

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

DÉMONSTRATION D'UNE BORNE SUPÉRIEURE DU NOMBRE
D'ITÉRATIONS DE L'ALGORITHME DE WEISFEILER-LEHMAN DE
DIMENSION 2

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
VINCENT LABERGE

MARS 2022

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.04-2020). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de mémoire M. Roger Villemaire pour ses retours constants et constructifs qui m'ont permis de développer ma compréhension de la matière ainsi que ma capacité à organiser mes idées et à rédiger proprement.

Je remercie également mon père Christian Laberge, ma mère Pascale Sauvé, mes frères Gabriel et Sébastien, ainsi que mes amis Maxime Gaboriault-Bédard, Antoine Beaudet, Clara Lu, Félix Gagné, Élisabeth Meunier, Charles Bélair...

Rédiger un mémoire en pleine pandémie n'est pas une tâche facile. Merci à tous pour votre soutien moral.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX	v
LISTE DES FIGURES	vi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I LE PROBLÈME DE L'ISOMORPHISME DES GRAPHES	5
1.1 Description	5
1.2 Complexité	7
1.3 Applications	9
CHAPITRE II L'ALGORITHME DE WEISFEILER-LEHMAN	11
2.1 Quelques préalables	11
2.2 Approche intuitive	12
2.3 Formalisation du cas de dimension 1	15
2.4 Formalisation du cas de dimension k	21
2.5 Fiabilité	23
2.6 Complexité	24
2.7 Applications	26
CHAPITRE III L'ALGORITHME DE WEISFEILER-LEHMAN DE DI- MENSION 2 TEL QUE FORMALISÉ PAR KIEFER ET SCHWEITZER .	28
3.1 Graphes colorés	28
3.2 La conversion en graphe coloré	32
3.3 Propriétés conservées par la conversion	33
3.4 Raffinement bidimensionnel de Weisfeiler-Lehman	35
3.5 Description et justification de l'algorithme	37
3.6 Propriétés invariantes par le raffinement	39
3.7 Un résultat utile	40

CHAPITRE IV DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS SUR LES GRAPHES COLORÉS	43
4.1 Classes et multiclasses de couleur	43
4.2 Incidence et voisinages	45
4.3 Les relations \geq et \geq_E	46
4.4 Raffinements atomiques et composés	52
CHAPITRE V LE JEU DE KIEFER-SCHWEITZER	58
5.1 Formalisation	60
5.2 Propriétés	61
CHAPITRE VI CONDITIONS SUR LES GRAPHES DURANT LE JEU	67
6.1 Faire respecter la condition C1	67
6.2 Faire respecter la condition C2	71
6.3 Faire respecter les deux conditions	75
6.4 Propriétés induites par C1 et C2	80
CHAPITRE VII LA CLASSIFICATION DES CLASSES DE COULEUR DE SOMMETS PAR TAILLE	87
7.1 Fonction potentielle	87
7.2 Classes de couleur grandes et petites	89
CHAPITRE VIII LES GRAPHES AUXILIAIRES	93
8.1 Définition et résultats élémentaires	93
8.2 La clôture triangulaire	97
8.3 Résultats utiles	101
CHAPITRE IX DÉMONSTRATION DU THÉORÈME PRINCIPAL . .	115
CONCLUSION	122
RÉFÉRENCES	127

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
1.1 Isomorphisme f entre les graphes G_1 et G_2	7
2.1 Colorations χ et χ' sur les sommets du graphe H_1	16
2.2 Itérations de WL pour les graphes H_1 et H_2	18
2.3 Itérations de WL pour les graphes Hex et Tri	20
3.1 Graphes colorés G , G' et H	31

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Graphe G	6
1.2 Graphe G_1	6
2.1 Graphe G	13
2.2 Graphe G'	13
2.3 Graphe H_1	14
2.4 Graphe H_2	14
2.5 Graphe Hex	20
2.6 Graphe Tri	20
2.7 Coloration χ^0	25
2.8 Coloration χ^1	25
2.9 Coloration χ^2	25
3.1 Illustration du raffinement $G \succeq G'$	30
3.2 Illustration de l'équivalence $G \equiv G'$	30
4.1 Illustration du raffinement $G \succeq_E G'$ et de la fonction s	50
4.2 Illustration du raffinement $G >_E G'$ et de la fonction s	51
5.1 La situation (\dagger)	65
8.1 Deux composantes connexes du graphe H^j	103
8.2 Composante connexe du graphe H^{j+1}	104
8.3 Composante connexe du graphe H^{j+2}	104
8.4 Composante connexe du graphe H^{j+3}	105

8.5	Composante connexe du graphe H^{j+1}	105
8.6	Composante connexe du graphe H^{j+2}	106
8.7	Composante connexe du graphe H^{j+1}	106
8.8	Composante connexe du graphe H^{j+2}	107
8.9	Composante connexe du graphe H^{j+3}	107
8.10	Composante connexe du graphe H^{j+4}	107

RÉSUMÉ

L'algorithme de Weisfeiler-Lehman prend pour entrée une paire de graphes ayant le même nombre de sommets et soit permet de déterminer que ces derniers ne sont pas isomorphes, soit ne peut rien conclure. Le but de ce mémoire est d'éclaircir le résultat original de Kiefer et Schweitzer donnant une borne supérieure pour la complexité algorithmique de la version bidimensionnelle de cet algorithme. En plus de présenter la preuve en détails, des concepts et des étapes intermédiaires sont ajoutés pour rendre le raisonnement plus explicite. Le mémoire présente donc tout d'abord les notions de graphes colorés et de raffinements sur ces derniers. L'algorithme bidimensionnel de Weisfeiler-Lehman est alors reformulé comme étant une succession de raffinements sur des graphes colorés. Borner la complexité temporelle de l'algorithme revient alors à borner le nombre de raffinements effectués jusqu'à ce que ces derniers se stabilisent. Pour cela, les auteurs conçoivent un jeu où deux joueurs raffinent tour à tour un graphe coloré. À une partie de ce jeu est alors associé un coût. Puis, l'objectif du premier joueur est le maximiser et du deuxième joueur de le minimiser. Il est alors démontré que le nombre de raffinements qu'il est possible d'effectuer lors de l'exécution de l'algorithme bidimensionnel de Weisfeiler-Lehman est borné supérieurement par le coût associé à une partie où les deux joueurs jouent optimalement. Ce nombre est ensuite borné par l'usage d'arguments combinatoires utilisant les concepts de grandes et petites classes de couleurs et de graphes auxiliaires. Des conséquences de ce résultat en logique sont ensuite traitées.

Mots-clés de l'auteur : isomorphismes de graphes, algorithme de Weisfeiler-Lehman, graphe coloré, raffinement de graphe coloré, jeu de Kiefer-Schweitzer, grandes et petites classes de couleurs, graphe auxiliaire

INTRODUCTION

En algorithmique ou en informatique théorique, connaître la complexité temporelle du problème de l’isomorphisme de graphes, c.-à-d. déterminer le nombre d’étapes de calcul nécessaire pour savoir si deux graphes donnés sont isomorphes ou pas en fonction de leur taille, est l’une des grandes questions non résolues.

Notamment, encore à ce jour, nous n’avons ni établi un algorithme qui résout ce problème en temps polynomial, ni démontré qu’il s’agit d’un problème NP-complet¹.

Vis-à-vis ce problème, l’algorithme de Weisfeiler-Lehman, notons-le *WL*, est un test de complexité polynomiale pour déterminer si deux graphes donnés avec le même nombre de sommets sont isomorphes (Pikhurko et Verbitsky, 2011). Toutefois, ce dernier est faillible, dans le sens où il peut soit détecter que deux graphes donnés ne sont pas isomorphes, soit être incapable de conclure. L’algorithme WL se décline en une infinité dénombrable de versions, soit celle de dimension 1, celle de dimension 2, etc. L’algorithme WL de dimension k fonctionne essentiellement en associant une coloration à l’union des deux graphes d’entrée, soit une fonction attribuant une couleur à chaque k -uplet de sommets d’un graphe et à chaque k -uplet de sommets de l’autre, et en itérant une règle qui raffine la coloration jusqu’à ce que cette dernière se stabilise.

1. Un problème est NP-complet si tout problème résoluble en temps polynomial par un algorithme non déterministe peut s’y ramener par réduction polynomiale (Garey et Johnson, 1990).

Il est pertinent de noter que, pour des naturels k et l tels que $k < l$, l'algorithme WL de dimension l est au moins aussi fiable que l'algorithme WL de dimension k dans le sens où, pour deux graphes donnés, si l'algorithme WL de dimension k peut établir que ces derniers ne sont pas isomorphes, alors il en est de même pour celui de dimension l . Toutefois, une dimension plus élevée pour l'algorithme implique une complexité de calcul plus élevée également. Plus précisément, on peut montrer que l'algorithme WL de dimension k a une complexité de calcul de $O(n^k)$ ² où n est le nombre de sommets des graphes données³.

Ce mémoire a pour objectif de présenter et d'éclaircir le résultat de Sandra Kiefer et Pascal Schweitzer (2016). Ceux-ci démontrent que WL de dimension 2 a une complexité de calcul de $O(n^2/\log(n))$, ce qui constitue une amélioration de la borne $O(n^2)$, qui était la meilleure connue jusque là.

Puisque la démonstration de l'article de Kiefer et Schweitzer est très ardue à suivre, notamment à cause de la densité de son écriture, l'objectif de ce mémoire est d'expliquer les étapes de cette démonstration et de mettre en valeur les techniques et les mécanismes utilisés ainsi que les concepts introduits, tout en présentant les notions de base nécessaires.

Ce mémoire est structuré de la façon suivante. Le chapitre 1 introduit le problème de l'isomorphisme des graphes, incluant ses répercussions en théorie de la complexité algorithmique. Au chapitre 2, on présente l'algorithme de Weisfeiler-Lehman, ses propriétés et ses applications.

2. La notation O est définie dans (Cormen *et al.*, 2009) comme étant

$O(g(n)) := \{f(n) \mid \text{il existe } c, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tels que } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ pour tout } n \geq n_0\}$.

3. Cela est démontré au début de la section 2.6.

La notion de graphe coloré joue un rôle central dans la preuve de Kiefer et Schweitzer. Comme on le verra, un graphe coloré est un graphe orienté, fini et complet où une couleur est associée à chacune de ses arêtes. Au chapitre 3, on présente donc une formalisation de l'algorithme de Weisfeiler-Lehman de dimension 2 utilisant le concept de graphe coloré et un certain type de raffinement de ces derniers. Au chapitre 4, on présente des concepts reliés aux graphes colorés et on démontre des propriétés élémentaires de ces derniers.

Dans leur article, Kiefer et Schweitzer introduisent un jeu où deux joueurs raffinent à leurs tours un graphe coloré, qui est l'une des idées fondamentales de leur démonstration. Ce jeu est introduit au chapitre 5 et quelques résultats élémentaires sur ce dernier sont démontrés.

Les chapitres 6, 7 et 8 introduisent des concepts reliés aux graphes colorés, puis présentent des résultats sur leur sujet qui sont utilisés dans la démonstration principale de l'article.

Le chapitre 6 présente des conditions qui sont respectées par le graphe initial du jeu et qui sont préservées par les raffinements qui se produisent lors de ce dernier.

Le chapitre 7 présente les notions de petites et de grandes classes de couleur. Par définition, toutes les arêtes d'un graphe coloré ayant une même couleur forment une classe de couleur de ce dernier. Puis, toujours par définition, une classe de couleur est grande ou petite si sa cardinalité est plus grande ou plus petite qu'un certain seuil qui *est* fixé dans la démonstration.

Le chapitre 8 présente la notion de graphe auxiliaire, soit un graphe fini non orienté construit à partir d'un graphe coloré. Un résultat sur ce dernier qui s'avère utile pour la démonstration principale de l'article est que, si un premier graphe coloré est un raffinement d'un deuxième, alors le graphe auxiliaire construit à partir du

deuxième est inclus dans le graphe auxiliaire construit à partir du premier.

Toutes les étapes fondamentales étant établies, la démonstration du théorème principal est finalement présentée au chapitre 9.

La conclusion traite des répercussions de la borne établie par Kiefer et Schweitzer en logique, tout particulièrement sur les structures finies, des apports de ce mémoire sur l'article source et des avenues futures qui pourraient être envisagées.

CHAPITRE I

LE PROBLÈME DE L'ISOMORPHISME DES GRAPHES

Ce chapitre a pour but d'introduire le problème de l'isomorphisme des graphes, en plus d'aborder la question de sa complexité algorithmique ainsi que ses divers applications.

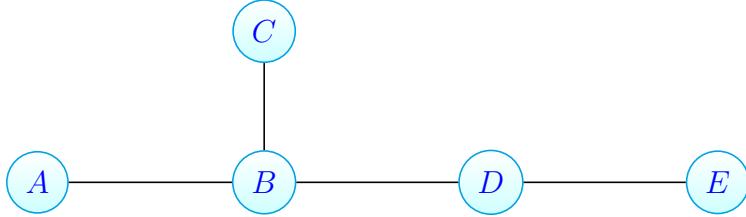
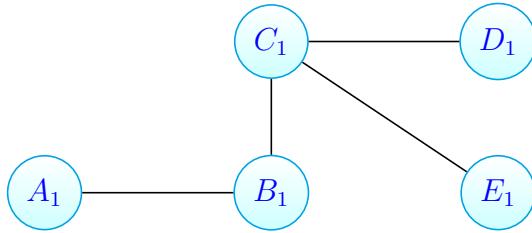
1.1 Description

Avant d'introduire le problème de l'isomorphisme des graphes, il convient tout d'abord de définir ce qu'est un graphe, plus spécifiquement ce qu'est un graphe simple fini.

Définition 1.1.1. Un *graphe simple fini* est un couple (V, E) où V est un ensemble fini et $E \subseteq V^2$ est une relation irréflexive, c.-à-d. qui ne contient aucun élément de la forme (a, a) , et symétrique, c.-à-d. $(a, b) \in E$ si et seulement si $(b, a) \in E$.

L'ensemble V représente les *sommets* du graphe (V, E) et lorsqu'un couple $(a, b) \in E$, on dit que les deux sommets a et b sont reliés par une *arête*.

Pour un graphe donné, le *degré* d'un de ses sommets consiste au nombre d'autres sommets du graphe auxquels ce dernier est relié. Plus précisément, pour une arête $v \in V$,

FIGURE 1.1 Graphe G FIGURE 1.2 Graphe G_1

$$\deg(v) := |\{u \in V \mid (v, u) \in E\}|.$$

Définition 1.1.2. Soit $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$, deux graphes. On dit que G est un *sous-graphe* de G' , et on écrit $G \subseteq G'$, si $V \subseteq V'$ et $E \subseteq E'$.

Définition 1.1.3. Soit deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$. Un *isomorphisme de graphes* entre G et G' est une fonction bijective $f : V \rightarrow V'$ telle que pour tout $(u, v) \in V^2, (u, v) \in E$ si et seulement si $(f(u), f(v)) \in E'$.

Deux graphes G et H sont dit *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de graphes entre les deux. On écrit alors $G \simeq H$.

Par exemple, les deux graphes des figures 1.1 et 1.2 sont isomorphes.

La bijection $f : G \rightarrow G_1$, définie par le tableau 1.1, est d'ailleurs un isomorphisme entre ces deux graphes.

Par exemple, on peut vérifier que B et C sont reliés par une arête dans G et il en

u	$f(u)$
A	D_1
B	C_1
C	E_1
D	B_1
E	A_1

TABLEAU 1.1 Isomorphisme f entre les graphes G_1 et G_2

est de même pour $f(B) = C_1$ et $f(C) = E_1$ dans G_1 .

Le *problème de l'isomorphisme des graphes*, ou *IG*, consiste alors à déterminer un algorithme efficace pour vérifier si deux graphes donnés sont isomorphes.

Comme un isomorphisme de graphes est forcément une bijection, on en déduit que deux graphes ne sont pas isomorphes s'ils n'ont pas le même nombre de sommets. Donc, pour le reste de ce mémoire, on suppose qu'on teste l'isomorphisme entre deux graphes ayant le même nombre de sommets n .

1.2 Complexité

Soit deux graphes simples finis $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ tels que $|V| = |V'|$. Il existe alors $n!$ bijections entre leurs sommets, où $n = |V|$. Déterminer si l'une d'entre elles est un isomorphisme demande alors de vérifier pour chacune des n^2 paires de sommets (u, v) de $|V|$ que $(u, v) \in E$ si et seulement si $(f(u), f(v)) \in E'$. La résolution de *IG* par énumération exhaustive a alors une complexité de calcul de $O(n^2n!)$.

Nous allons maintenant présenter quelques rudiments de la théorie de la complexité algorithmique nécessaires pour justifier l'importance du problème de l'iso-

morphisme des graphes. Pour des définitions complètes et formelles, on peut consulter un texte standard sur le sujet, par exemple (Papadimitriou, 1994).

Un algorithme est dit *non déterministe* s'il permet à au moins une étape un choix entre plusieurs opérations. Il y a donc alors plusieurs exécutions possibles, pour la même entrée. La classe de complexité NP consiste alors en l'ensemble des problèmes tels qu'il existe, pour chaque entrée, au moins une exécution qui prend un temps polynomial, en fonction de la taille de l'entrée. Pour IG, un algorithme non déterministe peut donc générer une fonction $f : V \rightarrow V'$ en temps $O(n)$, puis vérifier en temps $O(n^2)$ qu'il s'agit d'un isomorphisme de graphes. IG est donc dans la classe NP.

On ne sait toujours pas si IG est dans P (classe de problèmes résolubles en temps polynomial) ou s'il est NP-complet. Notons que montrer que ce problème n'est pas dans P aurait pour conséquence que $P \neq NP$. Déterminer alors précisément sa classe de complexité est un problème mentionné par Karp, dans son célèbre article où il démontre que le problème SAT est NP-complet (1972). Cette question est aussi mentionnée par Garey et Johnson (1900b). IG est d'ailleurs l'une des grandes questions ouvertes en théorie de la complexité algorithmique.

Il reste que pour les graphes planaires, Hopcroft et Trajan ont trouvé un algorithme en temps $O(n \log(n))$ (1972).

Un indice pouvant indiquer que ce problème n'est pas NP-complet est qu'il possède une propriété que les autres problèmes de cette classe ne possèdent pas (Grohe et Schweitzer, 2020). En effet, compter le nombre d'isomorphismes entre deux graphes a la même complexité algorithmique que de déterminer l'existence d'un isomorphisme (Mathon, 1979). Aussi, pour deux graphes choisis au hasard, selon une distribution uniforme, ceux-ci peuvent, en moyenne, être facilement distingués à isomorphisme près par un algorithme (Babai *et al.*, 1980).

L'introduction de techniques provenant de la théorie des groupes par Babai (1979) et Luks (1982) a jeté une nouvelle lumière sur le problème IG. Luks a montré en particulier que pour une classe de graphes pour lesquels les degrés admis pour leurs sommets sont bornés, il existe alors un algorithme polynomial pour tester l'isomorphisme des graphes. Ce résultat est basé sur l'utilisation de la technique *diviser pour régner*. Cette approche, combinée avec des idées de Zemlyachenko, a amené Babai et Luks à construire un algorithme modérément exponentiel pour IG, c.-à-d. $e^{n^{1/2+o(1)}}$ (1983). Puis, la borne supérieure $2^{O(\sqrt{n \log(n)})}$ a été établie (Babai *et al.*, 1983).

L'une des grandes avancées des dernières années vis-à-vis le problème IG est le résultat de Babai, qui démontre que ce problème est au moins de complexité quasi-polynomiale, c.-à-d. $O(2^{\log(n)^c})$ pour $c > 0$ (2015). Le problème est alors dit *presque efficacement résoluble*.

1.3 Applications

Une des premières traces écrites mentionnant les isomorphismes de graphes se concentre sur un problème de chimie. Il s'agit de comparer des graphes de molécules dans le but d'en sélectionner une seule par classe d'équivalence selon la relation d'isomorphisme, ce qui réduit la mémoire utilisée pour des bases de données de molécules (Ray et Kirsch, 1957).

Il est fréquent en optimisation combinatoire que l'espace de recherche soit immense et requiert d'être réduit. Il est alors naturel de vérifier une propriété sur un seul représentant de sa classe d'équivalence selon la relation d'isomorphisme. Un algorithme d'isomorphisme des graphes permet donc de comparer des graphes dans le but de former des classes d'équivalences de ceux-ci.

D'autres applications existent en génération de structures combinatoires, en calcul

de formes normales, en apprentissage automatique, en vérification de logiciels, en programmation mathématique, en infographie, en vision par ordinateur, en logique, en théorie des groupes algorithmique et en programmation quantique (Grohe et Schweitzer, 2020).

CHAPITRE II

L'ALGORITHME DE WEISFEILER-LEHMAN

Afin d'aborder le résultat de l'article de Kiefer et Schweitzer, il est nécessaire d'introduire ce qu'est l'algorithme de Weisfeiler-Lehman. Ce dernier résout le problème de l'isomorphisme des graphes en temps polynomial, mais le fait de manière faillible, dans le sens où il peut soit déterminer que les deux graphes d'entrée ne sont pas isomorphes, soit ne rien pouvoir conclure.

2.1 Quelques préalables

Définissons la notion de multiensemble, qui est utile dans la description de l'algorithme WL.

Un multiensemble est une structure similaire à un ensemble mais pouvant contenir le même élément plusieurs fois. Chaque élément d'un multiensemble y est donc présent avec une certaine multiplicité qui est un nombre entier strictement positif. Formellement, on peut définir un multiensemble comme un couple (E, f) où E est un ensemble et $f : E \rightarrow \mathbb{N}^+$ est une fonction de E vers l'ensemble des entiers strictement positifs. La fonction f associe donc à chaque élément sa multiplicité, soit le nombre de fois que cet élément apparaît dans le multiensemble.

Notons que seuls les multiensembles finis, c'est-à-dire ayant un nombre fini d'élé-

ments, sont utilisés dans ce mémoire.

Par convention, un multiensemble est noté avec des doubles accolades et ses éléments sont énumérés dans un ordre quelconque. Par exemple, $\{\{1, 1, 2, 3, 3, 3\}\}$.

Deux multiensembles sont égaux s'ils contiennent les mêmes éléments avec les mêmes multiplicités. Ainsi, $\{\{1, 1, 2, 3, 3, 3\}\} \neq \{\{1, 2, 3\}\}$, car 1 et 3 n'apparaissent pas le même nombre de fois dans chacun.

2.2 Approche intuitive

Intéressons-nous tout d'abord à des propriétés que deux graphes isomorphes doivent avoir. Cette approche nous amène à formaliser l'algorithme de Weisfeiler-Lehman de dimension 1.

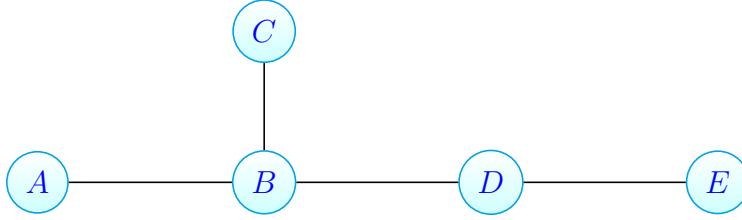
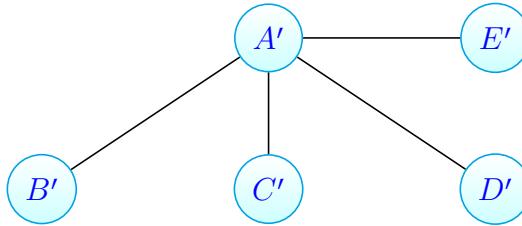
On a par exemple la remarque suivante.

Remarque 2.2.1. Pour que deux sommets de graphes différents puissent être reliés par un isomorphisme, ils doivent avoir le même nombre de sommets reliés, soit le même degré, puisqu'il s'agit de graphes simples.

Cette approche qui consiste à vérifier des propriétés nécessaires aux isomorphismes explique pourquoi l'algorithme peut distinguer deux graphes non isomorphes mais ne peut pas garantir avec certitude l'isomorphisme de deux graphes.

Soit les graphes des figures 2.1 et 2.2. Il ne peut y avoir d'isomorphisme entre les deux. En effet, une telle bijection devrait associer le sommet A' de G' , de degré 4, à un sommet du graphe G de même degré. Or, il n'y a aucun tel candidat.

L'idée est alors de comparer les distributions des degrés des graphes. Pour cela, on construit un multiensemble associé à chaque graphe contenant les degrés de chacun de leurs sommets.

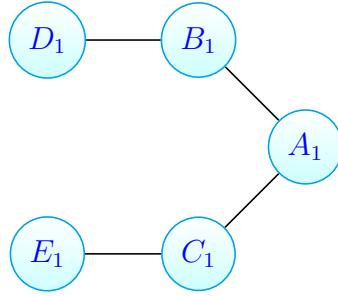
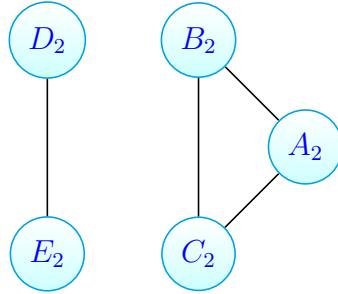
FIGURE 2.1 Graphe G FIGURE 2.2 Graphe G'

Par exemple, pour le graphe G de la figure 2.1, on obtient $\{\{1, 1, 1, 2, 3\}\}$ et pour le graphe G' de la figure 2.2, on a plutôt $\{\{1, 1, 1, 1, 4\}\}$.

Maintenant, de la remarque 2.2.1, on déduit que deux graphes isomorphes doivent être associés au même multiensemble. Autrement dit, avoir le même multiensemble associé est une condition nécessaire pour que deux graphes puissent être isomorphes. Ainsi, pour les figures ci-dessus, G ne peut pas être isomorphe à G' .

Notons par contre que cela n'est pas un critère suffisant : deux graphes ayant le même multiensemble associé peuvent ne pas être isomorphes. Par exemple, les graphes H_1 et H_2 des figures 2.3 et 2.4 ont le même multiensemble associé, c.-à-d. $\{\{1, 1, 2, 2, 2\}\}$, mais ne sont pas isomorphes, car le premier est connexe alors que l'autre ne l'est pas.

En fait, la méthode décrite ci-dessus, qui permet d'établir si deux graphes ne sont pas isomorphes en comparant la distribution des degrés de leurs sommets, peut même être généralisée de la façon suivante. En partant d'un sommet d'un

FIGURE 2.3 Graphe H_1 FIGURE 2.4 Graphe H_2

graphe, au lieu de simplement noter son degré, on lui associe un multiensemble correspondant aux degrés de chacun de ses sommets reliés. Puis, en prenant pour éléments les multiensembles associés à chaque sommet du graphe, on construit un nouveau multiensemble associé à ce dernier.

Prenons par exemple le sommet A_1 du graphe H_1 de la figure 2.3. Ce sommet a deux sommets reliés, soit B_1 et C_1 . Chacun est de degré 2, donc le multiensemble associé à A_1 est $\{\{2, 2\}\}$. De même, les sommets B_1 et C_1 ont pour multiensemble associé $\{\{1, 2\}\}$, puis D_1 et E_1 ont $\{\{2\}\}$ d'associé.

Cela permet d'associer au graphe H_1 le multiensemble

$$\left\{ \{\{2, 2\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\{2\}\}, \{\{2\}\} \right\}.$$

Pour le graphe H_2 , on obtient plutôt

$$\left\{ \{\{2, 2\}\}, \{\{2, 2\}\}, \{\{2, 2\}\}, \{\{1\}\}, \{\{1\}\} \right\}.$$

Comme ces deux multiensembles ne sont pas égaux, on en déduit que les graphes H_1 et H_2 ne sont pas isomorphes.

Toutefois, comme avant, ce critère n'est toujours pas suffisant pour montrer que deux graphes sont bien isomorphes. Il est au moins aussi puissant que le critère précédent, car il permet d'identifier comme non isomorphes toutes les paires de graphes que le premier critère identifierait également comme non isomorphes. La justification est laissée au lecteur. Il est d'ailleurs strictement plus puissant puisqu'il distingue H_1 et H_2 , ce qui n'était pas le cas avec le critère précédent.

On remarque qu'il est facile d'itérer ce processus de construction de multiensemble et que, en fait, le critère devient ainsi de plus en plus puissant.

2.3 Formalisation du cas de dimension 1

Comme le montre l'exemple précédent, bien que les opérations sont naturelles, l'itération de multiensembles peut devenir lourde en terme de notation et difficile à suivre. Pour rendre ce processus plus clair, la méthode usuelle consiste à considérer des colorations de graphe.

Une *coloration* d'un ensemble A est une fonction $\chi : A \rightarrow \mathcal{C}$, où \mathcal{C} est un ensemble quelconque dont les éléments sont appelés *couleurs*.

Définition 2.3.1. Soit un ensemble A et soit χ et χ' , deux colorations de A . Les deux colorations sont alors dites *équivalentes* si pour tous $u, v \in A$, $\chi(u) = \chi(v)$ si et seulement si $\chi'(u) = \chi'(v)$.

Par exemple, l'ensemble A peut être l'ensemble des sommets d'un graphe. À H_1

défini plus tôt à la figure 2.3, on peut associer les colorations χ et χ' définies par le tableau 2.1.

u	$\chi(u)$	$\chi'(u)$
A_1	rouge	vert
B_1	rouge	vert
C_1	orange	bleu
D_1	orange	bleu
E_1	vert	violet

TABLEAU 2.1 Colorations χ et χ' sur les sommets du graphe H_1

Il est alors évident que ces deux colorations sont équivalentes, c.-à-d. que deux sommets de même (ou différente) couleur pour une coloration sont alors de même (ou différente) couleur pour l'autre coloration également.

Avec ces définitions, on peut enfin formaliser *l'algorithme WL de dimension 1* ou WL_1 . Ce dernier est aussi appelé *l'étiquetage canonique* ou *l'algorithme de raffinement de couleurs*. Nous suivons ici la présentation faite par (Pikhurko et Verbitsky, 2011).

L'algorithme WL_1 a pour entrées G_1, G_2 , deux graphes finis simples à n sommets. Sa sortie nous indique soit que G_1, G_2 sont non isomorphes, soit qu'on peut rien conclure. L'algorithme WL_1 définit des colorations de $V_{G_1} \cup V_{G_2}$ qui seront notées χ^i pour $i \in \mathbb{N}$, avec pour ensemble de départ $V_{G_1} \cup V_{G_2}$. Les couleurs sont des multiensembles et les multiensembles de couleurs considérés sont définis récursivement.

Pour débuter, χ^0 est définie pour tout $u \in V_{G_1} \cup V_{G_2}$ par $\chi^0(u) := \emptyset$, où \emptyset est le multiensemble vide.

De façon générale, pour $t \in \{1, 2\}$ et $u \in V_{G_t}$, la coloration χ^{i+1} est définie par

$$\chi^{i+1}(u) := (\chi^i(u), \{\{\chi^i(v) \mid (u, v) \in E(G_t)\}\})$$

La coloration limite est notée χ , où $\chi := \lim_{i \rightarrow \infty} \chi^i$.

On peut prouver qu'il existe un nombre f inférieur ou égal à $2n$ tel que χ^f est équivalent à χ^{f+1} . En effet, chaque itération de l'algorithme augmente le nombre de couleurs des colorations et il ne peut y avoir plus de $2n$ couleurs pour une coloration χ^i étant donné que $|V_{G_1} \cup V_{G_2}| = 2n$. On dit alors que l'algorithme se *stabilise* à la f -ième itération. On en déduit que $\chi = \chi^f$.

Pour terminer, s'il existe, pour la coloration χ , une couleur associée à un nombre différent de sommets de G_1 que de G_2 , alors les deux graphes sont *non isomorphes* et l'algorithme retourne cela en sortie. Autrement, il retourne *inconnu*.

Cela conclut la description de l'algorithme.

Notons que la deuxième composante de $\chi^{i+1}(u)$, soit $\{\{\chi^i(v) \mid (u, v) \in E(G_t)\}\}$, assure que des sommets ayant pour au moins une couleur de χ^i des nombres différents de voisins de cette couleur sont de couleurs différentes pour la coloration χ^{i+1} .

Il est alors utile de voir le couple $\chi^{i+1}(u)$ comme donnant une *description du voisinage du sommet* $u \in V_{G_t}$. Notons aussi que, plus il y a d'itérations, plus le voisinage décrit est grand.

L'algorithme se termine par la vérification que les deux multiensembles de couleurs de sommets des graphes ne sont pas égaux, c.-à-d. $\{\{\chi(u) \mid u \in V_{G_1}\}\} \neq \{\{\chi(u) \mid u \in V_{G_2}\}\}$, ce qui permet d'inférer que les deux graphes ne sont pas isomorphes.

Utilisons cet algorithme pour distinguer les graphes H_1 et H_2 , définis plus tôt aux figures 2.3 et 2.4.

