

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

MAXIMISATION DES DIVIDENDES SOUMIS À UNE FONCTION DE FRAIS AFFINE DANS DES MODÈLES
DIFFUSIFS

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
ELIAS BRESCH

OCTOBRE 2024

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.12-2023). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Un grand merci à Jean-François Renaud pour m'avoir enseigné les rudiments du contrôle stochastique optimal et pour m'avoir guidé tout au long de la rédaction de ce mémoire. Merci également à mes parents, ainsi qu'à mes amis Arthur, Tim et Hugo, pour leur bienveillant soutien.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES	vi
LISTE DES TABLEAUX	vii
ACRONYMES	viii
NOTATION	ix
RÉSUMÉ	x
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 PROBLÈME GÉNÉRAL DE CONTRÔLE IMPULSIONNEL	3
1.1 Processus de réserves et stratégies de dividendes	3
1.2 Fonction d'utilité	4
1.3 Fonction valeur et stratégie de dividendes optimale	5
1.4 Opérateur d'intervention	6
1.5 Principe de la programmation dynamique	7
1.6 Equation de la programmation dynamique.	8
1.7 Principe de vérification.....	10
CHAPITRE 2 DYNAMIQUE MBA ET FONCTION D'UTILITÉ AFFINE	12
2.1 Choix du candidat pour la fonction valeur	12
2.2 Vérification	16
2.3 Solution au problème de contrôle.....	18
CHAPITRE 3 DYNAMIQUE ORNSTEIN - UHLENBECK ET FONCTION D'UTILITÉ AFFINE	20
3.1 Hypothèses du modèle	20
3.2 Solution au problème de contrôle.....	22
3.3 Propriétés analytiques de la fonction valeur.....	24

3.4	Algorithme de recherche de stratégies optimales	29
3.5	Preuve des Théorèmes 3.1, 3.2, et 3.3	30
3.6	Résolution du problème dans des cas particuliers.....	44
3.6.1	Sensibilité du modèle aux paramètres	44
3.6.2	Exemples de stratégies barrière	46
3.6.3	Exemple de stratégie de ruine	47
3.7	Simulation de stratégies de dividendes	48
3.7.1	Algorithme de simulation de trajectoires du processus de réserves	48
3.7.2	Exemples numériques	50
CHAPITRE 4	DYNAMIQUE ORNSTEIN - UHLENBECK ET FONCTION D'UTILITÉ CONCAVE	53
4.1	Hypothèses du modèle	53
4.2	Conjectures et solution au problème de contrôle	54
4.3	Application numérique.....	58
CONCLUSION		72
ANNEXE A	PROPRIÉTÉ MARKOVIENNE DU PROCESSUS DE RÉSERVES	73
A.1	Preuve de l'inégalité (1.16)	74
ANNEXE B	PREUVE DU THÉORÈME 2.1	77
ANNEXE C	FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES CONFLUENTES	82
C.1	Fonction hypergéométrique confluyente de première espèce	82
C.2	Fonction hypergéométrique confluyente de seconde espèce.....	85
C.3	Propriétés.....	86
ANNEXE D	THÉORÈMES UTILES	91
ANNEXE E	CODE MATLAB DE L'ALGORITHME 1	95

ANNEXE F CODE MATLAB DE L'ALGORITHME 2 100

ANNEXE G CODE MATLAB DE L'ALGORITHME 3 104

BIBLIOGRAPHIE 114

TABLE DES FIGURES

Figure 3.1	Représentation graphique de stratégies barrière optimales pour deux valeurs de r	46
Figure 3.2	Courbes de V pour différentes valeurs de d_0	47
Figure 3.3	Identification du niveau x^* d'une stratégie de ruine optimale	48
Figure 3.4	Trajectoires de X^*	51
Figure 3.5	Trajectoires de X^{D_1}	52
Figure 4.1	Courbes de V et $\mathcal{L}V$ pour $\gamma = 1$	63
Figure 4.2	Courbes de Φ_x pour $x \in (\rho/\lambda, \hat{x} + \rho/\lambda)$ et $\gamma = 1$	64
Figure 4.3	Courbes de Φ_x pour $x \in (\hat{x} + \rho/\lambda, \infty)$ et $\gamma = 1$	65
Figure 4.4	Courbe de Ψ pour $\gamma = 1$	66
Figure 4.5	Courbes de V et $\mathcal{L}V$ pour $\gamma = 0.8$	68
Figure 4.6	Courbes de Φ_x pour $x \in (\rho/\lambda, \hat{x} + \rho/\lambda)$ et $\gamma = 0.8$	69
Figure 4.7	Courbes de Φ_x pour $x \in (\hat{x} + \rho/\lambda, \infty)$ et $\gamma = 0.8$	70
Figure 4.8	Courbe de Ψ pour $\gamma = 0.8$	71
Figure B.1	Représentation graphique de $\mathcal{I}(A)$	81

LISTE DES TABLEAUX

Table 3.1	Stratégies barrière optimales pour différentes valeurs de d_0	46
Table 4.1	Stratégies barrière $(\hat{x}, x^*)$ pour $\gamma = 1$	62
Table 4.2	Stratégies barrière $(\hat{x}, x^*)$ pour $\gamma = 0.8$	67

ACRONYMES

càdlàg Continu à droite, limite à gauche.

EDO Equation Différentielle Ordinaire.

EDS Equation Différentielle Stochastique.

HJB Hamilton - Jacobi - Bellman.

MBA Mouvement Brownien Arithmétique.

MBS Mouvement Brownien Standard.

OU Ornstein - Uhlenbeck.

TVI Théorème des Valeurs Intermédiaires.

NOTATION

Ensembles

$\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs.

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.

$\mathbb{K} = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$.

$\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{K}_+ = \{x \in \mathbb{K} : x \geq 0\}$.

$\mathbb{K}_- = \{x \in \mathbb{K} : x \leq 0\}$.

$\mathbb{K}_+^* = \{x \in \mathbb{K} : x > 0\}$.

$\mathbb{K}_-^* = \{x \in \mathbb{K} : x < 0\}$.

Symboles

$a \wedge b = \min\{a, b\}$.

$e = 2.71828\dots$: base du logarithme naturel.

RÉSUMÉ

La distribution de dividendes dans une entreprise est cruciale, car elle représente la rémunération des actionnaires, qui ont apporté le capital social. Cette distribution peut également favoriser la croissance de l'entreprise en permettant aux actionnaires d'y réinvestir les bénéfices. Cependant, les gestionnaires doivent équilibrer cette distribution avec la nécessité de conserver des liquidités pour éviter l'insolvabilité. Afin de déterminer une politique de distribution de dividendes efficace, les gestionnaires établissent une stratégie en tenant compte des réserves financières de l'entreprise et des coûts associés aux frais de transaction et aux impôts. Ce mémoire vise à identifier les stratégies optimales, en mesurant leur performance en terme d'utilité. L'étude propose une méthode générale de résolution, en appliquant des techniques issues de la Théorie du contrôle stochastique optimal, telles que la programmation dynamique et le principe de vérification. Nous examinons ensuite plusieurs modèles de complexité croissante, en considérant différents types de dynamiques de réserves et de fonctions d'utilité. Les résultats montrent que les stratégies optimales peuvent varier selon les conditions, et suggèrent des avenues pour de futures recherches, en étudiant notamment d'autres combinaisons de dynamiques de réserves et fonctions d'utilité.

INTRODUCTION

La politique de distribution de dividendes est un élément majeur de la gestion d'une entreprise. En effet, les dividendes constituent la rémunération des actionnaires, qui apportent le capital social. De plus, la distribution de tout ou une partie des bénéfices sous forme de dividendes peut permettre aux actionnaires de réinvestir cet argent dans l'entreprise, en vue de sa croissance. Il est donc dans l'intérêt des gestionnaires de mettre en place une stratégie visant à maximiser le montant des dividendes. Cependant, il est nécessaire de conserver un montant suffisant de liquidités afin de contrôler le risque d'insolvabilité de l'entreprise. L'objectif de ce mémoire est de traiter le problème d'optimisation des dividendes sous l'angle d'un problème de contrôle stochastique impulsif.

Nous modélisons les réserves de l'entreprise par un processus d'Itô, noté X . Les gestionnaires de l'entreprise décident d'une stratégie de dividendes en choisissant les montants de dividendes ζ_i ainsi que leurs dates de versement τ_i jusqu'à la ruine de l'entreprise, définie comme l'instant où les réserves s'épuisent. Dans le cadre de notre modélisation, nous prenons également en compte le fait que pour chaque dividende versé, il est possible que l'entreprise et l'actionnaire doivent payer respectivement des frais de transaction et des impôts. Le problème consiste alors à se demander s'il existe des stratégies *meilleures* que les autres, et le cas échéant, trouver une méthode pour identifier de telles stratégies, que l'on qualifiera d'*optimales*. Pour ce faire, il est nécessaire de se munir d'un critère de comparaison. Il est naturel de considérer comme critère l'*utilité* procurée par le montant total actualisé des dividendes versés à l'actionnaire. Historiquement, ce critère fut introduit comme une mesure de risque succédant à la probabilité de ruine. En effet, des chercheurs (voir les articles de (Albrecher et Thonhauser, 2009) et (Avanzi, 2009) pour plus de détails) remarquèrent que le critère de minimisation de la probabilité de ruine sur un horizon infini implique que l'entreprise devrait laisser croître ses réserves jusqu'à dépasser tout niveau réaliste. L'optimisation des dividendes permet quant à elle de contourner ce problème. Nous affectons alors à l'actionnaire une fonction d'utilité, notée g . Nous pourrions alors mesurer l'utilité d'une stratégie de dividendes à l'aide d'une *fonction de performance*, notée J , dépendant de g .

Dans un premier chapitre, nous présenterons une méthode générale de résolution du problème d'optimisation des dividendes à l'aide de techniques de contrôle stochastique optimal en temps continu, comme le *principe de la programmation dynamique*, l'*équation de Hamilton-Jacobi-Bellman* (HJB) et le *principe de vérification*. Dans les chapitres suivants, nous résoudrons le problème dans des cas particuliers de complexité croissante. Pour tous les modèles où la fonction d'utilité est affine, nous verrons que, lorsqu'il existe une stratégie optimale, celle-ci prend la forme d'une *stratégie barrière* de seuil $\hat{x}$ et de niveau x^* . Plus précisé-

ment, une telle stratégie consiste à verser un dividende lorsque le processus de réserves atteint le niveau x^* , ce qui a pour effet de ramener les réserves au seuil $\hat{x}$. Lorsque $\hat{x} = 0$, un seul dividende est versé et on parlera de *stratégie de ruine*. Dans le Chapitre 2, nous supposerons que X est un mouvement brownien arithmétique, et que g est affine. Ce modèle généralise le problème B de (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995), en prenant en compte les impôts, en plus des frais de transaction. Nous détaillons la résolution de l'équation HJB en annexe, et traitons également un cas supplémentaire du problème non mentionné dans l'article de (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995). Dans le Chapitre 3, nous conserverons la même fonction d'utilité que dans le Chapitre 2 mais supposerons que X est un processus Ornstein - Uhlenbeck. Ce problème est traité dans l'article de (Paulsen, 2007) pour une plus grande classe de dynamiques mais une fonction d'utilité moins générale. Nous précisons les conditions d'existence d'une stratégie optimale et détaillons les résultats à travers des preuves et lemmes supplémentaires et en dédiant notamment une annexe à l'étude des fonctions hypergéométriques confluentes, utiles pour la résolution de l'équation HJB. Nous proposons également des simulations numériques et présentons des résultats de sensibilité des stratégies optimales aux paramètres du problème. Dans le Chapitre 4, nous conserverons la même dynamique que dans le Chapitre 3 mais supposerons que la fonction d'utilité peut être strictement concave, ou convexe. Ce problème est traité dans l'article de (Cadenillas *et al.*, 2007) sur la base de conjectures, et en l'absence de frais de transaction pour l'entreprise. A la différence de (Cadenillas *et al.*, 2007), nous identifions des cas où les conjectures ne s'appliquent pas. Nous montrerons par conséquent que les stratégies optimales ne prennent pas nécessairement la forme de stratégies barrière. Ce dernier chapitre motive ainsi de futures recherches de stratégies optimales en considérant d'autres combinaisons de dynamiques de réserves et de fonctions d'utilité.

CHAPITRE 1

PROBLÈME GÉNÉRAL DE CONTRÔLE IMPULSIONNEL

Dans ce premier chapitre, nous posons le problème général d'optimisation des dividendes et présentons un cadre de résolution à l'aide de techniques de contrôle stochastique impulsionnel. Nous nous inspirons pour ce faire des notes de cours de (Ross, 2008).

1.1 Processus de réserves et stratégies de dividendes

Considérons un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ satisfaisant les conditions usuelles. On suppose que, sans versement de dividendes, le processus de réserves X d'une entreprise suit la dynamique

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.1)$$

où B est un $\mathbb{F}$ -mouvement brownien standard, et μ, σ sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$. On considère que l'entreprise dispose d'un capital initial de montant $X_0 = x \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'il existe une unique (au sens de l'indistinguabilité) solution X^x à l'équation différentielle stochastique (1.1) de condition initiale $X_0^x = x$.

Les gestionnaires *contrôlent* les réserves de l'entreprise, qui évoluent de façon aléatoire, en intervenant à des instants discrets. Chercher une stratégie (de versement) de dividendes *optimale* constitue ainsi un *problème de contrôle stochastique impulsionnel*. Plus précisément, les gestionnaires de l'entreprise décident d'une stratégie de dividendes en choisissant les dates de versement $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$, et les montants de dividendes associés $\{\zeta_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$.

Définition 1.1 Une stratégie de dividendes $D = \{\tau_i, \zeta_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ est composée de :

1. Une suite de $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ tels que $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots$;
2. Une suite de variables aléatoires réelles positives $\{\zeta_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, ζ_i est $\mathcal{F}_{\tau_i}$ -mesurable.

Nous noterons $\mathcal{S}$ l'ensemble des $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt. Etant donnée une stratégie de dividendes D , on définit le *processus de dividendes* $(D_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ comme le processus continu à droite et avec limite à gauche (càdlàg)

défini par

$$D_t = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \zeta_i \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}}, \quad (1.2)$$

où $x \mapsto \mathbb{1}_{\{x \in A\}}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble A . Pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, la quantité D_t représente le montant cumulé de dividendes versés jusqu'à la date t . À chaque versement de dividende, on considère que l'entreprise paie des frais de transaction composés d'une partie fixe et d'une partie variable représentés respectivement par les paramètres $d_0, d_1 \in \mathbb{R}_+$. Le processus de frais $\bar{D}$ est alors défini par

$$\bar{D}_t = d_0 \sum_{s \leq t} \mathbb{1}_{\{\Delta D_s > 0\}} + d_1 D_t = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} (d_1 \zeta_i + d_0) \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}}, \quad (1.3)$$

où, pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $\Delta D_t = D_t - D_{t-}$, et $D_{t-} = \lim_{s \uparrow t} D_s$. La quantité $\bar{D}_t$ représente le montant cumulé de frais de transaction payés jusqu'à la date t . Observons que le processus de frais $\bar{D}$ est càdlàg et déterminé par le processus de dividendes D . À chaque instant de versement de dividende, le processus de réserves diminue du montant de ce dividende et des coûts associés; ainsi pour une stratégie donnée D , le processus de réserves contrôlé X^D évolue selon la dynamique suivante :

$$dX_t^D = \mu(X_t^D)dt + \sigma(X_t^D)dB_t - dD_t - d\bar{D}_t. \quad (1.4)$$

Définition 1.2 Une stratégie de dividendes $D = \{\tau_i, \zeta_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ est dite admissible si pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique (au sens de l'indistinguabilité) processus $\{X_t^D\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ayant pour dynamique (1.4) et tel que $X_0^D = x$. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des stratégies admissibles. Etant donnée une stratégie $D \in \mathcal{D}$, on appellera X^D le processus de réserves contrôlé (selon la stratégie D) et X le processus de réserves non contrôlé.

Etant donnée une stratégie $D \in \mathcal{D}$, on définit l'instant de ruine de l'entreprise par

$$T := T^D := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : X_t^D = 0\}. \quad (1.5)$$

Cet instant correspond à la date où les réserves de l'entreprise s'épuisent. On suppose en outre qu'aucun capital extérieur n'est apporté à l'entreprise en plus du capital initial. Cela implique que la ruine est définitive; c'est-à-dire qu'on a $X_t^D = 0$ pour tout $t \geq T$.

1.2 Fonction d'utilité

Nous supposons que les gestionnaires de l'entreprise agissent dans l'intérêt des actionnaires (que nous supposons au nombre de un, par simplicité, mais sans perte de généralité), mais sont également soumis au

risque de ruine. Nous attribuons à l'actionnaire une fonction d'utilité $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de la forme

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma}(-K + k\zeta)^\gamma & \text{si } \zeta \geq K/k, \\ 0 & \text{si } \zeta < K/k, \end{cases} \quad (1.6)$$

où $k \in (0, 1]$, $K \in \mathbb{R}_+$ et $\gamma \in (0, 1]$ sont des constantes. On remarque que sur l'intervalle $(K/k, \infty)$, g est strictement concave si $\gamma < 1$, et strictement convexe si $\gamma > 1$, car $g''(\zeta) = k(\gamma - 1)(-K + k\zeta)^{\gamma-2}$. Une fonction d'utilité concave est donc pertinente lorsque l'actionnaire est averse au risque. À l'inverse, une fonction d'utilité convexe traduirait une appétence au risque. Dans le cas où $\gamma = 1$, c'est-à-dire lorsque l'actionnaire est neutre au risque, la fonction d'utilité peut s'écrire, pour $\zeta \geq K/k$,

$$g(\zeta) = \zeta - (1 - k)\zeta - K. \quad (1.7)$$

La quantité $1 - k$ s'interprète alors comme un taux d'imposition payé par l'actionnaire sur le montant de dividendes reçu, et K peut, par exemple, représenter des frais de courtage ou bien un montant d'impôts fixe. Lorsque l'actionnaire est neutre au risque, l'utilité $g(\zeta)$ s'interprète donc comme le montant net d'impôts et d'autres frais conservé par l'actionnaire après réception du dividende ζ .

Nous remarquons que g est affine lorsque $\gamma = 1$, ce qui simplifiera les calculs dans les Chapitres 2 et 3.

1.3 Fonction valeur et stratégie de dividendes optimale

Les gestionnaires de l'entreprise souhaitent trouver une stratégie de dividendes dite *optimale*, au sens où elle maximise l'utilité procurée à l'actionnaire par l'ensemble des dividendes qui lui seront versés. On parlera aussi parfois de *meilleure* stratégie de dividendes. Il est donc naturel de chercher à maximiser, sur l'ensemble des stratégies admissibles $\mathcal{D}$, l'utilité espérée des montants actualisés au taux sans risque $r \in \mathbb{R}_+^*$ des dividendes versés jusqu'à la ruine de l'entreprise, définie par la quantité suivante :

$$J(x, D) := \mathbb{E}_x \left[\sum_{i=1}^{\infty} e^{-r\tau_i} g(\zeta_i) \mathbb{1}_{\{\tau_i < T\}} \right],$$

où $\mathbb{E}_x[\cdot]$ est l'espérance sous la mesure $\mathbb{P}_x := \mathbb{P}(\cdot | X_{0-}^D = x)$. On prend $X_{0-}^D = \lim_{s \uparrow 0} X_s^D$ au lieu de X_0^D , car il est possible d'intervenir (verser un dividende) au temps zéro. On appellera J la *fonction de performance*, car elle permet de mesurer la performance, en terme d'utilité, d'une stratégie de dividendes admissible. Etant donné le capital initial x , pour tout $D \in \mathcal{D}$, on appellera donc la quantité $J(x, D)$ la *performance* de la stratégie D . En outre, on définit V , la *fonction valeur* du problème, par

$$V(x) = \sup_{D \in \mathcal{D}} J(x, D), \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (1.8)$$

La quantité $V(x)$ représente la meilleure utilité qu'il est possible de réaliser parmi les stratégies admissibles étant donné que l'entreprise possède un capital initial de montant x . Le but du problème est alors de trouver, s'il en existe au moins une, une stratégie optimale D^* permettant effectivement à l'actionnaire d'obtenir cette utilité maximale espérée, c'est-à-dire telle que $J(x, D^*) = V(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Notons qu'on a $V(0) = 0$; en effet, intuitivement, si les réserves de l'entreprise sont nulles, l'actionnaire ne recevra aucun dividende et l'utilité de l'actionnaire sera nulle. On peut aussi s'en convaincre en remarquant que quelque soit $D \in \mathcal{D}$, si $x = 0$, alors par définition (1.5), on a $T = 0$, ce qui implique $J(0, D) = 0$, puis $V(0) = 0$.

1.4 Opérateur d'intervention

Considérons que le processus de réserves est actuellement dans l'état $x \in \mathbb{R}_+^*$. Nous allons motiver la définition de la *valeur d'intervention*, notée $\mathcal{K}V(x)$. Nous définissons cette quantité comme la meilleure utilité qu'il est possible de réaliser dans le cas où les gestionnaires sont contraints de verser immédiatement un dividende. Autrement dit, la valeur d'intervention correspond à l'utilité de la stratégie consistant à exercer immédiatement la *meilleure* action possible (verser un dividende de montant optimal), puis adopter une stratégie optimale par la suite. En agissant ainsi, le processus de réserves diminue immédiatement du montant du dividende versé ainsi que des coûts associés; la nouvelle valeur des réserves juste après le versement du dividende optimal de montant (à déterminer) ζ_x^* est donc

$$x - \zeta_x^* - d_0 - d_1 \zeta_x^*,$$

et, dans le même temps, l'actionnaire obtient l'utilité $g(\zeta_x^*)$. Dans un second temps, l'entreprise adopte une stratégie optimale dont la valeur est, par définition, donnée par

$$V(x - d_0 - (1 + d_1)\zeta_x^*).$$

Afin d'alléger l'écriture, posons $f(\zeta) := d_0 + (1 + d_1)\zeta$, pour $\zeta \in \mathbb{R}_+$. On appellera f la fonction de frais. L'action de verser un dividende de montant $\zeta \in \mathbb{R}_+^*$ lorsque le processus de réserves est dans l'état x puis adopter une stratégie optimale par la suite procure alors une utilité espérée totale $V(x - f(\zeta)) + g(\zeta)$. Ainsi, si les gestionnaires décident d'intervenir immédiatement, la meilleure action possible consiste à verser un dividende dont le montant permet de maximiser cette utilité totale. Cela nous amène à définir la quantité $\mathcal{K}V(x)$ par

$$\mathcal{K}V(x) = \sup_{\zeta \in \mathcal{Z}_x} [V(x - f(\zeta)) + g(\zeta)],$$

où

$$\mathcal{Z}_x := \{z \in \mathbb{R}_+ : g(z) \geq 0, x - f(z) \geq 0\}.$$

Le montant de dividende optimal est donc donné par

$$\zeta_x^* = \operatorname{Arg} \max_{\zeta \in \mathcal{Z}_x} [V(x - f(\zeta)) + g(\zeta)].$$

Comme il n'est pas forcément optimal de verser immédiatement un dividende, on s'attend à avoir l'inégalité

$$\mathcal{K}V(x) \leq V(x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Plus généralement, définissons l'*opérateur d'intervention* $\mathcal{K}$ comme l'opérateur associant à une fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction $\mathcal{K}\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathcal{K}\phi(x) = \sup_{\zeta \in \mathcal{Z}_x} [\phi(x - f(\zeta)) + g(\zeta)].$$

On peut définir, à partir de l'opérateur d'intervention, la *région de non-intervention* R comme l'ensemble des états x où il n'est pas optimal de verser un dividende :

$$R = \{x \in \mathbb{R}_+ : \mathcal{K}V(x) < V(x)\}. \quad (1.9)$$

Remarque. Ces définitions ont été introduites ici de façon heuristique, mais seront utilisées de façon rigoureuse dans les prochains chapitres.

1.5 Principe de la programmation dynamique

Afin de motiver une méthode permettant de trouver des stratégies optimales, nous allons établir le *principe de la programmation dynamique*, qui nous permettra de déduire l'*équation de la programmation dynamique*, dont la fonction valeur V devrait être solution. Soit $\tau \in \mathcal{S}$ tel qu'on ait, presque sûrement, $\tau < T$, où T est l'instant de ruine du processus de réserves non contrôlé. Supposons que l'entreprise dispose d'un capital initial $x \in \mathbb{R}_+^*$ et adopte la stratégie D^τ suivante : ne pas intervenir avant τ , verser un dividende de montant *optimal* à l'instant τ , puis mettre en oeuvre une stratégie optimale par la suite. Nous cherchons à déterminer la performance de cette stratégie. Soit une réalisation $\omega \in \Omega$, et $t \mapsto X_t^{D^\tau}(\omega)$ une trajectoire du processus de réserves contrôlé selon la stratégie D^τ . Avant l'instant d'intervention $\tau(\omega)$, l'actionnaire ne reçoit aucun dividende. Juste avant le versement du premier dividende, en $\tau(\omega)-$, la valeur du processus de réserves est $X_{\tau(\omega)-}^{D^\tau}(\omega)$. Par définition de la valeur d'intervention, l'utilité réalisée vaut $\mathcal{K}V(X_{\tau(\omega)-}^{D^\tau}(\omega))$ à l'instant $\tau(\omega)-$, et $e^{-r\tau(\omega)}\mathcal{K}V(X_{\tau(\omega)-}^{D^\tau}(\omega))$ à l'instant $t = 0$. Finalement, la performance de la stratégie D^τ

est égale à la somme des utilités pour chaque réalisation possible $\omega \in \Omega$, pondérée par leurs probabilités, soit

$$J(x, D^\tau) = \int_{\Omega} e^{-r\tau(\omega)} \mathcal{K}V(X_{\tau(\omega)-}^{D^\tau}(\omega)) d\mathbb{P}_x(\omega) = \mathbb{E}_x [e^{-r\tau} \mathcal{K}V(X_{\tau-}^{D^\tau})].$$

Nous pouvons à présent établir le principe de la programmation dynamique. La stratégie D^τ n'étant pas forcément optimale, on a l'inégalité

$$V(x) \geq \mathbb{E}_x [e^{-r\tau} \mathcal{K}V(X_{\tau-}^{D^\tau})], \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (1.10)$$

Considérons à présent que l'entreprise adopte la même stratégie, mais avec τ remplacé par τ^* , défini comme le premier instant auquel il est optimal de verser un dividende. Puisque l'entreprise agit désormais à chaque instant de façon optimale, cette stratégie correspond globalement à une stratégie optimale D^* , dont la performance est, par définition, égale à $V(x)$. Notons X^* le processus de réserves contrôlé selon D^* . D'après ce qui précède, la performance de D^* est égale à $\mathbb{E}_x [e^{-r\tau^*} \mathcal{K}V(X_{\tau^*-}^*)]$. De plus, puisqu'il est optimal d'intervenir en τ^* , on devrait avoir

$$\mathcal{K}V(X_{\tau^*-}^*) = V(X_{\tau^*-}^*).$$

On devrait donc avoir l'égalité

$$V(x) = \mathbb{E}_x [e^{-r\tau^*} V(X_{\tau^*-}^*)]. \quad (1.11)$$

En combinant (1.10) et (1.11), on obtient le principe de la programmation dynamique :

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} \mathbb{E}_x [e^{-r\tau} \mathcal{K}V(X_{\tau-}^{D^\tau}) \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}], \quad (1.12)$$

Le principe de la programmation dynamique (1.12) nous dit simplement que si l'entreprise commence à agir de façon optimale à partir d'un instant différent du premier instant où il est optimal de verser un dividende, la performance dégagée sera moindre que si l'on avait commencé à agir de façon optimale en τ^* .

1.6 Equation de la programmation dynamique.

Nous allons à présent nous servir du principe de la programmation dynamique pour déduire une équation différentielle que devrait vérifier la fonction valeur, l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Celle-ci nous servira à identifier la fonction valeur ainsi qu'une stratégie optimale. En pratique, on trouvera une solution $\tilde{V}$ à l'équation HJB, puis on vérifiera que cette solution correspond effectivement à la fonction valeur du problème, c'est-à-dire que $\tilde{V} = V$. Pour ce faire, on montrera que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et toute stratégie $D \in \mathcal{D}$, on a $\tilde{V}(x) \geq J(x, D)$. Ainsi pour identifier une stratégie optimale, il suffira de trouver

$D^* \in \mathcal{D}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $J(x, D^*) = \tilde{V}(x)$. Par définition de V en (1.8), cela impliquera que $\tilde{V} = V$ et que D^* est bien une stratégie optimale.

Nous allons procéder de façon heuristique dans le but de motiver l'équation HJB (1.22). Soit $\tau \in \mathcal{S}$ presque sûrement fini, et D^τ la stratégie décrite dans la section précédente. Supposons que la fonction valeur V est de classe C^2 . Commençons par appliquer la Formule d'Itô sur l'intervalle $[0, t]$ à la fonction $e^{-rt}V(X_t^{D^\tau})$. Après avoir évalué l'équation obtenue en $t = \tau -$, nous obtenons, par continuité de l'exponentielle et des intégrales,

$$e^{-r\tau}V(X_{\tau-}^{D^\tau}) = V(X_0^{D^\tau}) + \int_0^\tau e^{-rs}\mathcal{L}V(X_s^{D^\tau})ds + \int_0^\tau e^{-rs}\sigma(X_s^{D^\tau})V'(X_s^{D^\tau})dB_s, \quad (1.13)$$

où $\mathcal{L}$ désigne l'opérateur infinitésimal de X , associant à toute fonction ϕ de classe C^2 la fonction $\mathcal{L}\phi$ définie par

$$\mathcal{L}\phi(x) = -r\phi(x) + \mu(x)\phi'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\phi''(x). \quad (1.14)$$

Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $M(t) = \int_0^t e^{-rs}\sigma(X_s^{D^\tau})V'(X_s^{D^\tau})dB_s$. Supposons que σ et X^{D^τ} soient bornés sur les compacts. Alors comme V' est supposée continue, l'intégrande du processus M est bornée, donc M est une martingale d'espérance nulle. Le temps d'arrêt τ étant presque sûrement fini, le Théorème d'arrêt (D.7) nous donne

$$\mathbb{E}_x[M(\tau)] = \mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau e^{-rs}\sigma(X_s^{D^\tau})V'(X_s^{D^\tau})dB_s\right] = 0.$$

En prenant l'espérance dans (1.13), on obtient alors

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau e^{-rs}\mathcal{L}V(X_s^{D^\tau})ds\right] = \mathbb{E}_x[e^{-r\tau}V(X_{\tau-}^{D^\tau})] - V(x). \quad (1.15)$$

On montre en Annexe A.1 à partir du principe de la programmation dynamique (1.12) qu'on a, pour tout $\tau \in \mathcal{S}$ presque sûrement fini,

$$V(x) \geq \mathbb{E}_x[e^{-r\tau}V(X_{\tau-}^{D^\tau})]. \quad (1.16)$$

On déduit alors de (1.15) et (1.16) l'inégalité

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau e^{-rs}\mathcal{L}V(X_s^{D^\tau})ds\right] \leq 0.$$

Soit $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de temps d'arrêt tendant vers 0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $\tau_n > 0$, presque sûrement. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}_x\left[\frac{1}{\tau_n} \int_0^{\tau_n} e^{-rs}\mathcal{L}V(X_s^{D^{\tau_n}})ds\right] \leq 0. \quad (1.17)$$

En prenant la limite quand n tend vers l'infini, on obtient donc

$$\mathcal{L}V(x) \leq 0. \quad (1.18)$$

En remplaçant dans ce qui précède τ par le temps d'intervention optimal τ^* décrit dans la partie précédente, on obtient de même, à partir du principe de la programmation dynamique (1.12), l'égalité

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau^*} e^{-rs} \mathcal{L}V(X_s^*) ds \right] = 0.$$

Si $\tau^* = 0$, alors il est optimal d'exercer immédiatement et on a

$$\mathcal{K}V(x) = V(x). \quad (1.19)$$

Supposons à présent que $\tau^* > 0$, c'est-à-dire qu'il n'est pas optimal de verser un dividende à l'instant initial, ce qui peut également s'exprimer à l'aide de l'opérateur d'intervention par

$$\mathcal{K}V(x) < V(x). \quad (1.20)$$

On montre alors de même en Annexe A.1 que pour tout $\tau \in \mathcal{S}$ tel que $\tau \leq \tau^*$ presque sûrement, on a

$$V(x) = \mathbb{E}_x [e^{-r\tau} V(X_{\tau-}^*)]$$

Soit $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de temps d'arrêt tendant vers 0 telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait presque sûrement $\tau_n \leq \tau^*$ et $\tau_n > 0$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}_x \left[\frac{1}{\tau_n} \int_0^{\tau_n} e^{-rs} \mathcal{L}V(X_s^*) ds \right] = 0, \quad (1.21)$$

et de la même façon qu'en (1.17), en faisant tendre n vers l'infini, on obtient l'équation HJB :

$$\mathcal{L}V(x) = 0, \quad (1.22)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. On peut résumer les équations (1.18), (1.19), (1.20) et (1.22) par l'équation de la programmation dynamique

$$\max\{\mathcal{L}V(x), \mathcal{K}V(x) - V(x)\} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^*. \quad (1.23)$$

1.7 Principe de vérification

Afin de trouver des stratégies optimales, il nous faut tout d'abord identifier la fonction valeur V du problème. Nous avons vu que V devrait vérifier l'équation de la programmation dynamique (1.23). Supposons en avoir trouvé une solution et notons la $\tilde{V}$. Supposons que le processus de réserves de l'entreprise soit actuellement dans l'état $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons, pour tout $\zeta \in \mathbb{R}_+$,

$$\Theta_x(\zeta) = \tilde{V}(x - f(\zeta)) + g(\zeta).$$

S'il est optimal d'intervenir immédiatement, c'est-à-dire que $x \notin R$, alors, par définition de l'opérateur d'intervention en (1.4), on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{K}\tilde{V}(x) = \sup_{\zeta \in \mathcal{Z}_x} \Theta_x(\zeta)$. Cela suggère donc que le montant de dividende optimal est donné par

$$\zeta^*(x) = \text{Arg max}_{\zeta \in \mathcal{Z}_x} \Theta_x(\zeta).$$

S'il n'est pas optimal d'exercer immédiatement, le prochain instant d'exercice optimal est le moment où le processus quitte la région de non-intervention R . Si $X_0 = x \in R$, on cherche donc une stratégie optimale $D^* = \{\zeta_i^*, \tau_i^*\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ de façon récursive sous la forme

$$\begin{cases} \tau_0^* &:= 0, \\ \tau_i^* &= \inf\{t \geq \tau_{i-1}^* : X_t^* \notin R\}, \\ \zeta_i^* &= \text{Arg max}_{\zeta \in \mathcal{Z}_x} \Theta_{X_{\tau_i^*}^*}(\zeta), \end{cases} \quad (1.24)$$

où X^* est le processus de réserves contrôlé selon la stratégie D^* . Si $X_0 = x \notin R$, alors on verse immédiatement en $\tau_1^* := 0$ un dividende de montant optimal $\zeta_1^* = \text{Arg max}_{\zeta \in \mathcal{Z}_x} \Theta_x(\zeta)$, puis on procède de façon récursive comme ci-dessus. Après avoir identifié les candidats pour la fonction valeur $\tilde{V}$ et la stratégie optimale D^* , on vérifiera que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et toute stratégie D , on ait

$$J(x, D^*) \geq J(x, D). \quad (1.25)$$

Par construction de D^* et $\tilde{V}$, nous pourrions alors montrer que

$$\tilde{V}(x) = J(x, D^*). \quad (1.26)$$

Par définition de V , (1.25) et (1.26) nous permettront de conclure que

$$\tilde{V}(x) = V(x) = J(x, D^*), \quad (1.27)$$

c'est-à-dire que la stratégie D^* est bien une stratégie optimale pour le problème.

CHAPITRE 2

DYNAMIQUE MBA ET FONCTION D'UTILITÉ AFFINE

Dans ce chapitre, nous supposons que la fonction d'utilité est de la forme (1.6) avec $\gamma = 1$, c'est-à-dire

$$g(\zeta) = \begin{cases} -K + k\zeta & \text{si } \zeta \geq K/k, \\ 0 & \text{si } \zeta < K/k. \end{cases}$$

où $k \in [0, 1]$ et $K \in \mathbb{R}_+$, et que les fonctions μ et σ de la dynamique (1.1) du processus de réserves non contrôlé sont constantes et strictement positives. Nous avons donc

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

La tendance $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ représente le rendement dégagé par les bénéfices de l'entreprise, et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ sa volatilité. Le processus X est dans ce cas un mouvement brownien arithmétique (MBA) de tendance μ et de volatilité σ . Pour une stratégie $D = \{\tau_i, \zeta_i\}_{i \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{D}$, le processus de réserves contrôlé, X^D , est donné pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$X_t^D = X_0^D + \mu t + \sigma B_t - \sum_{i \in \mathbb{N}^*} f(\zeta_i) \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}},$$

où l'on rappelle que la fonction f est donnée par

$$f(\zeta) = d_0 + (1 + d_1)\zeta.$$

Lorsque $k = 1$, $d_0 = 0$ et $d_1 = 1$, le problème de ce chapitre correspond au problème B de l'article (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995). Afin de trouver une stratégie optimale, nous allons procéder comme à la Section 1.7.

