]$, qui est la hauteur de $\Delta A_1 A_2 A_3$.

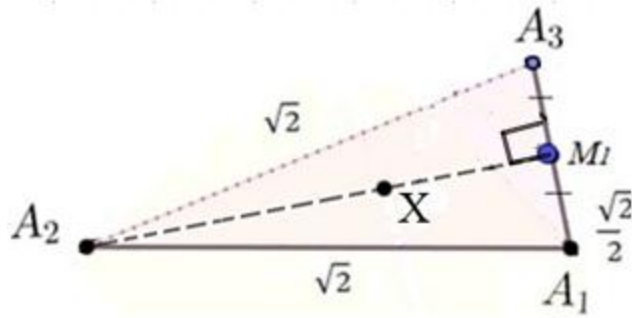
Calculons la mesure de $[M_1 A_2]$ dans $\Delta A_2 M_1 A_3$ en utilisant le théorème de Pythagore :

$(A_2 M_1)^2 + (M_1 A_3)^2 = (A_2 A_3)^2$, sachant que la mesure de la cathète $[M_1 A_3]$ est de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et la mesure de l'hypoténuse $[A_2 A_3]$ est de $\sqrt{2}$:

$$(A_2 M_1)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow A_2 M_1 = \sqrt{\left(2 - \frac{2}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow A_2 M_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,22 \text{ unité.}$$

Figure 3.24 Base triangulaire $\Delta A_1 A_2 A_3$ décomposée en deux triangles isométriques



$$\text{Aire } \Delta A_1 A_2 A_3 = \frac{A_1 A_3 \times A_2 M_1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{3}{2}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87 \text{ unité carrée.}$$

Maintenant, il faut déterminer la hauteur $[AX]$ de la pyramide $AA_1 A_2 A_3$ pour calculer son volume. Mais avant de calculer cette hauteur $[AX]$, j'ai besoin de calculer la mesure de la cathète $[XM_1]$ dans le triangle rectangle $\Delta XM_1 A_2$ en utilisant une connaissance géométrique : le point X est le centre de gravité du triangle $\Delta A_1 A_2 A_3$ et est situé aux deux tiers de la médiane $[A_2 M_1]$ (ou au tiers de $[M_1 A_2]$). On a ainsi :

$$XM_1 = \frac{1}{3} \times M_1 A_2$$

$$= \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{6}} \approx 0,41 \text{ unité.}$$

Déterminons la mesure de $[AM_1]$ (médiane de $\Delta A A_1 A_3$) en utilisant le triangle rectangle $\Delta AM_1 A_3$ avec le théorème de Pythagore :

$$(AM_1)^2 + (M_1A_3)^2 = (AA_3)^2, \text{ sachant que } M_1A_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } AA_3 = 1$$

$$(AM_1)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (1)^2 \Rightarrow AM_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{4}\right)}$$

$$AM_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71 \text{ unité.}$$

Je peux maintenant calculer la mesure de la hauteur $[AX]$ en appliquant le théorème de Pythagore dans ΔAXM_1 car j'ai prouvé antérieurement, à l'aide des plans médiateurs, que l'angle AXM_1 est droit. On a ainsi :

$$(AX)^2 + (XM_1)^2 = (AM_1)^2, \text{ sachant que } XM_1 = \sqrt{\frac{1}{6}} \text{ et } AM_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$(AX)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow AX = \sqrt{\left(\frac{2}{4} - \frac{1}{6}\right)}$$

$$\Rightarrow AX = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58 \text{ unité.}$$

Enfin, voici le calcul du volume de la pyramide $AA_1A_2A_3$:

$$\text{Volume pyramide} = \frac{\text{Aire base} \times h}{3}$$

$$= \frac{\text{Aire } \Delta A_1A_2A_3 \times AX}{3}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{3}$$

$$= \frac{1}{6} \approx 0,17 \text{ unité cubique.}$$

5^e élément de la THA (problème 3) : *Calculer le volume du cube tronqué à l'aide de connaissances géométriques et de connaissances spatiales.*

Pour déterminer le volume du cube tronqué, il suffit d'appliquer des connaissances géométriques :

$$\text{Volume cube tronqué} = \text{Volume cube} - \text{Volume des 8 petites pyramides}$$

$\text{Volume cube} = c^3$, où c représente la mesure de l'arête du cube, soit 3 unités.

$$\begin{aligned}\text{Volume cube tronqué} &= 3^3 - \left(8 \times \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{77}{3} \approx 25,67 \text{ unités cubiques.}\end{aligned}$$

À la fin de la séance 7 (≈ 25 min.), je ferai un bilan des apprentissages avec les élèves. À cet égard, je vais demander à ceux et à celles qui ont envie de partager ce qu'ils ont appris et ce qu'ils retiennent de la résolution du problème 3 en leur posant les questions suivantes :

- Quelle a été la plus grande difficulté pour résoudre le problème 3 ? Expliquez.
- Expliquez sommairement ce que vous avez fait pour calculer le volume d'une « petite pyramide » à la suite de la troncature du cube ?
- Qu'avez-vous fait des énoncés et théorèmes portant sur la relation de perpendicularité dans l'espace ?

3.3.5 Deuxième phase : expérimentation en classe

Cette phase concerne les outils et la cueillette de données. L'instrument de cueillette de données est constitué de l'exercice 1 et des trois problèmes à résoudre présentés un à la fois pour chacune des périodes d'expérimentation prévues. De plus, j'ai distribué les « cahiers de l'élève » qui sont constitués d'un document de 5 pages blanches vierges (un cahier pour chaque problème) sur lesquels les élèves ont écrit directement leur démarche de résolution. J'ai présenté en classe les

problèmes comme un TP (travail pratique) non évalué, mais obligatoire, s'inscrivant pleinement dans les éléments de contenus que le cursus prévoit couvrir. L'expérimentation s'est déroulée en décembre 2022 – janvier 2023. Je fais l'hypothèse que pour réussir les problèmes proposés, les élèves devront gérer les manifestations du conflit « vu/su » dans l'articulation des éléments du problème.

Les données expérimentales ont été complétées par des données issues de la méthodologie *Think aloud* (penser à voix haute) (van Someren *et al.*, 1994). Puisque la question de la mise en fonctionnement des habiletés spatiales en interaction avec les connaissances spatiales et les connaissances géométriques pourrait être difficile à observer à partir des productions écrites des élèves, faire intervenir une méthodologie plus fine est pertinent. Celle-ci permet d'aller chercher plus de précisions dans les détails de ce que les élèves mettent en œuvre. La méthodologie *Think aloud* fournit de riches données verbales sur les raisonnements (van Someren *et al.*, 1994). À l'aide de l'analyse, je pourrai identifier des procédés de résolution utilisés par les élèves et faisant intervenir les connaissances spatiales et les habiletés spatiales. À partir de là, des déductions peuvent être faites sur les processus de raisonnement impliqués dans la résolution. À cette fin, je recueillerai les échanges via des enregistrements audiovidéo du travail des élèves en binômes. Je précise que cette méthodologie se déroule parallèlement avec le *Design Research* et qu'elle est jugée efficace pour analyser des aspects plus pointus de la résolution de problème chez les élèves (Montague et Applegate, 1993). Par conséquent, la méthodologie *Think aloud* m'apparaît convaincante dans ce contexte. J'ajoute qu'elle me permettra de poser « sur le vif » de courtes questions spécifiques sur telles habiletés spatiales (ex. : visualisation interne ou externe) et telles connaissances spatiales que les élèves mettront en œuvre dans la résolution.

3.3.6 Troisième phase : analyse rétrospective des données expérimentales

C'est une phase qui s'appuiera sur l'ensemble des données recueillies lors de l'expérimentation : observations réalisées des séances d'enseignement, analyse des productions écrites des élèves et analyse des échanges lors des interactions orales du travail en binôme. Mon intention sera de vérifier l'atteinte de mon objectif de recherche et d'obtenir des éléments de réponse aux questions de recherche.

3.3.7 Quatrième phase : la révision, à la lumière de l'analyse rétrospective, des hypothèses théoriques, des choix didactiques, des trajectoires d'apprentissage anticipées.

Le défi a été de délimiter les trajectoires hypothétiques d'apprentissage (au sens de Simon, 1995) en faisant des conjectures sur ce que seront les processus mis en œuvre dans la résolution des élèves. La phase 4 consiste alors à confronter ces conjectures en observant ces processus, et en vérifiant s'il y a ou non des indications selon lesquelles des apprentissages se sont réalisés. Enfin, j'ai utilisé un « journal de recherche » dans lequel j'ai colligé mes réflexions et mes réévaluations sur les 3 problèmes soumis aux élèves, et où j'ai explicité les hypothèses, les choix et les observations issues de la phase 4.

3.3.8 Cinquième phase : ajustement du design de la séquence à partir duquel un nouveau cycle peut être amorcé.

Dans cette section, je vais discuter des ajustements possibles à apporter aux problèmes 1, 2 et 3 concernant les phases 1 et 2 de leur résolution. Ces améliorations porteront sur la façon de présenter chacun des 3 problèmes, leur habillage et les interventions dans le pilotage de la séquence d'enseignement, même s'il n'y aura pas de nouvelle expérimentation dans le cadre de la thèse. D'une part, cela fait partie intégrante de la méthodologie du *Design Research* (voir chapitre 3, §3.3), d'autre part il n'est pas du tout exclu que la séquence soit reprise, autant dans d'autres contextes de recherche qu'en contexte standard d'enseignement. Je vais présenter les ajustements de la nouvelle version de la séquence d'enseignement de manière détaillée au chapitre 4 – Analyses.

Dans le prochain chapitre, il sera question de la présentation ainsi que l'analyse des données provenant de l'expérimentation en classe. Avec les trajectoires d'apprentissage et les questions de recherche comme lignes directrices, des conjectures sur l'apprentissage des élèves auront été générées et documentées, puis vérifiées. Je vais aussi présenter des grilles d'analyse axées sur les habiletés spatiales (visualisation, transformations spatiales) et les connaissances spatiales.

Une fois la collecte des données complétée, incluant le travail en binômes d'élèves, ces données seront d'abord traitées par retranscription des échanges chercheur/élèves et élèves/élèves, sous forme de verbatims. Puis, je procéderai à un codage (Powell, Francisco et Maher, 2003; Strauss et Corbin, 1998) permettant d'identifier les épisodes offrant un aperçu des raisonnements des élèves, notamment vis-à-vis la mise en fonctionnement de leurs habiletés spatiales, leurs connaissances

spatiales, et de la nature des interactions entre les deux. Finalement, la triangulation des données sera assurée par la combinaison des méthodologies employées : *Design Research* et *Think aloud*. Je spécifie que la triangulation des données est couramment appliquée dans la méthodologie du *Design Research* (Denscombe, 2007).

CHAPITRE 4

ANALYSES

Ce chapitre est consacré à la présentation ainsi qu'à l'analyse des données issues de l'expérimentation menée dans le cadre de la recherche. Je précise que cette analyse devra, dans la mesure du possible, répondre aux questions de recherche (fin de la section 2.7, chapitre II).

Considérant le problème de recherche, sa nature ainsi que les questions de recherche, j'ai choisi de prendre la perspective offerte par le conflit « vu/su » (Parzysz, 1988; 2007) pour élaborer un cadre d'analyse. De plus, via cette analyse, je serai amené à comparer entre elles, voire même à opposer les productions écrites issues de l'expérimentation, en plus de faire référence à mon cadre théorique ainsi qu'aux travaux antérieurs de la communauté des chercheurs.

4.1 Présentation des données de recherche

4.1.1 Perspective retenue : le conflit « vu/su » de Parzysz (1988; 2007)

Selon Parzysz (1988; 1989; 2007), « les élèves ne voient pas dans l'espace » et c'est la raison profonde de leur difficulté à bien résoudre les problèmes en géométrie de l'espace. Avant même l'expérimentation, dans le cours de sa scolarité, l'élève a en principe développé un certain nombre d'habiletés spatiales (visualisation spatiale et transformations spatiales), de connaissances spatiales et de connaissances géométriques.

Pour la visualisation de l'espace, les recherches de Parzysz (1988; 1989; 1991; 2007) l'ont amené à certaines conclusions. Tel qu'expliqué dans le cadre théorique, le conflit « vu/su » pose problème pour l'élève, en particulier quand il a à représenter des objets géométriques 3D sur papier. Bien qu'il y ait une perte d'information du passage de l'objet géométrique à son dessin, l'élève a souvent l'illusion qu'il peut en donner une représentation conforme dans laquelle il n'y a aucune ambiguïté, grâce à un dessin suffisamment élaboré et proche de l'objet. Dans le même temps, quand on propose à cet élève de « lire » un dessin, il peut avoir tendance à considérer que les propriétés du dessin sont aussi les propriétés de l'objet lui-même. Il y a donc un écart sensible entre la lecture d'un dessin et sa réalisation sur une feuille de papier. Par ailleurs, il y a dans la plupart des représentations 2D des objets 3D des conventions qui font que la représentation ne correspond pas

exactement à ce qu'on verrait véritablement en présence de l'objet. Par exemple en perspective cavalière, on ne « voit » pas les fuyantes comme parallèles « en vrai », si bien qu'en fait, le cerveau de celui qui décode une telle représentation compense ces inexactitudes avec ce qu'il « sait » (ou connaît) de l'objet représenté. En conséquence, l'enseignant doit prendre en charge l'apprentissage des règles de dessin des figures de géométrie dans l'espace. Dans les études menées par Parzysz (1988; 1989; 1991), l'auteur en vient à la conclusion que le dessin en perspective cavalière est bien adapté à l'apprentissage visé de la géométrie de l'espace au secondaire, en tant qu'outil de résolution de problèmes (vues, sections, etc.). De plus, le bon usage de cet outil nécessite un apprentissage spécifique (contrôle du transfert de propriétés), faute de quoi il perd une partie de son efficacité.

En conséquence, tel qu'argumenté dans le cadre théorique, les connaissances spatiales et les connaissances géométriques en ce qui concerne les relations entre le « vu » et le « su » pourraient jouer un rôle lorsque les élèves ont à calculer le volume des solides.

4.2 Grilles d'analyse des problèmes

Je vais utiliser 5 grilles d'analyse : une première grille est axée sur l'habileté spatiale « visualisation externe » contenant des éléments observables soit d'un objet physique, soit d'une représentation 2D d'un objet 3D (figure 4.1); une deuxième grille concerne l'habileté spatiale « visualisation interne » (figure 4.2). Comme chercheur, je m'évalue capable d'en identifier les manifestations ou même certains signes implicites, dans les productions écrites des élèves et aussi, dans les discussions des élèves en binômes lorsqu'ils traitent des éléments suivants : 1) encodage/décodage lors de l'élaboration ou la lecture d'une représentation 2D en perspective cavalière; 2) échanges verbaux des binômes sur la façon dont ils repèrent un angle (dièdre) droit entre 2 faces dans un prisme; 3) échanges verbaux des binômes à propos des images mentales générées par la troncature d'un cube, combinée à sa représentation en perspective cavalière.

4.2.1 Première grille d'analyse : visualisation externe

Figure 4.1 Grille d'analyse : la visualisation directe d'un objet 3D

Visualisation externe (directe)	
Objet physique	Identifier les constituants : – formes (nature, nombre et mesure) – squelette de l'objet – arêtes – faces – sommets – nature des angles (dièdre, droit, etc.)
Représentation 2D d'un objet 3D (décodage des informations clés)	

4.2.2 Deuxième grille d'analyse : visualisation interne

Figure 4.2 Grille d'analyse : la visualisation mentale d'un objet 3D

Visualisation interne (processus de création d'images mentales)	
1) Constituant du solide	– arête – face – sommet } voir note de bas de page ²¹ – hauteurs : – apothème de la base (dans un polygone) – apothème d'une pyramide – hauteur d'un prisme, cube ou pyramide – triangle rectangle dans l'espace (cathètes et hypoténuse)
2) Reconstituer mentalement des parties du solide qui sont cachées dans la représentation 2D, ou dont les angles ou les longueurs ne sont pas représentés de façon à rendre compte des relations d'isométrie ou de similitude représentés en 2D.	– se positionner par rapport à l'objet 3D avec des points de vue différents – imaginer des rotations mentales de l'objet 3D
3) Imaginer les angles dièdres (droits) entre 2 plans dans un solide	– angle droit entre les faces d'un polyèdre (cube, pyramide, prisme)

²¹ À la différence de la visualisation externe où l'élève visualise directement les constituants, soit à partir de l'objet physique, soit à partir d'une représentation 2D d'un objet 3D, la visualisation interne concerne les arêtes, les faces et les sommets qui sont cachés dans la représentation 2D ou encore, dans une situation où l'élève n'a pas accès à un objet physique ou à sa représentation 2D.

4.2.3 Troisième, quatrième et cinquième grilles d'analyse : le conflit cognitif « vu/su »

J'ai élaboré 3 autres grilles d'analyse à partir d'éléments du conflit « vu/su » (Parzysz, 1988; 2007). La 3^e grille d'analyse est spécifique au problème 1 (marchand de sable), la 4^e au problème 2 (le triangle $\triangle ABC$ situé à l'intérieur d'un prisme à base rectangulaire) et la 5^e au problème 3 (cube tronqué). Chacune comporte trois sections interreliées qui sont exposées aux tableaux 4.1, 4.2 et 4.3 :

- dans la colonne de gauche apparaissent les éléments de visualisation spatiale (le « vu »);
- dans la colonne de droite sont indiquées les connaissances spatiales et les connaissances géométriques devant être mobilisées (le « su ») pour résoudre chacun des problèmes;
- dans la colonne du centre sont exposés les éléments du conflit « vu /su » pouvant se manifester chez l'élève.

4.2.3.1 Troisième grille d'analyse : conflit « vu/su » pour le problème 1

J'ai conçu la grille d'analyse du problème 1 en me basant sur la Trajectoire Hypothétique d'Apprentissage (THA) de ce problème (voir §3.3.4.2.1). J'ai fait l'exercice d'identifier quels sont les éléments nécessaires qui doivent apparaître dans la démarche de résolution des élèves.

Tableau 4.1 Grille d'analyse du problème 1 (le marchand de sable) : conflit « vu/su »

Le « <i>VU</i> » La visualisation spatiale : ce que l'élève voit de l'objet 3D	Conflit « <i>VU/SU</i> »	Le « <i>SU</i> » Les connaissances spatiales et géométriques : ce que l'élève sait de l'objet 3D
- Visualiser la forme résultant de la reconfiguration d'une enveloppe rectangulaire en une pyramide-tétraèdre - Visualiser directement les triangles rectangles (DCF, DCE, ABF, ABE) sur l'enveloppe - Caractéristiques des formes d'un tétraèdre non régulier et de sa structure géométrique - Squelette 2D d'un tétraèdre non régulier - Dimensions d'une maquette (tétraèdre): longueur, largeur, hauteur - Repérer le point F, apex de la pyramide $FADE$ - Visualiser directement sur la maquette que ΔDAF est à la verticale quand ΔDAE est à l'horizontale - Repérer une base triangulaire (ex. : DAE ou DAF) de la pyramide-tétraèdre $FADE$ - Repérer et identifier l'angle EMF, angle dièdre (droit) entre les plans DAE et	- Visualiser directement que $\angle AED$ et $\angle AFD$ mesurent 90°, ou voir sur le dessin que $[DF]$ et $[AF]$ bissectent les angles droits CDA et BAD. Ainsi, les segments $[DE]$ et $[AE]$ ou $[DF]$ et $[AF]$ sont perçus comme des bissectrices. - En perspective cavalière, il est question de rendre aussi compte de ce qui ne se voit pas, telles les arêtes d'une pyramide, dont le pointillé signifie qu'elles appartiennent à des « faces cachées »; ou encore des perpendicularités qui sont dans l'objet physique, mais qui doivent être « décodées » dans la représentation	- Nomenclature (type de triangles, pyramide-tétraèdre) - Notions de dimension des objets (solide (3D), face (2D), arêtes (1D), sommets (0D)), d'incidence, d'adjacence, de parallélisme, de perpendicularité et d'angles (entre les arêtes, entre les faces, entre une arête et une face) - Mesures des angles entre les arêtes dans les faces triangulaires. - Avoir en tête une banque d'objets standardisés, autant en 2D qu'en 3D (triangle, rectangle, quadrilatère, polyèdres) - Propriétés d'une pyramide-tétraèdre : - composée de 4 faces triangulaires, 6 arêtes et 4 sommets; - la pyramide-tétraèdre $FADE$ est non régulière : les quatre faces sont des triangles isocèles isométriques. - Propriétés d'un triangle quelconque

<i>AFD</i> qui permet d'affirmer que ces 2 plans sont perpendiculaires - Visualiser directement que la hauteur de la face <i>DAF</i> est perpendiculaire à la face <i>DAE</i> (angle dièdre de 90°) - Visualiser directement que $\angle EMF$ est droit et donc, que $[FM]$ est la hauteur de la pyramide issue du sommet <i>F</i> - Visualiser des parties du tétraèdre qui sont cachées dans la maquette ou dans sa représentation en perspective (ex. : angle droit <i>EMF</i> ou angles <i>ABD/ACD</i>, les points <i>C</i> et <i>D</i> étant juxtaposés dans la maquette et la représentation 2D) - Être capable de voir (anticipation), le résultat d'actions : mouvements de l'œil, de la tête ou de la main autour de la maquette du tétraèdre. - Être capable de percevoir des découpages, des organisations, des éléments de structure : hauteur et apothème d'une pyramide-tétraèdre; repérer un triangle rectangle en 3D dans une pyramide-tétraèdre - Déconstruction dimensionnelle : recherche des éléments structuraux de dimension 0 (sommets), de dimension 1 (arêtes), de dimension 2 (faces)	- Perte d'information entre la figure et sa représentation - Il n'y a pas toujours isomorphisme entre la représentation (pyramide) et l'objet 3D (maquette de la pyramide) Exemples : - L'angle droit <i>EMF</i> à l'intérieur de la pyramide est caché - La représentation de $\triangle AMF$ n'est pas isomorphe à celle de $\triangle DMF$; il en est de même pour $\triangle AME$, $\triangle DME$ et $\triangle EMF$ - Le triangle isocèle $\triangle DAE$ ne sera pas dans le dessin représenté de façon à rendre compte des relations d'isométrie ou de similitude aux 3 autres triangles isocèles $\triangle AFD$, $\triangle AFE$, $\triangle DEF$)	- Les 3 médianes sont concourantes au centre de gravité du triangle, situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet - La somme des mesures des trois angles est égale à 180° ou π radians - Inégalité triangulaire : dans tout triangle $\triangle ABC$, on a l'inégalité $AB < AC + BC$ - Théorème de Pythagore pour le calcul de mesures manquantes dans $\triangle ECD$, $\triangle AEF$ et $\triangle DEF$ - Réciproque du théorème de Pythagore. Si $EM^2 + FM^2 = EF^2$, alors $\triangle FME$ est un triangle rectangle ($m\angle EMF = 90^\circ$) $\triangle EAD$ est isocèle de base $[AD]$. Cela implique que $[EM]$ est médiane et hauteur issue de <i>E</i> dans $\triangle EAD$. La droite <i>EM</i> est médiatrice et axe de symétrie - Propriétés de la perspective cavalière - Formule du volume de la pyramide : $\frac{(\text{Aire base } \triangle DAE \times FM)}{3}$ - Capacité à comprendre le caractère générique des représentations géométriques (distinction figure – dessin)
---	---	---

4.2.3.2 Quatrième grille d'analyse : conflit « vu/su » pour le problème 2

Cette 4^e grille d'analyse concerne des aspects du conflit « vu /su » concernant le problème 2 (triangle $\triangle ABC$ situé à l'intérieur du prisme droit à base rectangulaire). Je l'ai élaboré en tenant compte de la THA du problème 2 (voir §3.3.4.2.2) et des questions de recherche.

Tableau 4.2 Grille d'analyse du problème 2 ($\triangle ABC$ à l'intérieur d'un prisme) : conflit cognitif « vu/su »

Le « <i>VU</i> » La visualisation spatiale : ce que l'élève voit de l'objet 3D	Conflit « <i>VU/SU</i> »	Le « <i>SU</i> » Les connaissances spatiales et géométriques : ce que l'élève sait de l'objet 3D
▪ Squelette 2D de l'objet 3D ▪ Dimensions de l'objet physique (prisme droit à base rectangulaire) : longueur, largeur, hauteur ▪ Être capable de visualiser des actions imaginaires, le résultat de ses actions (anticipation), des mouvements de l'œil (ou de la tête ou de la main) autour de l'objet 3D (dessin en perspective du prisme à base rectangulaire) ▪ Visualisation directe et interne de $\triangle ABC$ ▪ Être capable de percevoir des découpages, des organisations, des éléments de structure : plans perpendiculaires, triangles rectangles à l'intérieur du prisme à base rectangulaire ▪ Visualiser mentalement tous les triangles rectangles dans le prisme à base rectangulaire : $\triangle DIC$, $\triangle ADC$, $\triangle GHC$, $\triangle BGC$, $\triangle BFE$, $\triangle AEB$ ▪ Visualiser et repérer que $\angle DIC$, $\angle CHJ$, $\angle CHG$ et $\angle BFE$ sont droits	▪ Perte d'information entre la figure et sa représentation en 2D ▪ L'angle BAC de $\triangle BAC$ peut être perçu comme droit alors qu'il ne l'est pas. ▪ Dans la perspective cavalière, le su et le vu se mêlent, car il est question de rendre compte aussi de ce qui « normalement » ne se voit pas, telles certaines arêtes des triangles rectangles $\triangle DIC$, $\triangle ADC$, $\triangle CHG$, $\triangle BGC$, $\triangle BFE$ et $\triangle AEB$, dont le pointillé signifie qu'elles appartiennent à des « faces cachées »; ou encore des perpendiculaires qui sont dans l'objet physique, mais qui doivent être « décodées » dans la représentation. Ex. : angles droits ADC, GHC, BGC et AEB ▪ Il n'y a pas toujours une relation d'isomorphisme entre la représentation (prisme droit à base rectangulaire) et l'objet 3D	▪ Nomenclature (triangle rectangle, prisme droit à base rectangulaire ou parallélépipède rectangle) ▪ Notions de dimension des objets (solide (3D), face (2D), arêtes (1D), sommets (0D)), d'incidence, d'adjacence, de parallélisme, de perpendicularité et d'angles (entre les arêtes, entre les faces, entre une arête et une face) ▪ Représenter en perspective cavalière les 6 triangles rectangles $\triangle DIC$, $\triangle ADC$, $\triangle GHC$, $\triangle BGC$, $\triangle BFE$, $\triangle AEB$ ▪ Dessiner en traits pointillés les segments cachés $[DC]$ ($\triangle DIC$), $[CG]$ (hypoténuse de $\triangle CHG$ et cathète de $\triangle BGC$), $[EF]$ (hypoténuse de $\triangle EFB$ et cathète de $\triangle AEB$) ▪ Mesures des angles dièdres (entre les faces), des angles plans entre les arêtes, des angles droits entre les faces perpendiculaires ▪ Les faces d'un parallélépipède rectangle sont perpendiculaires deux

▪ Repérer (visualisation interne) $m(\angle ADC) = 90^\circ$, $m(\angle BGC) = 90^\circ$, $m(\angle AEB) = 90^\circ$ ▪ Déconstruction dimensionnelle : recherche des éléments structuraux de dimension 0 (sommets), de dimension 1 (arêtes), de dimension 2 (faces).	Exemples : ▪ L'angle droit ADC n'est pas représenté de façon à rendre compte des relations d'isométrie ou de similitude aux angles droits DIC, CHG, BGC, BFE, AEB; de plus, ces angles ne sont pas représentés de façon à rendre compte des relations d'isométrie ou de similitude en 2D les uns par rapport aux autres.	à deux (les plans qui portent ces faces sont des plans perpendiculaires deux à deux). ▪ Propriétés de la perspective cavalière ▪ Capacité à comprendre le caractère générique des représentations géométriques (distinction figure – dessin) ▪ Déterminer des mesures manquantes à l'aide du théorème de Pythagore ▪ Justifier que $\angle DIC$ est droit (I est un sommet du rectangle) ▪ Contraposée du théorème de Pythagore.
--	---	---

4.2.3.3 Cinquième grille d'analyse : conflit « vu/su » pour le problème 3

Cette 5^e grille d'analyse traite des aspects du conflit « vu /su » concernant le problème 3 (cube tronqué). Je l'ai élaboré en tenant compte de la THA du problème 3 (voir §3.3.4.2.3) et des questions de recherche.

Tableau 4.3 Grille d'analyse du problème 3 (le cube tronqué) : conflit cognitif « vu/su »

Le « <i>VU</i> » La visualisation spatiale : ce que l'élève voit de l'objet 3D	Conflit « <i>VU/SU</i> »	Le « <i>SU</i> » Les connaissances spatiales et géométriques : ce que l'élève sait de l'objet 3D
- Caractéristiques des formes du cube tronqué et de sa structure géométrique (36 arêtes, 24 sommets, 14 faces dont 6 faces octogonales non régulières et 8 faces triangulaires équilatérales) - Squelette 2D de l'objet 3D (cube, cube tronqué) - Dimensions de l'objet physique : longueur, largeur, hauteur - Visualiser mentalement la troncature du cube : après la troncature, il reste 8 triangles équilatéraux et 8 pyramides-tétraèdres ont été retirées du cube - Visualiser des parties cachées (ou sections) de la petite pyramide $AA_1A_2A_3$: la hauteur $[AX]$, les angles droits AXM_1, AXA_2, AM_1A_3, le centre de gravité X du triangle équilatéral $\Delta A_1A_2A_3$, les triangles rectangles situés à l'intérieur de la pyramide (ΔAXA_2, ΔAXM_1, ΔAM_1A_1, ΔAM_1A_3, etc.)	- Perte d'information entre la figure et sa représentation - Il n'y a pas toujours une relation d'isomorphisme entre la représentation et l'objet 3D - Exemples : le triangle équilatéral $\Delta D_1D_2D_3$ n'est pas représenté de façon à rendre compte des relations d'isométrie ou de similitude aux 7 autres triangles équilatéraux $\Delta A_1A_2A_3$, $\Delta B_1B_2B_3$, $\Delta C_1C_2C_3$, $\Delta E_1E_2E_3$, $\Delta F_1F_2F_3$, $\Delta G_1G_2G_3$ et $\Delta H_1H_2H_3$ dans le dessin en perspective cavalière du cube tronqué. Ces 8 triangles équilatéraux ne sont pas représentés de façon à rendre compte des relations d'isométrie ou de similitude les uns par rapport aux autres (les angles intérieurs et les arêtes de chacun de ces 8 triangles) - Dans la représentation en perspective cavalière de la pyramide $AA_1A_2A_3$, les angles droits A_1AA_2, A_1AA_3, A_2AA_3 dessinés dans la représentation 2D ne sont pas	- Nomenclature de figures planes et de solides (octogone régulier, octogone non régulier, triangle équilatéral, triangle isocèle, triangle rectangle, cube tronqué, pyramide non régulière à base triangulaire équilatérale) - Notions de dimension des objets (solide (3D), face (2D), arêtes (1D), sommets (0D)), d'incidence, d'adjacence, de parallélisme, de perpendicularité et d'angles (entre les arêtes, entre les faces, entre une arête et une face) - Avoir en tête une banque d'objets standardisés, autant en 2D qu'en 3D (triangle, rectangle, quadrilatère, polyèdres) - Propriétés du tétraèdre non régulier $AA_1A_2A_3$ - La base est un triangle équilatéral, les trois faces latérales sont des triangles rectangles isocèles - Représenter en perspective cavalière le cube tronqué

- Repérer les triangles rectangles (ΔA_2AA_1, ΔB_1BB_2, ΔC_2CC_1, $\Delta D_2DD_1 \dots$) sur chacune des faces octogonales du cube tronqué - Être capable de percevoir des découpages, des organisations, des éléments de structure : hauteur d'un solide, apothème d'une pyramide, apothème d'un polygone à n côtés formant la base de certains solides (prisme, pyramide); repérer un triangle rectangle dans un solide. - Déconstruction dimensionnelle : recherche des éléments structuraux de dimension 0 (sommets), de dimension 1 (arêtes), de dimension 2 (faces).	physiquement droits et ne sont pas représentés de façon à rendre compte des relations d'isométrie ou de similitude. Les médianes, hauteurs et médiatrices ($[A_1M_2]$, $[A_2M_1]$, $[A_1M_3]$) qui sont isométriques dans la réalité ne seront pas représentés de façon à rendre compte des relations d'isométrie ou de similitude dans le dessin en perspective de la pyramide $AA_1A_2A_3$; il en est de même des angles droits (A_2XA, AXM_1, AM_1A_1, $AM_1A_3 \dots$).	- Représenter en perspective cavalière l'une des 8 petites pyramides-tétraèdres : - base est un triangle équilatéral dont les côtés mesure 1 unité - fuyante A_2A_3 en pointillé - dessiner les angles droits A_2AA_1, A_1AA_3, A_2AA_3 avec des petits traits respectant la perspective - représenter en pointillé A_2M_1 (médiatrice du triangle $\Delta A_1A_2A_3$), la hauteur $[AX]$ de la pyramide - représenter l'angle droit AXM_1 - Théorème de Pythagore - Capacité à comprendre le caractère générique des représentations géométriques (distinction figure – dessin) - Formules de volume : $Volume\ cube = c^3$, où c est la mesure de l'arête du cube $Volume\ pyramide = \frac{Aire\ base \times h}{3}$ où h est la hauteur de la pyramide
--	--	---

4.3 Troisième phase : analyse rétrospective des données expérimentales

4.3.1 Analyse des solutions au problème 1

4.3.1.1 Présentation de la démarche d'analyse : comparaison de productions écrites

Afin de faire ressortir comment les connaissances spatiales, les habiletés spatiales et les connaissances géométriques ont été mises en œuvre par les élèves pour le problème 1, je vais présenter ma démarche pour analyser les copies des 16 dyades. J'ai réalisé la comparaison entre les copies des dyades qui ont élaboré des productions écrites contenant plusieurs éléments de la solution attendue et des copies où des éléments sont manquants. Cela m'a permis d'identifier ce qu'il fallait pour qu'une production écrite soit considérée comme une solution « valable ».

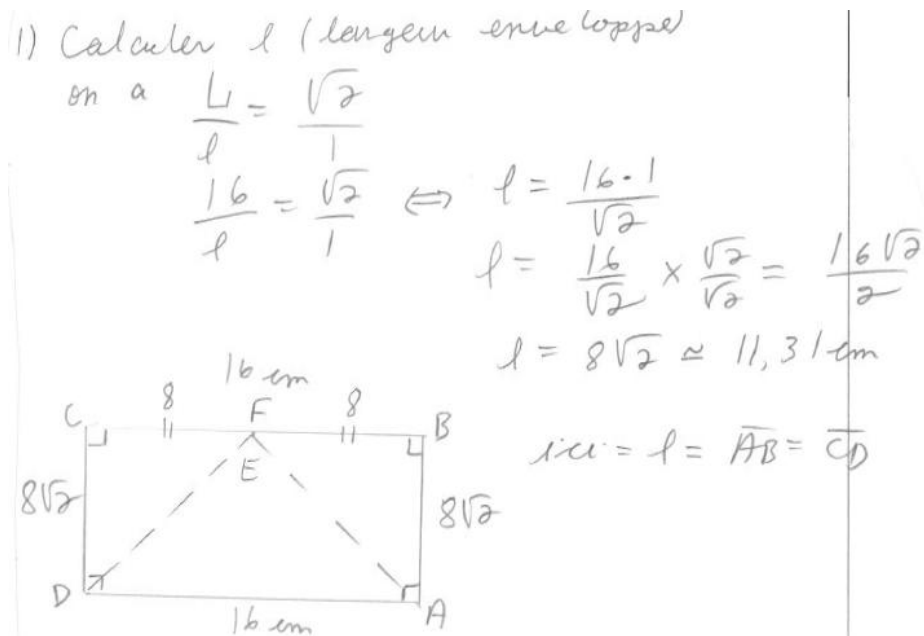
L'analyse des solutions du problème 1 se déroulera en 2 phases : ce que je m'attends à obtenir comme solutions valables des élèves n'est pas du même ordre dans chacune. La phase 1 traitera des habiletés spatiales (principalement la visualisation spatiale et dans une moindre mesure, les transformations spatiales) et des connaissances géométriques qui ont permis de réaliser les calculs. La phase 2 sera axée sur le raisonnement déductif, à savoir la façon dont les élèves ont invoqué les théorèmes 1 et 2.

4.3.1.2 Phase 1 de l'analyse des solutions au problème 1

a) Analyse d'une copie d'élèves ayant les éléments de réponses attendus au problème 1, mise en parallèle avec des copies moins satisfaisantes.

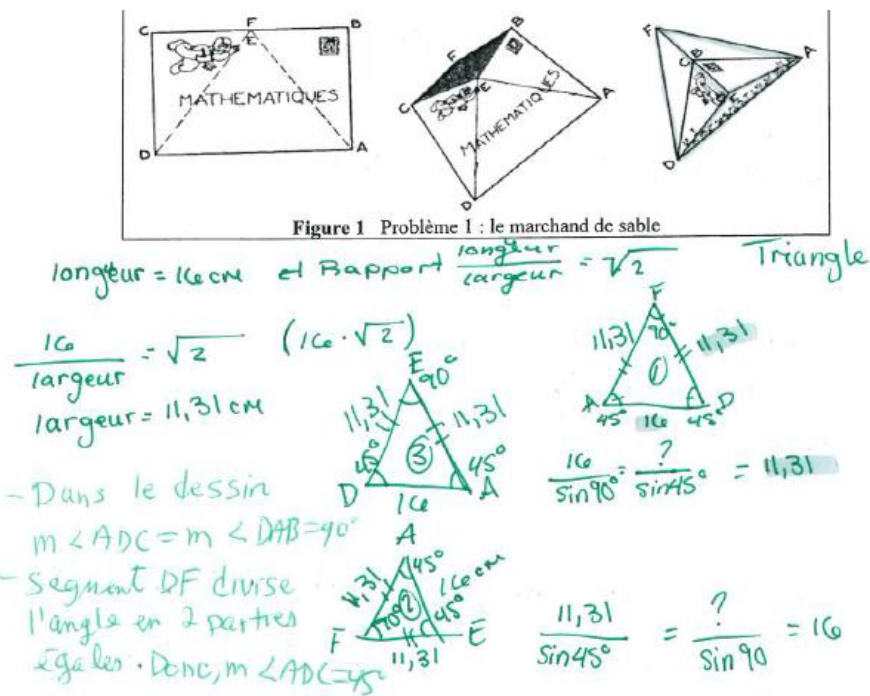
La production écrite #1 contient tous les éléments de réponses permettant d'affirmer que les élèves de cette dyade ont réussi le problème 1. D'abord, ils ont déterminé la largeur de l'enveloppe qui correspond au segment $[AB]$ ou $[CD]$ (figure 4.3).

