

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

COMPRENDRE LA THÉORIE DE LA REPRÉSENTATION DES
MONOÏDES FINIS
À TRAVERS L'EXEMPLE DE L'ALGÈBRE FESTIVE

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
EN TANT QU'EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
PHILIP PINARD McMANIMAN

JUIN 2023

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.04-2020). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier tous les enseignants qui ont su partager leur savoir, me donner une meilleure vue d'ensemble des beautés multiples des mathématiques, et m'ont accompagné, à un moment ou un autre, durant mon parcours à la maîtrise. Je commencerais par Yvan Saint-Aubin, qui m'a initié à la théorie de la représentation des groupes finis durant l'été 2020. Puis, Marlène Frigon pour son cours d'analyse fonctionnelle à l'automne 2020. J'aimerais remercier Christophe Reutenauer pour la lecture dirigée sur la théorie de Galois à travers laquelle il a gracieusement accepté de me diriger durant l'été 2021. Merci à Duncan McCoy pour son cours de topologie algébrique à l'automne 2021, et merci à Frédéric Rochon pour son cours sur les groupes et les algèbres de Lie à l'hiver 2022. Merci à toutes les pionnières et tous les pionniers des mathématiques pour le riche héritage qu'on nous laisse aujourd'hui. J'aimerais particulièrement remercier Franco Saliola, mon directeur, pour sa flexibilité, sa bonne humeur contagieuse et son amour partagé et palpable pour les mathématiques. J'aimerais remercier Stéphane. Pour tout, tout simplement! Merci à ma mère Carol et mes grand-parents Lucette et Jean-Guy Pinard pour leur soutien constant et inconditionnel. J'aimerais remercier tous mes collègues du département des mathématiques du Collège Ahuntsic : c'est un plaisir de travailler avec vous et de vous côtoyer, jour après jour. Merci pour vos belles personnes brouillant la frontière entre le travail et le plaisir! Vive les arts, les créations et explorations de l'esprit. Vive les mathématiques!

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	i
RÉSUMÉ	ii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I NOTIONS PRÉALABLES	5
1.1 Quelques rappels généraux et préalables	5
1.2 Relativement à la théorie de la représentation des groupes finis	12
1.2.1 Représentations matricielles, G –modules et G –algèbres	12
1.2.2 G –homomorphismes et leurs algèbres	17
1.3 Relativement à la théorie des caractères des groupes finis . .	21
1.4 Relativement à la théorie de la représentation du groupe	
symétrique	29
1.4.1 Hors-d’oeuvre en combinatoire, et un peu d’ordre . .	29
1.4.2 Modules de Specht	34
1.4.3 La décomposition de M^μ	45
CHAPITRE II CONSTRUCTIONS PRINCIPALES	49
2.1 Généralités sur les monoïdes finis d’inversibles	49
2.1.1 Notions élémentaires	49
2.1.2 Demi-groupes cycliques	53
2.1.3 Idéaux et relations de Green	57
2.1.4 La régularité de von Neumann	70
2.1.5 Monoïdes d’inversibles	74
2.2 L’algèbre festive	86
2.2.1 Notions préalables	86
2.2.2 Les trois présentations de l’algèbre festive	90
2.2.3 Une multiplication pour $\mathcal{U}_k$	95
2.2.4 Les générateurs de $\mathcal{U}_k$	105
CHAPITRE III REPRÉSENTATIONS	108
3.1 Théorie de la représentation des monoïdes finis	108
3.1.1 À propos des algèbres de dimension finie	108
3.1.2 Modules indécomposables	113
3.1.3 Jolis idempotents	116
3.1.4 Une pléthore de foncteurs	119
3.1.5 Relations entre idempotents et modules simples . . .	130
3.1.6 Algèbres de monoïdes et représentations	137
3.1.7 La théorie de Clifford-Munn-Ponizovskii	139
3.1.8 Semi-simplicité	145
3.2 L’étude des représentations irréductibles de l’algèbre festive .	152
3.2.1 Les sous-groupes maximaux de $\mathcal{U}_k$	153

3.2.2	Les classes— $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_k$	155
3.2.3	Représentations irréductibles des sous-groupes maximaux de $\mathcal{U}_k$	159
3.2.4	Les classes— $\mathcal{L}$ et les représentations de Schützenberger de $\mathcal{U}_k$	163
3.2.5	Représentations irréductibles de $\mathcal{U}_k$	171
3.2.6	Présentation des représentations irréductibles à partir de tableaux	174
CHAPITRE IV CARACTÈRES		181
4.1	Survol de la théorie des caractères des monoïdes finis	181
4.1.1	Fonctions de classes et classes de conjugaison généralisées	181
4.1.2	Survol de la théorie des caractères des monoïdes finis	187
4.2	Quelques observations concernant les caractères de $\mathcal{U}_k$	191
4.2.1	Classes de conjugaison généralisées dans $\mathcal{U}_k$	192
4.2.2	Caractères	197
CONCLUSION		202
ANNEXE A QUELQUES CALCULS DES REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES DES GÉNÉRATEURS DE $\mathcal{U}_k$		206
INDEX		236
BIBLIOGRAPHIE		239