2.1 Choix du candidat pour la fonction valeur

L'opérateur infinitésimal $\mathcal{L}$ défini en (1.14) est donné ici par

$$\mathcal{L}\tilde{V}(x) = -r\tilde{V}(x) + \mu\tilde{V}'(x) + \frac{\sigma^2}{2}\tilde{V}''(x), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

et l'opérateur d'intervention est donné par

$$\mathcal{K}\tilde{V}(x) = \sup_{z \in \mathcal{Z}_x} \{\tilde{V}(x - f(z)) + g(z)\},$$

où

$$\mathcal{Z}_x = \{z \in \mathbb{R}_+ : g(z) \geq 0, x - f(z) \geq 0\} = \{z : K/k \leq z \leq (x - d_0)/(1 + d_1)\}.$$

Intuitivement, on peut s'attendre à ce que les gestionnaires de l'entreprise décident de verser un dividende seulement lorsque les réserves de l'entreprise sont suffisantes, afin de minimiser le risque de ruine. Nous allons en effet montrer que la région de non-intervention $R = \{x \in \mathbb{R}_+ : \mathcal{K}V(x) < V(x)\}$ du problème est de la forme $[0, x^*)$. En d'autres termes, nous allons vérifier que la stratégie consistant à intervenir lorsque les réserves atteignent le *niveau* x^* est optimale. Les temps d'intervention τ_i^* de cette stratégie sont déterminés de façon récursive par

$$\tau_{i+1}^* = \inf\{t > \tau_i^* : X_t^* = x^*\},$$

où X^* est le processus de réserves contrôlé selon cette même stratégie. De plus, le processus de réserves étant markovien (voir l'Annexe A), puisqu'on ne verse un dividende que lorsque le processus atteint x^* , les montants optimaux de dividendes ζ_i^* seront tous égaux à une même quantité $\zeta^* = f^{-1}(x^* - \hat{x})$, où le *seuil* $\hat{x}$ est à déterminer. On appellera une telle stratégie une *stratégie barrière*, caractérisée par le couple seuil-niveau $(\hat{x}, x^*)$.

Nous allons chercher un candidat $\tilde{V}$ à la fonction valeur du problème V comme solution de l'équation de la programmation dynamique (1.23). Pour ce faire, nous avons le théorème suivant, dont la preuve est donnée en Annexe B :

Théorème 2.1 Fixons $\sigma, \mu, r, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle ordinaire (EDO) sur $\mathbb{R}_+$ suivante

$$\frac{\sigma^2}{2} y'' + \mu y' - ry = 0$$

avec condition initiale $y(0) = 0$, est donné par $\{x \mapsto \phi_A(x) := A(e^{\theta_1 x} - e^{\theta_2 x}) : A \in \mathbb{R}\}$ où

$$\begin{cases} \theta_1 = \sigma^{-2}(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}) \\ \theta_2 = \sigma^{-2}(-\mu - \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}) \end{cases}.$$

De plus, on a $|\theta_2| > \theta_1 > 0 > \theta_2$.

2. Pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction ϕ_A est strictement croissante-concave sur $(-\infty, \tilde{x})$ et strictement croissante-convexe sur $(\tilde{x}, \infty)$, où

$$\tilde{x} = \frac{2[\log(|\theta_2|) - \log(\theta_1)]}{\theta_1 + |\theta_2|} > 0.$$

De plus, ϕ_A' atteint son minimum global en $\tilde{x}$.

3. Pour tout $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\tilde{A} \in \mathbb{R}_+^*$ et deux solutions $x_1(\tilde{A}) < \tilde{x} < x_2(\tilde{A})$ de l'équation $\phi'_{\tilde{A}}(x) = \lambda$ tels que

$$\mathcal{I}(\tilde{A}) := \int_{x_1(\tilde{A}) \vee 0}^{x_2(\tilde{A})} (\lambda - \phi'_{\tilde{A}}(x)) dx = \rho.$$

D'une part, pour $x \in (0, x^*)$, $\tilde{V}$ devrait être solution de l'équation $\mathcal{L}\tilde{V}(x) = 0$. Or, nous savons d'après le point 1 du Théorème 2.1, que pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $\phi_A(x) := A(e^{\theta_1 x} - e^{\theta_2 x})$ vérifie cette équation.

D'autre part, pour $x \in [x^*, \infty)$, $\tilde{V}$ devrait vérifier l'équation $\mathcal{K}\tilde{V} = \tilde{V}$.

Pour $A, x, z \in \mathbb{R}_+$, définissons les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \Theta_{A,x}(z) &= \phi_A(x - f(z)) + g(z) \\ &= \phi_A(x - d_0 - (1 + d_1)z) - K + kz, \\ z^*(A, x) &= \operatorname{Arg} \max_{z \in \mathcal{Z}_x} \Theta_{A,x}(z). \end{aligned}$$

Nous allons déterminer un certain $\tilde{A} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que le montant de dividende optimal soit donné par $\zeta^* := z^*(\tilde{A}, x^*)$. Pour tout $x \in (0, x^*)$, nous poserons alors $\tilde{V}(x) = \phi_{\tilde{A}}(x)$.

Pour tous $A, x \in \mathbb{R}_+^*$ et $z \in \mathbb{R}$, on a $\Theta'_{A,x}(z) > 0$ si et seulement si

$$\phi'_A(x - f(z)) < k(1 + d_1)^{-1} =: \lambda.$$

Posons

$$\rho = K + d_0 \lambda.$$

D'après le point 3 du Théorème 2.1, il existe $\tilde{A} \in \mathbb{R}_+^*$ et $x_1(\tilde{A}), x_2(\tilde{A})$ solutions de l'équation $\phi'_{\tilde{A}}(x) = \lambda$ tels que

$$\int_{x_1(\tilde{A}) \vee 0}^{x_2(\tilde{A})} (\lambda - \phi'_{\tilde{A}}(x)) dx = \rho. \quad (2.1)$$

Il deviendra plus clair dans la suite pourquoi nous avons choisi ce $\tilde{A}$ en particulier. Nous allons montrer que le niveau x^* est égal à $x_2(\tilde{A})$. Posons également $\hat{x} = x_1(\tilde{A}) \vee 0$. D'après le point 2 du Théorème 2.1, $\phi'_{\tilde{A}}$ est strictement décroissante sur $(-\infty, \hat{x})$ et strictement croissante sur $(\hat{x}, \infty)$, où $\hat{x} \in (x_1(\tilde{A}), x_2(\tilde{A}))$ est donné dans l'énoncé. Soit $x \in [x^*, \infty)$. D'après ce qui précède, on a $\Theta'_{\tilde{A},x}(z) > 0$ si et seulement si $\phi'_{\tilde{A}}(x - f(z)) \in (x_1(\tilde{A}), x_2(\tilde{A}))$, c'est-à-dire si $z \in (z_1(x), z_2(x))$, où $z_1(x) := (x - x_2(\tilde{A}) - d_0)/(1 + d_1)$ et $z_2(x) := (x - x_1(\tilde{A}) - d_0)/(1 + d_1)$. On obtient donc le tableau de variations de $\Theta_{\tilde{A},x}$:

z	$-\infty$	$z_1(x)$	$z_2(x)$	$+\infty$
$\Theta_{\tilde{A},x}(z)$				

D'après ce tableau de variations, $\Theta(\tilde{A}, x)$ atteint son maximum en $z_2(x)$. Cependant $z^*(\tilde{A}, x)$ n'est pas forcément égal à $z_2(x)$, car il est possible que la quantité $x - f(z_2(x)) = x_1(\tilde{A})$ soit négative. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $x - f(z) \geq 0$ si et seulement si $z \leq (x - d_0)/(1 + d_1)$. Puisque $z_1(x) < (x - d_0)/(1 + d_1) \leq z_2(x)$ et que $\Theta_{\tilde{A},x}$ est croissante sur $(z_1(x), z_2(x))$, on en déduit que

$$z^*(\tilde{A}, x) = (x - \hat{x} - d_0)/(1 + d_1).$$

En effet, on a d'une part, d'après (2.1),

$$\begin{aligned}
(x - \hat{x} - d_0)/(1 + d_1) &\geq (x^* - \hat{x} - d_0)/(1 + d_1) \\
&= \left(\lambda^{-1} \int_{\hat{x}}^{x^*} (\lambda - \phi'_{\tilde{A}}(x)) dx + \lambda^{-1} (\phi_{\tilde{A}}(x^*) - \phi_{\tilde{A}}(\hat{x})) - d_0 \right) / (1 + d_1) \\
&= (\lambda^{-1} \rho + \lambda^{-1} (\phi_{\tilde{A}}(x^*) - \phi_{\tilde{A}}(\hat{x})) - d_0) / (1 + d_1) \\
&= ((1 + d_1)K/k + d_0 + (1 + d_1)k^{-1} (\phi_{\tilde{A}}(x^*) - \phi_{\tilde{A}}(\hat{x})) - d_0) / (1 + d_1) \\
&= K/k + k^{-1} (\phi_{\tilde{A}}(x^*) - \phi_{\tilde{A}}(\hat{x})) > K/k,
\end{aligned}$$

car $\phi_{\tilde{A}}$ est strictement croissante. D'autre part, on a

$$x - f((x - \hat{x} - d_0)/(1 + d_1)) = x - d_0 - (x - \hat{x} - d_0) = \hat{x} \geq 0,$$

donc $(x - \hat{x} - d_0)/(1 + d_1) \in \mathcal{Z}_x$.

Pour $x \in [x^*, \infty)$, on doit avoir $\tilde{V}(x) = \mathcal{K}\tilde{V}(x)$. Or, par définition de $\mathcal{K}$, on a

$$\mathcal{K}\tilde{V}(x) = \mathcal{K}\phi_{\tilde{A}}(x) \text{ pour tout } x \in [x^*, \infty),$$

car le fait de verser un dividende de façon optimale ramène le processus de réserves dans la zone de non-intervention (sinon il serait encore optimal de verser immédiatement un autre dividende). D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}\phi_{\tilde{A}}(x) &= \Theta_{\tilde{A},x}(z^*(\tilde{A}, x)) = \phi_{\tilde{A}}(x - f(z^*(\tilde{A}, x))) + g(z^*(\tilde{A}, x)) \\
&= \phi_{\tilde{A}}(\hat{x}) + \lambda(x - \hat{x}) - \rho,
\end{aligned}$$

donc on pose

$$\tilde{V}(x) = \begin{cases} \phi_{\tilde{A}}(x) & \text{si } x \in [0, x^*), \\ \phi_{\tilde{A}}(\hat{x}) + \lambda(x - \hat{x}) - \rho & \text{si } x \in [x^*, \infty). \end{cases}$$

Le choix de $\tilde{A}$ assure que $\tilde{V}$ soit continûment différentiable en x^* . En effet (2.1) se réécrit

$$\phi_{\tilde{A}}(x^*) = \phi_{\tilde{A}}(\hat{x}) + \lambda(x^* - \hat{x}) - \rho, \quad (2.2)$$

ce qui assure la continuité de $\tilde{V}$. De plus, la dérivée à gauche de $\tilde{V}$ en x^* est égale à $\phi'_{\tilde{A}}(x^*) = \phi'_{\tilde{A}}(x_2(\tilde{A})) = \lambda$, et la dérivée à droite de $\tilde{V}$ en x^* est $\frac{d}{dx}\{\phi_{\tilde{A}}(\hat{x}) + \lambda(x - \hat{x}) - \rho\}|_{x=x^*} = \lambda$, donc $\tilde{V}$ est continûment différentiable en x^* . On observe plus généralement que $\tilde{V}$ est de classe C^2 , sauf en x^* où elle est C^1 .

2.2 Vérification

Nous allons à présent vérifier que nous avons effectivement identifié la fonction valeur ainsi qu'une stratégie optimale, c'est-à-dire qu'on a $\tilde{V} = V$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ le capital initial de l'entreprise et définissons la stratégie $D^* = \{\tau_i^*, \zeta_i^*\}_{i=1, \dots, M}$ où $M := \sup\{i \in \mathbb{N}^* : \tau_i^* < T^*\}$, avec T^* l'instant de ruine du processus de réserves X^* contrôlé selon D^* et tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $X_{T^*+t}^* = 0$. Posons $\tau_0^* = 0$, et

$$\tau_1^* = \begin{cases} \inf\{t \in \mathbb{R}_+^* : X_t^* = x^*\} & \text{si } x \in (0, x^*), \\ 0 & \text{si } x \in [x^*, \infty), \end{cases}$$

$$\zeta_1^* = \begin{cases} \zeta^* & \text{si } x \in (0, x^*), \\ \frac{x - \hat{x} - d_0}{1 + d_1} & \text{si } x \in [x^*, \infty). \end{cases}$$

Pour tout $i = 2, \dots, M$, posons $\zeta_i^* = \zeta^* = (x^* - \hat{x} - d_0)/(1 + d_1)$ et $\tau_{i+1}^* = \inf\{t > \tau_i^* : X_t^* = x^*\}$. Pour tout $i = 1, \dots, M$ et pour tout $t \in [\tau_{i-1}^*, \tau_i^*)$, on a $X_t^* \in (0, x^*]$, $X_{\tau_i^*-}^* = x^*$, et aux instants de saut τ_i^* , le processus est ramené à $X_{\tau_i^*}^* = \hat{x}$. On en déduit que la stratégie D^* est admissible.

Nous allons vérifier dans un premier temps que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $J(x, D^*) = \tilde{V}(x)$. Ensuite, nous allons montrer que pour toute stratégie $D \in \mathcal{D}$, on a $\tilde{V}(x) \geq J(x, D)$, ce qui permettra de conclure que $\tilde{V} = V$ et que la stratégie D^* est optimale. En appliquant la Formule d'Itô à $e^{-rt}\tilde{V}(X_t^*)$ sur $[\tau_{i-1}^*, \tau_i^*)$, pour $i = 1, \dots, M$, on obtient

$$e^{-r\tau_i^*}\tilde{V}(X_{\tau_i^*}^*) - e^{-r\tau_{i-1}^*}\tilde{V}(X_{\tau_{i-1}^*}^*) = \int_{\tau_{i-1}^*}^{\tau_i^*} e^{-rs}\mathcal{L}\tilde{V}(X_s^*)ds + \int_{\tau_{i-1}^*}^{\tau_i^*} e^{-rs}\sigma\tilde{V}'(X_s^*)dB_s.$$

En prenant l'espérance dans l'expression précédente et en sommant pour $i = 1, \dots, n$ en supposant $n < M$ presque sûrement, on obtient

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-r\tau_n^*} \tilde{V}(X_{\tau_n^*}^*) \right] + \mathbb{E}_x \left[\sum_{i=1}^n e^{-r\tau_i^*} [\tilde{V}(X_{\tau_i^*}^*) - \tilde{V}(X_{\tau_i^*}^*)] \right] - \tilde{V}(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_n^*} e^{-rs} \mathcal{L} \tilde{V}(X_s^*) ds \right] + \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_n^*} e^{-rs} \sigma \tilde{V}'(X_s^*) dB_s \right].$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x) &= \mathbb{E}_x \left[e^{-r(t \wedge T^*)} \tilde{V}(X_{t \wedge T^*}^*) \right] + \mathbb{E}_x \left[\sum_{i \in \mathbb{N}^*} e^{-r\tau_i^*} [\tilde{V}(X_{\tau_i^*}^*) - \tilde{V}(X_{\tau_i^*}^*) - g(\zeta_i^*)] \mathbb{1}_{\{\tau_i^* < t \wedge T^*\}} \right] \\ &+ \mathbb{E}_x \left[\sum_{i \in \mathbb{N}^*} e^{-r\tau_i^*} g(\zeta_i^*) \mathbb{1}_{\{\tau_i^* < t \wedge T^*\}} \right] - \mathbb{E}_x \left[\int_0^{t \wedge T^*} e^{-rs} \mathcal{L} \tilde{V}(X_s^*) ds \right] - \mathbb{E}_x \left[\int_0^{t \wedge T^*} e^{-rs} \sigma \tilde{V}'(X_s^*) dB_s \right]. \end{aligned}$$

Tout d'abord, pour tout $s \in [0, T^*]$, on a $X_s^* \in [0, x^*)$, sauf avant chaque instant de saut τ_j^* , où $X_{\tau_j^*}^* = x^*$, donc $\mathbb{E}_x \left[\int_0^{t \wedge T^*} e^{-rs} \mathcal{L} \tilde{V}(X_s^*) ds \right] = 0$. D'autre part, X^* est borné et $\tilde{V}'$ est continue, donc le processus $Y(t) = \int_0^t e^{-rs} \sigma \tilde{V}'(X_s^*) dB_s$ est une martingale d'espérance nulle. Or $t \wedge T^*$ est un temps d'arrêt presque sûrement fini, donc d'après le Théorème d'arrêt (D.7), on a $\mathbb{E}_x [Y(t \wedge T^*)] = 0$. Ensuite, d'après (2.2), on a

$$\tilde{V}(X_{\tau_i^*}^*) - \tilde{V}(X_{\tau_i^*}^*) - g(\zeta_i^*) = \tilde{V}(x^*) - \tilde{V}(\hat{x}) - \lambda(x^* - \hat{x}) + \rho = 0.$$

On a donc

$$\tilde{V}(x) = \mathbb{E}_x \left[e^{-r(t \wedge T^*)} \tilde{V}(X_{t \wedge T^*}^*) \right] + \mathbb{E}_x \left[\sum_{i \in \mathbb{N}^*} e^{-r\tau_i^*} g(\zeta_i^*) \mathbb{1}_{\{\tau_i^* < t \wedge T^*\}} \right].$$

Or, X^* est borné et $\tilde{V}$ est continue donc, d'après le Théorème de convergence dominée (D.9) pour le premier terme et le Théorème de convergence monotone (D.8) pour le second terme, en faisant tendre t vers l'infini, il vient

$$\tilde{V}(x) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{i \in \mathbb{N}^*} e^{-r\tau_i^*} g(\zeta_i^*) \mathbb{1}_{\{\tau_i^* < T^*\}} \right] = J(x, D^*).$$

Considérons à présent une stratégie de dividendes arbitraire $D = \{\tau_i, \zeta_i\}_{i \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{D}$. Notons T l'instant de ruine de X^D , le processus de réserves contrôlé selon D . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : X_t^D \geq n\}$. En reprenant les calculs précédents, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x) &= \mathbb{E}_x \left[e^{-r(t \wedge T \wedge S_n)} \tilde{V}(X_{t \wedge T \wedge S_n}^D) \right] + \mathbb{E}_x \left[\sum_{i \in \mathbb{N}^*} e^{-r\tau_i} [\tilde{V}(X_{\tau_i}^D) - \tilde{V}(X_{\tau_i}^D) - g(\zeta_i)] \mathbb{1}_{\{\tau_i < t \wedge T \wedge S_n\}} \right] \\ &+ \mathbb{E}_x \left[\sum_{i \in \mathbb{N}^*} e^{-r\tau_i} g(\zeta_i) \mathbb{1}_{\{\tau_i < t \wedge T \wedge S_n\}} \right] - \mathbb{E}_x \left[\int_0^{t \wedge T \wedge S_n} e^{-rs} \mathcal{L} \tilde{V}(X_s^D) ds \right] \\ &- \mathbb{E}_x \left[\int_0^{t \wedge T \wedge S_n} e^{-rs} \sigma \tilde{V}'(X_s^D) dB_s \right]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Par construction de $\tilde{V}$, pour tout $x \in [0, x^*)$, on a $\mathcal{L}\tilde{V}(x) = 0$, et pour tout $x \in [x^*, \infty)$, on a

$$\mathcal{L}\tilde{V}(x) = -r(\phi_{\hat{A}}(\hat{x}) + \lambda(x - \hat{x}) + \rho) + \mu\lambda \leq -r(\phi_{\hat{A}}(\hat{x}) + \lambda(x^* - \hat{x}) + \rho) + \mu\lambda = \mathcal{L}\tilde{V}(x^*) = 0,$$

car par continuité de $\mathcal{L}\tilde{V}$, puisque pour tout $x \in [0, x^*)$, $\mathcal{L}\tilde{V}(x) = 0$, on a $\mathcal{L}\tilde{V}(x^*) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\mathcal{L}\tilde{V}(x) \leq 0$. Ensuite, puisque X^D est borné sur $[0, S_n]$ et que $t \wedge T \wedge S_n$ est un temps d'arrêt borné, le Théorème d'arrêt donne, comme précédemment, $\mathbb{E}_x \left[\int_0^{t \wedge T \wedge S_n} e^{-rs} \sigma \tilde{V}'(X_s^D) dW_s \right] = 0$. D'autre part, considérons la fonction $\psi(x) = \lambda - \tilde{V}'(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in [x^*, \infty)$, on a $\psi(x) = 0$, et pour tout $x \in [0, x^*)$, on a $\psi(x) = \lambda - \phi'_{\hat{A}}(x)$, donc d'après le Théorème 2.1, ψ est négative sur $[0, \hat{x}]$ et positive sur $[\hat{x}, x^*]$. Or puisque, d'après (2.1), on a $\int_{\hat{x}}^{x^*} \psi(s) ds = \rho$, donc pour tous $0 \leq x \leq y$, on a $\int_x^y \psi(s) ds \leq \rho$, ce qui se réécrit

$$\tilde{V}(y) - \tilde{V}(x) - (\lambda(y - x) - \rho) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq y.$$

Soit $i \in \mathbb{N}^*$. En prenant $x = X_{\tau_i}^D$ et $y = X_{\tau_i-}^D$, on a

$$\lambda(y - x) - \rho = \lambda[X_{\tau_i-}^D - (X_{\tau_i-}^D - f(\zeta_i))] - \rho = \lambda(d_0 + (1 + d_1)\zeta_i) - K - d_0\lambda = k\zeta_i - K = g(\zeta_i), \quad (2.4)$$

donc pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a $\tilde{V}(X_{\tau_i-}^D) - \tilde{V}(X_{\tau_i}^D) - g(\zeta_i) \geq 0$. On déduit alors de ce qui précède que

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x) &\geq \mathbb{E}_x \left[e^{-r(t \wedge T \wedge S_n)} \tilde{V}(X_{t \wedge T \wedge S_n}^D) \right] + \mathbb{E}_x \left[\sum_{i \in \mathbb{N}^*} e^{-r\tau_i} g(\zeta_i) \mathbf{1}_{\{\tau_i < t \wedge T \wedge S_n\}} \right] \\ &\geq \mathbb{E}_x \left[\sum_{i \in \mathbb{N}^*} e^{-r\tau_i} g(\zeta_i) \mathbf{1}_{\{\tau_i < t \wedge T \wedge S_n\}} \right]. \end{aligned}$$

En faisant tendre n et t vers l'infini, il vient finalement, avec le Théorème de convergence monotone,

$$\tilde{V}(x) \geq \mathbb{E}_x \left[\sum_{i \in \mathbb{N}^*} e^{-r\tau_i} g(\zeta_i) \mathbf{1}_{\{\tau_i < T\}} \right] = J(x, D).$$

On a montré que pour toute stratégie admissible D , et tout capital initial $x \in \mathbb{R}_+$, $\tilde{V}(x) \geq J(x, D)$, donc on a $\tilde{V}(x) \geq \sup_{D \in \mathcal{D}} J(x, D) = V(x)$. Or, pour la stratégie optimale candidate D^* , on a montré que $\tilde{V}(x) = J(x, D^*)$, donc le sup est atteint et on a $\tilde{V} = V$. On en déduit que D^* est bien une stratégie optimale pour le problème.

2.3 Solution au problème de contrôle

On rappelle que la stratégie barrière optimale D^* consiste à verser un dividende de montant

$$\zeta^* = (x^* - \hat{x} - d_0)/(1 + d_1)$$

à chaque fois que les réserves de l'entreprise atteignent le niveau x^* , ce qui a pour effet de ramener immédiatement les réserves au seuil $\hat{x}$. Pour déterminer le niveau x^* et le seuil $\hat{x}$, on résout le système d'équations à trois inconnues $\tilde{A}, x_1(\tilde{A}), x_2(\tilde{A})$ suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{\tilde{A}}(x_2(\tilde{A})) - \phi_{\tilde{A}}(x_1(\tilde{A}) \vee 0) = \lambda[x_2(\tilde{A}) - (x_1(\tilde{A}) \vee 0)] - \rho, \\ \phi'_{\tilde{A}}(x_2(\tilde{A})) = \phi'_{\tilde{A}}(x_1(\tilde{A})) = \lambda, \\ x_1(\tilde{A}) \leq x_2(\tilde{A}), \end{array} \right.$$

puis on pose $x^* = x_2(\tilde{A})$ et $\hat{x} = x_1(\tilde{A}) \vee 0$. On rappelle les expressions de $\phi_{\tilde{A}}, \phi'_{\tilde{A}}, \lambda, \rho$ en fonction des paramètres du problème $r, \mu, \sigma, d_0, d_1, k, K$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{\tilde{A}}(x) = \tilde{A}(\mathbf{e}^{\theta_1 x} - \mathbf{e}^{\theta_2 x}), \\ \phi'_{\tilde{A}}(x) = \tilde{A}(\theta_1 \mathbf{e}^{\theta_1 x} - \theta_2 \mathbf{e}^{\theta_2 x}), \\ \theta_1 = \sigma^{-2}(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}), \\ \theta_2 = \sigma^{-2}(-\mu - \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}), \\ \lambda = k(1 + d_1)^{-1}, \\ \rho = K + d_0\lambda. \end{array} \right.$$

Remarque. Lorsque $k = 1, d_0 = 0$ et $d_1 = 1$, le problème de ce chapitre correspond au problème B de l'article (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995). Cependant les auteurs ne mentionnent pas qu'il peut exister des cas où $x_1(\tilde{A})$ devient négatif, ce pourquoi nous avons forcé le seuil à être positif en posant $\hat{x} = x_1(\tilde{A}) \vee 0$. Dans les cas où $x_1(\tilde{A}) < 0$, alors $\phi'_{\tilde{A}}(\hat{x})$ ne sera pas égal à λ , donc le Théorème B de (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995) ne s'applique pas.

CHAPITRE 3

DYNAMIQUE ORNSTEIN - UHLENBECK ET FONCTION D'UTILITÉ AFFINE

3.1 Hypothèses du modèle

Dans ce chapitre, nous supposons comme précédemment que l'entreprise dégager un rendement constant $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ de volatilité constante $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, mais investit désormais ses réserves dans l'actif sans risque du marché, de rendement $r \in \mathbb{R}_+^*$. On considère cependant que cet investissement a un coût α dépendant du capital investi. Le rendement de l'entreprise en fonction du capital est donc de la forme $\mu(x) = \mu + (r - \alpha(x))x$, $x \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose de plus que ce coût d'investissement se compose d'une partie fixe α_0 et d'une partie variable α_1 , c'est-à-dire que $\alpha(x) = \alpha_0/x + \alpha_1$, $x \in \mathbb{R}_+^*$. La quantité $\mu'(x)$ représente le taux de croissance de l'entreprise. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\mu'(x) \geq 0$ et $\mu'(x) \leq r$, c'est-à-dire que le taux de croissance de l'entreprise est positif mais ne dépasse pas le taux d'actualisation. Nous relâcherons cette hypothèse dans le Chapitre 4. Puisque $\mu'(x) = r - \alpha_1$, cela implique que $\alpha_1 \in [0, r]$. Si $\alpha_1 = r$, le problème est identique au problème du Chapitre 2 avec μ remplacé par μ_0 . On supposera donc que $\alpha_1 \in [0, r)$. Posons $\mu_0 = \mu - \alpha_0$. Dans la suite, on renomme α_1 en α et μ_0 en μ . La dynamique du processus de réserves non contrôlé est donc

$$dX_t = (\mu + (r - \alpha)X_t) dt + \sigma dB_t.$$

On reconnaît la dynamique d'un processus Ornstein-Uhlenbeck. On suppose comme précédemment que la fonction d'utilité est donnée par

$$g(\zeta) = \begin{cases} -K + k\zeta & \text{si } \zeta \geq K/k, \\ 0 & \text{si } \zeta < K/k. \end{cases},$$

où $k \in [0, 1]$ et $K \in \mathbb{R}_+$. Ce problème est traité dans l'article de (Paulsen, 2007) dans le cas où $K = 0$ et $k = 1$. Nous supposons également que pour toute stratégie $D \in \mathcal{D}$, le processus de dividendes est donné par (1.2) et le processus de frais par (1.3); le processus de réserves contrôlé suit donc la dynamique $dX_t^D = dX_t - dD_t - d\bar{D}_t$. On rappelle que la fonction de frais de l'entreprise s'écrit $f(\zeta) = d_0 + (1 + d_1)\zeta$. On pose également $\lambda = k(1 + d_1)^{-1}$ et $\rho = K + d_0\lambda$. L'opérateur infinitésimal de X s'écrit ici

$$\mathcal{L}\phi(x) = -r\phi(x) + (\mu + (r - \alpha)x)\phi'(x) + \frac{\sigma^2}{2}\phi''(x). \quad (3.1)$$

En suivant la méthode générale décrite au Chapitre 1 pour trouver la solution au problème de contrôle impulsif, nous allons résoudre l'équation de la programmation dynamique $\mathcal{L}\phi = 0$ afin d'identifier

dans un premier temps la fonction valeur du problème. Cependant, pour chercher une stratégie optimale, nous allons nous inspirer des résultats du Chapitre 2 et supposer que si une stratégie optimale existe, alors celle-ci peut prendre la forme d'une *stratégie barrière*, comme dans le chapitre précédent, et déterminer le niveau x^* ainsi que le montant de dividende optimal $\zeta^* \in \mathbb{R}_+^*$. Rappelons brièvement la définition d'une stratégie barrière. Supposons que les réserves de l'entreprise sont actuellement au niveau $x^* \in \mathbb{R}_+^*$. Notons $\hat{x} = x^* - f(\zeta^*) \in \mathbb{R}_+$ le seuil auquel est ramené le processus de réserves juste après que l'entreprise a versé un dividende de montant ζ^* . Si $\hat{x} = 0$, la stratégie barrière correspond à une *stratégie de ruine*, c'est-à-dire qu'un seul dividende sera versé car les réserves seront par conséquent vides. Nous allons montrer à l'aide du principe de vérification que les stratégies optimales sont en effet de cette forme pour ce modèle plus général. Nous identifierons également les cas où une stratégie optimale existe, ainsi que les cas où celle-ci prend la forme d'une stratégie barrière ou bien d'une stratégie de ruine. Lorsque nous voudrions désigner une stratégie qui est soit une stratégie barrière, soit une stratégie de ruine, nous parlerons de *stratégie de type barrière/ruine*.

Tel qu'annoncé, au lieu d'étudier l'opérateur d'intervention, nous allons directement nous inspirer des résultats du chapitre précédent et poser les propriétés que la fonction valeur V devrait vérifier. Nous présentons ces propriétés d'une façon plus condensée que celle de (Paulsen, 2007), afin de nous y référer plus facilement.

Hypothèses : Supposons $\rho, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $x^* \in (\rho/\lambda, \infty)$ et $\hat{x} \in [0, x^*)$ tels que :

1. On a $V(0) = 0$, $V'(0) > 0$ et, pour tout $x \in (0, x^*)$, $\mathcal{L}V(x) = 0$.
2. (a) Si $\hat{x} > 0$, alors pour tout $x \in [x^*, \infty)$, on a $V(x) = V(\hat{x}) + \lambda(x - \hat{x} - \rho/\lambda)$ et $V'(\hat{x}) = \lambda$.
(b) Si $\hat{x} = 0$, alors pour tout $x \in [x^*, \infty)$, on a $V(x) = \lambda(x - \rho/\lambda)$.
3. On a $V'(x^*) = \lambda$.

On a $V(0) = 0$ car pour un capital initial nul, la performance de toute stratégie admissible est nulle. On devrait également avoir $V'(0) > 0$, car nous montrerons dans le Lemme 3.4 que c'est une condition nécessaire pour que V soit positive et strictement croissante, ce que l'on s'attend naturellement à avoir ; en effet, intuitivement, plus le capital initial est élevé, plus la quantité totale de dividendes que l'entreprise est en mesure de verser est grande. Nous monterons en effet, à l'aide du principe de vérification que la fonction valeur du problème satisfait ces hypothèses. On remarque que l'hypothèse 2 implique que pour tout $x \in [x^*, \infty)$, on a $V(x) = V(x^*) + \lambda(x - x^*)$. L'hypothèse 3 est nécessaire pour localiser le niveau optimal x^* . Notons enfin qu'on pourrait retrouver aussi l'hypothèse 2 à partir de l'opérateur d'intervention

$\mathcal{K}$. En effet, si l'on suppose que le montant de dividende optimal est donné, comme au Chapitre 2, par

$$\zeta^* = \frac{x^* - \hat{x} - d_0}{1 + d_1}, \quad (3.2)$$

alors avec l'hypothèse 2, on peut écrire

$$V(x^*) = V(\hat{x}) + \lambda(x^* - \hat{x}) - \rho = V(x^* - f(\zeta^*)) + g(\zeta^*).$$

Puisqu'on suppose que la région de non-intervention est $(0, x^*)$, on en déduit

$$\mathcal{K}V(x^*) = V(x^* - f(\zeta^*)) + g(\zeta^*) = \Theta_x(\zeta^*).$$

Poser l'hypothèse 2 revient donc à supposer que le montant de dividende optimal est donné par (3.2).

Le résultat principal que nous allons montrer est qu'il existe une unique stratégie optimale si et seulement si les hypothèses (1, 2, 3) admettent une solution V . Lorsque les hypothèses (1, 2a, 3) sont vérifiées, alors la stratégie optimale correspondante est une stratégie barrière caractérisée par le couple seuil - niveau $(\hat{x}, x^*)$, et lorsque les hypothèses (1, 2b, 3) sont vérifiées, la stratégie optimale correspondante est une stratégie de ruine caractérisée par le niveau x^* . Ce résultat est présenté dans la prochaine section sous forme de trois théorèmes distincts mais complémentaires.

Remarque. Un résultat similaire est présenté dans (Paulsen, 2007) sous la forme d'un seul théorème s'appliquant à une plus large classe de dynamiques du processus de réserves, mais avec une fonction d'utilité moins générale. Nous précisons en outre les conditions d'application de chaque théorème sur les paramètres du problème. Certains lemmes nécessaires au détail des preuves des résultats ne figurant pas dans (Paulsen, 2007) sont également ajoutés pour compléter et ajuster la démonstration. L'Annexe C est en outre dédiée à l'étude d'une classe de fonctions solutions de l'équation de la programmation dynamique de ce problème, dont les propriétés sont cruciales pour l'étude de la fonction valeur du problème.

3.2 Solution au problème de contrôle

Les théorèmes suivants nous fournissent des conditions sur les paramètres du modèle pour qu'il existe une solution au problème, et précisent, le cas échéant, la forme des stratégies optimales.

Nous définissons préalablement la fonction $G : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$G(x) = e^{-m(x)}[U(a, b, m(0))F(a, b, m(x)) - F(a, b, m(0))U(a, b, m(x))],$$

avec $a = 1 + \frac{\alpha}{2(r-\alpha)}$, $b = 1/2$, $m(x) = \frac{r-\alpha}{\sigma^2} \left(x + \frac{\mu}{r-\alpha} \right)^2$ et les fonctions F et U sont les fonctions hypergéométriques de première et seconde espèce définies à l'Annexe C. Les propriétés de G seront décrites dans le Lemme 3.5.

Théorème 3.1 *Lorsque $\alpha \in (0, r)$, les hypothèses $(1, 2a, 3)$ possèdent une unique solution $(\hat{x}, x^*, V)$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $G(x) > G'(x)(x - \rho/\lambda)$. Dans ce cas, la stratégie barrière de seuil et niveau $(\hat{x}, x^*)$ est une stratégie optimale.*

Théorème 3.2 *Lorsque $\alpha \in (0, r)$, si les hypothèses $(1, 2a, 3)$ n'admettent pas de solution, alors les hypothèses $(1, 2b, 3)$ possèdent une unique solution (x^*, V) . Dans ce cas, la stratégie de ruine de niveau x^* est une stratégie optimale.*

Théorème 3.3 *Lorsque $\alpha = 0$, les hypothèses $(1, 2, 3)$ n'admettent pas de solution et il n'existe pas de stratégie optimale. Cependant, la fonction valeur est donnée par*

$$V = \frac{\lambda G}{\lim_{x \rightarrow \infty} G'(x)}.$$

Donnons une interprétation intuitive de ces résultats. Le paramètre α représente la partie variable du coût des investissements. Tout d'abord, lorsque $\alpha \in (0, r)$, il existe toujours au moins une stratégie optimale, et celle-ci prend la forme d'une stratégie barrière ou bien d'une stratégie de ruine. Considérons ensuite le cas où $\alpha = 0$. Dans ce cas il n'existe pas de stratégie optimale, mais nous pouvons préciser pourquoi. Considérons deux niveaux $\bar{y}_1 < \bar{y}_2$, et notons D_1, D_2 les *meilleures* stratégies barrière (ou de ruine), en terme de performance (utilité totale dégagée par l'actionnaire), de niveaux respectifs $\bar{y}_1, \bar{y}_2$. Nous montrerons dans un lemme intermédiaire que la stratégie D_2 possède une performance supérieure à celle de la stratégie D_1 . Ainsi, il est toujours possible de trouver une meilleure stratégie en considérant un plus grand niveau de barrière. C'est en ce sens qu'il n'existe pas de stratégie optimale. Cela peut s'expliquer intuitivement par le fait que si les coûts d'investissement sont entièrement fixes, il est dans l'intérêt de l'entreprise d'investir le plus possible ses réserves car les rendements augmentent avec le montant investi. Or, plus l'entreprise dégage de bénéfices, plus elle est capable de verser des dividendes et plus sa probabilité de ruine diminue.

Remarque. Notons que la condition donnée dans le Théorème 3.1 pour que celui-ci s'applique est différente de la condition donnée avant la Proposition 3.1 dans (Paulsen, 2007). En effet, l'inégalité ressemble à

une condition équivalente à $G(x) > G'(x)(x - \rho/\lambda)$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ (lorsque $K = 0$ et $k = 1$), cependant l'auteur indique que, dans ce cas, la stratégie optimale est une stratégie de ruine, ce qui ne serait pas possible lorsque cette dernière condition est vérifiée.