Figure 4.3 Calcul de la largeur de l'enveloppe (copie #1)



Pour l'ensemble des copies analysées, il y a 15 équipes parmi les 16 qui ont réussi à bien calculer la largeur de l'enveloppe (la plus petite des mesures du rectangle $ABCD$). Seuls les élèves de la dyade #2 ont indiqué une largeur qui ne correspondait pas au bon segment ($[DE]$). Mon analyse est qu'ils ont mal interprété le concept de largeur : bien qu'ils aient calculé une valeur correcte ($\approx 11,31$ cm), avec cependant une incohérence dans la démarche (ils écrivent $16 \cdot \sqrt{2}$ plutôt que $16 \div \sqrt{2}$), ils ont attribué cette mesure au segment $[DE]$ alors qu'elle est celle des segments $[DC]$ ou $[AB]$ (voir figure 4.4).

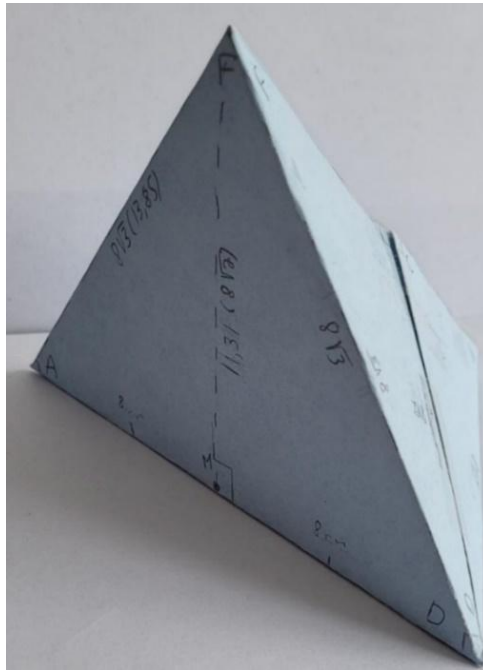
Figure 4.4 Erreur largeur enveloppe : conflit « vu/su » – problème 1 (copie #2)



Difficile d'identifier ce qui peut être à la source de cette erreur, la copie montrant en effet plusieurs incohérences, par exemple que $m\angle ADC = 90^\circ$ et 3 lignes plus bas, $m\angle ADC = 45^\circ$. En se référant au dessin de l'enveloppe, les 2 élèves (copie #2) ont indiqué $m\angle ADC = m\angle DAB = 90^\circ$. Les traces écrites laissent penser qu'ils ont visualisé directement que les mesures de $\angle AED$ et $\angle AFD$ étaient de 90° , et ils écrivent que « le segment $[DF]$ divise l'angle en 2 parties égales », ce qui voudrait dire que $[DF]$ est une bissectrice, vraisemblablement de $\angle ADC$. En me basant sur ma grille d'analyse du problème 1, j'en conclus un conflit entre le « vu » (les segments $[DE]$ et $[AE]$ ou $[DF]$ et $[AF]$ sont visuellement perçus comme des bissectrices) et le « su » (puisque ces segments divisent en 2 angles égaux, alors $m\angle ADE = m\angle DAE = 45^\circ$ et les triangles $\triangle DAE, \triangle AFD, \triangle AFE, \triangle DEF$ sont isocèles).

Les élèves de la dyade #1 ont réalisé une transformation spatiale, soit la **reconfiguration** de l'enveloppe en une pyramide-tétraèdre en identifiant et en transcrivant tous les sommets sur la maquette $FADE$ dont l'apex est le sommet F (voir figure 4.5) ou encore, sur la maquette $EADF$ avec apex au sommet E .

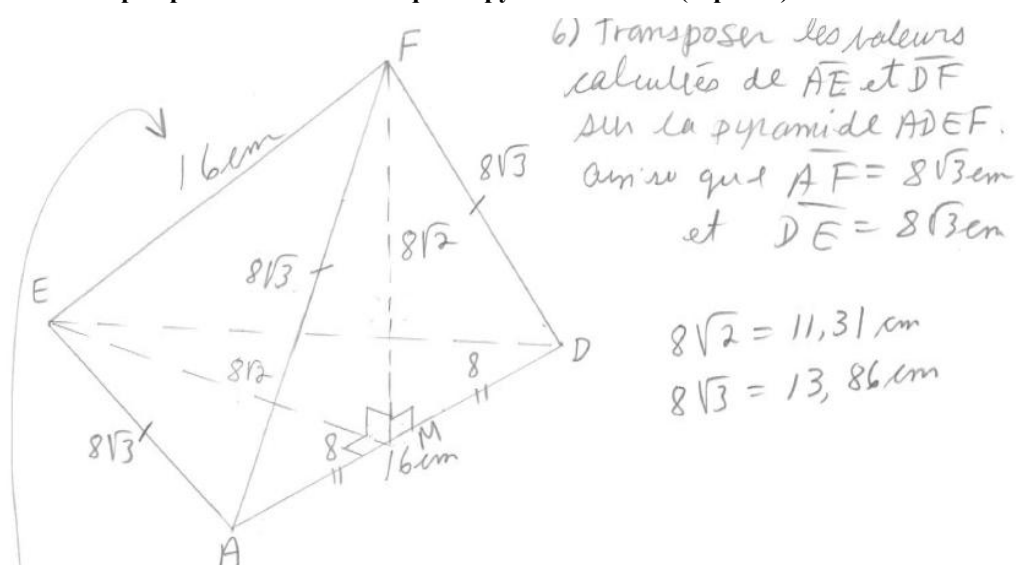
Figure 4.5 Maquette de la pyramide *FADE* (copie #1)



Les 16 dyades ont réussi la reconfiguration de l'enveloppe en une pyramide. En effet, puisque l'enveloppe cartonnée faisait déjà apparaître des traits pointillés aux endroits appropriés, je déduis qu'il fut aisé pour chaque dyade de faire la reconfiguration attendue.

Ensuite, les élèves de la dyade #1 ont **représenté en perspective cavalière** la pyramide *FADE* en respectant les règles de cette technique de représentation. À la figure 4.6, nous observons que les fuyantes sont de part et d'autre de la face triangulaire *ADE* et qu'elles sont réduites d'environ la moitié, que l'angle de profondeur est d'environ 45° et que les faces cachées (et les segments cachés comme les hauteurs $[EM]$ et $[FM]$) sont représentées en pointillés. De plus, les angles droits sont aussi représentés en perspective cavalière. Par exemple, dans le plan *ADE*, un des petits traits de l'angle droit *AME* est dessiné parallèlement à $[AD]$, et l'autre petit trait est parallèle à $[EM]$.

Figure 4.6 Dessin en perspective cavalière adéquat – pyramide *FADE* (copie #1)



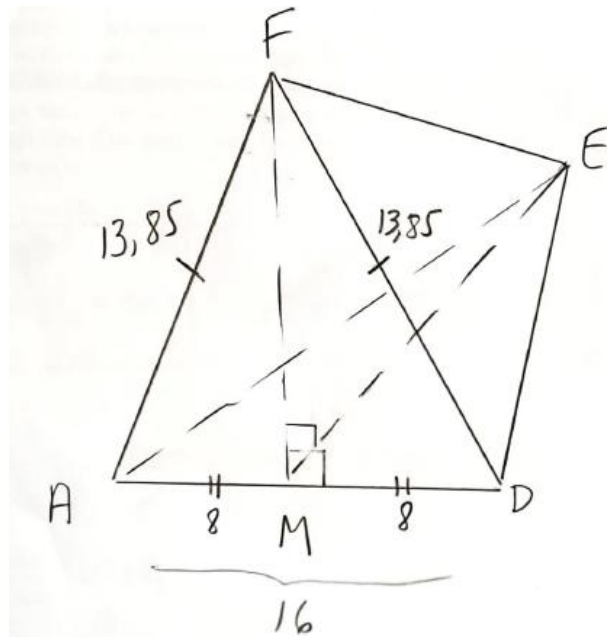
En comparant les autres copies d'élèves avec la copie #1, j'ai pu constater qu'il y a 9 équipes qui ont produit un dessin en perspective cavalière similaire à celle de la copie #1. J'ajoute que 7 dyades parmi 16 ont éprouvé des difficultés à maîtriser les règles de la perspective cavalière, soit les copies #6, 7, 8, 11, 14, 15 et 16.

En me basant sur la grille d'analyse 2 (visualisation *interne*), il m'apparaît que la difficulté principale chez ces élèves provient d'une coordination de leurs images mentales avec les règles de la perspective cavalière (connaissances spatiales), plus spécifiquement celles ayant trait au parallélisme des arêtes horizontales, des arêtes verticales et des fuyantes. Ces dernières sont toutes du même côté de la face du solide se trouvant dans le plan frontal de la feuille sur laquelle l'objet est dessiné, et elles doivent être parallèles entre elles. De plus, l'angle de profondeur doit être d'environ 45° .

Je vais analyser le codage des angles droits de la représentation en perspective cavalière de la pyramide *FADE* exposée dans les productions écrites. La figure 4.7 expose un exemple où l'angle droit *EMF* n'est pas dessiné selon ce qu'on attend idéalement du codage en relation avec la perspective : un des petits traits de l'angle *EMF*, celui du haut, n'est pas représenté parallèlement à *[ME]* comme on attend de la représentation idéale. Il semble que plusieurs élèves (dyades #6, 8 et 11) ne voient ce codage que comme une « étiquette » qui indique la présence d'un angle droit, sans avoir conscience, ou simplement sans « savoir » que les traits du codage doivent être

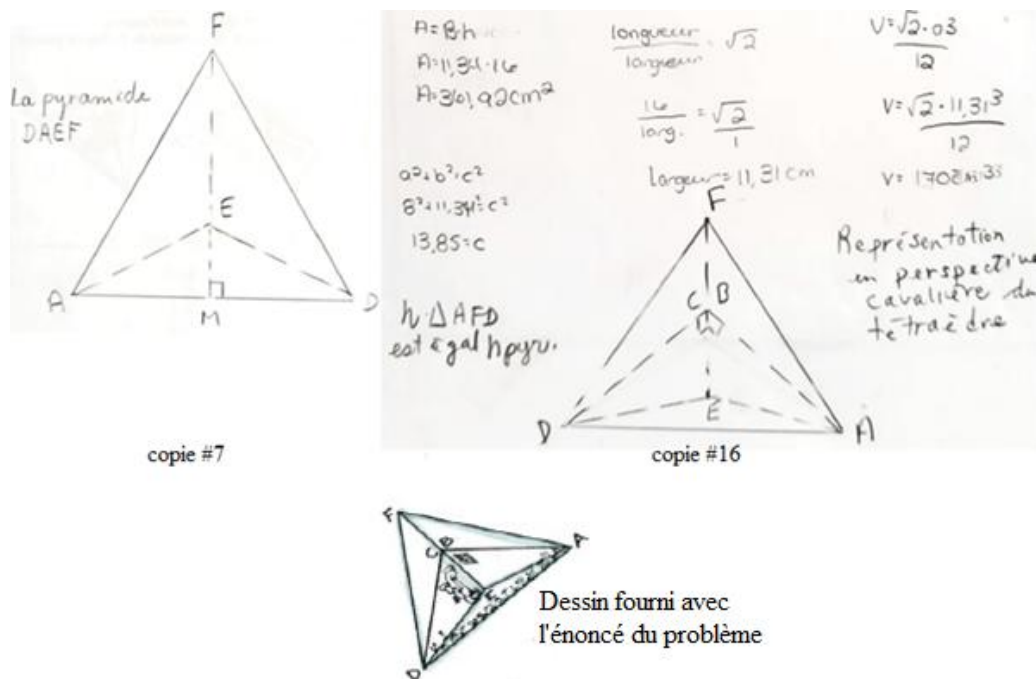
représentés comme des parallèles aux côtés de l'angle. Le fait que les deux codages soient l'un au-dessus de l'autre pour 2 angles qui ne sont pas orientés de la même façon dans la figure 4.7 montre bien que ce codage a pour ces élèves une pure fonction d'étiquetage, indépendante de l'orientation des côtés de l'angle.

Figure 4.7 Représentation en perspective du codage inadéquat de l'angle FME (copie #11 – problème 1)



Il y a deux équipes (#7 et 16) qui ont produit une représentation 2D de la pyramide en utilisant, semble-t-il, une autre technique de représentation, la perspective axonométrique, probablement parce que c'est celle qui est utilisée pour la représentation fournie avec l'énoncé du problème. À la figure 4.8, les axes AE , EF et DE forment des angles AEF , DEF et AED d'environ 120° . De plus, la hauteur $[FM]$ est dans le plan frontal (feuille de papier).

Figure 4.8 Représentations 2D en perspective axonométrique (copies #7 et #16, problème 1)



Selon mon analyse, il s'avère que les 2 équipes ont confondu les 2 techniques de représentation ou encore, qu'ils ont simplement repris le dessin fourni avec l'énoncé du problème. Nous verrons ultérieurement que cette confusion a pu avoir un impact pour visualiser la hauteur $[FM]$ et l'angle droit entre les plans DAE et ADF , ce qui amènera une difficulté à calculer le volume de la pyramide-tétraèdre. Je présente un échange de la dyade #16 qui confirme mes propos. Cet échange a été enregistré selon le protocole de la méthode *Think aloud* :

Figure 4.9 Verbatim de la dyade #16 (perspective cavalière de la pyramide)

Élève 1 : Hé ! il me semble que dessiner en perspective cavalière c'est comme sur la feuille [dessin fourni dans l'énoncé du problème]. Regarde le dessin qui est fait à droite de l'enveloppe. Me semble que c'est ça, la perspective cavalière... Les arêtes obliques sont dessinées plus petites, la base de la pyramide est située dans le plan frontal, pis...

Élève 2 : Ben, je suis pas sûr lol... Ouais, dans le premier cours, on a fait un dessin en perspective cavalière d'une pyramide à base pentagonale avec le prof... me semble que c'est ça. Il faudrait juste redessiner la pyramide à droite pas croche (oblique) comme sur la feuille [le dessin fourni de l'énoncé du problème]. On va aussi l'agrandir en indiquant en traits pointillés ce qui est caché.

En me servant des grilles d'analyse de la visualisation directe et celle du problème 1, j'évalue que les élèves de la copie #1 ont calculé toutes les mesures manquantes de la pyramide $ADEF$ en combinant la visualisation des triangles rectangles sur l'enveloppe (visualisation directe) avec des connaissances géométriques (ex. : appliquer le théorème de Pythagore pour déterminer $[AF]$, $[DF]$, $[AE]$, $[DE]$, puis $[FM]$). Ensuite, à partir de leur dessin en perspective de la pyramide $ADEF$, ils ont indiqué sur leur copie : « Je constate par visualisation directe du dessin en perspective que les 4 triangles de la pyramide $ADEF$ sont 4 triangles isocèles » (voir figure 4.13 ultérieurement).

Les élèves de la dyade #1 et des autres équipes qui ont réussi à calculer les mesures manquantes ont eu besoin de le faire d'abord pour déterminer le type de triangle formant les faces de la pyramide (connaissances géométriques) et ensuite, pour repérer les hauteurs et les angles droits de triangles rectangles (visualisation directe).

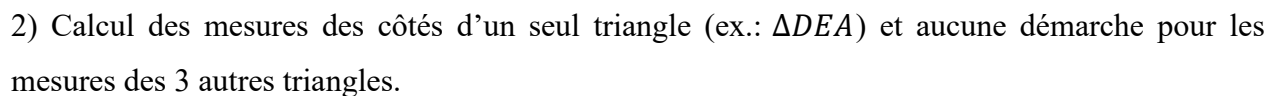
Treize équipes parmi les 16 ont réussi à calculer correctement les mesures manquantes. J'en conclus qu'elles ont mobilisé des connaissances géométriques (théorème de Pythagore) pour déterminer des mesures manquantes et constater que le tétraèdre est constitué de 4 triangles isocèles isométriques.

Selon l'analyse comparative de la copie #1 avec d'autres copies (#5, 13, 15) présentant des éléments de solution incomplets, il appert que l'habileté « visualisation spatiale » (directe et interne) mise en œuvre dans la production d'un dessin en perspective cavalière (connaissances spatiales), et combinée à l'application du théorème de Pythagore (connaissances géométriques), n'a pas donné lieu à la démarche adéquate chez ces dyades. Voyons pourquoi.

1) Difficulté à repérer les constituants d'un triangle rectangle et erreur d'application du théorème de Pythagore.

Dans la copie #13 (voir figure 4.10), la dyade a mal identifié les cathètes et les hypoténuses des triangles rectangles $\triangle AMF$ et $\triangle DMF$. Lorsque l'on regarde ce que l'équipe a écrit, je constate qu'elle a calculé la mesure de $[AB]$ (11,31 cm) ou de $[CD]$ de l'enveloppe — qui correspond à la hauteur $[FM]$ du triangle $\triangle AFD$ dans leur dessin en perspective de la pyramide $ADEF$ — et l'a associée au côté $[AF]$ ou $[AE]$ et au côté $[DF]$ ou $[DE]$ du triangle $\triangle AFD$ ou $\triangle AED$ (on le voit

Figure 4.10 Repérage des constituants d'un triangle rectangle (encadrés en rouge) (copie #13 – problème 1)



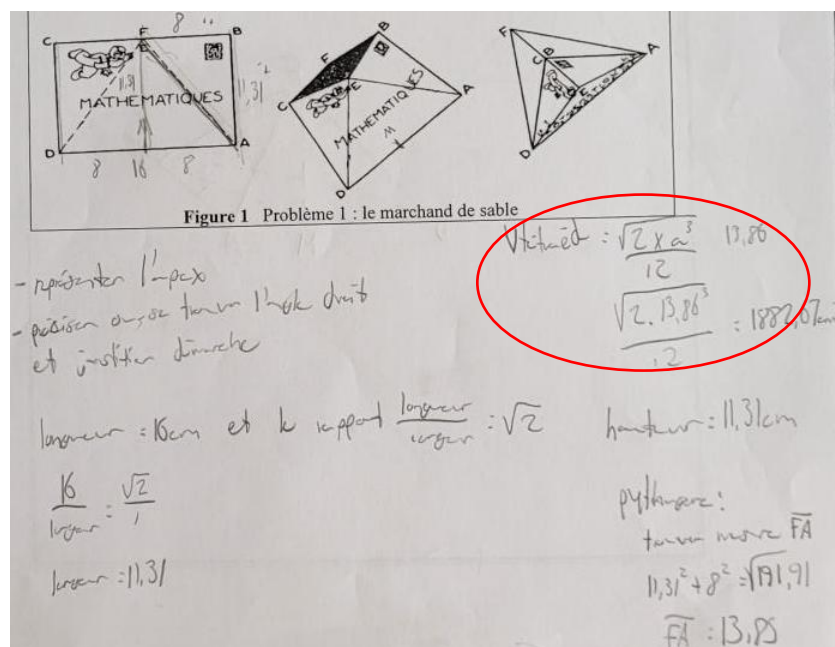
174

Figure 4.11 Transcription de la démarche de raisonnement (copie #5 - problème 1)

$$\begin{aligned} &\text{Longueur enveloppe} = 16 \text{ cm et le rapport } \frac{\text{longueur}}{\text{largeur}} = \sqrt{2} \\ &\frac{16}{\text{largeur}} = \frac{\sqrt{2}}{1} \text{ donc } \text{largeur} \approx 11,31 \\ &\text{Pythagore : trouver mesure FA} \\ &11,31^2 + 8^2 = \sqrt{191,9} \\ &\text{FA} = 13,85 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ces 2 élèves ne précisent pas leurs calculs pour les mesures des 3 autres triangles isocèles de la pyramide-tétraèdre. Il est possible qu'ils aient associé [FA] (13,85 cm) à la mesure de l'arête d'un tétraèdre régulier, sans nécessairement être conscients que cela signifierait que les 4 faces du solide sont des triangles équilatéraux. Il est possible aussi qu'ils aient appliqué la seule formule de volume qu'ils connaissent et qui pouvait s'appliquer directement, à savoir la formule du volume du tétraèdre régulier. Cela se confirme par le fait que cette formule apparaît dans leur production écrite (figure 4.12 en haut à droite) :

Figure 4.12 Un tétraèdre régulier ? (copie #5 – problème 1)



4.3.1.3 Phase 2 de l'analyse des solutions au problème 1

Cette 2^e phase de l'analyse portera sur la façon dont les élèves ont invoqué les théorèmes relatifs à la perpendicularité dans l'espace pour justifier leur raisonnement spatial (et déductif).

- Voici les théorèmes de perpendicularité dans l'espace que j'ai écrits au tableau et qui sont en cause. Ils ont été énoncés après avoir donné la définition d'une droite d perpendiculaire à un plan α ; à savoir une droite d qui fait un angle droit avec toutes les droites de α passant par le point d'intersection de d avec α . **Définition 1** : α un plan fixé dans l'espace, P un point de ce plan, d une droite de l'espace passant par P mais non incluse dans α . On dira que **d est perpendiculaire à α** si d fait un angle droit avec chacune des droites de α qui passe par P .
- **Théorème 1** : si α est un plan fixé dans l'espace et P est un point de ce plan, alors il existe une et une seule droite d qui passe par P et qui est perpendiculaire à α .
- **Théorème 2** : α est un plan fixé dans l'espace, P est un point de ce plan et d est une droite de l'espace qui passe par P et qui n'est pas incluse dans α . Alors, il suffit que d fasse des angles droits avec deux droites distinctes incluses dans α et passant par P pour que d soit perpendiculaire à α . Autrement dit, si d fait au point P des angles droits avec deux droites distinctes de α , alors elle fera des angles droits avec n'importe quelle autre droite de α passant par P (et pourra ainsi être dite perpendiculaire à α).

D'abord, un élément crucial a été de **repérer que l'angle EMF est droit** sur la maquette (ou sur le dessin en perspective de celle-ci). Les élèves de la dyade #1 ont bien réalisé ce repérage. Trois autres dyades (#3, #4 et #10) ont réussi à le faire. Toutefois, une seule équipe (#1) a réussi à justifier que l'angle EMF est droit en invoquant les bons théorèmes. En conséquence, en m'appuyant sur la grille d'analyse du Problème 1 (conflit vu/su), je considère que cette équipe a su invoquer une connaissance spatiale spécifique : en repérant (et en identifiant) que l'angle EMF est droit (figure 4.13), cela permet de dire que les angles AME et DME sont droits. Je vais exposer dans les pages suivantes que la dyade #1 a démontré que $[FM]$ est perpendiculaire au plan DEA en invoquant et en appliquant correctement les 2 théorèmes. Toutefois, ce n'est pas l'unique hauteur possible pour la pyramide $FADE$. En effet, dans d'autres productions écrites (ex. : copie #10), les élèves ont repéré une paire « hauteur $[EM]$ – base $(\triangle DAF)$ », de la pyramide $EADF$ (figure 4.13). Ainsi, ces productions écrites proposent une réponse adéquate.

Figure 4.13 Repérage d'une paire hauteur $[FM]$ – base $(\triangle DAE)$ de la pyramide $FADE$ (copie #1 – Problème 1)

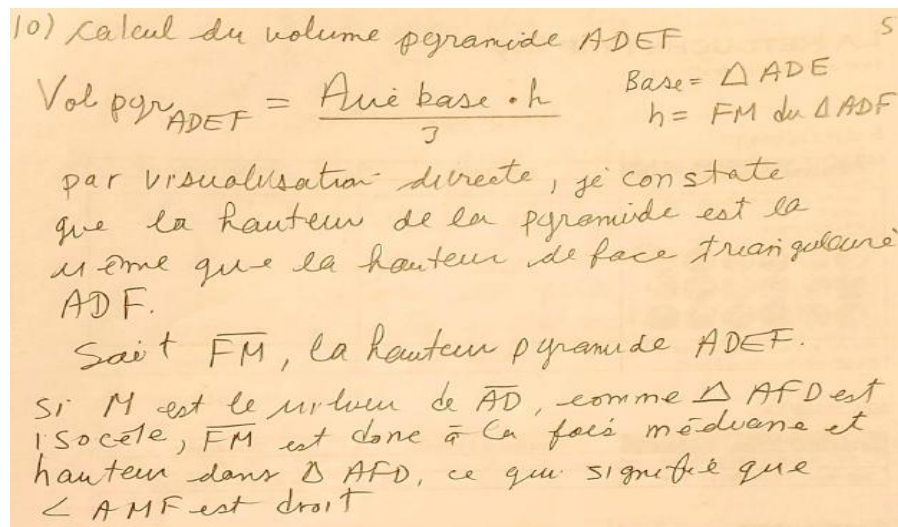
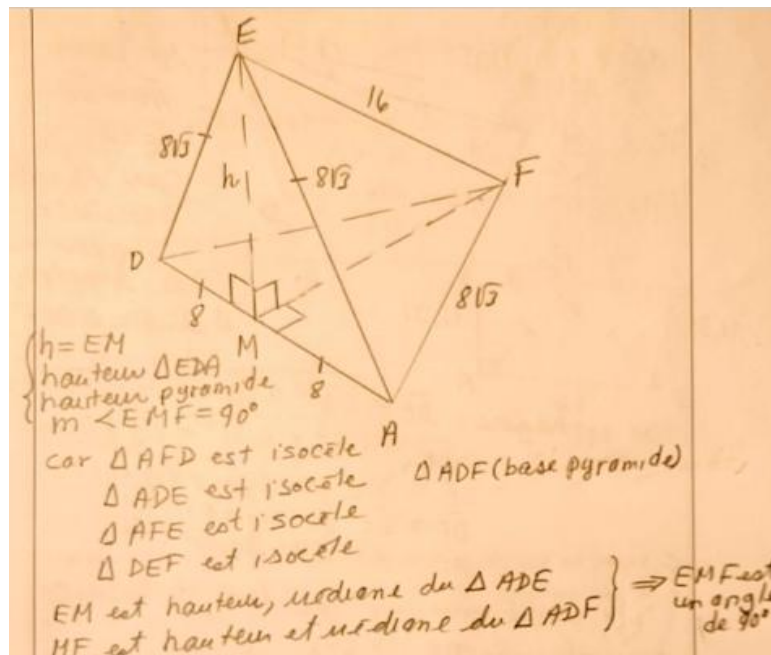


Figure 4.14 Repérage d'une paire hauteur $[EM]$ – base $(\triangle DAF)$ de la pyramide $EADF$ (copie #10 – Problème 1)



Ensuite, la dyade #1 a démontré que $[FM]$ est perpendiculaire au plan DEA en invoquant et en appliquant correctement les 2 théorèmes, après une trentaine de minutes de résolution. Aux figures 4.15 et 4.16 est exposée leur démarche de résolution :

Figure 4.15 Démonstration que $[FM]$ est perpendiculaire au plan DAE

11) Démonstration que $\overline{FM} \perp$ au plan DEA
 ($\angle AMF = 90^\circ$)

Théorème 1 : α est le plan DEA .
 M est le point de ce plan.
 La droite $\overline{FM}$ passant par le point M est $\perp$ au plan α .

Théorème 2 : DAE est un plan de l'espace
 et est la base de la pyramide ADF .
 M est un point du plan DEA et $\overline{FM}$ est une droite
 de l'espace passant par M et qui n'est pas incluse
 au plan DAE . Alors, il suffit que
 que $\overline{FM}$ fasse des angles droits avec 2 droites
 distinctes incluses dans plan DAE (droite AD et
 droite EM) et passant par M pour que $\overline{FM} \perp$ plan DAE .

12) Si $\overline{FM} \perp \overline{AD}$ passant par M
 et si $\overline{FM} \perp \overline{EM}$
 alors $\overline{FM} \perp$ au plan DAE .

13) $\overline{FM} \perp \overline{AD}$ car $\overline{FM}$ est médiane,
 médiatrice et hauteur du Δ isocèle ADF
 Donc, $m\angle FMD = m\angle FMA = 90^\circ$

14) $\overline{FM} \perp \overline{EM}$?
 Démontrons que $\overline{EM} \perp \overline{AD}$.
 $\overline{EM} \perp \overline{AD}$ car $\overline{EM}$ est médiane, médiatrice
 et hauteur du Δ isocèle ADE .
 Donc, $m\angle AHE = m\angle DME = 90^\circ$

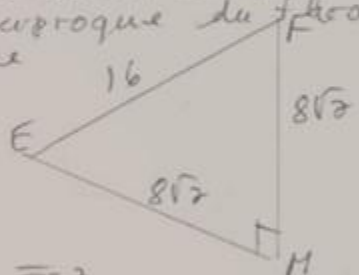
Figure 4.16 Démonstration que $[FM]$ est perpendiculaire au plan DAE (copie #1 – Problème 1)

15) Calculer $\overline{EM}$ et $\overline{FM}$.

① $\overline{EM}$
 $\triangle AED$ est isocèle. $\Rightarrow \overline{EM}$ est la hauteur (et médiane, médiatrice)
 et $\triangle AED$ se décompose en
 2 $\triangle$ isométriques ($\triangle AEM$ et $\triangle DEM$)
 Par Pythagore: $\overline{AM}^2 + \overline{EM}^2 = \overline{AE}^2$
 $\overline{EM} = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 - 8^2} = \sqrt{192 - 64}$
 $= \sqrt{128} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$
 $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}$
 $\overline{EM} = 8\sqrt{2} \text{ cm}$

② $\overline{FM}$
 $\triangle ADF$ est isocèle $\Rightarrow \overline{FM}$ est la hauteur (et médiane, médiatrice)
 et $\triangle ADF$ se décompose en 2 $\triangle$ isométriques ($\triangle AMF$ et $\triangle DMF$)
 Par Pythagore: $\overline{AM}^2 + \overline{FM}^2 = \overline{AF}^2$
 $\overline{FM} = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 - 8^2} = 8\sqrt{2} \text{ cm}$

16) Montrons que $\triangle EMF$ est droit
 par la réciproque du théorème
 de Pythagore



Si $\overline{EM}^2 + \overline{FM}^2 = \overline{EF}^2$ alors $m \angle EMF = 90^\circ$

$$(8\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{2})^2 = (64 \cdot 2) + (64 \cdot 2)$$

$$= 256 = 16^2 \text{ Vrai}$$

donc $m \angle EMF = 90^\circ$.

17) Puisque $\overline{FM}$ fait des angles droits avec
 2 droites distinctes du plan DAE (les droites
 AD et EM) passant par M alors $\overline{FM} \perp \text{plan } DAE$

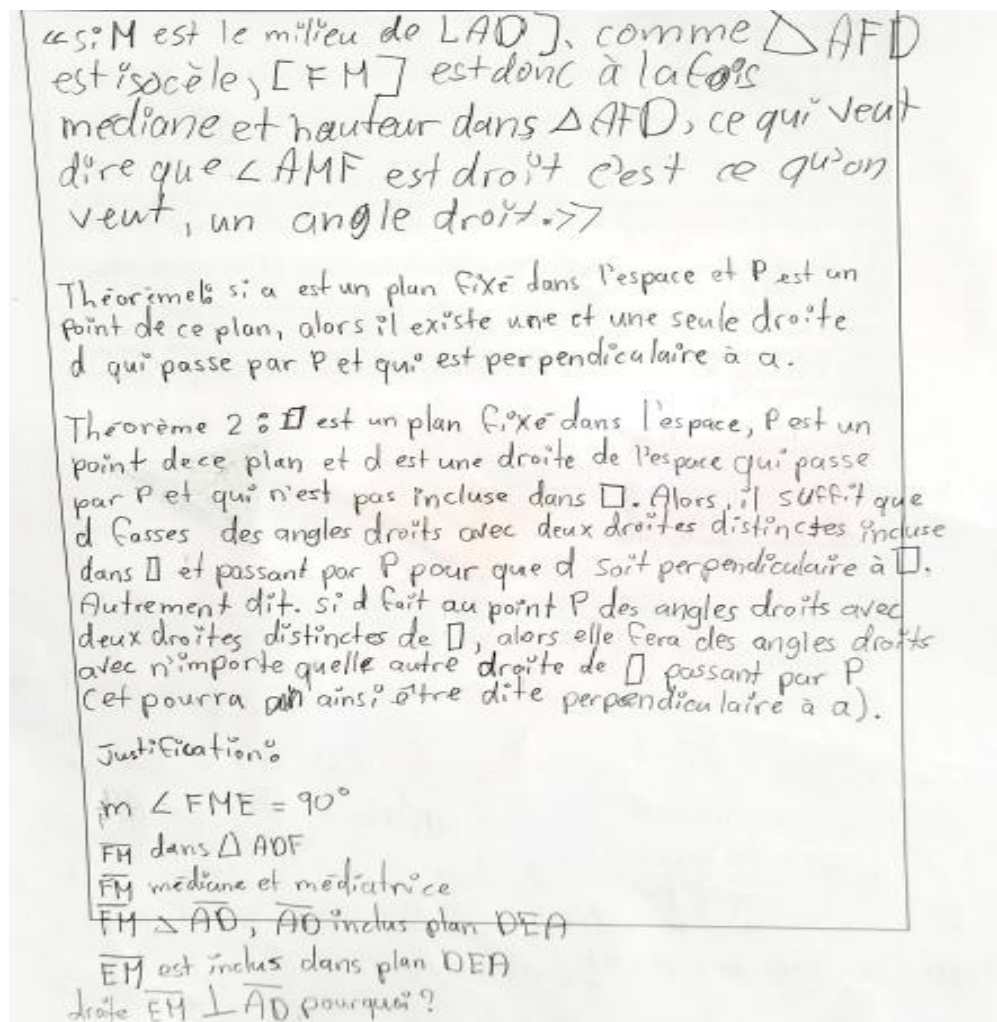
Afin de faire ressortir ce qui a bien (et moins bien) fonctionné dans le raisonnement déductif de la dyade #1, je vais relever dans leur preuve ce qu'on peut considérer comme de légères imprécisions dans le raisonnement. Par exemple, au point 13 de la figure 4.15, les élèves ont écrit : « $FM \perp AD$ (?) car FM est médiane, médiatrice et hauteur du triangle isocèle $\triangle ADF$. » Cette affirmation pourrait être plus détaillée : $[FM]$ est médiane parce que M a été choisi comme point

milieu de $[AD]$, et c'est donc aussi une hauteur parce qu'on sait que le triangle est isocèle (propriété des triangles isocèles). On en conclut que l'angle est droit (par définition de hauteur). Ces affirmations sont données en vrac dans la preuve de la copie, où les justifications auraient pu, idéalement, être mieux enchaînées (en donnant des « raisons » pour les enchaînements). Un autre exemple est celui du raisonnement déductif exposé aux points 12 et 13, qui n'est pas écrit selon la procédure idéalement attendue d'une preuve, ce qui peut rendre difficile le suivi du raisonnement par le lecteur (voir cadre théorique 2.5). En bref, je constate que les étapes 12, 16 et 17 indiquées dans la copie #1 sont des justifications adéquates de preuves mathématiques. En l'occurrence, l'équipe #1 a fait l'apprentissage de nouvelles connaissances géométriques qu'elle a su mettre à profit : les théorèmes 1 et 2.

En comparant les autres copies d'élèves à la copie #1, il y a trois autres équipes (dyades #3, #4, #10) qui ont mobilisé de nouvelles connaissances géométriques (théorèmes 1 et 2), en cherchant à démontrer que le triangle EMF est rectangle en M . De plus, ils ont mobilisé d'autres connaissances géométriques (réciproque du théorème de Pythagore) pour justifier leur raisonnement. La démonstration exposée à la figure 4.16 permet de confirmer mon analyse, c'est-à-dire que ces équipes ont fait l'apprentissage de nouvelles connaissances géométriques (théorèmes 1 et 2).

D'autres équipes (copies #2, #6, #8, #9 et #15) ont partiellement justifié que l'angle EMF est droit. Elles ont indiqué un début de démonstration (par exemple, figure 4.17) en utilisant les théorèmes 1 et 2, mais il manque des éléments dans leur raisonnement déductif comme ceux exposés à la copie #1.

Figure 4.17 Début de démonstration (théorèmes 1 et 2) – (copie #6 – Problème 1)



Dans la partie « justification » de la copie #6, il est écrit ceci :

$$m \angle FME = 90^\circ$$

FM dans $\triangle ADF$

FM médiane et médiatrice

$FM \perp AD$, AD inclus plan DEA

EM est inclus dans plan DEA

droite $EM \perp AD$ Pourquoi ?

Les élèves montrent qu'ils ont bien compris le Théorème 2 en identifiant correctement les deux angles droits dont ils avaient besoin (et en justifiant correctement la première des deux

perpendicularités). En conséquence, cela signifie que la visualisation spatiale a été mobilisée pour l'équipe #6. Mais ils n'ont pas su (comment) prouver que $[EM]$ est perpendiculaire à $[AD]$, c'est pourquoi ils ont laissé la question en suspens. Difficile de dire pourquoi ils n'ont pas cherché à appliquer la réciproque du théorème de Pythagore, qui est une connaissance géométrique dont il disposait.