LISTE DES FIGURES

2.1	Représentation par diagramme d'un élément de $\mathcal{U}_{10}$	94
2.2	Représentation par diagramme des trois éléments de $\mathcal{U}_2$	94
2.3	Représentation par diagramme de l'élément neutre de $\mathcal{U}_k$	97
2.4	Représentation par diagramme du générateur s_i de $\mathcal{U}_k$	99
2.5	Représentation par diagramme du générateur b_i de $\mathcal{U}_k$	106
3.1	L'élément de la classe- $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_3$ associé au partage $(3, 0, 0)$	157
3.2	Les éléments de la classe- $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_3$ indexés par le partage $(2, 1, 0)$	158
3.3	Les six éléments de la classe- $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_3$ associés au partage $(1, 1, 1)$	158
3.4	L'idempotent du sous-groupe maximal qui soit représentant de la classe- $\mathcal{J}$ associé au partage $(1^3, 2^2, 3^1)$	159
3.5	Représentations irréductibles du sous-groupe maximal représentant pour le partage $(1^3, 2^2, 3^1)$	163
3.6	Le seul élément de la classe- $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_3$ associé au partage $(3, 0, 0)$ est aussi le seul associé à la partition $ 123 $	165
3.7	Les éléments de la classe- $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_3$ associés au partage $(2, 1, 0)$ partitionnés en les trois classes- $\mathcal{L}$ $L_{ 12 3 }$, $L_{ 1 23 }$ et $L_{ 2 13 }$	165
3.8	Les six éléments de la classe- $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_3$ associés au partage $(1, 1, 1)$ sont également les six éléments de la classe- $\mathcal{L}$ $L_{ 1 2 3 }$	166
3.9	Diagramme du représentant $l_{1 234 5 67 89}^{12 34 5 6 789}$ d'une orbite de la classe- $\mathcal{L}$ $L_{1 234 5 67 89}$	169
3.10	Toutes les représentations irréductibles de $\mathcal{U}_3$	174
3.11	Tous les éléments de $\mathcal{T}_{((1),(1,1))}$	175
3.12	Toutes les représentations irréductibles de $\mathcal{U}_3$ adaptées à la présentation par tableaux.	178
4.1	Le seul élément de $\mathcal{U}_3$ de type cyclique $((1, 1, 1), \emptyset, \emptyset)$	194
4.2	Les éléments de $\mathcal{U}_3$ de type cyclique $((2, 1), \emptyset, \emptyset)$	195
4.3	Les éléments de $\mathcal{U}_3$ de type cyclique $((3), \emptyset, \emptyset)$	195
4.4	Les éléments de $\mathcal{U}_3$ de type cyclique $((1), (1), \emptyset)$	195
4.5	Les éléments de $\mathcal{U}_3$ de type cyclique $(\emptyset, \emptyset, (1))$	195

RÉSUMÉ

Dans cet ouvrage, on y explore la théorie de la représentation des monoïdes finis. En particulier, on s'intéresse à l'étude des représentations de l'algèbre festive (aussi appelée « party algebra ») afin de se doter d'un exemple concret d'application de cette théorie. À travers l'ensemble de l'ouvrage, on cherche à démontrer comment la théorie de la représentation des groupes finis peut être amplifiée afin de comprendre la théorie de la représentation des monoïdes finis. La théorie des caractères appliquée aux monoïdes finis y est également brièvement abordée, servant ainsi de complément à la théorie des caractères des groupes finis. Afin d'aborder cette théorie, on commence par rappeler les résultats essentiels tirés de la théorie de la représentation et des caractères des groupes finis. Puis, nous étudions la théorie de la représentation du groupe symétrique. Ensuite, on s'intéresse aux propriétés essentielles des algèbres finies. Enfin, nous entamons le coeur de l'ouvrage à partir de l'étude de la théorie des monoïdes finis tout en construisant parallèlement l'algèbre festive. Nous abordons ensuite la théorie de la représentation des monoïdes finis juste avant de l'appliquer à la représentation de l'algèbre festive. Finalement, on expose les concepts élémentaires de la théorie des caractères des monoïdes finis avant de les appliquer aux caractères des représentations précédemment développées pour l'algèbre festive. Mots-clés: Combinatoire, théorie de la représentation, théorie des caractères, représentations du groupe symétrique, algèbres finies, monoïdes finis, algèbre festive, représentation de Schützenberger.

INTRODUCTION

Si j'avais à vulgariser ce qu'est l'algèbre à un.e néophyte des mathématiques, je crois que je lui dirais tout simplement que c'est l'étude des structures, des constructions abstraites. En particulier, l'algèbre s'intéresse aux symétries intrinsèques à celles-ci. L'algébriste ne s'intéresse pas seulement qu'à l'objet en tant que tel, mais également aux multiples façons équivalentes de l'observer et de l'étudier.

Certaines structures possèdent un degré d'abstraction très élevé et les aborder peut s'avérer difficile contrairement aux structures des espaces vectoriels qui elles sont, en général, bien comprises par les mathématiciens et mathématiciennes. Vulgairement, que sont les transformations qui caractérisent les espaces vectoriels pour les algébristes? Des rotations et des translations, tout simplement. Ces transformations, qui sont des éléments de GL_n , sont généralement bien comprises par l'ensemble de la communauté mathématique.