Afin de prouver ces théorèmes, nous aurons besoin d'introduire des lemmes intermédiaires utilisant principalement les propriétés analytiques de la fonction valeur V . Nous présenterons également un algorithme de recherche de stratégies optimales, et l'illustrerons avec quelques résultats numériques. À partir de ces résultats, nous simulerons enfin des trajectoires du processus de réserves contrôlé selon différentes stratégies.

3.3 Propriétés analytiques de la fonction valeur

Le lemme suivant nous donne les principales propriétés analytiques d'une solution de l'équation de la programmation dynamique de notre problème. Nous cherchons une fonction non identiquement nulle, car la fonction valeur du problème correspond à l'utilité maximale parmi toutes celles des stratégies admissibles ; or il est facile de trouver une stratégie admissible d'utilité non nulle. Ce lemme est présenté dans (Paulsen, 2007) et démontré dans (Shreve *et al.*, 1984). Nous ajoutons cependant des détails à la preuve et l'adaptions à notre problème particulier.

Lemme 3.4 *Soit ϕ une solution non identiquement nulle de l'équation différentielle ordinaire (EDO) du second ordre*

$$\mathcal{L}\phi(x) = -r\phi(x) + (\mu + (r - \alpha)x)\phi'(x) + \frac{\sigma^2}{2}\phi''(x) = 0 \quad (3.3)$$

sur $[0, \infty)$.

1. *Si ϕ est localement croissante - concave au voisinage de $\tilde{x} \in (0, \infty)$, alors ϕ est strictement concave sur $[0, \tilde{x})$.*
2. *Si ϕ s'annule en au moins un point, alors ϕ est strictement monotone.*
3. *Si $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) > 0$, alors*
 - (a) *la fonction ϕ est strictement croissante ;*
 - (b) *il existe $\tilde{x} \in [0, \infty]$ tel que $\phi''(\tilde{x}) = 0$, et si $\tilde{x} \in (0, \infty)$, ϕ est strictement croissante - concave sur $(0, \tilde{x})$ et strictement croissante - convexe sur $(\tilde{x}, \infty)$.*

Preuve. Pour $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$, notons E_0 l'équation $y'' = \gamma y$ sur $\mathbb{R}_+$ et supposons dans un premier temps que ϕ est une solution non nulle de E_0 . Alors, comme $\gamma > 0$, ϕ est strictement convexe sur tous les intervalles où elle est strictement positive et strictement concave sur tous les intervalles où elle est strictement négative.

1. Les solutions de E_0 sont les fonctions

$$y_{h,k}(x) = h e^{\sqrt{\gamma}x} + k e^{-\sqrt{\gamma}x}, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

pour tous $h, k \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $\tilde{x} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\phi'(\tilde{x}) > 0$ et $\phi''(\tilde{x}) \leq 0$. Comme ϕ est solution de E_0 , il existe $h_0, k_0 \in \mathbb{R}$ avec h_0, k_0 non tous les deux nuls tels que $\phi = y_{h_0, k_0}$. On a donc

$$\phi'(\tilde{x}) = h_0 \sqrt{\gamma} e^{\sqrt{\gamma}\tilde{x}} - k_0 \sqrt{\gamma} e^{-\sqrt{\gamma}\tilde{x}} > 0, \quad (3.4)$$

$$\phi''(\tilde{x}) = h_0 \gamma e^{\sqrt{\gamma}\tilde{x}} + k_0 \gamma e^{-\sqrt{\gamma}\tilde{x}} \leq 0. \quad (3.5)$$

Nous pouvons combiner ces inéquations de la façon suivante

$$-\gamma^{-1/2} \times (3.4) + \gamma^{-1} \times (3.5),$$

$$\gamma^{-1/2} \times (3.4) - \gamma^{-1} \times (3.5).$$

On obtient alors $-2h_0 e^{\sqrt{\gamma}\tilde{x}} < 0$ et $-2k_0 e^{-\sqrt{\gamma}\tilde{x}} > 0$, d'où $h_0 > 0$ et $k_0 < 0$. On en déduit directement que ϕ'' est strictement croissante, et donc que pour tout $x \in [0, \tilde{x})$, on a $\phi''(x) < 0$; autrement dit, ϕ est strictement concave sur l'intervalle $[0, \tilde{x})$.

2. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\phi(x_0) = 0$. Supposons, sans perte de généralité, que $h_0 \neq 0$. Alors, en réarrangeant les termes de cette équation, on obtient $e^{2\sqrt{\gamma}x_0} = -k_0/h_0$. Pour qu'un tel x_0 existe, on doit donc nécessairement avoir $h_0 k_0 < 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\phi'(x) = h_0 \sqrt{\gamma} e^{\sqrt{\gamma}x} - k_0 \sqrt{\gamma} e^{-\sqrt{\gamma}x}.$$

Puisque h_0 et k_0 sont de signes opposés, cette quantité est soit strictement positive, soit strictement négative. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que ϕ est strictement monotone.

L'équation $\mathcal{L}\phi(x) = 0$ peut se mettre sous la forme $y'' = \gamma y + \delta y'$, où $\gamma = 2r\sigma^{-2}$ et $\delta(x) = -2\sigma^{-2}(\mu + (r - \alpha)x)$. Nous avons montré donc les points 1 et 2 dans le cas où $\delta = 0$. Pour nous ramener à l'équation $\mathcal{L}\phi(x) = 0$, nous allons effectuer le changement de variable

$$y = \psi(x) = \int_0^x \exp \left\{ \int_0^u \delta(v) dv \right\} du.$$

Supposons à présent que ϕ est solution de $y'' = \gamma y + \delta y'$ et posons $\ell(y) = \phi(x) = \phi(\psi^{-1}(y))$. Calculons $\ell''(y)$. On a

$$\begin{aligned}\ell''(y) &= \frac{d\ell'(y)}{dy} \\ &= \frac{d}{dy} \{(\psi^{-1})'(y)\phi'(\psi^{-1}(y))\} \\ &= (\psi^{-1})''(y)\phi'(\psi^{-1}(y)) + [(\psi^{-1})'(y)]^2\phi''(\psi^{-1}(y)).\end{aligned}$$

Effectuons les calculs intermédiaires de $(\psi^{-1})'$ et $(\psi^{-1})''$. Tout d'abord, remarquons que $\psi'(x) = \exp \left\{ \int_0^x \delta(v)dv \right\}$ et $\psi''(x)/\psi'(x) = \delta(x)$, ce qui donne

$$\begin{aligned}(\psi^{-1})'(y) &= [\psi'(\psi^{-1}(y))]^{-1} \\ (\psi^{-1})''(y) &= -\frac{d}{dy} \{ \psi'(\psi^{-1}(y)) \} [\psi'(\psi^{-1}(y))]^{-2} \\ &= -\psi''(\psi^{-1}(y)) [\psi'(\psi^{-1}(y))]^{-3} \\ &= -\delta(\psi^{-1}(y)) [\psi'(\psi^{-1}(y))]^{-2}.\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\ell''(y) &= -\delta(\psi^{-1}(y)) [\psi'(\psi^{-1}(y))]^{-2} \phi'(\psi^{-1}(y)) \\ &\quad + [\psi'(\psi^{-1}(y))]^{-2} [\gamma(\psi^{-1}(y)) \phi'(\psi^{-1}(y)) + \delta(\psi^{-1}(y)) \phi''(\psi^{-1}(y))] \\ &= \{ [\psi'(\psi^{-1}(y))]^{-2} \gamma(\psi^{-1}(y)) \} \ell(y).\end{aligned}$$

On remarque que ℓ est solution d'une équation de la forme de E_0 , avec

$$\tilde{\gamma}(y) = \{ [\psi'(\psi^{-1}(y))]^{-2} \gamma(\psi^{-1}(y)) \} > 0.$$

Puisque ϕ est du même signe que ℓ , ϕ hérite les propriétés voulues de celles de ℓ .

Montrons finalement le point 3. Soit ϕ une solution de $\mathcal{L}\phi(x) = 0$ sur $[0, \infty)$ telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) > 0$.

D'après le point 2, ϕ' ne s'annule pas donc ϕ est strictement croissante. Définissons

$$\tilde{x} = \sup\{x \in \mathbb{R}_+ : \phi''(x) \leq 0\}.$$

D'après le point 1, on a $\phi''(x) < 0$ pour tout $x \in [0, \tilde{x})$, et $\phi''(x) > 0$ pour tout $x \in (\tilde{x}, \infty)$. $\square$

Le lemme suivant, démontré dans (Paulsen, 2007) nous donne une solution explicite de l'équation $\mathcal{L}\phi = 0$ sur $[0, \infty)$ s'exprimant à l'aide des fonctions hypergéométriques confluentes décrites à l'Annexe C. Nous détaillons davantage la preuve et démontrons en outre le résultat sur les conditions initiales de la fonction G .

Lemme 3.5 Posons $a = 1 + \frac{\alpha}{2(r-\alpha)}$, $b = 1/2$ et $m(x) = \frac{r-\alpha}{\sigma^2} \left(x + \frac{\mu}{r-\alpha} \right)^2$. La fonction

$$G(x) := e^{-m(x)} [U(a, b, m(0))F(a, b, m(x)) - F(a, b, m(0))U(a, b, m(x))],$$

définie sur $[0, \infty)$, vérifie $G(0) = 0$ et $G'(0) > 0$, et est solution de l'équation $\mathcal{L}\phi = 0$ (3.3) où F et U désignent respectivement les fonctions hypergéométriques confluentes de première et seconde espèce, définies à l'Annexe C.

Preuve. Effectuons le changement de variable $y = -m(x)$ dans l'équation $\mathcal{L}\phi(x) = 0$. Soit ϕ une solution de $\mathcal{L}\phi = 0$. Posons $\psi(y) = \phi(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On a

$$\phi'(x) = \frac{d\psi(y)}{dx} = \frac{d\psi(y)}{dy} \frac{dy}{dx} = -\frac{r-\alpha}{\sigma^2/2} \left(x + \frac{\mu}{r-\alpha} \right) \psi'(y),$$

$$\phi''(x) = -\frac{r-\alpha}{\sigma^2/2} \psi'(y) + \left[\frac{r-\alpha}{\sigma^2/2} \left(x + \frac{\mu}{r-\alpha} \right) \right]^2 \psi''(y) = -\frac{r-\alpha}{\sigma^2/2} (\psi'(y) + 2y\psi''(y)).$$

En substituant ces expressions dans l'équation $\mathcal{L}\phi(x) = 0$, il vient

$$-r\psi(y) - (r-\alpha)(-2y+1)\psi'(y) - 2(r-\alpha)y\psi''(y) = 0,$$

ce qui se réécrit, en divisant par $-2(r-\alpha)$,

$$y\psi''(y) + (b-y)\psi'(y) - (b-a)\psi(y) = 0,$$

où $a = \frac{1}{2} + \frac{r}{2(r-\alpha)} = 1 + \frac{\alpha}{2(r-\alpha)}$ et $b = \frac{1}{2}$. D'après le Lemme C.1, les fonctions $e^y F(a, b, -y)$ et $e^y U(a, b, -y)$ sont solutions de cette équation. On peut réécrire ces solutions en fonction de x . Posons $y_4(x) = e^y F(a, b, -y) = e^{-m(x)} F(a, b, m(x))$ et $y_5(x) = e^y U(a, b, -y) = e^{-m(x)} U(a, b, m(x))$. La fonction $G = y_5(0)y_4 - y_4(0)y_5$ est donc solution de $\mathcal{L}\phi = 0$. De plus on a $G(0) = y_5(0)y_4(0) - y_4(0)y_5(0) = 0$, et à l'aide des formules de dérivation données à l'Annexe C, on obtient

$$\begin{aligned} G'(x) &= m'(x) \left\{ y_5(0) \left[-y_4(x) + \frac{a}{b} e^{-m(x)} F(a+1, b+1, m(x)) \right] \right. \\ &\quad \left. - y_4(0) \left[-y_5(x) - a e^{-m(x)} U(a+1, b+1, m(x)) \right] \right\}, \\ &= m'(x) \left\{ -G(x) + y_5(0) \frac{a}{b} e^{-m(x)} F(a+1, b+1, m(x)) + y_4(0) a e^{-m(x)} U(a+1, b+1, m(x)) \right\} \end{aligned}$$

et donc

$$G'(0) = e^{-m(0)} m'(0) \left\{ y_5(0) \frac{a}{b} F(a+1, b+1, m(0)) + y_4(0) a U(a+1, b+1, m(0)) \right\} > 0.$$

□

Le corollaire suivant se déduit directement des deux lemmes précédents et nous donne les propriétés analytiques de G . Après avoir prouvé le Théorème 3.3, nous serons en mesure de montrer que G est croissante - concave si et seulement si $\alpha = 0$, et croissante - concave puis croissante convexe si et seulement si $\alpha \in (0, r)$.

Corollaire 3.6 *S'il existe $\tilde{x} \in (0, \infty)$ tel que $G''(\tilde{x}) = 0$, alors G est strictement croissante - concave sur $[0, \tilde{x})$ et strictement croissante - convexe sur $(\tilde{x}, \infty)$.*

Le lemme suivant nous montre que toutes les solutions de $\mathcal{L}\phi = 0$ vérifiant les mêmes conditions initiales que G sont positives et proportionnelles à G .

Lemme 3.7 *Soit G_0 une solution de $\mathcal{L}\phi = 0$ (3.3) sur $[0, \infty)$ telle que $G_0(0) = 0$ et $G'_0(0) > 0$. Alors il existe $c_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $G_0 = c_0 G$.*

Preuve. Soit G_0 une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. D'après le Lemme C.3, les fonctions F et U sont linéairement indépendantes, donc les fonctions $y_4(x) = e^{-m(x)}F(a, b, m(x))$ et $y_5(x) = e^{-m(x)}U(a, b, m(x))$ sont également indépendantes. Or, l'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de $\mathcal{L}\phi = 0$ est de dimension 2, donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $G_0 = Ay_4 + By_5$. De plus, la quantité $y_4(0) = e^{-m(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{m(0)^n}{n!}$ est strictement positive. En effet, puisque $\alpha < r$, on a $a, b, m(0) > 0$, et donc chaque terme de la série est strictement positif. Par hypothèse, on a $G_0(0) = 0$, d'où l'on tire $A = -B \frac{y_5(0)}{y_4(0)} = c_0 y_5(0)$, où $c_0 := -B/y_4(0)$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$G_0(x) = c_0(y_5(0)y_4(x) - y_4(0)y_5(x)) = c_0 G(x).$$

De plus, puisque $G'_0(0) > 0$, et $G'(0) > 0$, on a $c_0 > 0$. □

On déduit directement du Lemme 3.7 et des hypothèses (1, 2, 3) le corollaire suivant.

Corollaire 3.8 *Soient x^* et V vérifiant les hypothèses (1, 2, 3). Alors on a*

$$V(x) = \begin{cases} \lambda(G'(x^*))^{-1}G(x) & \text{si } x \in [0, x^*), \\ V(x^*) + \lambda(x - x^*) & \text{si } x \in [x^*, \infty). \end{cases} \quad (3.6)$$

Preuve. D'après l'hypothèse 1 et le Lemme 3.7, pour tout $x \in [0, x^*)$, il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $V = cG$. Par continuité de $\mathcal{L}G$, et d'après l'hypothèse 3, on a $\lambda = V'(x^*) = cG'(x^*)$, d'où $c = \lambda(G'(x^*))^{-1}$. D'après les hypothèses 2 et 3, pour tout $x \geq x^*$, on a $V(x^*) + \lambda(x - x^*)$. $\square$

3.4 Algorithme de recherche de stratégies optimales

Supposons que les valeurs des paramètres du modèle sont telles qu'il existe une solution aux hypothèses (1, 2a, 3). D'après le Théorème 3.1, une telle solution correspond à une stratégie barrière optimale $(\hat{x}, x^*, V)$. Nous allons donner un algorithme permettant d'identifier le seuil $\hat{x}$, le niveau x^* et le coefficient c tel que $V = cG$ sur $(0, x^*)$, et prouver dans le même temps l'unicité de la solution. Cet algorithme est présenté dans (Paulsen, 2007) pour $k = 1$, $K = 0$, mais la preuve de l'unicité n'y est pas détaillée.

Tout d'abord, notons que, d'après les Corollaires 3.6 et 3.8, pour garantir l'hypothèse que $V'(x^*) = V'(\hat{x}) = \lambda > 0$, on doit nécessairement avoir $\tilde{x} \in (0, \infty)$ et $\hat{x} < \tilde{x} < x^*$. Supposons donc que $\tilde{x} \in (0, \infty)$. Montrons à présent l'unicité de la solution. Soient $0 < c_1 < c_2$ et posons $V_i = c_i G$, $i = 1, 2$. D'après le Corollaire 3.6, les fonctions G , V_1 et V_2 sont strictement croissantes - concaves sur $[0, \tilde{x})$ et strictement croissantes - convexes sur $(\tilde{x}, \infty)$. Supposons qu'il existe $\hat{x}_1 < x_1^*$ et $\hat{x}_2 < x_2^*$ distincts tels que $V_1'(\hat{x}_1) = V_1'(x_1^*) = \lambda$ et $V_2'(\hat{x}_2) = V_2'(x_2^*) = \lambda$. On a $G' > 0$ donc $V_1' < V_2'$. En particulier, on a $V_1'(\hat{x}_1) = V_2'(\hat{x}_2) > V_1'(\hat{x}_2)$. Or, pour $i = 1, 2$ on a $\hat{x}_i < \tilde{x} < x_i^*$, et V_i' est décroissante sur $(0, \tilde{x})$. On en déduit que $\hat{x}_1 < \hat{x}_2$. De même, on a $V_1'(x_1^*) = V_2'(x_2^*) > V_1'(x_2^*)$ et V_1' est croissante sur $(\tilde{x}, \infty)$, donc on a $x_1^* > x_2^*$. En somme, on a $\hat{x}_1 < \hat{x}_2 < \tilde{x} < x_2^* < x_1^*$. Cela implique

$$\begin{aligned} \lambda(x_1^* - \hat{x}_1) - (V_1(x_1^*) - V_1(\hat{x}_1)) &= \int_{\hat{x}_1}^{x_1^*} (\lambda - V_1'(s)) ds \\ &> \int_{\hat{x}_2}^{x_2^*} (\lambda - V_1'(s)) ds, \text{ car } V_1' < \lambda \text{ sur } (\hat{x}_1, x_1^*) \\ &> \int_{\hat{x}_2}^{x_2^*} (\lambda - V_2'(s)) ds, \text{ car } V_1' < V_2' \\ &= \lambda(x_2^* - \hat{x}_2) - (V_2(x_2^*) - V_2(\hat{x}_2)). \end{aligned}$$

Observons que pour satisfaire l'hypothèse 2 il est nécessaire que $\lambda(x^* - \hat{x}) - (V(x^*) - V(\hat{x})) = \rho$; cela nous fournit donc un algorithme pour trouver $\hat{x}$ et x^* vérifiant les hypothèses (1, 2, 3) dans le cas où $\tilde{x} \in (0, \infty)$, c'est-à-dire lorsque G n'est ni totalement convexe ni totalement concave. Le code nous ayant servi à mettre en pratique cet algorithme dans la Section 3.6 figure à l'Annexe E.

Algorithm 1 Algorithme de recherche d'une stratégie barrière optimale

Choisir une tolérance $\varepsilon > 0$.

Trouver $\tilde{x}$ tel que $G''(\tilde{x}) = 0$.

Choisir $x_{old} \in [0, \tilde{x})$.

$c \leftarrow \lambda / G'(x_{old})$

Trouver $y_{old} > \tilde{x}$ tel que $G'(y_{old}) = \lambda / c$.

$\mathcal{I} \leftarrow \lambda(y_{old} - x_{old}) - c(G(y_{old}) - G(x_{old}))$

while $|\mathcal{I} - \rho| > \varepsilon$ **do**

if $\mathcal{I} > \rho$ **then**

 Choisir $x_{new} \in (x_{old}, \tilde{x})$.

else

 Choisir $x_{new} \in [0, x_{old})$.

end if

$c \leftarrow \lambda / G'(x_{new})$

 Trouver $y_{new} > \tilde{x}$ tel que $G'(y_{new}) = \lambda / c$.

$\mathcal{I} \leftarrow \lambda(y_{new} - x_{new}) - c(G(y_{new}) - G(x_{new}))$

$x_{old} \leftarrow x_{new}$

$y_{old} \leftarrow y_{new}$

end while

$x^* \leftarrow y_{new}$

$\hat{x} \leftarrow x_{new}$

3.5 Preuve des Théorèmes 3.1, 3.2, et 3.3

Nous aurons besoin de plusieurs lemmes et propositions préliminaires pour prouver les Théorèmes 3.1 à 3.3. Les preuves sont inspirées de (Paulsen, 2007) mais nous les détaillons davantage et les adaptons à notre problème de contrôle de fonction d'utilité plus générale.

Tout d'abord, donnons des conditions suffisantes pour qu'aucune stratégie barrière ne soit optimale.

Proposition 3.9 *Les hypothèses $(1, 2a, 3)$ n'admettent pas de solution si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $G(x) > G'(0)(x - \rho/\lambda)$.
2. Pour tous $0 \leq x_0 < x_1$ tels que $G(x_1) - G(x_0) = G'(x_0)(x_1 - x_0 - \rho/\lambda)$, on a $G'(x_0) > G'(x_1)$.

Preuve. Tout d'abord, nous allons montrer que la première condition est équivalente à

$$G(x_1) - G(x_0) > G'(x_0)(x_1 - x_0 - \rho/\lambda), \quad 0 \leq x_0 < x_1. \quad (3.7)$$

En effet, d'une part, la condition 1 est vérifiée si l'on a (3.7), en prenant $x_0 = 0$. D'autre part, supposons que la condition 1 est vérifiée. Si $x_0 > \tilde{x}$, puisque G est strictement convexe sur $(\tilde{x}, \infty)$, pour tous $t \in (0, 1)$ et $x_1 > x_0$, on a $G(tx_1 + (1-t)x_0) < tG(x_1) + (1-t)G(x_0)$. En réarrangeant les termes et en divisant par $x_1 - x_0 > 0$, on obtient

$$\frac{G(x_1) - G(x_0)}{x_1 - x_0} > \frac{G(x_0 + t(x_1 - x_0)) - G(x_0)}{t(x_1 - x_0)},$$

donc en faisant tendre t vers 0, il vient $G(x_1) - G(x_0) > G'(x_0)(x_1 - x_0) > G'(x_0)(x_1 - x_0 - \rho/\lambda)$.

Supposons ensuite que $x_0 \in [0, \tilde{x}]$. G est concave sur $[0, \tilde{x}]$, donc G' y est décroissante, donc on a

$$\begin{aligned} \frac{G(x_1) - G(x_0)}{G'(x_0)} - (x_1 - x_0) &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{G'(x)}{G'(x_0)} - 1 \right) dx \\ &\geq \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{G'(x)}{G'(0)} - 1 \right) dx \\ &\geq \int_0^{x_1} \left(\frac{G'(x)}{G'(0)} - 1 \right) dx \\ &= \frac{G(x_1)}{G'(0)} - x_1, \end{aligned}$$

or, par hypothèse, on a $G(x_1)/G'(0) - x_1 > -\rho/\lambda$, donc la condition 1 est bien équivalente à (3.7). Supposons alors par l'absurde que l'une des conditions 1 ou 2 est vérifiée, et que les hypothèses (1, 2a, 3) possèdent une solution. Dans ce cas, on a $V = cG$, sur $(0, x^*)$, et $V'(\hat{x}) = \lambda$, d'où l'on tire $c = \lambda/G'(\hat{x})$. On a alors $V(x^*) - V(\hat{x}) = \lambda(x^* - \hat{x}) - \rho$, ce qui est équivalent à $G(x^*) - G(\hat{x}) = G'(\hat{x})(x^* - \hat{x} - \rho/\lambda)$. Or, ceci est impossible si la condition 1 est vérifiée, car cela impliquerait (3.7). Si la condition 2 était vérifiée, on aurait $G'(\hat{x}) > G'(x^*)$, ce qui est une contradiction, car, puisqu'on a supposé que les hypothèses (1, 2a, 3) possèdent une solution, on a $G'(x^*) = V'(x^*)/c = \lambda/c = G'(\hat{x})$. D'après l'algorithme présenté en section 3.4, ces deux conditions correspondent aux seuls cas où il n'est pas possible de trouver une solution aux hypothèses (1, 2a, 3). $\square$

Nous allons temporairement relâcher l'hypothèse 3 servant à localiser le niveau optimal. La proposition suivante nous permet d'identifier la meilleure stratégie de type barrière/ruine étant donné un niveau $\bar{y}$. Ce résultat nous montre qu'il existe toujours une telle stratégie, qui s'obtient en trouvant une solution aux hypothèses (1, 2), après avoir fixé le niveau $\bar{y}$.

Proposition 3.10 *Meilleure stratégie de type barrière/ruine pour un niveau donné*

Donnons nous un niveau $\bar{y} > \rho/\lambda$.

1. Si les hypothèses (1, 2a) possèdent une solution telle que $x^* = \bar{y}$, et $\hat{x} = \bar{x} \in [0, \bar{y})$ alors celle-ci est unique, et la stratégie barrière $(\bar{x}, \bar{y})$ correspondante est la meilleure stratégie parmi l'ensemble des stratégies admissibles de type barrière/ruine de niveau $\bar{y}$.
2. Si les hypothèses (1, 2a) n'admettent pas de solution telle que $x^* = \bar{y}$, alors les hypothèses (1, 2b) possèdent une unique solution telle que $x^* = \bar{y}$, et la stratégie de ruine correspondante est la meilleure stratégie parmi l'ensemble des stratégies admissibles de type barrière/ruine de niveau $\bar{y}$.

Pour montrer cette proposition nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.11 Soient $\bar{y} > \rho/\lambda$ et $\bar{x} \in [0, \bar{y})$. Alors, soit les hypothèses (1, 2a) possèdent une unique solution $(\bar{x}, \bar{y}, V_{\bar{y}})$, soit les hypothèses (1, 2a) possèdent une unique solution $(\bar{y}, V_{\bar{y}})$. De plus, dans les deux cas, pour tout $x \in [0, \bar{y})$, on a

$$V_{\bar{y}}(\bar{y}) - V_{\bar{y}}(x) \geq \lambda(x - \bar{y} - \rho/\lambda).$$

Preuve. Soient $\bar{y} > \rho/\lambda$ et $\bar{x} \in [0, \bar{y})$. L'existence et l'unicité d'une solution se déduisent directement de la Proposition 3.10.

Supposons tout d'abord le cas où les hypothèses (1, 2a) possèdent une solution $(\bar{x}, \bar{y}, V_{\bar{y}})$. Pour tout $x \in [0, \bar{y}]$, posons $h_1(x) = V_{\bar{y}}(\bar{y}) - V_{\bar{y}}(x) - \lambda(\bar{y} - x)$. D'après l'hypothèse 1 et le Lemme 3.7, il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in [0, x^*]$, $V_{\bar{y}}(x) = cG(x)$. Notons que $\bar{x} < \tilde{x}$, car sinon, comme G est strictement convexe sur $(\tilde{x}, \infty)$, on aurait $V_{\bar{y}}(\bar{y}) - V_{\bar{y}}(\bar{x}) > V'_{\bar{y}}(\bar{x})(\bar{y} - \bar{x}) = \lambda(\bar{y} - \bar{x})$; or, d'après l'hypothèse 2a on a $V_{\bar{y}}(\bar{y}) - V_{\bar{y}}(\bar{x}) = \lambda(\bar{y} - \bar{x}) - \rho < \lambda(\bar{y} - \bar{x})$. Par hypothèse, on a $h'_1(\bar{x}) = 0$. Supposons dans un premier temps que $\bar{y} > \tilde{x}$. On a $h'_1(x) = \lambda - V'_{\bar{y}}(x)$, donc d'après le Corollaire 3.6, h'_1 est croissante sur $[0, \tilde{x}]$, et décroissante sur $[\tilde{x}, \bar{y}]$. On en déduit que si h'_1 s'annule en une valeur différente de $\bar{x}$, alors celle-ci se situe dans l'intervalle $[\tilde{x}, \bar{y}]$. Supposons donc que h'_1 s'annule également en $x_0 \in [\tilde{x}, \bar{y}]$. Alors h_1 est

décroissante sur $[0, \bar{x}]$, puis croissante sur $[\bar{x}, x_0]$, puis décroissante sur $[x_0, \bar{y}]$. Or, d'après l'hypothèse 2a, on a $h_1(\bar{x}) = -\rho < h_1(\bar{y}) = 0$, donc h_1 atteint son minimum en $\bar{x}$. De même, dans le cas où h'_1 ne s'annule qu'en $\bar{x}$, alors h_1 est décroissante sur $[0, \bar{x}]$, puis croissante sur $[\bar{x}, \bar{y}]$, donc h_1 atteint aussi son minimum en $\bar{x}$. Si l'on suppose dans un second temps que $\bar{y} \geq \tilde{x}$, alors h'_1 est croissante sur tout l'intervalle $[0, \bar{y}]$, donc h_1 est décroissante sur $[0, \bar{x}]$ puis croissante sur $[\bar{x}, \bar{y}]$, donc h_1 atteint aussi son minimum en $\bar{x}$. Finalement, pour tout $x \in [0, \bar{y}]$, on a $h_1(x) \geq h_1(\bar{x}) = -\rho$, d'où le résultat dans le cas 2a.

Supposons à présent le cas où les hypothèses (1, 2b) possèdent une solution. Pour tout $x \in [0, \bar{y}]$, posons $c_x = \lambda/G'(x)$, $V^x(y) = c_x G(y)$ pour $y \in [0, \bar{y}]$, et

$$\begin{aligned} h_2(x) &= \frac{1}{c_x} (V^x(\bar{y}) - V^x(x) - \lambda(\bar{y} - x - \rho/\lambda)) \\ &= G(\bar{y}) - G(x) - G'(x)(\bar{y} - x - \rho/\lambda). \end{aligned}$$

Par hypothèse, l'équation $h_2(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[0, \bar{y}]$. De plus $h_2(\bar{y}) = G'(\bar{y})\rho/\lambda > 0$. On a donc $h_2(0) > 0$, ce qui se réécrit $G(\bar{y}) > G'(0)(\bar{y} - \rho/\lambda)$. Comme il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $V_{\bar{y}} = cG$, en multipliant par c l'inégalité précédente, on obtient $V_{\bar{y}}(\bar{y}) > V'_{\bar{y}}(0)(\bar{y} - \rho/\lambda)$. Or, par hypothèse, on a $V_{\bar{y}}(\bar{y}) = \lambda(\bar{y} - \rho/\lambda)$. On en déduit que

$$V'_{\bar{y}}(0) < \lambda, \quad (3.8)$$

c'est-à-dire $h'_1(0) > 0$. Supposons dans un premier temps que $\bar{y} > \tilde{x}$. La fonction h'_1 est croissante sur $[0, \tilde{x}]$ et décroissante sur $[\tilde{x}, \bar{y}]$, donc h'_1 ne peut qu'éventuellement s'annuler dans l'intervalle $[\tilde{x}, \bar{y}]$. Supposons que h'_1 s'annule en $x_0 \in [\tilde{x}, \bar{y}]$. Alors h_1 est croissante sur $[0, x_0]$ et décroissante sur $[x_0, \bar{y}]$. Or, on a $h_1(0) = -\rho$ et $h_1(\bar{y}) = 0$; donc h_1 atteint son minimum en 0. Si h'_1 ne s'annule pas, ou bien $\bar{y} > \tilde{x}$, on conclut de même que h_1 atteint son minimum en 0. Finalement, pour tout $x \in [0, \bar{y}]$, on a $h_1(x) \geq h_1(0) = -\rho$, d'où le résultat. $\square$

Prouvons à présent la Proposition 3.10. Cette proposition n'est pas démontrée dans (Paulsen, 2007).

Soient $\bar{y} > \rho/\lambda$ et $D_{\bar{y}} = \{\tau_i, \zeta_i\}_{i \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{D}$ une stratégie de type barrière/ruine de niveau $\bar{y}$. Supposons que $V_{\bar{y}}$ vérifie les hypothèses (1, 2). Tout d'abord, remarquons qu'une solution aux hypothèses (1, 2b) existe toujours et est unique d'après le Lemme 3.7, car il suffit de poser, pour tout $x \in [0, \bar{y}]$, $V_{\bar{y}}(x) = c_0 G(x)$ avec $c_0 = (\lambda\bar{y} - \rho)/G(\bar{y})$. Notons $T^{D_{\bar{y}}}$ le temps de ruine du processus de réserves associé $X^{D_{\bar{y}}}$. En appliquant

la Formule d'Itô, on obtient, comme en (2.3), pour tout $t, x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} V_{\bar{y}}(x) &= \mathbb{E}_x \left[e^{-r(t \wedge T)} V_{\bar{y}}(X_{t \wedge T}^{D_{\bar{y}}}) \right] + \mathbb{E}_x \left[\sum_{i \in \mathbb{N}^*} e^{-r\tau_i} [V_{\bar{y}}(X_{\tau_i-}^{D_{\bar{y}}}) - V_{\bar{y}}(X_{\tau_i}^{D_{\bar{y}}}) - g(\zeta_i)] \mathbb{1}_{\{\tau_i < t \wedge T\}} \right] \\ &+ \mathbb{E}_x \left[\sum_{i \in \mathbb{N}^*} e^{-r\tau_i} g(\zeta_i) \mathbb{1}_{\{\tau_i < t \wedge T\}} \right] - \mathbb{E}_x \left[\int_0^{t \wedge T} e^{-rs} \mathcal{L} V_{\bar{y}}(X_s^{D_{\bar{y}}}) ds \right] \\ &- \mathbb{E}_x \left[\int_0^{t \wedge T} e^{-rs} \sigma V'_{\bar{y}}(X_s^{D_{\bar{y}}}) dB_s \right]. \end{aligned}$$

Puisque $D_{\bar{y}}$ est une stratégie de type barrière/ruine, le processus $X^{D_{\bar{y}}}$ ne dépasse jamais la barrière $\bar{y}$. Cela implique les faits suivants :

1. la fonction $V'_{\bar{y}}$ est continue donc on a $\mathbb{E}_x \left[\int_0^{t \wedge T} e^{-rs} \sigma V'_{\bar{y}}(X_s^{D_{\bar{y}}}) dB_s \right] = 0$,
2. d'après l'hypothèse 1, on a $\mathbb{E}_x \left[\int_0^{t \wedge T} e^{-rs} \mathcal{L} V_{\bar{y}}(X_s^{D_{\bar{y}}}) ds \right] = 0$,
3. d'après le Lemme 3.11 et (2.4), on a $\mathbb{E}_x \left[\sum_{i \in \mathbb{N}^*} e^{-r\tau_i} [V_{\bar{y}}(X_{\tau_i-}^{D_{\bar{y}}}) - V_{\bar{y}}(X_{\tau_i}^{D_{\bar{y}}}) - g(\zeta_i)] \mathbb{1}_{\{\tau_i < t \wedge T\}} \right] \geq 0$.

Ainsi, en faisant tendre t vers l'infini, il vient, par convergence dominée,

$$V_{\bar{y}}(x) \geq \mathbb{E}_x \left[\sum_{i \in \mathbb{N}^*} e^{-r\tau_i} g(\zeta_i) \mathbb{1}_{\{\tau_i < T\}} \right] = J(x, D_{\bar{y}}).$$

Notons $D_{\bar{y}}^* = \{\tau_i^*, \zeta_i^*\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ la stratégie de type barrière/ruine correspondant à la solution aux hypothèses (1, 2). Alors pour $\tau_i^* < T^{D_{\bar{y}}^*}$, on a

$$\begin{aligned} V_{\bar{y}}(X_{\tau_i^*-}^{D_{\bar{y}}^*}) - V_{\bar{y}}(X_{\tau_i^*}^{D_{\bar{y}}^*}) - g(\zeta_i^*) &= V_{\bar{y}}(\bar{y}) - V_{\bar{y}}(\bar{x}) - g((\bar{y} - \bar{x} - d_0)/(1 + d_1)) \\ &= V_{\bar{y}}(\bar{y}) - V_{\bar{y}}(\bar{x}) - \lambda(\bar{y} - \bar{x} - \rho/\lambda) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse 2. En reprenant les calculs précédents avec cette stratégie on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$V_{\bar{y}}(x) = J(x, D_{\bar{y}}^*).$$

La stratégie $D_{\bar{y}}^*$ est donc la meilleure stratégie parmi les stratégies de type barrière/ruine de niveau $\bar{y}$. On en déduit que si les hypothèses (1, 2a) n'ont pas de solution, $D_{\bar{y}}^*$ correspond à la stratégie de ruine de barrière $\bar{y}$.

Le lemme suivant nous donne les propriétés de la fonction valeur du problème dans le cas où les hypothèses (1, 2, 3) n'ont pas de solution, et nous servira à montrer le Théorème 3.3.