De plus, à la figure 4.18, je présente un échange de la dyade #6 obtenu par la méthode *Think aloud*, venant illustrer mes propos, et dans lequel les 2 élèves discutent de savoir comment discerner des plans et des droites perpendiculaires dans un tétraèdre. On remarque qu'ils ne savent pas comment démontrer que le 2° angle est droit :

Figure 4.18 Verbatim de l'échange de la dyade #6 – problème 1

Élève 6(1) : « As-tu compris les explications du prof sur les théorèmes ? » Ben...le théorème 1... dans la démo tantôt, il a dit que par un point P d'un plan, il existe une seule droite qui passe par P et qui est perpendiculaire au plan... ça-tu rapport avec la hauteur $[FM]$ de la pyramide qui est perpendiculaire à la base (triangle DAF) ? Le plan, c'est donc la base de la pyramide ?

Élève 6(2) : « Hum ! ben si on regarde la maquette (pyramide $FADE$) pis on place la base DAE sur le bureau-là, on voit bien que la hauteur passe par le point M ... ben elle est perpendiculaire au bureau, ben je veux dire au triangle (base) DAF . Ouais, je crois que le plan dont y parle, c'est ce que tu dis, la base DAF de la pyramide. Mais, comment on fait pour justifier ça ? On peut peut-être utiliser l'autre théorème qu'il [le prof] a écrit au tableau (« le théorème 2), mais il dit qu'il faut trouver 2 droites différentes, c'est plutôt » « distinctes », je pense, ... mais...il faut que la droite d dont y parles, c'est la hauteur $[FM]$... il faut qu'elle fasse des angles droits avec 2 autres droites qui sont dans la base DAE ... (c'est le plan DAE). On voit tout de suite ça sur la maquette que $[FM]$ est hauteur, pis aussi, c'est une médiane, qui coupe en deux $[AD]$ pis, c'est aussi une médiatrice donc... y a un angle droit au point M , c'est certain.... y reste...hum ! y faut trouver un autre droite qui est perpendiculaire, $[EM]$, tient, qu'est-ce que t'en dis ? ça marcherait-tu ça ?

En lien avec mon cadre théorique, et selon l'analyse des productions écrites obtenues au problème 1, je déduis qu'il n'y a une corrélation faible entre la visualisation spatiale (directe et interne) de droites perpendiculaires et la capacité à conduire un bon raisonnement déductif (processus de preuve) pour justifier la perpendicularité entre une droite et un plan. Par exemple dans les copies #6, 10 et 11, les trois angles droits à repérer sont bien identifiés (même s'ils ne sont pas

adéquatement codés), mais les équipes n'ont pas été en mesure de justifier que ces angles sont droits. Ils ont tous repéré le bon plan (ADE), celui de la base de la pyramide $ADEF$, le bon candidat pour la hauteur, $[FM]$, et les deux droites du plan dont on veut montrer la perpendicularité avec $[FM]$. Mais, pourquoi n'arrivent-ils pas à montrer que $[EM]$ est perpendiculaire à $[FM]$? En particulier pourquoi ne cherchent-ils pas à appliquer la réciproque de Pythagore, qui est pratiquement le seul outil dont ils disposaient dans ce contexte pour établir qu'un angle est droit. Le fait qu'il y ait trop d'angles droits un peu partout dans la pyramide $ADEF$ a probablement amené une confusion chez ces élèves à mobiliser les « bonnes » connaissances géométriques. En fait, dans les copies des équipes analysées, seule la copie 1 montre une justification complète et mathématiquement satisfaisante.

L'examen des étapes nécessaires à la résolution du problème 1 montre que la mise en œuvre de la visualisation spatiale (directe et interne) traitant de la perpendicularité dans l'espace (plus spécifiquement entre une droite et un plan) ne suffit pas pour conduire le bon raisonnement déductif, c'est-à-dire pour faire la preuve que la hauteur d'une pyramide est perpendiculaire au plan de sa base.

4.3.2 Analyse des solutions au Problème 2

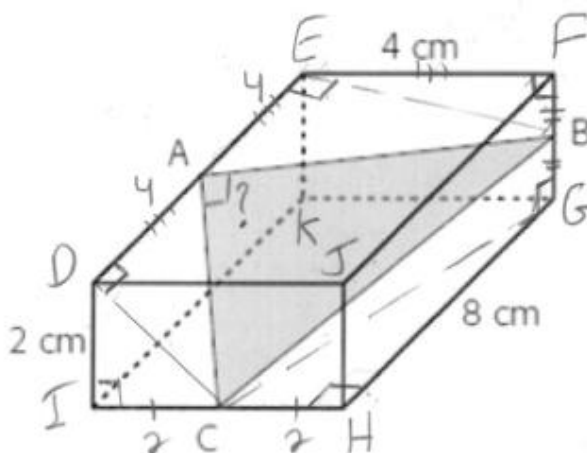
Une mise au point s'impose dans l'analyse des productions écrites des équipes pour le problème 2. L'analyse des solutions des élèves comportera une seule phase (voir chapitre 3 – Méthodologie). Il n'y aura pas d'analyse de la phase 2 (raisonnement mathématique) comme pour les problèmes 1 et 3. En effet, il n'est pas pertinent d'analyser les justifications mathématiques (processus de preuve) des élèves puisqu'ils ne disposaient pas de la version correcte du Théorème 3.

4.3.2.1 Analyse d'une copie d'élèves (dyade #15) exposant plusieurs éléments adéquats de réponses au Problème 2.

La production écrite #15 contient plusieurs éléments de réponses permettant d'affirmer que les élèves de cette dyade ont réussi le Problème 2. La dyade #15 a mobilisé la visualisation spatiale, pour imaginer tous les triangles rectangles dans le dessin en perspective cavalière du parallélépipède rectangle fourni. À la figure 4.19, nous constatons que les élèves de la dyade #15 ont eu recours à la visualisation *interne* puisqu'ils ont représenté le codage des angles droits des

triangles rectangles correctement ($\triangle CID, \triangle ADC, \triangle CHG, \triangle CGB, \triangle BFE, \triangle AEB$). Cela implique qu'ils ont fait interagir cette visualisation *interne* avec des connaissances spatiales spécifiques (savoir représenter en perspective cavalière des objets 3D et savoir repérer les angles droits).

Figure 4.19 Représentation en perspective cavalière des 6 triangles rectangles dans le parallélépipède rectangle (copie de la dyade #15)



Ensuite, les élèves de l'équipe #15 ont complété la partie « calculs » similaire à celle exposée dans la THA du problème 2 (voir chapitre 3 – Méthodologie). Les élèves ont écrit une démarche complète servant à déterminer des mesures manquantes en appliquant le théorème de Pythagore à six reprises tout en justifiant chacune des étapes de leur raisonnement. Nous donnons en exemple des parties de leur production écrite aux figures 4.20 et 4.21.

La figure 4.20 expose les calculs des mesures manquantes ($[BC]$ et $[AC]$) de $\triangle ABC$ à l'aide du théorème de Pythagore :

Figure 4.20 Production écrite illustrant le raisonnement de la dyade #15 (problème 2)

Démarche :

page 1

1) Déterminer mesures $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{AC}$ du ΔABC
 - utiliser le théorème de Pythagore à plusieurs reprises

2) Mesure de $\overline{AC}$
 - 2 Δ rectangles ΔCDI et ΔADC
 ΔCDI est un Δ rect car $m\angle CID = 90^\circ$ (I, un sommet du rect. $DJHI$)
 - Pythagore (théorème)
 $\overline{DI}^2 + \overline{CI}^2 = \overline{CD}^2$; $\overline{CI} = \frac{1}{2} \overline{HI} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2\text{cm}$
 $2^2 + 2^2 = \overline{CD}^2 \Rightarrow \overline{CD} = \sqrt{8} \approx 2,83\text{cm}$

page 2 (suite)

- calcul $m\overline{BC}$

- 1) dessiner les ΔCHG (à plat)
 $m\angle CHG = 90^\circ$ car H est un sommet du rectangle $KGHI$ (propriété géométrique)

2) calculer $\overline{CG}$ par le théorème de Pythagore
 $\overline{CH}^2 + \overline{HG}^2 = \overline{CG}^2$
 $2^2 + 8^2 = \overline{CG}^2$
 $\sqrt{68} = \overline{CG}$
 et les plans $DJHI$ et $KFJH$ sont perpendiculaires (angle dièdre de 90°)

Voici un autre exemple de raisonnement de l'équipe #15 impliquant la mobilisation de connaissances géométriques (contraposée du théorème de Pythagore) :

Figure 4.21 Application de la contraposée du théorème de Pythagore (problème 2, dyade #15)

page 4

8) Application de la contraposée du théorème de Pythagore pour démontrer si $\triangle ABC$ est rectangle ou non en A (sommet $\triangle ABC$)

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \stackrel{?}{=} \overline{BC}^2$$

on a calculé précédemment $\overline{AB} = \sqrt{33} \text{ cm} \approx 5,74 \text{ cm}$
 $\overline{AC} = \sqrt{24} \text{ cm} \approx 4,90 \text{ cm}$
 $\overline{BC} = \sqrt{69} \text{ cm} \approx 8,31 \text{ cm}$

$$(\sqrt{33})^2 + (\sqrt{24})^2 \stackrel{?}{=} (\sqrt{69})^2$$

$$33 + 24 \stackrel{?}{=} 69$$

$$57 \neq 69$$

donc, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \neq \overline{BC}^2$

et le $\triangle ABC$ n'est pas rectangle en A.

Nous observons dans la production écrite de la dyade #15 que l'application de la contraposée du théorème de Pythagore n'est pas fait de manière conventionnelle. En effet, l'on devrait voir un raisonnement comme celui présentée dans le 3^e élément de la THA du problème 2 (§ 3.3.4.3 iv) :

À vérifier, $AB^2 + AC^2 = BC^2$, sachant que $AB = \sqrt{33} \text{ cm}$, $AC = \sqrt{24} \text{ cm}$ et $BC = \sqrt{69} \text{ cm}$.
 Or,

$$AB^2 + AC^2 = (\sqrt{33})^2 + (\sqrt{24})^2 = 57 \neq 69 = BC^2,$$

$$\text{donc } AB^2 + AC^2 \neq BC^2.$$

4.3.2.2 Analyse des données relatives à la résolution du problème 2

Dans un premier temps, je m'attendais à ce que les élèves mobilisent la visualisation spatiale pour repérer tous les triangles rectangles et ensuite, appliquent les connaissances géométriques appropriées (théorème de Pythagore ou sa contraposée). Les données expérimentales exposent que 9 équipes (#3, #4, #5, #8, #9, #10, #11, #14 et #15) parmi les 16 ont réussi cette étape. J'en conclus

que ces 9 équipes ont eu recours à la visualisation spatiale (directe et mentale) pour repérer les 6 triangles rectangles, car leurs calculs des mesures manquantes ($[CD]$, $[CG]$, $[BE]$, $[AC]$, $[AB]$ et $[BC]$) à l'aide du théorème de Pythagore donnent des réponses valables pour chacun des triangles rectangles identifiés :

$$- CD = \sqrt{8} \approx 2,83 \text{ cm dans } \triangle CID;$$

$$- AC = 2\sqrt{6} \approx 4,90 \text{ cm dans } \triangle ADC;$$

$$- CG = \sqrt{68} \approx 8,25 \text{ cm dans } \triangle CHG;$$

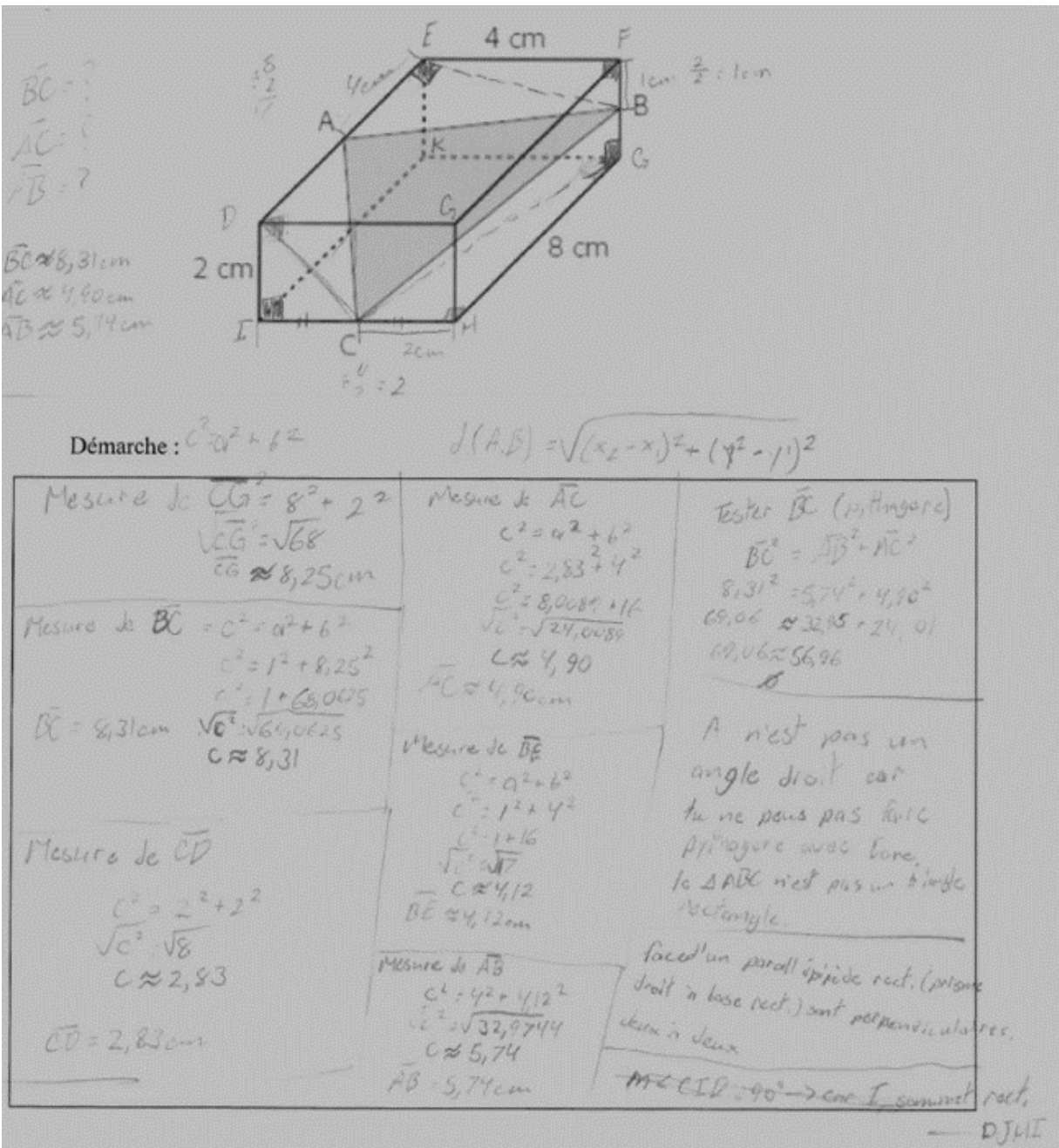
$$- BC = \sqrt{69} \approx 8,31 \text{ cm dans } \triangle CHG;$$

$$- BE = \sqrt{17} \approx 4,12 \text{ cm dans } \triangle BFE;$$

$$- AB = \sqrt{33} \approx 5,74 \text{ cm dans } \triangle AEB.$$

À la figure 4.22, j'expose la copie de la dyade #11 venant appuyer mon analyse :

Figure 4.22 Exemple de résultats attendus – problème 2 (copie #11)



Ces mêmes élèves ont aussi appliqué correctement la contraposée du théorème de Pythagore pour montrer que $m\angle BAC \neq 90^\circ$. J'en conclus que ces élèves ont fait interagir la visualisation spatiale (directe et interne) en s'appuyant possiblement sur l'élaboration de leurs dessins en perspective cavalière (connaissances spatiales) des 6 triangles rectangles avec des connaissances géométriques (théorème de Pythagore et sa contraposée).

Un autre aspect de l'analyse des solutions des équipes du problème 2 concerne le *modus operandi* de la visualisation spatiale avec les connaissances spatiales, les connaissances géométriques et leurs interactions.

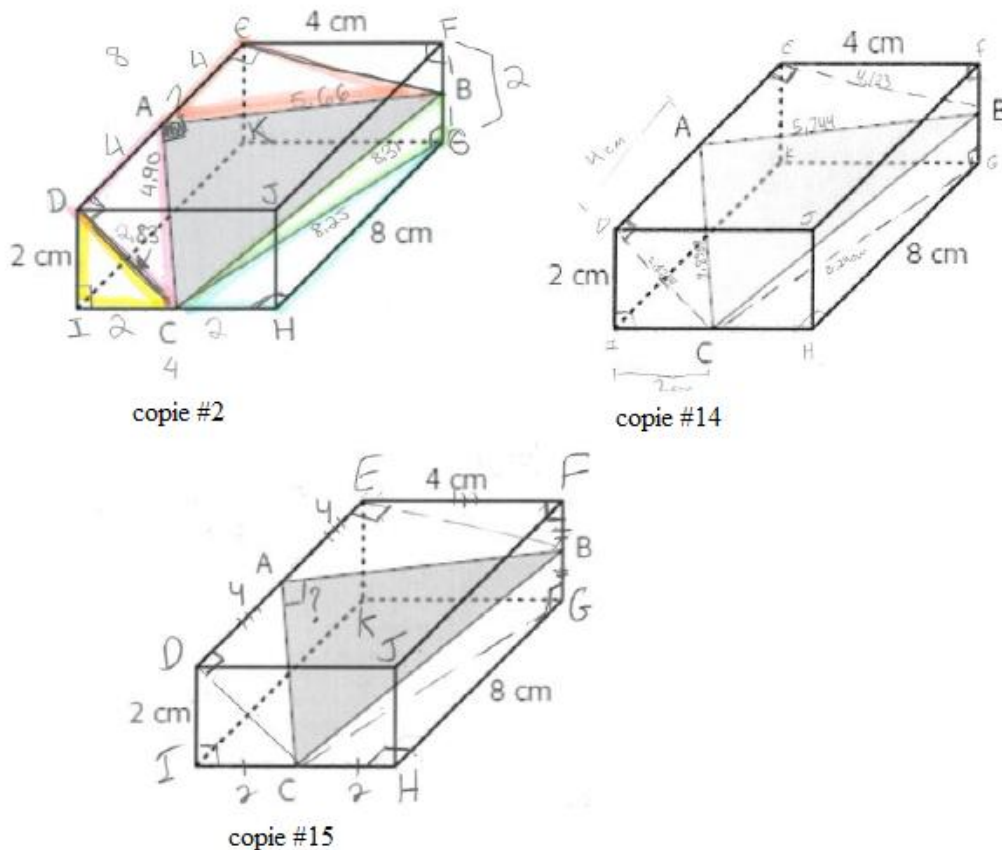
En effet, il y a plusieurs éléments de ce *modus operandi* à repérer assez finement. D'abord, j'ai demandé aux élèves de produire un dessin en perspective cavalière des triangles rectangles. Dans le processus d'analyse de ce problème, je me suis posé la question : « Est-ce que les élèves ont rajouté les segments $[CD]$, $[CG]$ et $[BE]$ (en traits pointillés) à même la représentation en perspective du prisme à base rectangulaire fournie ? » À partir de cette question, je pourrai alors analyser plus précisément les démarches écrites des élèves pour obtenir des réponses à mes deux questions de recherche.

Les traits pointillés sont nécessaires parce qu'ils servent à repérer les bons triangles rectangles. De plus, ils se révèlent des éléments importants pour vérifier comment s'est passée la visualisation interne chez les élèves, c'est-à-dire : 1) est-ce qu'ils ont identifié les angles droits, ont dessiné en perspective cavalière les « petits coins » (symboles de l'angle droit) ou pas; 2) est-ce qu'ils ont tracé les segments qui manquaient (ex. : tracer $[CD]$, $[CG]$ et $[BE]$ qui ne sont pas indiqués dans l'énoncé du problème; si on ne trace pas ces segments, on n'arrive pas facilement à voir les triangles rectangles). Il est important de repérer quelles sont les équipes qui l'ont fait — cela implique qu'elles ont mobilisé la visualisation interne — et celles qui ne l'ont pas fait. Est-ce que cela a eu une incidence sur la résolution du problème, ou non ?

D'abord, 10 dyades parmi les 16 ont représenté correctement les 6 triangles rectangles dans le prisme à base rectangulaire ($\triangle CID$, $\triangle ADC$, $\triangle CHG$, $\triangle BGC$, $\triangle BFE$ et $\triangle AEB$). En analysant les copies de ces élèves tout en me basant sur les grilles d'analyse de la visualisation *interne* et celle du problème 2 (conflit « vu/su »), je constate que les segments $[CD]$, $[CG]$ et $[BE]$ sont tracés en pointillés et parfois en traits pleins. J'en conclus que ces 10 équipes ont eu recours à la visualisation (interne et directe) puisqu'ils ont dessiné, selon les règles de la perspective cavalière, les 6 triangles rectangles dont les angles droits sont représentés correctement par des « petits » traits perpendiculaires. Par exemple, à la figure 4.23 (copies #2, 14 et 15), nous observons que l'angle ADC est droit pour chacune de ces représentations 2D : les « petits » traits perpendiculaires y sont. De plus, le 1^{er} trait de cet angle droit est parallèle à AD et l'autre est parallèle à DC . Ainsi, dans le

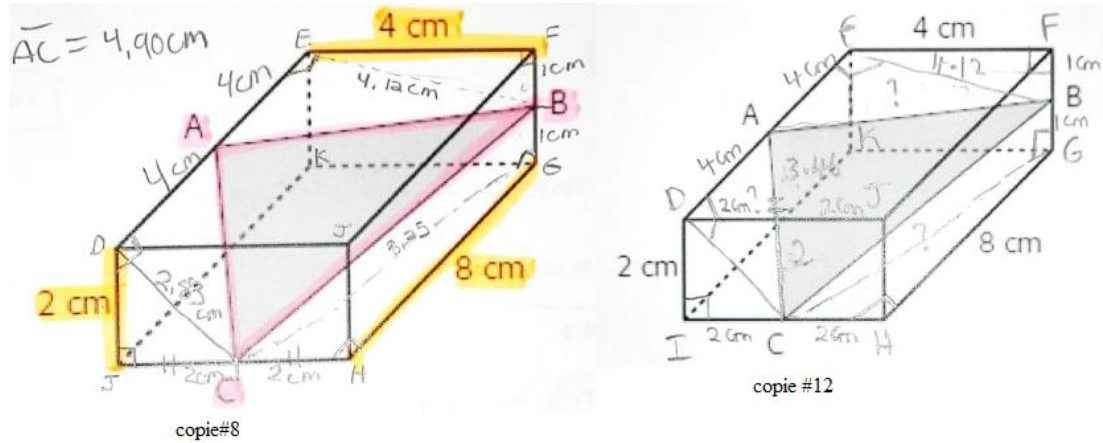
processus de décodage/encodage de la représentation 2D de l'objet 3D en cause (prisme droit à base rectangulaire), j'analyse que ces 10 équipes ont développé leur visualisation spatiale combinée à des connaissances spatiales (représenter correctement en perspective cavalière les triangles rectangles $\triangle DIC$, $\triangle ADC$, $\triangle CHG$, $\triangle BGC$, $\triangle EFB$, $\triangle AEB$).

Figure 4.23 Représentations en perspective cavalière adéquates du codage des angles droits des triangles rectangles $\triangle DIC$, $\triangle ADC$, $\triangle CHG$, $\triangle BGC$, $\triangle EFB$, $\triangle AEB$.



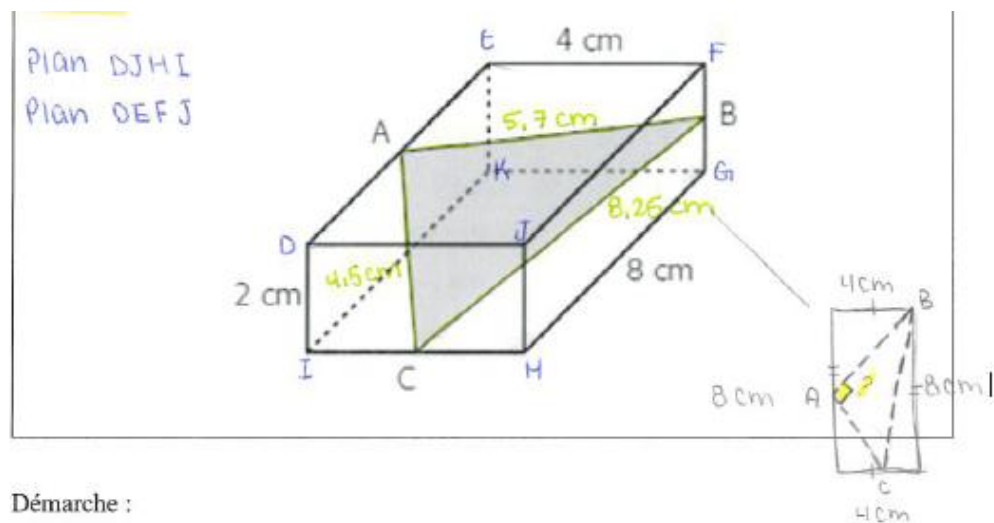
Par contre, les 6 autres dyades n'ont pas bien coordonné la visualisation spatiale avec la maîtrise des règles de la perspective cavalière puisque les codages des angles droits dans les triangles rectangles sont inadéquats. Par exemple, à la figure 4.24, copie #8, nous observons que les « petits » traits formant le codage de l'angle ADC dépassent le segment DC . De plus, le codage de l'angle droit CHB n'est pas dessiné en perspective : un des petits traits n'est pas parallèle à CH comme il devrait l'être. Il en est de même pour les angles BGC , AEB et ADC de la copie #12.

Figure 4.24 Représentations en perspective cavalière inadéquates du codage des angles droits (copies #8 et #12 – Problème 2)



Ci-dessous, la copie de la dyade #16 (figure 4.25). Elle illustre que les 2 élèves n'ont peut-être pas bien vu « spatialement » comment le triangle $\triangle ABC$ se situe à l'intérieur du prisme à base rectangulaire. Le petit croquis en bas à droite de la figure 4.25 est difficile à interpréter. Il semble que le sommet B du triangle $\triangle ABC$ prend la place du sommet F du prisme, et que le sommet C se situe au milieu de $[DJ]$, plutôt qu'au milieu de $[IH]$, comme si les élèves avaient projeté le triangle sur la face supérieure du prisme. Visualisation inadéquate ou mauvaise « ré-interprétation » de la consigne ? Malheureusement je n'ai pas repéré le problème durant l'expérimentation et n'ai pas interrogé les élèves pour mieux comprendre leur démarche.

Figure 4.25 Représentation en perspective inadéquate (copie #16 – problème 2)



4.3.3 Analyse des productions relatives au Problème 3

4.3.3.1 Analyse des données relatives à la phase 1 du Problème 3

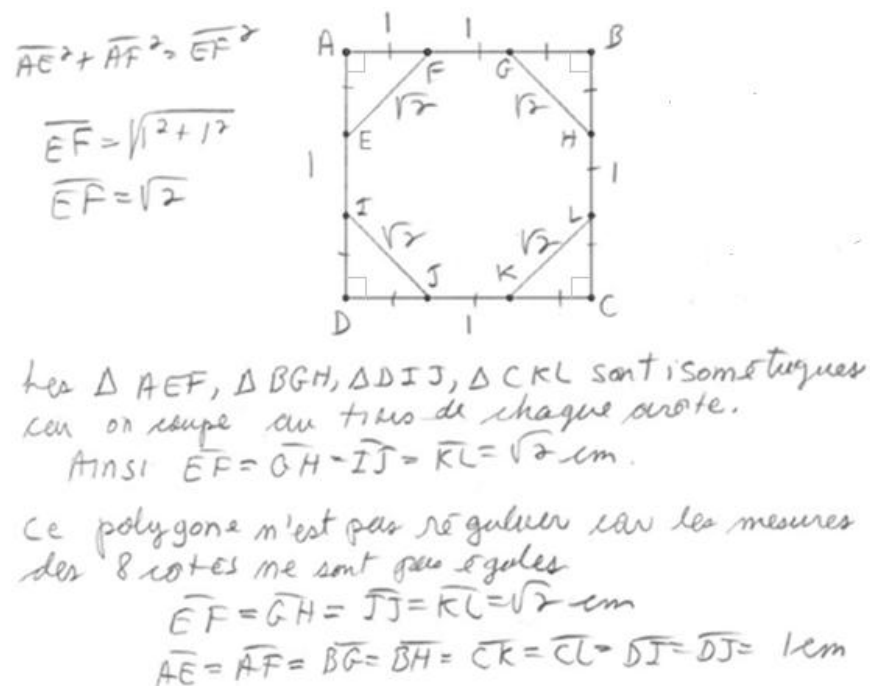
La phase 1 de l'analyse concernera les calculs que les élèves ont produits dans leur résolution (ex. : mesure manquante avec le théorème de Pythagore). Les rôles de la visualisation spatiale (directe et mentale) seront discutés en lien avec les connaissances spatiales. La phase 2 traitera du raisonnement déductif utilisé par les élèves, plus spécifiquement comment ils ont invoqué les théorèmes relatifs à la perpendicularité dans l'espace.

Analyse de la question a) : *Sur le carré ci-dessous, qui est une des faces du cube et dont le côté mesure 3 unités, trace ce que devient la face après la troncature. Calcule la mesure de chacun des côtés du polygone ainsi obtenu. Ce polygone est-il régulier ? Justifie ta réponse.*

Je vais présenter une 1^{re} analyse des calculs de la dyade #6. Les élèves de la dyade #6 ont obtenu plusieurs éléments de la solution telle qu'exposée dans la THA du problème 3 (voir §3.3.4.2.3).

À la figure 4.26, la dyade #6 a indiqué les réponses attendues à la question a :

Figure 4.26 Calculs des mesures du côté du polygone *EFGHLKJI* (copie #6 – Problème 3)



En me basant sur la grille d'analyse du problème 3, ces deux élèves ont mis en œuvre des connaissances spatiales (représenter en 2D les triangles rectangles) combinées avec la visualisation directe et mentale (découpages) en les intégrant à des connaissances géométriques. En effet, les élèves ont tracé (voir figure 4.26) le codage des « petits » traits perpendiculaires aux sommets A, B, C, D ainsi que les segments $[EF]$, $[GH]$, $[IJ]$, $[KL]$, qui constituent respectivement les hypoténuses des triangles rectangles $\triangle AEF$, $\triangle BGH$, $\triangle DIJ$ et $\triangle CKL$. En comparant la copie de la dyade #6 aux copies des 15 autres dyades, je constate que toutes les équipes ont obtenu de bonnes réponses à la *question a* (octogone non régulier). En utilisant la grille d'analyse de la visualisation *directe*, j'en conclus que les élèves ont bien coordonné la visualisation directe pour repérer et identifier les angles droits ainsi que les triangles rectangles $\triangle AEF$, $\triangle BGH$, $\triangle DIJ$ et $\triangle CKL$ lors de la troncature de la 1^{re} face carrée du cube avec des connaissances géométriques (théorème de Pythagore) pour calculer les mesures manquantes.

Analyse de la question b) : Décris le polyèdre obtenu par troncature : combien a-t-il de sommets, d'arêtes, de faces, combien y a-t-il d'arêtes adjacentes en chaque sommet, de quels types de polygones sont constituées les faces et comment sont-ils agencés ?

La réponse attendue à cette question est : le polyèdre obtenu à la suite de la troncature est un cube tronqué ayant 24 sommets, 36 arêtes et 14 faces dont 6 faces sont octogonales isométriques non régulières et 8 autres faces sont des triangles équilatéraux. En chaque sommet, il y a 3 arêtes adjacentes.

Tableau 4.4 Réponses obtenues à la question b (Problème 3)

# copie	Sommets	Arêtes	Faces	Arêtes adjacentes	Type de polygone
1	8	12	6	36	6 octogones non réguliers et 8 triangles isocèles
2	24	24	8	3	Octogones non réguliers et triangles isocèles
3	32		6	36	4 triangles
4	8	12	6	36	6 octogones et 8 triangles isocèles
5	24	32	14	3	6 octogones et 8 triangles équilatéraux
6	24	36	14	3	6 octogones non réguliers et 8 triangles équilatéraux
7	8	8	8	3	s/o
8	s/o	24	30	3	s/o

9	8	8	6		6 octogones et 8 triangles isocèles
10	8	12	6	4	s/o
11	8	12	6	3	s/o
12	18	18	8	3	3 octogones réguliers et 8 triangles isocèles
13	24	20	10	36	s/o
14	24	36	14	3	6 octogones non réguliers et 8 triangles équilatéraux
15	8	8	8	3	6 octogones non réguliers et 4 triangles isocèles
16	8	12	6	3	8 octogones non réguliers et 8 triangles isocèles

Ces réponses révèlent que 2 équipes ont obtenu une réponse adéquate, soit les dyades #6 et #14. À la figure 4.27 est exposée la démarche écrite des élèves de la dyade #6 :

Figure 4.27 Réponses obtenues à la question b (copie #6 – Problème 3)

polyèdre obtenu sera un cube tronqué:

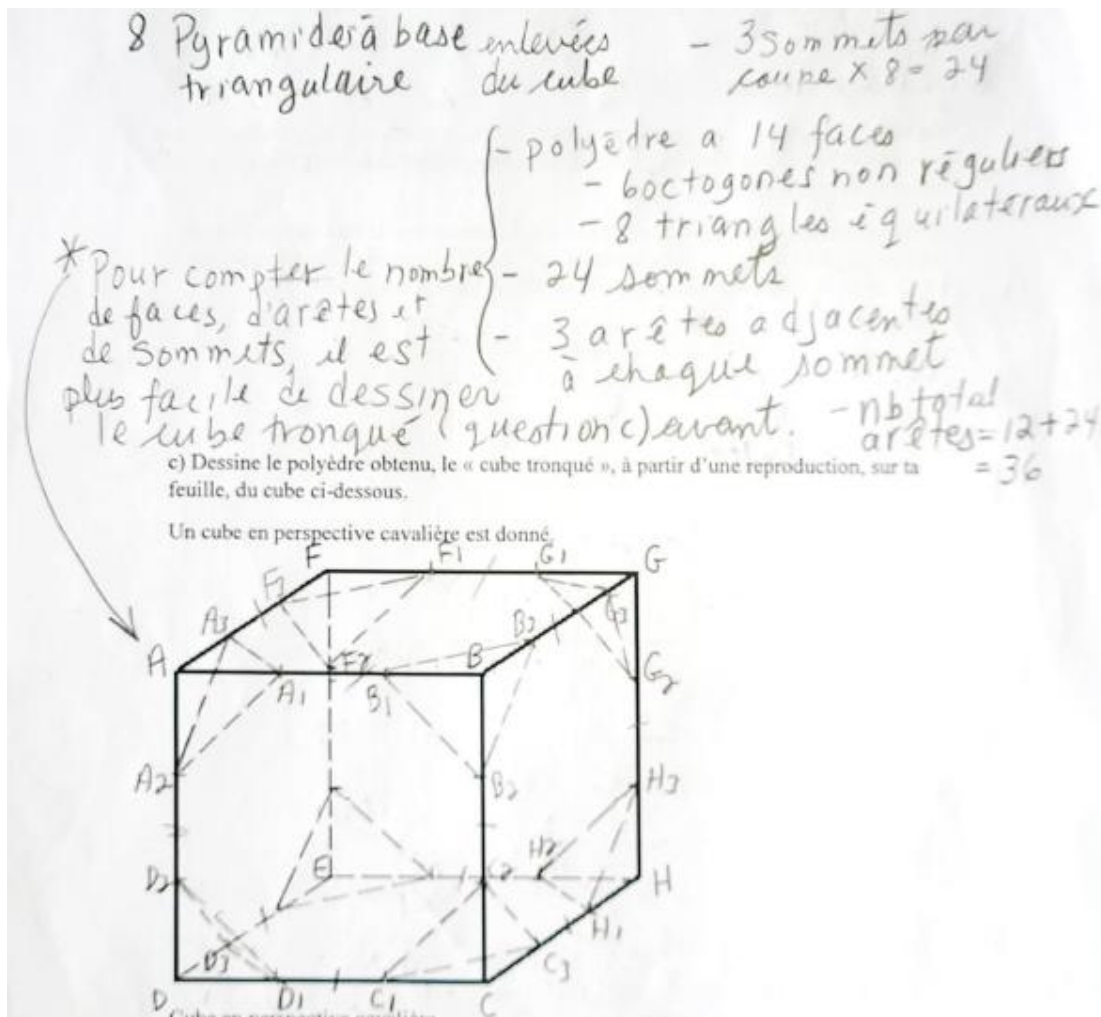
- nb sommets: $8 \times 3 = 24$ sommets
- 36 arêtes
- 14 faces dont 6 faces octogonales non régulières
et 8 faces triangulaires équilatérales
dont la mesure de chaque côté est de 1cm.
- en chaque sommet il y a 3 arêtes adjacentes
- les 6 faces octogonales sont $\perp$ deux à deux

En utilisant la grille d'analyse 4.2.2 (visualisation interne), il est clair que les élèves ont éprouvé une difficulté majeure à se créer des images mentales des faces, des arêtes, des sommets du nouveau solide et de leur agencement à la suite de la troncature. En conséquence, la visualisation interne s'est révélée complexe à mobiliser pour ces élèves.

Un élément intéressant qui pourrait apporter des éléments de réponse à ma 1^{re} question de recherche se révèle par le raisonnement spatial mené par la dyade #14. Les 2 élèves ont indiqué (voir figure

4.28) : « pour compter le nombre de faces, d'arêtes et de sommets, il est plus facile de dessiner le cube tronqué (question c) avant ». J'en déduis que ces élèves ont fait intervenir de manière concomitante les connaissances spatiales (voir figure 4.28), (représenter en perspective cavalière le cube tronqué), avec la visualisation interne (agencement des arêtes, des faces et des sommets) et la visualisation directe (à partir de la représentation 2D qu'ils ont élaborée) afin de dénombrer les faces, arêtes et sommets du cube tronqué.