Pour abréger l'écriture, on va réécrire les couples par des symboles α_n de manière à ce que deux couples aient le même symbole si et seulement s'ils sont égaux. Cette réécriture préserve suffisamment d'information pour pouvoir dire si deux colorations sont équivalentes ou pas.

En définissant $\chi^0(u) := \emptyset$ pour tout sommet $u \in V_{H_1} \cup V_{H_2}$, on trouve pour A_1 que $\chi^1(A_1) = (\chi^0(A_1), \{\{\chi^0(B_1), \chi^0(C_1)\}\}) = (\emptyset, \{\{\emptyset, \emptyset\}\})$ qu'on dénote par α_1 par souci de concision. Le tableau 2.2, illustre le processus de raffinements itérés sur la coloration χ^0 . On constate que χ^4 est équivalent à χ^3 . On a donc $\chi := \chi^3$.

u	$\chi^0(u)$	$\chi^1(u)$	$\chi^2(u)$	$\chi^3(u)$
A_1	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}) =: \alpha_1$	$(\alpha_1, \{\{\alpha_1, \alpha_1\}\}) =: \alpha_2$	$(\alpha_2, \{\{\beta_2, \beta_2\}\}) =: \alpha_3$
B_1	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}) =: \alpha_1$	$(\alpha_1, \{\{\alpha_1, \beta_1\}\}) =: \beta_2$	$(\beta_2, \{\{\alpha_2, \gamma_2\}\}) =: \beta_3$
C_1	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}) =: \alpha_1$	$(\alpha_1, \{\{\alpha_1, \beta_1\}\}) =: \beta_2$	$(\beta_2, \{\{\alpha_2, \gamma_2\}\}) =: \beta_3$
D_1	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset\}\}) =: \beta_1$	$(\beta_1, \{\{\alpha_1\}\}) =: \gamma_2$	$(\gamma_2, \{\{\beta_2\}\}) =: \gamma_3$
E_1	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset\}\}) =: \beta_1$	$(\beta_1, \{\{\alpha_1\}\}) =: \gamma_2$	$(\gamma_2, \{\{\beta_2\}\}) =: \gamma_3$
A_2	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}) =: \alpha_1$	$(\alpha_1, \{\{\alpha_1, \alpha_1\}\}) =: \alpha_2$	$(\alpha_2, \{\{\alpha_2, \alpha_2\}\}) =: \delta_3$
B_2	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}) =: \alpha_1$	$(\alpha_1, \{\{\alpha_1, \alpha_1\}\}) =: \alpha_2$	$(\alpha_2, \{\{\alpha_2, \alpha_2\}\}) =: \delta_3$
C_2	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}) =: \alpha_1$	$(\alpha_1, \{\{\alpha_1, \alpha_1\}\}) =: \alpha_2$	$(\alpha_2, \{\{\alpha_2, \alpha_2\}\}) =: \delta_3$
D_2	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset\}\}) =: \beta_1$	$(\beta_1, \{\{\beta_1\}\}) =: \delta_2$	$(\delta_2, \{\{\delta_2\}\}) =: \epsilon_3$
E_2	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset\}\}) =: \beta_1$	$(\beta_1, \{\{\beta_1\}\}) =: \delta_2$	$(\delta_2, \{\{\delta_2\}\}) =: \epsilon_3$

TABLEAU 2.2 Itérations de WL pour les graphes H_1 et H_2

Comparons maintenant les deux multiensembles de couleurs des sommets de chaque graphe :

$$\begin{aligned}\{\{\chi^3(u) \mid u \in V_{H_1}\}\} &= \{\{\alpha_3, \beta_3, \beta_3, \gamma_3, \gamma_3\}\} \\ \{\{\chi^3(u) \mid u \in V_{H_2}\}\} &= \{\{\delta_2, \delta_2, \delta_2, \epsilon_2, \epsilon_2\}\}\end{aligned}$$

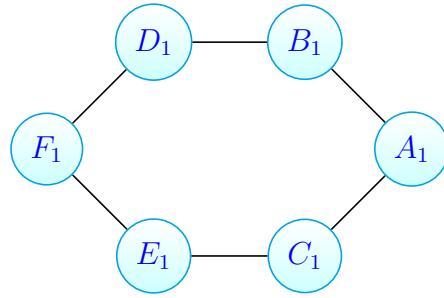
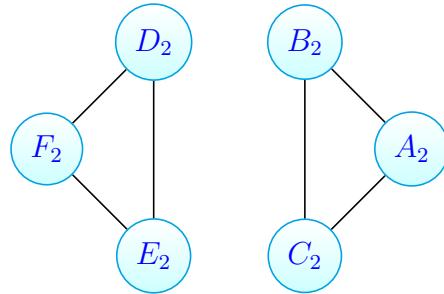
Ces derniers ne sont pas égaux. En effet, par exemple, la couleur α_3 apparaît une fois dans le premier multiensemble et aucune fois dans le deuxième. Cela nous permet de conclure que les deux graphes H_1 et H_2 ne sont pas isomorphes.

Même si l'algorithme de Weisfeiler-Lehman de dimension 1, dans le cas où il nous retourne deux multiensembles non égaux, nous permet de conclure que les deux graphes d'entrée ne sont pas isomorphes, il ne permet pas de déterminer avec certitude que deux graphes sont isomorphes. De fait, si l'algorithme retourne deux multiensembles égaux, on ne peut alors rien conclure.

Notons qu'une variante de l'algorithme consiste à comparer les multiensembles des couleurs des sommets des deux graphes à chaque itération et à s'arrêter dès que ceux-ci diffèrent. Ci-dessus, nous n'aurions alors pas à calculer χ^3 et χ^4 . Notons qu'il faut tout de même vérifier l'inéquivalence des colorations successives, car autrement, l'algorithme pourrait durer éternellement (c.-à-d. rentrer dans une boucle infinie).

Présentons maintenant un exemple où l'algorithme retourne deux multiensembles égaux pour deux graphes non isomorphes. Considérons les graphes *Hex* et *Tri* des figures 2.5 et 2.6.

En analysant le tableau 2.3 qui présente le résultat du calcul de χ^0 et χ^1 , on voit que χ^0 et χ^1 sont équivalents et on a donc que $\chi := \chi^0$.

FIGURE 2.5 Graphe *Hex*FIGURE 2.6 Graphe *Tri*

u	$\chi^0(u)$	$\chi^1(u)$
A_1	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}) =: \alpha_1$
B_1	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}) =: \alpha_1$
C_1	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}) =: \alpha_1$
D_1	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}) =: \alpha_1$
E_1	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}) =: \alpha_1$
A_2	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}) =: \alpha_1$
B_2	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}) =: \alpha_1$
C_2	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}) =: \alpha_1$
D_2	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}) =: \alpha_1$
E_2	\emptyset	$(\emptyset, \{\{\emptyset, \emptyset\}\}) =: \alpha_1$

TABLEAU 2.3 Itérations de WL pour les graphes *Hex* et *Tri*

Ainsi,

$$\{\{\chi(u) \mid u \in V_{Hex}\}\} = \{\{\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset\}\}$$

$$\{\{\chi(u) \mid u \in V_{Tri}\}\} = \{\{\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset\}\}$$

On a donc que les deux multiensembles sont égaux. En effet, leurs couleurs ont autant de représentants dans un multiensemble que dans l'autre. Pourtant, les deux graphes ne sont pas isomorphes, l'un étant connexe et l'autre non.

2.4 Formalisation du cas de dimension k

Il est possible de modifier cet algorithme afin qu'il puisse distinguer des graphes que la version originale ne peut distinguer. L'idée est alors de considérer des k -uplets de sommets plutôt que des simples sommets. En contrepartie, l'algorithme augmente en complexité temporelle.

Définissons *l'algorithme de Weisfeiler-Lehman de dimension k* ou WL_k , où k est un entier positif.

L'algorithme WL_k a pour entrées G_1, G_2 , deux graphes finis simples à n sommets. Sa sortie nous indique soit que G_1, G_2 sont non isomorphes, soit qu'on ne peut conclure.

L'algorithme WL_k définit des colorations de $V_{G_1}^k \cup V_{G_2}^k$ qui sont notées χ^i pour $i \in \mathbb{N}$, avec pour ensemble de départ $V_{G_1}^k \cup V_{G_2}^k$ où, par exemple, $V_{G_1}^k$ désigne l'ensemble des k -uplets à valeurs dans l'ensemble V_{G_1} . Les couleurs sont des multiensembles et les multiensembles de couleurs considérés sont définis récursivement.

Pour débuter, χ^0 attribue à chaque k -uplet un couple d'ensembles. Formellement, pour $t \in \{1, 2\}$ et pour tout $\bar{u} = (u_1, \dots, u_k) \in V_{G_t}^k$, alors

$$\chi^0(\bar{u}) := \left(\{(i, j) \in \{1, \dots, k\}^2 \mid u_i = u_j\}, \{(i, j) \in \{1, \dots, k\}^2 \mid (u_i, u_j) \in E(G_t)\} \right)$$

Dénotons par $\bar{u}^{l,v}$ le k -uplet \bar{u} dans lequel on remplace la l -ième coordonnée u_l par la variable v .

De façon générale, pour $t \in \{1, 2\}$ et $u \in V_{G_t}$, la coloration χ^{i+1} est définie par

$$\chi^{i+1}(\bar{u}) := \left(\chi^i(\bar{u}), \left\{ \left(\chi^i(\bar{u}^{1,v}), \dots, \chi^i(\bar{u}^{k,v}) \right) \mid v \in V_{G_t}^k \right\} \right)$$

On peut prouver qu'il existe un nombre f inférieur ou égal à $2n^k$ tel que χ^f est équivalent à χ^{f+1} . En effet, chaque itération de l'algorithme augmente le nombre de couleurs des colorations et il ne peut y avoir plus de $2n^k$ couleurs pour une coloration χ^i étant donné que $|V_{G_1}^k \cup V_{G_2}^k| = 2n^k$.

On dit alors que l'algorithme se stabilise à la f -ième itération. La coloration limite χ^f est tout simplement notée χ .

Pour terminer, s'il existe, pour la coloration χ , une couleur associée à un nombre différent de k -uplets de sommets de G_1 que de G_2 , alors les deux graphes sont *non isomorphes* et l'algorithme retourne cela comme sortie. Autrement, ce dernier retourne *inconnu*.

Cela conclut la description de l'algorithme.

Ici, $\chi^0(\bar{u})$ nous donne une description complète de l'allure du k -uplet \bar{u} .

L'algorithme se termine par la vérification que les deux multiensembles de couleurs de k -uplets de sommets des graphes ne sont pas égaux, c.-à-d. $\{\{\chi(\bar{u}) \mid \bar{u} \in V_{G_1}^k\}\} \neq \{\{\chi(\bar{u}) \mid \bar{u} \in V_{G_2}^k\}\}$, ce qui impliquerait alors alors les deux graphes ne sont pas isomorphes.

Nous allons nous attarder sur le cas $k = 2$, tout d'abord pour nous aider à saisir ce langage plutôt lourd, puis parce que ce mémoire se concentre sur ce cas précis.

Soit deux graphes G_1 et G_2 . En appliquant la version de l'algorithme pour $k = 2$,

nous obtenons, pour $\bar{u} = (u_1, u_2) \in G_1^2$ (analogue pour $\bar{u} \in G_2^2$),

$$\chi^0(\bar{u}) := \left(\left\{ (i, j) \in \{1, 2\}^2 \mid u_i = u_j \right\}, \left\{ (i, j) \in \{1, 2\}^2 \mid (u_i, u_j) \in E(G_1) \right\} \right).$$

Nous observons alors seulement trois possibilités :

$$\chi^0(u_1, u_2) := \left(\left\{ (1, 1), (2, 2) \right\}, \left\{ \right\} \right), \text{ donc } u_1 \neq u_2 \text{ et ils ne sont pas reliés.}$$

$$\chi^0(u_1, u_2) := \left(\left\{ (1, 1), (2, 2) \right\}, \left\{ (1, 2), (2, 1) \right\} \right), \text{ donc } u_1 \neq u_2 \text{ et ils sont reliés.}$$

$$\chi^0(u_1, u_2) := \left(\left\{ (1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1) \right\}, \left\{ \right\} \right), \text{ donc } u_1 = u_2 \text{ (forcément non reliés, car } E \text{ est antiréflexive).}$$

Pour $\bar{u} = (u_1, u_2) \in G_1^2$ (analogue pour $\bar{u} \in G_2^2$), nous obtenons ensuite

$$\chi^{i+1}(u_1, u_2) := \left(\chi^i(u_1, u_2), \left\{ \left\{ (\chi^i(v, u_2), \chi^i(u_1, v)) \mid v \in V_{G_1} \right\} \right\} \right)$$

L'article de Kiefer et Schweitzer étudie la complexité algorithmique de cet algorithme et pour ce faire introduit plusieurs autres objets mathématiques comme nous allons le voir. Entre autres, cet article présente la notion de *graphes colorés*, qui unifie en un seul concept les graphes et les colorations. De plus, le raffinement de couleur se fait sur chaque graphe individuellement plutôt que sur l'union disjointe des deux, ce qui nécessite de modifier le critère final de l'algorithme.

2.5 Fiabilité

Formellement, il a été démontré que la version unidimensionnelle de cet algorithme décide asymptotiquement presque toujours correctement si deux graphes sont isomorphes ou pas (Babai *et al.*, 1980). Ce test est connu entre autres pour échouer à distinguer deux graphes lorsque ceux-ci sont de même taille et sont réguliers, c'est-à-dire qu'ils ont des sommets de même degré. Les figures 2.5 et 2.6, présentés plus tôt, montrent un exemple.

On a par la suite démontré que la version bidimensionnelle de l'algorithme de Weisfeiler-Lehman, lorsqu'appliquée à des paires de graphes réguliers, décide asymptotiquement presque toujours correctement si ces derniers sont isomorphes ou pas (Kucera, 1987).

On sait aussi que pour toutes classes de graphes avec mineurs interdits (c.-à-d. lorsque la classe est caractérisée par le fait que la collection des mineurs des graphes de cette dernière ne puisse contenir certains graphes spécifiés), il existe un k tel que WL_k distingue correctement tous ses éléments (Grohe, 2010). Ici un *mineur* M d'un graphe G est obtenu de G par contraction des arêtes d'un sous-graphe induit de G (Robertson et Seymour, 1983).

En revanche, peu importe la dimension, on a démontré qu'il existe toujours deux graphes non isomorphes que WL ne peut distinguer (Cai *et al.*, 1992).

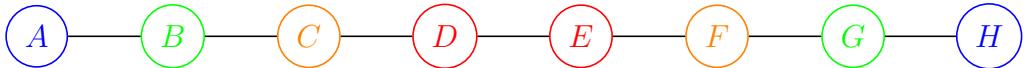
2.6 Complexité

L'algorithme WL_k se stabilise en temps $O(n^{k+1} \log(n))$ (Berkholz *et al.*, 2017).

Remarquons que borner la complexité de WL_k revient à borner le nombre d'itérations du pire cas du processus de raffinement avant que ce dernier ne se stabilise. Soit $WL_k(n)$, ce nombre, pour deux graphes à n sommets. La borne $WL_k(n) \leq n^k - 1$ se déduit alors du fait qu'un graphe à n sommets possède n^k k -uplets et peut donc avoir au plus n^k couleurs différentes, et que chaque itération de l'algorithme doit augmenter le nombre de couleurs du graphe.

Babai a démontré que pour deux graphes choisis au hasard, le nombre d'itérations avant stabilisation est asymptotiquement presque toujours 2 (1980).

De plus, on considérant les chemins, on voit facilement que $WL_1(n) \geq n/2 - 1$.

FIGURE 2.7 Coloration χ^0 FIGURE 2.8 Coloration χ^1 FIGURE 2.9 Coloration χ^2

Par exemple, considérons un graphe chemin comme dans la figure 2.7. Dans cette figure, la coloration χ^0 consiste à associer la couleur bleue aux sommets de degré 1 et verte à ceux de degré 2. À partir de χ^2 , soit la troisième coloration, le raffinement est déjà stabilisé. Notons que $8/2 - 1 = 3$, donc la formule est respectée.

L'article (Krebs et Verbitsky, 2015) démontre qu'il est possible de trouver deux graphes non isomorphes pour lesquels le nombre d'itérations avant stabilisation est $n - O(\sqrt{n})$. Donc, $WL_1(n) \geq n - O(\sqrt{n})$, ce qui est une borne inférieure plus grande que la dernière.

Pour $k > 1$, la meilleure borne inférieure connue a été découverte par Fürer (Orejas *et al.*, 2001) qui montra que $WL_k(n) \in \Omega(n)$,¹ en s'inspirant des constructions de l'article (Cai *et al.*, 1992) de lui-même et de ses collègues Cai et Immerman.

Récemment, on a démontré qu'il existe des graphes à n sommets ne pouvant être

1. La notation Ω est définie dans (Cormen *et al.*, 2009) comme étant

$\Omega(g(n)) := \{f(n) \mid \text{il existe } c, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tels que } 0 \leq cg(n) \leq f(n) \text{ pour tout } n \leq n_0\}$.

distingués par $n^{o(k/\log k)}$ itérations de WL_k , ce qui est une nouvelle borne inférieure, mais elle est restreinte à $k < n^{0.01}$ par (Berkholz et Nordström, 2016).

En ce qui concerne les bornes supérieures, la borne naïve $O(n^k)$ est la seule connue jusqu'à présent. Non seulement cela, pour $k = 1$, $\text{WL}_1(n)$ est dominée et soumise à n asymptotiquement, c.-à-d. $\text{WL}_1(n) \in \Theta(n)^2$. Ainsi, cette borne est impossible à améliorer. Il est alors faux que $\text{WL}_1(n) = O(n^t)$ pour $t < 1$.

Finalement, nous arrivons au point tournant : le résultat de Kiefer et Schweitzer fut d'abaisser cette borne dans le cas de $k = 2$, en établissant que $\text{WL}_2(n) = O(n^2/\log(n))$. La démonstration de ce résultat consiste en la majeure partie de ce mémoire. On a donc que $\text{WL}_2(n) \in \Theta(n^2)$ est faux. Cela falsifie l'hypothèse pessimiste comme quoi $O(n^k)$ n'est pas une borne améliorable pour toutes les dimensions. Cela démontre aussi que pour $k = 2$, $\text{WL}_2(n)$ n'est pas dominée et soumise asymptotiquement à $n^{o(k/\log k)}$.

Déterminer si $\text{WL}_k(n)$, pour toute dimension $k > 1$, a une borne supérieure inférieure à $O(n^k)$ reste un problème ouvert.

2.7 Applications

Malgré que WL_1 soit faillible, il est tout de même utilisé en pratique pour tester l'isomorphisme de graphes, au minimum comme sous-routine à des algorithmes plus complets comme ceux de Nauty et Traces (McKay et Piperno, 2014), de Bliss (Junttila et Kaski, 2007) et de Saucy (Darga *et al.*, 2004).

2. La notation Θ est définie dans (Cormen *et al.*, 2009) comme étant

$\Theta(g(n)) := \{f(n) \mid \text{il existe } c_1, c_2, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tels que } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ pour tout } n \leq n_0\}$.

Le résultat de Babai cité à la section 1.2 utilise d'ailleurs une version de l'algorithme de Weisfeiler-Lehman de dimension $\text{polylog}(n)$ pour développer l'algorithme le plus rapide connu à ce jour pour résoudre le problème de l'isomorphisme des graphes, avec complexité de calcul quasi polynomiale (2015).

Cet algorithme est aussi utilisé dans l'application de noyau de sous-graphe en apprentissage automatique (N. Shervashidze et Borgwardt, 2011) ou en analyse statique de programme (Yang *et al.*, 2021).

Il permet aussi la réduction effective de dimension en programmation linéaire (Grohe *et al.*, 2014).

De plus, la version bidimensionnelle de l'algorithme est reliée d'une certaine manière à la multiplication matricielle, surtout en ce qui concerne les configurations cohérentes (un certain type de graphe construit à partir d'un groupe) (Babai, 1996). Ce parallèle se poursuit en réalisant qu'effectuer un certain nombre d'itérations de WL_2 est équivalente à effectuer le même nombre de produits matriciels sur un certain type d'anneau (Babel *et al.*, 2010). Cet anneau peut même être celui des entiers, à l'aide de randomisation, ce qui donne à l'algorithme une complexité de calcul de $O(n^\omega)$ (Schweitzer, 2009). Ici, $\omega < 3$ consiste au coefficient de multiplication matricielle, tirée d'une définition généralisée de cette opération (Bläser, 2013).

L'algorithme de WL peut être décrit par certains jeux de Ehrenfeucht-Frassé (Cai *et al.*, 1992). Dans ce cas, une stratégie gagnante du Gâcheur minimisant le nombre de coups joués, $\text{WL}_k(n)$ correspond au nombre maximum de coups joués. Ce dernier est en conséquence inférieur ou égal aux bornes supérieures connues de $\text{WL}_k(n)$.

CHAPITRE III

L'ALGORITHME DE WEISFEILER-LEHMAN DE DIMENSION 2 TEL QUE FORMALISÉ PAR KIEFER ET SCHWEITZER

L'article de Sandra Kiefer et Pascal Schweitzer (Kiefer et Schweitzer, 2016) a pour but de démontrer que la version de cet algorithme à 2 dimensions a une complexité de calcul d'au plus $O(n^2/\log(n))$. Il s'agit de la meilleure borne connue jusqu'à ce jour.

Dans leur formalisation de l'algorithme WL de dimension 2, les graphes simples finis d'entrée sont convertis en *graphes colorés*. Ces derniers sont introduits dans la section suivante.

3.1 Graphes colorés

Les graphes colorés sont des objets qui unifient en un concept les graphes et les colorations.

Définition 3.1.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Un *graphe coloré* est un couple $G = (V, \chi)$ où V est un ensemble fini non vide, $\chi : V^2 \rightarrow \mathcal{C}$, une fonction surjective, et \mathcal{C} , un ensemble quelconque.

Définition 3.1.2. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit $G = (V, \chi)$, un graphe coloré. Un élément de V est dit un *sommet* de G .

Un élément de V^2 est dit un *sommet* de G s'il appartient à l'ensemble

$$\mathcal{S} := \{(u, u) \mid u \in V\}.$$

Un élément de V^2 est dit une *arête* de G s'il appartient à l'ensemble

$$\mathcal{A} := \{(u, v) \mid u, v \in V \text{ et } u \neq v\}.$$

Nous spécifierons *sommet dans* V ou *sommet dans* V^2 au besoin afin d'éviter les ambiguïtés.

Définition 3.1.3. Soit V , un ensemble fini non vide, alors Γ_V est l'ensemble de tous les graphes colorés ayant V pour ensemble de sommets.

Notons que pour un certain ensemble V , tous les graphes colorés de l'ensemble Γ_V ont le même ensemble de sommets V^2 et le même ensemble d'arêtes V^2 . C'est donc par leurs colorations qu'ils se distinguent.

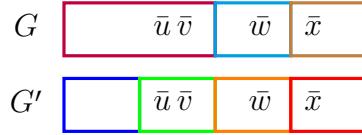
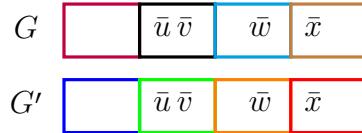
Définition 3.1.4. Soit V et V' , des ensembles finis non vides, et $G \in \Gamma_V$, $G' \in \Gamma_{V'}$. Un *isomorphisme de graphes colorés* est une fonction bijective $f : V \rightarrow V'$ telle que pour tout $(u_1, u_2) \in V^2$,

$$\chi_G(u_1, u_2) = \chi_{G'}(f(u_1), f(u_2)).$$

Si une telle fonction f existe, les deux graphes colorés sont dit *isomorphes*.

Définition 3.1.5. Soit V un ensemble fini non vide, et $G, G' \in \Gamma_V$.

- 1) On dit que G' *raffine* G ou que G' est un *raffinement* de G et on note $G \succeq G'$ si pour tous $\bar{u}, \bar{v} \in V^2$ tels que $\chi_{G'}(\bar{u}) = \chi_{G'}(\bar{v})$, alors $\chi_G(\bar{u}) = \chi_G(\bar{v})$.
- 2) On dit qu'ils sont *équivalents* et on note $G \equiv G'$ si $G \succeq G'$ et $G' \succeq G$.
- 3) On dit que G' *raffine strictement* ou est un *raffinement strict* de G et on note $G > G'$ si $G \succeq G'$ et $G \neq G'$.

FIGURE 3.1 Illustration du raffinement $G \supseteq G'$ FIGURE 3.2 Illustration de l'équivalence $G \equiv G'$

Un raffinement d'un graphe coloré consiste en un raffinement de la partition induite par la coloration du graphe.

Dans la figure 3.1, chaque graphe coloré est représenté par une bande, qui contient l'ensemble de ses sommets et de ses arêtes dans V^2 arrangées linéairement. Ainsi, pour $\bar{u} \in V^2$ situé quelque part sur une bande, l'autre bande contient le même élément à l'exact même position ou coordonnée horizontale. Puis, les rectangles indiquent la couleur associée aux éléments à l'intérieur de ceux-ci.

Ainsi, pour la figure 3.1, G' raffine G , car on observe que si deux arêtes de V^2 ont la même couleur dans le graphe G' (\bar{u}, \bar{v} par exemple), alors ils ont aussi la même couleur dans G . La contraposée est également vraie : si deux arêtes ont deux couleurs différentes dans G (\bar{w}, \bar{x} , par exemple), alors il en est de même dans G' .

Dans la figure 3.2, G' et G sont équivalents dans ce cas-ci, car deux arêtes de V^2 ont la même couleur dans le graphe G' (\bar{u}, \bar{v} par exemple) si et seulement s'il en est de même pour G .

À partir de maintenant, on ne colore plus les représentations, car tout ce qui

compte, c'est la partition induite par la coloration, indépendamment des couleurs utilisées.

Soit les G, G' et H tels que $V_G = V_{G'} = \{a, b\}$, $V_H = \{c, d\}$, et les colorations sont définies par le tableau 3.1.

\bar{u}	$\chi_G(\bar{u})$	$\chi_{G'}(\bar{u})$	\bar{u}	$\chi_H(\bar{u})$
(a, a)	orange	jaune	(c, c)	bleu
(a, b)	orange	jaune	(c, d)	rouge
(b, a)	rouge	vert	(d, c)	orange
(b, b)	bleu	rouge	(d, d)	orange

TABLEAU 3.1 Graphes colorés G , G' et H

Ici, les deux graphes G et G' sont équivalents, car deux couples de V ont la même couleur dans un graphe coloré si et seulement s'ils ont la même couleur dans l'autre graphe coloré. Remarquons que ces graphes doivent avoir le même ensemble de sommets (soit V), c.-à-d. $\{a, b\}$. Par contre, ils n'ont pas nécessairement le même multiensemble de couleurs. En effet, G a $\{\text{orange}, \text{orange}, \text{rouge}, \text{bleu}\}$ et G' a $\{\text{jaune}, \text{jaune}, \text{vert}, \text{rouge}\}$.

D'autre part, les graphes G et H sont isomorphes. En effet, on peut vérifier que la fonction $f : V_G \rightarrow V_H$ telle que $f(a) = d$ et $f(b) = c$ respecte la définition d'isomorphisme de graphes colorés. Remarquons que ces graphes n'ont pas le même ensemble de sommets, c.-à-d. respectivement $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$. Par contre, ils ont le même multiensemble de couleurs, soit $\{\text{orange}, \text{orange}, \text{rouge}, \text{bleu}\}$ dans chacun des cas.

La proposition suivante découle de la définition 3.1.5.

Proposition 3.1.1. Soit V un ensemble fini non vide. Alors la relation \succeq est une relation d'ordre partiel sur Γ_V relative à la relation d'équivalence \equiv . Donc, pour

tous $G, H, I \in \Gamma_V$, on a :

- 1) $G \succeq G$ (réflexivité) ;
- 2) si $G \succeq H$ et $H \succeq G$, alors $G \equiv H$ (antisymétrie) et
- 3) si $G \succeq H$ et $H \succeq I$, alors $G \succeq I$ (transitivité).

3.2 La conversion en graphe coloré

La conversion d'un graphe simple fini en graphe coloré se fait de la manière suivante. Celle-ci est inspirée par la coloration χ^0 de la section précédente, basée sur le type d'isomorphisme.

Définition 3.2.1. Soit $G = (V, E)$, un graphe simple fini. Alors son *graphe coloré associé* est le couple (V, χ) avec $\chi : V^2 \rightarrow \mathcal{C}$ défini de la façon suivante. On pose d'abord l'ensemble des couleurs $\mathcal{C} = \{0, 1, 2\}$. Puis, on attribue la couleur 2 aux sommets (dans V^2), 1 aux arêtes respectant la relation E , et 0 aux arêtes ne la respectant pas.

Les termes *sommet* et *arête* utilisés ci-dessus correspondent à ceux de la définition 3.1.2.

Remarque 3.2.1. Soit A , B et C , des ensembles finis non vides, et $f : A \rightarrow C$ et $g : B \rightarrow C$. Soit $\{\{f(x) \mid x \in A\}\}$ et $\{\{g(x) \mid x \in B\}\}$, deux multiensembles. Ces deux multiensembles sont égaux si et seulement s'il existe une bijection $b : A \rightarrow B$ telle que pour tout $x \in A$, on a $f(x) = g(b(x))$.

Proposition 3.2.1. Soit V un ensemble fini non vide, et $G, G' \in \Gamma_V$ qui sont isomorphes. Alors $\{\{\chi_G(\bar{u}) \mid \bar{u} \in V^2\}\} = \{\{\chi_{G'}(\bar{u}) \mid \bar{u} \in V^2\}\}$.

Preuve. Comme G et G' sont isomorphes, il existe un isomorphisme $f : V \rightarrow V$ entre les deux graphes. Soit maintenant la fonction $F : V^2 \rightarrow V^2$ telle que pour

tout $(u_1, u_2) \in V^2$, $F(u_1, u_2) := (f(u_1), f(u_2))$. Cette fonction F possède un inverse $F^{-1}(u_1, u_2) := (f^{-1}(u_1), f^{-1}(u_2))$ et est donc une bijection.

Ainsi, pour tout $(u_1, u_2) \in V^2$, $\chi_G(u_1, u_2) = \chi_{G'}(F(u_1, u_2))$ et par la remarque 3.2.1, le résultat est démontré. \square

Proposition 3.2.2. Soit $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$, deux graphes simples finis. S'ils sont isomorphes, alors leurs graphes colorés associés sont également isomorphes.

Preuve. Supposons les deux graphes isomorphes. Alors il existe une bijection $f : V \rightarrow V'$ tel que pour tout $(u_1, u_2) \in V, (u_1, u_2) \in E \iff (f(u_1), f(u_2)) \in E'$.

Nous allons montrer que f induit un isomorphisme entre les graphes colorés associés et donc qu'on a bien que $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in V^2, \chi_G(u_1, u_2) = \chi_{G'}(f(u_1), f(u_2))$.

Il y a trois cas à considérer.

Si $\chi_G(u_1, u_2) = 0$, alors par définition du graphe coloré associé, on a que $(u_1, u_2) \notin E$ et $u_1 \neq u_2$. Comme la fonction f est un isomorphisme de graphes, on a donc que $(f(u_1), f(u_2)) \notin E'$ et $f(u_1) \neq f(u_2)$ et on en conclut que $\chi_{G'}(f(u_1), f(u_2)) = 0$.

De manière analogue, de $\chi_G(u_1, u_2) = 1$, on déduit $(u_1, u_2) \in E$ et $u_1 \neq u_2$, puis $(f(u_1), f(u_2)) \in E'$ et $f(u_1) \neq f(u_2)$, et finalement $\chi_{G'}(f(u_1), f(u_2)) = 1$.

De même, de $\chi_G(u_1, u_2) = 2$, on infère $u_1 = u_2$, donc $f(u_1) = f(u_2)$, ce qui permet de conclure que $\chi_{G'}(f(u_1), f(u_2)) = 2$. \square

3.3 Propriétés conservées par la conversion

Maintenant, considérons les deux propriétés suivantes des graphes colorés.

Définition 3.3.1. Soit V un ensemble fini non vide. Un graphe coloré $G \in \Gamma_V$ est dit *bien dissociant* si l'ensemble des couleurs des sommets (dans V^2) et l'ensemble

des couleurs des arêtes sont disjoints, c.-à-d.

$$\{\chi_G(u, u) \mid u \in V\} \cap \{\chi_G(v, w) \mid v, w \in V \text{ et } v \neq w\} = \emptyset$$

Définition 3.3.2. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide. On dit que le graphe coloré $G \in \Gamma_V$ respecte l'équivalence contraire si pour tous $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in V^2$, $\chi_G(u_1, u_2) = \chi_G(v_1, v_2)$ si et seulement si $\chi_G(u_2, u_1) = \chi_G(v_2, v_1)$.