Lemme 3.12 Supposons que les hypothèses (1, 2, 3) n'ont pas de solution, ce qui implique que la première ou la deuxième condition de la Proposition 3.9 est vérifiée. Alors, en reprenant la notation du Lemme 3.11, pour tous $\bar{y}_2 > \bar{y}_1 > \rho/\lambda$, on a $V_{\bar{y}_1} \leq V_{\bar{y}_2}$. De plus, $\tilde{V} := \lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} V_{\bar{y}}$ existe et on a $\tilde{V} = cG$ avec $c = \lambda / \lim_{x \rightarrow \infty} G'(x)$, et $\tilde{V}$ possède les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{V}(0) = 0, \\ \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{L}\tilde{V}(x) = 0, \\ \text{pour tous } 0 \leq x \leq y, \tilde{V}(y) - \tilde{V}(x) > \lambda(y - x - \rho/\lambda). \end{array} \right.$$

Preuve. Soient $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ tels que $\rho/\lambda < \bar{y}_1 < \bar{y}_2$. Si les hypothèses (1, 2a) admettent une solution avec $x^* = \bar{y}$ et $\hat{x} = \bar{x}$, alors on a $G(\bar{y}) - G(\bar{x}) = G'(\bar{x})(\bar{y} - \bar{x} - \rho/\lambda)$, cependant la première condition du Lemme 3.9 implique que pour tous $0 \leq x < y$, $G(y) - G(x) > G'(x)(y - x - \rho/\lambda)$. On en déduit, avec la Proposition 3.10 que, dans ce cas, les meilleures stratégies de type barrière/ruine sont des stratégies de ruine. On a donc

$$V_{\bar{y}_2}(\bar{y}_1) - V_{\bar{y}_1}(\bar{y}_1) = \frac{\lambda\bar{y}_2 - \rho}{G(\bar{y}_2)} G(\bar{y}_1) - (\lambda\bar{y}_1 - \rho)$$

Montrer que cette quantité est positive revient à vérifier que $h_1(\bar{y}_2) > 0$, où $h_1(x) := G(\bar{y}_1)/(\lambda\bar{y}_1 - \rho) - G(x)/(\lambda x - \rho)$. On a $h_1(\bar{y}_1) = 0$ et $h_1'(x) = (\lambda x - \rho)^{-2} \lambda [G(x) - G'(x)(x - \rho/\lambda)]$. Considérons la fonction $h_0(x) = G(x) - G'(x)(x - \rho/\lambda)$. On a $h_0(0) = G'(0)\rho/\lambda > 0$. On en déduit que, comme les hypothèses (1, 2b, 3) n'ont pas de solution, on a $h_0 > 0$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$G(x) > G'(x)(x - \rho/\lambda).$$

On a donc $h_1' > 0$, et en particulier, $h_1(\bar{y}_2) > h_1(\bar{y}_1) = 0$, d'où $V_{\bar{y}_1}(\bar{y}_1) < V_{\bar{y}_2}(\bar{y}_1)$. Comme G est croissante, pour tout $x \in (0, \bar{y}_1)$ on a $V_{\bar{y}_1}(x) < V_{\bar{y}_2}(x)$. Pour $x \in (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$, on a $V_{\bar{y}_2}(x) - V_{\bar{y}_1}(x) = \frac{\lambda\bar{y}_2 - \rho}{G(\bar{y}_2)} G(x) - (\lambda x - \rho)$, et

$$G(x)/(\lambda x - \rho) - G(\bar{y}_2)/(\lambda\bar{y}_2 - \rho) = h_1(\bar{y}_2) - h_1(x) > 0,$$

car h_1 est croissante. Pour $x \geq \bar{y}_2$, on a $V_{\bar{y}_2}(x) - V_{\bar{y}_1}(x) = \lambda x - \rho - (\lambda x - \rho) = 0$. Finalement, si la première condition de la Proposition 3.9 est vérifiée, on a $V_{\bar{y}_1} \leq V_{\bar{y}_2}$. Soit $\{\bar{y}_n\}$ une suite croissante vers ∞ , et définissons c_n par $V_{\bar{y}_n}(x) = c_n G(x)$, $x \leq \bar{y}_n$. On a donc $c_n = (\lambda\bar{y}_n - \rho)/G(\bar{y}_n)$. D'après la Règle de L'Hôpital (D.5) et la caractérisation séquentielle des limites, on a

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda\bar{y}_n - \rho}{G(\bar{y}_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{G'(\bar{y}_n)} = \frac{\lambda}{\lim_{x \rightarrow \infty} G'(x)}.$$

Supposons à présent que la deuxième condition de la Proposition 3.9 est vérifiée, c'est-à-dire que pour tous

$0 \leq x < y$ tels que $G(y) - G(x) = G'(x)(y - x - \rho/\lambda)$, on ait $G'(x) > G'(y)$. Si les hypothèses (1, 2a) n'ont pas de solution, alors d'après la Proposition 3.10, les meilleures stratégies de type barrière/ruine sont des stratégies de ruine, donc d'après la Proposition 3.9, la première condition est vérifiée et le résultat du lemme vient d'être montré dans ce cas. Supposons donc qu'il existe au moins une solution aux hypothèses (1, 2a).

Commençons par montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $G'(y) < G'(0)$. Pour ce faire, il suffit de montrer que $\lim_{y \rightarrow \infty} G'(y) \leq G'(0)$, car G' est croissante sur $[\tilde{x}, \infty)$. Supposons donc par l'absurde que $\lim_{y \rightarrow \infty} G'(y) > G'(0)$. Soient $0 \leq x_1 < y_1$ tels que $G(y_1) - G(x_1) = G'(x_1)(y_1 - x_1 - \rho/\lambda)$. Notons que $x_1 < \tilde{x}$. En effet, sinon, puisque G est strictement convexe sur $(\tilde{x}, \infty)$, on aurait $G(y_1) - G(x_1) > G'(x_1)(y_1 - x_1) > G'(x_1)(y_1 - x_1 - \rho/\lambda)$. Par hypothèse, on a $G'(x_1) > G'(y_1)$. Sur $[0, \tilde{x}]$, G' est décroissante, donc on a $G'(x_1) \leq G'(0)$, et si $y_1 \leq \tilde{x}$, alors pour tout $y \in [x_1, y_1]$, on a $G'(x_1) \geq G'(y)$. Si $y_1 \geq \tilde{x}$, alors pour tout $y \in [x_1, \tilde{x}]$, comme G' est croissante sur $[\tilde{x}, \infty)$, on a $G'(y) \geq G'(x_1)$, et si $y \in [\tilde{x}, y_1]$, on a $G'(y) \leq G'(y_1) < G'(x_1)$. Finalement, pour tout $y \in [x_1, y_1]$, $G'(y) \leq G'(x_1)$. On a donc

$$\begin{aligned} -\rho/\lambda &= \int_{x_1}^{y_1} (G'(y)/G'(x_1) - 1) dy \\ &= \int_0^{y_1} (G'(y)/G'(x_1) - 1) dy - \int_0^{x_1} (G'(y)/G'(x_1) - 1) dy \\ &\geq \int_0^{y_1} (G'(y)/G'(x_1) - 1) dy \\ &\geq \int_0^{y_1} (G'(y)/G'(0) - 1) dy. \end{aligned}$$

On a supposé par l'absurde que $\lim_{y \rightarrow \infty} G'(y) > G'(0)$, donc il existe $y_2 > y_1$ tel que $G'(y_2) > G'(0)$ et $\int_0^{y_2} (G'(y)/G'(0) - 1) dy = -\rho/\lambda$. Cela se réécrit $G(y_2) = G'(0)(y_2 - \rho/\lambda)$, ce qui implique par hypothèse $G'(0) > G'(y_2)$, d'où une contradiction.

Montrons ensuite que pour tout $y_2 > y_1$, il existe $x_2 \in (x_1, y_2)$ tel que $G(y_2) - G(x_2) = G'(x_2)(y_2 - x_2 - \rho/\lambda)$. Considérons donc un niveau y_2 tel que $y_2 > y_1$. On a montré que pour tout $y \geq 0$, $G'(y) \leq G'(0)$, donc d'après ce qui précède, on a

$$-\rho/\lambda > \int_0^{y_2} (G'(y)/G'(0) - 1) dy.$$

De plus, comme l'intégrande est négative, et comme pour tout $x_2 < y_2$ on a

$$\int_0^{y_2} (G'(y)/G'(0) - 1) dy < \int_{x_2}^{y_2} (G'(y)/G'(0) - 1) dy < \int_{x_2}^{y_2} (G'(y)/G'(x_2) - 1) dy,$$

la fonction G'' ne s'annule qu'en $\tilde{x}$, donc l'intégrande ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto \int_x^{y_2} (G'(y)/G'(x) - 1) dy$ est donc strictement croissante sur $[0, y_2]$ et s'annule

en y_2 . On peut donc choisir $x_2 \in (0, y_2)$ tel que $\int_{x_2}^{y_2} (G'(y)/G'(x_2) - 1) dy = -\rho/\lambda$, ce qui se réécrit $G(y_2) - G(x_2) = G'(x_2)(y_2 - x_2 - \rho/\lambda)$. On a donc, comme précédemment, $G'(x_2) > G'(y)$, pour tout $y \in [x_2, y_2]$. Il reste à montrer que $x_2 > x_1$. Supposons le contraire. Alors, comme $x_1 < \tilde{x}$ et G' est décroissante sur $(0, \tilde{x})$, on a $G'(x_2) \leq G'(x_1)$. On a donc

$$\begin{aligned} -\rho/\lambda &= \int_{x_2}^{y_2} (G'(y)/G'(x_2) - 1) dy \\ &= \int_{x_1}^{y_1} (G'(y)/G'(x_2) - 1) dy + \int_{x_2}^{x_1} (G'(y)/G'(x_2) - 1) dy + \int_{y_1}^{y_2} (G'(y)/G'(x_2) - 1) dy \\ &< \int_{x_1}^{y_1} (G'(y)/G'(x_2) - 1) dy \\ &\leq \int_{x_1}^{y_1} (G'(y)/G'(x_1) - 1) dy \\ &= -\rho/\lambda, \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

Soit $\bar{y}_1 > \rho/\lambda$ tel que $V_{\bar{y}_1}$ soit solution des hypothèses (1, 2a) avec $x^* = \bar{y}_1$ et $\hat{x} = \bar{x}_1$. Fixons $\bar{x}_1$ et $\bar{y}_1$ dans le reste de la preuve. On a $G(\bar{y}_1) - G(\bar{x}_1) = G'(\bar{x}_1)(\bar{y}_1 - \bar{x}_1 - \rho/\lambda)$. D'après ce qui précède, pour tout $\bar{y}_2 > \bar{y}_1$, il existe $\bar{x}_2 \in (\bar{x}_1, \bar{y}_2)$ tel qu'il existe une solution $V_{\bar{y}_2}$ aux hypothèses (1, 2a) avec $x^* = \bar{y}_2$ et $\hat{x} = \bar{x}_2$. Pour $i = 1, 2$, on a $V_{\bar{y}_i}(x) = c_i G(x)$ pour tout $x \in [0, \bar{y}_i]$, avec $c_i = \lambda/G'(\bar{x}_i)$, et $V_{\bar{y}_i}(x) = \lambda(x - \bar{x}_i) - \rho$, pour tout $x \geq \bar{y}_i$. Soit $x \in [0, \bar{y}_1]$. On a $V_{\bar{y}_2}(x) - V_{\bar{y}_1}(x) = (c_2 - c_1)G(x)$, or puisque $\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \tilde{x}$, on a $G'(\bar{x}_1) > G'(\bar{x}_2)$, donc $c_1 < c_2$, d'où

$$V_{\bar{y}_1}(x) < V_{\bar{y}_2}(x), \quad x \in (0, \bar{y}_1]. \quad (3.9)$$

Soit $\bar{y} \in [\bar{y}_1, \bar{y}_2]$. D'après ce qui précède, il existe $\bar{x} \in (\bar{x}_1, \bar{y})$ tel qu'il existe une solution $V_{\bar{y}}$ aux hypothèses (1, 2a) avec $x^* = \bar{y}$ et $\hat{x} = \bar{x}$. Montrons que $V_{\bar{y}_1}(\bar{y}_2) < V_{\bar{y}_2}(\bar{y}_2)$. Cela impliquera $V_{\bar{y}_1}(\bar{y}) < V_{\bar{y}_2}(\bar{y})$, car en remplaçant $\bar{y}_2$ par $\bar{y}$ dans cette inégalité, on aura $V_{\bar{y}_1}(\bar{y}) < V_{\bar{y}}(\bar{y})$, et en remplaçant $\bar{y}_1$ par $\bar{y}$ dans (3.9), on aura $V_{\bar{y}}(\bar{y}) < V_{\bar{y}_2}(\bar{y})$. On a

$$\begin{aligned} V_{\bar{y}_2}(\bar{y}_2) - V_{\bar{y}_1}(\bar{y}_2) &= V_{\bar{y}_2}(\bar{x}_2) + \lambda(\bar{y}_2 - \bar{x}_2 - \rho/\lambda) - V_{\bar{x}_1}(\bar{y}_2) - \lambda(\bar{y}_1 - \bar{x}_1 - \rho/\lambda) \\ &= \lambda \left(\frac{G(\bar{x}_2)}{G'(\bar{x}_2)} - \frac{G(\bar{x}_1)}{G'(\bar{x}_1)} - (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \right). \end{aligned}$$

Posons $h_2(x) = \frac{G(x)}{G'(x)} - \frac{G(\bar{x}_1)}{G'(\bar{x}_1)} - (x - \bar{x}_1)$. On a $h_2(\bar{x}_1) = 0$ et pour tout $x \in [0, \bar{x}_2]$,

$$h_2'(x) = -G(x)G'(x)^{-2}G''(x) > 0,$$

donc $h_2(\bar{x}_2) > 0$, d'où $V_{\bar{y}_2}(\bar{y}_2) - V_{\bar{y}_1}(\bar{y}_2) > 0$. Pour $x \geq \bar{y}_1$, on a

$$\begin{aligned} V_{\bar{y}_2}(\bar{y}_2) - V_{\bar{y}_1}(\bar{y}_2) &= \lambda(x - \bar{x}_2 - \rho/\lambda) - \lambda(x - \bar{x}_1 - \rho/\lambda) \\ &= \lambda(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) > 0. \end{aligned}$$

Pour finir, considérons $\bar{y}_0 \in (\rho/\lambda, \bar{y}_1)$. S'il existe une solution $V_{\bar{y}_0}$ aux hypothèses (1, 2a) telle que $x^* = \bar{y}_0$, d'après ce qui précède, on a $V_{\bar{y}_0} \leq V_{\bar{y}_1}$. Supposons donc qu'il n'existe pas de telle solution. Alors, d'après la Proposition 3.10, il existe une solution $V_{\bar{y}_0}$ aux hypothèses (1, 2b) telle que $x^* = \bar{y}_0$, correspondant à une stratégie de ruine. D'après la Proposition 3.9, on a $G(\bar{y}_0) > G'(0)(\bar{y}_0 - \rho/\lambda)$, donc

$$\begin{aligned} V_{\bar{y}_1}(\bar{y}_0) - V_{\bar{y}_0}(\bar{y}_0) &= (c_1 - c_0)G(\bar{y}_0) \\ &= \frac{\lambda}{G'(\bar{x}_1)}G(\bar{y}_0) - (\lambda G(\bar{y}_0) - \rho) \\ &= \lambda G(\bar{y}_0) \left(\frac{1}{G'(\bar{x}_1)} - \frac{\bar{y}_1 - \rho/\lambda}{G(\bar{y}_0)} \right) \\ &> \lambda G(\bar{y}_1) \left(\frac{1}{G'(\bar{x}_1)} - \frac{1}{G'(0)} \right) \\ &> 0, \end{aligned}$$

d'où $c_0 < c_1$ et donc pour tout $x \in (0, \bar{y}_1]$, $V_{\bar{y}_0}(x) < V_{\bar{y}_1}(x)$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned} V_{\bar{y}_1}(\bar{y}_1) - V_{\bar{y}_0}(\bar{y}_1) &= \frac{\lambda}{G'(\bar{x}_1)}G(\bar{y}_1) - (\lambda G(\bar{y}_1) - \rho) \\ &= \frac{\lambda}{G'(\bar{x}_1)}G(\bar{x}_1) + \lambda(\bar{y}_1 - \bar{x}_1 - \rho/\lambda) - (\lambda G(\bar{y}_1) - \rho) \\ &= \lambda \left(\frac{G(\bar{x}_1)}{G'(\bar{x}_1)} - \bar{x}_1 \right), \end{aligned}$$

or G est strictement concave sur $[0, \bar{x}_1]$, donc cette quantité est strictement positive. Enfin, pour $x \geq \bar{y}_1$, on a

$$\begin{aligned} V_{\bar{y}_1}(x) - V_{\bar{y}_0}(x) &= V_{\bar{y}_1}(\bar{x}_1) + \lambda(x - \bar{x}_1 - \rho/\lambda) - \lambda(x - \bar{x}_0 - \rho/\lambda) \\ &= \frac{\lambda}{G'(\bar{x}_1)}G(\bar{x}_1) - \lambda(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \\ &= \frac{\lambda}{G'(\bar{x}_1)}(G(\bar{x}_1) - G'(\bar{x}_1)(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)) \\ &\geq \frac{\lambda}{G'(\bar{x}_1)}(G(\bar{x}_1) - G(\bar{x}_0) - G'(\bar{x}_1)(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)), \end{aligned}$$

et cette quantité est strictement positive car comme G est strictement concave sur $[0, \bar{x}_1]$, on a $(G(\bar{x}_1) - G(\bar{x}_0))/(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) > G'(\bar{x}_1)$.

On a montré que pour tout $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ tels que $G(\bar{y}_n) - G(\bar{x}_n) = G'(\bar{x}_n)(\bar{y}_n - \bar{x}_n - \rho/\lambda)$, alors pour tout

$\bar{y}_{n+1} > \bar{y}_n$, il existe $\bar{x}_{n+1} \in (\bar{x}_n, \bar{y}_{n+1})$ tel que $G(\bar{y}_{n+1}) - G(\bar{x}_{n+1}) = G'(\bar{x}_{n+1})(\bar{y}_{n+1} - \bar{x}_{n+1} - \rho/\lambda)$, et on a $V_{\bar{y}_n} \leq V_{\bar{y}_{n+1}}$. Soit $(\bar{y}_n)_{n \geq 1}$ une telle suite tendant vers l'infini. Définissons comme précédemment c_n par $V_{\bar{y}_n}(x) = c_n G(x)$, $x \leq \bar{y}_n$, mais cette fois on a $c_n = \lambda/G'(\bar{x}_n)$. D'après ce qui précède, la suite $(\bar{x}_n)_{n \geq 1}$ tend aussi vers l'infini, donc on a directement $c = \lim_{x \rightarrow \infty} c_n = \lambda / \lim_{x \rightarrow \infty} G'(x)$. Montrons enfin les propriétés de $\tilde{V} = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\bar{y}_n}$. On a $\tilde{V} = cG$, donc on a immédiatement $\tilde{V}(0) = 0$ et $\mathcal{L}\tilde{V}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Enfin, d'après le Lemme 3.11, pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq x < y$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{V}(y) - \tilde{V}(x) &= c(G(y) - G(x)) \\ &> c_n(G(y) - G(x)) \\ &= V_{\bar{y}_n}(y) - V_{\bar{y}_n}(x) \\ &\geq \lambda(y - x - \rho/\lambda). \end{aligned}$$

□

On déduit de ce lemme le critère d'existence d'une stratégie optimale suivant.

Proposition 3.13 Si $\lim_{x \rightarrow \infty} G'(x) = \infty$, alors les hypothèses (1, 2, 3) possèdent nécessairement une solution.

Preuve. Supposons $\lim_{x \rightarrow \infty} G'(x) = \infty$. Supposons par l'absurde que les hypothèses (1, 2, 3) n'admettent pas de solution. Alors, d'après le Lemme 3.12, on a $\lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} V_{\bar{y}} = 0$, et pour tous $\bar{y}_2 > \bar{y}_1 > \rho/\lambda$, on a $V_{\bar{y}_1} \leq V_{\bar{y}_2}$. Soit $\bar{y} > \rho/\lambda$. On a donc $V_{\bar{y}} = 0$. Or, par définition, $V_{\bar{y}}$ vérifie en particulier l'hypothèse 2 qui implique que pour tout $x > \bar{y}$, $V_{\bar{y}}(x) = V_{\bar{y}}(\bar{y}) + \lambda(x - \bar{y}) > 0$, d'où une contradiction. □

En exploitant les propriétés des fonctions hypergéométriques, on peut montrer qu'il suffit de connaître la valeur du paramètre α pour savoir si la limite de G' est finie ou non. On arrive ainsi à la proposition suivante.

Proposition 3.14 Les hypothèses (1, 2, 3) possèdent une solution si et seulement si $\alpha \in (0, r)$. Dans ce cas, Les hypothèses (1, 2a, 3) possèdent une unique solution si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $G(x) > G'(x)(x - \rho/\lambda)$. De plus, si les hypothèses (1, 2a, 3) n'admettent pas de solution, alors les hypothèses (1, 2b, 3) possèdent une unique solution.

Si $\alpha = 0$, les hypothèses (1, 2, 3) n'admettent pas de solution.

Preuve. D'après la Proposition 3.13, il suffit de montrer qu'on a $\lim_{x \rightarrow \infty} G'(x) = \infty$ si et seulement si $\alpha = 0$,

et $\lim_{x \rightarrow \infty} G'(x) < \infty$ si et seulement si $\alpha \in (0, r)$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$G(x) = e^{-m(x)}[U(a, b, m(0))F(a, b, m(x)) - F(a, b, m(0))U(a, b, m(x))],$$

où $a = 1 + \frac{\alpha}{2(r-\alpha)}$, $b = 1/2$, $m(x) = \frac{r-\alpha}{\sigma^2} \left(x + \frac{\mu}{2(r-\alpha)}\right)^2$, et $\alpha \in [0, r)$. D'après le Lemme C.3, on a, au voisinage de ∞ ,

$$U(a, b, m(x)) \sim m(x)^{-a} = \left(\frac{r-\alpha}{\sigma^2}\right)^{\frac{\alpha-2r}{2(r-\alpha)}} \left(x + \frac{\mu}{r-\alpha}\right)^{\frac{\alpha-2r}{r-\alpha}} \rightarrow 0,$$

$$e^{-m(x)}F(a, b, m(x)) \sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}m(x)^{-(b-a)} = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^{\frac{r}{2(r-\alpha)}} \left(x + \frac{\mu}{r-\alpha}\right)^{\frac{r}{r-\alpha}},$$

donc lorsque $x \rightarrow \infty$ on a

$$G(x) \sim C_0 \frac{r-\alpha}{r} \left(x + \frac{\mu}{r-\alpha}\right)^{\frac{r}{r-\alpha}},$$

où $C_0 \in \mathbb{R}_+^*$ est une constante. Puisque $G(0) = 0$, on a $G(x) = \int_0^x G'(t)dt$. De plus, G est croissante, donc on peut appliquer le Lemme D.6 avec $\phi(x) = G'(x - \mu/(r-\alpha))/C_0$ et $\beta = r/(r-\alpha)$. On a donc, lorsque $x \rightarrow \infty$,

$$G'(x) \sim C_0 \left(x + \frac{\mu}{r-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{r-\alpha}}.$$

On en déduit que si $\alpha \in (0, r)$, on a $\alpha/(r-\alpha) > 0$, donc $\lim_{x \rightarrow \infty} G'(x) = \infty$, et si $\alpha = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow \infty} G'(x) = C_0 = \sqrt{\pi}U(1, 1/2, r\sigma^{-2}) < \infty$. Ainsi, il existe toujours une stratégie optimale lorsque $\alpha \in (0, r)$, donc il existe une unique solution aux hypothèses (1, 2a, 3) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $G(x) > G'(x)(x - \rho/\lambda)$. De plus, si les hypothèses (1, 2a, 3) n'admettent pas de solution, alors les hypothèses (1, 2b, 3) possèdent une unique solution. L'unicité découle de la Proposition 3.10.

Supposons à présent $\alpha = 0$, c'est-à-dire que les coûts d'investissement sont fixes et ne dépendent pas du montant investi. Dans ce cas, on remarque que l'opérateur infinitésimal s'écrit $\mathcal{L}\phi(x) = -r\phi(x) + (\mu + rx)\phi'(x) + \frac{\sigma^2}{2}\phi''(x)$, donc une solution évidente de $\mathcal{L}\phi(x) = 0$ est $y_0(x) := rx + \mu$. Cette fonction est affine, donc les fonctions y_0 et $y_5(x) = e^{-m(x)}U(a, b, m(x))$ sont linéairement indépendantes. On en déduit, comme dans le Lemme 3.7, que toutes les solutions de $\mathcal{L}\phi(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $\phi(0) = 0$ sont proportionnelles à la fonction

$$G_0(x) := y_5(0)y_0(x) - y_0(0)y_5(x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$G'_0(x) = ry_5(0) + m'(x) \left[\mu y_5(x) + a e^{-m(x)} U(a+1, b+1, m(x)) \right],$$

donc $G'_0 > 0$, donc $G_0 \geq 0$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$G''_0(x) = \mu e^{-m(x)} \{ (2r\sigma^{-2} - (m'(x))^2) [U(a, b, m(x)) - U'(a, b, m(x))] + m'(x) [U'(a, b, m(x)) - U''(a, b, m(x))] \}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\text{sgn}\{U^{(n)}(a, b, m(x))\} = (-1)^n$, et pour x assez grand, $(m''(x))^2 > 2r\sigma^{-2}$, donc pour x assez grand on a $G''_0(x) < 0$. Ainsi, d'après le point 1 du Lemme 3.4, G_0 est strictement concave. Il n'existe donc pas de stratégie barrière optimale, (qui ne soit pas une stratégie de ruine) car il n'est pas possible de trouver $\hat{x} \geq 0$ et $x^* > \hat{x}$ tels que $G'_0(\hat{x}) = G'_0(x^*)$. De plus, on peut montrer qu'il n'existe pas non plus de stratégie de ruine optimale. En effet, s'il en existe une, alors il devrait exister x^* tel que $G_0(x^*) = G'_0(x^*)(x^* - \rho/\lambda)$. Cela peut s'écrire $h(x^*) = \rho/\lambda$ où $h(x) = x - G_0(x)/G'_0(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$. On a

$$h'(x) = 1 - \frac{G'_0(x)^2 - G_0(x)G''_0(x)}{G'_0(x)^2},$$

or $G''_0 \leq 0$ et $G_0 \geq 0$ donc $h' \leq 0$, c'est-à-dire que h est décroissante. Comme $h(0) = 0$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $h(x) \leq 0$ et il n'existe pas de $x^* \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $h(x^*) = \rho/\lambda > 0$. On en déduit finalement que le Théorème 3.3 s'applique avec $V = \lambda\pi^{-1/2}U(1, 1/2, r\sigma^{-2})^{-1/2}G$. $\square$

Donnons une interprétation de ce résultat. D'après les Théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3, s'il existe une stratégie optimale, celle-ci est du type barrière/ruine. Donnons nous deux niveaux $\bar{y}_1 < \bar{y}_2$, et notons D_1, D_2 les meilleures stratégies de type barrière/ruine de niveaux respectifs $\bar{y}_1, \bar{y}_2$. D'après le Lemme 3.12, on a $V_{\bar{y}_1} \leq V_{\bar{y}_2}$, donc la stratégie D_2 est meilleure que la stratégie D_1 . Ainsi, on peut toujours trouver une meilleure stratégie en considérant un niveau plus grand, ce qui explique pourquoi il n'existe pas de stratégie optimale. Cela peut se comprendre intuitivement par le fait que si les coûts d'investissement sont fixes, il est dans l'intérêt de l'entreprise d'investir ses réserves le plus possible car les rendements augmentent avec le montant investi. Or, plus l'entreprise dégage des bénéfices, plus elle est capable de verser des dividendes, et plus sa probabilité de ruine diminue.

Il ne nous manque plus que le lemme suivant sur les propriétés de la fonction valeur.

Lemme 3.15 *Si les hypothèses (1, 2, 3) possèdent une solution alors*

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\mathcal{L}V(x) \leq 0$,
2. Pour tous $0 \leq x \leq y$, on a $V(y) - V(x) \geq \lambda(y - x - \rho/\lambda)$.

Preuve.

1. Pour $x \in (0, x^*)$, on a $\mathcal{L}V(x) = 0$. La fonction V est convexe sur $(\tilde{x}, \infty)$, donc on a $V''(x^* -) \geq 0$.
 V est de classe C^1 donc on en déduit

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}V(x^* -) \\ &= -rV(x^*) + \mu(x^*)V'(x^*) + \frac{\sigma^2}{2}V''(x^* -) \\ &\geq -rV(x^*) + \mu(x^*)V'(x^*) \\ &= -rV(x^*) + \mu(x^*)\lambda, \end{aligned}$$

d'où $rV(x^*) \geq \lambda\mu(x^*)$. Soit $x \geq x^*$. On a $V(x) = V(x^*) + \lambda(x - x^*)$ donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x) &= -r(V(x^*) + \lambda(x - x^*)) + \lambda\mu(x) \\ &\leq -r\lambda(x - x^*) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

2. Soient $0 \leq x \leq y$. On a

$$V(y) - V(x) - \lambda(y - x) = \int_x^y (V'(s) - \lambda)ds,$$

Supposons tout d'abord que l'hypothèse 2a est vérifiée. Alors, on a $V'(\hat{x}) = \lambda$, et d'après l'hypothèse 1, il existe $\tilde{x} \in (\hat{x}, x^*)$ tel que V' est décroissante sur $[0, \tilde{x}]$, et croissante sur $[\tilde{x}, \infty)$. On en déduit que $V' \geq \lambda$ sur $[0, \hat{x}]$, $V' \leq \lambda$ sur $[\hat{x}, x^*]$, et $V' = \lambda$ sur $[x^*, \infty)$. donc

$$\begin{aligned} \int_x^y (V'(s) - \lambda)ds &\geq \int_{\hat{x}}^{x^*} (V'(s) - \lambda)ds \\ &= V(x^*) - V(\hat{x}) - \lambda(x^* - \hat{x}) \\ &= -\rho, \end{aligned}$$

d'où le résultat sous l'hypothèse 2a. Supposons à présent que l'hypothèse 2b est vérifiée. Tout d'abord on note que $x^* > \tilde{x}$, car sinon, puisque V' est strictement décroissante sur $[0, \tilde{x}]$, on aurait

$$V(x^*) = \int_0^{x^*} V'(x)dx > \int_0^{x^*} V'(x^*)dx = V'(x^*)x^* = \lambda x^*,$$

où la dernière étape vient de l'hypothèse 3. Or, d'après l'hypothèse 2, on a $V(x^*) - \lambda x^* = -\rho < 0$, d'où une contradiction. D'après (3.8), on a $V(x^*) = \lambda(x^* - \rho/\lambda) > V'(0)(x^* - \rho/\lambda)$, donc $V'(0) < \lambda$. On a donc $V'(x) < \lambda$ pour tout $x \in [0, x^*]$. Ainsi, pour tous $0 \leq x \leq y \leq x^*$, on a

$$V(y) - V(x) - \lambda(y - x) = \int_x^y (V'(s) - \lambda)ds \geq \int_0^{x^*} (V'(s) - \lambda)ds = V(x^*) - \lambda x^* = -\rho,$$

et pour tous $x^* \leq x \leq y$, on a $V(y) - V(x) = V(x^*) + \lambda(y - x^*) - (V(x^*) + \lambda(x - x^*)) = \lambda(y - x)$, d'où le résultat.

□

Nous pouvons à présent prouver les Théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3. La preuve est inspirée de (Paulsen, 2007) mais modifiée pour s'appliquer à notre fonction d'utilité plus générale.

Supposons tout d'abord que les hypothèses (1, 2, 3) possèdent une solution $(\hat{x}, x^*, V)$ si l'hypothèse 2a est vérifiée, ou bien (x^*, V) si l'hypothèse 2b est vérifiée. Notons, selon le cas, D^* la stratégie barrière $(x^*, \hat{x})$ ou la stratégie de ruine de niveau x^* . Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En reprenant les calculs de la Section 2.2, on a $V(x) = J(x, D^*)$, et d'après le Lemme 3.15, pour toute stratégie $D = \{\tau_i, \zeta_i\}_{i \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{D}$, on a $V(x) \geq J(x, D)$. La fonction V est donc la fonction valeur du problème et D^* est une stratégie optimale. L'unicité découle de la Proposition 3.10.

Supposons à présent que les hypothèses (1, 2, 3) n'admettent pas de solution. Alors les résultats du Lemme 3.12 s'appliquent. Supposons par l'absurde qu'il existe une stratégie optimale $\{\tau_i^*, \zeta_i^*\}_{i \in \mathbb{N}^*}$. Notons D^* le processus de dividendes associé et $X^* = X^{D^*}$. À chaque instant d'intervention τ_i^* , on a

$$\Delta X_{\tau_i^*}^* = X_{\tau_i^*}^* - X_{\tau_i^*}^{*-} = -f(\zeta_i^*) = -((1 + d_1)\zeta_i^* + d_0).$$

On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\Delta D_t^* = \frac{-\Delta X_t^* - d_0}{1 + d_1} \mathbb{1}_{\{-\Delta X_t^* > 0\}}.$$

D'après le Lemme 3.12, pour tous $0 \leq x \leq y$, on a $\tilde{V}(y) - \tilde{V}(x) > \lambda(y - x - \rho/\lambda)$, où $\tilde{V} = \lambda G / \lim_{x \rightarrow \infty} G'(x)$.

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} \tilde{V}(X_{t-}^*) - \tilde{V}(X_t^*) &> \lambda(-\Delta X_t^* - \rho/\lambda) \\ &= k \frac{-\Delta X_t^* - d_0}{1 + d_1} - K \\ &= g(\Delta D_t^*) \mathbb{1}_{\{\Delta D_t^* > 0\}}. \end{aligned}$$

Soit $\{\tau_i', \zeta_i'\}_{i \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{D}$ une stratégie de processus de dividendes D' telle que

$$\Delta D_t' = [K + k^{-1}(\tilde{V}(X_{t-}^*) - \tilde{V}(X_t^*))] \mathbb{1}_{\{\Delta D_t^* > 0\}},$$

Alors, dès que $\Delta D_t^* > 0$, on a $\Delta D_t' > \Delta D_t^*$. On en déduit que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a $\zeta_i' > \zeta_i^*$, donc $g(\zeta_i') > g(\zeta_i^*)$, puis $J(x, D') > J(x, D^*)$, ce qui est une contradiction. En reprenant à nouveau les calculs de la Section 2.2 avec $\tilde{V}$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et toute stratégie $D \in \mathcal{D}$, $\tilde{V}(x) \geq J(x, D)$. D'après le Lemme 3.12, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\bar{y} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\tilde{V}(x) - V_{\bar{y}}(x) = \tilde{V}(x) - J(x, D^{\bar{y}}) < \varepsilon.$$

La fonction valeur du problème est, dans ce cas, donnée par $V = \tilde{V}$.

3.6 Résolution du problème dans des cas particuliers

Dans cette section, nous présentons un résultat de sensibilité à certains paramètres de la solution du problème de contrôle. Nous utilisons également l'algorithme présenté à la Section 3.4 pour illustrer ce résultat et identifier des stratégies optimales à partir de valeurs numériques données des paramètres.

3.6.1 Sensibilité du modèle aux paramètres

Un résultat intéressant est le fait que lorsque les impôts fixes ou les frais augmentent, les paiements de dividendes optimaux sont plus élevés mais moins fréquents, car le niveau optimal augmente dans ce cas. De plus, une telle augmentation entraîne une réduction de la valeur des stratégies optimales. Cependant, de façon surprenante, comme (Cadenillas *et al.*, 2007), nous observons (voir les Tables 4.1 et 4.2) que lorsque le montant variable des impôts k augmente, alors les paiements de dividendes optimaux sont moins élevés mais plus fréquents.

Théorème 3.16 *Lorsqu'il existe une stratégie optimale, le niveau x^* est croissant avec K et d_0 . Lorsque la stratégie optimale est une stratégie barrière, le seuil $\hat{x}$ est décroissant avec K et d_0 . Le coefficient c de la fonction valeur est décroissant avec K et d_0 . De plus, nous conjecturons que le niveau x^* est croissant avec d_1 et décroissant avec k , que le seuil $\hat{x}$ est croissant avec k et décroissant avec d_1 , et que le coefficient c est croissant avec k et décroissant avec d_1 .*

Preuve. Notons, pour tous $0 \leq x \leq y$, et λ, c fixés,

$$\mathcal{I}^{\lambda, c}(x, y) = \int_x^y (\lambda - cG'(t))dt = \lambda(y - x) - c(G(y) - G(x)).$$

Nous allons dans un premier temps étudier la sensibilité aux paramètres K et d_0 . Si K ou d_0 augmente, alors $\rho = K + d_0\lambda$ augmente également. Soient donc $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\rho_1 < \rho_2$ tels qu'il existe des stratégies optimales respectives pour ces paramètres. Posons $h^{\lambda, c}(x) = \lambda - cG'(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$. Sans perte de généralité, on suppose que ces stratégies sont des stratégies barrière, c'est-à-dire qu'il existe $0 < x_1 < y_1$, $0 < x_2 < y_2$, $c_1 \in \mathbb{R}_+^*$, et $c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\mathcal{I}^{\lambda, c_i}(x_i, y_i) - \rho_i = h^{\lambda, c_i}(x_i) = h^{\lambda, c_i}(y_i) = 0$ pour $i = 1, 2$. D'après la discussion menant à l'algorithme de recherche de stratégies optimales, puisque $\rho_1 < \rho_2$ on a

nécessairement $c_1 > c_2$ et $x_2 < x_1 < \tilde{x} < y_1 < y_2$, où l'on rappelle que $G''(\tilde{x}) = 0$.