Figure 4.28 Interaction entre des connaissances spatiales et la visualisation spatiale (copie #14 – Problème 3)



Je présente un extrait d'un échange verbal de la dyade #14 obtenu selon la méthode *Think aloud* qui vient appuyer mes propos :

Figure 4.29 Échanges verbaux de la dyade #14 (question b – Problème 3)

Élève 1 : Hé! Comment on fait ça ? Il faut trouver le nombre d'arêtes, de faces et de sommets après avoir tronqué le cube. On serait mieux de dessiner avant avec l'autre question plus bas (question c)... ce serait bien plus facile de compter après, les faces, les arêtes puis les sommets ? Qu'est-ce que t'en dis ?

Élève 2 : Ben... ouais peut-être. Ok, on va essayer comme tu dis. C'est qui qui fait le dessin ?

Élève 1 : Ok ! je vais le faire. Passe-moi ta règle pour dessiner les arêtes. Ensuite, tu vas voir, ce sera facile, tu compteras après que j'ai fini (le dessin), le total des faces, des arêtes et des sommets.

Élève 2 : [après environ 2 minutes]. Ouais ! t'as ben raison, dessiner en perspective le cube avec toutes ces « coupes » nous permet après de compter rapidement et de voir toutes les faces, les sommets et les arêtes qui restent après les « coupes ». En tout cas, ça aide aussi à visualiser les parties des « coupes » où c'est caché. Ok bon ben ! dans le nouveau polyèdre, il y a 16 faces dont 6 octogones non réguliers et 8 petits triangles équilatéraux, puis, au total 24 sommets parce que pour chaque triangle ça fait 3 sommets fois 8, donc 24 sommets. Ah ! j'ai bien compté les arêtes 2 fois, pour être certain : il y a en 36.

Élève 1 : Puis les arêtes adjacentes...on le voit sur le dessin qu'on a fait qu'il y en a 3 pour chaque sommet du cube tronqué.

Mon analyse démontre que le raisonnement spatial de ces 2 élèves a été efficace parce qu'ils ont expliqué leur *modus operandi*, c'est-à-dire comment s'est organisée la visualisation *interne* lors de l'encodage/décodage de la représentation 2D du cube tronqué. La question à se poser est : pourquoi les autres dyades n'ont-ils pas utilisé ce type de *modus operandi* ? Cela m'amène à discuter de rôle de la déconstruction dimensionnelle des formes (Duval, 2005; Mithalal, 2010) qui est entrée en jeu dans la résolution du problème 3.

Selon ma grille d'analyse 2 (visualisation *interne*), le processus de déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005), qui relève surtout de la visualisation *interne*, s'est avérée une difficulté importante, car d'une part, les élèves devaient effectuer une analyse mathématique du cube tronqué et de ses constituants en les décomposant mentalement, c'est-à-dire en imaginant les nouvelles faces, leur forme, leurs dimensions et leur nombre; et d'autre part, parce qu'ils devaient reconstituer mentalement des parties du solide qui sont cachées dans la représentation 2D (ex. : faces triangulaires $\Delta F_1F_2F_3$, $\Delta H_1H_2H_3$). Ceci a impliqué la création, l'organisation et la structuration

d'images mentales des parties du cube tronqué, et a exigé de l'élève une visualisation spatiale sûre et bien développée.

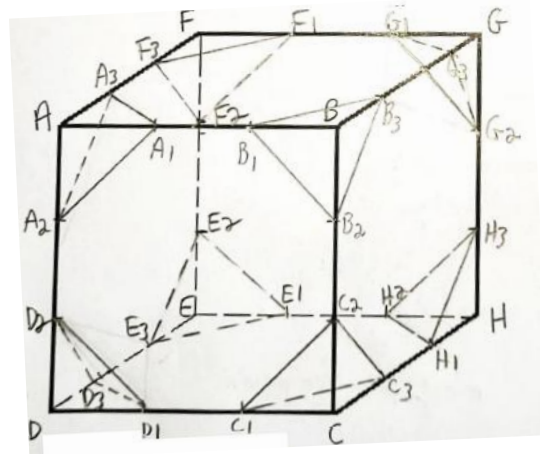
J'analyse que pour produire ces images mentales, il est crucial qu'elles s'appuient sur du concret, c'est-à-dire qu'elles s'arriment à une représentation en perspective qui permet de les voir directement. C'est ce que je nomme faire le « passage » d'un registre d'images mentales à un registre de représentation figurale (en perspective) et vice versa. Mon argumentation s'appuie sur l'étude de Bayart et ses collaborateurs (1998) :

C'est la pratique des passages d'un registre d'une représentation à l'autre qui permettra aux élèves de se constituer leurs représentations mentales dans l'espace et d'acquérir progressivement les compétences en jeu. (Bayart *et al.*, 1998, p. 21).

Analyse de la question c) : *Dessine le polyèdre obtenu, le « cube tronqué », à partir d'une reproduction, sur ta feuille, du cube ci-dessous.*

Les réponses à cette question indiquent que 10 dyades parmi les 16 ont produit une représentation en perspective cavalière complète avec les trois éléments essentiels décrits dans la THA du problème 3. La copie #7 est montrée en exemple à la figure 4.30.

Figure 4.30 Cube tronqué représenté en perspective cavalière (copie #7 – Problème 3)

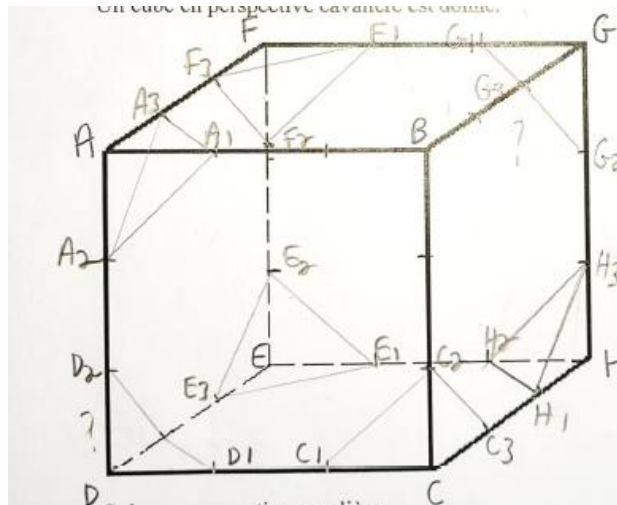


Les copies d'élèves (#1, #3, #4, #8, #10, #11) contenant une représentation en perspective inadéquate du cube tronqué, exposent une non-maîtrise des règles de la perspective cavalière

combinée à une difficulté à procéder au bon encodage/décodage des triangles équilatéraux à représenter.

Par exemple, je vais analyser la copie #8 (figure 4.31) en la comparant à la copie #7. Les arêtes des triangles $\Delta D_1D_2D_3$ et $\Delta G_1G_2G_3$ de la copie #7 sont correctement représentées en perspective cavalière alors que celles de la copie #8 ne respectent pas les conventions de cette technique de représentation. D'abord, il y a 4 faces triangulaires des 8 petites pyramides qui sont représentées correctement en perspective cavalière ($\Delta A_1A_2A_3$, $\Delta E_1E_2E_3$, $\Delta F_1F_2F_3$, $\Delta H_1H_2H_3$,). Je remarque sur la production écrite de la dyade #8 que les élèves n'ont pas tracé les arêtes $[D_2D_1]$, $[C_1C_3]$ en pointillés et que les arêtes $[G_1G_3]$ et $[G_2G_3]$ ne sont pas tracées aux bons endroits. J'analyse qu'une cause possible serait un encodage/décodage inadéquat pour tracer les arêtes $[D_2D_3]$, $[D_1D_3]$, $[C_1C_3]$, $[G_1G_3]$ et $[G_2G_3]$ des triangles.

Figure 4.31 Processus d'encodage/décodage inadéquat pour tracer les arêtes $[D_2D_3]$, $[D_1D_3]$, $[C_1C_3]$, $[G_1G_3]$ et $[G_2G_3]$ des triangles (copie #8 – Problème 3)



4.3.3.2 Analyse des données relatives à la phase 2 du Problème 3

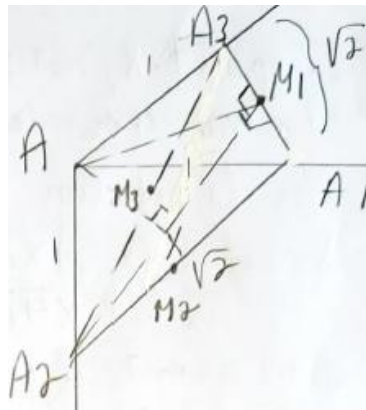
Analyse de la question d) : *En chaque sommet, la troncature retire du cube un polyèdre. De quel type est ce polyèdre ? Calcule les mesures de ses arêtes et son volume.*

La solution à la question d a été présentée dans la THA du Problème 3 (voir §3.3.4.2.3).

Tel que précisé dans la méthodologie, après avoir laissé les dyades résoudre le problème pendant une trentaine de minutes, je leur ai présenté les théorèmes 4 et 5 portant sur la relation de perpendicularité dans l'espace (voir §3.3.4.2.3). Les élèves avaient besoin d'invoquer ces théorèmes pour justifier correctement leur solution à la *question d*.

Les résultats à la *question d* indiquent que 2 dyades (#6 et 14) ont produit une solution partiellement adéquate. Je vais présenter les solutions des copies #6 et #14, pour ensuite les comparer à des solutions incomplètes. D'abord, afin de bien repérer la hauteur $[AX]$ de la pyramide ainsi que sa base triangulaire, les élèves de la dyade #14 ont **représenté la pyramide en perspective cavalière** (voir figure 4.32) en prenant soin de bien identifier et de nommer correctement : chaque sommet (A, A_1, A_2, A_3), les triangles rectangles et leurs angles droits ($\angle AXM_1, \angle AM_1A_3, \angle AM_1A_1$), les point milieux des côtés du triangle $\Delta A_1A_2A_3$ (M_1, M_2, M_3), la médiane $[A_2M_1]$. Ils ont ensuite pu procéder aux calculs attendus (mesure de la hauteur $[AX]$ de la pyramide, aire du triangle $\Delta A_1A_2A_3$).

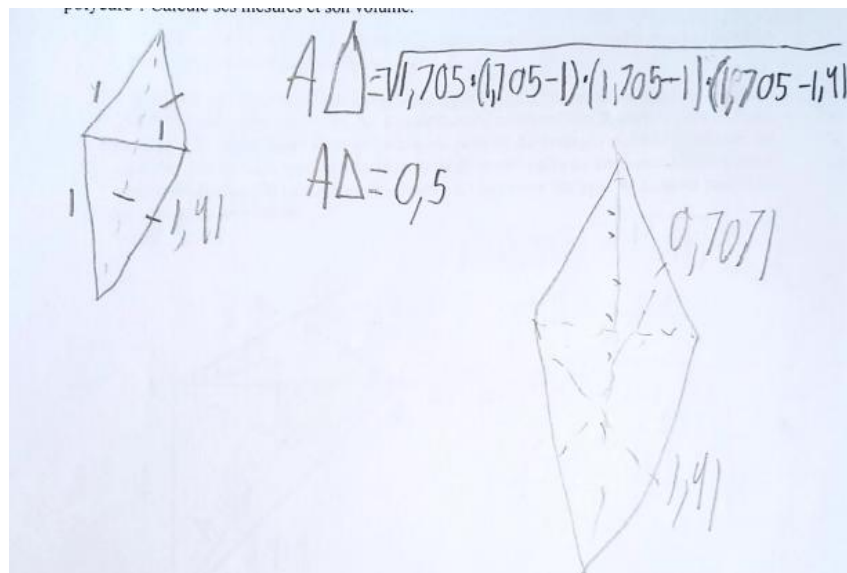
Figure 4.32 Dessin en perspective cavalière adéquat de la pyramide $AA_1A_2A_3$ exposant la base $\Delta A_1A_2A_3$, la hauteur $[AX]$ et les triangles rectangles (copie #14 – problème 3)



copie #14

En comparant avec d'autres copies (#4, #10 et #12), je constate que les représentations en perspective cavalière de celles-ci sont inadéquates. J'expose la copie #10, qui sera analysée :

Figure 4.33 Dessin en perspective cavalière inadéquat (copie #10 – Problème 3)

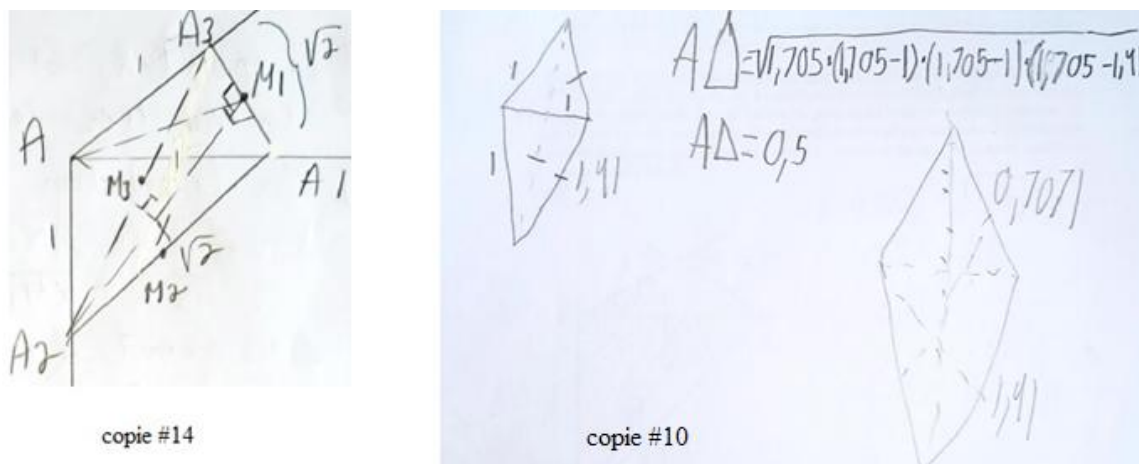


Il s'avère que deux propriétés de la perspective cavalière ne sont pas respectées : les fuyantes ne sont pas réduites d'environ la moitié par rapport aux arêtes dans le plan frontal, et l'angle de profondeur ne se situe pas entre 30° et 45° . Les sommets ($AA_1A_2A_3$), la hauteur $[AX]$, les points milieux (M_1, M_2, M_3) de la base triangulaire ($\Delta A_1A_2A_3$) et les angles droits (triangles rectangles) de la pyramide ne sont pas représentés, ni indiqués. Même si la consigne ne spécifiait pas que ces éléments devaient apparaître dans le dessin, ce sont des éléments centraux pour le calcul du volume et on peut penser qu'ajouter ces éléments à la représentation constituait une bonne amorce pour le calcul des mesures et du volume. Je précise que l'équipe en cause n'a pas réussi le calcul de volume. Toutefois, les élèves ont produit un 2^e dessin en perspective (à droite dans la figure 4.33) où l'on voit des médianes (en pointillés).

Dans le 1^{er} dessin (coin supérieur gauche de la figure 4.33), les élèves ont repéré la base triangulaire isométrique car ils ont dessiné 3 côtés dont la mesure est de 1,41 unités (mesure arrondie de $\sqrt{2}$). Il en est de même pour les 3 arêtes isométriques (1 unité chacune) formant les 3 triangles isocèles de la pyramide. J'analyse que la qualité d'exécution des 2 représentations en perspective cavalière, la non-maîtrise des règles de cette technique de représentation et le manque d'identification (sommets, hauteur $[AX]$, points milieux du triangle $\Delta A_1A_2A_3$, angles droits, etc.) ont pu avoir un impact sur les calculs de l'aire la base et ceux de la hauteur de la pyramide : on voit à la figure 4.33 que les élèves ont utilisé la formule de Héron pour calculer l'aire de la base de la pyramide (triangle

équilatéral dont l'arête est 1,41 unité). Ne pas représenter convenablement en perspective cavalière la pyramide $AA_1A_2A_3$ a pu entraver le raisonnement géométrique de la dyade #10. Plus spécifiquement, j'analyse que cette dyade a commis une erreur d'identification des côtés du triangle de la base $\Delta A_1A_2A_3$: ce triangle est équilatéral et la mesure de chacun des côtés est d'environ 1,41 unité, alors que les 2 élèves lui ont attribué les valeurs de AA_3 (1 unité), de AA_1 (1 unité) et de A_1A_2 ($\approx 1,41$ unité), ce qui donne comme calcul du demi-périmètre une valeur d'environ 1,705, au lieu de $\frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2,12$ unités. Il m'apparaît que cette erreur d'identification est liée à la mauvaise maîtrise de la connaissance spatiale « représenter en perspective cavalière », combinée à une mauvaise identification des sommets dans le dessin en perspective de la pyramide. Pour appuyer mon argumentation, j'expose à la figure 4.34, à des fins de comparaison, les représentations en perspective cavalière de la pyramide $AA_1A_2A_3$ de la dyade #14 (représentation adéquate) et de la dyade #10.

Figure 4.34 Comparaison du dessin en perspective de la pyramide $AA_1A_2A_3$ de la dyade #14 avec celle de la dyade #10



Un 2^e aspect à prendre en compte concerne l'interdépendance entre la visualisation mentale (hauteur $[AX]$, centre de gravité X , base triangulaire $\Delta A_1A_2A_3$) et l'encodage de ces éléments dans le dessin en perspective à produire. Comme l'illustrent les copies #6 et #14 (productions adéquates), on peut penser que pour identifier le type de polyèdre résultant de la troncature du cube et l'agencement entre les faces, les arêtes et les sommets, il est important que les images mentales créées puissent être vérifiées à même le dessin en perspective produit par les élèves, c'est-à-dire qu'il y ait de nombreux « allers-retours » entre la visualisation interne et l'encodage de la

représentation 2D en perspective de cette pyramide. Cela semble se confirmer par le fait que les dyades (#6 et #14), ayant obtenu de bonnes réponses à la *question d*, ont élaboré un dessin en perspective adéquat de la pyramide *FADE*, en justifiant leur raisonnement mathématique à l'aide de théorèmes relatifs à la perpendicularité dans l'espace pour calculer le volume. À cet égard, je vais relever précisément dans leur démarche écrite (copie #14 du problème 3) ce qui constitue les justifications mathématiques :

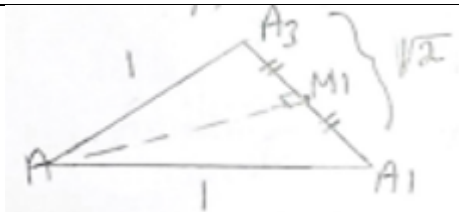
Tel qu'illustré à la figure 4.35, l'équipe #14 a débuté sa justification (raisonnement déductif) en écrivant ceci :

Figure 4.35 Raisonnement mathématique de la dyade #14 (étapes 2 à 9)

« 1) Faire un dessin en perspective de la pyramide à base triangulaire en utilisant celui du cube tronqué; 2) la hauteur de la pyramide $AA_1A_2A_3$? 3) Posons $[AX]$, la hauteur de la pyramide, 4) puisque $\Delta A_1A_2A_3$ est un triangle équilatéral, le point X est le centre de gravité de $\Delta A_1A_2A_3$, c'est aussi le point de rencontre des 3 médianes A_2M_1 , A_3M_2 et A_1M_3 . 5) $[AX]$ est la hauteur de la pyramide. Il va falloir le démontrer. $[AX]$ est perpendiculaire au plan $A_1A_2A_3$. 6) le plan médiateur AM_1A_2 est le plan passant par le milieu de A_1A_3 et perpendiculaire à A_1A_3 . 7) le point X est situé aux $\frac{2}{3}$ de A_2M_1 ou au tiers de M_1A_2 . 8) Par la relation de Pythagore sur le triangle rectangle AXM_1 , on a : 9) $(AX)^2 + (XM_1)^2 = (AM_1)^2$. 9) Mais avant il faut calculer AM_1 , XM_1 et AX^2 .

Je relève que l'équipe a mis en œuvre la visualisation spatiale (directe) conjointement avec l'activation des connaissances spatiales (représentation en perspective cavalière de ΔAA_1A_3), car elle a écrit :

Figure 4.36 Raisonnement mathématique de la dyade #14



9) [suite] On va utiliser le dessin de ΔAA_1A_3

$[AM_1]$ est médiane de ΔAA_1A_3 , donc $m\angle AM_1A_3 = m\angle AM_1A_1 = 90^\circ$. On sait que $A_3M_1 = A_1M_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ car $[AM_1]$ est médiane de ΔAA_1A_3 .

$$(AM_1)^2 + (A_3M_1)^2 = (AA_3)^2$$

$$(AM_1)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (1)^2$$

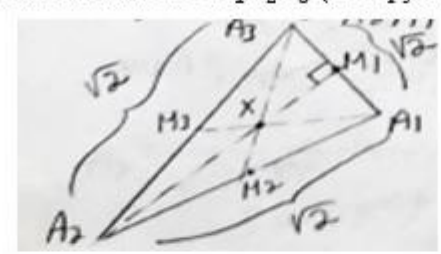
$$AM_1 = \sqrt{\left(1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)}$$

$$AM_1 = \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071 \text{ unité.}$$

Je relève encore une fois que l'équipe #14 a su coordonner la visualisation avec les connaissances spatiales (représentation en perspective cavalière de $\Delta A_1A_2A_3$) car elle a écrit et représenté ceci :

Figure 4.37 Raisonnement mathématique de la dyade #14 (étape 10)

10) Calculons A_2M_1 . On va utiliser le dessin $\Delta A_1A_2A_3$ (base pyramide) pour s'aider à calculer



$$(A_2M_1)^2 + (A_3M_1)^2 = (A_2A_3)^2$$

$$(A_2M_1)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$A_2M_1 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$A_2M_1 \approx 1,2247 \text{ unité.}$$

Je vais expliquer ce que je comprends de la démarche de résolution des 2 élèves de la dyade #14. D'abord, les 2 élèves nous informent qu'ils ont produit une représentation en perspective cavalière de la pyramide à base triangulaire $AA_1A_2A_3$ à l'aide du dessin en perspective du cube tronqué (voir point 1 de la figure 4.35). Pour élaborer cette représentation, je fais l'hypothèse que les 2 élèves ont eu recours à la visualisation *interne* afin de créer des images mentales des constituants de la pyramide : s'imaginer la base $\Delta A_1A_2A_3$, puis la hauteur $[AX]$ issue de l'apex A et l'angle droit en X , et dessiner le tout correctement selon les règles de la perspective cavalière. Ensuite, imaginer les 3 autres faces de la pyramide (ΔAA_1A_2 , ΔAA_1A_3 , ΔAA_2A_3) et être conscient qu'elles ne seront pas représentées de façon à rendre compte des relations d'isométrie ou de similitude à cause des conventions de la perspective. On peut penser que les 2 élèves ont représenté correctement en perspective cavalière ladite pyramide, tout en indiquant les angles droits et les triangles rectangles qui sont présents dans la représentation 2D (connaissances spatiales). Ce que je viens de décrire est complexe à réaliser car les images mentales de ces triangles de différentes natures (équilateral, isocèle) et de leurs angles droits sont sophistiquées, à cause des parties de la « petite » pyramide qui sont cachées dans la représentation 2D à élaborer ou encore, des angles et segments qui ne sont pas représentés de façon à rendre compte des relations d'isométrie ou de similitude.

En outre, le conflit « vu/su » entre ici en jeu car l'élève essaie de faire la part dans le dessin entre les propriétés qu'il connaît (connaissances géométriques) et celles qu'il perçoit. Par exemple, lorsqu'il dessine le triangle $\Delta A_1A_2A_3$ à la base de la pyramide, il sait que les angles en chacun des sommets sont de 60° alors qu'il percevra sur sa représentation 2D que ce n'est pas physiquement le cas. Le même phénomène se produira pour les 3 autres faces latérales de la pyramide, des triangles isocèles, dont 2 des côtés mesurent 1 unité et le troisième $\sqrt{2}$ unité. Ce qui sera plus délicat, c'est que l'élève devra s'assurer de produire une représentation adéquate du triangle ΔAA_2M_1 situé à l'intérieur de la pyramide, ainsi que la représentation de sa hauteur $[AX]$.

De plus, les 2 élèves de la dyade #14 ont produit trois représentations 2D de l'objet « pyramide ». D'abord, une représentation en perspective de la pyramide $AA_1A_2A_3$ (voir figure 4.34) en l'accompagnant de deux autres représentations 2D : la 1^{re} est une représentation de la face triangulaire isocèle (ΔAA_1A_3) de la « petite » pyramide (figure 4.36) qui constitue une aide au calcul de la longueur de la médiane $[AM_1]$. Je conclus que cette représentation 2D (connaissances

spatiales) a permis de mettre en interaction la visualisation directe à même cette représentation 2D, pour déterminer où se situe la hauteur, aussi médiane $[AM_1]$ du triangle ΔAA_1A_3 . Puis, cette visualisation a fort probablement aidé à compléter le raisonnement géométrique où le théorème de Pythagore (connaissances géométriques) intervient, pour déterminer la mesure AM_1 . L'on voit sur la copie de la dyade #14 que le calcul de AM_1 a été réinvestie par la suite (voir points 11 et 12 de la figure 4.38), pour calculer la position du point X , pied de la hauteur $[AX]$ de la pyramide $AA_1A_2A_3$.

Ensuite, une 3^e représentation 2D produite par les élèves de la dyade #14 est celle de la base triangulaire $\Delta A_1A_2A_3$ de la « petite » pyramide $AA_1A_2A_3$ (voir point 10 de la figure 4.37). Cette représentation 2D contient plusieurs détails importants : les 3 médianes ($[A_2M_1]$, $[A_1M_3]$ et $[A_3M_2]$) sont représentées en pointillés et elles se rencontrent au centre de gravité X du triangle $\Delta A_1A_2A_3$. Je constate que les élèves ont identifié la nature de ce triangle : équilatéral dont chaque côté mesure 1 unité. Il m'apparaît clair que cette représentation 2D a servi d'appui au raisonnement géométrique de la dyade pour déterminer la mesure manquante de $[A_2M_1]$. En effet, les élèves ont écrit sur leur copie (voir figure 4.37) : « Calculons A_2M_1 , on va utiliser le dessin de $\Delta A_2A_1A_3$ (base pyramide) pour calculer $(A_2M_1)^2 + (A_3M_1)^2 = (A_2A_3)^2$ ».

Après cette étape, les 2 élèves ont calculé XM_1 (voir point 11 de la figure 4.38) :

Figure 4.38 Justifications à la question d (copie # 14, p. 5 – Problème 3)

11) il faut se référer au dessin 3D de la pyramide pour bien voir ce qu'il nous manque ou ce que nous avons besoin.
on a trouvé $\overline{A_2M_1}$ et $\overline{AM_1}$.
sur le dessin de la pyramide $A_1A_2A_3$, il faut calculer la mesure de $\overline{XM_1}$.

12) Nous savons que X se situe au $\frac{2}{3}$ de $\overline{A_2M_1}$.
Donc, $\overline{A_2X} = \frac{2}{3} \cdot \overline{A_2M_1}$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\overline{A_2X} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,8165 \text{ unite}$$

13) par la relation de Pythagore, on calcule dans le Δ rectangle AXA_2 , la valeur de $\overline{AX}$.

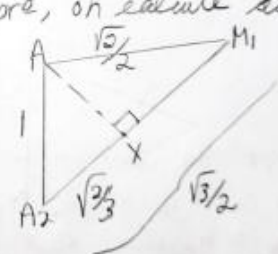
$$\overline{AX}^2 + \overline{A_2X}^2 = \overline{AA_2}^2$$

$$\overline{AX} = \sqrt{\overline{AA_2}^2 - \overline{A_2X}^2}$$

$$\overline{AX} = \sqrt{(1)^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{2}{3}}$$

$$\overline{AX} = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0,5774u \text{ (hauteur pyramide)}$$



Il semble que les 2 élèves aient fait appel à des connaissances géométriques spécifiques, soit que les trois médianes d'un triangle sont concourantes et que leur point d'intersection est le centre de gravité du triangle (voir point 12 de la figure 4.38), situé aux deux tiers. J'en conclus que la démarche de cette dyade constitue un exemple où la visualisation spatiale a été mobilisée pour agir concomitamment avec des connaissances spatiales (les 4 dessins réalisés : points 9 et 10 des figures 4.36 et 4.37 et le point 13 de la figure 4.38) et des connaissances géométriques (points 12 et 13 de la figure 4.38).

Toutefois, les dyades #6 et #14 n'ont pas démontré que la hauteur $[AX]$ est perpendiculaire au plan $A_1A_2A_3$. Cela n'est pas surprenant car les équipes n'avaient pas les connaissances géométriques

pour le faire, par exemple celles relatives au plan médiateur d'une arête (ou segment). J'y reviendrai (§4.5.3).

Enfin, je présente la démarche écrite du calcul de volume de la pyramide $AA_1A_2A_3$ réalisé par les élèves de la dyade #14, où sont mobilisées des connaissances géométriques (formule de volume d'une pyramide). Leur réponse est adéquate et conforme à la THA du problème 3 :

Figure 4.39 Calcul du volume pyramide $AA_1A_2A_3$ (copie #14, p. 6 – Problème 3)

14) Calcul du volume pyramide $AA_1A_2A_3$

$$\text{Volume pyr} = \frac{\text{Aire } \Delta A_1A_2A_3 \cdot h}{3}, \quad h = AX \quad (\text{hauteur pyr})$$

$$\text{Aire } \Delta A_1A_2A_3 = \frac{A_1A_2 (\text{base}) \cdot A_2M_1(h)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2 \cdot \frac{3}{2}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866 \text{ unités}$$

$$\text{Vol. pyr} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}}{3} = \frac{\sqrt{\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 3}}}{3} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6} \approx 0,1667 \text{ m}^3$$

Question e) Finalement, calcule le volume du cube tronqué.

La réponse attendue à cette question est la suivante :

Volume cube tronqué = Volume cube – Volume des 8 petites pyramides

$$= 3^3 - 8 \times \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{77}{3} \approx 25,67 \text{ unités cubiques.}$$

Les résultats exposent que 3 équipes parmi les 16 (#5, #6 et #14) ont obtenu la bonne réponse en mobilisant les bonnes connaissances géométriques (formules de volume du cube et de la pyramide). La réponse à la *question e* était directement liée à la *question d*, car pour déterminer le volume du cube tronqué, il fallait préalablement avoir calculé le volume d'une « petite » pyramide obtenue par troncature. La figure 4.40 présente les démarches des élèves des copies #5 et #6 :

Figure 4.40 Calcul du volume du cube tronqué (copies #5 et 6 – Problème 3)

e) Finalement, calcule le volume du cube tronqué.

$$\text{Volume cube} = 3^3 = 27 \text{ u}^3$$



$$\text{Volume pyramide} = 0,16666$$

$$V_{\text{cube tronqué}} = 27 \text{ u}^3 - (0,16666 \cdot 8) = 25,6672 \text{ u}^3$$

copie #5

e) Finalement, calcule le volume du cube tronqué.

$$V_{\text{cube tronqué}} = V_{\text{cube}} - V_{8 \text{ petites pyr.}}$$

$$= (3)^3 - 8 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= 27 - \frac{8}{6} = \frac{162-8}{6} = \frac{154}{6} = \frac{77}{3}$$

$$\simeq 25,67 \text{ cm}^3$$

copie #6

4.4 Quatrième phase : la révision, à la lumière de l'analyse rétrospective, des hypothèses théoriques, des choix didactiques, des trajectoires d'apprentissage anticipées.

À la suite de l'analyse rétrospective des données expérimentales, il appert que des éléments des trajectoires hypothétiques d'apprentissage pour les 3 problèmes doivent être modifiés. En effet, nous avons confronté les conjectures prédites, c'est-à-dire les processus mis en œuvre dans la résolution des élèves, pour chacune des trajectoires anticipées aux analyses des solutions des

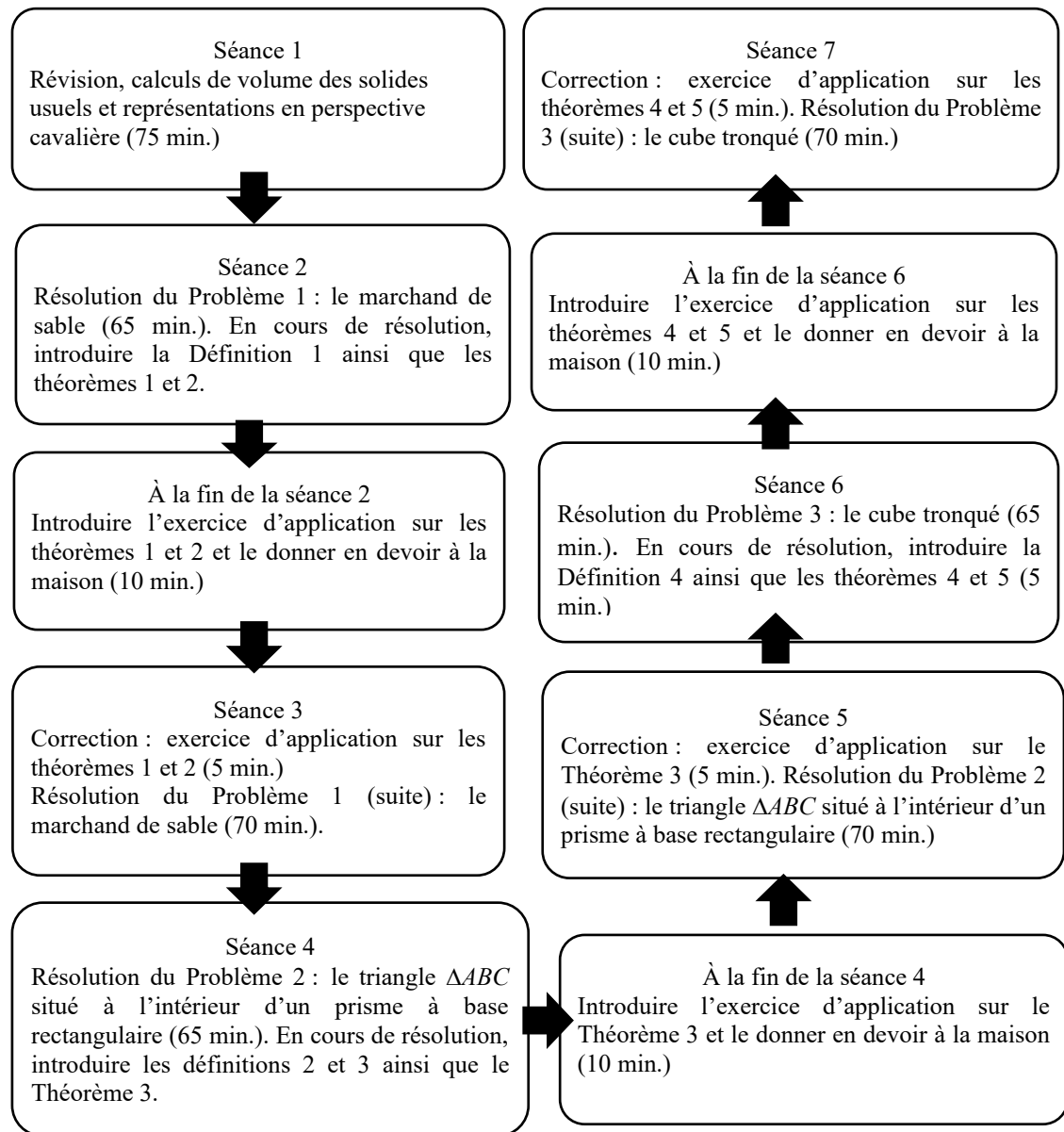
équipes (productions écrites et échanges verbaux des dyades selon la méthode *Think aloud* (van Someren et al., 1994), et avons vérifié qu'il y avait des indications que des apprentissages avaient ou n'avaient pas été réalisés.

Par exemple, les analyses du Problème 1 ont révélé qu'une seule équipe (dyade #1) parmi les 16 a réussi à justifier mathématiquement en utilisant la Définition 1 et en invoquant les théorèmes 1 et 2 traitant de la perpendicularité entre une droite et un plan. Or, nous avions prédit que notre 5^e élément de la THA (problème 1) était ceci : *Produire une représentation 2D en perspective cavalière pour conduire le raisonnement qui confirmera que la hauteur de la pyramide est aussi la hauteur d'une face triangulaire (ex. : triangle ΔAED)*. Puisque 15 équipes parmi les 16 n'ont pas produit des justifications mathématiques correspondant à ce 5^e élément de la THA du problème 1, il est nécessaire de « réévaluer » cette prédiction pour faire travailler plus efficacement la compréhension de la Définition 1 et des théorèmes 1 et 2.

Ainsi, la THA du Problème 1 a été révisée concernant la phase 2 de résolution. Afin de faciliter l'apprentissage de la Définition 1 et des théorèmes 1 et 2, nous prévoyons présenter ces éléments en cours de résolution lors de la séance 2 et d'introduire un exercice d'application sur ces théorèmes, qui sera donné en devoir à la maison à la fin de la séance 2. Il s'agit d'exercer les élèves à la preuve, plus spécifiquement d'améliorer leur raisonnement déductif en appliquant une démarche en trois étapes — 1) Ce que l'on sait; 2) À démontrer; 3) Ce que l'on déduit — pour étayer leurs justifications mathématiques.

Je vais présenter un nouvel échancier post-expérimental de la séquence d'enseignement. La figure 4.41 illustre les modifications :

Figure 4.41 Nouvel échancier de la séquence d'enseignement



4.5 Cinquième phase : ajustement du design de la séquence à partir duquel un nouveau cycle peut être amorcé

Dans cette section, je vais discuter des ajustements possibles à apporter au Problème 1, au Problème 2 et au Problème 3 concernant les phases 1 et 2 de leur résolution. Ces améliorations porteront sur la façon de présenter chacun des 3 problèmes, leur habillage et les interventions dans le pilotage de la séquence d'enseignement, même s'il n'y aura pas de nouvelle expérimentation dans le cadre de la thèse. D'une part, cela fait partie intégrante de la méthodologie du *Design Research* (voir chapitre III, § 3.3), d'autre part il n'est pas du tout exclu que la séquence soit reprise, autant dans d'autres contextes de recherche qu'en contexte standard d'enseignement.