Toujours en vulgarisant, la théorie de la représentation est le champ d'étude des mathématiciens ayant pour but de rapporter l'analyse des structures abstraites à l'étude des transformations dans des espaces vectoriels. Finalement, la théorie de la représentation permet d'étudier les différentes structures abstraites à partir d'un langage commun à tous les mathématiciens. Les objets de la structure abstraite se rapportent ainsi à des matrices. La théorie des caractères, de son côté, vient agrémenter la théorie de la représentation en attribuant une étiquette, une statistique, aux représentations. Les caractères nous permettent de mieux comprendre les relations entre les différentes représentations, de mieux comprendre comment les

représentations peuvent être décomposées et recomposées à partir de quelques représentations que l'on dira *irréductibles*.

Les groupes algébriques finis, objets mathématiques faisant partie de la formation générale de tout mathématicien, sont bien compris à travers la théorie de la représentation. Le fait que les éléments d'un groupe fini soient comparables à des symétries « ayant le même degré de symétrie par rapport à l'ensemble de l'objet mathématique » rend la théorie de la représentation des groupes finis élégante et abordable. En particulier, puisque Cayley a démontré que tout groupe fini s'avère être, à isomorphisme près, un cas particulier d'un groupe symétrique $\mathcal{S}_n$, la compréhension de la théorie de la représentation du groupe symétrique devient un outil permettant d'aborder les représentations d'un groupe fini arbitraire.

Les monoïdes finis, contrairement aux groupes finis, sont des structures algébriques généralement moins bien comprises par l'ensemble de la communauté mathématique actuelle. Contrairement aux groupes finis, leur étude ne fait pas partie d'un cursus académique commun. Les éléments des monoïdes sont des quasi-symétries : chaque élément d'un monoïde représente une symétrie relative à certains éléments contenus dans le monoïde, mais leurs niveaux de symétrie par rapport à l'ensemble de la structure en tant que tel n'est pas homogène. Cette hétérogénéité des symétries rend la structure du monoïde moins abordable que celle des groupes.

Or, la finitude d'un monoïde nous permet de déduire bien des résultats généraux concernant cette structure. En particulier, les groupes deviennent des blocs à partir desquels se construisent les monoïdes finis. De ce point de vue, on se dit qu'il serait intéressant de construire une théorie de la représentation des monoïdes finis à partir de celle de la théorie de la représentation des groupes finis.

C'est exactement ce sur quoi portera le présent mémoire.

Pour le présent mémoire, j'ai opté pour une narration inspirée du fil de mon exploration. J'aspire à ce que ce mémoire permette à un.e étudiant.e sortant du baccalauréat en mathématiques fondamentales de retracer et de comprendre le fil de ma recherche sur la théorie de la représentation des monoïdes finis. Pour cette raison, la suite des idées exposées va dans l'ordre suivant :

1. On entame cette narration avec l'exposition des concepts et résultats fondamentaux de la théorie de la représentation et des caractères des groupes finis et du groupe symétrique. Ces notions sont principalement tirées des deux premiers chapitres du très beau livre *The Symmetric Group* de Bruce Sagan. L'on y rappelle également des définitions et résultats fondamentaux sur les algèbres finies et les modules réguliers qui lui sont associés (résultats et définitions principalement tirés de l'annexe A du livre *Representation Theory of Finite Monoids* de Steinberg).
2. Ensuite, on aborde le coeur du présent ouvrage en abordant la théorie générale des monoïdes finis tout en construisant parallèlement l'*algèbre festive d'ordre k* , notée $\mathcal{U}_k$, qui servira d'exemple d'application concret à cette théorie.
3. Puis, l'on étudiera la théorie de la représentation des monoïdes finis tout en l'appliquant au calcul des représentations de $\mathcal{U}_k$. L'on survolera ultimement la théorie des caractères associée à ces représentations calculées.

L'ensemble des résultats sur les monoïdes finis et leurs représentations sera tiré du livre de Steinberg, alors que les résultats relatifs à $\mathcal{U}_k$ et ses représentations proviennent en très grande partie de l'article de ORELLANA, SALIOLA, SCHILLING et ZABROCKI.

Compte-tenu de l'ampleur du présent ouvrage, certaines démon-

strations de certains résultats employés à travers notre étude seront omises (en particulier, celles des résultats très généraux ne concernant pas spécifiquement l'objet principal à l'étude que sont les monoïdes finis et l'algèbre festive).

CHAPITRE I

NOTIONS PRÉALABLES

1.1 Quelques rappels généraux et préalables

S'il y a bien un objet fondamental sur lequel se construira tout objet central à l'étude dans ce mémoire, c'est bien le *groupe symétrique*. Les rappels de cette sous-section sont principalement tirés du premier chapitre de la référence de Bruce Sagan¹.

Définition 1.1. Le *groupe symétrique d'ordre n* , dénoté $\mathcal{S}_n$, est l'ensemble des $n!$ bijections ayant la forme $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Les éléments du groupe symétrique sont appelés des *permutations*. Si π et σ sont des bijections incluses dans $\mathcal{S}_n$, alors l'application de π sur σ est dénotée par une multiplication de groupe à gauche $\pi \cdot \sigma$ (ou tout simplement $\pi\sigma$). Il existe trois façons différentes d'exprimer une permutation π du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.