Etudions ensuite la sensibilité par rapport à k et d_1 . Nous allons donner ici une intuition de la conjecture dans le cas où $d_0 = 0$. Fixons $K \in \mathbb{R}_+^*$ et posons $d_0 = 0$; ainsi $\rho = K$ et ne dépend pas de λ . Si, séparément, k augmente ou d_1 diminue alors $\lambda = k/(1 + d_1)$ augmente. Soient donc $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2$. Supposons avoir trouvé des stratégies barrière optimales (c_1, x_1, y_1) et (c_2, x_2, y_2) correspondant respectivement à λ_1 et λ_2 . En reprenant la notation précédente, puisque $h^{\lambda_1, c_1} < h^{\lambda_2, c_1}$, on a $\rho = \mathcal{I}^{\lambda_1, c_1}(x_1, y_1) < \mathcal{I}^{\lambda_2, c_1}(x_1, y_1)$. Or on a également $\mathcal{I}^{\lambda_2, c_2}(x_2, y_2) = \rho$. On a donc nécessairement $c_2 > c_1$. Puisque $G'' < 0$ sur $[0, \tilde{x})$ et $G'' > 0$ sur $(\tilde{x}, \infty)$, on a alors, pour tout $x \in [0, \tilde{x})$,

$$(h^{\lambda_2, c_2})'(x) = -c_2 G''(x) < -c_1 G''(x) = (h^{\lambda_1, c_1})'(x),$$

et, de même, sur $(\tilde{x}, \infty)$, on a $(h^{\lambda_2, c_2})' > (h^{\lambda_1, c_1})'$. La courbe de h^{λ_2, c_2} est donc plus "pointue" que celle de h^{λ_1, c_1} , donc les zéros x_2 et y_2 de h^{λ_2, c_2} sont tels que $x_1 < x_2 < \hat{x} < y_2 < y_1$, et on déduit le résultat. $\square$

Dans la Proposition 2.3 dans (Paulsen, 2007), il est affirmé que le niveau optimal x^* décroît avec le taux sans risque r . Or, pour $r_1 = 0.1$ et $r_2 = 0.2$, nous avons déterminé les stratégies optimales (x_i, y_i, c_i) , $i = 1, 2$ pour les paramètres $\mu = \sigma^2 = k = K = 1$, $d_0 = 0$, $\alpha = 0.02$, $d_1 = 0.1$, et tracé sur la figure ci-dessous les courbes $\lambda - c_i G'_i$, où G_i est la fonction G correspondant à r_i . Les aires bleue et rouge sont toutes deux égales à $\rho = K + d_0 \lambda = 1$. On obtient alors $x_2 < x_1$, $y_2 > y_1$ et $c_2 < c_1$, ce qui est en contradiction avec le résultat annoncé dans (Paulsen, 2007). Les résultats numériques sont $(x_1, y_1, c_1) = (2.07, 17.47, 15.62)$ et $(x_2, y_2, c_2) = (1.72, 22.15, 6.20)$. Nous n'avons cependant pas été en mesure de prouver un résultat général.

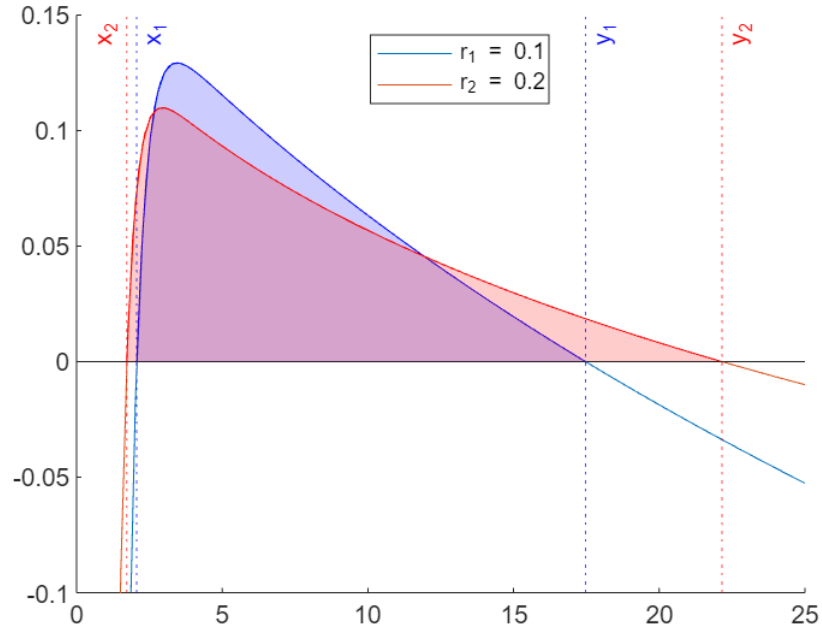


Figure 3.1 Représentation graphique de stratégies barrière optimales pour deux valeurs de r

3.6.2 Exemples de stratégies barrière

À l'aide de l'Algorithme 1 et du code figurant à l'Annexe E, on répertorie dans la table suivante quelques stratégies optimales pour différentes valeurs de d_0 lorsque $\mu = \sigma^2 = 1$, $r = d_1 = 0.1$, $\alpha = 0.02$, et $k = K = 1$. Les instants optimaux de versement sont toujours les temps d'atteinte en x^* du processus de réserves contrôlé.

d_0	0	0.5	1	3	5	7	10
x^*	17.47	21.43	25.10	38.32	50.44	62.02	78.83
$\hat{x}$	2.07	1.99	1.94	1.80	1.73	1.67	1.61
ζ^*	14.01	17.22	20.14	30.47	39.74	48.50	61.11
c	15.62	15.14	14.76	13.68	12.97	12.43	11.82

Table 3.1 Stratégies barrière optimales pour différentes valeurs de d_0

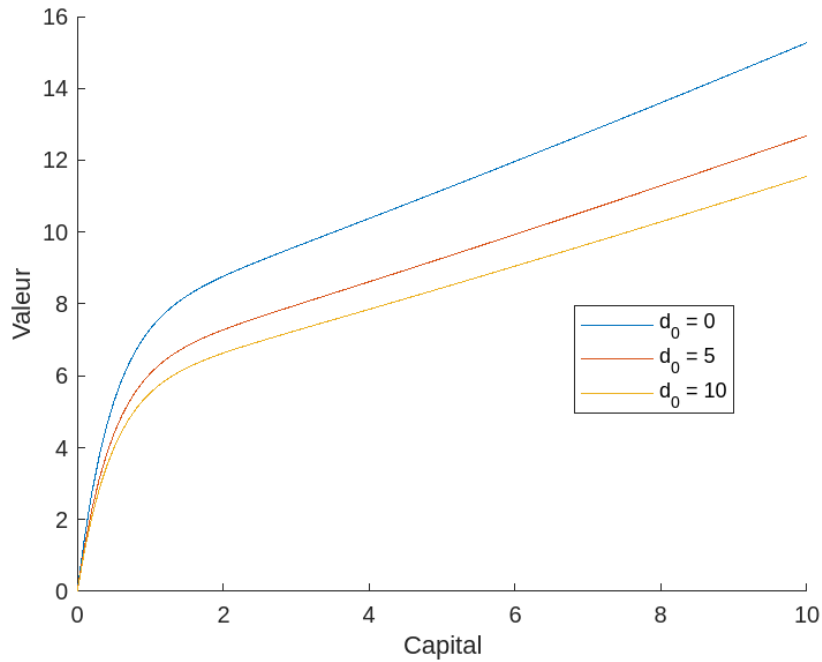


Figure 3.2 Courbes de V pour différentes valeurs de d_0

L'ordre de ces courbes est dû à la décroissance du coefficient c avec d_0 .

3.6.3 Exemple de stratégie de ruine

Dans le cas où les paramètres sont $d_0 = K = 0$, $d_1 = r = 0.1$, $k = \mu = \sigma^2 = 1$, $\alpha = 0.02$, on a $\rho = 0$ et l'algorithme de recherche converge vers $\hat{x} = \tilde{x} = x^* = 3.44$, ce qui ne correspond pas à une stratégie admissible. On en déduit que s'il existe une stratégie optimale, celle-ci est une stratégie de ruine. Une stratégie de ruine existe si et seulement si il existe un niveau $x^* > \rho/\lambda = 0$ telle que $G(x^*) = G'(x^*)(x^* - \rho/\lambda)$. On obtient numériquement $x^* = 50.10$, et on trace la courbe de $G(x) - G'(x)(x - \rho/\lambda)$ ci-dessous.

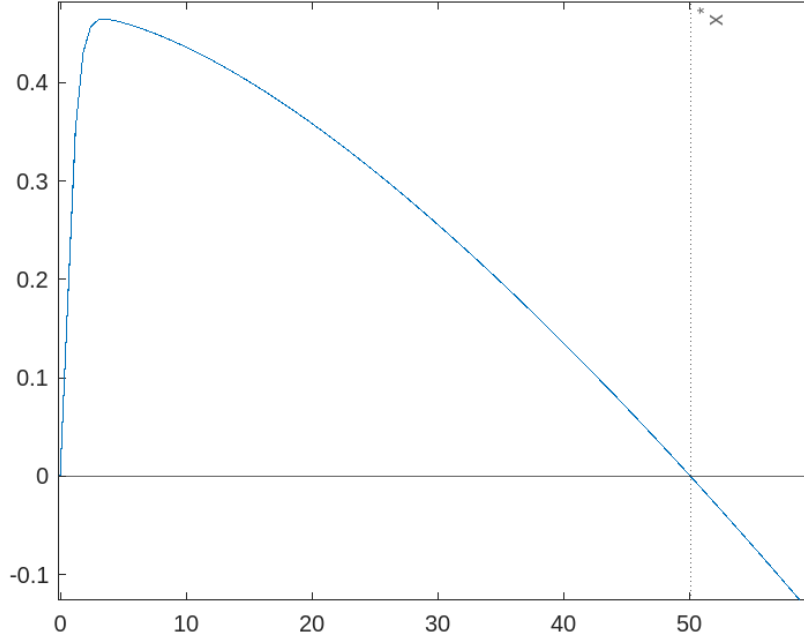


Figure 3.3 Identification du niveau x^* d'une stratégie de ruine optimale

3.7 Simulation de stratégies de dividendes

Dans cette section, nous allons décrire comment simuler des trajectoires du processus de réserves contrôlé. Nous tracerons ensuite quelques trajectoires pour différentes stratégies et comparerons les performances réalisées.

3.7.1 Algorithme de simulation de trajectoires du processus de réserves

Posons $\beta = -(\mu - \alpha)$. La dynamique du processus de réserves non contrôlé s'écrit

$$dX_t = (\mu - \beta X_t)dt + \sigma dB_t.$$

où B est un $\mathbb{F}$ -mouvement brownien standard. Notons $\mathbb{F}^B = \{\mathcal{F}_t^B\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ la filtration canonique de B , c'est-à-dire que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{F}_t^B$ est la tribu engendrée par l'ensemble $\{B_s : s \in [0, t]\}$. Soient $0 \leq s < t$. Afin de simuler des trajectoires de X , nous allons déterminer la loi de X_t conditionnelle à X_s . Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, posons $Y_t = e^{\beta t} X_t$. En appliquant la Formule d'Itô au processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, il vient

$$dY_t = \beta e^{\beta t} X_t dt + e^{\beta t} dX_t = e^{\beta t} (\mu dt + \sigma dB_t).$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} Y_t - Y_s &= \int_s^t \mu e^{\beta u} du + \int_s^t \sigma e^{\beta u} dB_u \\ &= \frac{\mu}{\beta} (e^{\beta t} - e^{\beta s}) + \sigma \int_s^t e^{\beta u} dB_u, \end{aligned}$$

et, en divisant par $e^{\beta t} > 0$, on obtient

$$X_t = e^{-\beta(t-s)} X_s + \frac{\mu}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-\beta(t-u)} dB_u.$$

L'intégrale stochastique $I_t := \int_s^t e^{-\beta(t-u)} dB_u$ est une intégrale de Wiener. On en déduit que, conditionnellement à X_s , X_t est une variable aléatoire de loi normale indépendante de $\mathcal{F}_s^B$. Calculons les paramètres de la loi normale de $X_t|X_s$. Par indépendance, on a $\mathbb{E}[I_t|X_s] = \mathbb{E}[I_t] = 0$ et $\text{Var}(I_t|X_s) = \text{Var}(I_t) = \mathbb{E}[I_t^2]$. Par l'isométrie d'Itô on a donc

$$\text{Var}(I_t|X_s) = \int_s^t e^{-2\beta(t-u)} du = \frac{1}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t-s)}).$$

On a finalement, par linéarité de l'espérance conditionnelle,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t|X_s] &= e^{-\beta(t-s)} X_s + \frac{\mu}{\beta} (1 - e^{-\beta(t-s)}), \\ \text{Var}(X_t|X_s) &= \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t-s)}). \end{aligned}$$

Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$, et D une stratégie barrière admissible de seuil $x_1 > \rho/\lambda$ et de niveau $y_1 > x_1$. Le montant de dividende correspondant est $\zeta = f^{-1}(y_1 - x_1) = (y_1 - x_1 - d_0)/(1 + d_1)$. D'après ce qui précède, l'algorithme ci-dessous permet de simuler une trajectoire du processus de réserves contrôlé X^D sur l'intervalle $[0, t]$, conditionnellement à $\{X_{0-}^D = x_0\}$, où $x_0 \in \mathbb{R}_+$ représente le capital initial de l'entreprise. On discrétise l'intervalle $[0, t]$ en n parties de même taille et on suppose $x_0 < y_1$. Dans le cas où $x_0 \geq y_1$, on verserait immédiatement un dividende de montant $\zeta' := \zeta + y_1 - x_0$.

Algorithm 2 Simulation d'une trajectoire du processus de réserves sous une stratégie barrière

$X \leftarrow$ liste de taille n

$X[0] \leftarrow x_0$

for $i = 1 : n$ **do**

if $X[(i-1)T/n] \leq 0$ **then**

$X[iT/n] \leftarrow 0$

else

 simuler $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

if $X[(i-1)T/n] < y_1$ **then**

$X[iT/n] \leftarrow e^{-\beta T/n} X[(i-1)T/n] + \frac{\mu}{\beta}(1 - e^{-\beta T/n}) + \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-\beta T/n})Z$

else

$X[iT/n] \leftarrow x_1$

end if

end if

end for

3.7.2 Exemples numériques

Considérons les mêmes valeurs des paramètres qu'en Section 3.6.2. Pour $d_0 = 0$, nous avons calculé que la stratégie optimale D^* est la stratégie barrière $(\hat{x}, x^*) = (2.07, 17.47)$, et le montant de dividende optimal est $\zeta^* = 14.01$. A l'aide de l'Algorithme 3.7.1 et du code à l'Annexe F, on trace ci-dessous trois trajectoires du processus de réserves sous la stratégie optimale, X^* , sur l'intervalle $[0, 100]$. Dans les calculs présentés dans cette section, on considère un capital initial $x = 10$ et une précision $n = 10^6$.

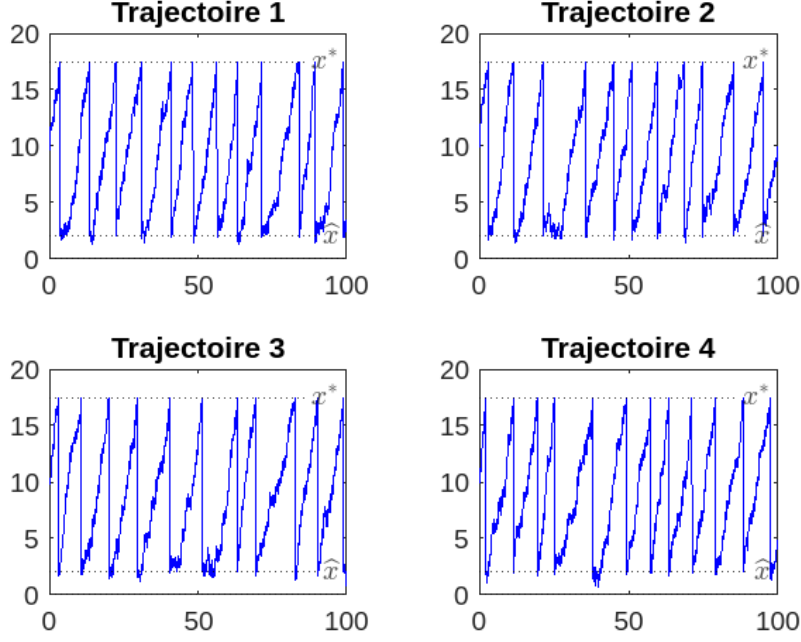


Figure 3.4 Trajectoires de X^*

De façon générale, pour une stratégie $D = \{\tau_i, \zeta_i\}_{i \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{D}$, on définit la performance moyenne réalisée jusqu'à $t \in \mathbb{R}_+^*$ pour N trajectoires $t \mapsto X_t^D(\omega_j)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\omega_j \in \Omega$, $j = 1, \dots, N$ commençant en $X_{0-}^D = x_0$, par

$$J_{N,t}(x_0, D) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i \in \mathbb{N}^*} e^{-r\tau_i(\omega_j)} g(\zeta_i(\omega_j)) \mathbb{1}_{\{\tau_i < t \wedge T\}}(\omega_j),$$

où $T \in \mathcal{S}$ est l'instant de ruine de X^D . $J_{N,t}$ est un estimateur de la fonction de performance J car on a

$$J_{N,t}(x_0, D) \xrightarrow[N, t \rightarrow \infty]{} J(x_0, D), \quad x_0 \in \mathbb{R}_+, D \in \mathcal{D}.$$

Pour $N = 200$, $T = 15000$, on obtient $J_{N,t}(10, D^*) = 15.18$, ce qui est proche de $V(10) = 15.62 \cdot G(10) = 15.27$. Pour les trajectoires de la Figure 3.4, on a $J_{4,100}(10, D^*) = 16.34$. Comparons D^* avec la stratégie barrière D_1 de même niveau x^* mais de seuil $x_1 = 0.96 < \hat{x}$. Le montant de dividende est dans ce cas 15.01. Notons que le dividende maximal que l'entreprise peut verser est donné par $\zeta_{max} = f^{-1}(x^*) = (x^* - d_0)/(1 + d_1) = 15.88$. Nous remarquons sur la Figure 3.5 représentant trois trajectoires de X^{D_1} , que l'entreprise atteint la ruine plus rapidement lorsqu'on augmente le montant de dividende, ce qui explique qu'à long terme, la stratégie D^* est meilleure que la stratégie D_1 . On obtient $J_{4,100}(10, D_1) = 14.02$.

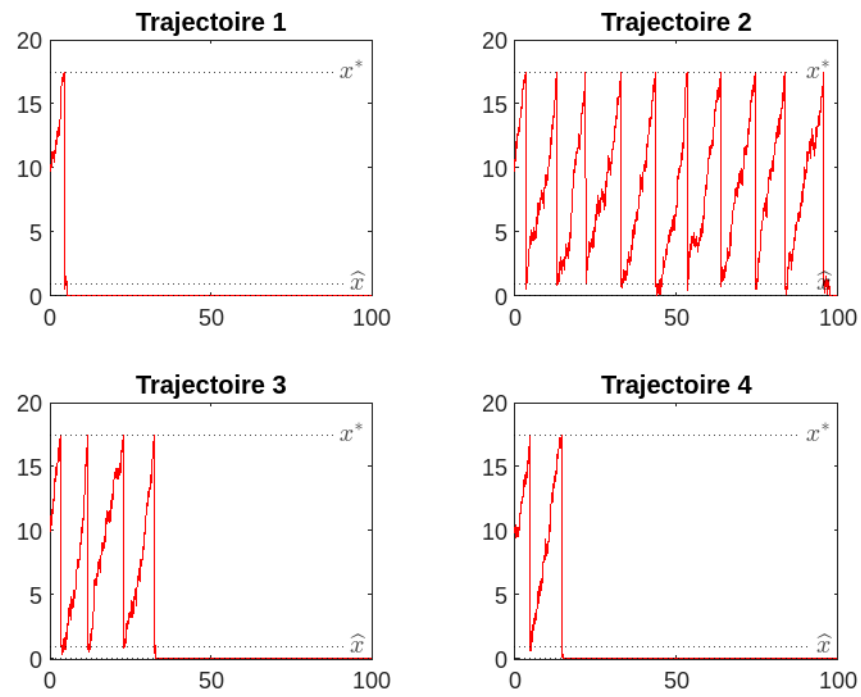


Figure 3.5 Trajectoires de X^{D_1}

CHAPITRE 4

DYNAMIQUE ORNSTEIN - UHLENBECK ET FONCTION D'UTILITÉ CONCAVE

Ce dernier chapitre est une ouverture sur une généralisation du modèle du Chapitre 3 en considérant une fonction d'utilité concave. Un tel type de modèle est étudié dans (Cadenillas *et al.*, 2007), dans le cas où la fonction de frais f est égale à la fonction identité. Les principaux résultats s'appuient cependant sur des conjectures. Nous allons tenter de résoudre le problème à l'aide de la méthodologie de contrôle impulsif présentée au Chapitre 1 avec notre fonction de frais plus générale et sur la base de conjectures similaires à celles de (Cadenillas *et al.*, 2007). Nous présenterons des résultats numériques et examinerons graphiquement la validité des conjectures.

4.1 Hypothèses du modèle

Nous supposons que la dynamique du processus de réserves non contrôlé est donnée par

$$dX_t = (\mu + (r - \alpha)X_t) dt + \sigma dB_t,$$

où $\mu, \sigma, r, \alpha > 0$ et $\alpha \neq r$. Cette dynamique est identique à celle du Chapitre 3 mais nous permettons au paramètre α de dépasser r . L'opérateur infinitésimal de X est donc donné par (3.1). Soit $x \in \mathbb{R}^*$ le capital initial de l'entreprise. Pour toute stratégie de dividendes $D = \{\tau_i, \zeta_i\}_{i \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{D}$, le processus de réserves contrôlé X^D est également donné, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, par l'EDS

$$X_t^D = x + \int_0^t (\mu + (r - \alpha)X_s^D) ds + \sigma B_t - \sum_{i \in \mathbb{N}^*} f(\zeta_i) \mathbb{1}_{\{\tau_i < t \wedge T\}},$$

où T est l'instant de ruine de X^D , et la fonction de frais s'écrit $f(\zeta) = d_0 + (1 + d_1)\zeta$ avec $d_0, d_1 \in \mathbb{R}_+$ les paramètres de frais. Soient $K \in \mathbb{R}_+$, $k \in (0, 1]$ les paramètres d'impôt, et $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ le paramètre d'aversion au risque. À la différence du Chapitre 3, nous supposons que la fonction d'utilité est donnée par

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma}(-K + k\zeta)^\gamma & \text{si } \zeta \geq K/k, \\ 0 & \text{si } \zeta < K/k. \end{cases}$$

Comme expliqué à la Section 1.2, si le paramètre γ est inférieur à 1, g est concave, et si γ est supérieur à 1, g est convexe. Si l'on considère que l'actionnaire est averse au risque, nous devrions choisir une fonction d'utilité concave. Toutefois, les résultats présentés dans ce chapitre s'appliquent pour tout $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$. Notons toujours par V la fonction valeur de ce problème. Nous allons émettre les mêmes hypothèses qu'au chapitre

précédent, avec notre nouvelle fonction d'utilité g . On pose comme précédemment

$$\lambda = k(1 + d_1)^{-1},$$

$$\rho = K + d_0\lambda.$$

Hypothèses : Supposons que $\rho, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $x^* \in (\rho/\lambda, \infty)$ et $\hat{x} \in [0, x^*)$ tels que

1. On a $V(0) = 0$, et pour tout $x \in (0, x^*)$, $\mathcal{L}V(x) = 0$.
2. (a) Si $\hat{x} > 0$, pour tout $x \in [x^*, \infty)$, on a $V(x) = V(\hat{x}) + \frac{1}{\gamma}(\lambda(x - \hat{x}) - \rho)^\gamma$ et

$$V'(\hat{x}) = \lambda(\lambda(x^* - \hat{x}) - \rho)^{\gamma-1}$$
(b) Si $\hat{x} = 0$, pour tout $x \in [x^*, \infty)$, on a $V(x) = \frac{1}{\gamma}(\lambda x - \rho)^\gamma$.
3. On a $V'(x^*) = \lambda(\lambda(x^* - \hat{x}) - \rho)^{\gamma-1}$.

Remarquons que nous avons seulement modifié les hypothèses 2 et 3 pour prendre en compte le changement d'expression de g . Dans tous les cas, cette hypothèse implique que pour tout $x \in [x^*, \infty)$, on a

$$V(x) = V(\hat{x}) + g \circ f^{-1}(x - \hat{x}).$$

Puisque l'opérateur $\mathcal{L}$ est le même que celui du Chapitre 3, les Lemmes 3.4 à 3.7 s'appliquent également ici. On a directement le lemme suivant :

Lemme 4.1 Soit $(\hat{x}, x^*, \tilde{V})$ vérifiant les hypothèses (1, 2, 3) ci-dessus. Alors on a

$$\tilde{V}(x) = \begin{cases} \lambda(\lambda(x^* - \hat{x}) - \rho)^{\gamma-1}(G'(x^*))^{-1}G(x) & \text{si } x \in [0, x^*), \\ \tilde{V}(\hat{x}) + \frac{1}{\gamma}(\lambda(x - \hat{x}) - \rho/\lambda)^\gamma & \text{si } x \in [x^*, \infty), \end{cases}$$

où G est définie au Lemme 3.5.

Dans la prochaine section, nous allons donner des conditions pour que, si les hypothèses (1, 2, 3) possèdent une solution, la stratégie de type barrière/ruine correspondante soit une stratégie optimale.

4.2 Conjectures et solution au problème de contrôle

Supposons qu'il existe une solution $(\hat{x}, x^*, \tilde{V})$ aux hypothèses (1, 2, 3). Nous allons utiliser la méthode générale de résolution d'un problème de contrôle impulsif, présentée au Chapitre 1. Pour ce faire, commençons par définir l'opérateur d'intervention $\mathcal{K}$ pour notre problème. Posons, pour $x, \zeta \in \mathbb{R}_+$,

$$\Theta_x(\zeta) = \tilde{V}(x - f(\zeta)) + g(\zeta),$$

$$\mathcal{Z}_x = \{z \in \mathbb{R}_+ : x - f(z) \geq 0, g(z) \geq 0\} = \{z \in \mathbb{R}_+ : K/k \leq z \leq (x - d_0)/(1 + d_1)\}.$$

L'opérateur d'intervention est donné par

$$\mathcal{K}\tilde{V}(x) = \sup_{\zeta \in \mathcal{Z}_x} \Theta_x(\zeta). \quad (4.1)$$

Par convention, lorsque $\mathcal{Z}_x = \emptyset$, on pose $\mathcal{K}\tilde{V}(x) = -\infty$. Supposons que la région de non-intervention est donnée par $R = [0, x^*)$. Si $\tilde{V}$ est égale à la fonction valeur du problème V , celle-ci devrait aussi vérifier l'équation de la programmation dynamique (1.23). On devrait donc avoir, pour tout $x \in [x^*, \infty)$, $\mathcal{L}\tilde{V}(x) < 0$ et $\mathcal{K}\tilde{V}(x) = \tilde{V}(x)$, et pour tout $x \in [0, x^*)$, $\mathcal{L}\tilde{V}(x) = 0$ et $\mathcal{K}\tilde{V}(x) < \tilde{V}(x)$. Concernant l'opérateur infinitésimal, nous avons le lemme suivant

Lemme 4.2 Soit $(\hat{x}, x^*, \tilde{V})$ une solution aux hypothèses (1, 2, 3).

Si, pour tout $x \geq x^*$, on a

$$\begin{aligned} & -r \left(\lambda(\lambda(x^* - \hat{x}) - \rho)^{\gamma-1} \frac{G(\hat{x})}{G'(x^*)} + \frac{1}{\gamma} (\lambda(x - \hat{x}) - \rho)^\gamma \right) + (\mu + (r - \alpha)x) \lambda(\lambda(x - \hat{x}) - \rho)^{\gamma-1} \\ & + \frac{\sigma^2}{2} (\gamma - 1) \lambda^2 (\lambda(x - \hat{x}) - \rho)^{\gamma-2} < 0, \end{aligned}$$

alors on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathcal{L}\tilde{V}(x) \leq 0.$$

Preuve. Soit $(\hat{x}, x^*, \tilde{V})$ vérifiant les hypothèses (1, 2, 3). D'après l'hypothèse 1, pour tout $x \in [0, x^*)$, on a $\mathcal{L}\tilde{V}(x) = 0$. Soit $x \geq x^*$. D'après l'hypothèse 2, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\tilde{V}(x) &= -r(\tilde{V}(\hat{x}) + \frac{1}{\gamma} (\lambda(x - \hat{x}) - \rho)^\gamma) + (\mu + (r - \alpha)x) \lambda(\lambda(x - \hat{x}) - \rho)^{\gamma-1} \\ &+ \frac{\sigma^2}{2} (\gamma - 1) \lambda^2 (\lambda(x - \hat{x}) - \rho)^{\gamma-2}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, et d'après le Lemme 4.1, cette quantité est strictement négative. $\square$

Pour l'opérateur d'intervention, nous avons besoin de plusieurs conditions.

Lemme 4.3 Soit $(\hat{x}, x^*, \tilde{V})$ une solution aux hypothèses (1, 2, 3).

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, définissons la fonction $\Phi_x : [x + \rho/\lambda, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Phi_x(y) = \tilde{V}(y) + \frac{1}{\gamma} (\lambda(x - y) - \rho)^\gamma.$$

Définissons également la fonction $\Psi : [\hat{x} + \rho/\lambda, x^*] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Psi(x) = \tilde{V}(x) - \frac{1}{\gamma}(\lambda(x - \hat{x}) - \rho)^\gamma.$$

Supposons que :

1. Pour tout $x \in [\rho/\lambda, \hat{x} + \rho/\lambda]$, la fonction Φ_x est croissante ;
2. Pour tout $x \in (\hat{x} + \rho/\lambda, \infty)$, la fonction Φ_x est croissante sur $[0, \hat{x}]$ et décroissante sur $[\hat{x}, x - \rho/\lambda]$;
3. La fonction Ψ est décroissante.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$\mathcal{K}\tilde{V}(x) \leq \tilde{V}(x),$$

avec égalité pour $x \in [x^*, \infty)$.

Preuve. Soit $(\hat{x}, x^*, \tilde{V})$ vérifiant les hypothèses (1, 2, 3). Calculons $\mathcal{K}\tilde{V}(x)$, pour $x \in \mathbb{R}_+$. Tout d'abord, remarquons que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x - y > \rho/\lambda$, on a

$$\Phi_x(y) = \Theta_x(f^{-1}(x - y)),$$

donc pour déterminer $\mathcal{K}\tilde{V}(x)$, nous pouvons trouver la valeur de y qui maximise la quantité $\Phi_x(y)$.

Si $x \in [0, \rho/\lambda)$, on a $K/k > (x - d_0)/(1 + d_1)$, donc $\mathcal{Z}_x = \emptyset$ et $\mathcal{K}\tilde{V}(x) = -\infty$.

Si $x \in [\rho/\lambda, \hat{x} + \rho/\lambda]$, puisque la fonction Φ_x est croissante, celle-ci atteint son maximum en $x - \rho/\lambda$. Dans ce cas, on a

$$\mathcal{K}\tilde{V}(x) = \Phi_x(x - \rho/\lambda) = \tilde{V}(x - \rho/\lambda) + \frac{1}{\gamma}(\lambda\rho/\lambda - \rho)^\gamma = \tilde{V}(x - \rho/\lambda).$$

Si $x \in (\hat{x} + \rho/\lambda, \infty)$, puisque la fonction Φ_x est croissante sur $[0, \hat{x}]$ et décroissante sur $[\hat{x}, x - \rho/\lambda]$, celle-ci atteint son maximum en $\hat{x}$. Dans ce cas, on a

$$\mathcal{K}\tilde{V}(x) = \Phi_x(\hat{x}) = \tilde{V}(\hat{x}) + \frac{1}{\gamma}(\lambda(x - \hat{x}) - \rho)^\gamma.$$

En particulier, d'après l'hypothèse 2, pour tout $x \in [x^*, \infty)$, on a $\tilde{V}(x) = \mathcal{K}\tilde{V}(x)$. Pour tout $x \in [0, \hat{x} + \rho/\lambda)$, il est immédiat, avec ce qui précède, que $\mathcal{K}\tilde{V}(x) < \tilde{V}(x)$. Pour $x \in [\hat{x} + \rho/\lambda, x^*)$, puisque la fonction Ψ est

décroissante, on a

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(x) - \mathcal{K}\tilde{V}(x) &= \tilde{V}(x) - \tilde{V}(\hat{x}) - \frac{1}{\gamma}(\lambda(x - \hat{x}) - \rho)^\gamma \\
&= \Psi(x) - \tilde{V}(\hat{x}) \\
&\geq \Psi(x^*) - \tilde{V}(\hat{x}) \\
&= \tilde{V}(x^*) - \mathcal{K}\tilde{V}(x^*) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Si les conditions des deux lemmes précédents sont satisfaites, alors nous pouvons identifier une stratégie optimale de type barrière/ruine.

Théorème 4.4 *Si les Lemmes 4.2 et 4.3 s'appliquent, alors on a $\tilde{V} = V$ et la stratégie de type barrière/ruine $(\hat{x}, x^*)$ est une stratégie optimale.*

Preuve. Soit $D = \{\tau_i, \zeta_i\}_{i \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{D}$ une stratégie admissible. Reprenons les calculs de la Section 2.2. D'après le Lemme 4.2, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\mathcal{L}\tilde{V}(x) \leq 0$. Notons X^D le processus de réserves contrôlé par la stratégie D , et T son instant de ruine. D'après le Lemme 4.3 et la définition de $\mathcal{K}$ (4.1), pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\tau_i < T$ presque sûrement, on a

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(X_{\tau_i-}^D) - \tilde{V}(X_{\tau_i}^D) &\geq \mathcal{K}\tilde{V}(X_{\tau_i-}^D) - \tilde{V}(X_{\tau_i}^D) \\
&\geq \tilde{V}(X_{\tau_i-}^D - f(\zeta_i)) + g(\zeta_i) - \tilde{V}(X_{\tau_i}^D) \\
&= \tilde{V}(X_{\tau_i}^D) + g(\zeta_i) - \tilde{V}(X_{\tau_i}^D) \\
&= g(\zeta_i).
\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\tilde{V}(x) \geq J(x, D).$$

Notons $D^* = \{\tau_i^*, \zeta_i^*\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ la stratégie de type barrière/ruine $(\hat{x}, x^*)$. Notons X^* le processus de réserves associé à D^* et T^* son instant de ruine. Sans perte de généralité, supposons que le capital initial de l'entreprise est strictement inférieur à x^* , et que D^* est une stratégie barrière. On rappelle que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\tau_i^* < T^*$ presque sûrement, on a

$$\tau_i^* = \inf\{t \geq \tau_{i-1}^* : X_t^* = x^*\},$$

et

$$\zeta_i^* = \zeta^* := \frac{x^* - \hat{x} - d_0}{1 + d_1}.$$

D'après le Lemme 4.3, on a

$$\mathcal{K}\tilde{V}(x^*) = \Theta_x(\zeta^*) = \tilde{V}(x^*).$$

De plus, d'après le Lemme 4.2, pour tout $x \in [0, x^*)$, on a $\mathcal{L}\tilde{V}(x) = 0$. Puisque par construction, $X^* \in [0, x^*]$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\tilde{V}(x) = J(x, D^*).$$

En résumé, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\tilde{V}(x) = V(x) = J(x, D^*),$$

donc D^* est une stratégie optimale. $\square$

4.3 Application numérique

Nous allons nous inspirer de l'article de (Cadenillas *et al.*, 2007) pour trouver numériquement une solution aux hypothèses (1, 2, 3) pour des paramètres donnés. Nous conservons notre notation et supposons $\alpha \in (r, \infty)$ pour considérer des valeurs de paramètres similaires à celles choisies par (Cadenillas *et al.*, 2007). Nous allons chercher une solution à l'équation $\mathcal{L}\phi(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}_+$ sous forme de série entière. Cette équation peut se réécrire

$$\phi''(x) + a(b - x)\phi'(x) - ac\phi(x) = 0, \tag{4.2}$$

avec

$$\begin{cases} a &= -2\sigma^{-2}(r - \alpha), \\ b &= -\mu/(r - \alpha), \\ c &= -r/(r - \alpha). \end{cases}$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$a_{2n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \frac{a^n}{(2n)!} \prod_{j=0}^{n-1} (2j + c) & \text{si } n \geq 1, \end{cases}$$

et

$$b_{2n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \frac{a^n}{(2n+1)!} \prod_{j=0}^{n-1} (2j+1+c) & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, posons $s_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(x-b)^{2n}$ et $s_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}(x-b)^{2n+1}$.

Pour tous $A, B \in \mathbb{R}$, la fonction S définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par

$$S(x) = As_1(x) + Bs_2(x)$$

est solution de l'équation (4.2).

Preuve. Supposons qu'il existe une solution ϕ à l'équation (4.2). Effectuons le changement de variable $y = x - b$ et posons $\psi(y) = \phi(x) = \phi(y + b)$. On a

$$\psi''(y) - ay\psi'(y) - ac\psi(y) = 0.$$

Supposons que ψ est de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$. En injectant dans l'équation précédente, il vient

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - a(n+c)c_n] y^n = 0.$$

D'après le Théorème d'unicité du développement en série entière, cette égalité est satisfaite si et seulement si pour tout $n \geq 2$,

$$c_n = \frac{a(n-2+c)}{n(n-1)} c_{n-2}.$$

On observe que le choix de c_0 et c_1 est arbitraire. Soient $A, B \in \mathbb{R}$ et posons $c_0 = A$ et $c_1 = B$. Soit $n \geq 1$.