4.5.1 Ajustements du design apportés au Problème 1

À la séance 2, je vais laisser à eux-mêmes les élèves dans leur résolution environ 30 minutes. Ensuite, en cours de résolution, je vais introduire les théorèmes 1 et 2 (environ 10 min.) et j'exécuterai la même démonstration visuelle que celle présentée au chapitre 3 de la thèse (§3.3.4.2.1).

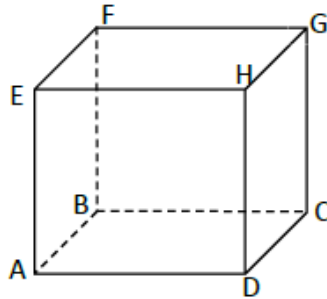
À la fin de la séance 2 (10 minutes), j'introduirai un exercice d'application portant sur les théorèmes 1 et 2 dans l'objectif que les élèves soient mieux outillés et puissent mettre en œuvre la capacité à produire des justifications mathématiques (au sens de preuve). Cet exercice sera donné en devoir à compléter à la maison. Voici les propos que je vais utiliser :

[Maintenant que je vous ai présenté et illustré le Théorème 1 et le Théorème 2 axés sur la perpendicularité dans l'espace, théorèmes que l'on ne prouvera pas, je vous propose de réaliser un exercice d'application de ces théorèmes que vous aurez à compléter en devoir à la maison. Cet exercice d'application va mieux vous préparer à justifier mathématiquement votre raisonnement. À votre retour en classe (séance 3), je vais corriger cet exercice (≈ 10 min.), puis je vous donnerai le reste de la séance pour compléter la résolution du problème 1. Maintenant, je vous présente au TBI, l'exercice :

Exercice d'application 1 (problème 1)

On donne la figure ci-contre : $ABCDEFGH$ est un cube.

Figure 4.42 Cube $ABCDEFGH$ (exercice d'application 1 – problème 1)



Combien y a-t-il de droites perpendiculaires au plan de la face $HGCD$ et qui passent par le point B ? À l'aide des théorèmes 1 et 2, justifiez mathématiquement chacun des éléments de votre réponse, notamment que les « candidats » que vous identifierez sont bien perpendiculaires au plan. Vous devez pour cela conduire une véritable démarche de preuve en précisant les 3 éléments : 1) Ce que l'on sait; 2) À montrer; 3) Ce que l'on déduit.

Indice pour ce que l'on sait : vous pouvez tenir pour acquis (vous « savez ») que les faces d'un cube sont des carrés et que les côtés du carré sont perpendiculaires deux à deux.

Au retour en classe à la séance 3, je corrigerai l'exercice d'application axé sur les théorèmes 1 et 2 pendant 10 minutes, en prenant soin de montrer aux élèves comment s'organisent les justifications mathématiques :

[Je présente au tableau la correction de l'exercice d'application :

La droite BC est perpendiculaire au plan $HGCD$ et elle passe par B . En vertu du Théorème 1, c'est l'unique perpendiculaire au plan $HGCD$ qui passe par B , il n'y en a pas d'autres. Montrons mathématiquement qu'elle est bien perpendiculaire au plan.

1) Ce que l'on sait

Le plan GCD est fixé. La droite BC passe par les points B et C . Le point C est dans le plan $HGCD$, et les droites GC et CD sont distinctes et incluses dans ce plan. On sait que les faces $BFGC$ et $ABCD$ du cube sont des carrés, et donc que les angles au sommet C de ces faces (respectivement les angles $\angle BCG$ et $\angle BCD$) sont droits (par définition du carré).

2) À montrer

Il s'agit d'appliquer le théorème 2 à la droite BC et au plan $HGCD$. En effet, en vertu du Théorème 2, il suffit que BC fasse des angles droits avec deux droites distinctes incluses dans le plan $HGCD$ et passant par C pour que BC soit perpendiculaire au plan $HGCD$. On cherche donc deux droites incluses dans le plan $HGCD$, chacune passant par C et chacune faisant un angle droit avec BC .

3) Ce que l'on déduit

Or, la droite BC fait au point C des angles droits avec les droites GC et CD , qui sont distinctes et incluses dans le plan $HGCD$. En effet, GC porte l'arête $[GC]$ dans la face $BFGC$ du cube, et fait donc un angle droit avec l'arête $[BC]$ de cette même face (propriété des côtés du carré). De même, CD porte l'arête $[CD]$ dans la face $ABCD$ du cube, et fait donc un angle droit avec l'arête $[BC]$ de cette même face. Ainsi, le Théorème 2 s'applique à BC , et on en déduit que BC est bien perpendiculaire au plan $HGCD$.

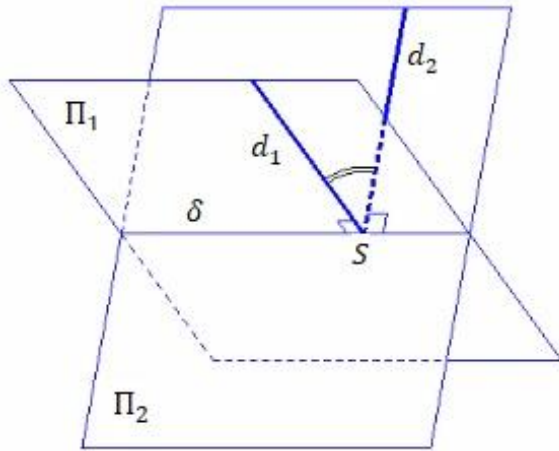
4.5.2 Ajustements du design apportés au Problème 2

À la séance 4, je vais laisser travailler les élèves en dyades pendant une trentaine de minutes. Puis, en cours de résolution, je vais introduire de nouveaux éléments de connaissances géométriques au tableau :

Définition 1 : une droite d de l'espace qui coupe le plan α au point P est dite perpendiculaire à α si et seulement si d fait un angle droit avec chacune des droites de α qui passe par P .

Définition 2 : l'*angle dièdre* entre deux plans Π_1 et Π_2 s'intersectant le long de la droite δ , est l'angle que forment deux droites d_1 et d_2 sécantes en un point de δ , d_1 incluse dans Π_1 , d_2 incluse dans Π_2 , et chacune perpendiculaire à δ .

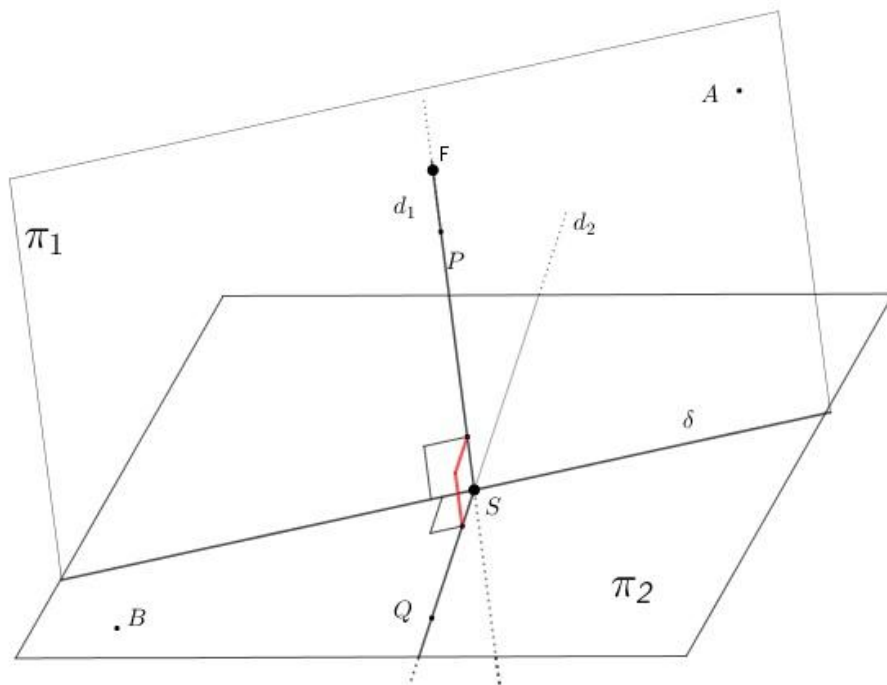
Figure 4.43 Angle dièdre entre deux plans Π_1 et Π_2



Définition 3 : deux plans Π_1 et Π_2 sont (dits) *perpendiculaires* si et seulement si l'angle dièdre qu'ils forment est un angle droit.

Théorème 3 : considérons Π_1 et Π_2 deux plans perpendiculaires s'intersectant le long de la droite δ . Soit d_1 une droite de Π_1 qui est perpendiculaire à δ . Alors toute droite d_2 incluse dans Π_2 et qui rencontre d_1 formera un angle droit avec d_1 .

Figure 4.44 Représentation 2D du Théorème 3 (plans perpendiculaires)



Maintenant, je vais préciser comment sera traitée la partie « justifications mathématiques » où le Théorème 3 sera convoqué dans une *version améliorée* de la séquence. Il s'agit de mettre en œuvre de nouvelles connaissances géométriques (Définition 2, Définition 3, Théorème 3).

Le point crucial dans le problème 2 est que les faces d'un parallélépipède rectangle (prisme droit à base rectangulaire) sont perpendiculaires deux à deux (les plans qui portent ces faces sont des plans perpendiculaires deux à deux). Cet aspect, qui est tenu pour acquis, rend possible l'application du Théorème 3.

Lorsque les élèves auront déterminé les mesures manquantes des segments $[CD]$, $[AC]$, $[CG]$, $[BC]$, $[BE]$, $[AB]$ en utilisant le théorème de Pythagore à six reprises (voir chapitre 3, §3.3.4.2.2), ils devront ensuite justifier mathématiquement ces raisonnements (connaissances géométriques) en utilisant la Définition 3 (angle dièdre droit) et en convoquant le Théorème 3.

Il faut vérifier, pour chaque triangle ($\triangle ADC$, $\triangle CID$, $\triangle CHG$, $\triangle BGC$, $\triangle EFG$ et $\triangle AEG$) dont on veut montrer qu'il est rectangle, que les hypothèses du Théorème 3, sont réunies pour pouvoir l'appliquer. Voici des raisonnements déductifs possibles :

- Dans $\triangle ADC$:

Les plans perpendiculaires sont $DEKI$ et $DIHJ$ (on tient pour acquis que dans un prisme droit à base rectangulaire, les faces sont perpendiculaires deux à deux). La droite d'intersection entre ces deux plans est DI .

Les droites AD et DI sont perpendiculaires comme arêtes du prisme (AD est perpendiculaire à la droite d'intersection DI) et la droite DC est incluse dans le plan $DIHJ$.

En conséquence, le Théorème 3 s'applique et permet de conclure que la droite DC est perpendiculaire à la droite AD .

- Dans $\triangle CGH$:

Il n'y a rien à montrer car l'angle CHG est droit comme coin d'une face rectangulaire ($KIHG$).

- Dans $\triangle CGB$:

Les plans perpendiculaires sont $IKGH$ et $EKFG$. La droite d'intersection entre ces deux plans est KG .

Les droites KG et BG sont perpendiculaires comme arêtes du prisme (BG est perpendiculaire à la droite d'intersection KG) et la droite CG est incluse dans le plan $IKGH$.

Le Théorème 3 s'applique et permet de conclure que CG est perpendiculaire à BG .

- Dans $\triangle EBA$:

Les plans perpendiculaires sont $DEFJ$ et $EFGK$. La droite d'intersection entre ces plans est EF .

Les droites AE et EF sont perpendiculaires comme arêtes du prisme et la droite EB est incluse dans le plan $EFGK$.

Le Théorème 3 s'applique et permet de conclure que EB est perpendiculaire à AE .

- Dans $\triangle CID$:

Il n'y a rien à montrer car l'angle CID est droit dans la face rectangulaire $DJHI$.

- Dans $\triangle BFE$:

Aucune démonstration à compléter puisque l'angle BFE est droit dans la face rectangulaire $KEFG$.

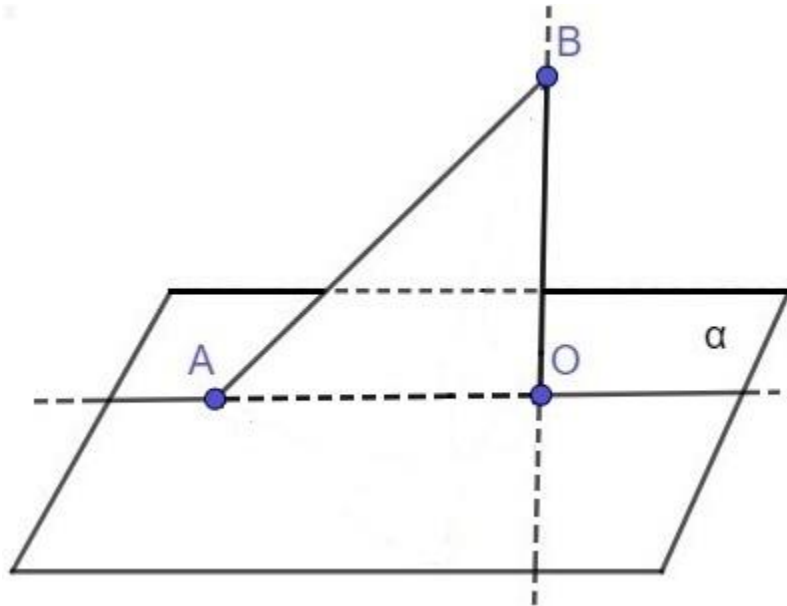
Lorsqu'il restera environ 10 minutes à la séance 4, j'introduirai un exercice d'application, afin que les élèves développent leur raisonnement déductif en justifiant mathématiquement leur démarche de résolution. Cet exercice sera donné en devoir à la maison. Voici l'exercice d'application :

Exercice d'application 2 (relatif au Problème 2)

Soit B un point de l'espace à l'extérieur du plan α . On considère l'unique perpendiculaire à α qui passe par B et on appelle O , point de α , le pied de cette perpendiculaire (c'est-à-dire l'intersection de cette perpendiculaire avec le plan α).

Soit A un point du plan α distinct de O . Montrez que le plan ABO est perpendiculaire à α (c'est-à-dire fait un angle dièdre de 90° avec le plan α).

Figure 4.45 Exercice d'application 2 (relatif au Problème 2)



Justifiez mathématiquement chacun des éléments de votre réponse. Vous devez pour cela conduire une véritable démarche de preuve en précisant les trois éléments : 1) Ce que l'on sait; 2) À montrer; 3) Ce que l'on déduit.

Indice : Dans le plan α , construire la perpendiculaire à AO qui passe par O . Sur cette perpendiculaire, placer un point C distinct de O . Que pouvez-vous dire de OC par rapport à OB ? Pourquoi ?

Au retour en classe à la séance 5, je corrigerai l'exercice d'application pendant 10 minutes, en prenant soin de montrer aux élèves comment s'organisent les justifications mathématiques.

[Je vous présente au tableau la correction de l'exercice d'application :

1) Ce que l'on sait.

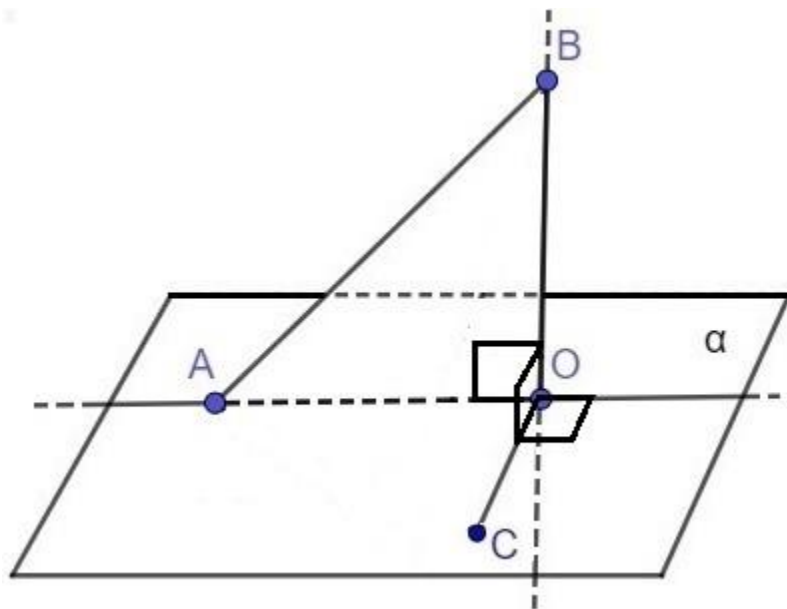
L'angle AOC est droit par construction (de la perpendiculaire à AO dans le plan α , et par le choix de C comme point de cette perpendiculaire). On sait également que BO est perpendiculaire au plan α par hypothèse.

2) À montrer : que l'angle dièdre entre α et le plan AOB est droit. Pour mesurer cet angle dièdre (Définition 2), on a besoin de deux droites, une incluse dans α et l'autre incluse dans le plan AOB . Ces 2 droites doivent s'intersecter en un point de la droite commune aux 2 plans, qui est bien sûr AO , et elles doivent chacune faire un angle droit avec AO . Leur point d'intersection, c'est le point O et c'est le sommet de l'angle où l'on mesure l'angle dièdre. Il s'agit donc de déterminer quelles sont ces deux droites et de justifier qu'elles forment un angle droit de sommet O pour conclure que l'angle dièdre est droit.

3) Ce que l'on déduit.

La première de ces deux droites est OB , qui est bien incluse dans le plan AOB . Elle est perpendiculaire à la droite AO par la définition 1 (droite perpendiculaire à un plan), sachant par hypothèse que OB est perpendiculaire à α et que AO est incluse dans α . La deuxième de ces deux droites est CO , incluse dans α et perpendiculaire à AO par construction. J'en déduis que l'angle COB est l'angle dièdre entre α et le plan ABO (bien revoir la Définition 2, qui dit où et comment se mesure l'angle dièdre entre 2 plans). Mais alors par la Définition 1, sachant par hypothèse que OB est perpendiculaire à α et que CO est incluse dans α , je conclus que $\angle COB$ est droit. Or c'est l'angle dièdre entre les deux plans et ce sont donc bien deux plans perpendiculaires.

Figure 4.46 Représentation 2D de l'angle dièdre droit COB



4.5.3 Ajustements du design apportés au Problème 3

Tout comme les analyses rétrospectives réalisées pour les problèmes 1 et 2, je vais me questionner et réfléchir sur ce qui pourrait être ajouté, c'est-à-dire comment la présentation du problème 3 pourrait être ajustée afin que les élèves soient mieux aiguillés vers une justification mathématiquement plus solide de la solution.

À la séance 6, qui concerne la résolution du Problème 3 (cube tronqué), je vais laisser les élèves à eux-mêmes dans leur résolution en dyades (≈ 30 min.). Puis, lorsqu'il restera une quinzaine de minutes à la séance, j'introduirai de nouveaux éléments de connaissances géométriques, soit les théorèmes 4 et 5, qui concernent le plan médiateur en géométrie de l'espace. Voici comment.

[Je vous présente le concept de *plan médiateur*, dont vous aurez besoin dans la phase 2 du Problème 3 où vous devrez justifier mathématiquement que votre candidat pour la hauteur de la petite pyramide $AA_1A_2A_3$ est bien perpendiculaire à la base triangulaire $\Delta A_1A_2A_3$.

Définition 4 : Le *plan médiateur* Π d'un segment $[AB]$ est l'unique plan perpendiculaire à AB qui passe par le milieu M de $[AB]$.

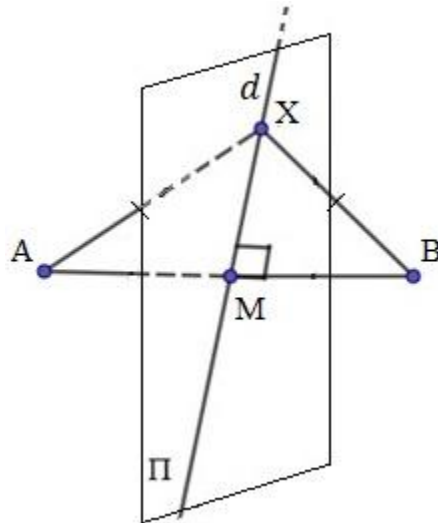
Le plan médiateur d'un segment est l'analogue tridimensionnel de la médiatrice d'un segment dans le plan. De même qu'on montre, en géométrie plane, que la médiatrice d'un segment est le lieu des points du plan qui sont à égales distances des extrémités du segment, on peut montrer que le plan médiateur d'un segment est le lieu des points de l'espace qui sont à égales distances des extrémités de ce segment. C'est l'objet des deux prochains théorèmes, que nous ne démontrerons pas. Ces deux théorèmes établissent deux implications qui sont réciproques l'une de l'autre.

Théorème 4 : si Π est le plan médiateur de $[AB]$ et P est un point quelconque de Π , alors P est à égales distances de A et de B . Autrement dit, tous les points du plan médiateur d'un segment sont à égales distances des extrémités de ce segment.

Théorème 5 : si un point Q est à égales distances des extrémités A et B du segment $[AB]$, alors Q appartient au plan médiateur de $[AB]$ (c'est-à-dire au plan qui est perpendiculaire à AB et coupe $[AB]$ en son milieu). Autrement dit, tous les points (de l'espace) à égales distances des extrémités d'un segment sont situés sur le plan médiateur de celui-ci.

Ce sont ces deux théorèmes (deux implications réciproques ou si l'on préfère, deux inclusions ensemblistes réciproques) qui permettent de conclure que le plan médiateur d'un segment est exactement le lieu des points équidistants des extrémités du segment.

Figure 4.47 Plan médiateur Π de $[AB]$



À la figure 4.46, le plan médiateur Π du segment $[AB]$ est le plan perpendiculaire à la droite AB passant par le milieu M de $[AB]$.

Π est le plan médiateur de $[AB]$:

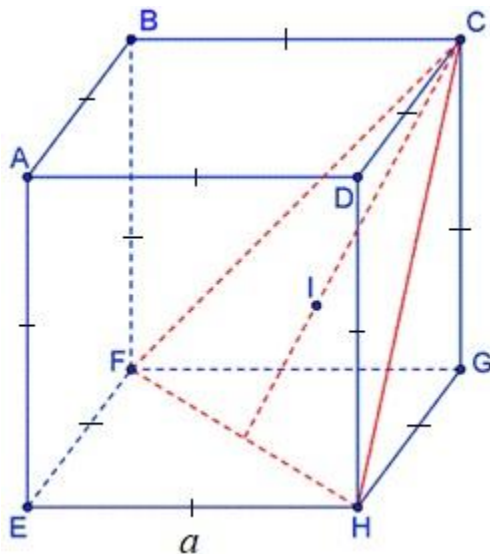
- Pour tout point X du plan Π , on aura $XA = XB$.
- Si $d \subset \Pi$ et d passe par M , alors $d \perp [AB]$ (par la Définition 1, celle de « droite perpendiculaire à un plan »).

Voici un exercice d'application traitant du plan médiateur. Je vous le donne en devoir à résoudre la maison.

Exercice d'application (relatif au Problème 3)

On considère un cube $ABCDEFGH$ dont l'arête mesure a . On note I le centre de gravité du triangle CFH .

Figure 4.48 Cube $ABCDEFGH$ (exercice d'application – problème 3)



a) Montrez que le triangle ΔCFH est équilatéral.

b) Prouvez que les points A , G et I appartiennent au plan médiateur de CH et au plan médiateur de CF .

c) Du fait que l'intersection de 2 plans de l'espace, non parallèles et non confondus, est une droite, déduisez que les trois points A , G et I sont alignés (dans l'espace).

À l'aide des Théorèmes 4 et 5, justifiez mathématiquement chacun des éléments de vos réponses. Vous devez pour cela conduire une véritable démarche de preuve en précisant les 3 éléments : 1) Ce que l'on sait ; 2) À montrer ; 3) Ce que l'on déduit.

Indice pour ce que l'on sait : le centre de gravité d'un triangle est le point de rencontre de ses 3 médianes. Le point de rencontre des 3 médiatrices d'un triangle est le centre du cercle circonscrit au triangle, et est donc à égales distances des 3 sommets du triangle. Dans un triangle équilatéral, les médiatrices coïncident avec les droites qui portent les médianes.

Au retour en classe à la séance 7, je corrigerai l'exercice d'application axé sur les Théorèmes 4 et 5 pendant 10 minutes, en prenant soin de montrer aux élèves comment s'organisent les justifications mathématiques.

[Je vous présente au tableau la correction de l'exercice d'application :

a) Montrer que le triangle $\triangle CFH$ est équilatéral.

1) Ce que l'on sait.

Un cube est composé de 6 faces carrées isométriques.

2) À montrer : que le triangle $\triangle CFH$ est équilatéral.

3) Ce que l'on déduit.

Les côtés de $\triangle CFH$ sont des diagonales des faces du cube et comme diagonales de carrés isométriques, elles sont elles-mêmes isométriques. Le triangle $\triangle CFH$ est donc bien équilatéral.

b) Prouver que les points A , G et I appartiennent au plan médiateur de CH et au plan médiateur de CF .

1) Ce que l'on sait.

Le cube $ABCDEFGH$ est composé de 6 faces qui sont des carrés dont les côtés sont isométriques. Le centre de gravité I est le point de rencontre des 3 médianes de $\triangle CFH$ équilatéral. C'est donc aussi le point de rencontre des 3 médiatrices.

2) À montrer : que les points A , G et I appartiennent au plan médiateur de CH et au plan médiateur de CF .

3) Ce que l'on déduit.

Il s'agit d'appliquer le Théorème 5. $[AC]$ est une diagonale du carré $ADCB$. $[AH]$ est une diagonale du carré $ADHE$, carré isométrique à $ADCB$, les deux diagonales sont donc elles aussi isométriques et on a $AH = AC$.

Mais alors par le Théorème 5, le point A appartient au plan médiateur de $[CH]$ puisque A est à égales distances des extrémités C et H .

$[GC]$ et $[GH]$ sont deux côtés du carré $DCGH$. On a donc $GC = GH$.

Mais alors par le Théorème 5, le point G appartient au plan médiateur de $[CH]$ puisqu'il est équidistant des extrémités C et H .

Enfin, le point I étant le centre de gravité de $\triangle CFH$ qui est équilatéral, il est le point d'intersection de ses 3 médianes et donc, des 3 médiatrices des côtés. En particulier, I appartient à la médiatrice

de $[CH]$ dans le plan CFH . On a donc $IC = IH$ et le point I appartient au plan médiateur de $[CH]$, toujours par le Théorème 5.

En raisonnant de façon similaire avec $[CF]$, on montre que les points A , G et I appartiennent au plan médiateur de ce segment. Voici le raisonnement :

$[AC]$ est une diagonale du carré $ADCB$. $[AF]$ est une diagonale du carré $ABFE$. Comme diagonales de carrés isométriques, ces diagonales sont isométriques et $AC = AF$, ce qui par le Théorème 5 implique que A appartient au plan médiateur de $[CF]$.

$[GC]$ et $[GF]$ sont deux côtés du carré $BCGF$. On a donc $GC = GF$ et toujours par le Théorème 5, le point G appartient au plan médiateur de $[CF]$.

Enfin, le point I étant le centre de gravité de $\triangle CFH$ qui est équilatéral, I appartient à la médiatrice de $[CF]$. On a donc $IC = IF$ et le point I appartient au plan médiateur de $[CF]$ par le Théorème 5.

Ainsi, les points A , G et I appartiennent aux plans médiateurs respectifs des segments $[CH]$ et $[CF]$.

c) Du fait que l'intersection de 2 plans de l'espace, non parallèles et non confondus, est une droite, déduisez que les trois points A , G et I sont alignés (dans l'espace).

1) Ce que l'on sait

Pour que les points A , G et I soient alignés, ils doivent appartenir à une même droite. Nous venons de montrer qu'ils appartiennent tous trois aux plans médiateurs de $[CH]$ et $[CF]$.

2) À montrer : que les points A , G et I appartiennent à la même droite.

La propriété géométrique que l'intersection de deux plans non parallèles et non confondus dans l'espace est une droite implique que si A , G et I appartiennent à chacun des deux plans, ils doivent être alignés le long de la droite d'intersection de ces plans.

3) Ce que l'on déduit

Par ce qui a été montré précédemment, les points A , G , et I appartiennent aux deux plans médiateurs, celui de $[CH]$ et celui de $[CF]$. Ces deux plans ne sont pas parallèles puisqu'ils ont les points A , G , et I en commun. Ils ne sont pas confondus non plus. En effet, considérons par exemple le point milieu de $[CH]$, point que nous appelons M . Par la définition de « plan médiateur », M appartient au plan médiateur de $[CH]$. Or M , qui est en fait au centre de la face carrée $CDHG$, n'est clairement pas à la même distance des points C et F dans le cube (Exercice : calculez ces deux distances...). Par le Théorème 4 (par la contraposée de l'implication que donne le Théorème 4, en fait), M ne peut donc appartenir au plan médiateur de $[CF]$, ce qui montre que les deux plans ne peuvent être confondus. Les points A , G , et I se trouvant nécessairement sur la droite d'intersection des deux plans non parallèles et non confondus, ils sont par conséquent alignés sur cette droite d'intersection.

Mon analyse des données est maintenant complétée. Dans le prochain chapitre, il sera question d'interpréter ces analyses et plus spécifiquement, de discuter dans quelle mesure les données analysées peuvent être reliées au cadre théorique et à la problématique, de façon à faire progresser les connaissances en géométrie de l'espace.

CHAPITRE 5

DISCUSSION ET RÉSULTATS

Dans ce chapitre, je vais discuter des analyses dans leur ensemble et présenter les résultats de recherche. Je vais au préalable réexaminer avec soin les limites des cadres conceptuels et méthodologique de la recherche.

À la lumière des analyses des données, j'ai obtenu des éléments de réponses à mes questions de recherche. Je vais revenir sur les productions suscitées pour chacun des trois problèmes et sur leur analyse, afin de discuter des données observées et des conclusions que j'en ai tiré. Il est possible que je sois amené à rechercher de nouvelles références dans la littérature scientifique permettant de soutenir ou d'expliquer mes résultats.

5.1 Validité des conclusions

5.1.1 Réponses aux questions de recherche

5.1.1.1 Discussion sur le problème 1 : le marchand de sable

1) Phase 1 du problème 1

J'ai obtenu des éléments de réponse à ma 1^{re} question de recherche. *1) Quels rôles peuvent jouer les habiletés spatiales et les connaissances spatiales, notamment via les processus d'encodage et de décodage des représentations 2D ? Comment les décrire et les analyser à partir des démarches de résolution des problèmes proposés ?*

Premièrement, les élèves ont mobilisé des connaissances spatiales telles que : 1) savoir représenter en perspective cavalière la pyramide-tétraèdre *FADE*; 2) repérer les triangles isocèles parmi les faces de la pyramide-tétraèdre *FADE* et les découper en triangles rectangles isométriques. Ces connaissances spatiales ont agi et se sont combinées à la visualisation directe à même le dessin en perspective cavalière pour repérer les triangles rectangles et leurs angles droits. Les données expérimentales dans le cadre de la résolution du problème 1 permettent de constater que 9 dyades parmi les 16 ont élaboré correctement une représentation en perspective cavalière de la pyramide-tétraèdre *FADE* en indiquant sur celle-ci les sommets, les arêtes (leurs mesures) et les angles droits.

Dans la phase 1, les 16 dyades ont réalisé une transformation spatiale (habileté spatiale) en reconfigurant une enveloppe ($ABCD$) en une pyramide à base triangulaire ($FADE$). Treize dyades parmi les 16 ont réussi à calculer correctement les mesures manquantes. J'en conclus qu'elles ont mobilisé des connaissances géométriques (ex. : appliquer le théorème de Pythagore pour déterminer $[AF]$, $[DF]$, $[AE]$, $[DE]$, puis $[FM]$) pour calculer des mesures manquantes et constater que le tétraèdre est constitué de 4 triangles isocèles isométriques. Puisque l'analyse des données expérimentales a montré que ces 2 étapes ont été réussies par 13 dyades, je n'y apporterai pas de modifications majeures dans la présentation et la gestion de la phase 1.

2) Phase 2 du problème 1

L'analyse des solutions des dyades portant sur la phase 2 de résolution a permis d'obtenir des réponses à la 2^e question de recherche : *En quoi les problèmes proposés ont-ils été propices à faire travailler de manière interdépendante les habiletés spatiales, les connaissances spatiales, les connaissances géométriques et leur coordination ? Sinon, peut-on retravailler ces problèmes, les revoir relativement à certains aspects des habiletés spatiales, des connaissances spatiales et géométriques qu'ils mettent en jeu ?*

L'élément crucial du problème 1 pour les 16 dyades a été de repérer une paire hauteur-base appropriée dans la pyramide $FADE$ afin de calculer son volume. Il fallait repérer que la hauteur $[FM]$ de la face triangulaire $\triangle DAF$ est perpendiculaire au plan de la base ADE . Les analyses des productions écrites des dyades et les échanges recueillis selon la méthode *Think aloud* (van Someren *et al.*, 1994) ont montré que ce repérage n'allait pas de soi. En effet, bien que 4 dyades aient réalisé ce repérage (dyades #1, #3, #4, #10), une seule équipe (#1) a réussi à justifier que l'angle EMF est droit en invoquant les bons théorèmes (1 et 2). Or, la seule visualisation ne constitue pas une justification mathématiquement suffisante de la perpendicularité en cause. Celle-ci repose fortement sur la justification que l'angle EMF est droit. On peut avancer l'hypothèse que bien visualiser la perpendicularité (entre $[FM]$ et la base triangulaire $\triangle ADE$) a pu entraver les raisonnements déductifs possibles. Pour appuyer mon argumentation, je rappelle les copies (productions écrites) des dyades #2, #6, #8, #9 et #15 illustrant le fait que les équipes qui ont bien repéré le bon angle ($\angle EMF$) et le bon raisonnement mathématique, ont écrit qu'ils n'arrivaient pas

à démontrer que l'angle est droit. Quand la propriété à démontrer est visuellement trop prégnante, il arrive que le raisonnement déductif des élèves s'en trouve entravé, comme l'argumente Tanguay (2005, §3.1).

De plus, une seule équipe (dyade #1) a su donner une justification complète mathématiquement (théorèmes 1 et 2) concernant la perpendicularité entre une droite et un plan dans l'espace. Cela montre que les élèves de la dyade #1 ont fait l'apprentissage de nouvelles connaissances géométriques (Définition 1, théorèmes 1 et 2). Mais, une majorité d'entre les équipes a très bien vu la perpendicularité entre la droite et le plan car plusieurs équipes ont repéré les deux bons angles droits, $\angle EMA$ (ou $\angle EMD$) et $\angle EMF$, et ont repéré que c'est pour $\angle EMF$ qu'une preuve manque. Plusieurs copies laissent penser que les élèves ont vu ce qu'il fallait établir, comment utiliser les 2 fameux théorèmes pour cela, sans toutefois mener le raisonnement jusqu'au bout.

Pourtant, au chapitre 1, *Problématique*, j'ai relevé une difficulté chez les élèves à identifier les constituants d'un objet 3D (dont le repérage fait partie) et à décoder la représentation 2D d'un objet 3D qu'ils visualisent directement. En conséquence, je dégage que le problème 1 n'a pas été suffisamment efficace pour faire travailler de manière interdépendante les habiletés spatiales, les connaissances spatiales, les connaissances géométriques et leur coordination. Cela nous révèle un premier résultat de recherche.

Premier résultat de recherche : les habiletés spatiales, plus particulièrement la visualisation spatiale (directe et interne), certaines connaissances spatiales (savoir représenter en perspective cavalière des objets 3D) mises en interaction avec des connaissances géométriques (ex. : Définition 1, théorèmes 1 et 2 : droite d perpendiculaire à un plan α) constituent des éléments importants, **gages de réussite** en résolution de problèmes de géométrie de l'espace.

En effet, les analyses des productions écrites (et des échanges en binômes) ont mis en évidence que le *modus operandi* de la visualisation spatiale (directe et interne) agissant en interaction avec des connaissances spatiales et des connaissances géométriques, se révèle un enjeu fondamental de l'apprentissage/enseignement de la géométrie spatiale à l'école secondaire : voir, analyser et traiter géométriquement un objet 3D est complexe et nous soutenons que cela s'apprend par un entraînement (voir Uttal *et al.*, 2013). La visualisation spatiale a alors une fonction heuristique

déterminante pour une démarche géométrique interagissant synergiquement avec le raisonnement mathématique (processus de preuve).

Dans le problème 1, l'analyse des solutions des 16 dyades a révélé une difficulté à imaginer mentalement les positions relatives des droites perpendiculaires passant par le point M dans la pyramide $FADE$; et donc, d'anticiper leur intersection (droite FM avec droite EM et droite FM avec droite AD). Il en est de même de la position relative d'une droite et d'un plan qui sont perpendiculaires (droite FM et plan ADE). Pour développer et rendre tangibles ces images mentales, on peut avancer l'hypothèse que le recours à la maquette de la pyramide-tétraèdre $FADE$ serait efficace si l'élève prend soin d'indiquer les sommets, les hauteurs en traits pointillés ainsi que les angles droits aux bons endroits.

Afin de développer ces images mentales, j'avance que c'est dans la manipulation interactive de la représentation 2D (en perspective cavalière) et de la maquette 3D que les élèves pourront développer des représentations mentales. Pour favoriser cette interaction, il est hautement souhaitable de développer la capacité à repérer (visualisation, connaissances spatiales) et à représenter (connaissances spatiales) en vraie grandeur des sous-figures planes. C'est en sélectionnant des sections de solides que l'on peut analyser plus précisément la nature de certaines relations entre les éléments de la situation (perpendicularité, parallélisme ou égalité des longueurs par exemple). Mes propos corroborent l'étude de Bayart et ses collaborateurs (1998).