Démontrons une proposition importante sur les graphes ayant cette propriété :

Proposition 3.3.1. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$ respectant l'équivalence contraire. On a alors que pour toute couleur $c \in \mathcal{C}_G$, il existe une couleur dite *duale* $\bar{c} \in \mathcal{C}_G$ telle que pour tout $(u, v) \in V$, $\chi_G(u, v) = c$ si et seulement si $\chi_G(v, u) = \bar{c}$.

Preuve. Soit $c \in \mathcal{C}_G$. Comme χ_G est surjective, il existe $(u_0, v_0) \in V$ tel que $\chi_G(u_0, v_0) = c$. Posons alors $\bar{c} := \chi_G(v_0, u_0)$.

L'opérateur $c \mapsto \bar{c}$ est bien défini pour la raison suivante. Soit $(u, v) \in V$ quelconque. Si $\chi_G(u, v) = c$, alors $\chi_G(u, v) = \chi_G(u_0, v_0)$ et on déduit par l'équivalence contraire que $\chi_G(v, u) = \chi_G(v_0, u_0)$ et donc $\chi_G(v, u) = \bar{c}$. On démontre de manière analogue que $\chi_G(v, u) = \bar{c}$ implique que $\chi_G(u, v) = c$. \square

On observe trivialement par l'analyse des définitions 3.3.2 et 3.3.1 la proposition suivante.

Proposition 3.3.2. Le graphe coloré (V, χ_G) associé au graphe simple fini $G = (V, E)$ est bien dissociant et respecte l'équivalence contraire.

Preuve. Le fait que G soit bien dissociant découle de la définition de graphe coloré associé, qui assigne la couleur 2 aux sommets et les couleurs 0 ou 1 aux arêtes.

La deuxième partie de la proposition vient du fait que, puisque la relation E sur le graphe simple initial est symétrique, la fonction χ_G l'est aussi. Donc le graphe coloré associé respecte l'équivalence contraire. \square

Ainsi, pour le reste du mémoire, nous prenons pour acquis que nos graphes colorés d'entrée pour l'algorithme de Weisfeiler-Lehman de dimension 2 sont bien dissociants et respectent l'équivalence contraire.

3.4 Raffinement bidimensionnel de Weisfeiler-Lehman

Notons qu'ici, contrairement à la formalisation de l'article (Pikhurko et Verbitsky, 2011), le raffinement tel que formalisé par Kiefer et Schweitzer se fait individuellement sur chacun des graphes colorés. Cela ne pose pas de problème majeur, mais il faut noter qu'on ne peut plus *réétiqueter* les couleurs à chaque itération. Ce processus permettait une concision d'écriture, mais dans le contexte de raffinement individuel, il y a une perte d'information.

Définition 3.4.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. Alors le *raffinement bidimensionnel de Weisfeiler-Lehman de G* , ou *raffinement de Weisfeiler-Lehman de G* , est le graphe coloré noté $G^r \in \Gamma_V$, défini par $\mathcal{C}^r := \chi_{G^r}(V^2)$ et où, pour tout $(u, v) \in V^2$,

$$\chi_{G^r}(u, v) := (\chi_G(u, v), \{\{(\chi_G(w, v), \chi_G(u, w)) \mid w \in V\}\}).$$

La proposition suivante montre que le raffinement de Weisfeiler-Lehman porte bien son nom, dans le sens où ce dernier raffine le graphe.

Proposition 3.4.1. Soit V un ensemble fini non vide. On a alors que $G \succeq G^r$ pour tout $G \in \Gamma_V$.

Preuve. Soit $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in V^2$ tels que $\chi_{G^r}(u_1, u_2) = \chi_{G^r}(v_1, v_2)$. De la définition 3.4.1, on a que $\chi_G(u_1, u_2) = \chi_G(v_1, v_2)$ et donc $G \succeq G^r$ par la définition de \succeq . \square

Notation 3.4.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. Posons $G^{(0)} := G$ et $G^{(i)} := (G^{(i-1)})^r$, où $G^{(i)}$ correspond à la i^e itération de l'algorithme WL_2 .

Corollaire 3.4.1. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i \leq j$, on a alors que $G^{(i)} \succeq G^{(j)}$.

Maintenant, pour ne pas alourdir cette section, nous énonçons la proposition 4.3.9 et reportons sa démonstration à la section 4. Puisque la section 4 n'est pas une continuité de cette section, mais plutôt une élaboration parallèle des propriétés des graphes colorés, cela ne crée pas d'argument circulaire.

La proposition 4.3.9 stipule que, quelle que soit la suite $\{G_i\}_{i \geq 0}$, décroissante (ou croissante) de graphes colorés, c.-à-d. pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, $i \leq j$ implique $G_i \succeq G_j$ (ou $G_i \preceq G_j$), il existe alors un $k \in \mathbb{N}$ tel que $G_k \equiv G_{k+1}$. On a donc toujours deux termes consécutifs équivalents dans une telle suite.

Proposition 3.4.2. L'algorithme de Weisfeiler-Lehman de dimension 2 se stabilise. Autrement dit, soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $l \in \mathbb{N}$, $G^{(k)} \equiv G^{(k+l)}$.

Preuve. La suite $\{G^{(i)}\}_{i \geq 0}$ est décroissante pour la relation \succeq par le corollaire 3.4.1. Par la proposition 4.3.9 avec $E := V^2$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $G^{(k)} \equiv G^{(k+1)}$. $G^{(k)} \equiv G^{(k+l)}$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ se prouve alors aisément par induction sur l . \square

Définition 3.4.2. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. Soit $k \in \mathbb{N}$, le nombre minimum tel que $G^{(k)} \equiv G^{(k+1)}$. Alors la *stabilisation* de G consiste en $\tilde{G} := G^{(k)}$. On dit que G est *stable* si $G \equiv \tilde{G}$.

3.5 Description et justification de l'algorithme

Nous sommes maintenant en mesure de décrire l'algorithme de Weisfeiler-Lehman tel que formalisé par Kiefer et Schweitzer. Tout d'abord, à partir des deux graphes d'entrée G et H , on calcule pour chacun leurs graphes colorés associés, qu'on note encore G et H . Puis, on calcule \tilde{G} et \tilde{H} en itérant le raffinement bidimensionnel de Weisfeiler-Lehman jusqu'à ce qu'il se stabilise. Enfin, on calcule les multiensembles $\{\{\chi_{\tilde{G}}(\bar{u}) \mid \bar{u} \in V_G^2\}\}$ et $\{\{\chi_{\tilde{H}}(\bar{u}) \mid \bar{u} \in V_H^2\}\}$. Si les deux multiensembles ne sont pas égaux, alors les graphes originaux ne sont pas isomorphes. Sinon, on ne peut rien conclure.

Avant de justifier cet algorithme, démontrons les propositions suivantes.

Proposition 3.5.1. Soit $G = (V_G, \chi_G)$ et $H = (V_H, \chi_H)$, deux graphes colorés. S'ils sont isomorphes, alors G^r et H^r sont également isomorphes.

Preuve. Comme G et H sont isomorphes, il existe une bijection $f : V_G \rightarrow V_H$ telle que pour tous $u, v \in V_G$, alors $\chi_G(u, v) = \chi_H(f(u), f(v))$. Montrons alors que cette fonction f est aussi un isomorphisme pour les graphes colorés G^r et H^r , c.-à-d. pour tous $u, v \in V_G$, alors $\chi_{G^r}(u, v) = \chi_{H^r}(f(u), f(v))$.

La dernière égalité est vraie si les composantes respectives des couples sont égales. Tout d'abord, il faut que $\chi_G(u, v) = \chi_H(f(u), f(v))$, ce qui est déjà le cas par la définition de f ci-dessus. Puis, il faut aussi avoir l'égalité

$$\{\{(\chi_G(w, v), \chi_G(u, w)) \mid w \in V_g\}\} = \{\{(\chi_H(w, f(v)), \chi_H(f(u), w)) \mid w \in V_g\}\}.$$

Par la remarque 3.2.1, il suffit de démontrer l'existence d'une bijection $b : V_G \rightarrow V_H$ telle que $(\chi_G(w, v), \chi_G(u, w)) = (\chi_H(b(w), f(v)), \chi_H(f(u), b(w)))$ pour tout $w \in V$. Observons que nous n'avons qu'à poser $b := f$ et l'égalité est vérifiée.

Ainsi, f respecte la définition d'isomorphisme entre G^r et H^r , qui sont donc isomorphes. \square

On peut maintenant déduire par induction le corollaire suivant.

Corollaire 3.5.1. Soit $G = (V_G, \chi_G)$ et $H = (V_H, \chi_H)$, deux graphes colorés. S'ils sont isomorphes, alors :

- 1) $G^{(k)}$ et $H^{(k)}$ sont isomorphes pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, où $G^{(k)}$, $H^{(k)}$ sont comme à la notation 3.4.1 et
- 2) \tilde{G} et \tilde{H} sont isomorphes.

Maintenant, tous les ingrédients sont réunis pour justifier l'algorithme.

En partant de deux graphes G et H isomorphes, alors, par la proposition 3.2.2, leurs graphes colorés associés G et H sont aussi isomorphes. Par le corollaire 3.5.1, il en est de même pour \tilde{G} et \tilde{H} . Finalement, par la proposition 3.2.1, les multiensembles $\{\{\chi_{\tilde{G}}(\bar{u}) \mid \bar{u} \in V_G^2\}\}$ et $\{\{\chi_{\tilde{H}}(\bar{u}) \mid \bar{u} \in V_H^2\}\}$ sont égaux.

Ainsi, en prenant la contraposée de cette chaîne d'implication, si les deux multiensembles ci-dessus ne sont pas égaux, alors les deux graphes G et H initiaux ne sont pas isomorphes.

D'un point de vue computationnel, un algorithme peut trouver une couleur associée à un nombre différent d'éléments dans V_G^2 que dans V_H^2 , ce qui montre l'inégalité des multiensembles et que les graphes ne sont pas isomorphes.

On en conclut que l'algorithme est correct.

Le reste de ce mémoire est consacré à déterminer la complexité de cet algorithme.

3.6 Propriétés invariantes par le raffinement

Montrons que les propriétés des définitions 3.3.1 et 3.3.2 sont invariantes via les itérations de l'algorithme de Weisfeiler-Lehman de dimension 2

Proposition 3.6.1. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$ bien dissociant.

Pour tout $G' \in \Gamma_V$ tel que $G \geq G'$, alors G' est aussi bien dissociant.

Preuve. Posons $G, G' \in \Gamma_V$. Étant donné que G est bien dissociant, si on prend un sommet et une arête quelconques dans V^2 , alors il n'ont pas la même couleur selon χ_G . Par contraposée de la définition de $G \geq G'$, ils n'ont également pas la même couleur selon $\chi_{G'}$. \square

La proposition 3.6.1 est très générale et est appliquée dans la suite de ce mémoire à d'autres raffinements. Pour les besoins actuels, par cette proposition et par le corollaire 3.4.1, on a alors le corollaire suivant.

Corollaire 3.6.1. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$ bien dissociant.

Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $G^{(i)}$ est aussi bien dissociant.

Proposition 3.6.2. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$ respectant l'équivalence contraire. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $G^{(i)}$ respecte alors aussi l'équivalence contraire.

Preuve. Supposons que G respecte l'équivalence contraire. Montrons que c'est le cas pour G^r . On aura alors, par induction, que $G^{(i)}$ respecte l'équivalence contraire pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Soit $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in V^2$. Supposons que

$$\chi_{G^r}(u_1, u_2) = \chi_{G^r}(v_1, v_2) \quad (*)$$

et montrons que

$$\chi_{G^r}(u_2, u_1) = \chi_{G^r}(v_2, v_1). \quad (**)$$

La démonstration de la réciproque est analogue.

Démontrons d'abord l'égalité des premières composantes dans (**). De (*), on déduit $\chi_G(u_1, u_2) = \chi_G(v_1, v_2)$. Parce que G respecte l'équivalence contraire, on a donc que $\chi_G(u_2, u_1) = \chi_G(v_2, v_1)$, ce qui conclut cette partie.

Justifions finalement l'égalité des deuxièmes composantes dans (**). De (*) on a, en examinant les secondes composantes,

$$\{\{ (\chi_G(w, u_2), \chi_G(u_1, w)) \mid w \in V \} \} = \{\{ (\chi_G(w, v_2), \chi_G(v_1, w)) \mid w \in V \} \}.$$

Par la remarque 3.2.1, cette égalité signifie qu'on peut établir une correspondance bijective entre les éléments des deux multiensembles telle que chaque élément a la même couleur que son associé. Plus formellement, il existe une bijection $b : V \rightarrow V$ tel que pour tout $w \in V$,

$$(\chi_G(w, u_2), \chi_G(u_1, w)) = (\chi_G(b(w), v_2), \chi_G(v_1, b(w))).$$

Par l'équivalence contraire de G ,

$$(\chi_G(u_2, w), \chi_G(w, u_1)) = (\chi_G(v_2, b(w)), \chi_G(b(w), v_1)).$$

Puis, en renversant ces couples, on obtient que

$$(\chi_G(w, u_1), \chi_G(u_2, w)) = (\chi_G(b(w), v_1), \chi_G(v_2, b(w))).$$

Le fait que la bijection b respecte l'équation ci-dessus nous permet d'en déduire

$$\{\{ (\chi_G(w, u_1), \chi_G(u_2, w)) \mid w \in V \} \} = \{\{ (\chi_G(w, v_1), \chi_G(v_2, w)) \mid w \in V \} \}.$$

Donc, les deuxièmes composantes dans (**) sont égales. \square

3.7 Un résultat utile

Le résultat suivant illustre que le raffinement de Weisfeiler-Lehman est une opération monotone selon la relation de raffinement.

Lemme 3.7.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016)

Soit V un ensemble fini non vide, et $G, H \in \Gamma_V$, tels que $G \succeq H$. On a alors que

- 1a) $G^{(i)} \succeq H^{(i)}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$,
- 1b) $\tilde{G} \succeq \tilde{H}$,
- 2a) si $H \succeq \tilde{G}$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $G^{(i)} \equiv \tilde{G}$, on a que $H^{(i)} \equiv \tilde{G}$,
- 2b) si $H \succeq \tilde{G}$, alors $\tilde{G} \equiv \tilde{H}$.

Preuve. 1a) Soit $G, H \in \Gamma_V$. Supposons $G \succeq H$ et montrons que $G^r \succeq H^r$. Le cas général se fait alors par induction sur i .

Pour cela, prenons $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in V^2$ tels que

$$\chi_{H^r}(u_1, u_2) = \chi_{H^r}(v_1, v_2) \quad (*)$$

et montrons que

$$\chi_{G^r}(u_1, u_2) = \chi_{G^r}(v_1, v_2). \quad (**)$$

Tout d'abord, il faut prouver que les premières composantes de $(**)$ sont égales. Par l'égalité des premières composantes de $(*)$, on obtient $\chi_H(u_1, u_2) = \chi_H(v_1, v_2)$. Puis, par la définition de $G \succeq H$, on déduit $\chi_G(u_1, u_2) = \chi_G(v_1, v_2)$, tel que voulu.

Puis, pour démontrer l'égalité des deuxièmes composantes de $(**)$, on utilise l'égalité des deuxièmes composantes de $(*)$ qu'on exprime

$$\{(\chi_H(w, u_2), \chi_H(u_1, w)) \mid w \in V\} = \{(\chi_H(w, v_2), \chi_H(v_1, w)) \mid w \in V\}.$$

Par la remarque 3.2.1, l'égalité ci-dessus est équivalente à dire qu'il existe une bijection $b : V \rightarrow V$ telle que pour tout $w \in V$,

$$(\chi_H(w, u_2), \chi_H(u_1, w)) = (\chi_H(b(w), v_2), \chi_H(v_1, b(w))).$$

Par $G \succeq H$, on obtient directement que

$$(\chi_G(w, u_2), \chi_G(u_1, w)) = (\chi_G(b(w), v_2), \chi_G(v_1, b(w))).$$

Comme la bijection b respecte l'égalité ci-dessus, on peut en déduire

$$\{\{ (\chi_G(w, u_2), \chi_G(u_1, w)) \mid w \in V \}\} = \{\{ (\chi_G(w, v_2), \chi_G(v_1, w)) \mid w \in V \}\}.$$

Donc, les deuxièmes composantes dans $(**)$ sont égales.

1b) Supposons $G \succeq H$. Soit $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $G^{(i)} \equiv \tilde{G}$ et $H^{(j)} \equiv \tilde{H}$. Par 1a), on a alors que $\tilde{G} \equiv G^{(\max(i,j))} \succeq H^{(\max(i,j))} \equiv \tilde{H}$.

2a) Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $G^{(i)} \equiv \tilde{G}$. Supposons $G \succeq H \succeq \tilde{G}$. Par 1a), on déduit $G^{(i)} \succeq H^{(i)} \succeq \tilde{G}^{(i)}$, ainsi $\tilde{G} \succeq H^{(i)} \succeq \tilde{G}$ et donc $\tilde{H} \equiv \tilde{G}$.

2b) Supposons $G \succeq H \succeq \tilde{G}$. Par 1b), on déduit $\tilde{G} \succeq \tilde{H} \succeq \tilde{G} \equiv \tilde{G}$. Ainsi, $\tilde{H} \equiv \tilde{G}$. \square

Avant d'aborder la preuve de Kiefer et Schweitzer, il convient tout d'abord d'accorder une section à certaines propriétés des graphes colorés.

CHAPITRE IV

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS SUR LES GRAPHES COLORÉS

La notion de graphe coloré est cruciale dans la preuve de l'article de Kiefer et Schweitzer. Cette section présente donc les définitions et propositions sur ce sujet qui seront nécessaires pour la démonstration du résultat principal.

4.1 Classes et multiclasses de couleur

Définition 4.1.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. On dit d'un ensemble $C \subseteq V^2$ qu'il est une *classe de couleur de G* s'il existe une couleur $c \in \mathcal{C}_G$ telle que $C = \{\bar{u} \in V^2 \mid \chi_G(\bar{u}) = c\}$. L'ensemble C est alors aussi appelé la *classe de couleur de c* et est notée $CC(c)$.

Remarquons que, dans le cas d'un graphe bien dissociant, les classes contiennent soit seulement des sommets (de V^2), soit seulement des arêtes. On parle alors de *classe de couleur de sommet* et on utilise l'abréviation *CCS*. De même, on désigne une *classe de couleur d'arête* par *CCA*.

Définition 4.1.2. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. Un ensemble $C \subseteq V^2$ est dit une *multiclasse de couleur de G* s'il existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_G$ tel que $C = \{\bar{u} \in V^2 \mid \chi_G(\bar{u}) \in \mathcal{C}'\}$. L'ensemble C est alors aussi appelé la *multiclasse de couleur de*

\mathcal{C}' et est noté $CC(\mathcal{C}')$. Si C n'est pas une classe de couleur, on dit alors qu'il est une *multiclasse stricte de couleur*.

Pour un graphe coloré $G \in \Gamma_V$ et un ensemble de couleur $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_G$, il est facile de vérifier que $\chi_G(C) = \mathcal{C}'$ pour toute multiclasse de couleur $C := CC(\mathcal{C}')$.

Remarquons qu'une classe de couleur est aussi une multiclasse de couleur : il suffit de prendre un singleton pour \mathcal{C}' .

On note aussi qu'une multiclasse de couleur est une union disjointe de classes de couleur. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. Soit $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_G$. Alors,

$$\begin{aligned} CC(\mathcal{C}') &= \{\bar{u} \in V^2 \mid \chi_G(\bar{u}) \in \mathcal{C}'\} \\ &= \{\bar{u} \in V^2 \mid \bigvee_{c \in \mathcal{C}'} (\chi_G(\bar{u}) = c)\} \\ &= \dot{\bigcup}_{c \in \mathcal{C}'} \{\bar{u} \in V^2 \mid \chi_G(\bar{u}) = c\} \\ &= \dot{\bigcup}_{c \in \mathcal{C}'} CC(c) \end{aligned}$$

Notons qu'une multiclasse de couleur peut contenir à la fois des sommets et des arêtes, et cela même si le graphe est bien dissociant. Dans le cas où une multiclasse ne contient que des sommets, on parle de *multiclasse de couleur de sommet* et on utilise l'abréviation *MCCS*. De manière analogue, on parle de *multiclasse de couleur d'arête* qu'on désigne par *MCCA*.

Proposition 4.1.1. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. Soit $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_G$. Alors $G \in \Gamma_V$ et C , une multiclasse de couleur de G . Pour $\bar{u}, \bar{v} \in V^2$ tels que $\bar{u} \in C$ et $\bar{v} \notin C$, on a que $\chi_G(\bar{u}) \neq \chi_G(\bar{v})$.

Preuve. Par définition de C , il existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_G$ tel que $C = \{\bar{w} \in V^2 \mid \chi_G(\bar{w}) \in \mathcal{C}'\}$. Donc, pour $\bar{w} \in V^2$, on a $\bar{w} \in C$ si et seulement si $\chi_G(\bar{w}) \in \mathcal{C}'$. Ainsi, pour $\bar{u} \in C$ et

$\bar{v} \notin C$ de l'énoncé, on a que $\chi_G(\bar{u}) \in \mathcal{C}'$ et $\chi_G(\bar{v}) \notin \mathcal{C}'$. Il est donc impossible à ce que $\chi_G(\bar{u}) = \chi_G(\bar{v})$. \square

4.2 Incidence et voisinages

Définition 4.2.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. Soit $S \subseteq V^2$ et C , une CCS de G . On dit que S est *incident de* C si et seulement s'il existe $(u, v) \in S$ tel que $(u, u) \in C$ ou $(v, v) \in C$.

S'il existe $(u, v) \in S$ tel que $(u, u) \in C$, alors S est dit *incident à gauche de* C et s'il existe $(u, v) \in S$ tel que $(v, v) \in C$, alors S est dit *incident à droite de* C .

On dit également que S est *incident uniquement de* C lorsque, pour tout $(u, v) \in S$, on a $(u, u), (v, v) \in C$.

Soit B , un ensemble ne contenant que des CCS de G . On dit alors que S est *incident (à gauche/à droite) de* B s'il existe $C \in B$ tel que S est incident (à gauche/à droite) de C .

On dit aussi que S est *incident uniquement de* B si le fait que S soit incident à une CCS C implique alors que $C \in B$.

Plus tard, comme exemple de B , nous utilisons les ensembles des grandes CCS et des petites CCS, qui sont définies au chapitre 7.

Notation 4.2.1. $I(v) := \{(v, w) \mid w \in V\}$ et $I_E(v) := \{(v, w) \mid w \in E\}$.

Par abus de notation, si $C \subseteq V^2$ est une CCS ou MCCS de G , alors

$$I_C(v) := \{(v, w) \mid (w, w) \in C\} \text{ et } I_{V-C}(v) := \{(v, w) \mid (w, w) \notin C\}.$$

Remarquons que la notation ?? revient à sélectionner des arêtes reliées à v en fonction de l'inclusion de leurs seconds sommets dans un certain ensemble (ce dernier pouvant être une CCS, par exemple).

D'une façon similaire, dans la définition suivante, pour un $v \in V$, on sélectionne des sommets en fonction de la couleur des arêtes les reliant à v .

Définition 4.2.2. (Kiefer et Schweitzer, 2016)

Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. Soit $v \in V$ et un ensemble de couleurs $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_G$.

- Le *voisinage interne* de v , noté $N_{G,\mathcal{C}'}^-(v)$ ou $N_{\mathcal{C}'}^-(v)$ est défini par

$$\{u \in V \mid \chi_G(u, v) \in \mathcal{C}'\}.$$

- Le *voisinage externe* de v , noté $N_{G,\mathcal{C}'}^+(v)$ ou $N_{\mathcal{C}'}^+(v)$ est définie par

$$\{u \in V \mid \chi_G(v, u) \in \mathcal{C}'\}.$$

Dans le simple cas d'une couleur $c \in \mathcal{C}_G$, $N_{G,c}^-(v) := \{u \in V \mid \chi_G(u, v) = c\}$. On a aussi une définition analogue pour $N_c^+(v)$.

Si on utilise plutôt une CCA ou MCCA C , alors $N_C^-(v) := \{u \in V \mid (u, v) \in C\}$. On a aussi une définition analogue pour $N_C^+(v)$.

4.3 Les relations \succeq et \succeq_E

La relation \succeq et ses dérivées \succ et \equiv ont été introduites dans le chapitre précédent, mais il reste des propriétés utiles et intéressantes à présenter.

Proposition 4.3.1. Soit V , un ensemble fini non vide.

- 1) Un raffinement non strict est une équivalence. Plus précisément, pour $G, G' \in \Gamma_V$, ($G \succeq G'$ et $G \not\succ G'$) si et seulement si $G \equiv G'$.

- 2) Un raffinement est strict s'il n'est pas un raffinement de l'autre sens. Formellement, pour $G, G' \in \Gamma_V$, ($G \succeq G'$ et $G' \not\succeq G$) si et seulement si $G > G'$.

La preuve se fait directement avec les définitions.

Définition 4.3.1. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. On dit alors que G a une *coloration discrète* si χ_G est injectif (et donc bijectif). Autrement dit, aucune arête dans V^2 n'a la même couleur qu'une autre.

Proposition 4.3.2. Soit V un ensemble fini non vide, et $G, G_d \in \Gamma_V$. Si G_d a une coloration discrète, alors $G \succeq G_d$.

Preuve. Soit $\bar{u}, \bar{v} \in V^2$ tel que $\chi_{G_d}(\bar{u}) = \chi_{G_d}(\bar{v})$. Comme χ_{G_d} est injectif, on a que $\bar{u} = \bar{v}$. On en déduit donc que $\chi_G(\bar{u}) = \chi_G(\bar{v})$. \square

Corollaire 4.3.1. Soit V un ensemble fini non vide. Tout graphe à coloration discrète est un élément minimal de Γ_V pour la relation d'ordre \succeq . Formellement, soit $G_d \in \Gamma_V$ à coloration discrète, alors pour tout $G \in \Gamma_V$, $G_d \succeq G$ implique $G_d \equiv G$.

Il est aussi pertinent d'introduire la notation \succeq_E , qui est utile dans les circonstances où le raffinement est valide seulement pour un sous-ensemble des sommets et arêtes des graphes colorés.

Définition 4.3.2. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide, et $G, G' \in \Gamma_V$. Soit $E \subseteq V^2$.

- 1) On dit que G' est un *raffinement sur E* de G et on note $G \succeq_E G'$ si pour tous $\bar{u}, \bar{v} \in E$ tels que $\chi_{G'}(\bar{u}) = \chi_{G'}(\bar{v})$, alors $\chi_G(\bar{u}) = \chi_G(\bar{v})$.
- 2) On dit que G et G' sont *équivalents sur E* et on écrit $G \equiv_E G'$ si $G \succeq_E G'$ et $G' \succeq_E G$.
- 3) On dit que G' est un *raffinement strict sur E* de G et on note $G >_E G'$ si $G \succeq_E G'$ et $G \not\succeq_E G'$.

Notons que $G \succeq_{V^2} G'$ est équivalent à $G \succeq G'$. Aussi, la proposition 4.3.1 se généralise à \succeq_E .

Proposition 4.3.3. Soit V un ensemble fini non vide, et $G, G' \in \Gamma_V$. Soit $E \subseteq E' \subseteq V^2$.

- 1) Si $G \succeq_{E'} G'$, alors $G \succeq_E G'$.
- 2) Si $G \equiv_{E'} G'$, alors $G \equiv_E G'$.

Preuve. La preuve découle de la définition 4.3.2. \square

De cette proposition, en prenant $E' := V^2$ et $E \subseteq V^2$, on a directement que $G \succeq G'$ implique $G \succeq_E G'$. Par contre, il est généralement faux que $G > G'$ implique $G >_E G'$. Il faut rajouter une condition supplémentaire à cela et c'est ce que fait la proposition 4.3.4.

Proposition 4.3.4.

Soit V un ensemble fini non vide, et $G, G' \in \Gamma_V$. Soit $E \subseteq E' \subseteq V^2$. Si $G \succeq G'$ et $G >_E G'$, alors $G >_{E'} G'$.

Preuve. Par la proposition 4.3.1, $G >_{E'} G'$ est équivalent à $G \succeq_{E'} G'$ et $G' \not\leq_{E'} G$. Montrons ces deux parties à part.

De $G \succeq G'$, on déduit directement par la proposition 4.3.3 que $G \succeq_{E'} G'$.

De $G >_E G'$, par la proposition 4.3.1, on infère que $G' \not\leq_E G$. Cela veut dire qu'il existe $\bar{u}, \bar{v} \in E$ tels que $\chi_G(\bar{u}) = \chi_G(\bar{v})$ et $\chi_{G'}(\bar{u}) \neq \chi_{G'}(\bar{v})$. Comme $E \subseteq E'$, $\bar{u}, \bar{v} \in E'$, donc $G' \not\leq_{E'} G$ par définition. \square

Proposition 4.3.5. Soit V un ensemble fini non vide, et $G, G' \in \Gamma_V$ tels que $G \succeq G'$. Soit C , une multiclass de couleur de G . C est alors une multiclass de couleur de G' .

Preuve. Comme C est une multiclass de couleur de G , alors il existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_G$ tel que $C = \{\bar{v} \in V^2 \mid \chi_G(\bar{v}) \in \mathcal{C}'\}$. Donc, pour $\bar{v} \in V^2$, $\bar{v} \in C$ si et seulement si $\chi_G(\bar{v}) \in \mathcal{C}'$.

Remarquons que $\chi_{G'}(C) \subseteq \mathcal{C}_{G'}$. Pour démontrer la proposition, prouvons que $C = \{\bar{v} \in V^2 \mid \chi_{G'}(\bar{v}) \in \chi_{G'}(C)\}$. Cela est équivalent à montrer que pour tout $\bar{v} \in V^2$, $\bar{v} \in C$ si et seulement si $\chi_{G'}(\bar{v}) \in \chi_{G'}(C)$.

Comme $\chi_{G'}(\bar{v}) \in \chi_{G'}(C)$ pour tout $\bar{v} \in C$, il nous reste à démontrer la réciproque. En supposant que $\chi_{G'}(\bar{v}) \in \chi_{G'}(C)$, alors il existe $\bar{u} \in C$ tel que $\chi_{G'}(\bar{v}) = \chi_{G'}(\bar{u})$. Par $G \succeq G'$, on infère de la dernière égalité que $\chi_G(\bar{v}) = \chi_G(\bar{u})$ et donc $\chi_G(\bar{v}) \in \chi_G(C) = \mathcal{C}'$. Finalement, par le résultat du premier paragraphe, $\bar{v} \in C$. \square

Un cas spécifique de la dernière proposition est de prendre pour C une classe de couleur de G . Ainsi, si $G \succeq G'$, une classe de couleur de G reste une classe de couleur pour G' ou alors elle devient une multiclass stricte de couleur de G' .

Proposition 4.3.6. Soit V un ensemble fini non vide, et $G, G' \in \Gamma_V$ tels que $G \succeq G'$. Soit C une classe de couleur de G , telle que $G \equiv_C G'$. C est alors une classe de couleur de G' .

Preuve. Soit $\bar{u} \in C$ quelconque. Comme C est une classe de couleur de G , on a que $C = \{\bar{v} \in V^2 \mid \chi_G(\bar{v}) = \chi_G(\bar{u})\}$.

Montrons que $C = \{\bar{v} \in V^2 \mid \chi_{G'}(\bar{v}) = \chi_{G'}(\bar{u})\}$, ce qui implique que C est une classe de couleur de G' . Cela revient à montrer que pour tout $\bar{v} \in V^2$, $\chi_{G'}(\bar{v}) = \chi_{G'}(\bar{u})$ si et seulement si $\bar{v} \in C$.

Pour prouver l'implication directe, supposons $\chi_{G'}(\bar{v}) = \chi_{G'}(\bar{u})$. Par $G \succeq G'$, cela implique que $\chi_G(\bar{v}) = \chi_G(\bar{u})$, ce qui implique que $\bar{v} \in C$, par le premier paragraphe de la démonstration.

Pour prouver la réciproque, supposons $\bar{v} \in C$, ce qui implique comme plus haut que $\chi_G(\bar{v}) = \chi_G(\bar{u})$. Par $G \equiv_C G'$ et $\bar{u}, \bar{v} \in C$, on en déduit que $\chi_{G'}(\bar{v}) = \chi_{G'}(\bar{u})$.

□

Proposition 4.3.7. Soit V un ensemble fini non vide, et $G, G' \in \Gamma_V$. Soit $E \subseteq V^2$.

- 1) Si $G \succeq_E G'$, alors $|\chi_G(E)| \leq |\chi_{G'}(E)|$.
- 2) Si $G \equiv_E G'$, alors $|\chi_G(E)| = |\chi_{G'}(E)|$.
- 3) Si $G >_E G'$, alors $|\chi_G(E)| < |\chi_{G'}(E)|$.

Preuve. 1) Supposons $G \succeq_E G'$.