On a

$$c_{2n} = \frac{a(2(n-1)+c)}{2n(2n-1)} c_{2n-2} = c_0 \prod_{j=0}^{n-1} \frac{a(2j+c)}{(2j+2)(2j+1)} = A \frac{a^n}{(2n+1)!} \prod_{j=0}^{n-1} (2j+c) = Aa_{2n},$$

et

$$c_{2n+1} = \frac{a(2n-1+c)}{(2n+1)2n} c_{2n-1} = c_1 \prod_{j=0}^{n-1} \frac{a(2j+1+c)}{(2j+3)(2j+2)} = B \frac{a^n}{(2n+1)!} \prod_{j=0}^{n-1} (2j+1+c) = Bb_{2n+1}.$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\phi(x) = \psi(x-b) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}(x-b)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} Aa_{2n}(x-b)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} Bb_{2n+1}(x-b)^{2n+1} = As_1(x) + Bs_2(x).$$

□

Remarque. Nous pensons que dans l'article de (Cadenillas *et al.*, 2007) les formules des coefficients des séries sont erronées. Il semble manquer une puissance n sur le paramètre noté α , qui joue, à une constante multiplicative près, le rôle de a dans les formules du lemme précédent. Si cela est en effet une erreur, celle-ci se répercute dans les résultats numériques. En enlevant la puissance n , nous avons pu retrouver les valeurs des Tables 6.1 et 6.2 de l'article de (Cadenillas *et al.*, 2007), cependant l'équation HJB n'est alors pas vérifiée.

Posons $h = g \circ f^{-1}$. Pour des valeurs de paramètres données, supposons qu'il existe une solution aux hypothèses $(1, 2a, 3)$. Alors, il existe $A, B \in \mathbb{R}$, $x^* \in (\rho/\lambda, \infty)$, et $\hat{x} \in [0, x^*)$ tels que :

$$\begin{cases} S(0) &= 0, \\ S(x^*) &= S(\hat{x}) + h(x^* - \hat{x}), \\ S'(x^*) &= h'(x^* - \hat{x}), \\ S'(\hat{x}) &= h'(x^* - \hat{x}). \end{cases} \quad (4.3)$$

Définissons la fonction $H : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ par

$$H(A, B, \hat{x}, x^*) = \begin{pmatrix} S(0) \\ S(x^*) - S(\hat{x}) - h(x^* - \hat{x}) \\ S'(x^*) - h'(x^* - \hat{x}) \\ S'(\hat{x}) - h'(x^* - \hat{x}) \end{pmatrix}.$$

Résoudre système (4.3) revient à trouver une solution à l'équation $H(y) = 0$, $y \in \mathbb{R}^4$. La matrice jacobienne de H est donnée par

$$J_H(A, B, \hat{x}, x^*) = \begin{pmatrix} s_1(0) & s_2(0) & 0 & 0 \\ s_1(x^*) - s_1(\hat{x}) & s_2(x^*) - s_2(\hat{x}) & -S'(\hat{x}) + h'(x^* - \hat{x}) & S'(x^*) - h'(x^* - \hat{x}) \\ s'_1(x^*) & s'_2(x^*) & h''(x^* - \hat{x}) & S''(x^*) - h''(x^* - \hat{x}) \\ s'_1(\hat{x}) & s'_2(\hat{x}) & S''(\hat{x}) + h''(x^* - \hat{x}) & -h''(x^* - \hat{x}) \end{pmatrix},$$

avec, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
s'_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)a_{2(n+1)}(x-b)^{2n+1}, \\
s''_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)(2n+1)a_{2(n+1)}(x-b)^{2n}, \\
s'_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)b_{2n+1}(x-b)^{2n}, \\
s''_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+3)(2n+2)b_{2(n+1)+1}(x-b)^{2n+1}, \\
h(x) &= \frac{1}{\gamma}(\lambda x - \rho)^\gamma, \\
h'(x) &= \lambda(\lambda x - \rho)^{\gamma-1}, \\
h''(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma = 1, \\ (\gamma-1)\lambda^2(\lambda x - \rho)^{\gamma-2} & \text{si } \gamma \neq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Pour trouver une solution numérique $H(y) = 0$, nous pouvons utiliser la Méthode de Newton décrite dans l'algorithme suivant

Algorithm 3 Méthode de Newton

Choisir $y_{old} \in \mathbb{R}^4$.

Choisir une tolérance $\varepsilon > 0$.

$y_{new} \leftarrow y_{old} - J_H(y_{old})^{-1}H(y_{old})$.

$d \leftarrow \|y_{new} - y_{old}\|^2$.

while $d > \varepsilon$ **do**

$y_{old} \leftarrow y_{new}$.

$y_{new} \leftarrow y_{old} - J_H(y_{old})^{-1}H(y_{old})$.

end while

À l'aide du code en Annexe G, on obtient les résultats suivants pour $\gamma = 1$.

μ	r	α	σ	k	K	d_0	d_1	A	B	$\hat{x}$	x^*	ζ^*
0.1	0.1	0.2	0.25	0.8	0.005	0.01	0.1	0.8764	1.3503	0.2836	0.6056	0.2836
0.1	0.1	0.2	0.25	0.8	0.007	0.01	0.1	0.8687	1.3385	0.2758	0.6151	0.2993
0.1	0.1	0.2	0.25	0.8	0.003	0.01	0.1	0.8845	1.3629	0.2923	0.5952	0.2662
0.1	0.1	0.2	0.25	0.9	0.005	0.01	0.1	0.9884	1.5229	0.2860	0.6028	0.2790
0.1	0.1	0.2	0.25	0.9	0.005	0.01	0.15	0.9446	1.4554	0.2851	0.6039	0.2685
0.09	0.1	0.2	0.25	0.8	0.005	0.01	0.1	0.7499	1.1992	0.2493	0.5711	0.2835
0.11	0.1	0.2	0.25	0.8	0.005	0.01	0.1	1.0185	1.5288	0.3149	0.6371	0.2838
0.1	0.11	0.2	0.25	0.8	0.005	0.01	0.1	1.0402	1.6811	0.2796	0.6018	0.2839
0.1	0.09	0.2	0.25	0.8	0.005	0.01	0.1	1.7659	1.1335	0.2879	0.6096	0.2834
0.1	0.1	0.2	0.28	0.8	0.005	0.01	0.1	0.8355	1.1966	0.2827	0.6293	0.3061
0.1	0.1	0.2	0.25	0.8	0.005	0.01	0.1	0.8355	1.1966	0.2827	0.6293	0.3061
0.1	0.1	0.19	0.25	0.8	0.005	0.01	0.1	1.0211	1.5616	0.2986	0.6262	0.2888
0.1	0.1	0.205	0.25	0.8	0.005	0.01	0.1	0.8193	1.2700	0.2765	0.5958	0.2812

Table 4.1 Stratégies barrière $(\hat{x}, x^*)$ pour $\gamma = 1$.

Les résultats observés dans la Table 4.1 ci-dessus sont cohérents avec le Théorème de sensibilité 3.16.

Pour $\gamma = 1$, nous allons tracer ci-dessous les courbes de V , $\mathcal{L}V$, Ψ et quelques courbes de Φ_x pour voir si les conjectures des Lemmes 4.2 et 4.3 sont vérifiées. Nous prenons comme valeurs de paramètres celles de la troisième ligne de la Table 4.1 ci-dessus.

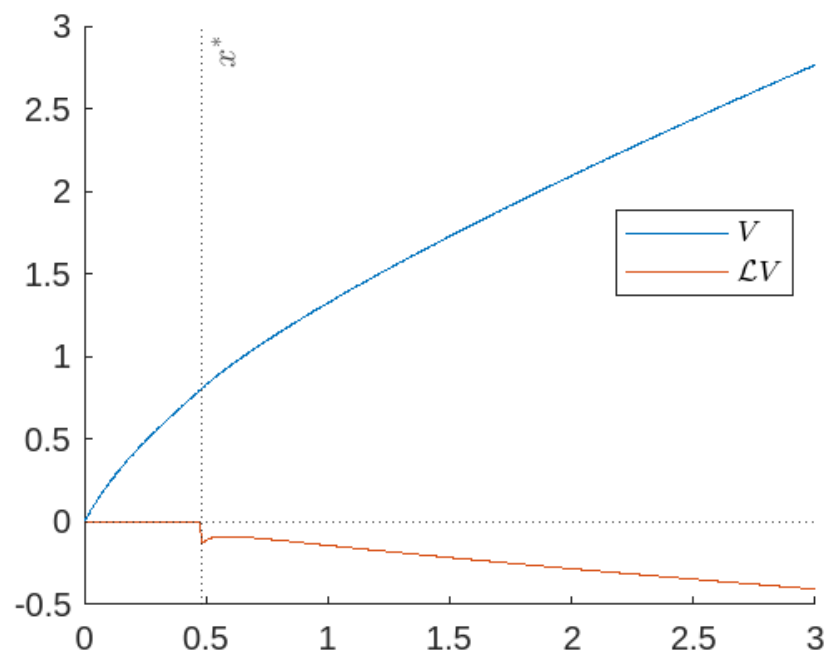


Figure 4.1 Courbes de V et $\mathcal{L}V$ pour $\gamma = 1$

Sur la Figure 4.1, on observe que V est croissante et continue, et qu'on a $\mathcal{L}V = 0$ sur $(0, x^*)$ et $\mathcal{L}V < 0$ sur (x^*, ∞) .

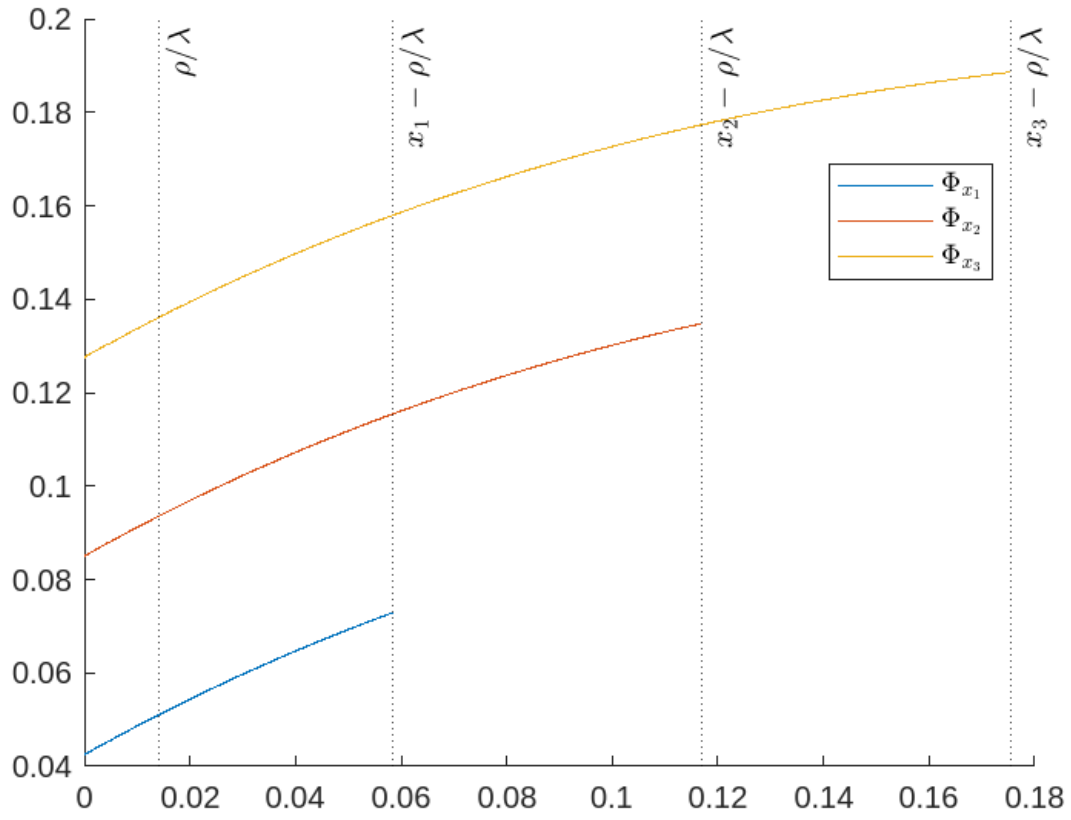


Figure 4.2 Courbes de Φ_x pour $x \in (\rho/\lambda, \hat{x} + \rho/\lambda)$ et $\gamma = 1$

Sur la Figure 4.2, on observe que les courbes de Φ_x sont croissantes sur $[0, x - \rho/\lambda]$, où $x \in \{x_1, x_2, x_3\}$ avec $x_1 = \rho/\lambda + \hat{x}/5$, $x_2 = \rho/\lambda + 2\hat{x}/5$, et $x_3 = \rho/\lambda + 3\hat{x}/5$

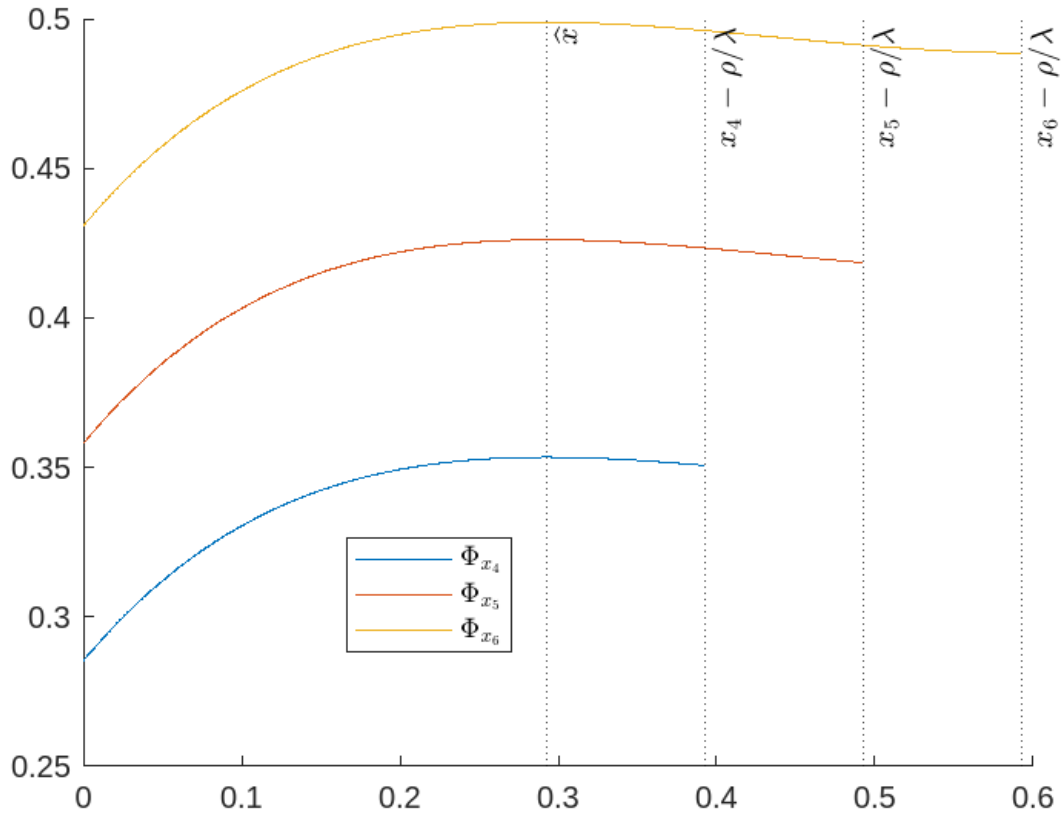


Figure 4.3 Courbes de Φ_x pour $x \in (\hat{x} + \rho/\lambda, \infty)$ et $\gamma = 1$

Sur la Figure 4.3, on observe que les courbes de Φ_x sont croissantes sur $[0, \hat{x}]$ et décroissantes sur $[\hat{x}, x - \rho/\lambda]$, où $x \in \{x_4, x_5, x_6\}$ avec $x_4 = \hat{x} + \rho/\lambda + 0.1$, $x_5 = \hat{x} + \rho/\lambda + 0.2$, et $x_6 = \hat{x} + \rho/\lambda + 0.3$.

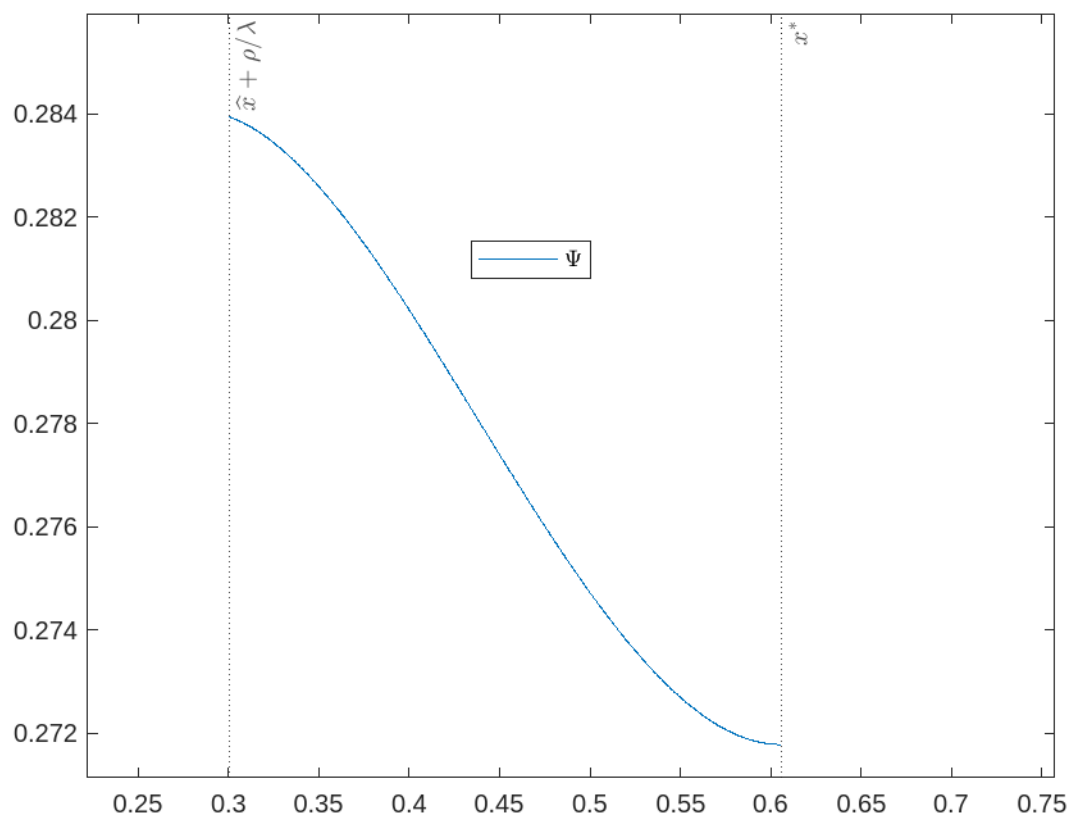


Figure 4.4 Courbe de Ψ pour $\gamma = 1$

Sur la Figure 4.4, on observe que Ψ est décroissante. Pour $\gamma = 1$, les conjectures des Lemmes 4.2 et 4.3 semblent donc vérifiées.

Pour $\gamma = 0.8$, on obtient les résultats suivants

μ	r	α	σ	k	K	d_0	d_1	A	B	$\hat{x}$	x^*	ζ^*
0.1	0.1	0.2	0.25	0.8	0.005	0	0	2.2864	3.5228	0.4215	0.4527	0.0312
0.1	0.1	0.2	0.25	0.8	0.005	0	0.1	2.0784	3.2024	0.4200	0.4542	0.0312
0.1	0.1	0.2	0.25	0.8	0.005	0.01	0.1	1.7341	2.6718	0.3960	0.4791	0.0665
0.1	0.1	0.2	0.25	0.8	0.007	0.01	0.1	1.6814	2.5906	0.3896	0.4858	0.0784
0.1	0.1	0.2	0.25	0.8	0.003	0.01	0.1	1.9235	2.9636	0.3977	0.4772	0.0632
0.1	0.1	0.2	0.25	0.9	0.005	0.01	0.1	1.7979	2.7701	0.4024	0.4773	0.0545
0.1	0.1	0.2	0.25	0.8	0.005	0.01	0.15	1.6672	2.5688	0.3952	0.4799	0.0649
0.09	0.1	0.2	0.25	0.8	0.005	0.01	0.1	1.4839	2.3729	0.3624	0.4455	0.0665
0.11	0.1	0.2	0.25	0.8	0.005	0.01	0.1	2.0153	3.0249	0.4264	0.5096	0.0665
0.1	0.11	0.2	0.25	0.8	0.005	0.01	0.1	2.0582	3.3262	0.3914	0.4745	0.0665
0.1	0.09	0.2	0.25	0.8	0.005	0.01	0.1	1.5154	2.2429	0.4007	0.4839	0.0665
0.1	0.1	0.2	0.3	0.8	0.005	0.01	0.1	1.5995	2.2021	0.4139	0.4975	0.0668
0.1	0.1	0.19	0.3	0.8	0.005	0.01	0.1	2.0177	3.0858	0.4131	0.4963	0.0666
0.1	0.1	0.21	0.3	0.8	0.005	0.01	0.1	1.5249	2.3818	0.3799	0.4630	0.0664

Table 4.2 Stratégies barrière $(\hat{x}, x^*)$ pour $\gamma = 0.8$.

Les résultats observés dans la Table 4.2 sont cohérents avec le Théorème de sensibilité 3.16.

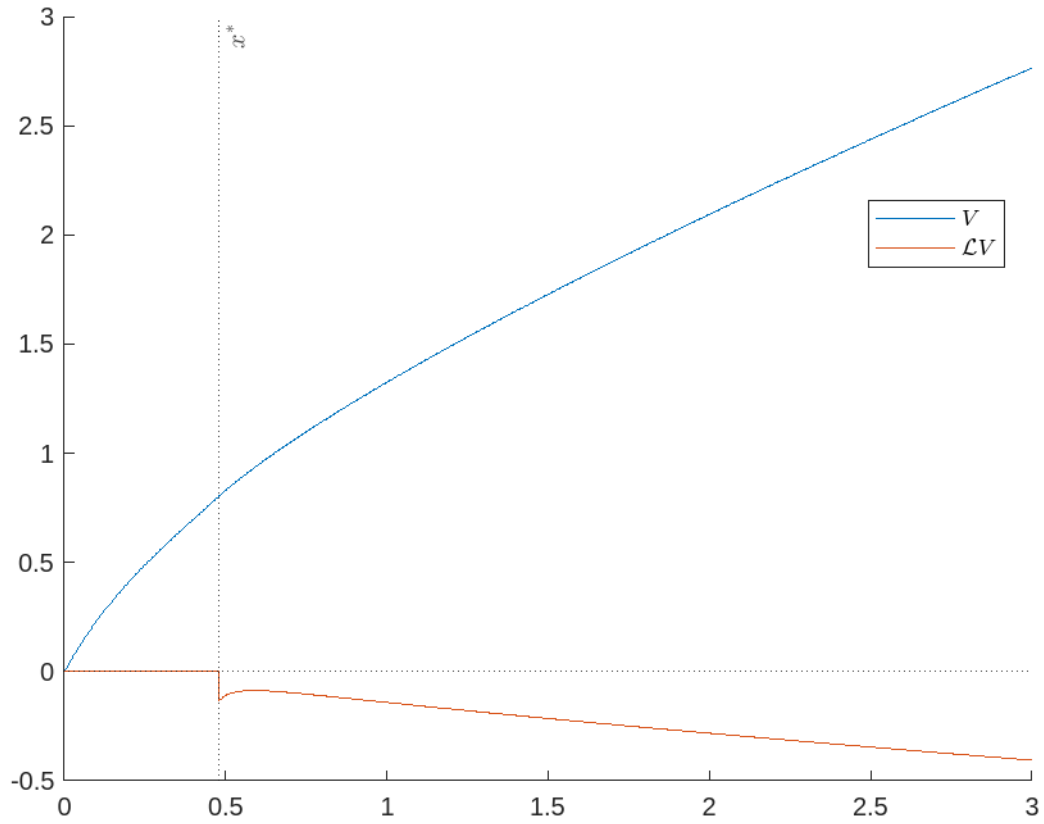


Figure 4.5 Courbes de V et $\mathcal{L}V$ pour $\gamma = 0.8$

D'après la Figure 4.5, le Lemme 4.2 semble s'appliquer. Cependant, d'après sur les Figures 4.6 et 4.7 ci-dessous, le Lemme 4.3 ne s'applique pas. L'hypothèse selon laquelle la région de non-intervention R est de la forme $(0, x^*)$ ne semble donc pas toujours valide lorsque $\gamma < 1$. Autrement dit, lorsque $\gamma < 1$, il est possible que R dépende du montant actuel des réserves de l'entreprise, et que la stratégie barrière $(\hat{x}, x^*)$ ne soit pas optimale.

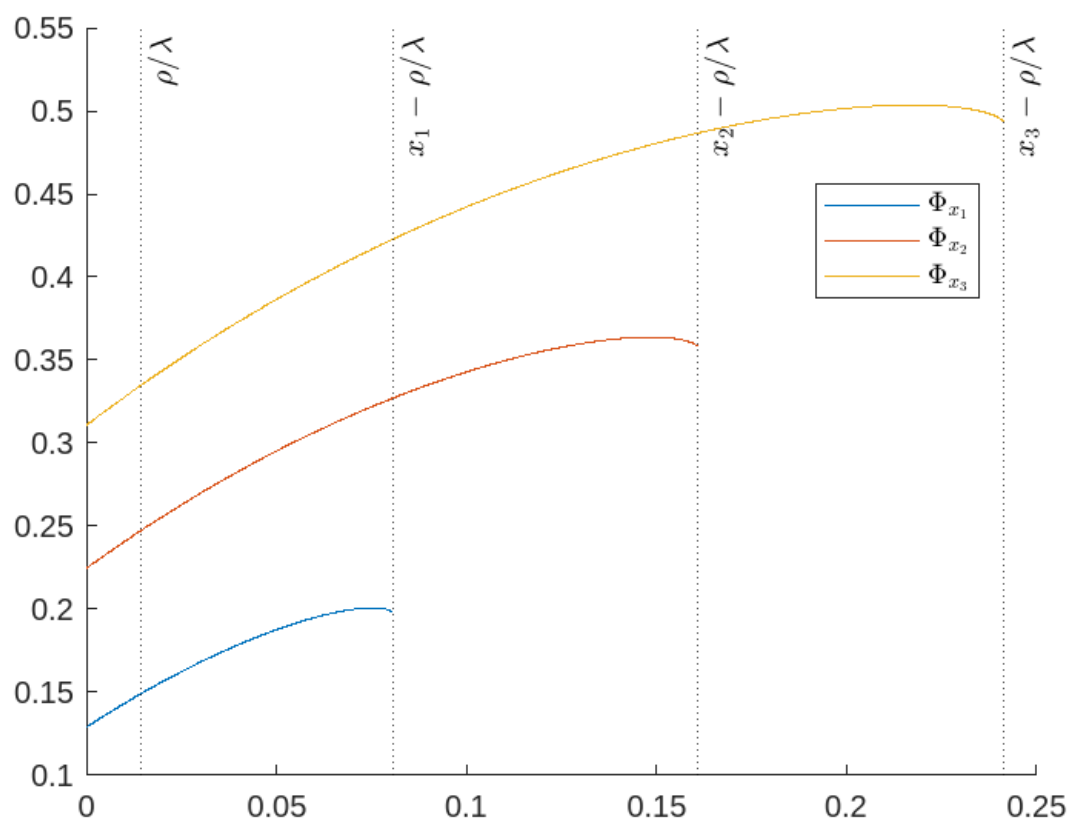


Figure 4.6 Courbes de Φ_x pour $x \in (\rho/\lambda, \hat{x} + \rho/\lambda)$ et $\gamma = 0.8$

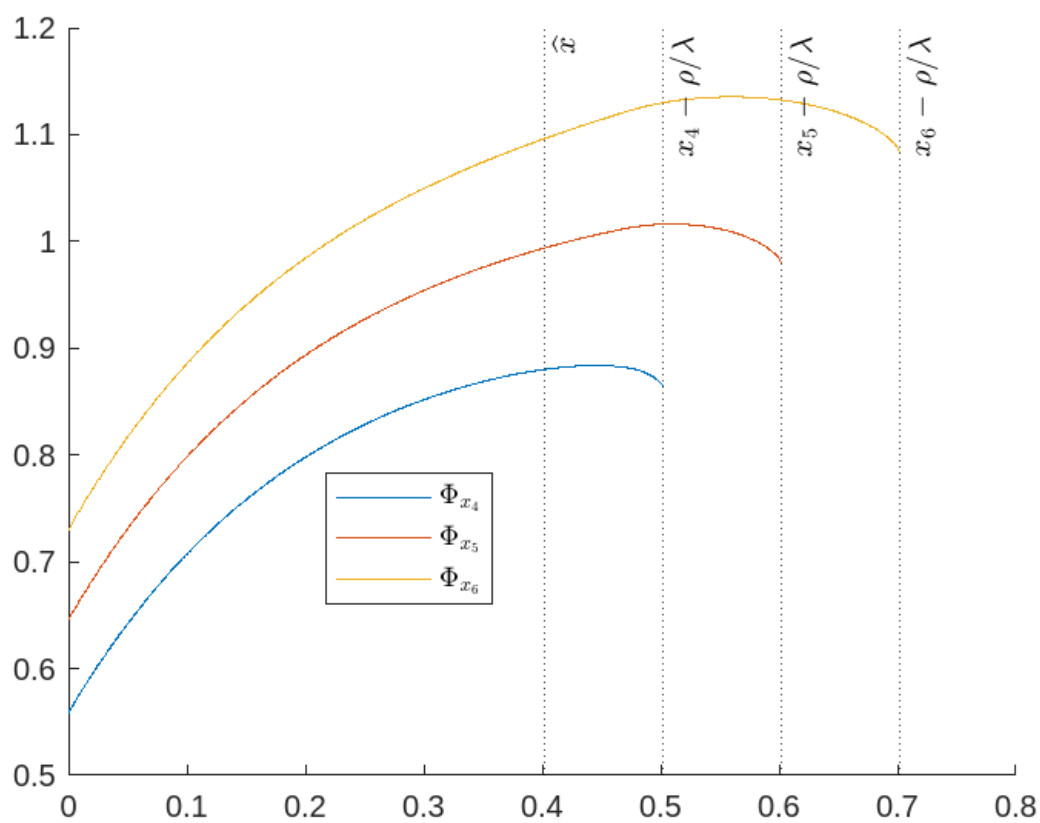


Figure 4.7 Courbes de Φ_x pour $x \in (\hat{x} + \rho/\lambda, \infty)$ et $\gamma = 0.8$

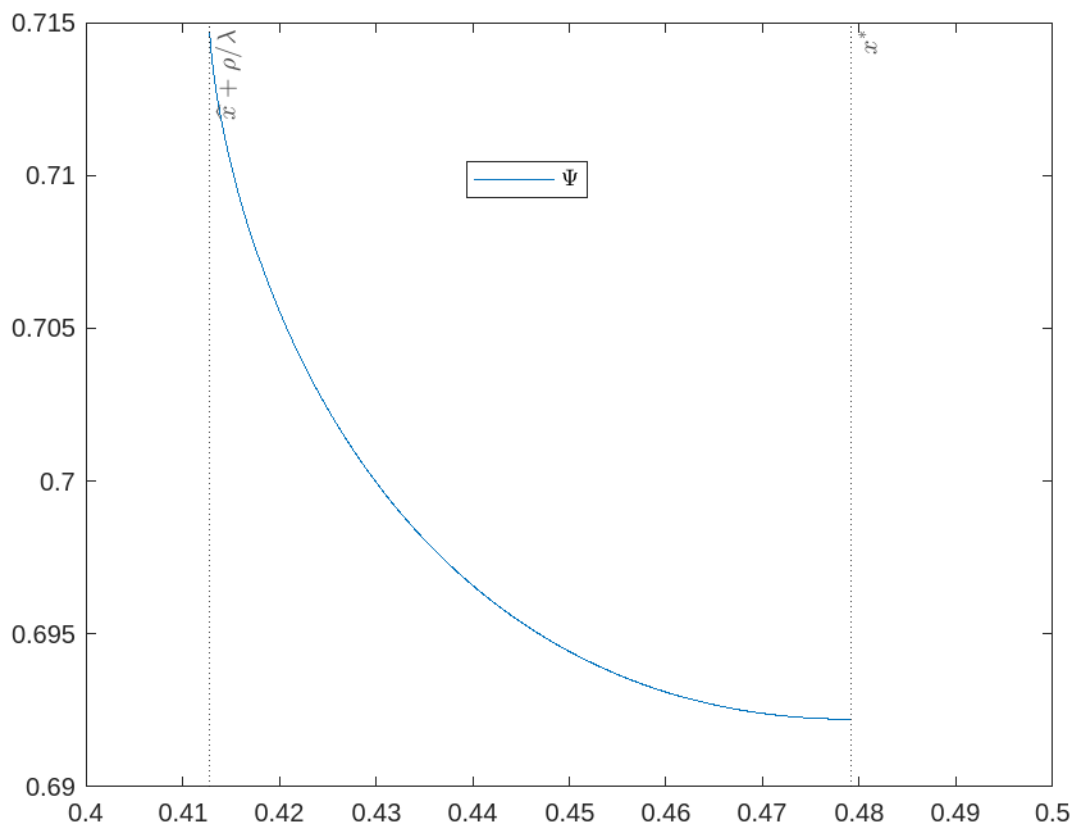


Figure 4.8 Courbe de Ψ pour $\gamma = 0.8$

CONCLUSION

Nous avons pu résoudre le problème d'optimisation de dividendes dans le cas où la fonction d'utilité est affine et les réserves de l'entreprise sont modélisées par un processus Ornstein - Uhlenbeck. Dans ce cas, nous avons montré que les stratégies optimales prennent la forme de stratégies barrière dont le niveau ne dépend pas de la trajectoire du processus de réserves. Nous avons présenté des méthodes de recherche permettant d'identifier de telles stratégies avec des paramètres de frais et d'impôts supplémentaires par rapport aux modèles similaires de (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995) et (Paulsen, 2007). Lorsque la fonction d'utilité est strictement concave et le processus de réserves est modélisé par un processus OU, en s'inspirant de l'article de (Cadenillas *et al.*, 2007), nous avons montré dans le Chapitre 4 que les stratégies optimales ne prennent pas toujours la forme de stratégies barrière. Il serait donc intéressant de poursuivre l'étude afin d'identifier les stratégies optimales lorsque l'actionnaire est averse au risque, quitte à considérer d'autres types de dynamiques pour le processus de réserves.

ANNEXE A

PROPRIÉTÉ MARKOVIENNE DU PROCESSUS DE RÉSERVES

Dans cette annexe, nous noterons $x \mapsto \mathbb{1}_A(x)$ la fonction indicatrice de l'ensemble A . Notons $\{X_t^{0,x,D}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ le processus suivant la dynamique (1.4) et tel que $X_0^{0,x,D} = x$. On a

$$X_t^{0,x,D} = x + \int_0^t \mu(X_s^{0,x,D}) ds + \int_0^t \sigma(X_s^{0,x,D}) dB_s - \sum_{i \in \mathbb{N}^*} f(\zeta_i) \mathbb{1}_{[0,t]}(\tau_i), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

De même, pour un temps d'arrêt τ , notons $\{X_t^{\tau,x,D}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ le processus suivant la dynamique (1.4) et tel que $X_{\tau-}^{\tau,x,D} = x$, et $X_t^{\tau,x,D} = 0$ pour tout $t \in [0, \tau)$. On a

$$X_t^{\tau,x,D} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, \tau) \\ x + \int_{\tau}^t \mu(X_s^{\tau,x,D}) ds + \int_{\tau}^t \sigma(X_s^{\tau,x,D}) dB_s - \sum_{i \in \mathbb{N}^*} f(\zeta_i) \mathbb{1}_{[\tau,t]}(\tau_i) & \text{si } t \in [\tau, \infty). \end{cases}$$

Lemme A.1 Soient τ et τ' des temps d'arrêt tels que $\tau \leq \tau'$, presque sûrement. Pour tout $t \geq \tau'$, on a presque sûrement

$$X_t^{\tau,x,D} = X_t^{\tau', X_{\tau'-}^{\tau,x,D}, D}.$$

Preuve. Si $t \in [0, \tau)$, les deux processus sont nuls. Si $t \in [\tau, \infty)$, on a d'une part

$$\begin{aligned} X_t^{\tau,x,D} &= x + \int_{\tau}^t \mu(X_s^{\tau,x,D}) ds + \int_{\tau}^t \sigma(X_s^{\tau,x,D}) dB_s - \sum_{i \in \mathbb{N}^*} f(\zeta_i) \mathbb{1}_{[\tau,t]}(\tau_i) \\ &= x + \int_{\tau}^{\tau'} \mu(X_s^{\tau,x,D}) ds + \int_{\tau}^{\tau'} \sigma(X_s^{\tau,x,D}) dB_s - \sum_{i \in \mathbb{N}^*} f(\zeta_i) \mathbb{1}_{[\tau,\tau']}(\tau_i) \\ &\quad + \int_{\tau'}^t \mu(X_s^{\tau,x,D}) ds + \int_{\tau'}^t \sigma(X_s^{\tau,x,D}) dB_s - \sum_{i \in \mathbb{N}^*} f(\zeta_i) \mathbb{1}_{[\tau',t]}(\tau_i) \\ &= X_{\tau'-}^{\tau,x,D} + \int_{\tau'}^t \mu(X_s^{\tau,x,D}) ds + \int_{\tau'}^t \sigma(X_s^{\tau,x,D}) dB_s - \sum_{i \in \mathbb{N}^*} f(\zeta_i) \mathbb{1}_{[\tau',t]}(\tau_i). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$X_t^{\tau', X_{\tau'-}^{\tau,x,D}, D} = X_{\tau'-}^{\tau,x,D} + \int_{\tau'}^t \mu(X_s^{\tau', X_{\tau'-}^{\tau,x,D}, D}) ds + \int_{\tau'}^t \sigma(X_s^{\tau', X_{\tau'-}^{\tau,x,D}, D}) dB_s - \sum_{i \in \mathbb{N}^*} f(\zeta_i) \mathbb{1}_{[\tau',t]}(\tau_i).$$

Ainsi, $X_t^{\tau,x,D}$ et $X_t^{\tau', X_{\tau'-}^{\tau,x,D}, D}$ vérifient la même EDS, donc le résultat découle du Théorème d'unicité des solutions d'une EDS. $\square$

Lemme A.2 Soit $D := \{\zeta_i, \tau_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ une stratégie de dividendes et τ un temps d'arrêt tel que $\tau \leq \tau_1$, presque sûrement. Posons $\tilde{D} := \{\zeta_i, \tau_i - \tau\}_{i \in \mathbb{N}^*}$.