C'est là qu'intervient la pertinence de représenter en perspective cavalière cette pyramide-tétraèdre, puisque la maquette n'est pas translucide, on ne voit pas au travers tous les constituants susmentionnés. Par exemple, on voit sur le dessin en perspective que les hauteurs $[FM]$ et $[EM]$ sont les cathètes du triangle rectangle $\triangle FME$. La visualisation de ce triangle rectangle, ainsi que d'autres ($\triangle FMA$, $\triangle FMD$, $\triangle EMA$, $\triangle EMD$), pourrait rendre possible la démonstration (preuve) que l'angle FME est de 90° par l'utilisation de connaissances géométriques nouvelles (Définition 1, théorèmes 1 et 2). J'insiste sur l'importance de savoir représenter correctement en perspective cavalière des sous-figures planes de la pyramide $FADE$, car cela permet de la décomposer pour procéder aux calculs des mesures manquantes, et favorise l'élaboration d'un raisonnement déductif.

En effet, un travail complexe est requis de la part des élèves, puisqu'il nécessite de mettre en œuvre ces connaissances géométriques, c'est-à-dire de combiner de manière déductive des propriétés sur les droites et les plans (perpendicularité entre 2 droites, perpendicularité d'une droite et d'un plan) tout en intégrant dans le raisonnement mathématique la visualisation sur le dessin en perspective. Cette mise en œuvre des connaissances géométriques impliquant les propriétés des droites et des plans semble correspondre à ce que Battista et ses collaborateurs (2019) décrivent comme faisant partie du « raisonnement relationnel-inférentiel basé sur les propriétés », qui consiste à utiliser un langage formel mathématique pour analyser les propriétés des objets 2D/3D (ex. : perpendicularité, parallélisme) en jeu dans la résolution d'un problème en géométrie 2D/3D. En conséquence, cela fait émerger un autre résultat de recherche.

Deuxième résultat de recherche : le concept de « **raisonnement relationnel-inférentiel basé sur les propriétés** » de Battista *et al.* (2019) peut enrichir le cadre théorique, dans lequel j'ai avancé que l'habileté « visualisation spatiale » se développe de manière interdépendante avec les connaissances spatiales et les connaissances géométriques lorsqu'il est question de produire un raisonnement géométrique. Le « raisonnement relationnel-inférentiel » consiste à décomposer un objet (ou un ensemble d'objets) en ses parties constitutives à l'aide de propriétés géométriques, pour préciser les relations entre les parties.

De plus, selon l'analyse des données expérimentales (chapitre 4 – Analyses) et la discussion (chapitre 5 – Discussion et résultats) qui s'en est dégagée, il nous apparaît clair que la visualisation spatiale et le « raisonnement relationnel-inférentiel basé sur les propriétés » de Battista *et al.*, (2019) ont agi synergiquement dans la résolution du problème 1, en sus des connaissances spatiales « savoir représenter en perspective cavalière des objets 3D ». Ceci vient confirmer des éléments de notre cadre théorique (voir chapitre 2), à savoir que le raisonnement spatial s'articule en trois composantes interconnectées : la visualisation spatiale, l'élaboration de représentations 2D et le discours à produire servant à justifier mathématiquement.

En lien avec la 2^e question de recherche, les analyses des solutions des 16 dyades tendent à montrer qu'il faut apporter des ajustements au Problème 1 pour qu'il puisse mieux faire travailler la coordination des habiletés spatiales avec les connaissances spatiales et les connaissances géométriques : sa présentation, ce que l'enseignant qui pilote le problème en classe peut dire et

faire afin que les élèves justifient mieux leur raisonnement mathématique (déductif), notamment en mobilisant la Définition 1 et en invoquant les théorèmes 1 et 2.

Les suggestions que j'apporte au problème 1 sont celles que j'expose au chapitre 4 – Analyses (§4.5.1) : 1) présenter les nouveaux éléments de connaissances géométriques, à savoir la Définition 1, le Théorème 1 et le Théorème 2; 2) ajouter un exercice d'application relatif au Problème 1.

5.1.1.2 Discussion sur le Problème 2 (triangle $\triangle ABC$ situé à l'intérieur du prisme à base rectangulaire)

J'ai obtenu des éléments de réponse à la 1^{re} question de recherche : 1) le rôle de la visualisation directe dans le Problème 2 a été de repérer les triangles rectangles et leur angle droit à même la représentation 2D du prisme à base rectangulaire; 2) les rôles de la visualisation *interne* ont été d'élaborer des images mentales d'autres triangles rectangles en 3D ($\triangle ADC$, $\triangle CHG$, $\triangle BGC$, $\triangle AEB$) dans le prisme à base rectangulaire et probablement, de faire interagir ces images mentales avec l'habileté à représenter en perspective cavalière (connaissances spatiales). Cette visualisation est sophistiquée car les arêtes et le codage des angles droits à dessiner ne seront pas nécessairement représentés de façon à rendre compte des relations d'isométrie ou de similitude, ni en position prototypique. Par exemple, l'angle droit CHG de $\triangle CHG$ ne sera pas représenté de façon à rendre compte des relations d'isométrie ou de similitude à l'angle BGC dans $\triangle BGC$; il en est de même de l'angle droit AEG de $\triangle AEG$.

En ce qui concerne l'encodage/décodage des représentations 2D d'objets 3D, les données expérimentales analysées illustrent que le fait d'ajouter les segments $[CD]$, $[CG]$, $[BE]$ en pointillés favoriserait le repérage des angles droits. Puis, la bonne visualisation de ces angles droits (comment ceux-ci se positionnent dans l'espace) a probablement facilité l'ajout d'un bon codage même si, comme nous en avons discuté antérieurement dans les analyses du Problème 2 (voir chapitre 4), le fait de bien coder l'angle n'est pas nécessaire pour le repérer. Plusieurs équipes ont en effet repéré les angles droits, mais ont éprouvé de la difficulté à adapter le codage (le « petit carré en coin ») aux règles de la perspective cavalière. Nous soutenons néanmoins que la production d'un bon codage est une indication tangible que l'angle et sa position ont été correctement visualisés, avec précision.

En conséquence, il semble que ces élèves ont eu besoin de la **visualisation interne** pour imaginer ces triangles rectangles et qu'ils l'ont réinvestie en la coordonnant avec des connaissances spatiales spécifiques (savoir représenter correctement en perspective cavalière les dits triangles rectangles et le codage de leur angle droit). J'en conclus qu'il existe une **corrélation forte** entre la **visualisation interne** et **savoir représenter en perspective cavalière** un objet 3D, mais que par ailleurs un certain « entraînement », un apprentissage des règles et de leurs applications constitue un apport important pour une mise en œuvre adéquate de l'habileté à correctement représenter, là où la seule visualisation ne suffit pas (toujours).

J'ai aussi obtenu des éléments de réponses à la 2^e question de recherche : je dégage que le Problème 2 a été **partiellement efficace** pour faire travailler de manière interdépendante les habiletés spatiales, les connaissances spatiales, les connaissances géométriques et leur coordination. Voyons pourquoi.

Selon l'analyse des productions écrites relatives au Problème 2, je peux conclure qu'il y a une **corrélation moyenne** entre la capacité à **conduire un raisonnement mathématique** et l'habileté à **visualiser mentalement** les triangles rectangles sur les faces rectangulaires et à l'intérieur du prisme droit. La visualisation *interne* constitue un élément crucial pour élaborer des représentations mentales des triangles rectangles dont l'élève a besoin pour calculer des mesures manquantes (apothèmes, hypoténuse). Les productions écrites des élèves montrent qu'ils ont fait appel à ces représentations mentales lors de l'encodage dans leurs représentations en perspective cavalière ($\triangle ADC$, $\triangle CHG$, $\triangle BGC$ et $\triangle AEB$). J'en conclus l'**interdépendance** entre l'habileté **visualisation spatiale** et une élaboration satisfaisante du **raisonnement mathématique** (l'application correcte, au bon triangle, du théorème de Pythagore).

En lien avec ma 2^e question de recherche, les analyses des solutions des 16 dyades tendent à montrer qu'il faut retravailler le problème 2 quant à sa présentation, à ce que l'enseignant qui pilote le problème en classe peut dire et faire pour que les élèves justifient mieux leur raisonnement mathématique, notamment en invoquant le Théorème 3.

Les suggestions que je vais apporter au Problème 2 sont celles que je présente au chapitre 4 – Analyses (§4.5.2) : 1) présenter les nouveaux éléments de connaissances géométriques, à savoir la Définition 2 (angle dièdre), la Définition 3 (plans perpendiculaires) ainsi que le Théorème 3; 2) ajouter un exercice d'application relatif au Problème 2.

Les réponses aux 2 questions de recherche discutées précédemment font émerger un autre résultat concernant les problèmes 1 et 2 :

Troisième résultat de recherche : dans la résolution d'un problème de géométrie de l'espace où le raisonnement déductif (processus de preuve) est impliqué (la 2^e phase de chacun des problèmes), il appert que la **visualisation spatiale** (surtout *interne*) **agit synergiquement** avec une **connaissance géométrique** que je nomme « **savoir faire le passage du repérage des plans perpendiculaires et des angles entre deux plans, au repérage des droites perpendiculaires et des angles entre deux droites incluses dans ces plans** ». Ainsi, le 1^{er} élément de la THA (problème 2) présenté dans la Méthodologie (voir §3.3.4.2.2) s'est confirmée dans le raisonnement des équipes : il y a eu interaction de la visualisation interne avec les connaissances spatiales liées à la déconstruction dimensionnelle. Les équipes qui ont donné des solutions correctes au Problème 2 ont mobilisé l'habileté de visualisation spatiale et certaines connaissances spatiales, dont le repérage et le découpage qui est tributaire de la déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005). Celle-ci s'est produite en sélectionnant des parties du prisme droit à base rectangulaire — ses bases et ses faces latérales —, en les décomposant en segments formant des triangles rectangles, en utilisant des points milieux pour localiser des longueurs (cathètes et hypoténuses), etc.

À cet égard, le Théorème 3, qui a été présenté dans l'analyse rétrospective de la séquence d'enseignement (voir chapitre 4 – Analyses), s'applique dans le Problème 2 parce que dans chacun des triangles ($\triangle ADC$, $\triangle CHG$, $\triangle BGC$, $\triangle AEB$, $\triangle BFE$) dont on veut montrer qu'ils sont rectangles (en appliquant le Théorème 3), il y a toujours un côté de l'angle droit qui coïncide avec (ou qui est inclus dans) une arête du prisme droit; ce qui signifie que ce côté sera, de façon relativement évidente, perpendiculaire à la droite d'intersection entre 2 faces du prisme, celle-ci portant en fait une autre arête du prisme. Cela illustre que la difficulté majeure pour la 2^e phase du Problème 2 pourrait résider dans le passage des plans perpendiculaires aux droites perpendiculaires incluses dans ces plans.

5.1.1.3 Discussion sur le problème 3 (le cube tronqué)

1) Phase 1 du problème 3

J'ai obtenu des éléments de réponse à la 1^{re} question de recherche. Selon l'analyse des productions écrites et des échanges des binômes recueillis par la méthode *Think aloud* relativement à la *question b*, la difficulté à visualiser mentalement les coupes dans le cube s'est avérée un point névralgique pour imaginer comment s'organisent les arêtes, les sommets et les faces entre eux. J'en conclus que pour créer mentalement cette structuration spatiale (relations d'incidence et d'adjacence), les images mentales doivent pouvoir s'appuyer sur une représentation en perspective, comme l'ont fait les dyades #6 et #14. Mon argumentation est appuyée par l'étude de Bayart *et al.* (1998).

J'ai montré, au chapitre 4 – Analyses, qu'un élève ne pourra travailler sur le dessin d'un objet 3D que s'il a élaboré de « bonnes » images mentales de cet objet; mais également, les connaissances spatiales appropriées des règles de représentation lui permettant de le dessiner adéquatement. Mon argumentation corrobore les études de Furtuna (2008), Colmez et Parzysz (1993), Parzysz (1989; 1991), ainsi que Bonafé (1992).

De plus, il émerge des analyses de la phase 1 de résolution du Problème 3 que l'habileté de visualisation *interne* est plus sophistiquée que l'habileté de visualisation *externe* et par conséquent, plus difficile à mettre en œuvre. Cela pourrait être lié à la bonne maîtrise de certaines connaissances géométriques liées aux relations d'incidence, d'adjacence, d'alignement et de coplanarité dans l'espace. Les analyses des solutions des dyades du problème 3 (question b) ont montré que les élèves (14 dyades parmi les 16) ont éprouvé une difficulté majeure à se créer des images mentales des faces, des arêtes, des sommets du nouveau solide (cube tronqué) et de leur agencement à la suite de la troncature. En conséquence, la **visualisation interne** s'est révélée complexe à mobiliser pour ces élèves.

Plus spécifiquement, en ce qui concerne la **visualisation interne du cube tronqué**, les équipes ont dû mobiliser leur capacité à créer une série d'images mentales lors de la troncature, d'analyser ces images, de les combiner et de les structurer dans l'espace. D'autre part, cette même structuration spatiale a permis d'encoder des informations-clés (forme et nombre de faces (14) dont 6 octogones non réguliers et 8 triangles équilatéraux, nombre d'arêtes (36) et de sommets (24)) en vue de

produire une représentation en perspective cavalière de l'une des 8 « petites » pyramides à base triangulaire issues de la troncature du cube. Enfin, je rappelle que les dyades #5, #6 et #14 qui ont élaboré des représentations en perspective cavalière adéquates de l'une des 8 petites pyramides ont aussi réussi à calculer le volume du cube tronqué. En conséquence, notre argumentation suggère que l'amélioration des habiletés spatiales, spécifiquement la visualisation *interne*, pourrait entraîner une amélioration du processus de calcul de volume chez les élèves. Nos propos suggèrent alors un autre résultat de recherche concernant la visualisation *interne*.

Quatrième résultat de recherche : le rôle de la **déconstruction dimensionnelle** (Duval, 2005) s'est révélé important pour le Problème 3, c'est-à-dire savoir utiliser la visualisation *externe* à partir du dessin du cube fourni, puis recourir à la visualisation *interne* et amorcer une déconstruction dimensionnelle du nouveau solide, le cube tronqué. Dans un premier temps, les élèves ont perçu la figure 3D (cube tronqué) plutôt que les figures 2D (triangles équilatéraux et octogones). Puis, la visualisation spatiale est entrée en jeu plus spécifiquement en s'attachant aux parties de la figure 3D, dont les faces (6 octogones non réguliers et 8 triangles équilatéraux), les arêtes et les sommets. Aussi, la structuration et l'organisation des faces du cube tronqué se sont réalisées mentalement par les élèves de manière concomitante avec la visualisation des squelettes 2D, 1D et 0D de la figure 3D, c'est-à-dire l'organisation des arêtes entre elles et des sommets impliqués, avec la compréhension des relations d'incidence élaborée par les équipes au moment de répondre aux questions posées. En conséquence, la déconstruction dimensionnelle des formes (Duval, 2005; Mithalal, 2010; 2014) vient renforcer et bonifier notre cadre théorique.

Pour la *question c* du Problème 3, il s'agissait de dessiner en perspective cavalière le cube tronqué. Les résultats indiquent que 10 dyades parmi 16 ont produit une représentation en perspective cavalière adéquate. Les copies d'élèves (#1, #3, #4, #8, #10, #11) exhibant une représentation en perspective inadéquate du cube tronqué, exposent une non-maîtrise des règles de la perspective cavalière, combinée à une difficulté à procéder au bon encodage/décodage des triangles équilatéraux à représenter.

L'analyse de ces copies met en lumière que la difficulté centrale provient d'une **coordination des images mentales** issues de la visualisation *externe* et de la maîtrise des règles de la perspective cavalière, plus spécifiquement celles ayant trait au parallélisme des arêtes horizontales, des arêtes

verticales et des fuyantes. En conséquence, la visualisation spatiale agit en **interdépendance** avec des connaissances spatiales spécifiques (savoir représenter en perspective cavalière un objet 3D). Or, dans la *Problématique* – Chapitre 1, j’ai fait l’hypothèse que l’habileté à comprendre et savoir élaborer des représentations 2D des solides (objets 3D) en perspective constitue un atout majeur pour l’élève lorsqu’il aura à calculer le volume d’un solide dans un problème à résoudre. Les données expérimentales de ma recherche montrent que les élèves ayant produit des représentations en perspective cavalière adéquates ont tous réussi par la suite à calculer le volume des 8 « petites pyramides » à base triangulaire issues de la troncature du cube, ainsi que celui du cube tronqué. Cela nous conduit **au** prochain résultat.

Cinquième résultat de recherche : lorsque la visualisation spatiale (plus particulièrement *interne*) agit en interdépendance avec des connaissances spatiales (savoir représenter en perspective cavalières des objets 3D, savoir repérer des informations spatiales) dans la résolution d’un problème de géométrie de l’espace, cela implique qu’elle est étroitement liée à la capacité de **structurer l’espace** et de mener à bien le **processus d’encodage/décodage d’éléments spatiaux clés** qui seront dessinés dans la représentation 2D.

En conséquence, je dégage une **relation cruciale entre la visualisation d’un objet 3D et sa représentation en perspective cavalière** : une prise de conscience des différences géométriques entre l’objet 3D et sa représentation est indispensable, un élève ne pourra travailler efficacement sur le dessin d’un objet que s’il a une bonne image mentale de cet objet et aussi, une connaissance suffisante des règles de représentation lui permettant de le dessiner convenablement et de bien distinguer ce qui relève de la représentation de ce qui relève de l’objet lui-même. Mon argumentation corrobore les études de Parzysz (1988; 1989; 1991), Colmez et Parzysz (1993) et Bonafé et Sauter (1998), traitant de l’enseignement de la perspective cavalière.

De plus, je dégage que l’habileté spatiale **visualiser mentalement** un objet 3D non présent physiquement (tel le cube tronqué du Problème 3) s’exerce de manière **interdépendante avec la maîtrise de certaines connaissances géométriques** comme les relations d’incidence, d’adjacence, d’alignement et de coplanarité dans l’espace. Ainsi, le **rôle de la visualisation interne** consiste non seulement à créer, à combiner et à analyser des images mentales du cube tronqué — par

exemple imaginer que les 6 faces octogonales non régulières sont disposées selon tels axes de rotation, et sont adjacentes à d'autres faces triangulaires —, mais aussi à analyser les propriétés et imaginer les mouvements possibles selon différents points de vue (de face, de droite, de dessus, de gauche, etc.) dans l'objectif d'élaborer une représentation en perspective cavalière du cube tronqué.

2) Phase 2 du Problème 3

J'ai obtenu des éléments de réponse à la 2^e question de recherche : je dégage que le Problème 3 n'a pas été suffisamment efficace pour faire travailler de manière interdépendante les habiletés spatiales, les connaissances spatiales, les connaissances géométriques et leur coordination. Voyons pourquoi.

1) D'abord, le fait que seules 2 dyades (#6 et #14) parmi les 16 ont produit un raisonnement mathématique adéquat montrent qu'une majorité des élèves n'a pas su invoquer les bons théorèmes (Théorème 4 et Théorème 5); plus spécifiquement, démontrer que la hauteur $[AX]$ de la pyramide $AA_1A_2A_3$ est perpendiculaire au plan $A_1A_2A_3$, qui porte la base de la pyramide.

2) L'analyse des données expérimentales relatives au Problème 3 a montré que les 2 dyades (#6 et #14) qui ont réussi à produire un raisonnement mathématique adéquat ont su également représenter correctement en perspective cavalière non seulement le cube tronqué mais aussi, une des 8 « petites pyramides » à base triangulaire ($AA_1A_2A_3$). Cela implique que ces 2 équipes ont élaboré une bonne visualisation mentale, et ont su la coordonner avec leurs justifications mathématiques (théorèmes 4 et 5). Cela nous amène à dégager un autre résultat.

Sixième résultat de recherche : les habiletés spatiales (visualisation et transformations spatiales) remplissent un **rôle heuristique** important lorsqu'elles fonctionnent en **interaction** avec le **discours déductif** pour élaborer une démonstration. Elles aideraient à déterminer des processus de résolution, à énoncer des conjectures et à trouver des propriétés géométriques ou théorèmes à mettre en œuvre pour la démonstration.

La grande majorité des équipes ne savaient pas comment utiliser les théorèmes relatifs à la perpendicularité dans l'espace (théorèmes 4 et 5) parce qu'elles ont éprouvé de la **difficulté à visualiser les éléments dont elles avaient besoin pour justifier mathématiquement**. Plus spécifiquement, la plupart des équipes ont repéré la bonne hauteur $[AX]$, les médianes des triangles, mais cela ne signifie pas qu'elles ont su comment en faire les prémisses d'une possible application des Théorèmes 4 et 5 en cause. Cela implique l'importance des rôles de la visualisation spatiale liée au discours déductif à produire. Un premier rôle est celui que j'appellerai le « **mode d'appréhension opératoire** », à mobiliser pour mener à bien un raisonnement géométrique, et selon lequel la visualisation spatiale « agit » comme un véritable travail de recherche sur la représentation 2D pour trouver les propriétés à mettre en œuvre dans la résolution du problème posé. Par exemple, pour démontrer que $[AX]$ est la hauteur de la « petite » pyramide à base triangulaire $AA_1A_2A_3$, il est pertinent de repérer à même la représentation de cette pyramide le triangle rectangle ΔAXM_1 , les médianes $[A_1M_3]$ et $[A_3M_2]$ qui sont incluses dans le plan $A_1A_2A_3$, afin de faire interagir ces éléments avec des connaissances géométriques comme le Théorème 2.

Un 2^e rôle possible de la visualisation spatiale : les analyses de la phase 2 ont permis de dégager que pour les dyades ayant réussi à calculer le volume des « petites pyramides » et à produire des justifications mathématiques adéquates, la visualisation spatiale (directe et interne) a rempli un **rôle heuristique** important lorsqu'elle **fonctionne en interaction avec le discours déductif** dans l'élaboration d'une démonstration. En effet, la visualisation a aidé à déterminer des processus de résolution (démontrer que $[AX]$ est la hauteur de la pyramide $AA_1A_2A_3$), et à trouver des propriétés ou théorèmes qui peuvent intervenir dans la démonstration.

Je dégage que les suggestions que j'ai apportées dans la nouvelle version du problème 3 (voir §4.5.3) — telles que : 1) présenter les nouveaux éléments de connaissances géométriques (la Définition 4 (plan médiateur), le Théorème 4, le Théorème 5) et, 2) l'exercice d'application relatif au Problème 3 — pourront permettre de faire travailler de manière interdépendante les habiletés spatiales, les connaissances spatiales, les connaissances géométriques ainsi que leur coordination.

À partir de tout ce qui précède, j'avance que les éléments de réponses obtenus à la 2^e question de recherche m'amène à proposer un autre résultat.

Septième résultat : les **3 problèmes et la séquence d'enseignement** exposés dans la thèse se constituent subsidiairement en véritables **résultats de recherche**.

Les trois problèmes de la séquence d'enseignement se sont révélés de véritables résultats de recherche puisque l'analyse des solutions des dyades a permis de faire émerger le *modus operandi* du triplet « habiletés spatiales », « connaissances spatiales », « connaissances géométriques » et de leur coordination en résolution de problèmes spatiaux. Plus spécifiquement, la séquence d'enseignement a mis en exergue comment s'articule les interactions dans ce triplet avec l'élaboration des justifications en géométrie de l'espace.

De plus, les phases 1 et 2 de la résolution de ces 3 problèmes ont révélé le rôle clé de la visualisation spatiale chez les équipes qui ont produit des solutions correctes, à savoir qu'elle constitue un **réel apport heuristique à une démarche géométrique** en interaction avec l'élaboration d'une démonstration. Voici comment :

1) Le Problème 1 illustre que l'équipe #1 ayant donné une solution correcte a fait travailler de manière interdépendante la visualisation spatiale (repérer une paire-hauteur de la pyramide *FADÉ*), certaines connaissances spatiales (savoir représenter en perspective cavalière cette pyramide et des sections spécifiques : $\triangle AMF$ et $\triangle DMF$ avec hauteur $[FM]$, $\triangle DME$ et $\triangle AME$ avec hauteur $[EM]$) mises en interaction avec des connaissances géométriques (théorème de Pythagore, Définition 1, théorèmes 1 et 2). Cela montre une illustration possible du *modus operandi* du triplet « habiletés spatiales, connaissances spatiales et connaissances géométriques ».

De plus, à la lumière des discussions élaborées pour chacun des problèmes, il émerge que la capacité à comprendre (décodage) et à être capable de produire des représentations 2D d'objets 3D (perspective cavalière) constitue un atout majeur pour résoudre des problèmes en géométrie tridimensionnelle. Ainsi, une des hypothèses exposées dans la *Problématique* (chapitre 1) s'est confirmée, à savoir que des connaissances spatiales spécifiques — savoir représenter en perspective cavalière un solide (objet 3D) — constituent une condition nettement favorable à un traitement adéquat du volume en résolution de problèmes de géométrie spatiale.

2) L'analyse du Problème 2 (voir chapitre 4) a révélé que l'habileté à visualiser mentalement les triangles rectangles, combinée à la mobilisation de connaissances spatiales telles que savoir représenter en perspective cavalière ces 6 triangles rectangles à même la représentation 2D, a contribué à justifier mathématiquement (en invoquant le Théorème de Pythagore et sa contraposée) que l'angle au sommet A du triangle $\triangle ABC$ n'est pas un angle droit.

3) Dans l'analyse du Problème 3 (voir chapitre 4), les équipes ayant eu de la difficulté à calculer le volume du cube tronqué (question d) ont également éprouvé des difficultés à utiliser l'habileté de visualisation spatiale, ainsi qu'une difficulté à dessiner la « petite » pyramide à base triangulaire $AA_1A_2A_3$ convenablement en perspective cavalière. De plus, nous avons constaté une difficulté chez plusieurs dyades à percevoir les coupes dans le cube tronqué sur la représentation en perspective de celui-ci, combinée à une compréhension déficiente des relations d'incidence, d'adjacence, d'alignement et de coplanarité dans l'espace. Les analyses des solutions des équipes ont montré que ces relations permettent aux élèves de déduire certaines informations spatiales clés qui sont nécessaires, entre autres, pour produire un dessin en perspective de l'une des 8 « petites » pyramides détachées par troncature. Nous faisons l'hypothèse que la maîtrise de ces relations facilite en outre le repérage des segments à considérer pour le calcul du volume de la pyramide $AA_1A_2A_3$. Ces segments à considérer sont la hauteur $[AX]$, ceux de la base triangulaire équilatérale ($\triangle A_1A_2A_3$) et les arêtes formant les 3 triangles rectangles isométriques $\triangle AA_1A_2$, $\triangle AA_1A_3$, $\triangle AA_2A_3$. En conséquence, cela vient confirmer que la capacité à comprendre et à produire des représentations 2D d'objet 3D a joué un rôle déterminant chez ces élèves.

La phase d'analyse rétrospective découlant de la méthodologie *Design Research* (Cobb et Gravemeijer, 2008; Edelson, 2002) a rendu possible des **ajustements** riches aux 3 problèmes, tels que l'insertion de nouvelles connaissances géométriques aux moments opportuns de la séquence :

- la Définition 1, les théorèmes 1 et 2 (droite perpendiculaire à un plan) pour le Problème 1 à la séance 2;
- les définitions 2 (angle dièdre) et 3 (plans perpendiculaires) ainsi que le Théorème 3 pour le Problème 2 à la séance 4;

– la Définition 4 ainsi que les théorèmes 4 (plan médiateur) et 5 (réciproque du Théorème 4) pour le problème 3 à la séance 6;

– l’ajout d’un problème d’application pour chacun des problèmes.

Je précise que du point de vue de l’enseignement de la géométrie 3D, ces ajustements vont permettre, dans les secondes phases des 3 problèmes, d’améliorer les traitements des justifications mathématiques d’un point de vue déductif. Ces ajustements se révèlent importants, car ils permettent de faire « basculer » chacun des 3 problèmes de la thèse d’un problème de G1 (géométrie naturelle) à un problème de G2 (géométrie axiomatique naturelle). Or le passage à la géométrie axiomatique naturelle est particulièrement difficile en géométrie spatiale parce que l’élaboration de la théorie en G2 y est complexe, difficilement accessible aux élèves, comme c’est argumenté dans Furtuna *et al.* (2012).

Je fais une mise au point terminologique sur G1 et G2 en m’appuyant sur les propos de Tanguay et Geeraerts (2012) :

En géométrie naturelle, ou G-I, le mode de validation privilégié est la perception. L’expérience, l’intuition et le raisonnement (principalement inductif) s’y exercent sur des objets qui renvoient en principe directement au réel. La géométrie axiomatique naturelle, ou G-II, est essentiellement celle d’Euclide. Son mode de validation privilégié est le raisonnement déductif, qui s’exerce à partir d’un noyau minimal d’axiomes et de définitions choisis pour constituer une modélisation du réel. (Tanguay et Geeraerts, 2012, p. 8).

En outre, les ajustements à chacun des 3 problèmes permettent d’aller jeter un coup d’œil sur la G2-3D à un coût relativement raisonnable, c’est-à-dire sans avoir à utiliser de très lourds développements à la « Euclide » en géométrie 3D.

Les trois problèmes et les ajustements se constituent donc en « îlots déductifs » (Rouche, 1989; Tanguay et Geeraerts, 2012), et ce sont de tels îlots que nous proposons dans la thèse.

Ainsi, ces ajustements et ajouts rendent la séquence d’enseignement revue plus robuste et convaincante. En conséquence, je conclus que la séquence d’enseignement, les 3 problèmes de

géométrie de l'espace et les ajustements apportés se révèlent intéressants et efficaces pour enseigner la géométrie spatiale au secondaire.

Je vais maintenant examiner des facteurs qui auraient pu avoir une incidence sur les résultats de mon étude.

5.2 Limites de l'étude

Bien que plusieurs résultats intéressants aient pu être dégagés de notre étude, certaines limites ont besoin d'être reconnues.

5.2.1 La collecte de données et la méthodologie

Je présente des éléments à revoir dans la séquence d'enseignement conformément à ce qui a été annoncé dans la méthodologie (voir §3.3.7) pour les 3 problèmes.

Premièrement, l'analyse des données (productions écrites et enregistrements des échanges verbaux selon la méthode *Think aloud*), de la partie « raisonnement/justification mathématique » pour la résolution des 3 problèmes, met en lumière une limite de ce que les élèves ont pu faire du point de vue des raisonnements déductifs, parce que ceux-ci faisaient intervenir des théorèmes et des notions que les élèves n'avaient jamais abordés, ou alors qu'ils ne connaissaient que très partiellement.

Il semble qu'au départ, il a été difficile d'évaluer le niveau et les préalables requis pour être en droit d'attendre l'application d'un raisonnement déductif adéquat. De plus, des études ont montré que les réponses des manuels (et de l'enseignement au secondaire) aux exigences du programme de mathématiques (PFEQ, 2007) en matière de raisonnement ne sont pas efficaces, voire insuffisantes (voir par exemple, Tanguay, 2002).

Toutefois, dans une éventuelle reprise de la séquence d'enseignement (voir antérieurement §4.5.1, §4.5.2 et §4.5.3), on peut penser qu'il serait profitable de mieux outiller les élèves en vue de la résolution (définitions et théorèmes relatifs à la perpendicularité dans l'espace), c'est-à-dire de mieux préparer les élèves afin que ces outils de résolution soient accessibles à une proportion relativement significative d'entre eux.

Bien que le codage des angles droits dans une représentation en perspective cavalière ne soit pas un élément qui fasse en général l'objet d'un enseignement spécifique — sans parler d'une simple mention dans les programmes d'étude —, il est à notre avis important d'expliquer aux élèves comment ce codage doit être ajusté dans de telles représentations, notamment parce que la visualisation s'en trouve alors améliorée.

5.2.2 La posture du praticien-chercheur

Étant l'enseignant et le chercheur ayant piloté la séquence d'enseignement, et me réclamant du courant *Practitional research*, il semble que j'aie eu une difficulté à me détacher de ma posture d'enseignant et à prendre une vraie posture de chercheur. Cette posture a impliqué un dialogue réflexif permanent entre l'action pédagogique et l'analyse scientifique, et qui s'est concrétisée à plusieurs niveaux : conception de la séquence, expérimentation, analyse réflexive, validation (comité de thèse, collègues enseignants de mon école, articles scientifiques consultés).

De plus, les limites du courant *Practitional research* ont fait émerger des éléments importants :

- se questionner en tant que chercheur sur la genericité des résultats proposés;
- la posture du praticien-chercheur est particulièrement délicate au regard de certaines analyses, elle demande d'avoir des précautions interprétatives.

5.2.3 L'analyse des données selon les grilles d'analyse du conflit « vu/su »

L'outil de cueillette de données « productions écrites d'élèves » s'est avéré efficace. Cette manière de procéder a été longue et laborieuse parce qu'elle a nécessité une analyse rigoureuse des données expérimentales, en les confrontant au cadre théorique et en faisant intervenir entre autres le conflit « vu/su » (Parzysz, 1988; 2007). Or, il est arrivé à quelques reprises que les données étaient parlantes sous l'angle de ce cadre d'analyse. Parfois, les analyses ont été dégagées à partir de considérations s'éloignant du cadre théorique, et nécessitant d'aller voir dans la littérature scientifique d'autres concepts permettant d'expliquer les résultats. Par exemple, en ce qui concerne le rôle de la visualisation interne dans le processus d'encodage des représentations 2D des objets 3D (tel que la perspective cavalière du cube tronqué pour le Problème 3), j'ai eu recours à un

concept de Duval (2005), en l'occurrence la déconstruction dimensionnelle des formes. Ainsi, ce concept est venu renforcer mon cadre théorique.

De plus, il appert que les grilles d'analyse (chapitre 4) n'ont pas donné clairement des observables et des guides pour l'interprétation des résultats. En conséquence, cela a pu avoir eu un impact sur les analyses elles-mêmes, et susciter des difficultés à discuter scientifiquement des interprétations proposées de la thèse.

5.2.4 L'impréparation des élèves

À la suite de l'analyse des données, j'ai fait le constat de l'impréparation des élèves, qui auraient pu mieux être outillés; par exemple, s'ils avaient disposé au préalable des théorèmes relatifs à la perpendicularité dans l'espace.

Dans la prochaine partie de la thèse, je vais présenter les conclusions de mon étude, dégager des éléments nouveaux au domaine d'étude, exposer des recommandations et présenter une piste pour une recherche ultérieure.

CONCLUSION

Dans cette section, je vais présenter les conclusions de la recherche en montrant qu'ils sont en cohérence avec les résultats obtenus. Dans un 1^{er} temps, je rappelle le problème de recherche auquel je voulais apporter des éléments de réponse.

En résolution de problèmes, la mise en fonctionnement des habiletés spatiales, des connaissances spatiales et des connaissances géométriques — en particulier du point de vue de leur coordination — que l'élève fait intervenir, autant chez celui qui solutionne convenablement des problèmes spatiaux que chez celui qui éprouve des difficultés, doit être analysée et mieux comprise. Comment peut-on décrire et caractériser cette mise en fonctionnement ? En quoi les problèmes spatiaux soumis aux élèves, les solutions qu'ils élaboreront et les stratégies qu'ils mettront en œuvre pour résoudre, peuvent-ils aider à investiguer et mieux comprendre le rôle joué par les habiletés spatiales, les connaissances spatiales, les connaissances géométriques et leurs interactions ?

À partir de ce problème de recherche, j'ai formulé deux questions de recherche pour lesquels j'ai obtenu des éléments de réponse exposés au chapitre 5 – Discussion et résultats, témoignant de connaissances nouvelles qui pourront contribuer au développement de la didactique des mathématiques comme domaine scientifique.

Les résultats de cette recherche amènent des contributions à l'apprentissage/enseignement de la géométrie de l'espace au secondaire, des implications (ou recommandations) ainsi que deux pistes possibles pour une recherche ultérieure.

6.1 Des contributions (retombées) de cette recherche pour l'apprentissage/enseignement de la géométrie spatiale au secondaire

Les résultats et l'approche méthodologique *Design Research* (Cobb et Gravemeijer, 2008; Edelson, 2002) ont des implications qui nous apparaissent non négligeables pour la recherche en didactique des mathématiques et l'apprentissage/enseignement de la géométrie spatiale au secondaire (et, espérons-le, au-delà).

Une **première contribution** de cette thèse est l'ajout de nouvelles connaissances scientifiques en didactique des mathématiques, à savoir que cette recherche contribue à **mieux décrire et analyser les rôles possibles des habiletés spatiales et des connaissances spatiales ainsi que leurs interactions**, dans un contexte d'apprentissage par résolution de problèmes en géométrie spatiale. Voici en quoi consiste ces rôles :

1) Les rôles des connaissances spatiales : savoir élaborer (processus d'encodage) et lire (processus de décodage) des objets 2D/3D (pyramide-tétraèdre *FADE* du Problème 1; représentations en perspective cavalière des 6 triangles rectangles à même le parallélépipède rectangle du Problème 2; représentations en perspective cavalière du cube tronqué et de la pyramide à base triangulaire $AA_1A_2A_3$ du Problème 3) à travers ou en fonction de propriétés géométriques.

Les analyses des solutions et des échanges en dyades ont montré que celles qui ont réussi à compléter correctement des représentations en perspective cavalière pour les 3 problèmes, les ont utilisées pour déterminer des mesures manquantes et pour calculer l'aire ainsi que le volume de solides (ex. : pyramide à base triangulaire, cube tronqué). Cela montre que « savoir représenter en perspective cavalière des objets 3D » constitue un atout judicieux pour les élèves dans la résolution d'un problème en géométrie 3D car d'une part, il facilite le repérage des éléments de la formule de volume dans la représentation 2D en ayant recours à la visualisation spatiale (directe et interne); et d'autre part, il permet aux élèves de « raisonner » à propos de la formule de volume (pyramide, cube tronqué).