On définit alors l'application $s : \chi_{G'}(E) \rightarrow \chi_G(E)$ telle que $s(\chi_{G'}(\bar{u})) = \chi_G(\bar{u})$ pour tout $\bar{u} \in E$. La figure 4.1 est un exemple permettant de visualiser s .

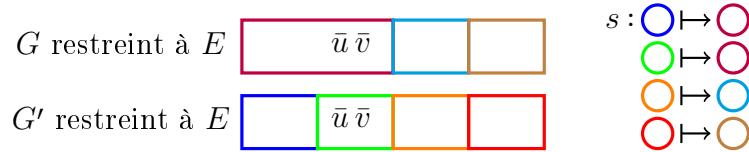
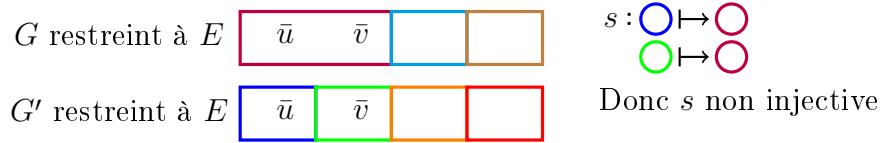


FIGURE 4.1 Illustration du raffinement $G \succeq_E G'$ et de la fonction s

Cette fonction est bien définie. En effet, quelque soit $\bar{u}, \bar{v} \in E$ tels que $\chi_{G'}(\bar{u}) = \chi_{G'}(\bar{v})$, la définition de $G \succeq_E G'$ implique alors $\chi_G(\bar{u}) = \chi_G(\bar{v})$. Ainsi, on a que $s(\chi_{G'}(\bar{u})) = s(\chi_{G'}(\bar{v}))$.

La fonction s est aussi surjective, car tout élément $\chi_G(\bar{u}) \in \chi_G(E)$ admet $\chi_{G'}(\bar{u}) \in \chi_{G'}(E)$ comme préimage. On a donc que $|\chi_{G'}(E)| \geq |\chi_G(E)|$.

- 2) Supposons que $G \equiv_E G'$, ce qui équivaut à $G \succeq_E G'$ et $G' \succeq_E G$. Par 1), on obtient $|\chi_G(E)| \leq |\chi_{G'}(E)|$ et $|\chi_{G'}(E)| \leq |\chi_G(E)|$. Donc $|\chi_G(E)| = |\chi_{G'}(E)|$.
- 3) Supposons $G >_E G'$. De manière analogue à 1), on définit une même fonction s et on montre qu'elle est bien définie et surjective. La figure 4.2 illustre la fonction.

FIGURE 4.2 Illustration du raffinement $G >_E G'$ et de la fonction s

De ce dernier fait, on déduit

$$s(\chi_{G'}(E)) = \chi_G(E). \quad (*)$$

Pour ce cas, s n'est pas injectif. Pour montrer cela, remarquons que notre supposition $G >_E G'$ implique que $G' \not\leq_E G$, ce qui veut dire qu'on peut trouver deux éléments $\bar{u}, \bar{v} \in E$ tels qu'ils ne sont pas de la même couleur $\chi_{G'}$, mais tout de même de la même couleur χ_G . Ainsi, $\chi_{G'}(\bar{u})$ et $\chi_{G'}(\bar{v})$ sont deux éléments différents de $\chi_{G'}(E)$ avec la même image par s .

Comme la fonction s est non injective et $\chi_{G'}(E)$ est fini, on en déduit que $|\chi_{G'}(E)| > |s(\chi_{G'}(E))|$. Avec cela et $(*)$, on conclut que $|\chi_{G'}(E)| > |\chi_G(E)|$. \square

Proposition 4.3.8. Soit V un ensemble fini non vide, et $E \subseteq V^2$. Soit $G, G' \in \Gamma_V$ tels que $G \succeq_E G'$.

- 1) Si $|\chi_G(E)| = |\chi_{G'}(E)|$, alors $G \equiv_E G'$.
- 2) Si $|\chi_G(E)| \neq |\chi_{G'}(E)|$, alors $G >_E G'$.

Preuve. 1) Démontrons la contraposée. Avec $G \succeq_E G'$ et en supposant $G \not\leq_E G'$, on déduit que $G >_E G'$. En appliquant la proposition 4.3.7 partie 3), on obtient $|\chi_G(E)| \neq |\chi_{G'}(E)|$.

2) Toujours par contraposée, supposons que $G >_E G'$ soit faux. À cause de $G \succeq_E G'$, il est alors nécessaire que $G \equiv_E G'$. Par la proposition 4.3.7 partie 2), on conclut donc que $|\chi_G(E)| = |\chi_{G'}(E)|$. \square

Proposition 4.3.9. Soit V un ensemble fini non vide, et $E \subseteq V^2$. Soit $\{G_i\}_{i \geq 0}$, une suite décroissante (respectivement croissante) pour E d'éléments de Γ_V , c.-à-d. pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ tel que $i \leq j$, nous avons que $G_i \succeq_E G_j$ (respectivement $G_j \succeq_E G_i$). On a alors qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $G_k \equiv_E G_{k+1}$.

Preuve. Supposons le contraire, c'est-à-dire que pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors $G_i \neq_E G_{i+1}$. Comme $\{G_i\}_{i \geq 0}$ est décroissant pour E , on en déduit que $G_i \succeq_E G_{i+1}$ et donc que $G_i >_E G_{i+1}$. Avec ce résultat et par la proposition 4.3.7, on a que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $|\chi_{G_i}(E)| < |\chi_{G_{i+1}}(E)|$.

Ainsi, $\{|\chi_{G_i}(E)|\}_{i \geq 0}$ est une suite strictement croissante d'entiers. Cela contredit le fait que pour toute fonction χ avec domaine V^2 , $|\chi(E)| \leq |\chi(V^2)| \leq |V^2| \in \mathbb{N}$.

Dans le cas où la suite $\{G_i\}_{i \geq 0}$ est croissante pour E , de manière analogue, $\{|\chi_{G_i}(E)|\}_{i \geq 0}$ est alors une suite strictement décroissante de naturels, ce qui est impossible. \square

4.4 Raffinements atomiques et composés

De ce que nous avons vu, les raffinements de graphes colorés se classifient en équivalences et en raffinements stricts. Nous allons, de plus, distinguer deux types de raffinements stricts, soit les raffinements atomiques et les raffinements composés.

Définition 4.4.1. Soit V un ensemble fini non vide, et $E \subseteq V^2$. Soit $G, G' \in \Gamma_V$ tels que $G >_E G'$. On dit que G' est un *raffinement atomique pour E* de G et on le note $G >_E^* G'$ s'il n'existe pas de $G'' \in \Gamma_V$ tel que $G >_E G'' >_E G'$. Autrement, G' est dit un *raffinement composé pour E* de G et on le note $G >_E^\# G'$.

Si $E = V^2$, on utilise simplement les termes *raffinement atomique* et *raffinement composé*.

Pour le choix de notation, l'astérisque rappelle un atome, et le dièse fait penser à

une construction en blocs.

Proposition 4.4.1. Soit V un ensemble fini non vide, et $E \subseteq V^2$. Soit $G, G' \in \Gamma_V$ tels que $G >_E G'$. G' est un *raffinement atomique pour* E de G si et seulement si $|\chi_{G'}(E)| = |\chi_G(E)| + 1$.

Il est assez intuitif de voir qu'un raffinement $G > G'$ qui augmente d'au moins deux le nombre de classes de couleur ne peut être atomique. Il suffit de construire un graphe de couleur G'' qui unit deux classes de couleur distinctes de G' inclus dans la même classe de couleur de G . On a alors que $G > G'' > G'$. Nous présentons une preuve plus formelle de ce résultat.

Preuve. Pour démontrer l'implication directe, procédons par contraposée. Supposons alors que $|\chi_{G'}(E)| \neq |\chi_G(E)| + 1$. Remarquons que $G >_E G'$ implique que $|\chi_G(E)| < |\chi_{G'}(E)|$ par la proposition 4.3.7 partie 3). De tout cela, on déduit que

$$|\chi_G(E)| < |\chi_{G'}(E)| - 1. \quad (*)$$

Construisons maintenant $G'' \in \Gamma_V$ tel que $G >_E G'' >_E G'$, ce qui permet de démontrer l'implication directe.

De $G >_E G'$, on en déduit que $G' \not\sim_E G$. Donc il existe $\bar{u}, \bar{v} \in E$ tels que $\chi_{G'}(\bar{u}) \neq \chi_{G'}(\bar{v})$ et $\chi_G(\bar{u}) = \chi_G(\bar{v})$. De là, on définit la fonction $\chi_{G''}$ comme une coloration similaire à $\chi_{G'}$, mais qui unit les classes de couleur de \bar{u} et \bar{v} .

Formellement, soit $\bar{w} \in V^2$,

$$\chi_{G''}(\bar{w}) := \begin{cases} \chi_{G'}(\bar{u}) & \text{si } \chi_{G'}(\bar{w}) \in \{\chi_{G'}(\bar{u}), \chi_{G'}(\bar{v})\} \\ \chi_{G'}(\bar{w}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque directement que $\chi_{G''}(E) = \chi_{G'}(E) - \{\chi_{G'}(\bar{v})\}$. Ainsi,

$$|\chi_{G''}(E)| = |\chi_{G'}(E)| - 1. \quad (**)$$

Montrons que $G'' >_E G'$. Soit $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in E$ tels que $\chi_{G'}(\bar{w}_1) = \chi_{G'}(\bar{w}_2)$. Dans le cas où $\chi_{G'}(\bar{w}_1), \chi_{G'}(\bar{w}_2) \in \{\chi_{G'}(\bar{u}), \chi_{G'}(\bar{v})\}$, alors $\chi_{G''}(\bar{w}_1) = \chi_{G'}(\bar{u}) = \chi_{G''}(\bar{w}_2)$. Dans l'autre cas, alors $\chi_{G''}(\bar{w}_1) = \chi_{G'}(\bar{w}_1) = \chi_{G'}(\bar{w}_2) = \chi_{G''}(\bar{w}_2)$. Ainsi, par définition, $G'' \succeq_E G'$. Puis, par (***) et la proposition 4.3.8 partie 2), on déduit que $G'' >_E G'$.

Finalement, montrons $G >_E G''$. Soit $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in E$ tels que $\chi_{G''}(\bar{w}_1) = \chi_{G''}(\bar{w}_2)$.

Cas 1) $\chi_{G''}(\bar{w}_1) \neq \chi_{G'}(\bar{u})$ et $\chi_{G''}(\bar{w}_2) \neq \chi_{G'}(\bar{u})$:

Par la définition de $\chi_{G''}$, $\chi_{G'}(\bar{w}_1) = \chi_{G''}(\bar{w}_1)$ et $\chi_{G'}(\bar{w}_2) = \chi_{G''}(\bar{w}_2)$. Des trois dernières égalités, on déduit que $\chi_{G'}(\bar{w}_1) = \chi_{G'}(\bar{w}_2)$. Puis, par $G \succeq_E G'$, on conclut que $\chi_G(\bar{w}_1) = \chi_G(\bar{w}_2)$.

Cas 2) $\chi_{G''}(\bar{w}_1) = \chi_{G'}(\bar{u})$ et $\chi_{G''}(\bar{w}_2) = \chi_{G'}(\bar{u})$:

Par la définition de $\chi_{G''}$, $\chi_{G'}(\bar{w}_1), \chi_{G'}(\bar{w}_2) \in \{\chi_{G'}(\bar{u}), \chi_{G'}(\bar{v})\}$. Si $\chi_{G'}(\bar{w}_1) = \chi_{G'}(\bar{w}_2)$, par $G \succeq_E G'$, on déduit $\chi_G(\bar{w}_1) = \chi_G(\bar{w}_2)$. Sinon, sans perte de généralité, on peut supposer que $\chi_{G'}(\bar{w}_1) = \chi_{G'}(\bar{u})$ et $\chi_{G'}(\bar{w}_2) = \chi_{G'}(\bar{v})$. Par $G \succeq_E G'$, on trouve $\chi_G(\bar{w}_1) = \chi_G(\bar{u})$ et $\chi_G(\bar{w}_2) = \chi_G(\bar{v})$. Avec cela, en plus de l'égalité $\chi_G(\bar{u}) = \chi_G(\bar{v})$, posée plus haut, on infère $\chi_G(\bar{w}_1) = \chi_G(\bar{w}_2)$.

En réunissant les 2 cas, on déduit que $G \succeq_E G''$. De (*) et (**), on a que $|\chi_G(E)| < |\chi_{G''}(E)|$. De ces résultats et de la proposition 4.3.8 partie 2), on obtient que $G >_E G''$.

Cela conclut la preuve directe.

Pour la réciproque, supposons que $|\chi_{G'}(E)| = |\chi_G(E)| + 1$ et montrons par contradiction que G' est un raffinement atomique pour E de G . Ainsi, supposons l'existence de $G'' = (V, \chi_{G''}) \in \Gamma_V$ tel que $G >_E G'' >_E G'$.

Par le lemme 4.3.7, $|\chi_G(E)| < |\chi_{G''}(E)| < |\chi_{G'}(E)|$. Puis, par l'implication directe de notre proposition qu'on vient tout juste de montrer, et du fait que G' est un

raffinement atomique pour E de G , on infère que $|\chi_{G'}(E)| = |\chi_G(E)| + 1$. On a alors que $|\chi_G(E)| < |\chi_{G''}(E)| < |\chi_G(E)| + 1$. Cela implique que $0 < |\chi_{G''}(E)| - |\chi_G(E)| < 1$, ce qui est absurde. \square

Proposition 4.4.2. Soit V un ensemble fini non vide, et $E \subseteq V^2$. Soit $G, G' \in \Gamma_V$ tels que $G >_E^\# G'$. Il existe alors $G'' \in \Gamma_V$ tel que $G >_E^* G'' >_E G'$.

Preuve. Supposons le contraire, qu'il existe $G, G' \in \Gamma_V$ tels que $G >_E^\# G'$, pour lesquels il n'existe pas $G'' \in \Gamma_V$ vérifiant $G >_E^* G'' >_E G'$.

Par définition, $G >_E^\# G'$ veut dire qu'il existe $G_1 \in \Gamma_V$ tel que $G >_E G_1 >_E G'$.

Il est impossible que $G >_E^* G_1$, car l'inégalité ci-dessus serait un contre-exemple de notre hypothèse initiale. On a donc que $G >_E^\# G_1$.

Par le même argument, pour tout $G_k \in \Gamma_V$ tel que $G >_E^\# G_k$, on peut trouver $G_{k+1} \in \Gamma_V$ tel que $G >_E^\# G_{k+1} >_E G_k$.

Ainsi, on construit une suite croissante $\{G_i\}_{i \geq 0}$ avec $G_0 := G'$. La proposition 4.3.9 nous dit que deux éléments consécutifs de la suite doivent être équivalents, ce qui est impossible, car tous les raffinements sont stricts. \square

Proposition 4.4.3. Soit V un ensemble fini non vide, et $E \subseteq V^2$. Soit $G, G' \in \Gamma_V$ tels que $G >_E^\# G'$. Il existe alors $G_1, \dots, G_f \in \Gamma_V$, où f est un entier positif, tels que $G >_E^* G_1 >_E^* \dots >_E^* G_f >_E^* G'$.

Cette proposition nous indique qu'il est alors possible de décomposer un raffinement strict de graphes colorés en une chaîne finie de raffinements atomiques.

Preuve. Supposons l'énoncé faux. Comme $G >_E^\# G'$, par la proposition 4.4.2, il existe $G_1 \in \Gamma_V$ tel que $G >_E^* G_1 >_E G'$. Il faut alors que $G_1 >_E^\# G'$, sinon cette chaîne serait un exemple prouvant l'énoncé vrai.

Par le même argument, pour une chaîne $G >_E^* G_1 >_E^* \dots >_E^* G_k >_E G'$, on peut construire la chaîne $G >_E^* G_1 >_E^* \dots >_E^* G_k >_E^* G_{k+1} >_E G'$.

Ainsi, on construit une suite décroissante $\{G_i\}_{i \geq 0}$ avec $G_0 := G$. La proposition 4.3.9 nous dit que deux éléments consécutifs de la suite doivent être équivalents, ce qui est impossible, car tous les raffinements sont stricts. \square

La proposition suivante, outre ses applications, nous permet de bien pouvoir visualiser en quoi consiste un raffinement atomique.

Proposition 4.4.4. Soit V un ensemble fini non vide et $G, G' \in \Gamma_V$. Soit $E \subseteq V^2$, une multiclass de couleur de G . Si $G >_E^* G'$, alors il existe une et une seule classe de couleur C de G incluse dans E qui n'est pas une classe de couleur de G' . De plus, C est l'union disjointe de deux et seulement deux classes de couleur de G' .

Ainsi, pour $E := V^2$, un raffinement atomique ne fait que scinder une et une seule classe de couleur en deux et seulement deux autres classes de couleur.

Preuve. Partie 1 : Supposons qu'il existe au moins deux classes de couleur C et C' de G incluses dans E qui ne soit pas des classes de couleur de G' .

Par la proposition 4.3.5, C et C' doivent alors être des multiclass strictes de couleurs de G' et donc des unions disjointes d'au moins deux classes de couleur chacune.

Ainsi, il existe $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in C$ et $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in C'$ tels qu'ils soient tous de couleurs différentes pour G' .

Donc,

$$\begin{aligned}
|\chi_{G'}(E)| &= |\chi_{G'}(C)| + |\chi_{G'}(C')| + |\chi_{G'}(E - C - C')| \\
&\geq |\chi_{G'}(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\})| + |\chi_{G'}(\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\})| + |\chi_{G'}(E - C - C')| \\
&= 2 + 2 + |\chi_{G'}(E - C - C')| \\
&\geq 2 + 1 + 1 + |\chi_G(E - C - C')| \text{ (par la proposition 4.3.7)} \\
&= 2 + |\chi_G(C)| + |\chi_G(C')| + |\chi_G(E - C - C')| \\
&= 2 + |\chi_G(E)|
\end{aligned}$$

Ainsi, par la proposition 4.4.1, $G \not\rightarrow_E^* G'$.

Partie 2 : Supposons qu'il existe une classe de couleur C de G incluse dans E qui est une union disjointe d'au moins trois classes de couleur de G' .

Ainsi, il existe $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3 \in C$ tels qu'il sont tous de couleurs différentes pour G' .

Donc,

$$\begin{aligned}
|\chi_{G'}(E)| &= |\chi_{G'}(C)| + |\chi_{G'}(E - C)| \\
&\geq |\chi_{G'}(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\})| + |\chi_{G'}(E - C)| \\
&= 3 + |\chi_{G'}(E - C)| \\
&\geq 2 + 1 + |\chi_G(E - C)| \text{ (par la proposition 4.3.7)} \\
&= 2 + |\chi_G(C)| + |\chi_G(E - C)| \\
&= 2 + |\chi_G(E)|
\end{aligned}$$

Ainsi, par la proposition 4.4.1, $G \not\rightarrow_E^* G'$. \square

Cela fait le tour des propriétés élémentaires sur les graphes colorés.

CHAPITRE V

LE JEU DE KIEFER-SCHWEITZER

Quand vient le temps de calculer la complexité de WL_2 , la grande difficulté revient à savoir après combien d’itérations au plus est-ce que le raffinement de WL d’un graphe coloré se stabilise.

Soit un graphe coloré G quelconque à n sommets. Définissons alors $WL_2(G)$ comme le nombre d’itérations de WL_2 à partir du graphe G jusqu’à ce que le graphe se stabilise. Le but de l’article de Kiefer et Schweitzer est alors de montrer que $WL_2(G) = (O(n^2/\log(n)))$. Dans le but de démontrer cela, ils ont conçu un jeu à deux joueurs. Dans ce mémoire, ce dernier est nommé en fonction des auteurs, donc un *jeu de Kiefer-Schweitzer*.

Faisons une analogie très simple pour comprendre les motivations derrière la formulation du jeu.

Considérons un rouleau de monnaie. Notons que plus une pièce de monnaie est *épaisse*, moins il est possible d’en insérer à l’intérieur du rouleau avant que ce dernier ne se remplisse. Si l’on peut insérer 20 exemplaires d’une pièce A et 15 exemplaires d’une pièce B, on sait alors que la pièce B est plus *épaisse* des deux.

Prenons un autre exemple, soit un nombre quelconque, disons 40. De ce nombre, on construit une chaîne d’inégalité où l’on soustrait toujours le même nombre

successivement et on s'arrête juste avant d'atteindre les négatifs. Disons que la chaîne a cinq éléments et s'arrête à 4. La question est alors de déterminer quel nombre on soustrayait à chaque fois. Il est alors aisé de déduire qu'il s'agit de 9.

$$40 > 31 > 22 > 13 > 4$$

De cela, on tire l'intuition de l'*épaisseur* d'une opération : plus une opération est *épaisse*, moins il est possible de l'itérer avant d'atteindre un minimum.

Maintenant, pour nos besoins, partons d'un graphe coloré quelconque G . Disons que l'opération à laquelle on s'intéresse maintenant est $G \rightarrow \tilde{G}$, le raffinement de Weisfeiler-Lehman (définition 3.4.1). Notons que puisque cette opération est idempotente, il n'est pas utile de l'itérer directement. Nous pouvons par contre contourner ce problème en faisant un raffinement atomique avant de réitérer l'opération.

On peut alors construire une chaîne de graphes colorés selon la relation de raffinement. Une fois le graphe à coloration discrète atteint, soit le minimum selon cette relation, la chaîne s'arrête.

La longueur de la chaîne, plus spécifiquement le nombre de fois qu'on applique $G \rightarrow \tilde{G}$ nous donne alors une idée de son *épaisseur*. Plus rigoureusement, cela nous donne une idée sur $WL_2(n)$ c.-à-d. le nombre de raffinements de Weisfeiler-Lehman maximum que nous pouvons appliquer avant que le graphe ne se stabilise, ce qui est ce que nous cherchons à borner.

Au niveau technique, le jeu de Kiefer-Schweitzer permet de réordonner certaines des opérations effectuées dans les itérations de WL_2 sans changer substantiellement le nombre d'itérations. Cela permet alors de simplifier l'analyse des opérations et ultimement d'arriver à la borne supérieure prévue.

5.1 Formalisation

Le *jeu de Kiefer-Schweitzer* est défini de la façon suivante. Il s'agit d'un jeu à deux joueurs. Chacun des joueurs raffine individuellement tour à tour un graphe coloré reçu en commençant par le joueur 1 jusqu'à ce que la coloration du graphe soit discrète. Durant la partie, un coût associé au jeu s'accumule.

Le joueur 1, recevant un graphe G , doit retourner un raffinement strict G' . Donc, il faut que $G > G'$. À chacun de ses tours, le raffinement du joueur 1 a un coût associé de 1 et on dit qu'il effectue 1 coup.

Le joueur 2, recevant un graphe G , doit retourner un raffinement non nécessairement strict G' tel que $G \geq G' \geq \tilde{G}$. Le coût associé à son tour correspond au plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel que $G' \geq G^{(k)}$, la k -ième itération de l'algorithme WL_2 . On dit alors qu'il effectue k coups.

La partie s'arrête lorsque le graphe a une coloration discrète, ce qui est équivalent à ce que $|\chi(V^2)| = |V^2|$ ou que χ soit une injection.

La définition suivante décrit cela formellement.

Définition 5.1.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide.

Une *partie de Kiefer-Schweitzer* consiste en un uplet

$$(G_0, G_1, G_2, \dots, G_{t-1}, G_t) \in \Gamma_V^{t+1}$$

respectant les propriétés suivantes :

- 1) Pour $i \in \mathbb{N}$ impair, $G_{i-1} > G_i$. En particulier, $G_0 > G_1$.
- 2) Pour $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 2$ et pair, $G_{i-1} \geq G_i \geq \tilde{G}_{i-1}$.
- 3) G_t a une coloration discrète.

Les graphes dans le uplet sont dits des *graphes joués dans le jeu*. G_0 est dit le *graphe d'entrée/initial du jeu* et G_t , le *graphe terminal/final du jeu*.

Le coût associé à une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer est défini de manière formelle ainsi.

Définition 5.1.2. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer $(G_0, G_1, G_2, \dots, G_{t-1}, G_t)$. Son *coût associé* est $\lceil t/2 \rceil + \sum_{2 \leq i \leq t \text{ pair}} \min(\{k \in \mathbb{N} \mid G_i \geq G_{i-1}^{(k)}\})$.

Ici, le premier terme est le nombre de tours effectués par le joueur 1, et donc le coût que ce dernier ajoute au coût total. La sommation correspond à la somme des coûts associés à chaque tour du joueur 2.

5.2 Propriétés

Intéressons-nous à démontrer quelques propriétés élémentaires sur le jeu de Kiefer-Schweitzer. On cherche d'abord à établir une borne supérieure sur la longueur d'une partie. Puis, on s'intéresse à démontrer l'existence de stratégies optimales pour les deux joueurs.

Proposition 5.2.1. Soit V un ensemble fini non vide. Soit une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer ayant $G \in \Gamma_V$ comme graphe initial. Sa longueur est alors finie et bornée par $O(n^2)$ où $n = |V|$.

Preuve. Supposons l'existence d'une partie $(G_0, G_1, G_2, G_3, G_4, \dots, G_k)$ de longueur k . On construit alors la chaîne

$$G_0 > G_1 \geq G_2 > G_3 \geq G_4 > \dots > G_k.$$

Notons que le dernier raffinement doit être strict, même pour k pair, sinon, en cas d'équivalence, la partie serait considérée finie dès la remise du graphe G_{k-1} qui serait à coloration discrète.

De la chaîne, de la proposition 4.3.7 et du fait que $|\chi_G(V^2)| \leq |V^2|$ pour tout graphe coloré $G \in \Gamma_V$, alors

$$0 < |\chi_{G_0}(V^2)| < |\chi_{G_1}(V^2)| < |\chi_{G_3}(V^2)| < \dots < |\chi_{G_k}(V^2)| \leq n^2.$$

Si k est pair, on infère l'existence de $1 + k/2$ entiers strictement situés entre 0 et n^2 . Il faut alors que $k/2 < n^2$ et donc que $k < 2n^2$. Autrement, si k est impair, on infère l'existence de $1 + (k - 1)/2$ entiers strictement situés entre 0 et n^2 . Il faut alors que $(k - 1)/2 < n^2$ et donc que $k < n^2/2 + 1$. \square

Au niveau des objectifs, le joueur 1 cherche à maximiser le coût total du jeu, et le joueur 2, à le minimiser. Chacun utilise pour cela une stratégie, qui consiste en une fonction ayant pour entrée l'uplet contenant le graphe que le joueur reçoit ainsi que tous les graphes joués précédemment, et pour sortie le graphe que le joueur produit. Ainsi, une *stratégie optimale pour le joueur 1* maximise le coût du jeu, tandis qu'une *stratégie optimale pour le joueur 2* le minimise.

Notons que pour chaque joueur, il existe alors une stratégie optimale ne dépendant que du graphe reçu par le joueur et d'aucun autre graphe précédent.

Disons en effet qu'un joueur joue optimalement. S'il reçoit à une certaine étape un graphe G_k , comme il a toujours pour but de minimiser le coût total d'une partie commençant par G_0 , il doit alors minimiser la somme des coûts précédents ainsi que le coût d'une partie commençant par G_k . Comme ce premier terme est constant, le joueur ne peut que minimiser le second. Il a alors seulement besoin de G_k comme entrée pour décider de sa stratégie pour minimiser le coût d'une partie commençant par G_k . Ainsi, à chaque étape, le joueur n'a besoin que de prendre en compte le graphe reçu pour jouer optimalement.

Autrement dit, chaque joueur a une stratégie optimale $S_i : \Gamma_V \rightarrow \Gamma_V$ où le graphe d'entrée est le graphe reçu par le joueur.

Si le joueur i utilise la stratégie S_i , alors $\text{val}(G; S_1, S_2)$ est défini comme étant le coût résultant d'une telle partie.

Le jeu étant fini (toute partie est de longueur finie), déterministe, à somme nulle et avec parfaite information, par le principe *Maximin-Minimax* (Zermelo, 1913), on a alors que $\max_{S_1} \min_{S_2} \text{val}(G; S_1, S_2) = \min_{S_2} \max_{S_1} \text{val}(G; S_1, S_2)$.

Lemme 5.2.1. Soit une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer où le joueur 1 suit une stratégie S'_1 telle que, si G n'est pas stable, alors $S'_1(G) = G^{(1)}$. Il existe alors une stratégie optimale pour le joueur 2 telle que, s'il reçoit un graphe coloré G , il retourne \tilde{G} .

Preuve. Supposons que le joueur 2 suive une stratégie optimale S_2 et qu'il existe une situation où il reçoit G et ne retourne pas \tilde{G} .

Construisons un arbre enraciné représentant toutes les parties possibles admettant que le joueur 2 suive S_2 et que le joueur 1 suive S'_1 .

Si la partie commence avec le graphe G_0 , ce dernier est la racine de notre arbre. Si G_0 est stable, comme nous n'avons pas précisé ce que la stratégie S'_1 retourne dans ce cas, les sommets de hauteur 1 sont formés de tous les raffinements stricts de G_0 . Autrement, G_0 a pour unique fils $G_0^{(1)}$. Notons que le graphe à coloration discrète est toujours une feuille, peu importe la hauteur. Puis, tout sommet H de hauteur 1 qui n'est pas à coloration discrète a $S_2(H)$ pour fils.

Puis, à partir de tous les sommets de hauteur 2 qui ne sont pas des feuilles, on réitère ce processus. Éventuellement, par la proposition 5.2.1, la partie doit finir et donc chaque branche se termine par des feuilles.

Le fait qu'il existe des situations où le joueur 2 ne joue pas \tilde{G} après avoir reçu G implique qu'il existe dans cet arbre au moins un sommet G de hauteur impaire (retourné par le joueur 1) ayant pour fils G' tel que $G' > \tilde{G}$ et pour lequel le sous-

arbre commençant par G ne contient aucune autre fois cette situation. Nommons cette situation (\dagger).

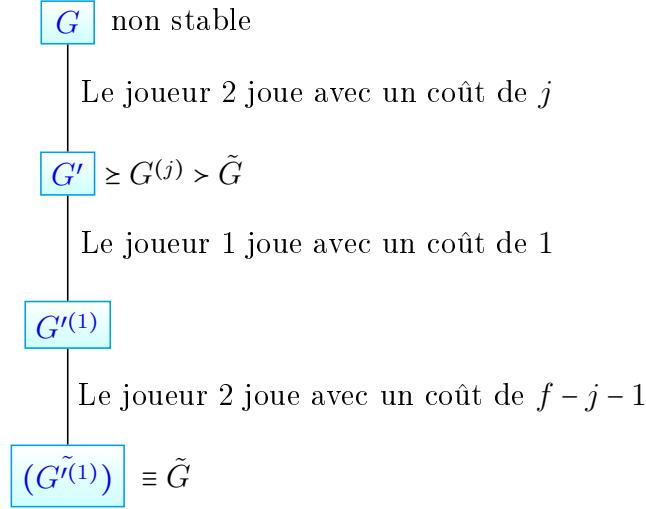
Notons que dans cette situation, G se doit d'être non stable. En effet, le joueur 2 est obligé, en recevant un graphe G , de retourner un graphe G' tel que $G \succeq G' \succeq \tilde{G}$. Or, si G était stable, on aurait alors que $G \equiv \tilde{G}$ et $G' > \tilde{G}$ serait impossible à respecter.

Nous allons maintenant montrer que le joueur 2 aurait pu jouer \tilde{G} dans cette situation sans augmenter le coût.

Dans la situation (\dagger), le joueur 2 joue alors le graphe $G' > \tilde{G}$ après avoir reçu le graphe G . Soit un entier positif j , minimum tel que $G' \succeq G^{(j)}$. Jouer G' a alors un coût de j . Comme G est non stable et $G' > \tilde{G}$, G' est alors également non stable et le joueur 1 doit retourner $G'^{(1)}$ lorsqu'on lui présente G' , ce qui a un coût de 1. Comme G a été choisi comme la dernière occurrence dans l'arbre d'un graphe tel que $S_2(G) = G' > \tilde{G}$, le joueur 2 doit jouer $(G'^{(1)})$ après que le joueur 1 ait joué $G'^{(1)}$. Par le lemme 3.7.1 et le fait que $G \succeq G'^{(1)} \succeq \tilde{G}$, on infère que $(G'^{(1)}) \equiv \tilde{G}$. Soit un entier positif f , minimal, tel que $G^{(f)} \equiv \tilde{G}$. Par le même lemme et $G' \succeq G^{(j)}$, on déduit $(G'^{(1)})^{(f-j-1)} \equiv (G')^{(f-j)} \succeq (G^{(j)})^{(f-j)} \equiv G^{(f)} \equiv \tilde{G} \equiv (G'^{(1)})$. Jouer $(G'^{(1)})$ a donc un coût de $f - j - 1$. Ces 3 coups ont donc un coût total de f . La figure 5.1 illustre la situation.