Les processus $\{X_{\tau+t}^{\tau,x,D}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $\{X_t^{0,x,\tilde{D}}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ont la même loi.

Preuve. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et supposons que $\tau+t < T$, presque sûrement. D'une part, en effectuant le changement de variable $v = u + \tau$, on a

$$\begin{aligned} X_{\tau+t}^{\tau,x,D} &= x + \int_{\tau}^{\tau+t} \mu(X_{\tau+u}^{\tau,x,D}) du + \int_{\tau}^{\tau+t} \sigma(X_{\tau+u}^{\tau,x,D}) dB_u - \sum_{i \in \mathbb{N}^*} f(\zeta_i) \mathbb{1}_{[\tau, \tau+t]}(\tau_i) \\ &= x + \int_0^t \mu(X_v^{\tau,x,D}) dv + \int_0^t \sigma(X_v^{\tau,x,D}) d\tilde{B}_v - \sum_{i \in \mathbb{N}^*} f(\zeta_i) \mathbb{1}_{[0,t]}(\tau_i - \tau), \end{aligned}$$

où $\tilde{B}_v := B_{\tau+v} - B_{\tau}$.

D'autre part, on a

$$X_t^{0,x,\tilde{D}} = x + \int_0^t \mu(X_v^{0,x,D}) dv + \int_0^t \sigma(X_v^{0,x,D}) dB_v - \sum_{i \in \mathbb{N}^*} f(\zeta_i) \mathbb{1}_{[0,t]}(\tau_i - \tau).$$

D'après la propriété de Markov forte du mouvement brownien, le processus $\tilde{B}$ est un mouvement brownien standard, donc $X_t^{0,x,\tilde{D}}$ et $X_{\tau+t}^{\tau,x,D}$ ont la même loi, d'où le résultat. $\square$

Corollaire A.3 Les processus $\{X_{\tau+t}^{0,x,D}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $\{X_t^{0,X_{\tau-}^{0,x,D},\tilde{D}}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ont la même loi.

Preuve. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. D'après le Lemme A.1, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $X_{\tau+t}^{0,x,D} = X_{\tau+t}^{\tau,X_{\tau-}^{0,x,D},D}$, presque sûrement, et d'après le Lemme A.2, $X_{\tau+t}^{\tau,X_{\tau-}^{0,x,D},D}$ et $X_t^{0,X_{\tau-}^{0,x,D},\tilde{D}}$ ont la même loi. $\square$

A.1 Preuve de l'inégalité (1.16)

Soient $\tau \in \mathcal{S}$ presque sûrement fini, et $\tilde{\tau} := \inf\{t \geq \tau : X_t^{0,x} \notin R\}$ le premier instant après τ où il est optimal de verser un dividende. Notons $D := D^{\tilde{\tau}}$ la stratégie consistant à ne pas intervenir avant $\tilde{\tau}$, exercer la meilleure action immédiate en $\tilde{\tau}$, puis agir optimalement par la suite. Définissons également $\tau_x^* := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : X_t^{0,x} \notin R\}$ le premier instant où il est optimal de verser un dividende.

On a

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau} &= \tau + \inf\{s \in \mathbb{R}_+ : X_{\tau+s}^{0,x} \notin R\} \\
&= \tau + \inf\{s \in \mathbb{R}_+ : X_{\tau+s}^{\tau, X_{\tau-}^{0,x}} \notin R\} \text{ d'après le Lemme A.1} \\
&= \tau + \inf\{s \in \mathbb{R}_+ : X_s^{0, X_{\tau-}^{0,x}} \notin R\} \text{ d'après le Lemme A.2} \\
&= \tau + \tau_{X_{\tau-}^{0,x}}^*.
\end{aligned}$$

Pour tous $x \in \mathbb{R}_+$ et $t < \tilde{\tau}$, on a $X_t^{0,x} = X_t^{0,x,D}$ puisqu'on n'exerce pas avant $\tilde{\tau}$. Donc dans le cas où $\tau < \tilde{\tau}$ presque sûrement, on a $X_{\tau-}^{0,x,\emptyset} = X_{\tau-}^{0,x,D}$, d'où

$$\tilde{\tau} - \tau = \tau_{X_{\tau-}^{0,x,D}}^* =: \tau^*.$$

On a alors d'après le Corollaire A.3

$$\begin{aligned}
V(x) &\geq J(x, D) \\
&= \mathbb{E} \left[e^{-r\tilde{\tau}} \mathcal{K}V(X_{\tilde{\tau}-}^{0,x,D}) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \mathbb{E} \left[e^{-r(\tilde{\tau}-\tau)} \mathcal{K}V(X_{\tilde{\tau}-}^{0,x,D}) \middle| X_{\tau-}^{0,x,D} \right] \right] \\
&= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \mathbb{E} \left[e^{-r(\tilde{\tau}-\tau)} \mathcal{K}V(X_{(\tilde{\tau}-\tau)-}^{0, X_{\tau-}^{0,x,D}, \tilde{D}}) \middle| X_{\tau-}^{0,x,D} \right] \right] \\
&= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \mathbb{E} \left[e^{-r\tau^*} \mathcal{K}V(X_{\tau^*-}^{0, X_{\tau-}^{0,x,D}, \tilde{D}}) \middle| X_{\tau-}^{0,x,D} \right] \right].
\end{aligned}$$

Il est optimal d'exercer en τ^* , donc on a

$$\mathcal{K}V(X_{\tau^*-}^{0, X_{\tau-}^{0,x,D}, \tilde{D}}) = V(X_{\tau^*-}^{0, X_{\tau-}^{0,x,D}, \tilde{D}}).$$

Le principe de la programmation dynamique (1.12) donne donc

$$V(x) \geq \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} \mathbb{E} \left[e^{-r\tau^*} V(X_{\tau^*-}^{0, X_{\tau-}^{0,x,D}, \tilde{D}}) \middle| X_{\tau-}^{0,x,D} \right] \right] = \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} V(X_{\tau-}^{0,x,D}) \right].$$

Enfin, puisque sous les stratégies D et D^τ , on n'exerce pas avant τ , on a presque sûrement

$$X_{\tau-}^{0,x,D} = X_{\tau-}^{0,x,D^\tau},$$

d'où

$$V(x) \geq \mathbb{E} \left[e^{-r\tau} V(X_{\tau-}^{0,x,D^\tau}) \right].$$

Dans le cas où $\tau = \tau_x^*$, on a $\tilde{\tau} = \tau = \tau_x^*$ et la stratégie $D =: D^*$ est optimale. On a donc pour tout temps d'arrêt τ' tel que $\tau' < \tau_x^*$ presque sûrement,

$$\begin{aligned} V(x) &= J(x, D) \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau_x^*} V(X_{\tau_x^*-}^{0,x,D^*}) \right], \text{ d'après (1.11),} \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau'} \mathbb{E} \left[e^{-r(\tau_x^* - \tau')} V(X_{(\tau_x^* - \tau')-}^{0, X_{\tau'-}^{0,x,D^*}, \tilde{D}}) \middle| X_{\tau'-}^{0,x,D^*} \right] \right] \text{ d'après le Corollaire A.3.} \end{aligned}$$

On montre comme précédemment que $\tau_x^* - \tau' = \tau_{X_{\tau'-}^{0,x,D^*}}^* =: \tau^*$, donc, il vient

$$\begin{aligned} V(x) &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau'} \mathbb{E} \left[e^{-r\tau^*} V(X_{\tau^*-}^{0, X_{\tau'-}^{0,x,D^*}, \tilde{D}}) \middle| X_{\tau'-}^{0,x,D^*} \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-r\tau'} V(X_{\tau'-}^{0,x,D^*}) \right] \end{aligned}$$

ANNEXE B

PREUVE DU THÉORÈME 2.1

Dans cette annexe, nous complétons l'énoncé du Théorème 2.1 et prouvons ensuite successivement les différents points.

Théorème B.1 Fixons $\sigma, \mu, r, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle ordinaire (EDO) sur $\mathbb{R}_+$ suivante

$$\frac{\sigma^2}{2}y'' + \mu y' - ry = 0$$

avec condition initiale $y(0) = 0$, est donné par $\{x \mapsto \phi_A(x) := A(e^{\theta_1 x} - e^{\theta_2 x}) : A \in \mathbb{R}\}$ où

$$\begin{cases} \theta_1 = \sigma^{-2}(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}) \\ \theta_2 = \sigma^{-2}(-\mu - \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}) \end{cases}.$$

De plus, on a $|\theta_2| > \theta_1 > 0 > \theta_2$.

2. Pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction ϕ_A est strictement croissante-concave sur $(-\infty, \tilde{x})$ et strictement croissante-convexe sur $(\tilde{x}, \infty)$, où

$$\tilde{x} = \frac{2[\log(|\theta_2|) - \log(\theta_1)]}{\theta_1 + |\theta_2|} > 0.$$

De plus, ϕ'_A atteint son minimum global en $\tilde{x}$.

3. (a) Il existe $A_\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'unique solution de l'équation $\phi'_{A_\lambda}(x) = \lambda$ soit $\tilde{x}$.
 (b) Pour tout $A \in (A_\lambda, \infty)$, l'équation $\phi'_A(x) = \lambda$ n'a pas de solution.
 (c) Pour tout $A \in (0, A_\lambda)$ l'équation $\phi'_A(x) = \lambda$ admet deux solutions $x_1(A)$ et $x_2(A)$ telles que $x_1(A) < \tilde{x} < x_2(A)$.
4. (a) Les fonctions $A \mapsto x_1(A)$ et $A \mapsto x_2(A)$ sont continues et respectivement strictement croissante et strictement décroissante sur $(0, A_\lambda]$.
 (b) On a les limites suivantes en 0 : $\lim_{A \rightarrow 0} x_1(A) = -\infty$, et $\lim_{A \rightarrow 0} x_2(A) = \infty$.
5. Pour tout $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $\tilde{A} \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\mathcal{I}(\tilde{A}) := \int_{x_1(\tilde{A}) \vee 0}^{x_2(\tilde{A})} (\lambda - \phi'_{\tilde{A}}(x)) dx = \rho.$$

Preuve.

1. L'ensemble des solutions de l'EDO $\frac{\sigma^2}{2}y'' + \mu y' - ry = 0$ est $\{x \mapsto A_1 e^{\theta_1 x} + A_2 e^{\theta_2 x} : A_1, A_2 \in \mathbb{R}\}$, où θ_1 et θ_2 , données dans le théorème, sont les racines de l'équation caractéristique $\frac{\sigma^2}{2}x^2 + \mu x - r = 0$. La condition initiale $y(0) = 0$ implique $A_1 + A_2 = 0$. Les solutions sont donc de la forme $A(e^{\theta_1 x} - e^{\theta_2 x})$. De plus, on a $\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2} > \mu$, donc $\theta_1 > 0$, et $|\theta_2| = \sigma^{-2}(\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2}) > r_1$.
2. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\phi'_A(x) = A(\theta_1 e^{\theta_1 x} - \theta_2 e^{\theta_2 x}) > 0$, donc ϕ_A est strictement croissante. De plus, on a

$$\begin{aligned}\phi''_A(x) &= A(\theta_1^2 e^{\theta_1 x} - \theta_2^2 e^{\theta_2 x}) > 0 \\ \iff e^{-(\theta_1 + |\theta_2|)x} &< \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^2 \\ \iff -(\theta_1 + |\theta_2|)x &< 2[\log(\theta_1) - \log(|\theta_2|)] \\ \iff x &> \frac{2[\log(|\theta_2|) - \log(\theta_1)]}{\theta_1 + |\theta_2|} = \tilde{x}.\end{aligned}$$

Donc ϕ_A est strictement convexe sur $(\tilde{x}, \infty)$ et strictement concave sur $(-\infty, \tilde{x})$. On en déduit que ϕ'_{A_λ} est strictement décroissante sur $(-\infty, \tilde{x})$ et strictement croissante sur $(\tilde{x}, \infty)$, donc $\tilde{x}$ est le minimum global de ϕ'_A .

3. (a) La fonction $A \mapsto \phi'_A(\tilde{x}) = A(\theta_1 e^{\theta_1 \tilde{x}} - \theta_2 e^{\theta_2 \tilde{x}})$ est continue, $\lim_{A \rightarrow 0} \phi'_A(\tilde{x}) = 0$, et $\lim_{A \rightarrow \infty} \phi'_A(\tilde{x}) = \infty$, donc d'après le Théorème des valeurs intermédiaires (TVI, D.4), il existe $A_\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\phi'_{A_\lambda}(\tilde{x}) = \lambda$.
(b) Soit $A \in (A_\lambda, \infty)$. D'après le point 2, ϕ'_A atteint son minimum global en $\tilde{x}$. De plus, comme $A > A_\lambda$, on a $\phi'_A(\tilde{x}) > \phi'_{A_\lambda}(\tilde{x}) = \lambda$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi'_A(x) > \lambda$, donc l'équation $\phi'_A(x) = \lambda$ n'a pas de solution.
(c) Soit $A \in (0, A_\lambda)$. ϕ'_A est continue, strictement décroissante sur $(-\infty, \tilde{x})$ et strictement croissante sur $(\tilde{x}, \infty)$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi'_A(x) = A(\theta_1 e^{\theta_1 x} + |\theta_2| e^{-|\theta_2|x})$, donc $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi'_A(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi'_A(x) = \infty$. Puisque $A < A_\lambda$, on a également $\phi'_A(\tilde{x}) < \phi'_{A_\lambda}(\tilde{x}) = \lambda$. Donc d'après le TVI, il existe $x_1(A) \in (-\infty, \tilde{x})$ et $x_2(A) \in (\tilde{x}, \infty)$ tels que $\phi'_A(x_1(A)) = \phi'_A(x_2(A)) = \lambda$.
4. Soient $A \in (0, A_\lambda]$ et $\varepsilon \in (0, A)$.

- (a) Le point 3.(a) nous amène à poser $x_1(A_\lambda) = x_2(A_\lambda) = \tilde{x}$. Notons $f(x) = \theta_1 e^{\theta_1 x} - \theta_2 e^{\theta_2 x}$, $f^{(g)}$ la restriction de f à l'intervalle $(-\infty, \tilde{x})$ et $f^{(d)}$ la restriction de f à $(\tilde{x}, \infty)$. Posons $f_A^{(g)} = Af^{(g)}$ et $f_A^{(d)} = Af^{(d)}$. $f_A^{(g)}$ et $f_A^{(d)}$ sont les restrictions de ϕ'_A à $(-\infty, \tilde{x})$ et $(\tilde{x}, \infty)$, respectivement.

D'après le point 2 du théorème, les fonctions $f^{(g)}$ et $f^{(d)}$ sont continues et strictement monotones donc inversibles et d'inverses continues, d'après le Théorème des fonctions réciproques. On a donc $x_1(A) = (f_A^{(g)})^{-1}(\lambda) = (f^{(g)})^{-1}(\lambda/A)$ et $x_2(A) = (f_A^{(d)})^{-1}(\lambda) = (f^{(d)})^{-1}(\lambda/A)$. Ainsi les fonctions $A \mapsto x_1(A)$ et $A \mapsto x_2(A)$ sont continues comme composées d'applications continues sur $(0, A_\lambda]$.

Pour $i = 1, 2$ on a $\phi'_{A-\varepsilon}(x_i(A)) < \phi'_A(x_i(A)) = \lambda = \phi'_{A-\varepsilon}(x_i(A - \varepsilon))$. La fonction $\phi'_{A-\varepsilon}$ est strictement décroissante sur $(-\infty, \tilde{x})$ et strictement croissante sur $(\tilde{x}, \infty)$. Puisque $x_1(A), x_1(A - \varepsilon) \in (-\infty, \tilde{x})$, on a donc $x_1(A) > x_1(A - \varepsilon)$. La fonction $A \mapsto x_1(A)$ est donc strictement croissante sur $(0, A_\lambda]$. De même $x_2(A), x_2(A - \varepsilon) \in (\tilde{x}, \infty)$, donc $x_2(A) < x_2(A - \varepsilon)$. La fonction $A \mapsto x_2(A)$ est donc strictement décroissante sur $(0, A_\lambda]$.

(b) D'une part, supposons par l'absurde que $A \mapsto x_1(A)$ est minorée, i.e., il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $A \in (0, A_\lambda)$ on ait $x_1(A) > m$. Sans perte de généralité on peut prendre $m < \tilde{x}$ (car pour tout $A \in (0, A_\lambda)$, $x_1(A) < \tilde{x}$). Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction ϕ'_A est continue et on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi'_A(x) = \infty$, donc d'après le TVI, il existe $x_m < m$ tel que $\phi'_A(x_m) > \lambda$. De plus, $A \mapsto \phi'_A(x_m)$ est continue et $\lim_{A \rightarrow 0} \phi'_A(x_m) = 0$, donc d'après le TVI il existe $A_m \in (0, A_\lambda)$ tel que $\phi'_{A_m}(x_m) = \lambda$. Comme $x_m < m < \tilde{x}$, on en déduit que $x_m = x_1(A_m)$, d'où $x_1(A_m) < m$, absurde. La fonction $A \mapsto x_1(A)$ est donc croissante et non minorée, donc d'après le Théorème de la limite monotone, $\lim_{A \rightarrow 0} x_1(A) = -\infty$.

D'autre part, supposons par l'absurde que $A \mapsto x_2(A)$ est majorée, i.e., il existe $M \in (0, \infty)$, tel que pour tout $A \in (0, A_\lambda)$, on ait $x_2(A) < M$. Sans perte de généralité on peut prendre $M > \tilde{x}$ (car pour tout $A \in (0, A_\lambda)$, $x_2(A) > \tilde{x}$). Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. ϕ'_A est continue et on a $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi'_A(x) = \infty$, donc d'après le TVI, il existe $x_M > M$ tel que $\phi'_A(x_M) > \lambda$. De plus, la fonction $A \mapsto \phi'_A(x_M)$ est continue et $\lim_{A \rightarrow 0} \phi'_A(x_M) = 0$, donc d'après le TVI il existe $A_M \in (0, A_\lambda)$ tel que $\phi'_{A_M}(x_M) = \lambda$. Comme $x_M > M > \tilde{x}$, on en déduit que $x_M = x_2(A_M)$, d'où $x_2(A_M) > M$, absurde. x_2 est donc décroissante et non majorée, donc d'après le Théorème de la limite monotone, $\lim_{A \rightarrow 0} x_2(A) = \infty$.

5. Soient $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, $A \in (0, A_\lambda)$. Nous allons montrer que l'intégrale $\mathcal{I}(A)$, représentée sur la figure 1, est plus grande que l'aire d'un triangle dont l'aire tend vers l'infini quand $A \rightarrow 0$. Avec le fait que $A \mapsto \mathcal{I}(A)$ est continue sur $(0, A_\lambda]$ et que $\mathcal{I}(A_\lambda) = 0$, le TVI nous permettra de conclure.

Constatons donc dans un premier temps que la fonction $A \mapsto \mathcal{I}(A)$, définie sur $(0, A_\lambda]$, est continue. En effet, on a $\mathcal{I}(A) = \int_{-\infty}^{x_2(A)} \psi(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1(A) \vee 0} \psi(x) dx$, où l'on a posé $\psi = \lambda - \phi'_A$. De plus, la fonction $y \mapsto \int_{-\infty}^y \psi(x) dx$ est continue sur $\mathbb{R}$ d'après le Théorème fondamental de l'analyse car ψ

est continue. Enfin, d'après le point 4, les fonctions $A \mapsto x_1(A) \vee 0$ et $A \mapsto x_2(A)$ sont continues sur $(0, A_\lambda]$. La fonction $A \mapsto \mathcal{I}(A)$ est donc continue sur $(0, A_\lambda]$ comme somme et composées d'applications continues sur $(0, A_\lambda]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\phi_A^{(3)}(x) = A(\theta_1^3 e^{\theta_1 x} - \theta_2^3 e^{\theta_2 x}) > 0$, donc ϕ'_A est strictement convexe. Comme ϕ'_A est convexe, ψ est concave, donc au dessus de ses cordes.

Définissons les points du plan P_1, P_2, P_3, P_4 suivants (voir la figure 1) :

$$\begin{cases} P_1 = (x_1(A), 0), & P_2 = (\tilde{x}, 0), \\ P_3 = (x_2(A), 0), & P_4 = (\tilde{x}, \psi(\tilde{x})) \end{cases}.$$

Le graphe de ψ est au dessus des cordes $[P_1, P_4]$ et $[P_3, P_4]$, donc le triangle $T_1 := (P_1, P_3, P_4)$ est inscrit dans le non-polygone $[P_1, P_3] \cup \mathcal{C}(\psi|_{[x_1(A), x_2(A)]})$, dont l'aire vaut $\int_{x_1(A)}^{x_2(A)} \psi(x) dx$, et où $\mathcal{C}(\psi|_{[x_1(A), x_2(A)]})$ est la courbe représentative de la restriction de ψ à l'intervalle $[x_1(A), x_2(A)]$.

Si $x_1(A) > 0$, l'intégrale précédente vaut $\mathcal{I}(A)$. Dans ce cas d'après ce qui précède on a $\mathcal{I}(A) > \mathcal{A}(T_1) = \psi(\tilde{x})(x_2(A) - x_1(A))/2$, où $\mathcal{A}(T_1)$ est l'aire de T_1 . On a vu que la fonction $A \mapsto \mathcal{I}(A)$ est continue sur $(0, A_\lambda]$. De plus, puisque $x_1(A_\lambda) = x_2(A_\lambda)$, on a $\mathcal{I}(A_\lambda) = 0$. Enfin, $\psi(\tilde{x})(x_2(A) - x_1(A))/2 \xrightarrow{A \rightarrow 0} \infty$, donc $\mathcal{I}(A) \xrightarrow{A \rightarrow 0} \infty$. Ainsi d'après le TVI, il existe $\tilde{A} \in (0, A_\lambda)$, tel que $\mathcal{I}(\tilde{A}) = \rho$.

Si $x_1(A) < 0$, on considère le triangle $T_2 = (P_2, P_3, P_4)$. Le triangle T_2 est inclus dans le premier quadrant du plan et également dans T_1 . On en déduit que T_2 est inclus dans le non-polygone $[(0, 0), (0, \psi(0))] \cup [(0, 0), P_3] \cup \mathcal{C}(\psi|_{[0, x_2(A)]})$, dont l'aire vaut $\mathcal{I}(A)$. On a donc $\mathcal{I}(A) > \mathcal{A}(T_2) = \psi(\tilde{x})x_2(A)/2 \xrightarrow{A \rightarrow 0} \infty$. De plus on a $\mathcal{I}(A_\lambda) = \int_{x_1(A_\lambda) \vee 0}^{x_2(A_\lambda)} \psi(x) dx = \int_{\tilde{x} \vee 0}^{\tilde{x}} \psi(x) dx = 0$, car $\tilde{x} > 0$, et $A \mapsto \mathcal{I}(A)$ est continue. On conclut donc de la même manière avec le TVI.

□

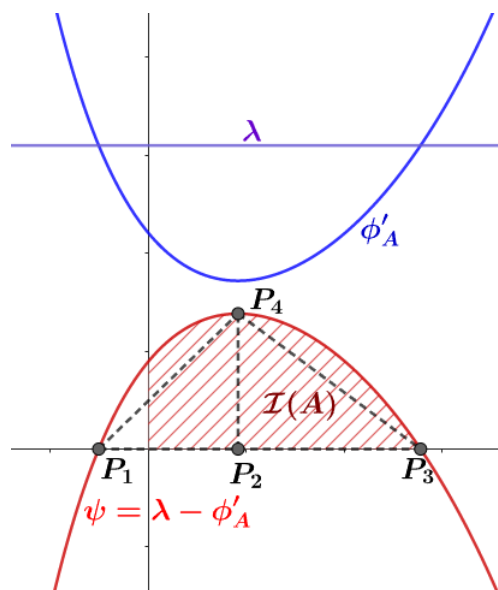


Figure B.1 Représentation graphique de $\mathcal{I}(A)$

ANNEXE C

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES CONFLUENTES

Nous allons introduire les fonctions hypergéométriques comme solutions d'une équation différentielle du second ordre à laquelle peut se ramener l'équation $\mathcal{L}\phi(x) = 0$, lorsque la dynamique du processus de réserves non contrôlé est du type Ornstein - Uhlenbeck. Cette section est inspirée de (Tricomi, 1960), mais nous détaillons ici davantage les preuves. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Notons E l'équation différentielle du second ordre sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$xy'' + (b - x)y' - ay = 0. \quad (\text{C.1})$$

Cette équation est appelée *équation confluyente*.

C.1 Fonction hypergéométrique confluyente de première espèce

Commençons par chercher une solution de E sous la forme d'une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On a

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ xy'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n, \\ xy''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n, \end{aligned}$$

donc en substituant dans E , il vient

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} [n(n+1) a_{n+1} + b(n+1) a_{n+1} - n a_n - a a_n] + b a_1 - a a_0 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+b) a_{n+1} - (n+a) a_n] = 0. \end{aligned}$$

Supposons que b n'est pas un entier négatif ou nul. D'après le Théorème d'unicité du développement en série entière, on doit donc avoir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \frac{n+a}{(n+1)(n+b)} a_n$. En posant $a_0 = 1$, on obtient par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_n = \frac{(a)_n}{(b)_n n!},$$

où $(a)_n$ représente la factorielle croissante, définie par

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ a(a+1) \cdots (a+n-1) & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

La fonction

$$F(a, b, x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(a+j)x}{(b+j)(j+1)}, \quad b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$$

est donc solution de E et est appelée *fonction hypergéométrique confluyente de première espèce*. On note que le rayon de convergence de cette série est infini donc converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, en utilisant la Règle de d'Alembert, on a

$$\left| \frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}n!}{(a)_n(b)_n(n+1)!} \right| = |(a+n)(b+n)/(n+1)| \sim n \longrightarrow \infty, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Pour a, b donnés, on notera $y_1(x) = F(a, b, x)$. D'après le Théorème de dérivation des séries entières, la dérivée de F est

$$\begin{aligned} F'(a, b, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+1}}{(b)_{n+1}} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{a}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)_n}{(b+1)_n} \frac{x^n}{n!} = \frac{a}{b} F(a+1, b+1, x). \end{aligned}$$

Il est possible de trouver une autre solution similaire en effectuant le changement de variable $y = x^c \eta$, $c \in \mathbb{R}$. En effet, en substituant dans E , on obtient

$$\begin{aligned} x[c(c-1)x^{c-2}\eta + 2cx^{c-1}\eta' + x^c\eta''] + (b-x)[cx^{c-1}\eta + x^c\eta'] - ax^c\eta \\ = x\eta'' + (2c+b-x)\eta' - \left(a+c - \frac{c(c+b-1)}{x}\right)\eta = 0, \end{aligned}$$

et en choisissant $c = 1 - b$, on retrouve une équation similaire à E :

$$x\eta'' + (2-b-x)\eta' - (a-b+1)\eta = 0$$

où b est changé en $2-b$ et a est changé en $a-b+1$. On en déduit que la fonction

$$y_2(x) := x^{1-b} F(a-b+1, 2-b, x), \quad b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_+$$

est également solution de E . Si $b = 1$, on a $y_2 = y_1$.

La fonction F peut également s'écrire sous forme intégrale. En effet, pour un chemin d'intégration donné $\mathcal{C}$ dans le plan complexe, définissons la transformée $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}\{Y\}$ d'une fonction $Y(t)$ par

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}}\{Y\}(x) = \int_{\mathcal{C}} e^{-xt} Y(t) dt.$$

Nous allons substituer $y = \mathcal{L}_{\mathcal{C}}\{Y\}$ dans l'équation confluyente E . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en supposant que la variation totale sur $\mathcal{C}$ de la fonction $e^{-xt} Y(t)$ est nulle, on obtient, par intégration par parties et en

supposant qu'il est licite de dériver sous l'intégrale, les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_C\{Y'\} &= [e^{-xt}Y(t)]_C + x\mathcal{L}_C\{Y\} = xy, \\
\mathcal{L}_C\{tY\} &= -\frac{d}{dx}\mathcal{L}_C\{Y\} = -y', \\
\mathcal{L}_C\{tY'\} &= -\frac{d}{dx}\mathcal{L}_C\{Y'\} = -\frac{d}{dx}\{xy\} = -(y + xy'), \\
\mathcal{L}_C\{t^2Y'\} &= -\frac{d}{dx}\mathcal{L}_C\{tY'\} = -\frac{d}{dx}\{-(y + xy')\} = 2y' + xy''.
\end{aligned}$$

La substitution donne donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
xy'' + (b - x)y' - ay &= (\mathcal{L}_C\{t^2Y'\} - 2y') + by' - xy' - ay \\
&= \mathcal{L}_C\{t^2Y'\} + (2 - b)\mathcal{L}_C\{tY\} + (\mathcal{L}_C\{tY'\} + y) - ay \\
&= \mathcal{L}_C\{(t^2 + t)Y' + [(2 - b)t + 1 - a]Y\} = 0,
\end{aligned}$$

et la dernière équation est vraie si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(t^2 + t)Y'(t) + [(2 - b)t + 1 - a]Y(t) = 0$.

Cette équation se résout facilement par la technique de séparation des variables. En effet on peut la réécrire sous la forme

$$\frac{dY}{dt} = -\left(\frac{2 - b}{1 + t} + \frac{1 - a}{t(t + 1)}\right)Y. \quad (\text{C.2})$$

On obtient donc successivement en intégrant,

$$\int \frac{dY}{Y} = -\int \frac{2 - b}{1 + t} dt + (1 - a) \left(\int \frac{dt}{1 + t} - \int \frac{dt}{t} \right),$$

$$\ln |Y| = -(2 - b) \ln |1 + t| + (1 - a) (\ln |1 + t| - \ln |t|) = \ln(|1 + t|^{b-a+1} |t|^{a-1}),$$

On en déduit que le chemin d'intégration $\mathcal{C}$ doit être tel que la variation totale de $e^{-xt}|t|^{a-1}|1 + t|^{b-a-1}$ est nulle, c'est-à-dire

$$[e^{-xt}|t|^{a-1}|1 + t|^{b-a-1}]_C = 0, \quad (\text{C.3})$$

alors $Y(t) = |t|^{a-1}|1 + t|^{b-a-1}$ est une solution de (C.2). et donc

$$y(x) = \int_C e^{-xt}|t|^{a-1}|1 + t|^{b-a-1} dt \quad (\text{C.4})$$

est une solution de E . Si l'on suppose $a > 1$ et $b - a > 1$, alors en prenant $\mathcal{C} = (-1, 0)$ on vérifie (C.3), donc une solution de E est

$$I_1(x) := \int_{-1}^0 e^{-xt}|t|^{a-1}|1 + t|^{b-a-1} dt = \int_0^1 e^{xt}t^{a-1}(1 - t)^{b-a-1} dt.$$

où à la dernière étape on a effectué le changement de variable $s = -t$. L'intégrale I_1 est également définie pour $0 < a < b$. En effet, supposons que $a \in (0, 1)$ et $b - a \in (0, 1)$ et posons $\alpha = 1 - a$ et $\beta = 1 - (b - a)$. On a $\alpha, \beta > 0$ et on peut écrire $I_1(x) = \int_0^{1/2} e^{xt} \frac{1}{t^\alpha (1-t)^\beta} dt + \int_{1/2}^1 e^{xt} \frac{1}{t^\alpha (1-t)^\beta} dt$. D'une part, lorsque t tend vers 0, on a $e^{xt} \frac{1}{t^\alpha (1-t)^\beta} = O(\frac{1}{t^\alpha})$ et la fonction $\frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $(0, 1/2]$, donc la première intégrale converge. D'autre part, lorsque t tend vers 1, on a $e^{xt} \frac{1}{t^\alpha (1-t)^\beta} = O(\frac{1}{(1-t)^\beta})$ et la fonction $\frac{1}{(1-t)^\beta}$ est intégrable sur $[1/2, 1)$, donc la seconde intégrale converge. En développant l'exponentielle en série entière, il vient, par convergence monotone,

$$I_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^1 t^{a+n-1} (1-t)^{b-a-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{Beta}(a+n, b-a).$$

En utilisant la relation fonctionnelle $\text{Beta}(x+1, y) = \frac{x}{x+y} \text{Beta}(x, y)$, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\text{Beta}(a+n, b-a) = \frac{(a)_n}{(b)_n} \text{Beta}(a, b-a) = \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)},$$

où $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ est la fonction Gamma. On en déduit donc la relation $I_1(x) = \text{Beta}(a, b-a) F(a, b, x)$. Ainsi, pour tous $0 < a < b$, la fonction F admet la représentation intégrale

$$F(a, b, x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt, \quad 0 < a < b.$$

C.2 Fonction hypergéométrique confluyente de seconde espèce

En prenant comme chemin d'intégration $\mathcal{C} = (0, \infty)$, on vérifie (C.3) pour tous réels a, b tels que $a > 1$. On déduit donc de (C.4) que la fonction $y(x) = \int_0^\infty e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt$ est une solution de E (C.1). Cette intégrale est également définie pour $a > 0$, car si $a \in (0, 1)$, lorsque t tend vers 0, on a $e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} = O(\frac{1}{t^{1-a}})$, et $1-a > 0$. La fonction hypergéométrique confluyente de seconde espèce correspond à cette solution, avec l'ajout d'un facteur constant $\frac{1}{\Gamma(a)}$:

$$U(a, b, x) := \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad a \in \mathbb{R}_+^*$$

Pour a, b donnés, on notera $y_3(x) = U(a, b, x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $|\frac{\partial}{\partial x} \{e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1}\}| = | -e^{-xt} t^a (1+t)^{b-a-1} | \leq t^a (1+t)^{b-a-1}$ et la fonction $t^a (1+t)^{b-a-1}$ est intégrable sur $(0, \infty)$, donc d'après le Théorème de dérivation sous le signe intégral, U est dérivable et on a

$$\begin{aligned} U'(a, b, x) &= -\frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-xt} t^a (1+t)^{b-a-1} dt \\ &= -\frac{1}{\Gamma(a+1)/a} \int_0^\infty e^{-xt} t^{(a+1)-1} (1+t)^{(b+1)-(a+1)-1} dt \\ &= -aU(a+1, b+1, x). \end{aligned}$$

C.3 Propriétés

Lemme C.1 Les fonctions $e^x F(b-a, b, -x)$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ et $e^x U(b-a, b, -x)$, $x \leq 0, b-a > 0$ vérifient l'équation E (C.1).

Preuve. Considérons l'équation E (C.1) et effectuons le changement de variable $y = e^x \eta$. On a $y' = e^x \eta' + e^x \eta'$ et $y'' = e^x \eta'' + 2e^x \eta' + e^x \eta''$, donc en remplaçant dans E , on obtient $x\eta'' + (x+b)\eta' + (b-a)\eta = 0$. En posant $z = -x$ et $\nu(z) = \eta(x)$, on a $\eta'(x) = -\nu'(z)$ et $\eta''(x) = \nu''(z)$, donc l'équation se réécrit $z\nu'' + (b-z)\nu' - (b-a)\nu = 0$ ce qui correspond à l'équation E , avec a remplacé par $b-a$; la fonction $\nu(z) = F(b-a, b, z)$ est donc solution de cette équation. On en déduit que $y(x) = e^x \eta(x) = e^x \nu(-x) = e^x F(b-a, b, -x)$ est solution de E . De même, $e^x U(b-a, b, -x)$ est également solution de E . $\square$

Lemme C.2 Pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$U(a, b, x) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} F(a, b, x) + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} x^{1-b} F(a-b+1, 2-b, x).$$

De plus, les fonctions F et U sont linéairement indépendantes.

Preuve.