2) Mon étude a montré que les habiletés spatiales (visualisation et transformations) sont essentielles dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle car elles jouent un rôle crucial dans la compréhension et la résolution des problèmes de géométrie de l'espace. Plus particulièrement, la visualisation spatiale remplit un **rôle heuristique** important lorsqu'elle interagit avec le **discours déductif** pour élaborer une démonstration. Elle facilite l'élaboration des processus et des stratégies de résolution, la formulation des conjectures et la mobilisation des connaissances géométriques (ex. : propriétés des figures planes et des solides), incluant les théorèmes à mettre en œuvre pour la démonstration. Ainsi décrite, la visualisation spatiale en géométrie de l'espace est un outil puissant contribuant au raisonnement mathématique (processus de preuve).

Les analyses des solutions des équipes exposées au chapitre 4 de la thèse illustrent l'importance du rôle de la visualisation spatiale (directe et interne) impliquée dans le raisonnement géométrique. Nous dégagons que les habiletés spatiales (visualisation et transformations) méritent un apprentissage spécifiquement dédié, tout autant que le raisonnement géométrique. Cependant, le raisonnement géométrique est constitué à la fois de visualisation et de déduction : une démonstration ne peut se passer, à chacune de ses étapes, de l'apport heuristique de la lecture d'une figure (représentation 2D d'un objet 3D) comme cela a été le cas pour la résolution des 3 problèmes. Or, l'évidence visuelle est inopérante, parfois trompeuse, notamment à cause du conflit entre le « vu » et le « su » (Parzysz, 1988; 2007). Il faut la dépasser et pour cela, savoir lire (processus de décodage) et savoir représenter en 2D (processus d'encodage) une figure. En conséquence, notre hypothèse formulée dans la *Problématique* (chapitre 1) semble se confirmer, c'est-à-dire que « savoir représenter en perspective cavalière » des objets 3D constitue un atout majeur dans la résolution de problèmes spatiaux. D'où l'importance de savoir encoder/décoder des représentations 2D des objets tridimensionnels.

3) Les connaissances géométriques sont intimement liées aux habiletés spatiales, car lorsqu'il est question de prouver mathématiquement, par exemple, la perpendicularité d'une droite avec un plan (ex. : hauteur de la pyramide-tétraèdre *FADE* du Problème 1, hauteur $[AX]$ de l'une des petites pyramides résultant de la troncature du cube au Problème 3) ou la perpendicularité entre 2 plans (Problème 2), alors la visualisation spatiale agit de manière concomitante avec les définitions et théorèmes permettant de rendre opérant le raisonnement déductif à produire (voir Chapitre 5 – Discussion et résultats).

Un des résultats de notre recherche est que les 3 problèmes et la séquence d'enseignement se constituent subsidiairement en véritables résultats de recherche. À la lumière de notre argumentation présentée au chapitre 5 – Discussion et résultats, cela amène une **deuxième contribution** : l'enrichissement de la didactique de la géométrie de l'espace au secondaire. En effet, la séquence d'enseignement, les 3 problèmes ainsi que les ajustements proposés (définitions 1 à 4, théorèmes 1 à 5, exercices relatifs ajoutés à chacun des problèmes de la thèse) peuvent permettre de faire travailler aussi efficacement que possible les habiletés spatiales, les connaissances spatiales, les connaissances géométriques et leur coordination. En effet, nous avons exposé à travers les

analyses des productions écrites et des échanges en binôme selon la méthode *Think aloud* (van Someren *et al.*, 1994), le *modus operandi* de ces habiletés et connaissances où la visualisation spatiale et le raisonnement géométrique doivent travailler synergiquement dans la résolution des problèmes tridimensionnels.

Une **troisième contribution** de la thèse est que nous avons pris part à enrichir la compréhension, chez les élèves du secondaire, du **concept de « perpendicularité dans l'espace »** lié aux notions de « droite » et de « plan » en géométrie 3D. En effet, lorsque le raisonnement déductif est exigé dans un problème de géométrie spatiale, la visualisation spatiale (surtout *interne*) agit synergiquement avec une connaissance géométrique, « savoir faire le passage du repérage des plans perpendiculaires et des angles entre deux plans, au repérage des droites perpendiculaires et des angles entre deux droites incluses dans ces plans », car sur les plans et les droites reposent les étapes de la démonstration mathématique à élaborer. Il nous apparaît alors que le concept de « perpendicularité » (dans l'espace, entre droites, droites et plans, plans et plans ...) est un de ces aspects qui ne doivent pas être négligés, avant de commencer l'enseignement du calcul des aires et des volumes pour les prismes et les pyramides.

À la lumière des résultats de la thèse, nous présentons une nouvelle hypothèse, à savoir que si les élèves du secondaire (2^e cycle) ne sont pas habitués à penser et à raisonner dans l'espace, c'est-à-dire à partir de la position relative des droites et des plans dans l'espace (définitions 1 à 4 et théorèmes 1 à 5), ils vont continuer à donner des solutions aux problèmes de géométrie de l'espace dont les justifications, soit ne reposeront que sur des constats visuels, des « évidences perceptives » (d'ailleurs parfois erronées), soit relèveront de raisonnements dont le référentiel théorique se situera entièrement en géométrie plane (voir par ex. Furtuna, 2008; Furtuna *et al.*, 2012).

Une **quatrième contribution** de mon étude est que l'habileté « visualisation spatiale » se révèle nécessaire dans les processus de repérage d'informations clés (constituants d'un objet 3D), d'encodage et d'élaboration des représentations 2D des objets de l'espace.

La difficulté à visualiser spatialement est liée aux connaissances spatiales « savoir représenter en perspective cavalière » des objets 3D. Nous avons montré qu'elle se produit dans la coordination des images mentales issues de la visualisation *interne* avec la maîtrise des conventions des dessins

en perspective où se met en branle une véritable dialectique entre le « vu » et le « su » de l'objet 3D (voir Parzysz, 1988; 2007). Nous croyons que la prise en compte du rôle ambigu, et pourtant essentiel, du « vu » est ici fondamentale.

6.2 Les implications de cette recherche

6.2.1 Première recommandation

Afin de favoriser la mise en œuvre des habiletés spatiales, des connaissances spatiales et des connaissances géométriques explicitées dans la problématique (chapitre 1) et le cadre théorique (chapitre 2) qui sont liées aux raisonnements justificatifs à produire, l'enseignement de la géométrie spatiale doit utiliser des problèmes variés avec des solides « complexes » (ex. : certains des solides de Platon (octaèdre, icosaèdre, dodécaèdre), ces mêmes solides tronqués, etc.) où les élèves sont dans l'obligation de recourir à ces habiletés et ces connaissances pour poursuivre leur raisonnement.

De plus, il s'avère essentiel de le faire par un entraînement, qui pourrait s'amorcer avec la construction d'une maquette, puis en soumettant une représentation en perspective cavalière d'un tel solide et enfin, un problème exigeant d'élaborer une représentation en perspective cavalière d'un solide plus complexe (résultant par exemple d'une troncature), ce qui impliquera de mobiliser la visualisation *interne* de sous-figures planes (au sens de Bayart *et al.*, 1998). Il serait aussi demandé de calculer le volume afin de procéder au repérage d'informations clés dans la représentation 2D, permettant à l'élève d'étayer son raisonnement spatial. Nous réitérons que les règles de représentation des objets de l'espace doivent faire l'objet d'un enseignement explicite pour aider les élèves à prendre conscience des différences entre l'objet 3D et sa représentation 2D (conflit « vu/su » de Parzysz, 1988; 2007).

Les analyses des solutions des équipes pour les 3 problèmes (chapitre 4) ont révélé que l'habileté de visualisation spatiale a constitué une difficulté importante pour plusieurs équipes, à la fois dans le décodage d'informations clés apparaissant dans une représentation 2D d'un objet 3D et dans l'encodage pour produire une représentation 2D en perspective cavalière.

Ainsi, nous dégageons que le développement des habiletés spatiales doit être favorisé par un enseignement explicite au secondaire, en utilisant une approche progressive en passant par des phases de manipulation de solides physiques, également de construction des solides (maquette), forçant l'emploi de la visualisation externe de l'objet physique, combinée à l'élaboration de représentations dessinées sur papier ou sur un écran d'ordinateur, phases qui seraient suivies de l'élaboration de représentations 2D sans la présence de l'objet, nécessitant ainsi le recours à la visualisation interne.

6.2.2 Deuxième recommandation

Pour valoriser l'importance du raisonnement déductif (processus) au secondaire (2^e cycle), nous soutenons que les enseignants le fassent à travers une séquence d'enseignement s'inspirant de la nôtre où s'articule les habiletés spatiales, les connaissances spatiales et les connaissances géométriques avec le raisonnement déductif à produire. Dans la résolution de problèmes de géométrie spatiale, la visualisation spatiale a alors non seulement un rôle heuristique, mais elle contribue aussi à nourrir le raisonnement mathématique dans l'espace : cette visualisation et ce raisonnement sont interdépendants et s'appuient l'un sur l'autre.

6.3 Pistes pour des recherches ultérieures

En fait, je propose une première piste pour une recherche ultérieure qui constitue une 3^e recommandation :

Réaliser une nouvelle expérimentation en classe avec les nouvelles versions « améliorées » des trois problèmes.

L'expérimentation d'une version améliorée de la séquence d'enseignement, où les phases de présentation des théorèmes et de travail de preuve prendraient une place accrue, permettrait d'enrichir la compréhension, chez les élèves du secondaire, du concept de « perpendicularité dans l'espace » lié aux notions de « droite » et de « plan » en géométrie 3D.

Enfin, je propose une deuxième piste pour une recherche ultérieure qui se révèle une 4^e recommandation :

Étant donné le peu de recherches dans la communauté des chercheurs s'intéressant spécifiquement aux rôles des habiletés spatiales, des connaissances spatiales et des connaissances géométriques et de leurs interactions liées au raisonnement mathématique (processus de preuve), je recommande de mener d'autres études sur ce domaine, par exemple avec l'emploi de logiciels de géométrie dynamique (GeoGebra, Cabri-géomètre 3D, etc.), afin de produire de nouvelles connaissances scientifiques.

À quelques occasions, j'ai utilisé le concept de « déconstruction dimensionnelle » de Duval (2005), qui m'a permis d'argumenter en quoi l'habileté de visualisation *interne* est utile dans le processus d'apprentissage de l'élève en géométrie de l'espace, notamment dans l'élaboration de représentations d'objets 3D en perspective cavalière.

En conséquence, il serait pertinent de mener une recherche ayant mon domaine d'étude pour thème, afin d'investiguer en quoi, plus précisément, la déconstruction dimensionnelle des formes est utile aux élèves dans les justifications mathématiques de leurs raisonnements en résolution de problèmes de géométrie dans l'espace, et de vérifier si l'usage de logiciels de géométrie dynamique (GeoGebra, Cabri 3D, etc.) peut permettre de développer davantage l'habileté de visualisation spatiale chez l'élève du secondaire.

ANNEXE A

Recension des écrits traitant des habiletés spatiales et des connaissances spatiales dans la résolution de problèmes spatiaux

Étude	Objectif	Approche méthodologique	Instrument de collecte de données	Population cible	Forces et limites
Battista, M. T., Frazee, L. M. et Winer, M. L. (2019)	Proposer un cadre théorique du raisonnement spatial en se concentrant sur la façon dont les élèves utilisent à la fois la visualisation spatiale et les propriétés géométriques.	Quantitative (teaching experiment)	Teaching experiment avec la méthode Think aloud	De la 3 ^e année primaire à la 2 ^e année du secondaire	Forces : décrit en détail, pour une variété de sujets géométriques importants, le lien entre la visualisation spatiale et l'analyse spatiale basée sur les propriétés. Limites : n'explique pas comment le processus de raisonnement analytique basé sur les propriétés géométriques sont liées aux tests soumis.
Carroll, J. B. (1993)	Répertorier les capacités cognitives dans le domaine de la perception visuelle (habiletés spatiales).	Quantitative/longitudinale	Une panoplie de tests psychométriques	Méta-analyse menée pendant 10 ans	Forces : examine et résume les résultats de plus de 70 ans d'investigation, par analyse factorielle, de diverses capacités cognitives, dont les habiletés spatiales. Limites : un certain nombre d'habiletés distinctes dans le domaine de la perception visuelle, parfois indépendantes de l'intelligence générale, ont été reconnues, mais la méta-analyse conduit à des résultats contradictoires et des conclusions confuses sur exactement quelles habiletés spatiales existent et comment elles devraient être définies et mesurées.
Colmez, F. et Parzysz, B. (1993)	Étudier la façon dont les élèves gèrent le conflit cognitif « vu/su » (ainsi que l'évolution de cette gestion) dans la représentation d'un solide géométrique au	Qualitative	Productions écrites	Classes (six à chaque niveau), soit du CE2 à la Seconde (âges allant de 8 à 17 ans) portent sur	Forces : la gestion du conflit cognitif « vu/su » revêt des formes diverses durant la scolarité obligatoire (8 à 17 ans) en France, selon les procédés graphiques que l'élève utilise pour conserver sur son dessin les propriétés de l'objet qui lui semblent important, tout en

	moyen d'une représentation 2D d'une pyramide droite à base carrée.			plus de 1200 élèves.	donnant de cet objet une représentation qui réalise une « illusion de la tridimensionnalité ». Limites : transposition de l'étude en contexte d'enseignement secondaire (2 ^e cycle).
Duroisin, N. et Demeuse, M. (2016)	Effectuer un état des lieux concernant l'acquisition de l'habileté de visualisation spatiale chez les élèves âgés de 8 à 14 ans qui s'inscrit dans le cadre d'une recherche plus globale visant à comprendre comment les enfants et adolescents appréhendent l'espace et la manière dont l'école propose de formaliser les apprentissages scolaires liés au domaine spatial.	Quantitative (statistiques inférentielles et analyse statistique implicative)	Exercices de visualisation sur des empreintes ou coupes/sections de solides Analyses statistiques	Classes allant de la 3 ^e année primaire (le CE2, en France) jusqu'en 3 ^e année secondaire en Belgique francophone.	Forces : caractérisation de « visualisation spatiale » en géométrie 3D; la visualisation spatiale serait « malléable » à la suite d'un entraînement. Limites : l'articulation de la visualisation spatiale avec les connaissances spatiales et les connaissances géométriques n'est pas abordée.
Fujital, T., Kondo, Y., Kumakura, H., Kunimune, S., Jones, K. (2020)	Identifier les compétences de raisonnement spatial des étudiants, et comment ils utilisent leurs compétences et leurs connaissances pour résoudre des problèmes géométriques, afin de concevoir des interventions pour	Mixte : enquête et observations de leçons	Questionnaire Productions écrites	1357 élèves de la 4 ^e année primaire à la 3 ^e année du secondaire âgés de 10 à 15 ans.	Forces: définit les habiletés spatiales comme des compétences. Les résultats de l'enquête et l'observation des leçons ont révélé que la visualisation spatiale et le raisonnement analytique spatial basé sur les propriétés jouent un rôle important, mais que, sans connaissances spécifiques au domaine, le raisonnement des élèves peut être influencé par l'apparence visuelle des objets géométriques dans les problèmes. En particulier, lorsque les problèmes ont plus d'une étape de

	améliorer l'enseignement.				raisonnement, ces problèmes restent difficiles à travers les niveaux scolaires. Limites: les données et l'approche méthodologique ne sont pas suffisantes pour examiner pourquoi et comment les élèves ont choisi des compétences particulières de raisonnement spatial et des connaissances spécifiques au domaine.
Gravel, M. P. (2016)	Explorer et à analyser les habiletés visuo-spatiales qui sont utilisées chez les élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques au secondaire.	Qualitative	Entrevues individuelles semi-dirigées contenant 12 activités selon le modèle de Van Hiele	10 élèves de 3 ^e secondaire avec difficultés d'apprentissage	Forces : élaboration de 12 activités (tâches) faisant ressortir que la difficulté majeure des élèves demeure la visualisation spatiale et plus particulièrement la représentation mentale qu'ils ont à réaliser pour réussir un problème de géométrie spatiale. Limites : comment peut-on explorer des liens possibles entre les niveaux de pensée de Van Hiele et la géométrie 3D, plus particulièrement dans des problèmes contenant des représentations 2D d'objets 3D à décoder/encoder ?
Hegarty, M. et Waller, D. (2005)	Décrire les habiletés spatiales qui concernent les différences dans la façon dont les gens représentent et manipulent mentalement les informations spatiales pour effectuer des tâches cognitives. Fait une recension des études utilisant l'analyse factorielle et examine les études à	Quantitative	Recension des analyses factorielles et des études à grande échelle		Forces : montre que les habiletés spatiales ne sont pas une construction unique et indifférenciée, mais plutôt composées de plusieurs habiletés distinctes (ex : visualisation). Expose la nécessité d'avoir un cadre théorique qui décrit les différentes capacités cognitives associées à la représentation et le traitement de l'information spatiale. Limites : ne décrit pas comment agissent les habiletés spatiales dans la résolution de problèmes comportant des représentations 2D des objets 3D.

	grande échelle portant sur l'orientation et la navigation spatiale.				
Hegarty, M. et Waller, D. (2004)	Développer de nouveaux tests d'orientation spatiale et d'examiner si cette habileté est dissociable de l'habileté mesurée par des tests de rotation mentale.	Quantitative	Tests psychométriques (analyse factorielle)	Expérience 1 : 67 étudiants du 1 ^{er} cycle en psychologie (université de Californie). Expérience 2 : 74 autres étudiants 1 ^{er} cycle en psychologie	Forces : montre une distinction entre deux types d'habiletés spatiales : celles qui nécessitent une transformation spatiale d'un objet perçu (par exemple, rotation mentale) et celles qui impliquent d'imaginer à quoi ressemble une scène à partir de différents points de vue. Limites : ne tient pas compte de tests de représentation 2D des objets 3D.
Höffler, T. N. (2010)	Méta-analyse portant sur le rôle des habiletés spatiales (spécifiquement la visualisation) dans l'apprentissage en mathématiques.	Quantitative	Tests psychométriques (analyse factorielle)	Méta-analyse réalisée sur 27 autres méta-analyses	Forces : met clairement l'emphasis sur le rôle important des habiletés spatiales, plus particulièrement, la visualisation dans l'apprentissage en géométrie spatiale. Limites : les rôles des interactions entre la visualisation et les connaissances spatiales n'est pas explicité, mais abordé.
Khin, P. K. et Wai Wai, O. (2020).	Étudier la relation entre la capacité spatiale des élèves et leurs performances géométriques en mathématiques au niveau du collège.	Quantitative Design research	Tests psychométriques	Huit écoles secondaires et 600 élèves de 1 ^{re} année secondaire en Birmanie.	Forces : précise que les habiletés spatiales (spécifiquement, la visualisation) sont essentielles dans la résolution de problèmes. Lorsque les élèves pensent spatialement en mathématiques, ils reconnaissent facilement les relations entre les figures géométriques, sont plus performants dans les activités mathématiques. Les habiletés spatiales peuvent être améliorées avec la pratique. Existence d'un lien entre les habiletés spatiales des élèves et leur performance en géométrie.

					Limites : ne discute pas de liens possibles entre les habiletés spatiales, les connaissances spatiales et les connaissances géométriques
Linn, M.C. et Peterson, A. C. (1985).	Étudier les différences entre les sexes des habiletés spatiales. Ils définissent l'habileté spatiale qui se réfère généralement à des compétences dans la représentation, la transformation, la production, et le rappel de l'information symbolique non-linguistique.	Quantitative	Tests psychométriques	Méta-analyse	Forces : propose une distinction des habiletés spatiales en 3 composantes (la plus communément utilisée dans la communauté scientifique) : la perception spatiale correspond à la capacité à déterminer des relations spatiales en respectant l'orientation de son propre corps quelles que soient les informations distractives ; la visualisation spatiale est la capacité à manipuler des informations complexes spatiales à différents niveaux, elle est associée à des manipulations spatiales complexes et requière une analyse de la tâche, une adaptation flexible afin d'arriver à la résolution du problème et enfin la rotation mentale est la capacité à faire tourner une figure en 2D ou 3D en l'imaginant. Limites : n'aborde pas comment interagissent les habiletés spatiales avec les connaissances spatiales dans la résolution de problèmes spatiaux.
Lowrie, T., Logan, T. et Hegarty, M. (2019)	Déterminer l'efficacité d'un programme d'intervention de visualisation spatiale pour augmenter le raisonnement spatial des élèves et les performances en mathématiques.	Quantitative	Tests psychométriques	327 élèves de 5 ^e et 6 ^e année de 17 classes dans dix écoles avec neuf classes expérimentales et huit classes témoins de l'Australie.	Forces : Le programme de visualisation spatiale de six heures a produit des scores de gain significatifs pour les performances en mathématiques du groupe d'intervention par rapport au groupe témoin. Les scores de gain modéré dans la performance en mathématiques étaient exhibés dans des tâches associées à la géométrie et aux problèmes de mathématiques à base de mots. Le programme de visualisation a aussi révélé une différence de performance significative en

					faveur du groupe d'intervention pour les performances de raisonnement spatial. Limites : l'analyse du raisonnement spatial dans les problèmes proposés aux élèves n'est pas suffisamment développée. N'explique pas les liens possibles entre les habiletés spatiales, les connaissances spatiales et les connaissances géométriques dans les problèmes soumis aux élèves.
Markay, S. M. (2009)	Examiner la relation entre le raisonnement visuel et les habiletés spatiales dans la résolution de problèmes en géométrie.	Quantitative	2 tests psychométriques (analyse factorielle)	31 élèves de la 3 ^e année du primaire à la 3 ^e année du secondaire d'une école publique de l'Ouest Massachusetts	Force : Les résultats ont montré qu'il existait une relation significative entre le raisonnement visuel et l'utilisation d'habiletés spatiales pour résoudre des problèmes. Limites : généralisation des résultats non discutée.
McGee, M. G. (1979)	a) Résume les études psychométriques des habiletés spatiales (jusqu'à 1979). b) Examine les différences entre les sexes pour les habiletés spatiales (visualisation, orientation spatiale) dans les divers aspects du fonctionnement perceptif-cognitif. Relation entre les capacités spatiales et c) revue de littérature en référence aux influences génétique, environnementale, hormonale et	Quantitative	Tests psychométriques Analyse factorielle	Revue de littérature : Guilford et Lacey, (1947); Thurstone (1951); French (1951); Michael, Guilford, Fruchter et Zimmerman (1957); Ekstrom, French, et Harman (1976); Stafford (1961); Hartlage (1970);	Forces : Six conclusions sont justifiées. 1) une panoplie d'études d'analyse factorielle depuis les années 1930 ont fourni des éléments solides et cohérents pour étayer l'existence d'au moins deux habiletés spatiales — visualisation et orientation. La visualisation spatiale est la capacité de faire pivoter, manipuler et tordre mentalement des objets 2D et 3D. L'orientation spatiale comprend la compréhension de la disposition des éléments dans un schéma de stimulus visuel, l'aptitude à ne pas être confus par les orientations changeantes dans laquelle une configuration spatiale peut être présenté, et une capacité à déterminer l'orientation spatiale par rapport à son corps. 2) la visualisation et l'orientation sont les habiletés les plus fortement corrélées avec la réussite dans un certain nombre de domaines techniques, professionnels. 3) Les différences entre les sexes dans les divers

	neurologique des résultats des tests psychométriques.			Bock et Kolakowski (1973); Yen (1975); Loehlin, Sharan et Jacoby (1978). DeFries et al. (1976); Park et al. (1978); Bouchard et McGee (1977); Loehlin, Sharan et Jacoby (1978); Guttman (1974); McGee (1978c)	aspects du fonctionnement de la perception-cognition sont une conséquence secondaire des différences par rapport à la visualisation spatiale et l'orientation spatiale. 4) Les différences entre les sexes sur les tests de la visualisation et l'orientation ainsi que sur de nombreuses tâches nécessitant ces habiletés n'apparaissent pas de manière fiable jusqu'à la puberté. 5) les habiletés spatiales sont connues pour être influencées presque autant par des facteurs génétiques que les habiletés verbales. 6) le développement des différences entre les sexes dans les habiletés spatiales est probablement lié à des différences sexuelles dans le développement de spécialisation du cerveau. Limites : clarifier les problèmes présentés et préciser le champ d'application dans lequel la visualisation spatiale et l'orientation spatiale entre en jeu.
Mithalal, J. (2010)	Étudie dans quelle mesure il est possible d'influer sur la qualité, la nature et la signification des informations visuelles perçues, et les conséquences de ces ajustements dans une perspective d'enseignement. Il ne s'agira donc pas ici d'étudier les représentations pour elles-mêmes, mais bien d'inscrire ces indicateurs visuels dans la perspective plus large d'une activité	Quantitative	Expérimentation à l'aide de Cabrigéomètre à des élèves de Seconde. Divers problèmes (reconstruction du sommet manquant d'un cube, faire émerger des connaissances concernant les positions relatives de droites dans l'espace, et en particulier l'existence de droites non-coplanaires;	Élèves de Seconde en France	Forces : l'étude considère la capacité à "voir dans l'espace" à la lumière des fonctions du dessin dans un problème de géométrie (Chaachoua, 1997, pp. 32-41). L'auteur conçoit que les problèmes de visualisation, dans le cas de la géométrie dans l'espace, dépendent profondément de la capacité des représentations disponibles à remplir ces fonctions, que nous nous proposons maintenant de détailler. Émergence de la déconstruction dimensionnelle dans une activité de construction relativement aux travaux de Duval. Limites : l'étude n'accorde pas suffisamment d'importance aux connaissances spatiales et aux habiletés spatiales dans la résolution de problèmes en géométrie spatiale.

	géométrie. Explique la dialectique entre représentations et problèmes de géométrie.		reconstruction d'un prisme)		
Nagy-Kondor, R. (2014)	Examiner les résultats de la littérature scientifique et comparer les habiletés spatiales des futurs enseignants de mathématiques du primaire de la Hongrie et de la Turquie.	Quantitative	Tests psychométriques	73 futurs enseignants de l'université Eskisehir Osmangazi (Hongrie) et 85 autres de l'université de Debrecen (Turquie) en enseignement des mathématiques au primaire	Forces : résultats de l'étude confirment que plusieurs étudiants ont des difficultés à imaginer une figure spatiale et de résoudre des problèmes de géométrie spatiale. Limites : utilisation des tests psychométriques n'expliquent pas l'interaction des habiletés spatiales avec les connaissances spatiales.
Parzysz, B. (1991a)	Mettre au point une ingénierie didactique pouvant gérer les conventions, les ambiguïtés du dessin et le conflit vu/su de même que les rapports entre géométrie et représentations planes.	Ingénierie didactique	Questionnaire, productions écrites	Classes de Seconde et de Première de lycée français	Forces : clarifie les concepts de visualisation et de connaissances spatiales dans le processus d'encodage/décodage des objets 3D. Limites : utilisation de situation-problème au sens de la TAD ne s'appliquant pas à des problèmes revus et modifiés suivant le Design research.
Pittalis, M. et Christou, C. (2010)	Décrire et d'analyser la structure de la pensée géométrique 3D en identifiant différents types de raisonnement et d'examiner leur relation avec la capacité spatiale.	Mixte	Tests psychométriques (analyse factorielle)	279 élèves de 2 écoles primaires et 2 collèges dans les quartiers urbains de Chypre	Forces : description de manière unifiée des paramètres qui composent les capacités d'encodage/décodage des objets 3D et l'avancement des habiletés de visualisation et de représentation dans l'apprentissage/enseignement de la géométrie 3D.

					Limites : quels sont les liens avec le conflit cognitif « vu/su » des représentations 2D des objets 3D ?
Pittalis, M. et Christou, C. (2013)	Établir théoriquement et empiriquement que la représentation des objets 3D consiste en des capacités de représentation distinctes. Déterminer des catégories d'élèves qui reflètent différents types de comportement dans les capacités de représentation.	Mixte	Test psychométrique (analyse factorielle) et productions écrites	279 élèves de deux écoles primaires et deux collèges dans les quartiers urbains de Chypre.	Forces : la représentation des objets 3D est une construction de représentation générale composée de deux capacités distinctes mais complémentaires d'importance égale : le décodage et l'encodage des représentations 2D. Limites : quels sont les liens avec le conflit cognitif « vu/su » des représentations planes des objets 3D ? Les auteurs exposent ce qu'ils ont compris de ce phénomène sans apporter d'éléments éclairants.
Ramful, A., Lowrie, T., Logan, T. (2017)	Utiliser un outil de cueillette de données nommé SRI pour mesurer trois dimensions de la capacité spatiale (rotation mentale, orientation spatiale et visualisation spatiale) dans une perspective de fonctionnement cognitif. L'outil est aussi destiné à des fins pédagogiques pour diagnostiquer la capacité spatiale des élèves.	Quantitative : conception de d'un instrument de raisonnement spatial (SRI)	1) Des analyses factorielles exploratoires ont été menées sur le SRI à 45 items. 2) Une analyse Rasch a ensuite été entreprise sur chacune des trois constructions (rotation mentale, orientation spatiale, visualisation spatiale).	430 élèves (219 garçons et 211 filles) de la 5e année à la 1re année du secondaire âgés de 11 à 13 ans.	Force : 1) le SRI fournit une mesure de la capacité de raisonnement spatial des élèves (11 à 13 ans). 2) le SRI peut être utilisé comme outil de recherche pour la mesure pré-post-test et dans les études corrélationnelles en mathématiques. Il peut être utilisé pour filtrer les répondants ayant des difficultés de raisonnement et il fournit trois mesures spatiales différentes: rotation mentale, orientation spatiale, et visualisation spatiale. Limites : la validité de l'échelle SRI est soumise au fondement théorique qui le sous-tend. Le SRI est basé seulement sur les 3 habiletés spatiales (visualisation, rotation mentale, orientation spatiale). Il est possible qu'une telle focalisation ait négligé d'autres dimensions de la capacité spatiale. La conception des tâches dans l'instrument en fonction des manœuvres spatiales hypothétiques peut ne pas toujours correspondre à ceux utilisés par les élèves.

Tremblay, S. (2016)	Montrer le rôle important des connaissances spatiales, et leurs interactions avec la visualisation et la perception spatiales lorsqu'elles se rapportent aux modes et techniques de représentation plane (sur papier) des solides 3D, pour traiter adéquatement les formules de volume et ce, à travers des tâches de résolution de problème en géométrie spatiale.	Qualitative	3 tâches de résolution de problèmes en géométrie 3D Productions écrites	34 élèves en mathématique 3 ^e secondaire (Outaouais)	Forces : la perception spatiale, les connaissances spatiales ainsi que la visualisation constituent trois habiletés distinctes qui se développent de manière interdépendante, s'appuyant l'une sur l'autre, lors de tâches de résolution de problème axées sur le volume des solides. Limites : une des 3 tâches était trop difficile pour les élèves de 3 ^e secondaire, mal calibrée et aurait dû comporter des éléments donnant accès aux élèves au moins à des solutions partielles. Interprétation du contrat didactique.
Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C. et Newcombe, N. S. (2013)	Examiner la littérature existante afin de déterminer les effets d'un entraînement spatial, ainsi que si ces effets sont durables et transférables.	Quantitative	Tests psychométriques	Méta-analyse réalisée sur 217 études	Forces : expose que les habiletés spatiales sont malléables à la suite d'un entraînement Limites : les rôles des connaissances spatiales ne sont pas explicités en lien avec les habiletés spatiales.

ANNEXE B

Certificat d'approbation éthique

UQÀM | **Comités d'éthique de la recherche
avec des êtres humains**

No. de certificat : 2023-5264
Date : 2022-12-05

CERTIFICAT D'APPROBATION ÉTHIQUE

Le Comité d'éthique de la recherche pour les projets étudiants impliquant des êtres humains (CERPE plurifacultaire) a examiné le projet de recherche suivant et le juge conforme aux pratiques habituelles ainsi qu'aux normes établies par la *Politique No 54 sur l'éthique de la recherche avec des êtres humains* (2020) de l'UQAM.

- Titre du projet : **Les rôles des habiletés spatiales et des connaissances spatiales en résolution de problèmes de géométrie de l'espace**
- Nom de l'étudiant : **Steve Tremblay**
- Programme d'études : **Doctorat en éducation**
- Direction(s) de recherche : **Denis Tanguay; Caroline Lajoie**

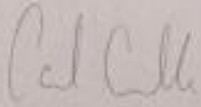
Modalités d'application

Toute modification au protocole de recherche en cours de même que tout événement ou renseignement pouvant affecter l'intégrité de la recherche doivent être communiqués rapidement au comité.

La suspension ou la cessation du protocole, temporaire ou définitive, doit être communiquée au comité dans les meilleurs délais.

Le présent certificat est valide pour une durée d'un an à partir de la date d'émission. Au terme de ce délai, un rapport d'avancement de projet doit être soumis au comité, en guise de rapport final si le projet est réalisé en moins d'un an, et en guise de rapport annuel pour le projet se poursuivant sur plus d'une année au plus tard un mois avant la date d'échéance (2023-12-05) de votre certificat. Dans ce dernier cas, le rapport annuel permettra au comité de se prononcer sur le renouvellement du certificat d'approbation éthique.

Élise Ducharme
Pour Caroline Coulombe,
Vice-Présidente CERPE plurifacultaire et Professeur titulaire, Département de management



Signé le 2022-12-05 à 17:57

RÉFÉRENCES

- Ackermann, E. (1995). Construction and transference of meaning through form. Dans L. P. Steffe et J. Gale (dir.), *Constructivism in education* (p. 341-354). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Bakker, A. et van Eerde, D. (2015). An introduction to Design-Based Research with an example from statistics education. Dans A. Bikner-Ahsbahr, C. Knipping et N. Presmeg (dir.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (p. 429-466), Springer: London.
- Barisnikov, K. et Pizzo, R. (2013). L'examen des compétences visuo-spatiales. Dans M. P. Nel et P. Bil (dir.), *Neuropsychologie de l'enfant* (p. 57-83). Bruxelles : Mardaga.
- Battista, M. T. (1999). Fifth graders' enumeration of cubes in 3D arrays: Conceptual progress in an inquiry based classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), 417-448.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. Dans F. K. Lester Jr., (dir.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 843-908). NCTM. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Battista, M. T., Frazee, L. M. et Winer, M. L. (2019). Analyzing the relation between spatial and geometric reasoning for elementary and middle school students. Dans K. S. Mix et M. T. Battista (dir.), *Visualizing Mathematics: the role of spatial reasoning in mathematical thought* (p. 195–228). Cham: Springer.
- Bayart, C., Gos, C., Hindelang C., Keyling, M. A., Mathern, C., Ortlieb M., Rauscher J.-C. et Roesch G. (1997). *Voir et raisonner. À la conquête de l'espace au collège*. Strasbourg : IREM de Strasbourg.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G. et Houang, R. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: Analysing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 121-146.
- Berthelot, R. et Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. [Thèse de Doctorat, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I].

- Berthelot, R., et Salin, M. H. (1993). Conditions didactiques de l'apprentissage des plans et cartes dans l'enseignement élémentaire. Dans A. Bessot et P. Vérillon (dir.), *Espaces graphiques et graphismes d'espaces. Contribution de psychologues et de didacticiens à l'étude de la construction des savoirs spatiaux*, (p. 87-113). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Berthelot, R. et Salin, M. H. (1993-1994). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*(53), 39-56.
- Berthelot, R. et Salin, M. H. (1999-2000). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N*(65), 37-59.
- Bessot, A. (1994) *Représentations graphiques et maîtrise des rapports avec l'espace*, Séminaire sur la représentation, CIRADE, UQAM, 34 pages.
- Bishop, A. (1980). Spatial abilities and mathematics education: A review. *Educational Studies in Mathematics*, 11(3), 257-269.
- Bodner, G. M. et Guay, R. B. (1997). The Purdue visualization of rotations test. *The Chemical Educator*, 2(4),1-18.
- Boucher, C., Marotte, L. et Coupal, M. (2007). *Intersection Mathématique – 2^e cycle du secondaire (1^{re} année)*. Manuel de l'élève A. Graficor Chenelière Éducation.
- Boucher, C., Marotte, L. et Coupal, M. (2008). *Intersection Mathématique – 2^e cycle du secondaire (1^{re} année)*. Manuel de l'élève B. Graficor Chenelière Éducation.
- Braconne-Michoux, A. (2018). *La géométrie à l'école primaire*. Montréal : Éditions JFD inc.
- Brousseau, G. (1983a). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 4(2),165-198.
- Brousseau, G. (1983b). Études de questions d'enseignement, un exemple, la géométrie, Dans Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, LSD IMAG, Université J. Fourier Grenoble.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Brousseau, G. (2001). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie. Université de Crète, Grèce. Actes du Séminaire de didactique des Mathématiques, Rethymnon. Repéré à <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110/document>.
- Brun, J. (1999). La résolution de problèmes arithmétiques: bilan et perspectives. *Math Ecole*, 141, 2-15.
- Bruner, J. S. (1983). *Le développement de l'enfant : savoir faire, savoir dire*. Paris: PUF. (version de 1998).