Par contre, notons que nous aurions pu nous rendre au même point si, une fois donné le graphe G , le joueur 2 rentrait directement $\tilde{G} \equiv G^{(f)}$ et cela toujours avec un coût de f . Modifions la stratégie S_2 en posant $S_2(G) := \tilde{G}$, pour ce G précis de l'arbre, c'est-à-dire pour la situation (\dagger).

Modifier S_2 change alors l'arbre de jeu. En itérant l'argument, on peut se débarrasser de toutes les situations où $S_2(G) \neq \tilde{G}$, pour G quelconque. On construit

FIGURE 5.1 La situation (\dagger)

ainsi une stratégie S_2 , optimale pour le joueur 2, dans le cas où le joueur 1 suit S'_1 , tel que $S_2(G) := \tilde{G}$ pour tout graphe G du jeu. \square .

Définissons alors $c(G) := \min_{S_2} \max_{S_1} \text{val}(G; S_1, S_2)$ qui correspond à la *valeur du jeu*, où G est son graphe d'entrée. Pour le reste de cette section, notre objectif est de montrer que $WL_2(G) \leq c(G)$.

Pour cela, remarquons en premier lieu que $c(G) = \max_{S_1} \min_{S_2} \text{val}(G; S_1, S_2) \geq \min_{S_2} \text{val}(G; S'_1, S_2)$ où S'_1 est une stratégie quelconque. Nous pouvons alors sans problème faire des restrictions sur ce que peut être S'_1 . Supposons que si G n'est pas stable (définition 3.4.2), alors $S'_1(G) = G^{(1)}$. Comme plusieurs stratégies obéissent à cette restriction, S'_1 a plusieurs valeurs possibles. Cette remarque est pertinente pour le chapitre 9.

Définissons alors la stratégie $S'_2 : \Gamma_V \rightarrow \Gamma_V$ telle que $S'_2(G) := \tilde{G}$ pour tout $G \in \Gamma_V$. Par le lemme 5.2.1, on a alors que S'_2 est optimale pour le joueur 2 si le joueur 1 suit S'_1 . On en déduit que $c(G) \geq \min_{S_2} \text{val}(G; S'_1, S_2) = \text{val}(G; S'_1, S'_2)$.

Il nous reste alors à montrer que $WL_2(G) \leq val(G, S'_1, S'_2)$. Cela n'est pas trop difficile. Remarquons que si G est stable, alors $WL_2(G) = 0$. Autrement, s'il n'est pas stable, considérons une partie commençant par le graphe G et où les joueurs suivent S'_1 et S'_2 . Le joueur 1 retourne alors en premier lieu $G^{(1)}$, pour un coût de 1, suivi de \tilde{G} pour un coût de $WL_2(G) - 1$. Le coût d'une partie après 2 coups égale donc déjà $WL_2(G)$. On conclut de tout cela que $WL_2(G) \leq c(G)$.

Les trois prochains chapitres introduisent des outils qui nous permettront ultimement de borner supérieurement la valeur de $c(G)$.

CHAPITRE VI

CONDITIONS SUR LES GRAPHES DURANT LE JEU

Lorsque le joueur 2 raffine le graphe durant une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer, il a toute la latitude lui permettant de respecter certaines conditions. Ces dernières permettent alors d'appliquer certains théorèmes sur le graphe, qu'on démontre plus tard et qui permettent ultimement d'établir la borne sur le coût du jeu.

En fait, il s'agit de déterminer des conditions, qui sont implicitement établies par le raffinement bidimensionnel de Weisfeiler-Lehman et qui permettent de simplifier son analyse, comme on le voit aux chapitres 7,8 et 9.

Ainsi, en recevant un graphe G , le joueur 2 peut le raffiner en un graphe G' tel que $G \geq G' \geq \tilde{G}$ et qu'il obéit à certaines conditions respectées par \tilde{G} .

6.1 Faire respecter la condition C1

Définition 6.1.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. On dit que G respecte la condition C1 ou respecte C1 si la couleur d'une arête détermine la couleur de ses extrémités. Formellement, pour tous $(u, v), (u', v') \in V^2$, si $\chi_G(u, v) = \chi_G(u', v')$, alors $\chi_G(u, u) = \chi_G(u', u')$ et $\chi_G(v, v) = \chi_G(v', v')$.

Comme un graphe ne respecte pas nécessairement C1, définissons une méthode

pour raffiner un graphe coloré quelconque en un graphe coloré respectant C1.

Notation 6.1.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. On définit $G_{(1)} \in \Gamma_V$ tel que pour tous $u, v \in V$ où $u \neq v$, on a

- 1) $\chi_{G_{(1)}}(u, u) := \chi_G(u, u)$,
 - 2) $\chi_{G_{(1)}}(u, v) := (\chi_G(u, v), \chi_G(u, u), \chi_G(v, v))$,
- et $\mathcal{C}_{G_{(1)}} := \chi_{G_{(1)}}(V^2)$.

Autrement dit, pour chaque arête de V^2 , on lui associe une nouvelle coloration qui *encode* sa coloration ainsi que celle de ses extrémités.

Proposition 6.1.1. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. Alors $G_{(1)}$ respecte C1.

Preuve. Montrons que $G_{(1)}$ respecte la définition.

Soit $(u, v), (u', v') \in V^2$ tels que $\chi_{G_{(1)}}(u, v) = \chi_{G_{(1)}}(u', v')$. Si $u = v$, il est alors trivial que $\chi_{G_{(1)}}(u, u) = \chi_{G_{(1)}}(u', u')$ et $\chi_{G_{(1)}}(v, v) = \chi_{G_{(1)}}(v', v')$. Sinon, en substituant dans l'hypothèse par la définition de $G_{(1)}$, on obtient l'égalité de deux triplets

$$(\chi_G(u, v), \chi_G(u, u), \chi_G(v, v)) = (\chi_G(u', v'), \chi_G(u', u'), \chi_G(v', v'))$$

d'où $\chi_G(u, u) = \chi_G(u', u')$ et $\chi_G(v, v) = \chi_G(v', v')$. Par la définition de $G_{(1)}$, on conclut que $\chi_{G_{(1)}}(u, u) = \chi_{G_{(1)}}(u', u')$ et $\chi_{G_{(1)}}(v, v) = \chi_{G_{(1)}}(v', v')$. \square

Proposition 6.1.2. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$, alors $G \succeq G_{(1)}$. Si, de plus, G ne respecte pas C1, alors on a forcément que $G > G_{(1)}$.

Preuve. Montrons que la définition de raffinement est respectée.

Cas 1) Soit $(u, u), (v, v) \in V^2$, tels que $\chi_{G_{(1)}}(u, u) = \chi_{G_{(1)}}(v, v)$. En substituant chaque côté selon la définition de $G_{(1)}$ (soit la notation 6.1.1), on obtient directement $\chi_G(u, u) = \chi_G(v, v)$.

Cas 2) Soit $(u, v), (u', v') \in V^2$, tels que $u \neq v$, $u' \neq v'$ et $\chi_{G_{(1)}}(u, v) = \chi_{G_{(1)}}(u', v')$.

Selon la définition de $G_{(1)}$, chaque côté correspond à un triplet. On en déduit alors l'égalité de leurs premières coordonnées, ce qui correspond à $\chi_G(u, v) = \chi_G(u', v')$.

Cela démontre la première partie de la proposition.

Si nous sommes dans une situation où $G \equiv G_{(1)}$, alors il faut forcément que G respecte la condition C1. En effet, en prenant $(u, v), (u', v') \in V^2$ tels que $\chi_G(u, v) = \chi_G(u', v')$, alors on déduit de l'équivalence des graphes que $\chi_{G_{(1)}}(u, v) = \chi_{G_{(1)}}(u', v')$. Puis, comme $G_{(1)}$ respecte C1 par la proposition précédente, on déduit que $\chi_{G_{(1)}}(u, u) = \chi_{G_{(1)}}(u', u')$ et $\chi_{G_{(1)}}(v, v) = \chi_{G_{(1)}}(v', v')$ et on en conclut que $\chi_G(u, u) = \chi_G(u', u')$ et $\chi_G(v, v) = \chi_G(v', v')$.

La deuxième partie de la proposition se déduit de la contraposée de l'énoncé du dernier paragraphe. \square

Raffiner afin de faire respecter C1 conserve certaines propriétés du graphe. Par exemple, la proposition 3.6.1 nous dit que, si G est bien dissociant, $G_{(1)}$ l'est également. Le respect de l'équivalence contraire est également une propriété préservée.

Proposition 6.1.3. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$, tel qu'il respecte l'équivalence contraire. Il en est alors de même pour $G_{(1)}$.

Preuve. Supposons que $G = (V, \chi)$ respecte l'équivalence contraire. Montrons que $G_{(1)} = (V, \chi_{G_{(1)}})$ le respecte aussi.

Soit $(u, v), (u', v') \in V^2$ tels que $\chi_{G_{(1)}}(u, v) = \chi_{G_{(1)}}(u', v')$. On a alors que

$$(\chi(u, v), \chi(u, u), \chi(v, v)) = (\chi(u', v'), \chi(u', u'), \chi(v', v')). \quad (*)$$

De l'égalité des premières composantes dans $(*)$ et du fait que G respecte l'équivalence contraire, on peut déduire que $\chi(v, u) = \chi(v', u')$. À partir de ce résultat,

en plus de l'égalité des deuxièmes et troisièmes composantes de $(*)$, on peut inférer l'égalité des triplets

$$(\chi(v, u), \chi(v, v), \chi(u, u)) = (\chi(v', u'), \chi(v', v'), \chi(u', u')).$$

On en conclut alors que $\chi_{G_{(1)}}(v, u) = \chi_{G_{(1)}}(v', u')$. \square

Proposition 6.1.4. Soit V un ensemble fini non vide, et $G, H \in \Gamma_V$, tel que $G \geq H$ et que G et H sont bien dissociants. Alors $G_{(1)} \geq H^{(1)}$, où l'on rappelle que $H^{(1)}$ correspond à la première itération de l'algorithme de Weisfeiler-Lehman de dimension 2.

Remarque 6.1.1. Comme $G \geq G$, on a comme conséquence directe de cette proposition que $G_{(1)} \geq G^{(1)}$. Cela veut donc dire que si le joueur 2 d'une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer raffine le graphe comme ci-dessus pour faire respecter C1, alors le coût associé est d'au plus 1.

Preuve. Cas 1) Soit $(u, u), (u', u') \in V^2$ tels que $\chi_{H^{(1)}}(u, u) = \chi_{H^{(1)}}(u', u')$. Par $H \geq H^{(1)}$, on déduit que $\chi_H(u, u) = \chi_H(u', u')$. Puis, par $G \geq H$, on infère $\chi_G(u, u) = \chi_G(u', u')$. Finalement, par la définition de $G_{(1)}$, on obtient que $\chi_{G_{(1)}}(u, u) = \chi_{G_{(1)}}(u', u')$.

Cas 2) Soit $(u, v), (u', v') \in V^2$, tels que $u \neq v$, $u' \neq v'$ et $\chi_{H^{(1)}}(u, v) = \chi_{H^{(1)}}(u', v')$. Cette équation correspond à une égalité de deux couples. L'égalité des premières composantes s'exprime

$$\chi_H(u, v) = \chi_H(u', v'). \tag{*}$$

Quant à l'égalité des deuxièmes composantes, elle s'écrit

$$\{(\chi_H(w, v), \chi_H(u, w)) | w \in W\} = \{(\chi_H(w, v'), \chi_H(u', w)) | w \in W\}. \tag{**}$$

On remarque que le multiensemble écrit à gauche dans $(**)$ ne contient des couleurs de sommets de V^2 que pour les couples $(\chi_H(u, v), \chi_H(u, u))$ et $(\chi_H(v, v), \chi_H(u, v))$.

Quant au multiensemble de droite, la même remarque s'applique et on a que $(\chi_H(u', v'), \chi_H(u', u'))$ et $(\chi_H(v', v'), \chi_H(u', v'))$ sont ses seuls éléments contenant des sommets de V^2 .

Comme les deux multiensembles sont égaux, chaque élément de l'un doit être égal à un élément de l'autre. Ensuite, puisque les graphes sont bien dissociants, un sommet de V^2 ne peut pas avoir une même couleur qu'une arête de V^2 . Ainsi, pour les couples ci-dessus, il est seulement possible que $(\chi_H(u, v), \chi_H(u, u)) = (\chi_H(u', v'), \chi_H(u', u'))$ et $(\chi_H(v, v), \chi_H(u, v)) = (\chi_H(v', v'), \chi_H(u', v'))$. De cela, on infère $\chi_H(u, u) = \chi_H(u', u')$ et $\chi_H(v, v) = \chi_H(v', v')$.

Puis, comme $G \succeq H$, on déduit des dernières égalités et de $(*)$ que $\chi_G(u, v) = \chi_G(u', v')$, $\chi_G(u, u) = \chi_G(u', u')$ et $\chi_G(v, v) = \chi_G(v', v')$.

À partir de là, on peut inférer l'égalité des triplets

$$(\chi_G(u, v), \chi_G(u, u), \chi_G(v, v)) = (\chi_G(u', v'), \chi_G(u', u'), \chi_G(v', v')).$$

Puis, on peut déduire par la définition de $G_{(1)}$ que $\chi_{G_{(1)}}(u, v) = \chi_{G_{(1)}}(u', v')$. \square

6.2 Faire respecter la condition C2

En raffinant son graphe reçu lors d'une partie, le joueur 2 vise à ce que celui-ci respecte la propriété que deux sommets de même couleur aient des voisnages similaires en terme de couleur. Énoncé plus précisément, le joueur 2 désire obtenir un graphe dans lequel, pour une couleur de sommet quelconque s et une couleur d'arête quelconque a , deux sommets de même couleur ont le même nombre de sommets de couleur s reliés à eux par une arête de couleur a .

Définition 6.2.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016)

Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$, bien dissociant. On dit qu'il *respecte*

la condition C2 ou respecte C2 si la condition suivante est vérifiée. Soit C , une CCA de G , et soit C_1, C_2 , des CCS de G . On a alors que

1) pour tous $v_1, v_2 \in C_1$,

$$|N_C^+(v_1) \cap C_2| = |N_C^+(v_2) \cap C_2| \text{ et } |N_C^-(v_1) \cap C_2| = |N_C^-(v_2) \cap C_2|,$$

2) pour tous $u_1, u_2 \in C_2$,

$$|N_C^+(u_1) \cap C_1| = |N_C^+(u_2) \cap C_1| \text{ et } |N_C^-(u_1) \cap C_1| = |N_C^-(u_2) \cap C_1|.$$

Comme précédemment, trouvons une méthode de raffinement du graphe pour faire respecter C2.

Notation 6.2.1. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. On définit $G_{(2)} \in \Gamma_V$ tel que pour tous $u, v \in V$ où $u \neq v$,

$$1) \chi_{G_{(2)}}(u, v) := \chi_G(u, v)$$

$$2) \chi_{G_{(2)}}(u, u) := \left(\chi_G(u, u), \{(\chi_G(w, u), \chi_G(u, w)) \mid w \in V\} \right)$$

$$\text{et } \mathcal{C}_{G_{(2)}} := \chi_{G_{(2)}}(V^2).$$

Il est facile de montrer que pour $G \in \Gamma_V$, alors $G \succeq G_{(2)}$. Ainsi, par la proposition 3.6.1, si G est bien dissociant, il en est de même pour $G_{(2)}$.

Notons qu'on peut montrer que $G_{(2)}$ respecte l'équivalence contraire si G la respecte initialement, car ce raffinement ne modifie que les couleurs des sommets de V^2 .

Proposition 6.2.1. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$ tel qu'il est bien dissociant et respecte l'équivalence contraire. Si G respecte C1, alors $G_{(2)}$ respecte C2.

Preuve. Soit C , une CCA de $G_{(2)}$, et soit C_1, C_2 , des CCS de $G_{(2)}$. Prenons $v_1, v_2 \in C_1$. On a alors forcément que $\chi_{G_{(2)}}(v_1, v_1) = \chi_{G_{(2)}}(v_2, v_2)$. L'égalité de

couples impliquant l'égalité de leurs deuxièmes composantes, on a alors que

$$\{\{(\chi_G(w, v_1), \chi_G(v_1, w)) \mid w \in V\}\} = \{\{(\chi_G(w, v_2), \chi_G(v_2, w)) \mid w \in V\}\}.$$

L'égalité de deux multiensembles des couples de couleurs signifie que chaque couple de couleurs a autant de représentants dans un multiensemble que dans l'autre. Ainsi, pour tout couple (c_1, c_2) de couleurs de G ,

$$\begin{aligned} & |\{w \in V \mid (\chi_G(v_1, w), \chi_G(w, v_1)) = (c_1, c_2)\}| \\ &= |\{w \in V \mid (\chi_G(v_2, w), \chi_G(w, v_2)) = (c_1, c_2)\}|. \end{aligned} \quad (*)$$

Soit c la couleur de G associée à la classe de couleur C . Comme G respecte l'équivalence contraire, par la proposition 3.3.1, il existe \bar{c} une couleur de G qui correspond à la couleur duale de c .

Donc,

$$\begin{aligned} |N_C^+(v_1)| &= |N_c^+(v_1)| \\ &= |\{w \in V \mid \chi_G(v_1, w) = c\}| \\ &= |\{w \in V \mid \chi_G(v_1, w) = c \text{ et } \chi_G(w, v_1) = \bar{c}\}| \\ &= |\{w \in V \mid (\chi_G(v_1, w), \chi_G(w, v_1)) = (c, \bar{c})\}| \\ &= |\{w \in V \mid (\chi_G(v_2, w), \chi_G(w, v_2)) = (c, \bar{c})\}| \text{ en utilisant } (*) \\ &= |\{w \in V \mid \chi_G(v_2, w) = c \text{ et } \chi_G(w, v_2) = \bar{c}\}| \\ &= |\{w \in V \mid \chi_G(v_2, w) = c\}| \\ &= |N_c^+(v_2)| \\ &= |N_C^+(v_2)| \end{aligned}$$

De manière analogue, on trouve que $|N_C^-(v_1)| = |N_C^-(v_2)|$.

Comme G respecte C1, la couleur d'une arête détermine la couleur de ses sommets. Prenons la convention d'écriture suivante. Si $c := \chi_G(a, b)$, alors on écrit $\overleftarrow{c} :=$

$\chi_G(a, a)$ et $\vec{c} := \chi_G(b, b)$. De même, si C correspond à la classe de couleur de c , alors \overleftarrow{C} correspond de même pour \overleftarrow{c} et similairement pour \overrightarrow{C} et \overrightarrow{c} .

À partir de cela, remarquons :

$$\begin{aligned}
N_C^+(v_1) &= N_c^+(v_1) \\
&= \{w \in V \mid \chi_G(v_1, w) = c\} \\
&= \{w \in V \mid \chi_G(v_1, w) = c \text{ et } \chi_G(w, w) = \vec{c}\} \\
&= \{w \in V \mid \chi_G(v_1, w) = c\} \cap \{w \in V \mid \chi_G(w, w) = \vec{c}\} \\
&= N_c^+(v_1) \cap \overrightarrow{C} \\
&= N_C^+(v_1) \cap \overrightarrow{C}
\end{aligned}$$

De même, on peut prouver que $N_C^-(v_1) = N_C^-(v_1) \cap \overleftarrow{C}$.

Montrons finalement que $G_{(2)}$ respecte C2. Pour cela, démontrons que la condition C1) de la définition est respectée, la deuxième se prouvant de la même manière par symétrie.

Si $C_2 = \overrightarrow{C}$, alors $|N_C^+(v_1) \cap C_2| = |N_C^+(v_1)| = |N_C^+(v_2)| = |N_C^+(v_2) \cap C_2|$.

Si $C_2 \neq \overrightarrow{C}$, alors

$$\begin{aligned}
|N_C^+(v_1) \cap C_2| &= |(N_C^+(v_1) \cap \overrightarrow{C}) \cap C_2| \\
&= |N_C^+(v_1) \cap (\overrightarrow{C} \cap C_2)| \\
&= |N_C^+(v_1) \cap \emptyset| \\
&= |\emptyset| \\
&= 0
\end{aligned}$$

Puis, de même, $|N_C^+(v_1) \cap C_2| = 0$, ainsi la condition est respectée dans ce cas.

La deuxième égalité de la condition C1 se prouve de manière analogue. \square

En conséquence directe de cette proposition, si G ne respecte pas C2, alors $G > G_{(2)}$. L'argument est analogue à celui pour C1.

Proposition 6.2.2. Soit V un ensemble fini non vide, et $G, H \in \Gamma_V$, tels que $G \succeq H$ et que G et H sont bien dissociants. Alors $G_{(2)} \succeq H^{(1)}$.

Preuve. Soit $(u, v), (u', v') \in V$.

Si $\chi_{H^{(1)}}(u, v) = \chi_{H^{(1)}}(u', v')$, alors

$$\begin{aligned} & \left(\chi_H(u, v), \{\{(\chi_H(w, v), \chi_H(u, w)) \mid w \in V\}\} \right) \\ &= \left(\chi_H(u', v'), \{\{(\chi_H(w', v'), \chi_H(u', w')) \mid w' \in V\}\} \right). \end{aligned}$$

Cas 1) $u \neq v$ et $u' \neq v'$

Par l'égalité des premières composantes de l'équation ci-dessus, on a que $\chi_H(u, v) = \chi_H(u', v')$. Puis, on déduit $\chi_G(u, v) = \chi_G(u', v')$ par $G \succeq H$. En substituant avec la notation 6.2.1, on conclut que $\chi_{G_{(2)}}(u, v) = \chi_{G_{(2)}}(u', v')$.

Cas 2) $u = v$ et $u' = v'$

La même égalité ci-dessus devient alors

$$\begin{aligned} & \left(\chi_G(u, u), \{\{(\chi_G(w, u), \chi_G(u, w)) \mid w \in V\}\} \right) \\ &= \left(\chi_G(u', u'), \{\{(\chi_G(w', u'), \chi_G(u', w')) \mid w' \in V\}\} \right). \end{aligned}$$

Par définition, $\chi_{G_{(2)}}(u, u) = \chi_{G_{(2)}}(u', u')$. \square

6.3 Faire respecter les deux conditions

Si le joueur 2 souhaite que son graphe respecte les deux conditions, une méthode simple est d'itérer les raffinements pour faire respecter C1 et C2, jusqu'à ce que

ces deux dernières soient satisfaites. En effet, le rétablissement de la propriété C1 peut faire en sorte que C2 ne soit plus vérifiée et vice-versa. Par la proposition 6.3.4, ce processus doit s'arrêter.

Définition 6.3.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. Un *nettoyage* de G , noté $\text{nett}(G)$ consiste en un raffinement de G dans le but de faire respecter C1, puis, si nécessaire, en un autre afin de faire respecter C2. Formellement,

$$\text{nett}(G) := \begin{cases} G_{(1)} & \text{si } G_{(1)} \text{ respecte C2} \\ (G_{(1)})_{(2)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 6.3.1. Soit V un ensemble fini non vide, et $G, H \in \Gamma_V$, tels que $G \succeq H$ et que G et H sont bien dissociants. On a alors que $\text{nett}(G) \succeq H^{(2)}$.

Remarque 6.3.1. Comme $G \succeq G$, on en déduit que $\text{nett}(G) \succeq G^{(2)}$. Autrement dit, le fait que le joueur 2 applique un nettoyage dans une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer a un coût d'au plus 2.

Preuve. Cas 1) $\text{nett}(G) = G_{(1)}$

Par la proposition 6.1.4, on a que $G_{(1)} \succeq H^{(1)}$. Dans ce cas, $\text{nett}(G) = G_{(1)} \succeq H^{(1)} \succeq H^{(2)}$.

Cas 2) $\text{nett}(G) = (G_{(1)})_{(1)}$

Par la proposition 6.1.4, on a que $G_{(1)} \succeq H^{(1)}$. Puis, par la proposition 3.6.1, $G_{(1)}$ est alors bien dissociant. De ces deux résultats et de la proposition 6.2.2, on déduit que $(G_{(1)})_{(2)} \succeq (H^{(1)})^{(1)} = H^{(2)}$. \square

Le principal problème ici est qu'il est possible que le raffinement afin de faire respecter C2 brise la condition C1. Par les prochains lemmes, nous allons montrer qu'itérer des nettoyages sur le graphe va éventuellement faire respecter C1 et C2.

Proposition 6.3.2. Soit V un ensemble fini non vide, et $G, G' \in \Gamma_V$ tels que G respecte C1 et $G \succeq G'$. Alors $G \equiv_S G'$ implique que G' respecte C1.

Rappelons qu'ici \mathcal{S} correspond à l'ensemble des sommets de V^2 .

Preuve. Supposons $G \equiv_{\mathcal{S}} G'$.

Soit $(u, v), (u', v') \in V^2$ tels que $\chi_{G'}(u, v) = \chi_{G'}(u', v')$.

Par $G \succeq G'$, on en déduit que $\chi_G(u, v) = \chi_G(u', v')$.

Puis, comme G respecte C1, on infère $\chi_G(u, u) = \chi_G(u', u')$ et $\chi_G(v, v) = \chi_G(v', v')$.

Finalement, par $G \equiv_{\mathcal{S}} G'$, on a que $\chi_{G'}(u, u) = \chi_{G'}(u', u')$ et $\chi_{G'}(v, v) = \chi_{G'}(v', v')$

Donc, G' respecte C1. \square

Proposition 6.3.3. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$, tel que $\text{nett}(G)$ ne respecte pas C1. Alors une classe de couleur de sommets a été scindée. Formellement, $G >_{\mathcal{S}} \text{nett}(G)$.

Preuve. Si $\text{nett}(G) = G_{(1)}$, alors $\text{nett}(G)$ doit respecter C1. Il faut donc s'intéresser au cas où $\text{nett}(G) = (G_{(1)})_{(2)}$.

Il est clair que $G_{(1)} \succeq \text{nett}(G)$ et donc que

$$G_{(1)} \succeq_{\mathcal{S}} \text{nett}(G) \quad (*)$$

Comme $G_{(1)}$ respecte C1, que $G_{(1)} \succeq \text{nett}(G)$ et que $\text{nett}(G)$ ne respecte pas C1, alors par contraposée de la proposition 6.3.2, on a que $G_{(1)} \neq_{\mathcal{S}} \text{nett}(G)$.

Par ce dernier résultat et (*), on obtient $G_{(1)} >_{\mathcal{S}} \text{nett}(G)$ et donc $G >_{\mathcal{S}} \text{nett}(G)$. \square

Proposition 6.3.4. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $k < |V|$ et $\text{nett}^k(G)$ respecte C1.

Preuve. Supposons le contraire, soit qu'il n'existe pas de k strictement plus petit que $n := |V|$ tel que $\text{nett}^k(G)$ respecte C1.

Ainsi, pour i quelconque tel que $1 \leq i \leq n - 1$, on a que $\text{nett}^i(G)$ ne respecte pas C1. On peut alors inférer $\text{nett}^{i-1}(G) >_{\mathcal{S}} \text{nett}^i(G)$ par la proposition 6.3.3.

On peut alors construire la chaîne

$$G >_{\mathcal{S}} \text{nett}(G) >_{\mathcal{S}} \text{nett}^2(G) >_{\mathcal{S}} \cdots >_{\mathcal{S}} \text{nett}^{n-1}(G).$$

En appliquant la proposition 4.3.7 avec $E = \mathcal{S}$, on déduit

$$0 < |\chi_G(\mathcal{S})| < |\chi_{\text{nett}(G)}(\mathcal{S})| < \cdots < |\chi_{\text{nett}^{n-1}(G)}(\mathcal{S})| \leq n.$$

On déduit donc l'existence de n entiers strictement situés entre 0 et n , ce qui est absurde. \square

Définition 6.3.2. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. Soit $k \in \mathbb{N}$, le minimum tel que $\text{nett}^k(G)$ respecte C1. On dit alors que $\text{nett}^k(G)$ correspond au *nettoyage complet de G* , noté $\text{nett}_c(G)$.

Nous avons introduit la notion de nettoyage complet pour que le joueur 2 d'une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer puisse en effectuer sur les graphes qu'il reçoit. Par contre, pour s'assurer que cela soit permis par les règles du jeu, nous avons besoin de la proposition suivante. Il s'agit en fait de montrer que le coût supplémentaire induit par les nettoyages complets est asymptotiquement négligeable en comparaison de la borne visée, comme nous le détaillerons au chapitre 9.

Proposition 6.3.5. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$, bien dissociant. On a alors que $\text{nett}_c(G) \geq \tilde{G}$.

Remarque 6.3.2. Ce résultat a simplement pour but de montrer que le joueur 2 a le droit d'effectuer un nettoyage complet sur son graphe, car, s'il reçoit un graphe G , il doit selon les règles du jeu, retourner un graphe G' tel que $G \geq G' \geq \tilde{G}$. Ainsi, si le joueur 2 effectue un nettoyage complet en premier lieu, on retrouve la chaîne de raffinement $G \geq \text{nett}_c(G) \geq G' \geq \tilde{G}$, ce qui est possible, car on aura prouvé que $\text{nett}_c(G) \geq \tilde{G}$ pour tout graphe coloré G .

Preuve. En itérant la proposition 6.3.1 en commençant par $G \geq G$, on obtient $\text{nett}^n(G) \geq G^{(2n)}$ pour n , un naturel quelconque. Puis, pour un certain k , $\text{nett}_c(G) = \text{nett}^k(G) \geq G^{(2k)} \geq \tilde{G}$. \square

Le lemme suivant est l'énoncé le plus important de cette section en préparation à la démonstration du théorème principal.

Lemme 6.3.1. Soit une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer avec un graphe initial à n sommets. Le nombre de nettoyages scindant des CCS que le joueur 2 puisse faire est alors au plus n .

Preuve. Soit G_1, G_2, \dots, G_f , l'ensemble des graphes colorés d'une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer reçus par le joueur 2 tels que, pour chacun, leur effectuer un nettoyage leur scinde une classe de couleur, c.-à-d. $G_i >_{\mathcal{S}} \text{nett}(G_i)$.

Dans le cas où $\text{nett}(G_i) = G_{i(1)}$, alors $G_i \equiv_{\mathcal{S}} \text{nett}(G_i)$, par simple analyse de la notation 6.1.1. Comme, ici, aucune classe de couleur n'est scindée, il faut plutôt s'intéresser à l'autre cas, soit $\text{nett}(G_i) = (G_{i(1)})_{(2)}$.

Ainsi, pour chaque graphe G_i , il existe k_i , un entier strictement positif, tel que

$$G_i >_{\mathcal{S}} \text{nett}(G_i) >_{\mathcal{S}} \text{nett}^2(G_i) >_{\mathcal{S}} \dots >_{\mathcal{S}} \text{nett}^{k_i}(G_i) = \text{nett}_c(G_i).$$

Soit G'_i , le graphe que le joueur 2 retourne lorsqu'il reçoit le graphe G_i . Comme nous voulons maximiser le nombre de nettoyages scindant des CCS que celui-ci effectue, il doit retourner un graphe G'_i tel que $G_i \geq \text{nett}_c(G_i) \geq G'_i$. Puis, par les règles du jeu, on a alors forcément que $G'_i \geq G_{i+1}$. De tout cela, on en conclut que $\text{nett}_c(G_i) \geq G_{i+1}$.

Par les résultats des deux derniers paragraphes, on construit la chaîne de relation $\text{nett}(G_1) >_{\mathcal{S}} \dots >_{\mathcal{S}} \text{nett}^{k_1}(G_1) >_{\mathcal{S}} \text{nett}(G_2) >_{\mathcal{S}} \dots >_{\mathcal{S}} \text{nett}^{k_2}(G_2) >_{\mathcal{S}} \dots >_{\mathcal{S}} \text{nett}(G_f) >_{\mathcal{S}} \dots >_{\mathcal{S}} \text{nett}^{k_f}(G_f)$.

Ainsi, le nombre total de nettoyages scindant des CCS que le joueur 2 peut effectuer correspond à $k_1 + k_2 + \dots + k_f$.

En appliquant la proposition 4.3.7 à la chaîne de relation ci-dessus, avec $E = \mathcal{S}$, on déduit

$$0 < |\chi_{nett(G_1)}(\mathcal{S})| < \dots < |\chi_{nett^{k_1}(G_1)}(\mathcal{S})| < |\chi_{nett(G_2)}(\mathcal{S})| < \dots < |\chi_{nett^{k_2}(G_2)}(\mathcal{S})| < \dots < |\chi_{nett(G_f)}(\mathcal{S})| < \dots < |\chi_{nett^{k_f}(G_f)}(\mathcal{S})| \leq n.$$

On en conclut qu'il faut que $k_1 + k_2 + \dots + k_f \leq n$. \square

6.4 Propriétés induites par C1 et C2

La proposition suivante est utile afin de bien comprendre les graphes colorés respectant C1.