1. La numérotation sur une ligne exprime individuellement les images des éléments de $\{1, \dots, n\}$: $\pi(1) = a$, $\pi(2) = b$, $\dots$, $\pi(n) = c$.

Par exemple, on peut définir $\pi : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ par la règle $\pi(1) = 2, \pi(2) = 3$ et $\pi(3) = 1$.

¹Sagan, B. E. (2001). *The Symmetric Group* : Representation, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions.

2. La numérotation sur deux lignes exprime, colonne par colonne, l'élément de $\{1, \dots, n\}$ ainsi que sa transformation de la manière suivante :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Dans le continuité de la même permutation donnée en exemple, sa présentation sur deux lignes est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. La numérotation cyclique regroupe, en un produit de parenthèses nommées *cycles*, les images successives et distinctes obtenues en appliquant successivement la permutation sur un même élément de $\{1, \dots, n\}$. Si $\pi^k(i) = i$ et qu'il n'existe pas un entier positif $j < k$ tel que $\pi^j(i) = i$, alors la parenthèse contenant i aura la forme suivante :

$$(i, \pi(i), \pi^2(i), \dots, \pi^{k-1}(i))$$

Un cycle contenant k éléments est dit *un cycle de longueur k* , ou *k -cycle*. Les cycles ne contenant qu'un seul élément sont nommés *points fixes* et ils sont généralement omis dans la notation cyclique. Les cycles contenant précisément deux éléments sont nommés *transpositions*. Si π peut s'exprimer à partir d'un produit de cycles ne contenant respectivement qu'un ou deux éléments, alors $\pi^2 = e$ et l'on dire que π est une *involution*.

Finalement, la présentation par cycle de notre permutation donnée en exemple est $(1, 2, 3)$.

Puisqu'une permutation est un produit de cycles, nous pouvons étiqueter chacune des permutations à partir des nombres des différentes longueurs de cycles qu'elle contient.

Définition 1.2. Soit $\pi \in \mathcal{S}_n$. Le *type cyclique* de π (ou simplement $type(\pi)$) est un vecteur de la forme $(1^{m_1}, \dots, n^{m_n})$ où m_i est un nombre naturel représentant le nombre de cycles distincts de longueur i contenus dans π .

Exemple 1.3. Si $\pi = (1, 2)(3, 4, 5)(6, 7)(8, 9)(10)(11)(12) \in \mathcal{S}_{12}$, alors le type cyclique de π est $type(\pi) = (1^3, 2^3, 3^1, 4^0, \dots, 12^0)$.

Définition 1.4. On note *l'ensemble des entiers naturels positifs plus petits ou égaux à k* par $[k]$. Autrement dit, $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$.

Exemple 1.5. Donc, pour faire court, $[12] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Une façon alternative d'exprimer ces vecteurs de types cycliques est possible grâce aux *partages*.

Définition 1.6. Un partage de n est une suite d'entiers $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de telle sorte que $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ et que $\sum_i \lambda_i = n$. On note ainsi $\lambda \vdash n$. On appelle λ_i la i^e partie de λ , $\forall i$ tel que $1 \leq i \leq n$. On définit également la *norme d'un partage* λ , notée $|\lambda|$, comme étant la somme de ses parties. Autrement dit, $|\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Si $\lambda \vdash k$, il arrive qu'on emploie la *notation exponentielle d'un partage* afin d'alléger la notation. Celle-ci consiste en une présentation $\lambda = (i^{a_i})_{i \in [k]}$ où a_i est le nombre de fois que i est répété dans le partage.

Exemple 1.7. 1. La suite $(3, 2, 1, 1, 1)$ est un partage de 8.

2. La suite $(1, 2, 3, 1, 1)$ n'est pas un partage car la faible décroissance n'est pas respectée.

Donc, en ordonnant de façon décroissante les longueurs des cycles distincts d'une permutation π , on est en mesure d'obtenir un partage. Il existe ainsi une bijection entre les types cycliques de $\mathcal{S}_n$ et les partages de n .

Exemple 1.8. On peut identifier le type cyclique $(1^1, 2^1, 3^1, 4^0, 5^3)$ au partage $(5, 5, 5, 3, 2, 1,)$.

Définition 1.9. Soit G un groupe. On dira que $g, k \in G$ sont *conjugués* si $\exists h \in G$ tel que $g = hkh^{-1}$.

Soit G^* l'ensemble des éléments du groupe G (donc, le groupe démuné de son opération interne). Si l'on définit, pour $g \in G$ et $h \in G^*$, une action de groupe définie par $g \cdot h = ghg^{-1}$, on obtient que l'action est une relation d'équivalence qui partitionne G^* en différentes classes de conjugaisons. Les éléments conjugués au sein d'un groupe fini joueront un rôle crucial concernant notre compréhension de ses représentations irréductibles.