- Buckley, J., Seery, N. et Canty, N. (2018). Heuristic Framework of Spatial Ability: a Review and Synthesis of Spatial Factor Literature to Support its Translation into STEM Education, *Educ Psychol Rev*, 1-26.
- Buckley, J., Seery, N. et Canty, N. (2019). Investigating the use of spatial reasoning strategies in geometric problem solving. *International Journal Technololy Des Educ*, 29, 341-362.
- Burton, L. (2004). *Mathematicians as enquirers: learning about learning mathematics*. Dordrecht: Springer.
- Cabot-Thibault, J. (2013). *L'effet de l'apprentissage du jeu d'échecs dans le cadre scolaire sur le développement du sens spatial d'élèves du premier cycle du secondaire*. [Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Rimouski].
- Cardinet, J. (1988). *Évaluation scolaire et pratique*. Bruxelles : De Boeck Université.
- Carroll, J. B. (1993). Abilities in the domain of visual perception. Dans J. B. Carroll (dir.), *Human Cognitive Abilities: A Survey of Factor-Analytic Studies* (p. 304-363), New-York : Cambridge University Press.
- Casalderrey, F. M. (2012). La mystification des sens. L'art sous le regard mathématique. *Collection Le monde est mathématique*. Barcelone : RBA Coleccionables S. A.
- Cauchy, F. (1995). *Pour un concept de compétence plus riche*. Cahier du renouveau I. Montréal: Collège Montmorency.
- Charnay, R. et Mante, M. (1995). *Mathématiques : Concours de professeur des écoles*, Paris : Hatier.
- Chastenay, P. (2015). From Geocentrism to Allocentrism: Teaching the Phases of the Moon in a Digital Full-Dome Planetarium. *Research in Science Education*.
<http://doi.org/10.1007/s11165-015-9460-3>
- Cheng, Y.-L. et Mix, K. S. (2012). Spatial training improves children's mathematics ability, *Journal of Cognition and Development*, 15(1), 2-11.
- Chevallard, Y. et Julien, M. (1991). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège. *Petit x*, 27, 41-76.
- Choquet, G. (1964). *L'enseignement de la géométrie*. Paris : Hermann.
- Clements, D. H. et Battista, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning. Dans A. Douglas et J. Grouws (dir). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 420-464). New York: Macmillan Publishing Compagny.
- Clements, D. H. (1999). Geometric and spatial thinking in young children. Dans J. V. Copley (dir.), *Mathematics in the early years* (p. 66-79). Washington, DC : National Association for the Education of Young Children.

- Clements, D. H. et Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(2), 133-148.
- Clements, M. A. (2008). Spatial abilities, mathematics, culture, and the Papua New Guinea experience. Dans P. Clarkson et N. Presmeg (dir.), *Critical issues in mathematics education* (p. 97–106). New York : Springer.
- Cobb, P. (2001). Supporting the improvement of learning and teaching in social and institutional context. Dans S. M. Carver et D. Klahr (dir.), *Cognition and instruction : Twenty-five years of progress* (p. 455-478). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Cobb, P. et Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. Dans A. E. Kelly, R. A. Lesh, et J. Y. Baek (dir.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in Science, Technology, Engineering, and Mathematics Learning and Teaching* (p. 68-95). New York : Routledge.
- Colmez, F. et Parzysz, B. (1993). Le vu et le su dans l'évolution de dessins de pyramides, du CE2 à la Seconde. Dans A. Bessot et P. Vérillon (dir.), *Espaces graphiques et graphiques d'espace. Contribution de psychologues et de didacticiens à l'étude des savoirs spatiaux*, (p. 35-55), Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Colom, R., Contreras, M. J., Botella, J. et Santacreu, J. (2001). Vehicles of spatial ability. *Personality and Individual Differences*, 32, 903-912.
- Connor, J. M. et Serbin, L. A. (1980). *Mathematics, spatial ability and sex roles*. Rapport de recherche. National Institute of Education, Washington, D.C. (75 p.)
- Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) (2001). *Formes et mouvements. Perspectives pour l'enseignement de la géométrie*, Luc Lismont et Nicolas Rouche, coordinateurs, Nivelles, Belgique.
- Dadds, M. et Hart, S. (2001). *Doing Practitioner Research Differently*. London: Routledge.
- Davis, B. and The Spatial Reasoning Study Group (2015). *Spatial reasoning in the early years: principles, assertions, and speculations*. New York et Londres : Routledge, Taylor et Francis.
- De Landsheere, G. (1979). *Dictionnaire de l'évaluation et de la recherche en éducation*. Presses Universitaires de France.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37(6), 14-20.
- Denis, M. (1991). *Image and cognition*. New-York : Harvester Wheatsheaf.
- Dersoir, A. (2015). *L'espace et la géométrie à l'école Primaire : comment enseigner la géométrie dans l'espace à l'école primaire ?* (Mémoire du Master 2). Métiers de l'Enseignement de l'Éducation et de la Formation.

- Dion, G. (1976). *Dictionnaire canadien des relations du travail*. Les Presses de l'Université Laval.
- Douady, R. et Parzysz, B. (1998). Geometry in the classroom. Dans C. Mammana and V. Villani, (dir.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (p. 159-192), Kluwer Academic Publishers.
- Dufour-Janvier B., Bednarz N. et Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. Dans C. Janvier (dir.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, (p.109-122), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Duroisin, N. (2015). *Quelle place pour les apprentissages spatiaux à l'école ? Étude expérimentale du développement des compétences spatiales des élèves âgés de 6 à 15 ans*. [Thèse de Doctorat, Université de Mons].
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- Duval, R. (1999) Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Cuernavaca, Morelos, México.
- Duval, R. (2002). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. Dans F. Hitt et M. Santos (dir.), *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2002*, (p. 311-335), Mexico, Vol. I
- Duval, R. (2003). Langage(s) et représentation(s) dans l'enseignement des mathématiques: deux pratiques et une troisième, Dans M. Kourkoulos, G. Toulis et C. Tzanakis (dir.), *Proceedings 3rd Colloquium on the Didactics of Mathematics*, University of Crete, (p. 13-33). Rethymnon.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, 10, 5-53.
- Duval, R. et Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27.
- Edelson, D. C. (2002). Design research : What we learn when we engage in design. *Journal of the Learning Sciences*, 11(1), 105-121.
- Eisenberg, T. et Dreyfus, T. (dir.) (1989). *Visualization and mathematics education. Focus on the Learning Problems in Mathematics*, 11:1 & 2.
- Eme, E. (2003). *Psychologie différentielle*. Paris : Armand Colin.

- Escueta, M. G. M. (2015) *Spatial Visualization Strategy in Problem Solving of High School Students*. Research report. De La Salle University – Manila.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Francis, K. et Whiteley, W. (2015). Interactions between three and two dimensions. Dans B. Davis and The Spatial Reasoning Study Group Davis, (dir.), *Spatial reasoning in the early years*, (p. 121-136). New York: Routledge.
- French, J. W. (1951). The Description of Aptitude and Achievement Tests in Terms of Rotated Factors, *Psychometric Monographs*, no 5.
- Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H., Miawaki, S., Kunimune, S. et Shojima, S. (2022). Identifying Japanese students' core spatial reasoning skills by solving 3D geometry problems: *An exploration*. *Asian Journal for Mathematics Education*, 1(4) 437-454.
- Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H., Kunimune, S. et Jones, K. (2020). Spatial reasoning skills about 2D representations of 3D geometrical shapes in grades 4 to 9. *Mathematics Education Research Journal*, 32, 235-255.
- Furtuna, D., Tanguay, D. et Jonnaert, P. (2012). Vers la co-construction de situations didactiques visant le développement du raisonnement déductif en géométrie spatiale au secondaire. Dans F. Hitt, et C. Cortés (dir.), *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (p. 286-296). Québec : Loze-Dion éditeur.
- Furtuna, D. (2008). *Modélisation dans l'espace : obstacles du passage du 2D au 3D*. [Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal].
- Funke, J. (2010). Complex problem solving: a case for complex cognition ? *Cognitive processing*, 11(2), 133-142.
- Galvez, (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano: una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria*. [Thèse d'état, Université de Mexico].
- Gérard, F. M. (2000). Savoir, oui... mais encore !, *Forum - pédagogies*, mai 2000, 29-35.
- Gérard, F. M. et Roegiers, X. (1993). *Concevoir et évaluer des manuels scolaires*, Bruxelles : De Boeck Université.
- Gillet, P., (Éd.), (1991). *Construire des formations*. Paris : ESF.
- Gitlin, A., Bringham, K., Burns, M., Cooley, V., Myers, B., Price, K., Russell, R. et Tiess, P. (1992). *Teachers' voices for school change: An introduction to educative research*. New York: Teachers College Press.
- Gonseth, F. (1945-1955). *La géométrie et le problème de l'espace*. Editions du Griffon, Lausanne.

- Goldin, G. A. (1987). Cognitive representational systems for mathematical problem solving. Dans C. Janvier (dir.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (p.19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Goldin, G. A. et Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. Dans Steffe, L. P., Nesher, P., Cobb, P., Goldin, G. A. et Greer, B. (dir.), *Theories of Mathematical Learning* (p. 397-430). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of mathematical behavior*, 17(2),137-165.
- Gorgorio, N. et Jones, K. (1996) Elements of the visualisation process within a dynamic geometry environment. *Topic group on The Future of Geometry at the 8th International Congress on Mathematical Education (ICME8)*, Sevilla, Spain. 13 - 20 Jul.
- Gouvernement du Québec. (1988). *Fascicule K. Mathématique du primaire –Résolution de problèmes et orientation générale*. Québec: Ministère de l'Éducation .
- Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise : enseignement secondaire, premier cycle*. Québec: Ministère de l'Éducation.
http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/PFEQ/prfrmseclercycle2.pdf
- Gouvernement du Québec. (2007). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, deuxième cycle*. Québec: Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.
- Gouvernement du Québec. (2016a). *Programme de formation de l'école québécoise: enseignement secondaire, deuxième cycle*. Québec: Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PFEQ_mathematique-secondaire-deuxieme-cycle.pdf
- Gouvernement du Québec. (2016b). *Progression des apprentissages au secondaire: Mathématique*. Québec: Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.
http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PDA_PFEQ_mathematique-secondaire_2016.pdf
- Gouvernement du Québec. (2020). *Référentiel de compétences professionnelles; profession enseignante*. Québec : Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur.https://cdn-contenu.quebec.ca/cdn-contenu/adm/min/education/publicationsadm/devenirenseignant/referentiel_competences_professionnelles_profession_enseignante.pdf?1606848024
- Granger, N., Portelance, L. et Messier, G. (2020). *Planifier son enseignement au secondaire*. Montréal: Éditions JFD.

- Gravel, M. P. (2016). *Les habiletés visuo-spatiales utilisées par des élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques*. [Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Trois-Rivières].
- Grenier, D. et Tanguay, D. (2008) L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratiques et théoriques des polyèdres réguliers. *Petit x*, 78, 26-52.
- Guédon, M.-C., Savard, R., Le Corff, Y. et Yergeau, É. (2011). *Tests à l'appui. Pour une intervention intégrée de la psychométrie en counseling de carrière* (2^e éd.). SainteFoy : Les Éditions Septembre (1^{re} éd. 2000)
- Gutiérrez, A. (1992). Exploring the links between van Hiele levels and 3-dimensional geometry. *Structural Topology*, 18, 31-48.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. Dans L. Puig et A. Gutierrez (dir.), *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, vol. 1 (p. 3-15). Valencia: Universidad de Valencia.
- Halpern, D., Eun Oh, K., Tremaine, M., Chiang, J., Bemis, K. et Silver, D. (2015). Learning Visualisation Strategies : A qualitative investigation, *International Journal of Science Education*, 37(18), 3038-3065.
- Hartmann, J. et Reiss, K. (1995). Problem solving processes in a spatial geometry environment. *Journal für Mathematikdidaktik*, 12, 18-30. Repéré http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/1998/hartmann_reiss3.pdf
- Hawes, Z., Tepylo, D. et Moss, J. (2015). Developing spatial thinking. Dans B. Davis and The Spatial Reasoning Study Group. *Spatial reasoning in the early years: principles, assertions, and speculations*. (p. 29-44). New York, NY: Routledge.
- Hegarty, M. et Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, 91, 684-689.
- Hegarty, M. et Waller, D. (2004). A Dissociation Between Mental Rotation and Perspective-Taking Spatial Abilities. *Intelligence*, 32(2), 175-191.
- Hegarty, M. et Waller, D. (2005). Individual differences in spatial abilities. Dans P. Shah et A. Miyake (dir.), *The cambridge handbook of visuospatial thinking*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Höffler, T. N. (2010). Spatial Ability: Its Influence on Learning with Visualizations —a Meta-Analytic Review, *Educ Psychol Rev*, 22, 245-269.
- Hoffman, D. (2000). *Visual intelligence: how we create what we see* (new edition). New York: W.W. Norton.

- Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.
- Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Janvier, C. (1994). *Le volume, mais où sont les formules ?* Ville Mont-Royal : Éditions Modulo.
- Janvier, C. (1997). Grandeur et mesure : la place des formules à partir de l'exemple du volume, *Bulletin AMQ*, 37(3), 28-41.
- Joannert, P. (2009). *Compétences et socioconstructivisme. Un cadre théorique*. Éditions De Boeck Université.
- Johnson-Laird, P. N. (1998). Imagery, visualization and thinking. Dans J. Hochberg (dir.), *Perception and Cognition at the Century's End*. (p. 441-467). San Diego, CA: Academic Press.
- Jones, K. et Bills, C. (1998), Visualisation, Imagery, and the Development of Geometrical Reasoning. *Proceeding of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18(1 et 2), 123-128.
- Joyal, C. (2015). *L'étude de la validité prédictive de la BGTA pour la réussite d'un DEP au Québec*. [Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke].
- Kalogirou, P. et Gagatsis, A. (2012). Visualization as a factor of spatial ability and the relationship between students' spatial ability and geometrical figure apprehension. Dans I. Elia, A. Gagatsis, F. Hitt, A. Kuzniak, B. Parzysz, L. Radford, P. R. Richard et L. Vivier (dir.), *Actes de colloque de l'Espace de Travail Mathématique (ETM) au troisième symposium*. (p. 421-440). Montréal.
- Kaput, J. (1987). Representation system and mathematics. Dans C. Janvier (dir.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (p.19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Karsenti, T. et Savoie-Zajc, L. (2018). *La recherche en éducation : étapes et approches*, 4^e édition revue et mise à jour. Montréal : Presses de l'Université de Montréal.
- Khin, P. K. et Wai Wai, O. (2020). A study of the relationship between students' spatial ability and their geometrical performance in mathematics at the middle school level., *J. Myanmar Acad. Arts Sci.* 18(9C), 367-383.
- Killonen, P. C., Lohman, D. et Snow, R. (1984). Effects of aptitudes, Strategy Training and Task Facets on Spatial Task Performance. *Journal of Educational Psychology*, 76(1), 130-145.
- Koro-Ljungberg, M., Douglas, E. P., Therriault D., Malcolm, Z. et McNeill, N. (2012). Reconceptualizing and decentering think-aloud methodology in qualitative research. *Qualitative Research*, 13(6) 735-753.

- Kosslyn, S. M. et Koenig, O. (1992). *Wet mind: the new cognitive neuroscience*. New-York: The Free Press.
- Kozhevnikov, M., Hegarty, M. H. et Mayer, R.E. (1999). *Students' use of imagery in solving qualitative problems in kinematics*. Repéré à <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED433239.pdf>
- Kozhevnikov, M., Hegarty, M. H. et Mayer, R.E. (2002). Revising the Visualizer–Verbalizer Dimension: Evidence for Two Types of Visualizers. *Cognition and instruction*, 20(1), 47-77.
- Kozhevnikov, M., Hegarty, M. H. et Mayer, R. (2002). Visual/spatial abilities in problem solving in physics. Dans M. Anderson, B. Meyer, et P. Olivier (dir.), *Diagrammatic representation and reasoning* (p. 155–173). New York: Springer-Verlag.
- Kyttälä, M. et Lehto, J. (2008). Some factors underlying mathematical performance: The role of visuospatial working memory and non-verbal intelligence. *European Journal of Psychology of Education*, 22(1), 77-94.
- Laborde, C. et Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 14(1.2), 165-210.
- Laforest, J.-C. (1984-1985). L'évaluation des apprentissages en résolution de problèmes : une pratique essentielle et enrichissante. *Instantanés mathématiques*, 21 (numéro spécial D), 23-29.
- Lajoie, C. et Bednarz, N. (2012). Évolution de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques au Québec : un parcours sur cent ans des programmes et documents pédagogiques. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 12(2), 178-213.
- Lajoie, C. et Bednarz, N. (2014). La résolution de problèmes en mathématiques au Québec: évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants. *Éducation et Francophonie*, Vol. XLII (2), automne, 7-23.
- Lajoie, C. et Bednarz, N. (2016). La notion de situation-problème en mathématiques au début du XXI^e siècle au Québec : rupture ou continuité? *Revue Canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies/Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 16(1), 1-27.
- Lawrie, C., Pegg, J. et Gutiérrez, A. (2000). Coding the nature of thinking displayed responses on nets of solids. Dans T. Nakahara, et M. Koyama (dir.), *Proceedings of the 24th PME International Conference*, 3, 215-222.
- Legendre, R. (2005). *Dictionnaire actuel de l'Éducation* (3^e édition). Guérin Éditeur.

- Linn, M. C. et Peterson, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: a meta-analysis. *Child Development*, 56, 1479-1498.
- Lohman, D. F. (1988). Spatial ability as traits, processes and knowledge. Dans R. J. Sternberg (dir.), *Advances in the psychology of human intelligence*, (Vol. 40, p. 181-248), Hillsdale: LEA.
- Lohman, D. F. (1993). *Effects of practice and training on the acquisition and transfer of spatial skills: Two speed-accuracy studies*. (Final Report Grant AFOSR-91-9367). Iowa City, IA: Lindquist Center for Measurement.
- Lohman, D. F. (1996). Spatial ability and g. Dans I. Dennis et P. Tapsfield (dir.), *Human abilities: Their nature and assessment* (p. 97-116). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Lowrie, T., Logan, T., Hegarty, M. (2019). The Influence of Spatial Visualization Training on Students' Spatial Reasoning and Mathematics Performance. *Journal of Cognition and Development*, 20(5), 729-751. <https://doi.org/10.1080/15248372.2019.1653298>
- Lowrie, T., Logan, T. et Ramful, A. (2016). Spatial Reasoning Influences Students' Performance on Mathematics Tasks. Dans B. White, M. Chinnappan et S. Trenholm, (dir.). *Opening up mathematics education research (Proceedings of the 39th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)*, (p. 407-414). Adelaide: MERGA.
- Lowrie, T., Resnick, I., Harris, D. et Logan, T. (2020). In search of the mechanisms that enable transfer from spatial reasoning to mathematics understanding. *Mathematics Education Research Journal*, 32, 175-188.
- Lukenbein, D. (1984-1985). La résolution de problèmes et le processus d'apprentissage en mathématique. *Instantanés mathématiques*, 21 (numéro spécial D), 5-9.
- Ma, H. L., Wu, D., Chen, J. W. et Hsieh, K. J. (2009). Mithelmore's development stages of the right rectangular prisms of elementary school students in Taiwan. Dans M. Tzekaki, Kaldrimidou et H. Sakonidis (dir.), *Proceedings of the 33rd conference of the international group for the psychology of mathematics education*, vol. 4 (p. 57-64). Thessaloniki: PME.
- Maier, P. H. (1996). Spatial geometry and spatial ability – How to make solid geometry solid? Dans E. Cohors-Fresenborg, K. Reiss, G. Toener et H.-G. Weigand, (dir.), *Selected Papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics 1996*, (p. 63-75). Germany : Osnabrueck.
- Marchand, P. (2004). *Analyse de deux interventions didactiques portant sur les connaissances spatiales auprès de trois profils d'élèves du secondaire*. [Thèse de doctorat, Université de Montréal].
- Marchand, P. (2006a). *La géométrie, tout un sport !* (Thèse de doctorat inédite). Montréal, Éditions Bande Didactique.

- Marchand, P. (2006b). Comment développer les images mentales liées à l'apprentissage de l'espace en trois dimensions ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11(103-121).
- Marchand, P. (2009a). L'enseignement du sens spatial au secondaire : analyse de deux leçons de troisième secondaire. *The canadian journal of science, mathematics and technology education*, 9(1), 30-49.
- Marchand, P. (2009b). Le développement du sens spatial au primaire. *Bulletin AMQ*, Vol. XLIX, (3), 67-79.
- Marchand, P. (2020). Quelques assises pour la valoriser le développement des connaissances spatiales à l'école primaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 40(2), 1-44.
- Marchand., P. (2019). Interface between Theoretical Guidelines and Classroom Practices to Create Activities that Enhance the Development of Spatial Reasoning in Elementary School. Dans Rogerson, A. et Morska, J. (dir.), *The Mathematics Education for the Future Project: Proceedings of the 15th International Conference : Theory and Practice - an Interface or a Great Divide?* (p.343-347), 4-9 Aug, 2019, Maynooth University, Kildare, Ireland ([Electronic ed.]). WTM-Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.
- Marchand, P. et Bisson C. (2017). *La pensée spatiale, géométrie et métrique à l'école : réflexions didactiques*. Montréal : Éditions JFD.
- Marchand, P. et Braconne-Michoux, A. (2013). Quels types d'activités permettent de développer les connaissances spatiales chez les élèves du primaire : Le cas de la boîte à image. Dans *Actes du XL^e colloque de la Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire (COPIRELEM)*, Enseignement de la géométrie à l'école : enjeux et perspectives [CD-rom]. Nantes, France : IREM.
- Marchand, P. et Sinclair, N. (2017). Role of spatial reasoning in mathematics. Dans S. Oesterle, D. Allan et J. Holm (dir.). *Proceedings of 2016 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, (p. 177-192), published by CMESG/GCEDM.
- Markey, S. M. (2009). *The Relationship between Visual-Spatial Reasoning Ability and Math and Geometry Problem-Solving*. [Mémoire de maîtrise, American International College].
- Mason, J., Oliveira, H. et Boavida, A. M. (2012). Reasoning reasonably in mathematics. *Quadrante*, Vol. XXI, (2), 2, 165-195.
- Mathé, A. C. et Mithalal-Le Doze, J. (2019). L'usage des dessins et le rôle du langage en géométrie : quelques enjeux pour l'enseignement. *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques*, 1, La Pensée Sauvage.

- Mathieu-Soucy, S. et Tanguay, D. (2017). La logique formelle au niveau universitaire : une étude empirique en contexte de démonstration. *Petit x*, 104, 5-24.
- Matri, S. (2020). *Les environnements virtuels à l'école primaire, au service des connaissances spatiales: une ingénierie didactique articulant le micro et le macro-espace*. [Mémoire de maîtrise, Université de Genève].
- Mayer, R. E. (1977). *Thinking and problem solving: An introduction to human cognition and learning*. Glenview, IL: Scoot, Foresman.
- Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition* (2nd ed.). New York: W. H. Freeman.
- Mayer, R. E. (2010). Problem Solving and Reasoning. Dans P. Peterson, E. Baker et B. McGaw (dir.), *International Encyclopedia of Education* (Third Edition) (p. 273-278). California : Elsevier.
- McGee, M. G. (1979). Human Spatial Abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal and neurological influences, *Psychological Bulletin*, 86(5), 899-918.
- Meirieu, P. (1988, 23^e édition 2012). *Apprendre ... Oui, mais comment ?* Paris : ESF.
- Merri, M. et Pichat, M. (2007) *Psychologie de l'éducation: L'école*, Volume 1. Paris Éditions Bréal.
- Merrit, L. (2003). *Embedding research as core practice for teachers: a model for whole school teacher learning*. [Mémoire de maîtrise, University of Sydney, Australia].
- Michael, W. B., Guilford, J. P., Fruchter, B. et Zimmerman, W. S. (1957). The description of spatial-visualization abilities. *Educational and Psychological Measurement*, 17, 185-199. <https://doi.org/10.1177/001316445701700202>
- Middlewood., D., Coleman, M. et Lumby, J. (1999). *Practitioner Research in Education: Making a Difference*. SAGE Publications Ltd.
- Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle*. [Thèse de Doctorat, Université de Grenoble].
- Mithalal, J. (2014). Voir dans l'espace : est-ce si simple ? *Petit x*, 96, 51-73.
- Mix, K. S., Levine, S. C., Cheng, Y. L., Young, C. et Hambrick, D. Z. (2016). Separate but correlated: The latent structure of space and mathematics across development. *Journal of Experimental Psychology: General*, 145(9), 1206-1227.
- Mix, K. S., Cheng, Y. L. (2012). The relation between space and math: developmental and educational implications. *Advances in child development and behavior*, 42, 197-243.
- Mix, K. S. et Battista, M. T. (2019). *Visualizing Mathematics. The Role of Spatial Reasoning in Mathematical Thought*. Springer Nature Switzerland.

- Monney, N., Duquette, C., Barry, S. et Couture, C. (2020). Planifier une séquence d'enseignement en faisant dialoguer les cadres de référence des didactiques, de la gestion de classe et de l'évaluation. Dans N. Granger, L. Portelance et G. Messier, (dir.). *Planifier son enseignement au secondaire* (p. 177-211). Montréal: Éditions JFD.
- Montague, M. et Applegate, B. (1993). Middle school students' mathematical problem solving : an analysis of think-aloud protocols, *Learning Disability Quarterly*, 16, 19-32.
- Moss, J., Bruce, C. D., Caswell, B., Flynn, T. et Hawes Z. (2016). *Taking Shape. Activities to develop Geometric and Spatial Thinking. Grades K-2*. Toronto: Pearson Canada.
- Münzer, S., Fehringer, B. et Köhl, T. (2018). Specificity of mental transformations involved in understanding spatial structures. *Learning and Individual Differences*, 61, 40-50.
- Nagy-Kondor, R. (2014). Importance of Spatial Visualization Skills in Hungary and Turkey :Comparative Studies, *Annales Mathématiques et Informatiques*, 43, 171-181.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston : VS.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2012). *Principles and Standards – Geometry*. Récupéré de <http://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/Geometry/>
- National Research Council (2006). *Learning to Think Spatially*. Washington, DC: The National Academies Press.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2006). Learning to think spatially: GIS as a support system in the K-12 curriculum. Washington, DC: National Academies Press.
- Newcombe, N. S. (2010). Picture this: Increasing math and science learning by improving spatial thinking. *American Educator*, 34, 29-35.
- Newcombe, N. S. (2013). Seeing relationships: Using spatial thinking to teach science, mathematics, and social studies, *American Educator*, 37(1), 26-31.
- Newell, A. et Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Owens, K., et Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. Dans A. Gutierrez et P. Boero (dir.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (p. 83-116). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.
- Pallascio, R., Allaire, R., Mongeau, P. (1991). Pour une géométrie générative. *Bulletin AMQ*, 5-12.

- Paillé, P. (2009b). Validité en recherche qualitative. Dans A. Mucchielli (dir.), *Dictionnaire des méthodes qualitatives en sciences humaines*. Paris: Armand Colin.
- Panaoura, G., Gagatsis, A. et Lemonides, C. (2007). *Spatial abilities in relation to performance in geometry tasks. Proceedings of CERME5*, (p. 1062-1071).
- Parzysz, B. (1988). « Knowing vs. Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures », *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), 79-92.
- Parzysz, B. (juin 1988). Voir et savoir - la représentation du "perçu" et du "su" dans les dessins de la géométrie de l'espace, *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP)*, 364, 339-350.
- Parzysz, B. (1989). Représentations planes et géométrie de l'espace au lycée. Contribution à la relation voir/savoir. [Thèse de Doctorat,. IREM, Université Paris-7].
- Parzysz, B. (1991a). Espace, géométrie et dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 11(2.3), 211-240.
- Parzysz, B. (1991b). Representation of space and students conceptions at high school level, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 575-593.
- Parzysz, B. (2007). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s'agit-il ? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 17, G.R.I.M. (Department of mathematics University of Palermo, Italy).
- Patton, M. Q. (1990). *Qualitative Evaluation and Research Methods*. Sage Publications, Newbury Park, Californie.
- Perrin-Glorian, M. J. et Godin, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école*, 222, 26-36.
- Perrin-Glorian, M. J. et Godin, M. (2018). Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. *Actes du Concertum de la CORFEM*, 1-41.
- Perrin-Glorian, M. J. et Salin M. H. (2010). Didactique de la géométrie. Peut-on commencer à faire le point ? *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. Année 2009, p. 47-81. Paris : IREM, université Paris-Diderot.
- Piaget, J. (1963). La filiation des structures. Dans *Études d'épistémologie génétique*, vol. XV, Paris : PUF.
- Piaget, J. et Inhelder, B. (1966). *L'image mentale chez l'enfant : étude sur le développement des représentations imagées*. Paris : Presses Universitaires de France.
- Piaget, J. et Inhelder, B. (1972). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris : Presses Universitaires de France.

- Pittalis, M., Mousoulides, N., et Christou, C. (2010). Students' 3D geometry thinking profiles. Dans V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne et F. Arzarello (dir.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME): Working Group 5, Geometrical Thinking*, (p. 816- 825). 28th January-1st February 2009, Lyon France.
- Pittalis, M. et Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability, *Educational Studies in Mathematics*, 75, 191-212.
- Pittalis, M. et Christou, C. (2013). Coding and decoding representations of 3D shapes, *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 673-689.
- Powell, A. B., Francisco, J. H. et Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 405-435.
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. Dans A. Gutierrez et P. Boero (dir.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present ad future* (p. 205–235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Presmeg, N. C. (2008). Spatial Abilities Research as a Foundation for Vizualisation in Teaching and Learning Mathematics. Dans P. Clarkson, P. et Presmeg, N. (dir.), *Critical Issues in Mathematics Education*, (p. 83-95). New-York: Springer Science and Business Media.
- Kosslyn, S. M. et Koenig, O. (1992). *Wet mind: The newcognitive neuroscience*. New York, NY, US: Free Press.
- Ramful, A., Lowrie, T. et Logan, T. (2017). Measurement of Spatial Ability: Construction and Validation of the Spatial Reasoning Instrument for Middle School Students. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 35(7), 709-727.
- Revina, S., Zulkardi, D., Darmawijoyo, D. et van Galen, F. (2011). Spatial Visualization Tasks to Support Students' Spatial Structuring in Learning Volume Measurement, *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, 2(2), 127-146.
- Rey, A. (2016). *Dictionnaire historique de la langue français*. Éditions Le Robert.
- Rouche, N. (1989). Prouver : Amener à l'évidence ou contrôler des implications? Dans E. Barbin (dir.). *La démonstration mathématique dans l'histoire. Actes du 7^e Colloque Inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques* (p. 8-38). Besançon : IREM de Lyon.
- Rougier, B. (2009) *Construction d'une séquence pédagogique*. Récupéré sur le site de l'Académie de Versailles – Sciences Biologiques et Science Sociales Appliquées.
- Rüegg, A. et Burmeister, G. (2010). *Méthodes constructives de la géométrie spatiale. Enseignement des mathématiques*. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.

- Ryu, H., Chong, Y. et Song, S. (2007). Mathematically-gifted students' spatial visualization ability of solid figures. Dans J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, et D. Y. Seo (dir.), *Proceedings 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p. 137-144). Seoul, Korea: PME
- Salin, M. H. (2008). Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège : le facteur temps. *Bulletin de l'APMEP*, 478, 647-670.
- Salin, M. H. (2014a). Que peut nous apprendre l'observation d'élèves de 11 ans confrontés à un problème « spatio-géométrique » ? *Math-Ecole*, 222, 9-16.
- Salin M. H. (2014b). Quelques remarques autour des finalités de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. Dans Coppe, S., Bueno Ravel, L., Choquet, C., Cabassut, R., Jaffrot, M., Mangiante-Orsola, C., Masselot, P, et Ouvrier-Buffet, C. (dir.), *Enseignement de la Géométrie à l'École. Enseignement de la Géométrie à l'École. Enjeux et perspectives. Actes du 40ème colloque COPIRELEM* (p. 32-43). Nantes 2013.
- Sarama, J. et Clements, D. H. (2009a). Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children. New York : Routledge.
<https://doi.org/10.4324/9780203883785>
- Schlosser, F. (2014). Construction et fonctionnement d'espaces de travail géométriques personnels d'élèves. Cas de la géométrie synthétique dans l'espace au lycée. Dans A. C. Mathé, et E. Mounier (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDN*, Bordeaux, (p. 24-44). Paris : IREM de Paris.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Orlando, Florida.
- Shumway, J. F. (2013). Building bridges to spatial reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 20(1), 44–51.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.
- Sinclair, N. et Gol Tabaghi, S. (2010). Drawing space: mathematicians' kinetic conceptions of eigenvectors. *Education Studies in Mathematics*, 74(3), 223-240.
- Sorby, S. A. (2009) Educational Research in Developing 3D Spatial Skills for Engineering Students, *International Journal of Science Education*, 31(3), 459-480. DOI: 10.1080/09500690802595839
- Sorby, S., Casey, B. M., Veurink, N. et Dulaney, A. (2013). The role of spatial training in improving spatial and calculus performance in engineering students. *Learning and Individual Differences*, 26, 20-29.

- Soury-Lavergne, S. et Maschietto, M. (2019). Connaissances géométriques et connaissances spatiales dans les situations didactiques avec la technologie. Dans F. Coppé, E. Roditi, V. Celi., F. Chellougui, F. Tempier, C. Allard et C. Corriveau, (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques, Actes de la 19^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 84-115), Grenoble : La Pensée sauvage.
- Steffe, L. P. et Thompson, P. W. (2000). Teaching Experiments Methodology : Underlying Principles and essential Elements. Dans R. Lesh et A. E. Kelly (dir.), *Research Design in Mathematics and Science Education*, (p. 267-307). New-Jersey : Erlbaum Associates, Hillsdale.
- Stieff, M. et Uttal, D. (2015). How Much Can Spatial Training Improve STEM Achievement? *Educational Psychology Review*, 27(4), 607-615.
- Strauss, A. L. et Corbin, J. M. (1998). *Basics of qualitative research : techniques and procedures for developing grounded theory* (2nd ed.). Thousand Oaks: Sage Publications.
- Tanguay, D. (2005). Apprentissage de la démonstration et graphes orientés. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Vol. 10, 55-93.
- Tanguay, D. et Geeraerts, L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant. *Petit x*, 88, 5-24.
- Tanguay, D. et Grenier, D. (2010). Experimentation and proof in a solid geometry teaching situation. *For the Learning of Mathematics* 30(3), 36-42.
- Tanguay, D. (2010). Les formules de volume et le principe de Cavalieri. *Petit x*, 84, 7-26.
- Tartre, L. (1990). Spatial orientation skill and mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 216-229.
- Thorndike, R. M. et Lohman, D. F. (1990). *A century of ability testing*. Chicago: The Riverside Publishing Co.
- Thurston, W. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 15(1), 29-37.
- Thurstone, L.L. (1938). *Primary Mental Abilities*. Chicago: University of Chicago Press.
- Thurstone, L. L. (1950). *Some primary abilities in visual thinking* (Tech. Rep. No. 59). Chicago: University of Chicago, Psychometric Laboratory.
- Tolar, T. D., Lederberg, A. R. et Fletcher, J. M. (2009). A structural model of algebra achievement: Computational fluency and spatial visualization as mediators of the effect of working memory on algebra achievement. *Educational Psychology*, 29(2), 239-266.

- Tremblay, S. (2016). *Les rôles de la perception, de la visualisation et des connaissances spatiales dans la compréhension du volume des solides usuels, de ses formules et de son calcul*. [Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal].
- Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C. et Newcombe, N.S. (2013). The Malleability of Spatial Skills: A Meta-Analysis of Training Studies, *Psychological Bulletin*, 139 (2), 352-402.
- Vadcard, L. (1998-1999). La validation en géométrie au collège avec Cabri-géomètre. Mesures exploratoires et mesures probatoires. *Petit x*, 50, 5-21.
- Van den Akker, J. (1999). Design approaches and tools in education and training. Dans J. van den Akker, R. M. Branch, K. Gustafson N. Nieveen et T. Plomp (dir.). *Principles and methods of development research*, (p. 1-14). Springer : Dordrecht.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S. et Bay-Williams, J. M. B. (2013). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (8th ed.). Boston: Pearson.
- Van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities, *Journal of Learning Disabilities*, 39(6), 496-506.
- van Someren, M. W., Barnard, Y. F. et Sandberg, J. A. C. (1994). *The think aloud method: a practical approach to modelling cognitive processes*. Repéré UvA-DARE, the institutional repository of the University of Amsterdam (UvA) <http://hdl.handle.net/11245/2.149552>
- Verdine, B. N, Golinkoff, R. M., Hirsh-Pasek, K. et Newcombe, N. (2017). Links Between Spatial and Mathematical Skills across the Preschool Years. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 82(1),77-85.
- Vergnaud, G. (2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. Dans J. Portugais (dir.), *Actes du Colloque GDM 2001, La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation*, (p. 6-27). Université de Montréal.
- Vergnaud G. (1991). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2-3), 133-170.
- Wai, J., Lubinski, D. et Benbow, C. P. (2009). Spatial Ability for STEM Domains: Aligning Over 50 Years of Cumulative Psychological Knowledge Solidifies Its Importance. *Journal of Educational Psychology*, 101 (4), 817- 835.
- Webb, N. (1991). Task-related verbal interaction as mathematics learning in small groups, *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(5), 366-389.
- Weckbacher, L. M. (2007). *The role of visualization in geometric problem solving*. [Thèse de Doctorat, University of California].

- Weill-Fassina, A. et Rachedi, Y. (1993). Mises en relation d'un espace réel et de sa figuration sur un plan par des adultes de bas niveau de formation. Dans A. Bessot et P. Vérillon (dir.), *Espaces graphiques et graphismes d'espace. Contribution de psychologues et didacticiens à l'étude de la construction des savoirs spatiaux*, (p. 57-86). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Wessels, D. et Van Niekerk, R. (1998) Semiotic models and the development of secondary spatial knowledge, *Short oral communication at the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Stellenbosch, South Africa.
- Wheatley, G. H. (1990). Spatial Sense and Mathematics Learning. *The Arithmetic Teacher*, 37(6), 10-11.
- Whiteley, W. (2004). Teaching to see like a mathematician. Dans G. Malcolm (dir.), *Multidisciplinary approaches to visual representations and interpretations. Studies in multidisciplinary (vol 2)* (p. 279-292). Amsterdam: Elsevier.
- Whiteley, W., Sinclair, N. et Davis, B. (2015). What is spatial reasoning? Dans B. Davis and the Spatial Reasoning Study Group (dir.), *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions and speculations* (p. 3-14). New York: Taylor and Francis.
- Wolf, A. (1998). Competence-based assessment: does it shift the demarcation line? Dans W. J. Nijhof et J. N. Streumer (dir.), *Key qualifications in work and education*, (p. 207-220). Dordrecht: Kluwer Academic Press.
- Xie, F., Zhang, L., Chen, X. et Xin, Z. (2020). Is Spatial Ability Related to Mathematical Ability: a Meta-analysis. *Educational Psychology Review*, 32, 113-155.