Proposition 6.4.1. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$, bien dissociant et respectant C1. Pour C , une CCA non vide quelconque de G , il existe alors C_1 et C_2 , des CCS de G , tels que $C \subseteq C_1 \times C_2$.

Ainsi, en prenant une CCA quelconque d'un graphe respectant C1, ses sommets de gauche doivent être tous dans la même CCS, de même pour tous ses sommets de droite.

Notons qu'il se peut qu'il existe plus d'une CCA dans un produit cartésien de CCS. En fait, tout produit cartésien de deux CCS peut être exprimé comme une union disjointe de CCA.

Preuve. Soit $(u, v) \in C$ quelconque. Posons C_1 comme la CCS de (u, u) et C_2 comme la CCS de (v, v) . Montrons que $C \subseteq C_1 \times C_2$ par la définition du produit cartésien.

Soit $(u', v') \in C$ quelconque. On a alors que $\chi_G(u, v) = \chi_G(u', v')$. Comme G respecte C1, on infère que $\chi_G(u, u) = \chi_G(u', u')$ et que $\chi_G(v, v) = \chi_G(v', v')$. On a alors que $u' \in C_1$ et $v' \in C_2$. Ainsi, $(u', v') \in C_1 \times C_2$ et on en conclut que $C \subseteq C_1 \times C_2$. \square

Le lemme suivant a pour but d'être appliqué à un moment précis dans la preuve du théorème principal, ce qui explique son aspect spécifique.

Lemme 6.4.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide, et $G, G' \in \Gamma_V$, bien dissociants et respectant C1 et C2. Soit B , un ensemble de CCS de G . Supposons que $G >_C G'$, où C est une CCA incidente à B . Supposons aussi qu'aucune CCS appartenant à B n'est scindée dans ce raffinement.

Soit C' , une nouvelle CCS de G' en laquelle C est scindée. (Par le lemme 6.4.1, il existe C_1 et C_2 , CCS de G , tels que $C \subseteq C_1 \times C_2$.) Si C est incident à gauche de B , alors il existe $v \in C_1$ tel que $\emptyset \subset N_{C'}^+(v) \subset N_C^+(v)$. Autrement, si C est incident à droite de B , alors il existe $v \in C_2$ tel que $\emptyset \subset N_{C'}^-(v) \subset N_C^-(v)$.

Ci-dessus, \subset désigne l'inclusion stricte.

Preuve. Par hypothèse, soit C_1 , soit C_2 doit appartenir à B . Supposons que C est incident à gauche de B , l'autre cas étant analogue. Il faut alors que $C_1 \in B$.

Comme $C' \subset C$, alors pour tout $v \in V$, on a que $\emptyset \subseteq N_{C'}^+(v) \subseteq N_C^+$. Il reste alors à montrer qu'il existe $v \in C_1$ tel que $N_{C'}^+(v) \neq \emptyset$ et $N_{C'}^+(v) \neq N_C^+(v)$. Montrons-le par l'absurde.

Supposons que pour tout $v \in C_1$, $N_{C'}^+(v) = \emptyset$ ou $N_{C'}^+(v) = N_C^+(v)$.

Cette proposition peut se séparer en trois cas. Montrons que chacune d'entre elles mène à une contradiction.

Cas 1) Pour tout $v \in C_1$, $N_{C'}^+(v) = \emptyset$.

Cela est impossible, car, comme on suppose C' non nul, il existe $(u_1, u_2) \in C' \subseteq C_1 \times C_2$ et a donc $u_1 \in C_1$ tel que $u_2 \in N_{C'}^+(u_1)$.

Cas 2) Pour tout $v \in C_1$, $N_{C'}^+(v) = N_C^+(v)$.

Notons que $C' \subset C \subseteq C_1 \times C_2$.

Soit $u_1 \in C_1$ et $u_2 \in C_2$. On a alors la chaîne d'équivalence suivante.

$$(u_1, u_2) \in C' \iff u_2 \in N_{C'}^+(u_1) = N_C^+(u_1) \iff (u_1, u_2) \in C$$

On a donc par la définition que $C = C'$, ce qui est absurde.

Cas 3) Il existe $v_1, v_2 \in C_1$ tels que $N_{C'}^+(v_1) = \emptyset$ et $N_{C'}^+(v_2) = N_C^+(v_2)$.

Comme G' respecte la condition C2, on a alors que $|N_{C'}^+(v_1)| = |N_{C'}^+(v_2)|$. Ainsi, $|N_C^+(v_2)| = |N_{C'}^+(v_2)| = |N_{C'}^+(v_1)| = |\emptyset| = 0$.

Puis, G respectant la condition C2, on déduit que pour tout $v \in C_1$, $|N_C^+(v)| = |N_{C'}^+(v)| = 0$. Cela est absurde de manière analogue au cas 1). \square

Le lemme suivant énonce que, pour un graphe coloré bien dissociant respectant C1, pour un sommet quelconque, deux sommets de couleurs différentes ne peuvent alors pas être reliés à ce dernier par des arêtes de même couleur. Ici, voir la notation 4.2.1 pour rappel.

Lemme 6.4.2. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$, bien dissociant, tel qu'il respecte C1. Soit C , une MCCS de G . Pour tout $v \in V$, on a alors que $\chi_G(I_C(v)) \cap \chi_G(I_{V^2-C}(v)) = \emptyset$.

Preuve. Montrer l'égalité ci-dessus est équivalent à montrer que pour tous $(v, w) \in I_C(v)$ et $(v, w') \in I_{V^2-C}(v)$, alors $\chi_G(v, w) \neq \chi_G(v, w')$.

Supposons que $(v, w) \in I_C(v)$ et $(v, w') \in I_{V^2-C}(v)$. Par la proposition 4.1.1, $w \in C$ et $w' \notin C$, on infère $\chi_G(w) \neq \chi_G(w')$. Par la contraposée de la définition comme quoi G respecte C1, on en déduit $\chi_G(v, w) \neq \chi_G(v, w')$. \square

Le lemme suivant utilise la notation 4.2.1 et sert à démontrer une manière équivalente de formaliser la condition C2, qui est appliquée dans une preuve du chapitre suivant.

Lemme 6.4.3. Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$, bien dissociant et qui respecte C2. On a alors que :

- 1) pour tous C_1, C_2 , CCS de G , et pour tous $v_1, v_2 \in C_1$, on a que $\chi_G(I_{C_2}(v_1)) = \chi_G(I_{C_2}(v_2))$.
- 2) pour tout C_1 , CCS de G et C_2 , MCCS de G , et pour tous $v_1, v_2 \in C_1$, on a que $\chi_G(I_{C_2}(v_1)) = \chi_G(I_{C_2}(v_2))$.

Preuve. 1) Soit C_1, C_2 , CCS de G .

Soit C , une CCA de G , et $c \in \mathcal{C}_G$, sa couleur associée. G respectant C2, on a alors que pour tous $v_1, v_2 \in C_1$, $|N_c^+(v_1) \cap C_2| = |N_c^+(v_2) \cap C_2|$.

Notons que

$$\begin{aligned} |N_c^+(v_1) \cap C_2| &= |\{u \in V : \chi_G(v_1, u) = c\} \cap C_2| \\ &= |\{u \in C_2 : \chi_G(v_1, u) = c\}| \\ &= |\{(v_1, u) : u \in C_2 \text{ et } \chi_G(v_1, u) = c\}|. \end{aligned}$$

De même, $|N_c^+(v_2) \cap C_2| = |\{(v_2, u') : u' \in C_2 \text{ et } \chi_G(v_2, u') = c\}|$.

Des trois paragraphes ci-dessus, on infère

$$|\{(v_1, u) : u \in C_2 \text{ et } \chi_G(v_1, u) = c\}| = |\{(v_2, u') : u' \in C_2 \text{ et } \chi_G(v_2, u') = c\}|.$$

On en conclut que

$$\{(v_1, u) : u \in C_2 \text{ et } \chi_G(v_1, u) = c\} = \emptyset \iff \{(v_2, u') : u' \in C_2 \text{ et } \chi_G(v_2, u') = c\} = \emptyset. \quad (*)$$

Cela veut dire qu'un des ensembles ci-dessus est vide si et seulement si l'autre est vide. Remarquons aussi que, soit l'ensemble est vide, soit il contient des éléments d'une seule et même couleur c .

Démontrons que

$$\{\chi_G(v_1, u) \mid u \in C_2 \text{ et } \chi_G(v_1, u) = c\} = \{\chi_G(v_2, u') \mid u' \in C_2 \text{ et } \chi_G(v_2, u') = c\}. \quad (**)$$

Cas 1) Supposons que $\{(v_1, u) \mid u \in C_2 \text{ et } \chi_G(v_1, u) = c\} \neq \emptyset$.

$$\text{On a alors } \chi_G(\{(v_1, u) \mid u \in C_2 \text{ et } \chi_G(v_1, u) = c\}) = \{c\}.$$

De notre supposition et de (*), on déduit

$$\{(v_2, u') \mid u' \in C_2 \text{ et } \chi_G(v_2, u') = c\} \neq \emptyset.$$

$$\text{Donc, de manière analogue, } \chi_G(\{(v_2, u') \mid u' \in C_2 \text{ et } \chi_G(v_2, u') = c\}) = \{c\}.$$

Ce qui démontre (**) pour ce cas.

Cas 2) Supposons $\{(v_1, u) \mid u \in C_2 \text{ et } \chi_G(v_1, u) = c\} = \emptyset$.

Ainsi,

$$\chi_G(\{(v_1, u) \mid u \in C_2 \text{ et } \chi_G(v_1, u) = c\}) = \chi_G(\emptyset) = \emptyset.$$

De notre supposition et de (*), on déduit

$$\{(v_2, u') \mid u' \in C_2 \text{ et } \chi_G(v_2, u') = c\} = \emptyset.$$

Donc,

$$\chi_G(\{(v_2, u') \mid u' \in C_2 \text{ et } \chi_G(v_2, u') = c\}) = \chi_G(\emptyset) = \emptyset.$$

Ce qui démontre (**) pour ce cas.

Nous avons ainsi tout ce qu'il faut pour prouver le lemme directement.

Remarquons que

$$\begin{aligned}\chi_G(I_{C_2}(v_1)) &= \{\chi_G(v_1, u) \mid u \in C_2\} \\ &= \{\chi_G(v_1, u) \mid u \in C_2 \text{ et } \bigvee_{c \in \mathcal{C}_G} (\chi_G(v_1, u) = c)\} \text{ (en insérant une tautologie)} \\ &= \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \{\chi_G(v_1, u) \mid u \in C_2 \text{ et } \chi_G(v_1, u) = c\}\end{aligned}$$

De manière analogue,

$$chi_G(I_{C_2}(v_2)) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \{\chi_G(v_2, u') \mid u' \in C_2 \text{ et } \chi_G(v_2, u') = C\}$$

Des deux derniers paragraphes et de (**), on conclut $\chi_G(I_{C_2}(v_1)) = \chi_G(I_{C_2}(v_2))$.

2) Comme C_2 est un MCCS de G , il est donc la réunion disjointe de CCS de G .

Formellement, $C_2 = \dot{\bigcup}_{i \in I} C_i$ où les C_i sont des CCS de G .

$$\begin{aligned}\chi_G(I_{C_2}(v_1)) &= \chi_G(\{(v_1, w) \mid w \in C_2\}) \\ &= \chi_G(\{(v_1, w) \mid w \in \dot{\bigcup}_{i \in I} C_i\}) \\ &= \chi_G(\{(v_1, w) \mid \bigvee_{i \in I} w \in C_i\}) \\ &= \chi_G(\dot{\bigcup}_{i \in I} \{(v_1, w) \mid w \in C_i\}) \\ &= \chi_G(\dot{\bigcup}_{i \in I} I_{C_i}(v_1)) \\ &= \bigcup_{i \in I} \chi_G(I_{C_i}(v_1))\end{aligned}$$

De manière analogue,

$$\chi_G(I_{C_2}(v_2)) = \bigcup_{i \in I} \chi_G(I_{C_i}(v_2)).$$

Puisque les C_i sont des CCS de G , on peut appliquer la partie 1) de notre lemme pour montrer que pour tout $i \in I$, $\chi_G(I_{C_i}(v_1)) = \chi_G(I_{C_i}(v_2))$.

Par les 3 derniers paragraphes, on déduit $\chi_G(I_{C_2}(v_1)) = \chi_G(I_{C_2}(v_2))$. \square

Ainsi, nous avons démontré tous les résultats élémentaires concernant les conditions C1 et C2 sur les graphes colorés dont nous nous servirons dans la preuve du théorème principal.

CHAPITRE VII

LA CLASSIFICATION DES CLASSES DE COULEUR DE SOMMETS PAR TAILLE

Dans leur article, Kiefer et Schweitzer introduisent des notions de grandes et petites classes de couleur que nous présentons maintenant. Cette division de structures par leur taille est une astuce combinatoire qui permet de séparer l'étude de cas.

Comme nous le mentionnons au chapitre 9, les résultats de ce chapitre servent à borner, pour une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer, le nombre de coups scindant de grandes CCS. Pour les petites, l'évaluation est plus difficile et nécessite des résultats sur le graphe auxiliaire qui sont présentés au chapitre 8, un graphe auxiliaire étant un graphe fini non orienté construit à partir d'un graphe coloré.

7.1 Fonction potentielle

La notion de *fonction potentielle* associe à un graphe coloré un nombre. L'intérêt de ce dernier est mis en évidence par les propositions 7.1.1 et 7.1.2.

Définition 7.1.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide. La *fonction potentielle* sur Γ_V est définie par $f : \Gamma_V \rightarrow \mathbb{N}$, telle que $f(G) := \sum_{v \in V} |\chi_G(I(v))|$ où $G \in \Gamma_V$ et $I(v) = \{(v, w) \mid w \in V\}$.

Remarquons que la fonction potentielle sur Γ_V est bornée supérieurement en fonction de la taille de V .

Proposition 7.1.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide et soit $f : \Gamma_V \rightarrow \mathbb{N}$, une fonction potentielle sur Γ_V , et $G \in \Gamma_V$. On a alors que $f(G) \leq |V|^2$.

Preuve. Notons que $|E| \geq |\chi_G(E)|$ pour tout ensemble $E \subseteq V^2$. Donc,

$$f(G) := \sum_{v \in V} |\chi_G(I(v))| \leq \sum_{v \in V} |I(v)| = \sum_{v \in V} |V| = |V|^2. \quad \square$$

La proposition suivante nous permet de nous servir de la fonction potentielle sur Γ_V comme outil pour la démonstration de divers résultats sur les graphes colorés.

Proposition 7.1.2. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide. Toute fonction potentielle $f : \Gamma_V \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement décroissante, c'est-à-dire que si $G, G' \in \Gamma_V$ et $G > G'$, alors $f(G) < f(G')$.

Preuve. Soit $v \in V$. Comme $G > G'$, en appliquant la proposition 4.3.7 partie 3) et en posant $E := I(v)$, on obtient

$$|\chi_G(I(v))| < |\chi_{G'}(I(v))|.$$

Ainsi,

$$f(G) = \sum_{v \in V} |\chi_G(I(v))| < \sum_{v \in V} |\chi_{G'}(I(v))| = f(G'). \quad \square$$

L'intérêt de la fonction potentielle peut se voir ainsi. Soit une chaîne de graphes colorés selon la relation de raffinement strict. On peut alors, par la proposition 7.1.2, en déduire une chaîne de leurs nombres associés par la fonction, tout cela selon la relation $<$. Puis, par la proposition 7.1.1, cette dernière chaîne est alors bornée en longueur, ce qui borne automatique la longueur de la chaîne initiale.

7.2 Classes de couleur grandes et petites

Les notions de petite et de grande classe de couleur constituent probablement l'idée clé de la preuve de Kiefer-Schweitzer, car elle permet de séparer en plusieurs cas.

Définition 7.2.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide et $G \in \Gamma_V$. Soit une fonction $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$, qu'on nomme *fonction de seuil*. Une classe de couleur $C \in \mathcal{C}$ est dite *grande* ou *grande selon la fonction t* si $|C| \geq t(|V|)$. De manière analogue, cette dernière est dite *petite* ou *petite selon la fonction t* si $|C| < t(|V|)$.

La notation suivante est utilisée lors de la démonstration du lemme 7.2.1.

Notation 7.2.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$. On dénote chacune de ses grandes classes de couleur de sommets par B_k . On note alors $B := \dot{\bigcup}_k B_k$.

On utilise l'abréviation *grandes CCS* pour se référer aux grandes classes de couleur de sommets.

Soit $G \geq G'$. Dire que $G \equiv_B G'$ est alors équivalent à dire que le raffinement G' ne scinde pas les grandes CCS.

Le lemme suivant est utile pour la démonstration du théorème principal.

Lemme 7.2.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide, et $G \in \Gamma_V$ bien dissociant et respectant C1 et C2. Soit t , une fonction de seuil. Soit G^* un raffinement de G tel qu'il scinde une CCA incidente d'une grande CCS. Supposons de plus que ce raffinement et le nettoyage complet subséquent ne scindent aucune grande CCS de G , alors $f(\text{nett}_c(G^*)) \geq f(G) + t(n)$.

Preuve. Par simplicité, posons $G' := \text{nett}_c(G^*)$. Soit B l'ensemble des grandes CCS de G .

Par hypothèse, il existe alors C , une CCS incidente avec B telle que $G >_C G^* \succeq G'$, ce qui implique $G >_C G'$. C est scindée en au moins deux classes, où l'on note l'une d'entre elles C' .

C respectant C1, par le lemme 6.4.1, il existe C_1 et C_2 , des CCS de G , tels que $C \subseteq C_1 \times C_2$. Puisque C est incidente avec B , alors au moins une des CCS C_1 et C_2 est une grande classe de couleur. Sans perdre de généralité, supposons qu'il s'agisse de C_1 . (Dans l'autre cas, on pourrait définir $I_E^-(v) := \{(u, v) \mid u \in E\}$ et l'utiliser au lieu de $I_E(v)$ pour le reste de la preuve.)

Partie 1 : Montrons qu'il existe $v \in C_1$ tel que $G >_{I_{C_2}(v)} G'$.

De $G \succeq G'$, on infère facilement $G \succeq_{I_{C_2}(v)} G'$. Il reste alors à montrer que $G \not\succeq_{I_{C_2}(v)} G'$.

En appliquant le lemme 6.4.1, on trouve alors qu'il existe $v \in C_1$ tel que $\emptyset \subset N_{C'}^+(v) \subset N_C^+(v)$.

Cela signifie qu'il existe $u_1, u_2 \in V$ tels que $u_1 \in N_{C'}^+(v)$, $u_2 \notin N_{C'}^+(v)$ et $u_1, u_2 \in N_C^+(v)$. De cela, on infère $(v, u_1) \in C'$, $(v, u_2) \notin C'$ et $(v, u_1), (v, u_2) \in C$.

De cette dernière relation et de $C \subseteq C_1 \times C_2$, on infère $u_1, u_2 \in C_2$. Ainsi, $(v, u_1), (v, u_2) \in I_{C_2}(v)$. On déduit aussi du paragraphe ci-dessus que $\chi_G(v, u_1) = \chi_G(v, u_2)$ et $\chi_{G'}(v, u_1) \neq \chi_{G'}(v, u_2)$.

Cela montre par définition que $G \not\succeq_{I_{C_2}(v)} G'$.

Partie 2 : Montrons que pour tout $u \in C_1$, $|\chi_{G'}(I_{C_2}(u))| \geq |\chi_G(I_{C_2}(u))| + 1$.

De $G >_{I_{C_2}(v)} G'$ (le résultat de la partie 1) et la proposition 4.3.7, on déduit $|\chi_G(I_{C_2}(v))| < |\chi_{G'}(I_{C_2}(v))|$ et donc $|\chi_G(I_{C_2}(v))| + 1 \leq |\chi_{G'}(I_{C_2}(v))|$.

Par hypothèse, G respecte C2. Appliquons le lemme 6.4.3 partie 2). Ainsi, pour

tout $u \in C_1$, comme $v \in C_1$ aussi, on a que $\chi_G(I_{C_2}(u)) = \chi_G(I_{C_2}(v))$. Donc, pour tout $u \in C_1$, $|\chi_G(I_{C_2}(u))| = |\chi_G(I_{C_2}(v))|$.

Comme C_2 est une CCS de G , par la proposition 4.3.5, il est alors une MCCS de G' . Puisque C_1 est une grande CCS de G et vu l'hypothèse comme quoi le raffinement $G > G'$ ne scinde aucune grande classe de couleur, C_1 est alors aussi une CCS de G' . De façon analogue, en utilisant le lemme 6.4.3 partie 2), on trouve que pour tout $u \in C_1$, $|\chi_{G'}(I_{C_2}(u))| = |\chi_{G'}(I_{C_2}(v))|$.

Des derniers résultats des trois derniers paragraphes, on déduit facilement le résultat voulu pour cette partie.

Partie 3 : Montrons le lemme directement. Mais juste avant, écrivons quelques résultats.

Résultat 1 (R1) :

Par le résultat de la partie 2,

$$\begin{aligned} \sum_{u \in C_1} |\chi_{G'}(I_{C_2}(u))| &\geq \sum_{u \in C_1} (|\chi_G(I_{C_2}(u))| + 1) \\ &= \sum_{u \in C_1} |\chi_G(I_{C_2}(u))| + |C_1| \\ &\geq \sum_{u \in C_1} |\chi_G(I_{C_2}(u))| + t(n) \text{ (puisque } C_1 \text{ est grande)} \end{aligned}$$

Résultat 2 (R2) :

$$\begin{aligned} |\chi_{G'}(I(v))| &= |\chi_{G'}(I_{C_2}(v) \cup I_{V-C_2}(v))| \\ &= |\chi_{G'}(I_{C_2}(v)) \dot{\cup} \chi_{G'}(I_{V-C_2}(v))| \text{ (union disjointe par le lemme 6.4.2)} \\ &= |\chi_{G'}(I_{C_2}(v))| + |\chi_{G'}(I_{V-C_2}(v))| \text{ (aussi vrai pour } \chi_G \text{ notons)} \end{aligned}$$

Résultat 3 (R3) :

Par $G \succeq G'$ et la proposition 4.3.7, alors pour tout $u \in V^2$,

$$|\chi_{G'}(I(u))| \geq |\chi_G(I(u))| \text{ et } |\chi_{G'}(I_{V-C_2}(u))| \geq |\chi_G(I_{V-C_2}(u))|.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} f(G') &= \sum_{u \in V} |\chi_{G'}(I(u))| \\ &= \sum_{u \in C_1} |\chi_{G'}(I(u))| + \sum_{u \in V-C_1} |\chi_{G'}(I(u))| \\ &= \left(\sum_{u \in C_1} |\chi_{G'}(I_{C_2}(u))| + \sum_{u \in C_1} |\chi_{G'}(I_{V-C_2}(u))| \right) + \sum_{u \in V-C_1} |\chi_{G'}(I_V(u))| \quad (\text{Par R2}) \\ &\geq \sum_{u \in C_1} |\chi_G(I_{C_2}(u))| + t(n) + \sum_{u \in C_1} |\chi_G(I_{V-C_2}(u))| + \sum_{u \in V-C_1} |\chi_G(I_V(u))| \quad (\text{Par R1 et R3}) \\ &= f(G) + t(n) \quad (\text{en regroupant et en utilisant R2 avec } \chi_G). \quad \square \end{aligned}$$

Ceci clôture l'ensemble des résultats importants sur les conditions C1 et C2.

CHAPITRE VIII

LES GRAPHES AUXILIAIRES

Dans le but de prouver le théorème principal, nous allons associer à un graphe coloré G et à une chaîne de raffinements de graphes colorés se terminant par G un graphe fini non orienté dit *graphe auxiliaire* de G .

L'intérêt est que, pour une chaîne de raffinements de graphes colorés, on peut en déduire une chaîne d'inclusions de leurs graphes auxiliaires. Cela correspond à la proposition 8.1.2. Comme la taille d'un graphe auxiliaire est bornée par la proposition 8.1.1, cela borne la longueur de la chaîne d'inclusions, puis celle de la chaîne de raffinements.

8.1 Définition et résultats élémentaires

Définition 8.1.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide, et t une fonction de seuil. Soit une chaîne de raffinements de graphes colorés bien dissociants dans Γ_V , $G_0 \succeq G_1 \succeq \dots \succeq G_{l-1} \succeq G$. Soit

$$\mathcal{T}_G := \{C \subseteq V \mid C \text{ est une petite CCS de } G \text{ ou de } G_i, \text{ pour } i \text{ entre } 0 \text{ et } l-1\}.$$

Le *graphe auxiliaire* de G , noté $\text{Aux}(G)$, est alors défini par le couple $(V_{\text{Aux}(G)}, E_{\text{Aux}(G)})$ où :

1) $V_{Aux(G)} := V_0 \dot{\cup} V_1$ où $V_i := \{(C, M, i) \mid C \in \mathcal{T}_G, M \subseteq C\}$. On dit alors que V_0 est l'ensemble des *sommets du bas* et V_1 , celui des *sommets du haut*.

2a) $(C, M, 1) \in V_1$ et $(D, N, 0) \in V_0$ respectent entre eux la relation symétrique $E_{Aux(G)}$ si et seulement s'il existe un ensemble $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ de couleurs de G tel que pour tout $v \in C$

$$v \in M \iff N_{G, \mathcal{C}'}^+(v) = N$$

2b) $(C, M, 1), (C', M', 1) \in V_1$ respectent entre eux la relation symétrique $E_{Aux(G)}$ si et seulement s'il existe $\mathcal{C}', \mathcal{C}'' \subseteq \mathcal{C}$ tels que pour tout $v \in C$

$$v \in M \iff N_{G, \mathcal{C}'}^+(v) = M'$$

et pour tout $v \in C'$

$$v \in M' \iff N_{G, \mathcal{C}''}^+(v) = M$$

2c) Aucune paire de sommets de V_0 ne respecte la relation $E_{Aux(G)}$.

Le graphe auxiliaire est non orienté, car E est une relation symétrique.

$Aux(G)$ est un abus de notation, car la construction du graphe auxiliaire dépend de la chaîne de raffinements associée (à cause de la définition de \mathcal{T}) et pas seulement du graphe G . Son utilisation a pour but d'alléger l'écriture.

Notons que les graphes auxiliaires ont une taille bornée en fonction de la taille de leur graphe coloré associé.

Proposition 8.1.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide, et t une fonction de seuil. Soit une chaîne de raffinements de graphes colorés bien dissociants dans Γ_V , $G_0 \succeq G_1 \succeq \dots \succeq G_{l-1} \succeq G$. Pour $Aux(G) = (V_0 \dot{\cup} V_1, E_{Aux(G)})$, on a alors que $|V_0| \leq 2n \cdot 2^{t(n)}$ et $|V_1| \leq 2n \cdot 2^{t(n)}$, où $n := |V|$.

Les expressions de ces bornes supérieures sont cruciales plus tard pour déduire la formule de la borne de $WL_2(n)$ trouvée par Kiefer et Schweitzer.

Preuve. Construisons une chaîne de raffinements commençant par le graphe G_0 , puis prenant tous les graphes de la chaîne $G_0 \succeq G_1 \succeq \dots \succeq G_{l-1} \succeq G$ qui résultent d'un raffinement scindant une CCS, on peut alors construire la chaîne

$$G_0 >_{\mathcal{S}} G'_1 >_{\mathcal{S}} \dots >_{\mathcal{S}} G'_k \quad (*)$$

où $\mathcal{S} := \{(v, v) \mid v \in V\}$.

Notons que les graphes de cette chaîne contiennent toutes les CCS des graphes de la chaîne $G_0 \succeq G_1 \succeq \dots \succeq G_{l-1} \succeq G$. En effet, un graphe résultant d'un raffinement ne scindant pas de CCS n'a aucune nouvelle CCS comparé à son prédécesseur.

Notons que par la proposition 4.4.3, on peut décomposer tous les raffinements composés de la chaîne ci-dessus en raffinements atomiques. Ainsi, en procédant à un réétiquetage, on peut construire la chaîne suivante de raffinements atomiques

$$G''_0 >_{\mathcal{S}}^* G''_1 >_{\mathcal{S}}^* \dots >_{\mathcal{S}}^* G''_f. \quad (**)$$

Notons que $G''_0 = G_0$ et $G''_f = G'_k$.

Avec l'aide de la proposition 4.3.7, on infère que

$$0 < |\chi_{G''_0}(\mathcal{S})| < |\chi_{G''_1}(\mathcal{S})| < \dots < |\chi_{G''_f}(\mathcal{S})| \leq n.$$

Cela veut dire que $f < n$, car autrement, il existerait au moins n entiers entre 0 et n exclusivement, ce qui est absurde.

Par la proposition 4.4.4, avec $E := \mathcal{S}$, pour $i = 1, \dots, f$, G''_{i-1} possède une et une seule CCS qui n'est pas une CCS de G''_i . De cela et du fait que G''_f a $|\chi_{G''_f}(\mathcal{S})| \leq n$ CCS, on infère que la chaîne $(**)$ contient au plus $n + f < 2n$ CCS.

Comme la chaîne $(*)$ est incluse dans la chaîne $(**)$, cette première doit alors également avoir au plus $2n$ CCS et donc au plus $2n$ petites CCS.

Ainsi, $|\mathcal{T}_G| \leq 2n$.

Notons également qu'une petite classe de couleur a une taille d'au plus $t(n)$ et a donc au plus $2^{t(n)}$ sous-ensembles.

De cela, on infère que $|V_0| \leq 2n \cdot 2^{t(n)}$ et $|V_1| \leq 2n \cdot 2^{t(n)}$ également. \square

Proposition 8.1.2. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide, et t une fonction de seuil. Soit une chaîne de raffinements de graphes colorés bien dissociants dans Γ_V , $G_0 \succeq G_1 \succeq \dots \succeq G_{l-1} \succeq G \succeq G_{l+1} \succeq \dots \succeq G_{m-1} \succeq G'$. On a alors que $\text{Aux}(G) \subseteq \text{Aux}(G')$.

Précisons que $\text{Aux}(G)$ est construit à partir de la chaîne $G_0 \succeq G_1 \succeq \dots \succeq G_{l-1} \succeq G$ et $\text{Aux}(G')$ à partir de la chaîne Γ_V , $G_0 \succeq G_1 \succeq \dots \succeq G_{l-1} \succeq G \succeq G_{l+1} \succeq \dots \succeq G_{m-1} \succeq G'$.

Preuve. Soit $G := (V, E)$, $G' := (V', E')$, $\text{Aux}(G) := (V_{\text{Aux}(G)}, E_{\text{Aux}(G)})$ et $\text{Aux}(G') := (V_{\text{Aux}(G')}, E_{\text{Aux}(G')})$. Pour montrer que $\text{Aux}(G) \subseteq \text{Aux}(G')$, il suffit de montrer que $V_{\text{Aux}(G)} \subseteq V_{\text{Aux}(G')}$ et $E_{\text{Aux}(G)} \subseteq E_{\text{Aux}(G')}$.

A) $V_{\text{Aux}(G)} \subseteq V_{\text{Aux}(G')}$

Pour construire les graphes auxiliaires, on construit d'abord les ensembles \mathcal{T}_G et $\mathcal{T}_{G'}$. Par analyse de leurs définitions, on a que $\mathcal{T}_G \subseteq \mathcal{T}_{G'}$.

Puis, on construit $V_{\text{Aux}(G)} := V_0 \dot{\cup} V_1$ et $V_{\text{Aux}(G')} := V'_0 \dot{\cup} V'_1$.

Prenons $(C, M, 0) \in V_0$ quelconque. Ainsi, $C \in \mathcal{T}_G$ et $M \subseteq C$. Comme $\mathcal{T}_G \subseteq \mathcal{T}_{G'}$, alors $C \in \mathcal{T}_{G'}$. Par respect des conditions, on a alors que $(C, M, 0) \in V'_0$. Cela montre que $V_0 \subseteq V'_0$. De même, on montre que $V_1 \subseteq V'_1$, puis $V_{\text{Aux}(G)} \subseteq V_{\text{Aux}(G')}$.

B) $E_{Aux(G)} \subseteq E_{Aux(G')}$

Soit $(C, M, 1), (D, N, 0)$, deux sommets dans $V_{Aux(G)} \subseteq V_{Aux(G')}$ respectant la relation $E_{Aux(G)}$. Montrons alors qu'ils respectent $E_{Aux(G')}$.

Le fait que les sommets respectent $E_{Aux(G)}$ signifie qu'il existe $\mathcal{C}'_G \subseteq \mathcal{C}_G$ tel que pour tout $v \in C$,

$$v \in M \iff N_{G, \mathcal{C}'_G}^+(v) = N.$$

Posons $\mathcal{C}'_{G'} = \{\chi_{G'}(\bar{w}) \in V^2 \mid \chi_G(\bar{w}) \in \mathcal{C}'_G\}$ et montrons que pour tout $v \in C$, $v \in M \iff N_{G, \mathcal{C}'_{G'}}^+(v) = N$. Par le paragraphe ci-dessus, il suffit de montrer que $N_{G, \mathcal{C}'_G}^+(v) = N_{G', \mathcal{C}'_{G'}}^+(v)$.