Exemple 1.10. Dans le cas où $G = \mathcal{S}_n$, les classes de conjugaison peuvent être présentées élégamment. Afin de bien comprendre quelles sont ses permutations qui sont dans les différentes classes de conjugaison, il suffit de constater que pour deux permutations π et $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_{k_1}) \dots (j_1, j_2, \dots, j_{k_l})$, alors

$$\pi\sigma\pi^{-1} = (\pi(i_1), \pi(i_2), \dots, \pi(i_{k_1})) \dots (\pi(j_1), \pi(j_2), \dots, \pi(j_{k_l}))$$

Il en résulte que deux permutations dans $\mathcal{S}_n$ sont dans la même classe de conjugaison si et seulement si elles ont le même type cyclique.

Exemple 1.11. Si $\pi = (1, 2, 3)$ et $\sigma = (1, 4)(2, 5)(3, 6)$, alors $\pi\sigma\pi^{-1} = (2, 4)(3, 5)(1, 6)$.

En fixant un élément $g \in G$, on est en mesure de calculer la grandeur de sa classe de conjugaison K_g en divisant l'ordre du groupe (noté $|G|$) par l'ordre du stabilisateur de g dans G (noté $|Z_g|$). L'adaptation de ce résultat au groupe symétrique nous donne la proposition suivante.

Proposition 1.12. Soit $\pi \in \mathcal{S}_n$ de telle sorte que le type de π soit $(1^{m_1}, \dots, n^{m_n})$.

Alors

$$|K_g| = \frac{n!}{(\prod_i i^{m_i} \cdot m_i!)} = \frac{|\mathcal{S}_n|}{|Z_g|}.$$

Le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ est généré par l'ensemble des transpositions adjacentes $(i, i+1)$ où $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Cela signifie que chaque permutation π peut être exprimée à partir d'un produit de transpositions adjacentes.

L'expression de π à partir de ces transpositions adjacentes nous permet de définir le *signe* de π .

Définition 1.13. Le *signe* d'une permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ est un homomorphisme de groupe

$$\text{signe} : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

tel que si σ est une transposition adjacentes, alors $\text{signe}(\sigma) = -1$. On définira ultérieurement cet homomorphisme comme étant la *représentation signe* de $\mathcal{S}_n$.

L'étude d'un groupe est généralement plus abordable s'il possède une présentation à partir d'un produit direct de ses sous-groupes (qui eux sont plus aisés à comprendre). Dans la théorie de la représentation que nous explorerons ultérieurement, nous chercherons à comparer les éléments d'une groupe à des matrices, et à comparer l'opération au sein du groupe à un produit matriciel entre les matrices correspondantes. La notion de produit direct entre les éléments de sous-groupes est analogue au *produit tensoriel* entre deux représentations que l'on pourra attribuer respectivement aux dits sous-groupes. Pour cette raison, l'on rappelle quelques unes de ses propriétés.

Définition 1.14. Soit $X = (x_{ij})$ et Y deux matrices. On définit le *produit tensoriel* de X avec Y ainsi :

$$X \otimes Y = (x_{ij}Y)$$

Si V et W sont deux espaces vectoriels ayant respectivement pour bases $\mathcal{B}_1 = \{v_i\}_{i=1}^n$ et $\mathcal{B}_2 = \{w_i\}_{i=1}^m$, alors le *produit tensoriel* de V avec W est défini ainsi :

$$V \otimes W = \left\{ \sum_{i,j} c_{ij} (v_i \otimes w_j) : v_i \in \mathcal{B}_1, w_j \in \mathcal{B}_2, c_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

Exemple 1.15. Si $V = \text{eng}\{v_1, v_2\}$ et $W = \text{eng}\{w_1, w_2\}$ sont des espaces vectoriels complexes ayant les bases indiquées, alors $V \otimes W = \text{eng}\{v_1 \otimes w_1; v_1 \otimes w_2; v_2 \otimes w_1; v_2 \otimes w_2\}$ est leur produit tensoriel sur les nombres complexes ayant pour base les éléments indiqués.

Exemple 1.16. Si $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et W sont deux matrices complexes où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, alors $V \otimes W$ aura la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} aW & bW \\ cW & dW \end{pmatrix}$$

Leur *somme directe*, dénotée $V \oplus W$, prendra la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} V & 0_{\dim W} \\ 0_{\dim V} & W \end{pmatrix}$$

Proposition 1.17. Si $A, X \in \text{Mat}_d$ et $B, Y \in \text{Mat}_f$, alors

1. $(A \oplus B)(X \oplus Y) = AX \oplus BY$,
2. $(A \otimes B)(X \otimes Y) = AX \otimes BY$.

Quelques résultats que nous obtiendront, au fil du mémoire et en lien avec les algèbres de monoïdes finis, se généraliseront à certaines *catégories*. Pour cette raison, nous rappelons les définitions nécessaires à la compréhension des résultats concernés.

Définition 1.18. Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est, par définition, munie :

1. d'une classe $\text{ob}(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés *objets de* $\mathcal{C}$,
2. d'une classe $\text{Hom}(A, B)$ dont les éléments sont appelés *morphismes* (ou *flèches*) de $\mathcal{C}$, pour chaque paire $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$. Chacun de ces morphismes est de la forme $f : A \rightarrow B$, où A et B sont aussi appelés respectivement *la source* et *le but* de f .

3. d'une application

$$\circ : \text{Hom}(B, C) \times \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$$

pour toute triplée d'objets $A, B, C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ et ayant pour propriétés...