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, y_i, y_j deux solutions de E que nous pouvons réécrire sous la forme $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, avec $p(x) = -(b-x)/x$, et $q(x) = -a/x$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Le wronskien de ces deux solutions est

$$W_{i,j}(x) = \begin{vmatrix} y_i(x) & y_j(x) \\ y_i'(x) & y_j'(x) \end{vmatrix} = y_i(x)y_j'(x) - y_i'(x)y_j(x).$$

On a

$$\begin{aligned}
W'_{i,j}(x) &= \begin{vmatrix} y'_i(x) & y_j(x) \\ y''_i(x) & y'_j(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_i(x) & y'_j(x) \\ y'_i(x) & y''_j(x) \end{vmatrix} \\
&= y'_i(x)y'_j(x) - y''_i(x)y_j(x) + y_i(x)y''_j(x) - y'_i(x)y'_j(x) \\
&= y_i(x)y''_j(x) - y''_i(x)y_j(x) \\
&= \begin{vmatrix} y_i(x) & y_j(x) \\ y''_i(x) & y''_j(x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_i(x) & y_j(x) \\ -p(x)y'_i(x) - q(x)y_i(x) & -p(x)y'_j(x) - q(x)y_j(x) \end{vmatrix} \\
&= -p(x)W_{i,j}(x).
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned}
W_{i,j}(x) &= W_{i,j}(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} \\
&= W_{i,j}(x_0)e^{-\int_{x_0}^x \frac{b-t}{t}dt} \\
&= W_{i,j}(x_0)e^{-b \log(x) + b \log x_0 + x - x_0} \\
&= w_{i,j}e^x x^{-b},
\end{aligned}$$

où $w_{i,j}$ est une constante indépendante de x_0 . Considérons les trois solutions de E $y_1(x) = F(a, b, x)$, $y_2(x) = x^{1-b}F(a - b + 1, 2 - b, x)$ et $y_3(x) = U(a, b, x)$. Nous avons

$$W_{1,2}y_3 + W_{1,3}y_2 + W_{2,3}y_1 = y_1y'_2y_3 - y'_1y_2y_3 + y_1y_2y'_3 - y'_1y_2y_3 + y_1y_2y'_3 - y_1y'_2y_3 = 0.$$

On déduit de ce qui précède que si y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes (si et seulement si $W_{1,2} \neq 0$), alors on a

$$y_3 = \frac{w_{3,2}}{w_{1,2}}y_1 + \frac{w_{1,3}}{w_{1,2}}y_2.$$

Commençons par déterminer $w_{1,2}$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a d'après les points 3 et 4 du Lemme C.3

$$\begin{aligned}
W_{1,2}(x) &= y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = w_{1,2}e^x x^{-b} \\
&= F(a, b, x)(1-b)x^{-b}F(a-b+1, 2-b, x) + \frac{a-b+1}{2-b}x^{1-b}F(a, b, x)F(a-b+2, 3-b, x) \\
&\quad - \frac{a}{b}F(a+1, b+1, x)x^{1-b}F(a-b+1, 2-b, x) \\
&= e^x x^{-b} \left[(1-b)F(b-a, b, -x)F(a-b+1, 1-b, x) + \frac{a-b+1}{2-b}xF(a, b, x)F(1-a, 3-b, -x) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a}{b}xF(b-a, b+1, -x)F(a-b+1, 2-b, x) \right] \\
&\underset{x \rightarrow 0}{\sim} (1-b)e^x x^{-b}.
\end{aligned}$$

On en déduit $w_{1,2} = 1-b \neq 0$. Déterminons ensuite $w_{1,3}$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a de même,

$$\begin{aligned}
W_{1,3}(x) &= y_1(x)y_3'(x) - y_1'(x)y_3(x) = w_{1,3}e^x x^{-b} \\
&= -aF(a, b, x)U(a+1, b+1, x) - \frac{a}{b}F(a+1, b+1, x)U(a, b, x) \\
&= -e^x \frac{U(a, b, x)}{x} \left[axF(b-a, b, -x) \frac{U(a+1, b+1, x)}{U(a, b, x)} + \frac{a}{b}xF(b-a, b+1, -x) \right]
\end{aligned}$$

D'après le point 2 du Lemme C.3, on a $U(a, b, x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}x^{1-b}$, donc pour x dans un voisinage de 0 on a

$$\begin{aligned}
W_{1,3}(x) &\sim -e^x \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}x^{-b} \left[ax \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b-1)} \frac{1}{x} + \frac{a}{b}x \right] \\
&\sim (1-b) \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}e^x x^{-b},
\end{aligned}$$

d'où $w_{1,3} = (1-b) \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} \neq 0$. On en déduit que les fonction $y_1(x) = F(a, b, x)$ et $y_3(x) = U(a, b, x)$ sont linéairement indépendantes. Calculons enfin $w_{3,2}$. Nous allons utiliser l'équivalent du point 1 et l'équivalent du point 4 du Lemme C.3 qui peut se réécrire

$$F(a, b, x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}e^x x^{-(b-a)}.$$

On a

$$\begin{aligned}
W_{3,2}(x) &= y_3(x)y_2'(x) - y_3'(x)y_2(x) = w_{3,2}x^{-b}e^x \\
&= U(a, b, x)(1-b)x^{-b}F(a-b+1, 1-b, x) \\
&\quad + \frac{a-b+1}{2-b}x^{1-b}U(a, b, x)F(a-b+2, 3-b, x) + ax^{1-b}U(a+1, b+1, x)F(a-b+1, 2-b, x) \\
&\underset{x \rightarrow \infty}{\sim} e^x x^{-b} \left[(1-b)x^{-a} \frac{\Gamma(2-b)}{\Gamma(a-b+1)}x^{-(1-a)} + \frac{a-b+1}{2-b}xx^{-a} \frac{\Gamma(3-b)}{\Gamma(a-b+2)}x^{-(1-a)} \right. \\
&\quad \left. + ax x^{-(a+1)} \frac{\Gamma(2-b)}{\Gamma(a-b+1)}x^{a-1} \right] \\
&\underset{x \rightarrow \infty}{\sim} e^x x^{-b} \frac{a-b+1}{2-b} \frac{\Gamma(3-b)}{\Gamma(a-b+2)} = (1-b) \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)}e^x x^{-b}
\end{aligned}$$

d'où $w_{3,2} = (1-b) \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)}$. On en déduit directement le résultat. $\square$

Lemme C.3 On a

1. Pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, $U(a, b, x) \sim x^{-a}$, $x \rightarrow \infty$.
2. Pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}_- \cup \{1\})$, $U(a, b, x) = x^{1-b} U(a-b+1, 2-b, x) \sim \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} x^{1-b}$, $x \rightarrow 0$.
3. Pour tous $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$, $F(a, b, x) \rightarrow 1$, $x \rightarrow 0$.
4. Pour tous $x \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$, $F(a, b, -x) = e^{-x} F(b-a, b, x) \sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} x^{-a}$, $x \rightarrow \infty$.

Preuve.

1. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Pour t dans un voisinage de 0, on a, pour tout $n \geq 1$,

$$(1+t)^{b-a-1} = \sum_{j=0}^n \frac{(b-a)_j}{j!} t^j + o(t^n).$$

En effectuant le changement de variable $y = xt$, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on voit que

$$\int_0^\infty e^{-xt} t^{a+j-1} dt = x^{-(a+j)} \int_0^\infty e^{-y} y^{a+j-1} dy = \Gamma(a+j) x^{-(a+j)},$$

donc on a

$$\begin{aligned} U(a, b, x) &= \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(a+j)(b-a)_j}{\Gamma(a)j!} x^{-(a+j)} + O_{x \rightarrow \infty}(x^{-n}) \\ &= x^{-a} + \sum_{j=1}^n \frac{(a)_j(b-a)_j}{j!} x^{-(a+j)} + O_{x \rightarrow \infty}(x^{-n}) \\ &\underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x^{-a}. \end{aligned}$$

2. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}_- \cup \{1\})$, et $x \in \mathbb{R}_+$. D'après le Lemme C.1, on a

$$\begin{aligned} x^{b-1} U(a, b, x) &= \frac{\Gamma(1-(2-b))}{\Gamma((a-b+1)-(2-b)+1)} F(a-b+1, 2-b, x) \\ &\quad + \frac{\Gamma((2-b)-1)}{\Gamma(a-b+1)} x^{1-(2-b)} F(a-b+1-(2-b)+1, 2-(2-b), x) \\ &= U(a-b+1, 2-b, x), \end{aligned}$$

d'où $U(a, b, x) = x^{1-b}U(a-b+1, 2-b, x)$. En effectuant le changement de variable $u = 1/(1+t)$, on obtient

$$\begin{aligned} U(a, b, 0) &= \Gamma(a)^{-1} \int_0^\infty \left(\frac{1-u}{u}\right)^{a-1} \left(\frac{1}{u}\right)^{b-a-1} \frac{1}{u^2} du \\ &= \Gamma(a)^{-1} \int_0^\infty u^{-b}(1-u)^{a-1} du \\ &= \Gamma(a)^{-1} \text{Beta}(1-b, a) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)}. \end{aligned}$$

On a donc

$$U(a, b, x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{1-b} \frac{\Gamma(1-(2-b))}{\Gamma(a-b+1-(2-b)+1)} = x^{1-b} \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}.$$

3. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$, et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{(a)_j}{(b)_j} \frac{x^j}{j!} = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{(a)_j}{(b)_j} \frac{x^j}{j!}$$

On a $F(a, b, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 0} S_n(x) = 1$, donc d'après le Théorème d'interversion des limites (découlant du Critère de Cauchy pour une fonction), on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(a, b, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} S_n(x) \right) = 1.$$

4. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $0 < a < b$. Nous ne montrerons que la partie $F(a, b, -x) = e^{-x}F(b-a, b, x)$, car la preuve de l'équivalent figure dans le livre de (Slater, 1960) et repose sur une application du Théorème des résidus et de la Formule de Stirling dans $\mathbb{C}$. D'après le Lemme C.1, la fonction $e^x F(b-a, b, -x)$ est solution de E , tout comme y_1 et y_2 , donc il existe deux constantes A, B telles que

$$e^x F(b-a, b, -x) = AF(a, b, x) + Bx^{1-b}F(a-b+1, 2-b, x)$$

D'après le point 3 précédent, si $B \neq 0$, le terme de gauche est de l'ordre de x^0 et le terme de droite de l'ordre de x^{1-b} quand $x \rightarrow 0$, ce qui est absurde, on a donc $B = 0$. En faisant tendre x vers 0 on obtient $A = 1$.

□

ANNEXE D

THÉORÈMES UTILES

Théorème D.1 *Théorème de Rolle.* [C. Scribot et F. Liret, *Mini Manuel d'analyse*, Dunod, 2010]

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur (a, b) et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in (a, b)$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème D.2 *Théorème des accroissements finis généralisé.*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, f et g des fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur (a, b) . Alors il existe $c \in (a, b)$ tel que $(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c)$. Si de plus g' ne s'annule pas sur (a, b) on peut écrire

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Preuve.

La fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto (g(b) - g(a))f(t) - (f(b) - f(a))g(t)$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b) et on a $\varphi(a) - \varphi(b) = (g(b) - g(a))(f(a) - f(b)) - (f(b) - f(a))(g(b) - g(a)) = 0$. Ainsi, d'après le Théorème de Rolle (D.1), il existe $c \in (a, b)$ tel que $\varphi'(c) = 0$, ce qui se réécrit $(g(b) - g(a))f'(c) = (f(b) - f(a))g'(c)$. Si g' ne s'annule pas sur (a, b) , par contraposée du Théorème de Rolle, on a $g(b) \neq g(a)$. On peut donc diviser les deux membres de l'égalité par $g(b) - g(a)$ et $g'(c)$. $\square$ On obtient directement le corollaire utile suivant :

Corollaire D.3 *Inégalité des accroissements finis.*

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b) . On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $t \in (a, b)$, $|f'(t)| \leq M$. Alors on a :

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Théorème D.4 *Théorème des valeurs intermédiaires.* [Bolzano, 1964]

Pour toute application continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = u$.

Théorème D.5 Règle de L'Hôpital.

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, et f et g deux fonctions dérivables sur (a, b) . Supposons que g' ne s'annule pas sur (a, b) . Alors, si $\lim_{x \rightarrow b_-} |g(x)| = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow b_-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on a $\lim_{x \rightarrow b_-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Preuve.

Supposons dans un premier temps que $|\ell| < \infty$. Pour tous $x, y \in (a, b)$ tels que $x < y$, d'après le Théorème D.2, il existe $c_{x,y} \in (x, y)$ tel que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})}.$$

Lorsque $g(y) \neq 0$, cela peut se réécrire

$$\frac{f(y)}{g(y)} = \left(1 - \frac{g(x)}{g(y)}\right) \frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} + \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $|g(y)| \rightarrow \infty$ lorsque $y \rightarrow b_-$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $y \in (a, b)$, on ait $(|y - b| < \eta_1 \implies g(y) \neq 0)$. De même, il existe $\eta_2 > 0$ tels que pour tous $x, y \in (a, b)$ tels que $x < y$, on ait $(|x - b| < \eta_2 \implies |\frac{f(x)}{g(y)}| < \varepsilon/2)$ et il existe $\eta_3 > 0$ tel que $(|x - b| < \eta_3 \implies |\frac{g(x)}{g(y)}| < 1)$. De plus, puisque $\lim_{x \rightarrow b_-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, il existe $\eta_4 > 0$ tel que $(|x - b| < \eta_4 \implies |\frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})}| < \varepsilon/4)$. Ainsi, pour tous $x, y \in (a, b)$ tels que $x < y$ et $|x - b| < \eta := \min\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$, on a

$$\left| \frac{f(y)}{g(y)} - \ell \right| \leq \left| 1 - \frac{g(x)}{g(y)} \right| \left| \frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} - \ell \right| + \left| \frac{f(x)}{g(y)} \right| < 2\varepsilon/4 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

d'où le résultat.

Supposons à présent que $\ell = \infty$. Soient $A, \varepsilon > 0$ et posons $\tilde{A} = (A + \varepsilon/2)/(1 - \varepsilon)$. Puisque $\lim_{x \rightarrow b_-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, il existe $\eta_5 > 0$ tel que pour tout $x, y \in (a, b)$, tels que $x < y$, on ait $(|x - b| < \eta_5 \implies \frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} > \tilde{A})$. De plus, il existe $\eta'_3 > 0$ tel que $(|x - b| < \eta'_3 \implies |\frac{g(x)}{g(y)}| < \varepsilon)$. Ainsi, pour tous $x, y \in (a, b)$ tels que $x < y$ et $|x - b| < \eta' := \min\{\eta_1, \eta_2, \eta'_3, \eta_5\}$ on ait

$$\frac{f(y)}{g(y)} = \left(1 - \frac{g(x)}{g(y)}\right) \frac{f'(c_{x,y})}{g'(c_{x,y})} + \frac{f(x)}{g(y)} > (1 - \varepsilon)\tilde{A} - \varepsilon/2 = A,$$

d'où le résultat. Le cas $\ell = -\infty$ se traite de la même manière. $\square$

Lemme D.6 Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et monotone. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\Phi(x) = \int_0^x \phi(t) dt.$$

S'il existe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\Phi(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x^\beta}{\beta},$$

alors on a

$$\phi(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x^{\beta-1}.$$

Preuve. Supposons, sans perte de généralité, que ϕ est croissante. Soit $\varepsilon \in (0, 1)$. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x > N$, on a

$$(1 - \varepsilon) \frac{x^\beta}{\beta} \leq \Phi(x) \leq (1 + \varepsilon) \frac{x^\beta}{\beta}.$$

Soient $x > N$ et $h \in (0, 1)$. Comme ϕ est croissante, on a

$$hx\phi(x) \leq \int_x^{x+hx} \phi(t)dt = \Phi(x+hx) - \Phi(x) \leq (1 + \varepsilon) \frac{x^\beta(1+h)^\beta}{\beta} - (1 - \varepsilon) \frac{x^\beta}{\beta}.$$

En divisant les termes de l'inégalité par $hx^\beta > 0$ et en réarrangeant les termes, on obtient

$$\frac{\phi(x)}{x^{\beta-1}} \leq (1 - \varepsilon) \frac{(1+h)^\beta - 1}{\beta h} + 2\varepsilon \frac{(1+h)^\beta}{\beta h}.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$(1+h)^\beta \leq 1 + \beta h + Mh^2,$$

où $M = \sup_{x \in [1, 2]} \frac{\beta(\beta-1)}{2} x^{\beta-2}$. On en déduit que

$$\frac{\phi(x)}{x^{\beta-1}} \leq (1 - \varepsilon) \left(1 + \frac{M}{\beta} h\right) + 2\varepsilon \left(1 + \frac{1}{\beta h} + \frac{M}{\alpha} h\right).$$

En prenant $h = \sqrt{\varepsilon}$, il vient

$$\frac{\phi(x)}{x^{\beta-1}} \leq 1 + \frac{M+2}{\beta} \sqrt{\varepsilon} + \varepsilon + \frac{M}{\beta} \varepsilon \sqrt{\varepsilon} = 1 + O(\sqrt{\varepsilon}).$$

On montre de la même manière que $\frac{\phi(x)}{x^{\beta-1}} \geq 1 + O(\sqrt{\varepsilon})$, d'où le résultat. $\square$

Théorème D.7 *Théorème d'arrêt.* [Doob J.L. (1994), Measure Theory, Springer-Verlag.]

Considérons un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$. Soient $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une $\mathbb{F}$ -martingale continue à droite, et σ, τ deux $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt avec τ borné. Alors X_τ est intégrable, et on a

$$\mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = X_{\tau \wedge \sigma}.$$

Théorème D.8 *Théorème de convergence monotone.* [Intégrale de Lebesgue, cours de J.-C. Breton Université de Rennes 1, 2016]

Considérons un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Pour tout $x \in X$, posons $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ la limite dans $[0, \infty]$. Alors, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Théorème D.9 *Théorème de convergence dominée.* [Intégrale de Lebesgue, cours de J.-C. Breton Université de Rennes 1, 2016]

Considérons un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs complexes telle que $f_n \rightarrow f$ presque partout lorsque $n \rightarrow \infty$. S'il existe une fonction mesurable positive g telle que

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ presque partout,
2. g est μ -intégrable,

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

ANNEXE E
CODE MATLAB DE L'ALGORITHME 1

```
global sigma2 mu r alpha a0 b0 m2 d0 d1 k K lambda rho F0 U0;

sigma2 = 1;
mu = 1;
r = 0.1;
alpha = 0.02;
a0 = 1 + alpha/(2*(r - alpha));
b0 = 1/2;
m2 = 2*(r - alpha)/sigma2;
d0 = 5;
d1 = 1;
k = 1;
K = 1;
lambda = k/(1 + d1);
rho = K + d0*lambda;
F0 = hypergeom(a0,b0,m(0));
U0 = kummerU(a0,b0,m(0));

max_iter = 20;
epsilon = 10^(-6);

% 1. Trouver x_tilde tel que G''(x_tilde) = 0.

x_old = 1/2;
x_new = x_old - G2(x_old)/G3(x_old);
compteur1 = 1;
while abs(G2(x_old)) > epsilon & compteur1 <= max_iter
    x_old = x_new;
    x_new = x_old - G2(x_old)/G3(x_old);
```

```

    compteur1 = compteur1 + 1;
end
x_tilde = x_new;
G2(x_tilde)

x_i = x_tilde/2;
cible = 2;
delta = 10(-1);

while abs(cible) > epsilon
    compteur2 = 0;
    x_i_old = x_i;
    repass = 0;
    while abs(cible) > delta*10 & compteur2 <= max_iter & repass < 2
        % 2. Choisir  $x_i < x_{\text{tilde}}$  et poser  $c_i = \lambda/G'(x_i)$ .
        x_i = x_i + cible/abs(cible)*delta;
        if x_i == x_i_old
            repass = repass + 1;
        end
        c_i = lambda/G1(x_i);

        % 3. Trouver  $y_i > x_{\text{tilde}}$  tel que  $G'(y_i) = \lambda/c_i$ .

        y_old = x_tilde + 2;
        y_new = y_old - (G1(y_old) - lambda/c_i)/G2(y_old);
        compteur3 = 1;
        while abs(G1(y_new) - lambda/c_i) > epsilon & compteur3 <= max_iter
            y_old = y_new;
            y_new = y_old - (G1(y_old) - lambda/c_i)/G2(y_old);
            compteur3 = compteur3 + 1;
        end
        y_i = y_new;
    end
end

```

```

        % 4. Calculer cible.
        cible = lambda*(y_i - x_i) - c_i*(G(y_i) - G(x_i)) - rho;
        compteur2 = compteur2 + 1;
    end
    if compteur2 < max_iter
        delta = delta/10;
    end
end

x_i
y_i
c_i

%fonctions

function y = F(a,b,x)
    y = hypergeom(a,b,x);
end

function y = U(a,b,x)
    y = kummerU(a,b,x);
end

function y = m(x)
    global r alpha sigma2 mu;
    y = (r - alpha)/sigma2*(x + mu/(r - alpha))^2;
end

function y = G(x)
    global a0 b0 F0 U0;
    y = exp(-m(x))*(U0*F(a0,b0,m(x)) - F0*U(a0,b0,m(x)));

```

```
end
```

```
function y = m1(x)
    global r alpha sigma2 mu;
    y = 2*(r - alpha)/sigma2*(x + mu/(r - alpha));
end
```

```
function y = F1(x)
    global a0 b0;
    y = m1(x)*a0/b0*F(a0 + 1,b0 + 1,m(x));
end
```

```
function y = U1(x)
    global a0 b0;
    y = -m1(x)*a0*U(a0 + 1,b0 + 1,m(x));
end
```

```
function y = F2(x)
    global a0 b0 m2;
    y = m2*a0/b0*F(a0 + 1,b0 + 1,m(x))...
        + m1(x)^2*a0*(a0 + 1)/(b0*(b0 + 1))*F(a0 + 2,b0 + 2,m(x));
end
```

```
function y = U2(x)
    global a0 b0 m2;
    y = -m2*a0*U(a0 + 1,b0 + 1,m(x))...
        + m1(x)^2*a0*(a0 + 1)*U(a0 + 2,b0 + 2,m(x));
end
```

```
function y = F3(x)
    global a0 b0 m2;
    y = 3*m1(x)*m2*a0*(a0 + 1)/(b0*(b0 + 1))*F(a0 + 2,b0 + 2,m(x))...
```

```

        + m1(x)^3*a0*(a0 + 1)*(a0 + 2)...
        /(b0*(b0 + 1)*(b0 + 2))*F(a0 + 3,b0 + 3,m(x));
end

function y = U3(x)
    global a0 b0 m2;
    y = 3*m1(x)*m2*a0*(a0 + 1)*U(a0 + 2,b0 + 2,m(x))...
        -m1(x)^3*a0*(a0 + 1)*(a0 + 2)*U(a0 + 3,b0 + 3,m(x));
end

function y = G1(x)
    global F0 U0;
    y = -m1(x)*G(x)...
        + exp(-m(x))*(U0*F1(x) - F0*U1(x));
end

function y = G2(x)
    global m2 F0 U0;
    y = -m2*G(x) - m1(x)*G1(x) -m1(x)*exp(-m(x))...
        *(U0*F1(x) - F0*U1(x))...
        + exp(-m(x))*(U0*F2(x) - F0*U2(x));
end

function y = G3(x)
    global m2 F0 U0;
    y = -2*m2*G1(x) - m1(x)*G2(x) -(m2 - m1(x)^2)*exp(-m(x))...
        *(U0*F1(x) - F0*U1(x))...
        - 2*m1(x)*exp(-m(x))*(U0*F2(x) - F0*U2(x))...
        + exp(-m(x))*(U0*F3(x) - F0*U3(x));
end

```

ANNEXE F
CODE MATLAB DE L'ALGORITHME 2

```
global mu sigma2 d0 d1 r alpha k K U0 F0 a0 b0;

mu = 1;
sigma2 = 1;
d0 = 0;
d1 = 0.1;
r = 0.1;
alpha = 0.02;
k = 1;
K = 1;
a0 = 1 + alpha/(2*(r - alpha));
b0 = 1/2;
F0 = hypergeom(a0,b0,m(0));
U0 = kummerU(a0,b0,m(0));

niv = 17.47
div = 14.01
c = 15.62;
divmax = (niv - d0)/(1 + d1)
gdiv = g(div);
seuil = niv - f(div);

% trajectoires du proc. contrôlé

x = 10; %capital initial
T = 15000;
beta = -(r - alpha);
n = 10^6;
N_traj = 200;
```

```

Traj = zeros(N_traj,n);
Tau = zeros(N_traj,n);
for i = 1:N_traj
    for j = 1:n
        Tau(i,j) = -1;
    end
end

for i = 1:N_traj
    Traj(i,1) = x;
    for j = 2:n
        Z = normrnd(0,1);
        if Traj(i,j - 1) <= 0
            Traj(i,j) = 0;
        else
            temp = Traj(i,j - 1)*exp(-beta*T/n)...
                + mu/beta*(1 - exp(-beta*T/n))...
                + (sigma2/(2*beta)*(1 - exp(-2*beta*T/n)))^(1/2)*Z;
            if Traj(i,j - 1) < niv
                Traj(i,j) = temp;
            else
                Traj(i,j) = seuil;
                Tau(i,j) = T/n*(j - 1); % instant de versement
            end
        end
    end
end

end

% traçage des trajectoires

x_vec = linspace(0,T,n);
hold on

```



```

for i = 1:N_traj
    plot(x_vec,Traj(i,:))
end
hold off
yline(0,"k")
yl1 = yline(niv,"k"," $x^*$ ",interpreter="latex")
yl2 = yline(niv - f(div),"k"," $\widehat{x}$ ",interpreter="latex")
yl1.LabelVerticalAlignment = "middle";
yl2.LabelVerticalAlignment = "middle";

% estimation MC de la performance de la stratégie

J = 0;
for i = 1:N_traj
    for j = 1:n
        if Tau(i,j) >= 0
            J = J + gdiv*exp(-r*Tau(i,j));
        end
    end
end
J = J/N_traj
V = c*G(x)

%fonctions

function y = f(x)
    global d0 d1;
    y = d0 + (1 + d1)*x;
end

function y = g(x)
    global k K;

```

```

    y = -K + k*x;
end

```

```

function y = F(a,b,x)
    y = hypergeom(a,b,x);
end

```

```

function y = U(a,b,x)
    y = kummerU(a,b,x);
end

```

```

function y = m(x)
    global r alpha sigma2 mu;
    y = (r - alpha)/sigma2*(x + mu/(r - alpha))^2;
end

```

```

function y = G(x)
    global a0 b0 F0 U0;
    y = exp(-m(x))*(U0*F(a0,b0,m(x)) - F0*U(a0,b0,m(x)));
end

```

ANNEXE G
CODE MATLAB DE L'ALGORITHME 3

```
global mu r alpha sigma a0 b0 c0 gamma k K lambda rho d0 d1;

mu = 0.1;
r = 0.1;
alpha = 0.2;
sigma = 0.25;
a0 = -2*sigma^(-2)*(r - alpha);
b0 = -mu/(r - alpha);
c0 = -r/(r - alpha);
gamma = 1;
k = 0.8;
K = 0.005;
d0 = 0.01;
d1 = 0.1;
lambda = k/(1 + d1);
rho = K + d0*lambda;

xold = zeros(4,1);
xold(1,1) = 1;
xold(2,1) = 1;
xold(3,1) = 0.4;
xold(4,1) = 0.7;

epsilon = 10^(-15);

xnew = J(xold)\(-H(xold)) + xold;
diff = (xnew - xold)'*(xnew - xold);

while diff > epsilon
```

```

    xold = xnew;
    xnew = J(xold)\(-H(xold)) + xold;
    diff = (xnew - xold)'*(xnew - xold);
end

H(xnew)

A = xnew(1,1)
B = xnew(2,1)
x_chapeau = xnew(3,1)
x_etoile = xnew(4,1)
div = (x_etoile - x_chapeau - d0)/(1 + d1)

n = 1000;
x_vec = linspace(0,3,n);
L_vec = zeros(1,n);
V_vec = zeros(1,n);
for i = 1:n
    L_vec(1,i) = L(A,B,x_chapeau,x_etoile,x_vec(i));
    V_vec(1,i) = V(A,B,x_chapeau,x_etoile,x_vec(i));
end

hold on
plot(x_vec,V_vec)
plot(x_vec,L_vec)
xline(x_etoile,":k"," $x^*$ ",interpreter="latex")
yline(0,":k")
legend("$V$", "$\mathcal{L}V$",interpreter="latex")
hold off

n = 1000;

```

```

x1 = rho/lambda + x_chapeau/5;
x2 = rho/lambda + 2*x_chapeau/5;
x3 = rho/lambda + 3*x_chapeau/5;
x4 = rho/lambda + x_chapeau + 0.1;
x5 = rho/lambda + x_chapeau + 0.2;
x6 = rho/lambda + x_chapeau + 0.3;
x_vec_1 = linspace(0,x1 - rho/lambda,n);
x_vec_2 = linspace(0,x2 - rho/lambda,n);
x_vec_3 = linspace(0,x3 - rho/lambda,n);
x_vec_4 = linspace(0,x4 - rho/lambda,n);
x_vec_5 = linspace(0,x5 - rho/lambda,n);
x_vec_6 = linspace(0,x6 - rho/lambda,n);
x_vec_7 = linspace(rho/lambda + x_chapeau,x_etoile,n);
Phi1_vec_1 = zeros(1,n);
Phi1_vec_2 = zeros(1,n);
Phi1_vec_3 = zeros(1,n);
Phi2_vec_1 = zeros(1,n);
Phi2_vec_2 = zeros(1,n);
Phi2_vec_3 = zeros(1,n);
Psi_vec = zeros(1,n);

for i = 1:n
    Phi1_vec_1(1,i) = Phi(A,B,x_chapeau,x_etoile,x1,x_vec_1(i));
    Phi1_vec_2(1,i) = Phi(A,B,x_chapeau,x_etoile,x2,x_vec_2(i));
    Phi1_vec_3(1,i) = Phi(A,B,x_chapeau,x_etoile,x3,x_vec_3(i));
    Phi2_vec_1(1,i) = Phi(A,B,x_chapeau,x_etoile,x4,x_vec_4(i));
    Phi2_vec_2(1,i) = Phi(A,B,x_chapeau,x_etoile,x5,x_vec_5(i));
    Phi2_vec_3(1,i) = Phi(A,B,x_chapeau,x_etoile,x6,x_vec_6(i));
    Psi_vec(1,i) = Psi(A,B,x_chapeau,x_etoile,x_vec_7(i));
end

%{

```

```

hold on

plot(x_vec_1,Phi1_vec_1)
plot(x_vec_2,Phi1_vec_2)
plot(x_vec_3,Phi1_vec_3)

xline(rho/lambda,":k", "$\rho/\lambda$", interpreter="latex")
xline(x1 - rho/lambda,":k", "$x_1 - \rho/\lambda$", interpreter="latex")
xline(x2 - rho/lambda,":k", "$x_2 - \rho/\lambda$", interpreter="latex")
xline(x3 - rho/lambda,":k", "$x_3 - \rho/\lambda$", interpreter="latex")

legend("$\Phi_{x_1}^1$", "$\Phi_{x_2}^1$", "$\Phi_{x_3}^1$", interpreter="latex")

hold off

%}

%{

hold on

plot(x_vec_4,Phi2_vec_1)
plot(x_vec_5,Phi2_vec_2)
plot(x_vec_6,Phi2_vec_3)

xline(x4 - rho/lambda,":k", "$x_4 - \rho/\lambda$", interpreter="latex")
xline(x5 - rho/lambda,":k", "$x_5 - \rho/\lambda$", interpreter="latex")
xline(x6 - rho/lambda,":k", "$x_6 - \rho/\lambda$", interpreter="latex")
xline(x_chapeau,":k", "$\widehat{x}$", interpreter="latex")

legend("$\Phi_{x_4}^2$", "$\Phi_{x_5}^2$", "$\Phi_{x_6}^2$", interpreter="latex")

hold off

%}

%{

plot(x_vec_7,Psi_vec)

xline(x_chapeau + rho/lambda,":k", "$\widehat{x}+\rho/\lambda$", interpreter="latex")
xline(x_etoile,":k", "$x^*$", interpreter="latex")

xlim([0.4,0.5])

legend("$\Psi$", interpreter="latex")

%}

% fonctions

```

```

function y = a(n)
    global a0 c0;
    if n == 0
        y = 1;
    else
        P = 1;
        for i = 0:(n - 1)
            P = P*a0*(2*i + c0)/((2*i + 2)*(2*i + 1));
        end
        y = P;
    end
end

```

```

function y = b(n)
    global a0 c0;
    if n == 0
        y = 1;
    else
        P = 1;
        for i = 0:(n - 1)
            P = P*a0*(2*i + 1 + c0)/((2*i + 3)*(2*i + 2));
        end
        y = P;
    end
end

```

```

function y = sA(x)
    global b0;
    S0 = 0;
    for n = 0:100
        S0 = S0 + a(n)*(x - b0)^(2*n);
    end

```

```

    y = S0;
end

```

```

function y = sB(x)
    global b0;
    S0 = 0;
    for n = 0:100
        S0 = S0 + b(n)*(x - b0)^(2*n + 1);
    end
    y = S0;
end

```

```

function y = S(A,B,x)
    y = A*sA(x) + B*sB(x);
end

```

```

function y = sA1(x)
    global b0;
    S0 = 0;
    for n = 0:100
        S0 = S0 + 2*(n + 1)*a(n + 1)*(x - b0)^(2*n + 1);
    end
    y = S0;
end

```

```

function y = sA2(x)
    global b0;
    S0 = 0;
    for n = 0:100
        S0 = S0 + 2*(n + 1)*(2*n + 1)...
            *a(n + 1)*(x - b0)^(2*n);
    end

```



```

        y = S0;
end

function y = sB1(x)
    global b0;
    S0 = 0;
    for n = 0:100
        S0 = S0 + (2*n + 1)*b(n)*(x - b0)^(2*n);
    end
    y = S0;
end

function y = sB2(x)
    global b0;
    S0 = 0;
    for n = 0:100
        S0 = S0 + (2*n + 3)*(2*n + 2)...
            *b(n + 1)*(x - b0)^(2*n + 1);
    end
    y = S0;
end

function y = S1(A,B,x)
    y = A*sA1(x) + B*sB1(x);
end

function y = S2(A,B,x)
    y = A*sA2(x) + B*sB2(x);
end

function y = h(x)
    global gamma lambda rho;

```

```

    y = (lambda*x - rho)^gamma/gamma;
end

```

```

function y = h1(x)
    global gamma lambda rho;
    y = lambda*(lambda*x - rho)^(gamma - 1);
end

```

```

function y = h2(x)
    global gamma lambda rho;
    if gamma ~= 1
        y = (gamma - 1)*lambda^2*(lambda*x - rho)^(gamma - 2);
    else
        y = 0;
    end
end

```

```

function out = H(x)
    temp = zeros(4,1);
    A = x(1,1);
    B = x(2,1);
    temp(1,1) = S(A,B,0);
    temp(2,1) = S(A,B,x(4,1)) - S(A,B,x(3,1)) - h(x(4,1) - x(3,1));
    temp(3,1) = S1(A,B,x(4,1)) - h1(x(4,1) - x(3,1));
    temp(4,1) = S1(A,B,x(3,1)) - h1(x(4,1) - x(3,1));
    out = temp;
end

```

```

function out = J(x)
    M = zeros(4,4);
    A = x(1,1);
    B = x(2,1);

```

```

M(1,1) = sA(0);
M(1,2) = sB(0);
M(1,3) = 0;
M(1,4) = 0;
M(2,1) = sA(x(4,1)) - sA(x(3,1));
M(2,2) = sB(x(4,1)) - sB(x(3,1));
M(2,3) = -S1(A,B,x(3,1)) + h1(x(4,1) - x(3,1));
M(2,4) = S1(A,B,x(4,1)) - h1(x(4,1) - x(3,1));
M(3,1) = sA1(x(4,1));
M(3,2) = sB1(x(4,1));
M(3,3) = h2(x(4,1) - x(3,1));
M(3,4) = S2(A,B,x(4,1)) - h2(x(4,1) - x(3,1));
M(4,1) = sA1(x(3,1));
M(4,2) = sB1(x(3,1));
M(4,3) = S2(A,B,x(3,1)) + h2(x(4,1) - x(3,1));
M(4,4) = - h2(x(4,1) - x(3,1));
out = M;
end

```

```

function y = Lsup(A,B,x_chapeau,x)
    global r sigma mu alpha;
    y = -r*(S(A,B,x_chapeau) + h(x - x_chapeau))...
        + (mu + (r - alpha)*x)*h1(x - x_chapeau)...
        + sigma^2/2*h2(x - x_chapeau);
end

```

```

function y = Linf(A,B,x)
    global r sigma mu alpha;
    y = -r*S(A,B,x)...
        + (mu + (r - alpha)*x)*S1(A,B,x)...
        + sigma^2/2*S2(A,B,x);
end

```

```
function y = L(A,B,x_chapeau,x_etoile,x)
```

```
    if x <= x_etoile
```

```
        y = Linf(A,B,x);
```

```
    else
```

```
        y = Lsup(A,B,x_chapeau,x);
```

```
    end
```

```
end
```

```
function y = V(A,B,x_chapeau,x_etoile,x)
```

```
    if x <= x_etoile
```

```
        y = S(A,B,x);
```

```
    else
```

```
        y = S(A,B,x_chapeau) + h(x - x_chapeau);
```

```
    end
```

```
end
```

```
function y = Phi(A,B,x_chapeau,x_etoile,x,y)
```

```
    y = V(A,B,x_chapeau,x_etoile,y) + h(x - y);
```

```
end
```

```
function y = Psi(A,B,x_chapeau,x_etoile,x)
```

```
    y = V(A,B,x_chapeau,x_etoile,x) - h(x - x_chapeau);
```

```
end
```

BIBLIOGRAPHIE

- Albrecher, H. et Thonhauser, S. (2009). Optimality results for dividend problems in insurance. *Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat.*, 103(2), 295–320.
- Avanzi, B. (2009). Strategies for dividend distribution : A review. *North American Actuarial Journal*, 13 :2, 217–251.
- Cadenillas, A., Sarkar, S. et Zapatero, F. (2007). Optimal dividend policy with mean-reverting cash reservoir. *Math. Finance*, 17, 81–109.
- Jeanblanc-Picqué, M. et Shiryaev, A. N. (1995). Optimization of the flow of dividends. *Russ. Math. Surv.*, 50(257).
- Paulsen, J. (2007). Optimal dividend payments until ruin of diffusion processes when payments are subject to both fixed and proportional costs. *Adv. Appl. Prob.*, 39, 669–689.
- Ross, K. (2008). *Stochastic Control in Continuous Time*. Department of statistics, Stanford University, Stanford, CA 94305.
- Shreve, S. E., Lehoczky, J. P. et Gaver, D. P. (1984). Optimal consumption for general diffusions with absorbing and reflecting barriers. *SIAM J. Control Optimization*, 22, 55–75.
- Slater, L. J. (1960). *Confluent Hypergeometric Functions*. Cambridge University Press.
- Tricomi, F. (1960). Fonctions hypergéométriques confluentes. *Mémorial des sciences mathématiques*, 140.