Cette égalité est équivalente à $\{u \in V \mid \chi_G(v, u) \in \mathcal{C}'_G\} = \{u \in V \mid \chi_{G'}(v, u) \in \mathcal{C}'_{G'}\}$, puis à $\chi_G(v, u) \in \mathcal{C}'_G \iff \chi_{G'}(v, u) \in \mathcal{C}'_{G'}$. Cela est vrai par la définition de $\mathcal{C}'_{G'}$ au paragraphe ci-dessus.

Ainsi, la relation $E_{Aux(G')}$ est respectée pour les sommets donnés.

Dans le cas de paires de sommets de V_1 , la preuve est analogue, et pour les paires de V_0 , elle est triviale. Ainsi $E_{Aux(G)} \subseteq E_{Aux(G')}$, puis $Aux(G) \subseteq Aux(G')$. \square

8.2 La clôture triangulaire

Définissons maintenant la *clôture triangulaire*, qui est une opération définie sur les graphes finis non orientés et qui a pour but de s'appliquer sur les graphes auxiliaires dans le contexte de ce mémoire.

Définition 8.2.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit $H = (V, E)$, un graphe fini non orienté comme ci-dessus où V est une union disjointe de V_1 et V_0 , respectivement

les sommets hauts et les sommets bas.

Puisque le graphe est non orienté, E est une relation symétrique et peut ainsi être représentée comme un ensemble de paires de sommets, c.-à-d. $E \subseteq \{\{u,v\} \mid u,v \in V\}$.

La *clôture triangulaire* de H est alors le graphe $\Delta H := (V, E_\Delta)$ tel que :

- 1) Pour tous $u, v \in V$, si $\{u, v\} \in E$, alors $\{u, v\} \in E_\Delta$.
- 2) Pour tous $u, v \in V_1$, s'il existe $w \in V = V_0 \dot{\cup} V_1$ tel que $\{u, w\}, \{v, w\} \in E$, alors $\{u, v\} \in E_\Delta$.
- 3) Pour tous $u \in V_0$ et $v \in V_1$, s'il existe $w \in V_1$ tel que $\{u, w\}, \{v, w\} \in E$, alors $\{u, v\} \in E_\Delta$.
- 4) Aucune autre paire de sommets de V ne respecte la relation E_Δ .

Additionnellement à cela, on note i itérations de la clôture triangulaire d'un graphe H par $\Delta^i(H)$. H est dit *clos* si $H = \Delta(H)$.

Il découle directement de la définition 8.2.1 que $H \subseteq \Delta(H)$.

Il n'est pas difficile de trouver des critères pour caractériser les graphes qui sont clos. Tout d'abord, remarquons le fait suivant.

Proposition 8.2.1. Soit $H = (V_0 \dot{\cup} V_1, E)$, un graphe fini non orienté comme ci-dessus. La condition $\Delta(H) = H$ est alors équivalente aux trois conditions suivantes :

- 1) Si $u, v, w \in V_1$ et $\{u, v\}, \{v, w\} \in E$, alors $\{u, w\} \in E$.
- 2) Si $u \in V_0$, $v, w \in V_1$ et $\{u, v\}, \{v, w\} \in E$, alors $\{u, w\} \in E$.
- 3) Si $u \in V_0$, $v, w \in V_1$ et $\{u, v\}, \{u, w\} \in E$, alors $\{v, w\} \in E$.

L'implication directe se démontre simplement par la contraposée : si une des deux conditions est fausse, appliquer la clôture triangulaire rajouterait une arête et le graphe serait ainsi non clos. En ce qui concerne la réciproque, on peut vérifier que si un graphe respecte les trois conditions de la proposition 8.2.1, alors lui appliquer la clôture triangulaire ne lui rajouterait aucune nouvelle arête.

Définition 8.2.2. Soit $H = (V_0 \dot{\cup} V_1, E)$, un graphe fini non orienté comme ci-dessus, et $v \in V_1$.

$U(v) := \{u \in V_1 \mid \{v, u\} \in E\}$, soit l'ensemble des sommets hauts reliés à v .

$L(v) := \{u \in V_0 \mid \exists w \in U(v) \text{ tel que } \{u, w\} \in E\}$ soit l'ensemble des sommets bas reliés à $U(v)$.

Les définitions 8.2.3 et 8.2.4 ont pour but d'aider à la formalisation de la proposition 8.2.2.

Définition 8.2.3. Soit $G = (V, E)$, un graphe fini non orienté et soit $A \subseteq V$.

A est dit une *clique* si pour tous $u, v \in A$, alors $\{u, v\} \in E$.

Définition 8.2.4. Soit $G = (V, E)$, un graphe fini non orienté et soit $A, B \subseteq V$.

A est dit *biparti avec B* si pour tout $u \in A$ et pour tout $v \in B$, alors $\{u, v\} \in E$.

La proposition suivante caractérise alors entièrement les graphes clos.

Proposition 8.2.2. Soit $H = (V_0 \dot{\cup} V_1, E)$, un graphe fini non orienté, tel que $V_0^2 \cap E = \emptyset$. On a alors que H est clos (c.-à-d. $\Delta(H) = H$) si et seulement si pour tout $v \in V_1$,

- 1) $U(v)$ est une clique,
- 2) $L(v)$ est biparti avec $U(v)$,
- 3) $U(v) \cup L(v)$ est une composante connexe du graphe.

Preuve. Implication directe : Supposons H clos et montrons les trois conditions.

- 1) Soit $w, w' \in U(v) \subseteq V_1$. Par définition de $U(v)$, $\{v, w\}, \{v, w'\} \in E$. Par la condition C1) de la proposition 8.2.1, $\{u, w\} \in E$.
- 2) Soit $u \in L(v) \subseteq V_0$ et $w \in U(v) \subseteq V_1$, alors $\{u, v\}, \{v, w\} \in E$. Par la condition C2) de la proposition 8.2.1, $\{u, w\} \in E$.
- 3) Montrons d'abord que $U(v) \cup L(v)$ est un ensemble connexe. Tout d'abord, pour tous $u_1, u_2 \in U(v)$, ceux-ci sont connectés par les arêtes $\{u_1, v\}$ et $\{v, u_2\}$. Puis, pour tout $u \in U(v)$ et pour tout $l \in L(v)$, alors il existe $u' \in U(v)$ tel que les sommets u et l sont connectés par les arêtes $\{u, v\}, \{v, u'\}$ et $\{u', l\}$. Finalement, pour tous $l_1, l_2 \in L(v)$, alors il existe $u, u' \in U(v)$ tels que les sommets l_1 et l_2 sont connectés par les arêtes $\{l_1, u\}, \{u, v\}, \{v, u'\}$ et $\{u', l_2\}$.

En supposant qu'un sommet de $U(v)$ est relié à un autre sommet de V_1 , par la proposition 8.2.1 1), ce nouveau sommet est relié à v et donc appartient à $U(v)$. De même, en supposant qu'un sommet de $L(v)$ est relié à un autre sommet de V_1 , par la proposition 8.2.1 3), ce nouveau sommet est relié à v et donc appartient à $U(v)$. Par définition de $L(v)$, on ne peut relier $U(v)$ à aucun autre sommet de V_0 . Enfin, par le critère 6), aucun sommet de $L(v)$ n'est relié à un autre sommet de V_0 .

Réciproquement, supposons que le graphe respecte les trois conditions ci-dessus et montrons que les trois conditions de la proposition 8.2.1 sont respectées.

- 1) Soit $u, v, w \in V_1$, si $\{u, v\}, \{v, w\} \in E$, alors $u, w \in U(v)$. Comme on a supposé que $U(v)$ est une clique, on en conclut que $\{u, w\} \in E$.
- 2) Soit $u \in V_0$ et $v, w \in V_1$, si $\{u, v\}, \{v, w\} \in E$ alors, $u \in L(v)$ et $w \in U(v)$. Puisqu'on suppose que $U(v)$ est biparti avec $L(v)$, on en déduit que $\{u, w\} \in E$.
- 3) Soit $u \in V_0$ et $v, w \in V_1$, si $\{u, v\}, \{u, w\} \in E$, alors $u \in L(v)$ et $u \in L(w)$. On a

donc que u appartient aux deux composantes connexes $U(v) \cup L(v)$ et $U(w) \cup L(w)$, qui sont donc égales. Ainsi, $U(v) = U(w)$ et $L(v) = L(w)$. Comme $U(v) = U(w)$ est une clique, on en conclut $\{v, w\} \in E$. \square

8.3 Résultats utiles

Comme énoncé auparavant, le but des graphes auxiliaires est d'associer à une chaîne de graphes colorés selon la relation de raffinement une chaîne de leurs graphes auxiliaires selon la relation d'inclusion. Le lemme suivant permet alors de borner la longueur de cette nouvelle chaîne, ce qui borne en même temps la longueur de la chaîne initiale.

Lemme 8.3.1. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit H^1, \dots, H^k , une suite de graphes finis tels que, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

- 1) $V_{H^i} = V_0^i \dot{\cup} V_1^i$.
- 2) $|V_0^i| = |V_1^i| \leq m$ pour un certain m .
- 3) $V_0^i \subseteq V_0^{i+1}$ et $V_1^i \subseteq V_1^{i+1}$.
- 4) $\Delta(H^i) \subseteq H^{i+1}$.
- 5) $H^i \neq H^{i+1}$.
- 6) Le graphe H^i induit sur V_0^i est vide, c.-à-d. $E(H^i) \cap (V_0^i)^2 = \emptyset$.

On a alors que $k \in O(m)$.

Preuve. Par le fait que $H^i \subseteq \Delta(H^i)$ et les conditions $\Delta(H^i) \subseteq H^{i+1}$ et $H^i \neq H^{i+1}$, alors $H^i \subset H^{i+1}$. Avec ce résultat et le fait que les graphes sont finis, avec un nombre de sommets bornée par $2m$ et un nombre d'arêtes bornée par $m(2m - 1) + 2m = 2m^2 + m$, toutes les suites respectant les conditions de l'énoncé sont finies.

Soit $\mathcal{H}^1, \dots, \mathcal{H}^k$, une suite respectant les conditions qui est aussi la plus longue possible (finie par la dernière remarque). Si $V_{\mathcal{H}^k} = \mathcal{V}_0^k \dot{\cup} \mathcal{V}_1^k$, alors

$$|\mathcal{V}_0^k| = |\mathcal{V}_1^k| = m. \tag{*}$$

En effet, autrement, on pourrait définir H^{k+1} simplement en ajoutant un autre sommet à \mathcal{V}_0^k ou \mathcal{V}_1^k et les conditions de la suite seraient respectées, ce qui contredit que notre suite est de longueur maximale.

Remarquons par la troisième condition que tous les \mathcal{V}_0^i (resp. \mathcal{V}_1^i) sont sous-ensembles de \mathcal{V}_0^k (resp. \mathcal{V}_1^k). Pour la suite des choses, posons $V_0 := \mathcal{V}_0^k$ et $V_1 := \mathcal{V}_1^k$. Définissons maintenant la suite H^1, \dots, H^k comme la dernière suite, mais simplement en faisant en sorte que tous les ensembles de sommets soient déjà *complets*. Formellement, on pose pour tout i , $V_0^i := V_0$ $V_1^i := V_1$, puis les arêtes ne changent pas. Par (*), on a que pour tout i , $|V_0^i| = |V_1^i| = m$. Remarquons que cette suite respecte les conditions de l'énoncé et est donc un autre exemple de suite de longueur maximale. Sans perte de généralité, bornons sa longueur asymptotiquement.

Soit H^i , un graphe de la suite. Puisque la suite est de longueur maximale, le graphe H^{i+1} est un graphe minimal (au sens de l'inclusion) respectant les conditions de l'énoncé. La condition 4) $\Delta(H^i) \subseteq H^{i+1}$ nous dit que parmi tous les potentiels H^{i+1} , $\Delta(H^i)$ est le candidat minimal. Si $H^i \neq \Delta(H^i)$, alors $\Delta(H^i)$ respecte toutes les conditions et l'on peut déduire qu'il faut que $H^{i+1} = \Delta(H^i)$.

Autrement, si $H^i = \Delta(H^i)$, le graphe minimal respectant les conditions possède une seule arête supplémentaire, c.-à-d. $|E(H^{i+1}) - E(H^i)| = 1$. Notons toutefois qu'on ne peut dire que l'arête est choisie arbitrairement.

Remarquons finalement que le premier graphe doit être $H^1 = (V_0 \cup V_1, \emptyset)$. En effet, si l'on suppose que le premier graphe a au moins une arête, $(V_0 \cup V_1, \emptyset)$ pourrait lui servir d'antécédent respectant toutes les conditions, ce qui contredirait la maximalité de la longueur de la suite.

Pour borner la longueur de la suite, nous prouvons l'énoncé suivant :

Lemme A : Soit j tel que $\Delta(H^j) = H^j$. Il existe alors $r \leq 4$ tel que $\Delta(H^{j+r}) = H^{j+r}$.

Preuve :

Dans le cas où $\Delta(H^{j+1}) = H^{j+1}$, on a que $r = 1$ et l'énoncé est respecté. Intéressons-nous alors au cas où $\Delta(H^{j+1}) \neq H^{j+1}$.

Comme H^j est clos et la suite est minimale, on a que le graphe H^{j+1} ne fait que rajouter une seule arête à son prédécesseur. Par la contrainte 6) de la suite, aucun sommet dans V_0 n'est relié par une arête dans V_0 . Nous n'avons alors que deux cas à traiter.

Cas 1 : Supposons que H^{j+1} a une arête supplémentaire entre deux sommets du haut. Notons-la $e = \{v, v'\}$, où $v, v' \in V_1$. Pour le graphe H^j , posons $U(v), U(v'), L(v)$ et $L(v')$ tels que dans la définition 8.2.2. Par la proposition 8.2.2 appliquée à H^j , $U(v)$ et $U(v')$ sont des cliques, $L(v)$ est biparti avec $U(v)$ et $L(v')$ est biparti avec $U(v')$. Cela est illustré par la figure 8.1.

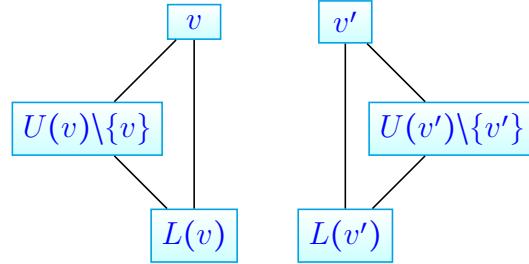


FIGURE 8.1 Deux composantes connexes du graphe H^j

Dans les figures utilisées lors de cette preuve, le fait que deux ensembles de sommets soit reliés par une arête signifie que tous les sommets d'un ensemble sont reliés à tous les sommets de l'autre.

Par la proposition 8.2.2, les ensembles $U(v) \cup L(v)$ et $U(v') \cup L(v')$ sont alors des composantes connexes du graphe H^j .

Comme dit précédemment, H^{j+1} ajoute l'arête $\{v, v'\}$ à H^j , illustrée en rouge à la figure 8.2. Notons que joindre deux sommets de composantes connexes distinctes d'un graphe réduit le nombre de composantes connexes de 1.

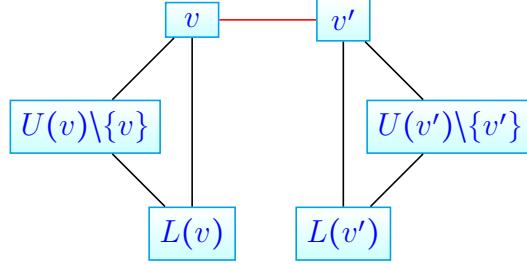


FIGURE 8.2 Composante connexe du graphe H^{j+1}

On a ensuite que $H^{j+2} = \Delta(H^{j+1})$. On ajoute alors les arêtes illustrées en vert à la figure 8.3.

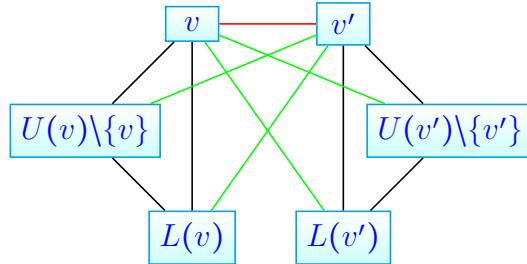
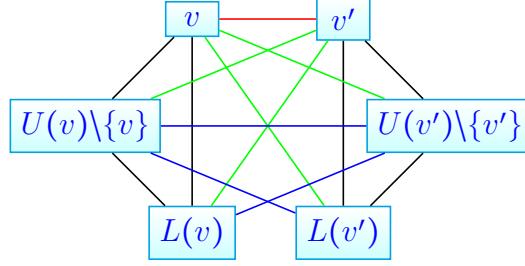


FIGURE 8.3 Composante connexe du graphe H^{j+2}

Puis, de même, $H^{j+3} = \Delta(H^{j+2})$. On ajoute alors les arêtes illustrées en bleu à la figure 8.4.

Cette composante connexe est alors égale à $U_{H^{j+3}}(v) \cup L_{H^{j+3}}(v)$ où les ensembles sont définis en fonction du nouveau graphe H^{j+3} . On peut également vérifier que $U_{H^{j+3}}(v) = U(v) \cup U(v')$ est une clique et que $L_{H^{j+3}}(v) = L(v) \cup L(v')$ est biparti avec $U_{H^{j+3}}(v)$. Donc, pour v , toutes les conditions de la proposition 8.2.2 sont

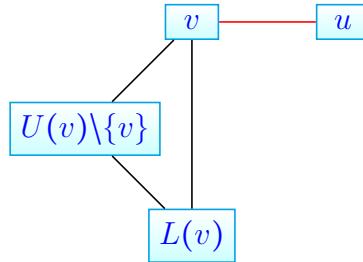
FIGURE 8.4 Composante connexe du graphe H^{j+3}

respectées. Cela est également vrai pour tous les sommets dans $U_{H^{j+3}}(v) \cup L_{H^{j+3}}(v)$.

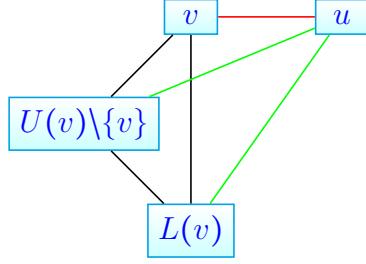
Les sommets en dehors de cet ensemble font partie d'ensembles U et L inchangé depuis H^j (qui est clos, rappelons-le) et respectent donc aussi les conditions de la proposition 8.2.2. On en conclut, par cette même proposition, que H^{j+3} est clos, avec $r = 3 \leq 4$.

Cas 2 : Supposons que H^{j+1} rajoute une arête entre un sommet du haut et un sommet du bas. Dénotons-là $e = \{v, u\}$, où $v \in V_1$ et $u \in V_0$.

Cas 2a : Supposons que u n'est connecté à aucun sommet de V_1 dans le graphe H^j . Cela est illustré par la figure 8.5.

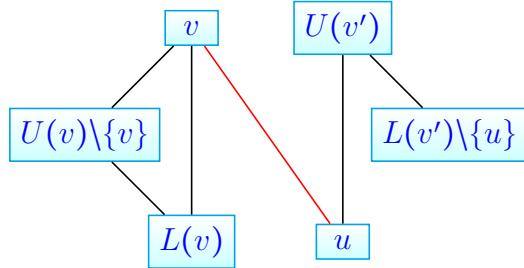
FIGURE 8.5 Composante connexe du graphe H^{j+1}

Puis, $H^{j+2} = \Delta(H^{j+1})$. Cela ajoute les arêtes illustrées en vert à la figure 8.6.

FIGURE 8.6 Composante connexe du graphe H^{j+2}

On peut vérifier que $U_{H^{j+2}}(v) = U(v) \cup \{u\}$ est une clique et que $L_{H^{j+2}}(v) = L(v)$ est biparti avec $U_{H^{j+2}}(v)$. De manière analogue à précédemment, on en déduit que H^{j+2} est clos, avec $r = 2 \leq 4$.

Cas 2b : Supposons que u est connecté à un sommet de V_1 , disons v' , dans le graphe H^j . Remarquons que $u \in L(v')$. Cela est illustré par la figure 8.7.

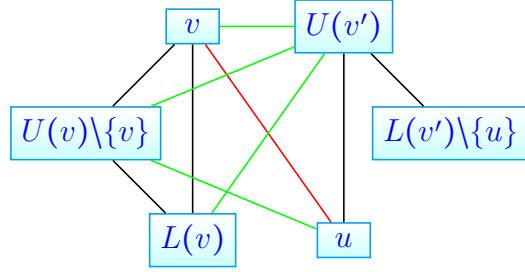
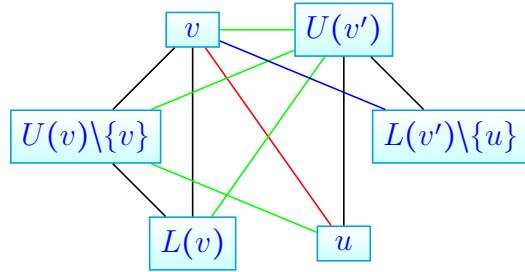
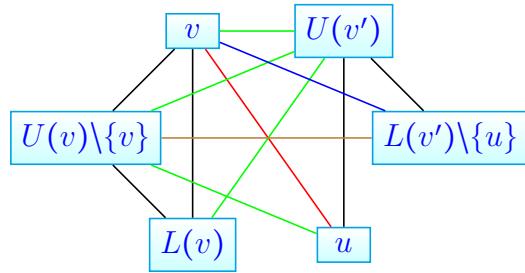
FIGURE 8.7 Composante connexe du graphe H^{j+1}

Puis, $H^{j+2} = \Delta(H^{j+1})$. Cela ajoute les arêtes illustrées en vert à la figure 8.8.

Ensuite, $H^{j+3} = \Delta(H^{j+2})$. Cela ajoute l'arête illustrée en bleu à la figure 8.9.

Finalement, $H^{j+4} = \Delta(H^{j+3})$. Cela ajoute l'arête illustrée en brun à la figure 8.10.

On peut vérifier que $U_{H^{j+4}}(v) = U(v) \cup U(v')$ est une clique et que $L_{H^{j+4}}(v) = L(v) \cup L(v')$ est biparti avec $U_{H^{j+4}}(v)$. De manière analogue à précédemment, on

FIGURE 8.8 Composante connexe du graphe H^{j+2} FIGURE 8.9 Composante connexe du graphe H^{j+3} FIGURE 8.10 Composante connexe du graphe H^{j+4}

en déduit que H^{j+4} est clos, avec $r = 4 \leq 4$.

On a ainsi démontré le lemme A.

L'idée centrale est que lorsque le graphe H^i est clos, le graphe H^{i+1} doit connecter deux composantes connexes de H^{i+1} , ce qui réduit leur nombre d'une unité. Le

graphe initial de notre suite, $H^1 = (V_0 \cup V_1, \emptyset)$, possèdant $2m$ sommets isolés, et donc $2m$ composantes connexes, on peut réduire leur nombre au plus $2m$ fois. Par le lemme A, puis en remarquant que H^1 est clos, le nombre de composantes connexes diminue après au plus 4 étapes. Ainsi, la longueur k de la suite est bornée supérieurement par $4 \cdot 2m$. Donc, $k \in O(m)$. \square

La lemme suivant est aussi utilisé dans la démonstration du théorème principal.

Lemme 8.3.2. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide, et t une fonction de seuil. Soit une chaîne de raffinements de graphes colorés bien dissociants dans Γ_V , $G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_{l-1} \geq G$. Supposons que G respecte C1 ainsi que l'équivalence contraire. On a alors que $\Delta(\text{Aux}(G)) \subseteq \text{Aux}(G^{(1)})$.

Précisons que $\text{Aux}(G)$ est construit à partir de la chaîne $G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_{l-1} \geq G$ et $\text{Aux}(G^{(1)})$ à partir de la chaîne $G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_{l-1} \geq G \geq G^{(1)}$.

Preuve. 1) Montrons d'abord que $V_{\Delta(\text{Aux}(G))} \subseteq V_{\text{Aux}(G^{(1)})}$.

Par définition de la clôture triangulaire, nous avons que $V_{\Delta(\text{Aux}(G))} = V_{\text{Aux}(G)}$. Ainsi, il reste à montrer que $V_{\text{Aux}(G)} \subseteq V_{\text{Aux}(G^{(1)})}$.

Comme $G \geq G^{(1)}$, par la proposition 8.1.2, $\text{Aux}(G) \subseteq \text{Aux}(G^{(1)})$ et on en déduit directement que $V_{\text{Aux}(G)} \subseteq V_{\text{Aux}(G^{(1)})}$.

2) Puis montrons que $E(\Delta(\text{Aux}(G))) \subseteq E(\text{Aux}(G^{(1)}))$.

Soit V_0 et V_1 tels que $E(\Delta(\text{Aux}(G))) = E(\text{Aux}(G)) = V_0 \dot{\cup} V_1$.

Soit $\{u, v\} \in E(\Delta(\text{Aux}(G)))$. Par définition de la clôture triangulaire, on a quatre possibilités non nécessairement mutuellement exclusives :

- a) $\{u, v\} \in E(\text{Aux}(G))$
- b) $u, v \in V_1$ et il existe $w \in V_0$ tel que $\{u, w\}, \{v, w\} \in E(\text{Aux}(G))$

- c) $u, v \in V_1$ et il existe $w \in V_1$ tel que $\{u, w\}, \{v, w\} \in E(\text{Aux}(G))$
- d) $u \in V_0, v \in V_1$ et il existe $w \in V_1$ tel que $\{u, w\}, \{v, w\} \in E(\text{Aux}(G))$

Montrons pour chacune des catégories que $\{u, v\} \in E(\text{Aux}(G^{(1)}))$.

- 2a) Supposons $\{u, v\} \in E(\text{Aux}(G))$.

De $G \succeq G^{(1)}$ et par la proposition 8.1.2, on a que $\text{Aux}(G) \subseteq \text{Aux}(G^{(1)})$. Puis, on infère de cela que $E(\text{Aux}(G)) \subseteq E(\text{Aux}(G^{(1)}))$ et donc $\{u, v\} \in E(\text{Aux}(G^{(1)}))$.

- 2b) Soit $u, v \in V_1$ et $w \in V_0$ tels que $\{u, w\}, \{v, w\} \in E(\text{Aux}(G))$.

Posons $u = (C_1, M_1, 1), v = (C_2, M_2, 1)$ et $w = (D, N, 0)$.

De $\{u, w\} \in E(\text{Aux}(G))$, on déduit alors qu'il existe un ensemble $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_G$ tel que pour tout $v_1 \in C_1$,

$$v_1 \in M_1 \iff N_{G, \mathcal{C}_1}^+(v_1) = N. \quad (*)$$

De $\{v, w\} \in E(\text{Aux}(G))$, on déduit alors qu'il existe un ensemble $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_G$ tel que pour tout $v_2 \in C_2$,

$$v_2 \in M_2 \iff N_{G, \mathcal{C}'}^+(v_2) = N. \quad (*')$$

Par la proposition 3.3.1, pour toute couleur dans \mathcal{C}' , il existe une couleur duale quelque part dans \mathcal{C} . Soit \mathcal{C}_2 l'ensemble de toutes les couleurs duales des couleurs de \mathcal{C}' . Ainsi, on a que $\chi_G(v_1, v_2) \in \mathcal{C}'$ si et seulement si $\chi_G(v_2, v_1) \in \mathcal{C}_2$.

Nous avons donc

$$N_{G, \mathcal{C}'}^+(v_1) = \{v_2 \in V \mid \chi_G(v_1, v_2) \in \mathcal{C}'\} = \{v_2 \in V \mid \chi_G(v_2, v_1) \in \mathcal{C}_2\} = N_{G, \mathcal{C}_2}^-(v_1).$$

$(*)'$ se traduit alors par :

Il existe $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_G$ tel que pour tout $v_2 \in C_2$,

$$v_2 \in M_2 \iff N_{G, \mathcal{C}_2}^-(v_2) = N. \quad (**)$$

Maintenant, pour prouver le résultat principal de la section 2b), c.-à-d. que $\{u, v\} = \{(C_1, M_1), (C_2, M_2)\} \in E(\text{Aux}(G^{(1)}))$, montrons qu'il existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_{G^{(1)}}$ tel que pour tout $v_1 \in C_1$,

$$v_1 \in M_1 \iff N_{G^{(1)}, \mathcal{C}'}^+(v_1) = M_2. \quad (A)$$

En fait, il faut aussi montrer qu'il existe $\mathcal{C}'' \subseteq \mathcal{C}_{G^{(1)}}$ tel que pour tout $v_2 \in C_2$,

$$v_2 \in M_2 \iff N_{G^{(1)}, \mathcal{C}''}^+(v_2) = M_1. \quad (A')$$

Par symétrie, la démonstration de (A') ci-dessus est analogue à celle de (A) . Concentrons-nous sur (A) .

En manipulant bien les symboles et en remarquant que $V_G = V_{G^{(1)}}$ nous pouvons montrer que (A) est équivalent à ce qu'il existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_{G^{(1)}}$ tel que tout $v_1 \in C_1$,

$$v_1 \in M_1 \iff (\forall v_2 \in V_G, v_2 \in M_2 \iff \chi_{G^{(1)}}(v_1, v_2) \in \mathcal{C}')$$

Posons simplement $\mathcal{C}' := \chi_{G^{(1)}}(M_1 \times M_2)$.

Nous séparons la preuve de (A) en trois étapes $(A.1)$, $(A.2)$ et $(A.3)$.

$(A.1)$ Si $v_1 \in M_1$, alors pour tout $v_2 \in V_G, v_2 \in M_2$ implique $\chi_{G^{(1)}}(v_1, v_2) \in \mathcal{C}'$.

$(A.2)$ Si $v_1 \in M_1$, alors pour tout $v_2 \in V_G, v_2 \notin M_2$ implique $\chi_{G^{(1)}}(v_1, v_2) \notin \mathcal{C}'$.

$(A.3)$ $v_1 \notin M_1$ implique $N_{G^{(1)}, \mathcal{C}'}^+(v_1) \neq M_2$.

Montrons quelques résultats avant cela.

Montrons quelques résultats avant de prouver les autres sous-cas.

On peut reformuler le résultat $(*)$ du début de la section 2b) : il existe un ensemble $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_G$ tel que pour tout $m \in C_1$,

$$m \in M_1 \iff \left(\text{pour tout } m' \in V_G, (m' \in N \iff \chi_G(m, m') \in \mathcal{C}_1) \right).$$

De même, pour $(**)$: il existe un ensemble $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_G$ tel que pour tout $m' \in C_2$,

$$m' \in M_2 \iff \left(\text{pour tout } m \in V_G, (m \in N \iff \chi_G(m, m') \in \mathcal{C}_2) \right).$$

Pour le reste de la preuve, soit m et m' deux représentants quelconques de M_1 et M_2 , avec $m \in M_1$ et $m_2 \in M_2$. On a alors directement des derniers résultats que

$$m' \in N \text{ si et seulement si } \chi_G(m, m') \in \mathcal{C}', \quad (\dagger)$$

puis que

$$m \in N \text{ si et seulement si } \chi_G(m, m') \in \mathcal{C}'. \quad (\dagger')$$

Intéressons-nous maintenant à la couleur :

$$\chi_{G^{(1)}}(m, m') := \left(\chi_G(m, m'), \{(\chi_G(w, m'), \chi_G(m, w)) \mid w \in V_G\} \right).$$

Par les équivalences (\dagger) et (\dagger') , les éléments du multiensemble respectent alors pour tout $w \in V_G$:

$$(\chi_G(w, m'), \chi_G(m, w)) \in \begin{cases} \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_1 & \text{si } w \in N \\ (\mathcal{C}/\mathcal{C}_2) \times (\mathcal{C}/\mathcal{C}_1) & \text{si } w \notin N \end{cases} \quad (***)$$

Cela nous donne un bon portrait des couleurs dans l'ensemble $\mathcal{C}' := \chi_{G^{(1)}}(M_1 \times M_2)$.

Passons maintenant à la preuve de $(A.1), (A.2), (A.3)$.

$(A.1)$

Prouvons que si $v_1 \in M_1$, alors $\chi_{G^{(1)}}(v_1, v_2) \in \mathcal{C}'$ pour tout $v_2 \in M_2$.

Supposons $v_1 \in M_1$ et $v_2 \in M_2$. On a alors par définition de \mathcal{C}' que $\chi_{G^{(1)}}(v_1, v_2) \in \mathcal{C}'$.

Cela conclut la démonstration de $(A.1)$.

$(A.2)$

Prouvons que si $v_1 \in M_1$, alors $\chi_{G^{(1)}}(v_1, v_2) \notin \mathcal{C}'$ pour tout $v_2 \in V_G \setminus M_2$.