(a) ... l'associativité : pour $f \in \text{Hom}(A, B), g \in \text{Hom}(B, C)$ et $h \in \text{Hom}(C, D)$, on a

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

(b) ... la neutralité : pour tout $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$, $\exists Id_A : A \rightarrow A$ telle que, pour $g \in \text{Hom}(A, B)$ et $h \in \text{Hom}(B, A)$ quelconques, on a $g \circ Id_A = g$ et $Id_A \circ h = h$.

Définition 1.19. Soit

$$M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n$$

une suite pour laquelle M_i est un module et $f_{i+1} : M_i \rightarrow M_{i+1}$ est un homomorphisme pour tout $0 \leq i \leq n-1$. On dit que la suite est *exacte* si $\text{Im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$ pour chaque i .

Définition 1.20. On dit qu'un A -module M est *plat* si, pour toute suite exacte de A -modules

$$0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow K \rightarrow 0,$$

la suite suivante est exacte :

$$0 \rightarrow N \otimes_A M \rightarrow L \otimes_A M \rightarrow K \otimes_A M \rightarrow 0$$

Définition 1.21. Soit M un module. On dit que M est une *module libre* s'il

possède une base.

Définition 1.22. Soient N, M deux A -modules. On dit qu'un A -module P est *projectif à gauche* si, pour tout homomorphisme $f \in \text{Hom}(N, M)$ surjectif, et pour tout homomorphisme $g \in \text{Hom}(P, M)$, il existe un homomorphisme $h \in \text{Hom}(P, N)$ faisant en sorte que $g = fh$.

Remarque 1.23. Un module est projectif si et seulement s'il est facteur direct d'un module libre, si et seulement si le foncteur $\text{Hom}(P, -)$ est exact. Tout module projectif est plat.

1.2 Relativement à la théorie de la représentation des groupes finis

1.2.1 Représentations matricielles, G -modules et G -algèbres

Définition 1.24. Pour $n \in \mathbb{N}$, une *représentation matricielle d'un groupe* G est un homomorphisme $X : G \rightarrow GL_n$ faisant en sorte que :

1. $X(e) = I$, où I est la matrice identité,
2. $X(gh) = X(g) \cdot X(h)$, pour $g, h \in G$ arbitraire.

d est considéré comme étant le *degré* ou la *dimension* de la représentation. Puisque $X(e) = X(g \cdot g^{-1}) = X(g) \cdot X(g^{-1})$, il est clair que $X(g^{-1}) = X^{-1}(g)$.

Au final, une représentation d'un groupe n'est rien de plus (ni rien de moins, selon les perspectives) qu'un homomorphisme de groupe à image dans GL_n . Vulgairement, une représentation d'un groupe G donne une interprétation pour les éléments du groupe en termes de rotations et de translations dans un espace vectoriel (choses que nous comprenons généralement

mieux que la plupart des autres structures abstraites).

Or, une représentation matricielle est indissociable de la base choisie. Afin d'étudier ces représentations sans se préoccuper du choix de la base, on introduit le concept de *module*.

Définition 1.25. Soit V un espace vectoriel et G un groupe. On dit que V est une G -module s'il existe un homomorphisme $\rho : G \rightarrow GL(V)$. Pour $v, w \in V$, pour $g, h \in G$ et pour $c, d \in \mathbb{C}$ quelconques, un G -module en est un s'il respecte les propriétés suivantes :

1. $gv \in V$,
2. $g(cv + dw) = c(gv) + d(gw)$,
3. $(gh)v = g(hv)$,
4. $ev = v$.

D'un certain point de vue, un module est une classe de représentations regroupant toutes celles isomorphes à une base près. Les représentations matricielles des G -modules s'emploient d'une façon complémentaire : fixez une base pour le module et l'on retrouvera une unique représentation matricielle. Pour cette raison, on simplifie la notation en considérant que gv en langage de modules est équivalent à $X(g) \cdot v$ en langage de représentations matricielles.

Définition 1.26. Soit E un ensemble sur lequel un groupe G agit. On définit l'espace vectoriel $\mathbb{C}E$ comme étant l'ensemble engendré par tous les éléments de E (considérés comme étant linéairement indépendants) et contenant toutes leurs combinaisons linéaires à scalaires dans $\mathbb{C}$. Par linéarité, c'est un G -module de dimension $|E|$.

Exemple 1.27. Voici quelques représentations usuellement étudiées dans un premier cours sur la théorie de la représentation :

1. La représentation *triviale d'ordre n* est une représentation de la forme $X : G \rightarrow I_n$ où I_n est la matrice identité de dimension $n \times n$.
2. La représentation *standard de $\mathcal{S}_n$* de dimension n associant à $\pi \in \mathcal{S}_n$ la matrice $X(\pi) = (x_{ij})_{n \times n}$ de telle sorte que

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(j) = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'une façon analogue, c'est la représentation du $\mathcal{S}_n$ -module $\mathbb{C}S$ où $S = \{1, \dots, n\}$.

Par exemple, dans la représentation standard de $\mathcal{S}_4$, la matrice associée à la permutation $(1, 2, 3, 4)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. La représentation *régulière à gauche de G* est la représentation du G -module $\mathbb{C}G$ où G est l'ensemble des éléments de G .

Pour $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on a que $G = \text{eng}\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. La matrice associée à $\bar{2}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Soit un sous-groupe H de G et soit $\mathcal{H}$ un ensemble de représentants des coensembles de H dans G . On définit la représentation *des coensembles à gauche de H* comme étant la représentation du G -module $\mathbb{C}\mathcal{H}$.

Si $G = \mathcal{S}_3 = \{e; (1, 2); (1, 3), (2, 3); (1, 2, 3); (1, 3, 2)\}$, alors les co-

ensembles de $\langle(1, 2)\rangle$ ont pour représentants $e, (1, 3)$ et $(2, 3)$. Soit $\mathcal{H} = \text{eng}\{\langle(1, 2)\rangle; (1, 3)\langle(1, 2)\rangle; (2, 3)\langle(1, 2)\rangle\}$. On peut calculer que la matrice associée à $(1, 3)$ dans la représentation des coensembles à gauche de $\langle(1, 2)\rangle$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'action d'un groupe G sur un ensemble E permet de mettre en lumière les symétries intrinsèques du dit ensemble pouvant être exprimées à partir des éléments du groupe. Il arrive que l'ensemble, en termes de ses symétries intrinsèques (du point de vue du groupe fixé), possède des sous-ensembles « indépendants » (ou fermés sous l'action). Ces sous-ensembles nous permettent de définir les *sous-modules* de $\mathbb{C}E$.

Définition 1.28. Soit V un G -module. On dit que W est un *sous-module* de V si $W \subseteq V$ et nous avons que $gw \in W, \forall w \in W$.

Exemple 1.29. Quelques exemples de sous-modules.

1. Tout G -module contient le sous-module trivial engendré par le vecteur nul.
2. Soit le $\mathcal{S}_n$ -module $V = \mathbb{C}\{1, \dots, n\}$, alors $W = \mathbb{C}\{(1 + 2 + \dots + n)\}$ est un sous-module de dimension 1 de V .
3. Plus généralement que (2), en posant le G -module $V = \mathbb{C}G$ et son sous-module $W = \mathbb{C}\{\sum_{g \in G} g\}$ de dimension 1.
4. Soit la représentation régulière de $\mathcal{S}_n$ du module $V = \mathbb{C}\mathcal{S}_n$, alors le sous-module $W = \mathbb{C}\{\sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \text{signe}(\pi) \cdot \pi\}$ est de dimension 1. C'est aussi la représentation *signe* de $\mathcal{S}_n$.

Afin d'étudier les représentations d'un groupe à partir de son action sur un ensemble, on veut connaître ses représentations « indivisibles » servant de blocs de construction pour chacune de ses représentations imaginables.

Définition 1.30. Soit un G -module V non-vidé. On dira que V est *irréductible* si les seuls G -sous-modules inclus dans V sont le module trivial et V . Autrement, on dira que V est *réductible*.

Une représentation d'un groupe sur un espace vectoriel, c'est comparable au fait d'associer à chaque élément du groupe étudié une transformation ou une symétrie d'un espace vectoriel prédéfini préservant la « forme initiale » du dit espace. Il se peut que ces transformations agissent de façons disjointes sur différentes parties de l'espace. Dans ce cas, on s'intéresse individuellement aux plus petites parties irréductibles de l'espace transformées de façon disjointe. Celles-ci servent de « blocs de construction » nous permettant de comprendre de quelles façons, en général, un groupe peut effectuer des transformations et mettre en lumière des symétries dans un espace vectoriel arbitraire.

Remarque 1.31. Si V est réductible, alors il existe une base dans laquelle chacune des représentations matricielles des éléments de G auront la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} A(g) & B(g) \\ 0 & C(g) \end{pmatrix}$$

où $A(g)$ et $C(g)$ sont des matrices carrées et 0 représente des adresses matricielles nulles.

On présente les « parties indépendantes » dans l'espace vectoriel, et de par l'action d'un groupe G sur l'espace, à partir des *sommes directes*.

Définition 1.32. Supposons que V soit un G -module, que U et W soient des sous-modules de V , et que $\forall v \in V, \exists ! u \in U, \exists ! w \in W$ de telle sorte que $v = u + w$. On dit alors que V est la *somme directe interne* de U et W (notée $V = U \oplus W$).

Si V est une somme directe interne de deux sous-modules, alors ses représentations, dans certaines bases, seront des matrices diagonales par

blocs pour lesquels chaque bloc est une représentation de U et W respectivement.

Définition 1.33. On dit qu'un G -module V est *complètement réductible* s'il peut être exprimé à partir d'une somme directe interne de sous-modules irréductibles. Autrement dit,

$$V = \bigoplus_{i=1}^n W_i$$

où W_i est irréductible, $\forall i$.

Un module complètement réductible possède une présentation élégante nous permettant de mieux le comprendre. Quels sont les modules ayant une telle présentation? Le théorème de Maschke qui suit répond partiellement (mais suffisamment concernant notre présente étude) à cette question.

Théorème 1.34. (*Maschke*) Si V est un G -module sur $\mathbb{C}$ non trivial et que G est une groupe fini, alors V est complètement réductible.