Supposons $v_1 \in M_1$ et $v_2 \in V_G \setminus M_2$ et montrons que $\chi_{G^{(1)}}(v_1, v_2) \notin \mathcal{C}'$.

Dans le cas où $v_2 \in C_2 \setminus M_2$, on déduit directement de $(*)$ et $(**)$ que $N_{G, C_1}^+(v_1) = N$ et $N_{G, C_2}^-(v_2) \neq N$, de sorte que $N_{G, C_1}^+(v_1) \neq N_{G, C_2}^-(v_2)$. Cette inégalité implique l'existence d'un élément dans un ensemble mais pas dans l'autre. Il existe donc $w \in V_G$ tel que

$$w \in N_{G, C_1}^+(v_1) \oplus w \in N_{G, C_2}^-(v_2).$$

Ce qui est équivalent à

$$\chi_G(v_1, w) \in \mathcal{C}_1 \oplus \chi_G(w, v_2) \in \mathcal{C}_2,$$

puis finalement à

$$(\chi_G(w, v_2), \chi_G(v_1, w)) \in (\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_1) \cup (\mathcal{C}_2 \times \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1).$$

Avec la supposition $\chi_{G^{(1)}}(v_1, v_2) \in \mathcal{C}' = \chi_{G^{(1)}}(M_1 \times M_2)$, les éléments du multiensemble de la deuxième composante de cette couleur devraient respecter $(***)$, mais ce n'est pas le cas, car le résultat ci-dessus est un contre-exemple. L'hypothèse du début du paragraphe est donc fausse, ce qui conclut ce cas.

Il faut aussi considérer le cas où $v_2 \in V_G \setminus C_2$.

Supposons encore $\chi_{G^{(1)}}(v_1, v_2) \in \mathcal{C}' = \chi_{G^{(1)}}(M_1 \times M_2)$.

Il existe alors $(m, m') \in M_1 \times M_2$ tel que $\chi_{G^{(1)}}(v_1, v_2) = \chi_{G^{(1)}}(m, m')$.

Comme $G \geq G^{(1)}$, $\chi(v_1, v_2) = \chi_G(m, m')$.

Puis, comme G respecte C1, $\chi_G(v_2, v_2) = \chi_G(m', m')$.

Cela est impossible par la proposition 4.1.1, car $m' \in C_2$ et $v_2 \notin C_2$. La supposition est une fois de plus fausse.

Cela conclut la démonstration de (A.2).

Maintenant, prouvons la réciproque en utilisant la notation avec l'ensemble voisinage :

(A.3)

Prouvons que $v_1 \notin M_1$ implique $N_{G^{(1)}, \mathcal{C}'}^+(v_1) \neq M_2$.

Pour cela, supposons $v_1 \in C_1 \setminus M_1$ et montrons qu'il existe un élément $v_2 \in V$ tel que $v_2 \in M_2$ et $v_2 \notin N_{G^{(1)}, \mathcal{C}'}^+(v_1)$.

En fait, en prenant un élément $v_2 \in M_2$ quelconque, il est possible de montrer que $\chi_{G^{(1)}}(v_1, v_2) \notin \mathcal{C}'$. La preuve est alors analogue à la première moitié de l'étape (A.2). Cela conclut la démonstration de (A.3) et donc de (A).

Cela conclut le cas 2b). Les cas 2c) et 2d) se démontrent de façon similaire. \square

Nous avons finalement besoin du résultat suivant.

Lemme 8.3.3. (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit V un ensemble fini non vide, et t une fonction de seuil. Soit une chaîne de raffinements de graphes colorés bien dissociants dans Γ_V , $G_0 \succeq G_1 \succeq \dots \succeq G_{l-1} \succeq G \succeq G_{l+1} \succeq \dots \succeq G_{m-1} \succeq G'$. Supposons que G et G' respectent C1 et C2 et qu'il existe une classe de couleur C de G telle que $G >_C G'$. Si C est une CCA de G uniquement incidente avec des petites CCS de G et qu'aucune petite CCS de G n'est scindée, alors $\text{Aux}(G) \neq \text{Aux}(G')$.

Preuve. On a que C est scindée dans G' en au moins deux CCA qu'on note C' et C'' .

Par le lemme 6.4.1, il existe C_1 et C_2 , des CCS de sommets telles que $C \subseteq C_1 \times C_2$. Comme C est uniquement incidente de petites CCS, on a que C_1 et C_2 doivent être des petites CCS.

Par le lemme 6.4.1, en prenant B comme étant l'ensemble des petites CCS de G , on déduit qu'il existe $v \in C_1$ tel que $\emptyset \subset N_{C'}^+(v) \subset N_C^+(v)$.

Posons $M := \{u \in C_1 \mid N_{C'}^+(u) = N_{C'}^+(v)\}$. En retraduisant en langage logique, cela veut dire que pour tout $u \in C_1$, alors $u \in M$ si et seulement si $N_{C'}^+(u) = N_{C'}^+(v)$. Ainsi, par définition du graphe auxiliaire, $\text{Aux}(G')$ doit contenir une arête entre ses sommets $(C_1, M, 1)$ et $(C_2, N_{C'}^+(v), 0)$.

Au contraire, $\text{Aux}(G)$ ne contient pas cette arête. Montrons-le par contradiction en supposant le contraire. Cela veut dire qu'il existe \bar{C} , une MCCA de G pour laquelle, pour tout $u \in C_1$, $u \in M \iff N_{\bar{C}}^+(u) = N_{C'}^+(v)$.

Comme $v \in C_1$ et même $v \in M$, en vérifiant sa définition, on a alors que $N_{\bar{C}}^+(v) = N_{C'}^+(v)$. Par $\emptyset \subset N_{C'}^+(v) \subset N_C^+(v)$, on déduit $\emptyset \subset N_{\bar{C}}^+(v) \subset N_C^+(v)$. On peut vérifier que cela implique $\emptyset \subset \bar{C} \subset C$. Puisque \bar{C} est une MCCA non vide incluse dans C , une CCS, on en déduit qu'il existe une CCA non vide incluse dans C , ce qui est impossible, car les classes de couleur doivent être disjointes entre elles. \square

Ceci clôt l'ensemble des résultats sur les graphes auxiliaires. Nous disposons maintenant de tous les lemmes nécessaires afin d'aborder la démonstration du théorème principal de l'article de Kiefer et Schweitzer au chapitre suivant.

CHAPITRE IX

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME PRINCIPAL

Comme mentionné précédemment au chapitre 5, $c(G) := \min_{S_2} \max_{S_1} \text{val}(G; S_1, S_2)$. De plus, on a aussi remarqué que $WL_2(G) \leq c(G)$. Ainsi, il reste essentiellement à borner supérieurement $c(G)$.

Assignons au joueur 2 d'une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer une stratégie qu'on note S'_2 . Puisque cette stratégie n'est pas nécessairement optimale, on a alors que

$$c(G) := \min_{S_2} \max_{S_1} \text{val}(G; S_1, S_2) \leq \max_{S_1} \text{val}(G; S_1, S'_2)$$

La valeur à la droite de l'inégalité est alors ce que nous cherchons finalement à borner. On pose $c'(G) := \max_{S_1} \text{val}(G; S_1, S'_2)$. Ainsi, $c(G) \leq c'(G)$.

La stratégie S'_2 est une fonction $\Gamma_V \rightarrow \Gamma_V$, donc de propriété de type markovienne. L'algorithme suivant définit cette fonction.

Algorithme 9.0.1. Un tour du joueur 2 dans une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer où ce dernier applique la stratégie S'_2 . L'algorithme a pour entrée un graphe coloré G .

- ```

1 : $G \leftarrow \text{nett}_c(G)$
2 : tant que $\Delta(\text{Aux}(G)) \neq \text{Aux}(G)$ faire
3 : $G \leftarrow G^{(1)}$
4 : $G \leftarrow \text{nett}_c(G)$

```

5 : **fin tant que**

6 : **retourner**  $G$

Notons que si le joueur 2 suit cette stratégie durant le jeu, il n'y a alors que trois types de coups effectués : les raffinements du joueur 1, les raffinements de Weisfeiler-Lehman effectués par le joueur 2, puis les nettoyages complets effectués par le joueur 2. On appelle les deux premiers types les *coups canoniques*. On remarque d'ailleurs qu'ils ont tous deux un coût individuel de 1.

Désignons par graphes *apparaissant dans la partie* tous les graphes résultant de ces trois types de coups. Il est important de les distinguer des graphes *joués* dans le jeu, soit ceux retournés par chaque joueur à la fin de leur tour.

Précisons que, lors de l'algorithme 9.0.1, le calcul de  $\text{Aux}(G)$  utilise comme chaîne de raffinements associée celle de tous les graphes *apparaissant dans la partie* avant  $G$  inclusivement.

Notre objectif à présent consiste à borner le coût total d'une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer quand le joueur 2 applique la stratégie  $S'_2$ . Pour nous aider, nous séparons les coups effectués en plusieurs catégories et bornons le coût total de chacune d'entre elles.

En premier lieu, remarquons que l'on peut borner tout de suite le coût de tous les coups canoniques scindant des CCS directement ou par le biais de leur nettoyage complet subséquent.

**Lemme 9.0.1.** Soit une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer ayant  $G$  pour graphe initial, où le joueur 2 suit la stratégie  $S'_2$ . Le coût des coups canoniques scindant des CCS ou pour lesquels leur nettoyage complet subséquent scinde une CCS est au plus  $n := |V_G|$ .

**Preuve.** Supposons que durant une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer, il y a au

moins  $n + 1$  coups scindant des CCS. On peut alors prendre les graphes  $G_1, G_2, \dots, G_{n+1}$ , qui apparaissent dans la partie directement après un tel coup.

Considérons la chaîne

$$G >_{\mathcal{S}} G_1 >_{\mathcal{S}} G_2 >_{\mathcal{S}} \cdots >_{\mathcal{S}} G_{n+1}.$$

En appliquant la proposition 4.3.7 avec  $E = \mathcal{S}$ , on déduit

$$0 < |\chi_G(\mathcal{S})| < |\chi_{G_1}(\mathcal{S})| < \cdots < |\chi_{G_{n+1}}(\mathcal{S})| \leq n.$$

On déduit donc l'existence de  $n$  entiers strictement situés entre 0 et  $n$ , ce qui est absurde.

Il y a donc au plus  $n$  coups scindant des CCS. Disons que parmi tous ces coups, il y en a  $n_1$  qui soient canoniques et  $n_2$  qui soient des nettoyages complets. Donc,  $n_1 + n_2 \leq n$ . Chaque nettoyage complet scindant des CCS est précédé d'un coup canonique. Il y en a donc le même nombre  $n_2$ . Si parmi ces derniers, on exclut ceux qui scindent des CCS (pour ne pas compter en double), on se retrouve avec  $n_3 \leq n_2$  coups restants. Comme les coups canoniques ont un coût individuel de 1, le coût total des coups canoniques scindant des CCS ou pour lesquels leur nettoyage complet subséquent scinde une CCS est de  $n_1 + n_3 \leq n$   $\square$

Pour les coups canoniques, il ne nous reste alors plus qu'à borner le coût des ceux qui scident *uniquement* des CCA et pour lesquels leur nettoyage subséquent ne scinde aucune CCS. Notons l'emploi du mot *uniquement*. En effet, si un coup canonique scinde à la fois une CCS et une CCA, son coût est déjà pris en compte par le lemme précédent.

Pour nous aider, nous séparons le reste des coups canoniques à considérer en deux cas que nous désignons par un symbole, car ils sont particulièrement longs à énoncer.

Cas  $\alpha$  : Le coup canonique scinde une CCA incidente avec de grandes CCS. De plus, le coup ainsi que le nettoyage complet subséquent ne scindent aucune CCS.

Cas  $\beta$  : Le coup scinde une CCA incidente uniquement avec des petites CCS. De plus, le coup ainsi que le nettoyage complet subséquent ne scindent aucune CCS.

**Lemme 9.0.2.** Soit une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer ayant  $G$  comme graphe initial, où le joueur 2 suit la stratégie  $S'_2$ , alors le coût des coups canoniques de cas  $\alpha$  est au plus  $n^2/t(n)$ , où  $t(n)$  est la fonction de seuil et  $n := |V_G|$ .

**Preuve.** Posons  $G$  comme graphe initial et considérons une chaîne avec tous les graphes qui apparaissent dans le jeu. On peut alors considérer les  $k$  coups canoniques de cas  $\alpha$   $G_i > G_i^*$  qui apparaissent dans le jeu. Notons que  $\text{nett}_c(G_i^*) \geq G_{i+1}$ .

Par le lemme 7.2.1, on déduit  $f(G_i) + t(n) \leq f(\text{nett}_c(G_i^*))$  pour tout  $i$  entre 1 et  $k$ , où  $f$  est la fonction potentielle définie à la section 7. Comme la fonction potentielle est décroissante par la proposition 7.1.2, on en déduit de  $\text{nett}_c(G_i^*) \geq G_{i+1}$  que  $f(\text{nett}_c(G_i^*)) \leq f(G_{i+1})$ .

Ainsi,  $f(G_i) + t(n) \leq f(G_{i+1})$ . On peut montrer par itération que  $f(G_1) + k \cdot t(n) \leq f(G_k)$ , ce qui implique  $k \cdot t(n) \leq f(G_k) \leq n^2$ , par la proposition 7.1.1, et on en conclut que  $k \leq n^2/t(n)$ , où  $k$  correspond aussi au coût des coups.  $\square$

**Lemme 9.0.3.** Soit une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer avec  $G$  comme graphe initial, où le joueur 2 suit la stratégie  $S'_2$ . Le coût des coups canoniques de cas  $\beta$  est alors  $O(n2^{t(n)})$ , où  $t(n)$  est la fonction de seuil et  $n := |V_G|$ .

**Preuve.** Soit la suite  $G^1, \dots, G^k$  de tous les graphes apparaissant dans une partie du jeu de Kiefer-Schweitzer résultant d'un coup canonique de cas  $\beta$  suivi d'un nettoyage complet.

Montrons que la suite  $\text{Aux}(G^1), \dots, \text{Aux}(G^k)$  respecte les conditions du lemme

8.3.1, où  $\text{Aux}(G^i)$  est défini à partir de la chaîne de raffinements de tous les graphes apparaissant dans la partie avant  $G^i$  inclusivement.

Posons  $m := 2n * 2^{t(n)}$  où  $n = |V_{G^i}|$ . Notons que pour chaque  $G^i$  de la suite, nous avons  $V_{\text{Aux}(G^i)} := V_0^i \cup V_1^i$ . Par la proposition 8.1.1, on a alors que  $|V_0^i| = |V_1^i| \leq m$ . Cela montre les conditions 1) et 2).

La condition 6) est une propriété des graphes auxiliaires, qui est donc respectée par les éléments de notre suite.

De  $G^i \succeq G^{i+1}$ , par la proposition 8.1.2, on infère que  $\text{Aux}(G^i) \subseteq \text{Aux}(G^{i+1})$ , ce qui implique que  $V_{\text{Aux}(G^i)} \subseteq V_{\text{Aux}(G^{i+1})}$  et donc que  $V_0^i \subseteq V_0^{i+1}$  et  $V_1^i \subseteq V_1^{i+1}$ . Cela montre la condition 3).

Par le lemme 8.3.3, la condition 5) est respectée.

Montrons finalement la condition 4).

Cas 1)  $G^i, G^{i+1}$  sont tels que  $G^{i+1}$  résulte d'un coup canonique de cas  $\beta$  du joueur 2 suivi d'un nettoyage complet par le joueur 2.

Par analyse de l'algorithme, on a que  $G^i \succeq G^{i(1)} \succeq G^{i+1}$ . On a alors par la proposition 8.1.2, que  $\text{Aux}(G^{i(1)}) \subseteq \text{Aux}(G^{i+1})$ . Comme  $\Delta(\text{Aux}(G^i)) \subseteq \text{Aux}(G^{i(1)})$ , par le lemme 8.3.2, on en conclut que,  $\Delta(\text{Aux}(G^i)) \subseteq \text{Aux}(G^{i+1})$ .

Cas 2)  $G^i, G^{i+1}$  sont tels que  $G^{i+1}$  résulte d'un coup canonique de cas  $\beta$  du joueur 1 suivi d'un nettoyage complet par le joueur 2.

Par analyse de l'algorithme, remarquons que le graphe  $G^i$  reçu par le joueur 1 doit respecter  $\Delta(\text{Aux}(G^i)) = \text{Aux}(G^i)$ . Comme  $G^i \succeq G^{i+1}$ , par la proposition 8.1.2,  $\text{Aux}(G^i) \subseteq \text{Aux}(G^{i+1})$  et on en conclut que  $\Delta(\text{Aux}(G^i)) \subseteq \text{Aux}(G^{i+1})$ .

Ainsi, la chaîne  $\text{Aux}(G^1), \dots, \text{Aux}(G^k)$  respecte toutes les conditions du lemme

8.3.1 et on a que  $k \in O(m) = O(n2^{t(n)})$ . Cette chaîne contenant tous les graphes résultant de coups canoniques de cas  $\beta$  suivis d'un nettoyage complet, cela veut dire que le nombre et donc le coût de tous les coups canoniques de cas  $\beta$  est borné par  $O(n2^{t(n)})$ .  $\square$

Il reste alors à borner le coût des nettoyages complets effectués par le joueur 2. Pour cela, il est plus simple de borner le coût des nettoyages (tout court) effectués. Séparons-les en ceux scindant des CCS et ceux ne le faisant pas.

Les nettoyages scindant des CCS ont un coût individuel d'au plus 2. Par la proposition 6.3.1, leur nombre est  $\leq n$ . Ainsi, leur coût est  $\leq 2n$ .

Les nettoyages ne scindant pas des CCS consistent en un seul raffinement pour faire respecter la condition C1. Leurs coûts individuels sont donc d'au plus 1. Ne pouvant être effectués plus d'une fois dans un nettoyage complet, leur nombre est donc borné supérieurement par le nombre de nettoyages complets. Puisque ces derniers sont toujours effectués après des coups canoniques, on en déduit que le nombre total de nettoyages ne scindant pas des CCS est borné par le nombre et donc le coût des coups canoniques. Ainsi, par les lemmes 9.0.1, 9.0.2 et 9.0.3, ce dernier est de  $O(n + n^2/t(n) + n2^{t(n)})$ .

Dans le but de calculer  $c'(G)$ , il faut ajouter les coûts des coups canoniques et des nettoyages complets. On obtient

$$\begin{aligned} c'(G) &= (O(n) + O(n^2/t(n)) + O(n2^{t(n)})) + (O(n) + O(n + n^2/t(n) + n2^{t(n)})) \\ &= O(n + n^2/t(n) + n2^{t(n)}) \end{aligned}$$

Puis, en posant  $t(n) := \log_2(n)/2$ , on obtient

$$\begin{aligned} c'(G) &= O\left(n + \frac{n^2}{\log_2(n)/2} + n2^{\log_2(n)/2}\right) \\ &= O\left(n + n^2/\log_2(n) + n^{3/2}\right) \\ &= O\left(n^2/\log_2(n)\right) \end{aligned}$$

Ce qui nous permet finalement d'obtenir le résultat suivant qui est l'objectif principal de l'article de Kiefer et Schweitzer.

**Théorème 9.0.1.** (Kiefer et Schweitzer, 2016) Soit  $V$  un ensemble fini non vide, et  $G \in \Gamma_V$ . On a alors que  $WL_2(G) = O(n^2/\log_2(n))$  où  $n := |V|$ .

## CONCLUSION

L'objectif initial de ce mémoire était d'étudier les structures finies, en relation avec les descriptions que l'on peut en faire par des formules logiques. Ce champ disciplinaire, appelé *théorie des modèles finis* (Libkin, 2004), se situe à l'intersection de l'algorithme et de la logique. Cela est naturel, car le traitement de structures relationnelles finies relève de la combinatoire et nécessite des algorithmes adéquats. D'un autre côté, la description des structures, et de leurs propriétés, relève aussi tout naturellement de la logique. D'ailleurs, les résultats les plus spectaculaires de la théorie des modèles finis établissent des liens précis entre algorithmes et formalisations logiques. Il existe en effet une correspondance entre la complexité algorithmique d'un problème et sa capacité à être exprimé dans une certaine logique.

Il n'est malheureusement pas possible, dans le cadre de ce mémoire, d'aller beaucoup plus loin sur ce sujet. Il reste qu'il est tout de même important de souligner que la borne de Kiefer et Schweitzer a des conséquences importantes en logique. Nous allons maintenant les résumer sans entrer dans les détails qu'on peut retrouver dans (Grohe, 1998) et (Immerman et Lander, 1990).

Une façon naturelle d'évaluer dans quelle mesure deux structures finies, par exemple des graphes, sont facilement distinguables est d'établir quel genre de formule de la logique du premier ordre permet de les distinguer. Dans ce but, on peut tout d'abord déterminer des classes de complexité de formules, et c'est justement l'objectif des classes  $\mathcal{L}_k$  et  $\mathcal{C}_k$  que nous allons maintenant introduire.

Soit  $\mathcal{L}$  la logique de premier ordre. Afin de créer une autre logique, on peut par

exemple limiter de nombre maximal de variables pouvant apparaître dans une formule. Le fragment (ou classe)  $\mathcal{L}^k$  est ainsi formé de toutes les formules de la logique du premier ordre utilisant au plus  $k$  variables. Par exemple,  $\exists x \forall y R(x, y) \wedge \exists x T(x)$  appartiendrait à  $\mathcal{L}^2$ .

On pourrait penser que  $\mathcal{L}^k$  limite le rang de quantificateurs (c.-à-d. le nombre maximal de quantificateurs imbriqués les uns sur les autres) à  $k$ , mais ce n'est pas le cas. On peut d'ailleurs en donner un exemple simple, par une définition inductive de prédictats. Par exemple, soit  $R$  une relation binaire quelconque et considérons les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\phi_0(x) &:= R(x, x) \\ \phi_1(x) &:= \exists y R(x, y) \wedge \phi_0(y) \\ \phi_2(x) &:= \exists y R(x, y) \wedge \phi_1(y) \\ \phi_3(x) &:= \exists y R(x, y) \wedge \phi_2(y)\end{aligned}$$

Pour chaque formule  $\phi_i(x)$ , son indice  $i$  correspond à son rang de quantificateur. Donc,  $\phi_3(y)$  est une formule de  $L^2$  avec un rang de quantificateur de 3.

Comme le dénombrement occupe une place centrale en combinatoire, il est tout naturel d'étendre  $\mathcal{L}^k$  à  $\mathcal{C}^k$  en ajoutant le quantificateur  $\exists^{\geq i}$  pour tous les  $i \in \mathbb{N}$ . Ce symbole est défini de telle sorte que  $\exists^{\geq i} x \phi(x)$  signifie qu'il existe au moins  $i$  éléments qui satisfont la propriété  $\phi$ . Il est possible de définir ce quantificateur avec la logique de premier ordre avec le symbole d'égalité. Par contre, pour des logiques comme  $\mathcal{L}^k$ , cela n'est pas possible et donc ajouter ce symbole permet d'exprimer davantage de propositions.

On constate la pertinence de  $WL_2$  en logique formelle en remarquant que, pour deux graphes donnés, deux sommets ont la même couleur dans la stabilisation de  $WL_2$  si et seulement s'ils satisfont exactement les mêmes formules de  $\mathcal{C}^2$  (Grohe,

1998). De plus, deux graphes donnés sont distinguables dans  $\mathcal{C}^k$  si et seulement s'ils sont distinguables par  $\text{WL}_k$  (Immerman et Lander, 1990). Finalement, on sait aussi que le nombre d'itérations nécessaires avant que  $\text{WL}_k$  ne se stabilise correspond au rang de quantificateurs d'une formule de  $\mathcal{C}^k$  distinguant les graphes.

Par le théorème principal du mémoire, le paragraphe ci-dessus et la remarque que l'algorithme  $\text{WL}_2$  peut être défini par une formule de  $\mathcal{C}^3$ , on infère le résultat suivant :

**Corollaire C.0.1.** (Kiefer et Schweitzer, 2016) Toute paire de graphes à  $n$  sommets distinguables par une formule de  $\mathcal{C}^3$  le sont alors également par une formule de  $\mathcal{C}^3$  où le rang de quantificateur ne dépasse pas  $O(n^2/\log(n))$ .

On voit donc que la borne supérieure pour l'algorithme  $\text{WL}_2$  permet de borner la complexité d'une formule logique. Il s'agit donc d'un résultat très représentatif du domaine de la théorie des modèles finis.

Ce type de résultat justifie pleinement l'objectif de ce mémoire qui était d'éclaircir la preuve de Kiefer et Schweitzer en rajoutant des concepts et des étapes intermédiaires pour rendre le raisonnement plus clair et explicite.

Pour terminer, il est utile de revenir sur tout le travail accompli et de mettre en lumière mes contributions personnelles.

Au chapitre 2, nous avons tout d'abord présenté l'algorithme de Weisfeiler-Lehman de dimension 1 en procédant d'abord par une approche intuitive. Cela a pour but de motiver la version en dimension 2 et aussi d'introduire les mécanismes fondamentaux qui sont en jeu. Les choses se sont d'ailleurs développées dans cet ordre historiquement.

Au chapitre 3, l'algorithme de Weisfeiler-Lehman de dimension 2 tel que formalisé

par Kiefer et Schweitzer a été justifié comme étant juste lorsque ce dernier a pour sortie le booléen indiquant que ses deux graphes d'entrée ne sont pas isomorphes. Le concept de *graphe coloré* a été formalisé et un diagramme a été introduit pour aider à visualiser leur raffinement. De plus, la distinction a été faite entre les graphes colorés isomorphes et équivalents.

Les concepts de classes et multiclasses de couleur, la relation  $\geq_E$  et les raffinements atomiques et composés ont été introduits au chapitre 4 et plusieurs résultats élémentaires ont été démontrés sur ces derniers.

La description du jeu faite dans l'article original a présenté de nombreux défis pour se convaincre que son usage dans la preuve était correct. Le chapitre 5 tente donc d'être plus clair à ce sujet et donner une approche intuitive pour permettre de mieux saisir la motivation derrière sa définition.

Aux chapitres 5 et 9, les inégalités ayant pour but de borner supérieurement  $WL_2$  ont été explicitement écrites.

Au chapitre 6, les raffinements pour faire respecter les propriétés C1 et C2 ont été formalisés, l'article original nous semblant vague sur ce sujet. Le coût d'un nettoyage a rigoureusement été borné. La proposition 6.4.1 a aussi été introduite pour permettre de mieux comprendre les graphes colorés respectant C1.

Au chapitre 8, de nombreux diagrammes ont été introduits pour permettre de mieux suivre la preuve du lemme 8.3.1. Similairement, les propositions 8.1.1, 8.2.1 et 8.2.2 ont été rajoutées pour rendre le raisonnement plus explicite.

Au chapitre 9, la séparation de la preuve en divers cas permettait de clarifier l'argument.

En ce qui concerne les ouvertures offertes par ce mémoire, il y a en autre l'idée de

généraliser les graphes de couleur pour pouvoir décrire l'algorithme de Weisfeiler-Lehman de dimension  $k$ . Ainsi, un *graphe coloré généralisé* serait une couple  $(V, \chi)$  où  $\chi : V^k \rightarrow \mathcal{C}$ . La plupart des résultats du chapitre 4 pourraient alors être généralisés. De même, peut-être qu'une partie de la preuve de l'article de Kiefer et Schweitzer pourrait s'appliquer pour l'algorithme de Weisfeiler-Lehman de dimension  $k$ , pour lesquels il n'y a toujours pas de borne supérieure connue analogue à celle de Kiefer et Schweitzer.

## RÉFÉRENCES

- Babai, L. (1996). *Automorphism Groups, Isomorphism, Reconstruction*, Dans *Handbook of Combinatorics*, volume 2, (p. 1447–1540). MIT Press.
- Babai, L., Erdős, P. et Selkow, S. M. (1980). Random graph isomorphism. *SIAM J. Comput.*, 9, 628–635.
- Babai, L., Kantor, W. et Luks, E. (1983). Computational complexity and the classification of finite simple groups. *24th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 162–171.
- Babel, L., Chuvava, I., Klin, M. et Pasechnik, D. (2010). Algebraic combinatorics in mathematical chemistry. methods and algorithms. II. program implementation of the Weisfeiler-Leman algorithm. arXiv :1002.1921.
- Berkholz, C., Bonsma, P. S. et Grohe, M. (2017). Tight lower and upper bounds for the complexity of canonical colour refinement. *Theory Comput. Syst.*, 60(4), 581–614.
- Berkholz, C. et Nordström, J. (2016). Near-optimal lower bounds on quantifier depth and Weisfeiler-Lehman refinement steps. *Electron. Colloquium Comput. Complex.*, 23, 135.
- Bläser, M. (2013). *Fast Matrix Multiplication*. Numéro 5 de Graduate Surveys. Theory of Computing Library.
- Cai, J., Fürer, M. et Immerman, N. (1992). An optimal lower bound on the number of variables for graph identification. *Combinatorica*, 12(4), 389–410.
- Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L. et Stein, C. (2009). *Introduction to Algorithms*, Third Edition (3rd éd.). The MIT Press.
- Darga, P. T., Liffiton, M. H., Sakallah, K. A. et Markov, I. L. (2004). Exploiting structure in symmetry detection for CNF. Dans S. Malik, L. Fix, et A. B. Kahng (dir.). *Proceedings of the 41th Design Automation Conference*, 530–534. ACM.

- Garey, M. R. et Johnson, D. S. (1990). *Computers and Intractability ; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York, NY, USA : W. H. Freeman & Co.
- Grohe, M. (1998). Finite variable logics in descriptive complexity theory. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 4(4), 345–398.
- Grohe, M. (2010). Fixed-point definability and polynomial time on chordal graphs and line graphs. In A. Blass, N. Dershowitz, et W. Reisig (dir.), *Fields of Logic and Computation*, volume 6300 de *Lecture Notes in Computer Science* 328–353. Springer.
- Grohe, M., Kersting, K., Mladenov, M. et Selman, E. (2014). Dimension reduction via colour refinement. arXiv :1307.5697.
- Grohe, M. et Schweitzer, P. (2020). The graph isomorphism problem. *Communications of the ACM*, 63(11), 128–134.
- Immerman, N. et Lander, E. (1990). Describing graphs : A first-order approach to graph canonization. In A. L. Selman (dir.), *Complexity Theory Retrospective* 59–81. Springer.
- Junttila, T. et Kaski, P. (2007). Engineering an efficient canonical labeling tool for large and sparse graphs. Dans *Proceedings of the Meeting on Algorithm Engineering & Experiments*, p. 135–149. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Kiefer, S. et Schweitzer, P. (2016). Upper bounds on the quantifier depth for graph differentiation in first order logic. Dans *Proceedings of the 31st Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, 287–296.
- Krebs, A. et Verbitsky, O. (2015). Universal covers, color refinement, and two-variable counting logic : Lower bounds for the depth. Dans *2015 30th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, 689–700.
- Kucera, L. (1987). Canonical labeling of regular graphs in linear average time. *28th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 271–279.
- Libkin, L. (2004). *Elements of Finite Model Theory* (1st éd.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Mathon, R. (1979). A note on the graph isomorphism counting problem. *Information Processing Letters*, 8(3), 131–136.
- McKay, B. D. et Piperno, A. (2014). Practical graph isomorphism, II. *Journal of Symbolic Computation*, 60, 94–112.

- N. Shervashidze, P. Schweitzer, E. v. L. K. M. et Borgwardt, K. (2011). Weisfeiler-Lehman graph kernels. *Journal of Machine Learning Research*, 12(77), 2539–2561.
- Orejas, F., Spirakis, P., van Leeuwen, J. et Leeuwen, J. (2001). Automata, languages and programming : 28th international colloquium. volume 2076 de *Lecture Notes in Computer Science*. North-Holland Publ.
- Papadimitriou, C. (1994). *Computational Complexity*. Theoretical computer science. Addison-Wesley.
- Pikhurko, O. et Verbitsky, O. (2011). Logical complexity of graphs : a survey. *Model theoretic methods in finite combinatorics*, 558, 129–179.
- Ray, L. C. et Kirsch, R. A. (1957). Finding chemical records by digital computers. *Science*, 126(3278), 814–819.
- Robertson, N. et Seymour, P. (1983). Graph minors. i. excluding a forest. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 35(1), 39–61.
- Schweitzer, P. (2009). *Problems of unknown complexity : graph isomorphism and Ramsey theoretic numbers*. (Thèse de doctorat). Universität des Saarlandes. <http://dx.doi.org/10.22028/D291-25946>
- Yang, H., Li, W. et Wang, B. (2021). Joint optimization of preventive maintenance and production scheduling for multi-state production systems based on reinforcement learning. *Reliability Engineering and System Safety*, 214, 107713.
- Zermelo, E. (1913). über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. Dans E. W. Hobson et A. E. H. Love (dir.). *Comptes Rendus du cinquième congrès international des mathématiciens*, volume 2, 501–504. Cambridge University Press.