De ce fameux théorème de Maschke, on en déduit que les représentations sur les nombres complexes du groupe symétrique d'ordre n arbitraire sont complètement réductibles. L'on obtient aussi l'analogie matriciel pour ce théorème si l'on fixe une certaine base.

Corollaire 1.35. Soit G un groupe fini et soit X une représentation matricielle de G d'une certaine dimension $d > 0$. Il existe une matrice de changement de base T de telle sorte que, $\forall g \in G$, $T \cdot X(g) \cdot T$ soit diagonale par blocs et que chaque bloc soit une représentation irréductible de G .

1.2.2 G -homomorphismes et leurs algèbres

Un homomorphisme est une application préservant la structure intrinsèque régissant les relations entre les éléments de son domaine. On peut con-

cevoir des homomorphismes préservant, en plus, l'action d'un groupe sur les éléments de son domaine. Ces applications nous seront essentielles afin de bien comprendre les relations entre les différentes représentations irréductibles d'un groupe.

Définition 1.36. Soient V et W des G -modules. Une application linéaire $\theta : V \rightarrow W$ est un G -homomorphisme si, $\forall g \in G$ et $\forall v \in V$,

$$\theta(gv) = g \cdot \theta(v)$$

Un homomorphisme de G -module préserve l'action de G sur son domaine à travers son image. Puisque toute transformation linéaire peut être traduite à partir d'une matrice (pour deux bases fixées pour V et W respectivement), et puisque chaque élément de G possède une représentation matricielle, l'étude des G -homomorphismes peut être réduite à l'étude des matrices T faisant en sorte que $T \cdot X(g) = Y(g) \cdot T$, où X et Y sont les représentations matricielles de g sur V et W (respectivement).

Définition 1.37. Soient V et W deux G -modules. Un G -isomorphisme est un G -homomorphisme $\theta : V \rightarrow W$ bijectif. Si un tel homomorphisme existe, on dit que V et W sont G -équivalents ou G -isomorphes (noté $V \cong W$). Sinon, ils sont G -inéquivalents.

Le fait que T soit un G -isomorphisme la rend inversible et nous obtenons la relation $Y(g) = T \cdot X(g) \cdot T^{-1}$. Autrement dit, les G -isomorphismes se rapportent à des changements de bases.

Proposition 1.38. Soit $\theta : V \rightarrow W$ un G -homomorphisme. Alors

1. $\ker \theta$ est un sous-module de V ,
2. $\text{im } \theta$ est une sous-module de W .

De la proposition 1.38, un G -homomorphisme doit nécessairement préserver ou anéantir la structure d'un G -module irréductible ! On en déduit le lemme de Schur :

Lemme 1.39. (*Schur*) Si V et W sont deux G -modules irréductibles et que $\theta : V \rightarrow W$ est un G -homomorphisme. Alors, soit

1. θ est un G -isomorphisme, ou soit
2. θ est l'application nulle.

Ce lemme se traduit de cette manière en langage matriciel :

Corollaire 1.40. Soient X et Y deux représentations irréductibles de G . Supposons que $T \cdot X(g) = Y(g) \cdot T, \forall g \in G$. Alors, soit

1. T est inversible, soit
2. T est une matrice nulle.

À partir du lemme de Schur, on constate que, sur $\mathbb{C}$, les présentations matricielles des isomorphismes de G -modules irréductibles revêtent de jolies présentations... toutes égales à un scalaire près !

Corollaire 1.41. Soit X une représentation matricielle irréductible de G sur $\mathbb{C}$. Si T commute avec $X(g)$ pour tout $g \in G$, alors $T = c \cdot I$ où I est la matrice identité et $c \in \mathbb{C}$.

Étudier l'ensemble de toutes les matrices qui commutent avec toutes les matrices d'une représentation fixée peut nous donner plus d'information sur les composantes irréductibles de celle-ci.

Définition 1.42. Soit $X : G \rightarrow GL_d$ une représentation matricielle. On définit son *algèbre commutante* comme étant l'ensemble des matrices $d \times d$ qui commutent avec chacune des représentations matricielles de chacun des éléments de G :

$$\text{Com } X := \{T \in \text{Mat}_d : T \cdot X(g) = X(g) \cdot T, \forall g \in G\}$$

Si V est un G -module, on définit son *algèbre d'endomorphismes* comme étant l'ensemble des G -homomorphismes de V en lui-même :

$$\text{End } V := \{\theta : V \rightarrow V : \theta \text{ est un } G\text{-homomorphisme}\}$$

Remarque 1.43. $\text{Com } X$ et $\text{End } V$, tels que définis dans la dernière définition, sont les concepts analogues dans les contextes respectifs des représentations matricielles de G et de G -modules. Si l'on fixe une base pour V , alors $\text{End } V$ se « fixe » en $\text{Com } X$ pour X la représentation matricielle obtenue par ce changement de base : ces deux définitions sont analogues.

Sans entrer dans les détails, l'étude de $\text{Com } X$ et $\text{End } V$, tels que décrits dans la dernière définition, nous permet d'établir les relations obtenues dans les théorème 1.44 et 1.45.

Théorème 1.44. Soit X une représentation matricielle de G telle que

$$X = \sum_{i=1}^k m_i X^{(i)}$$

où les $X^{(i)}$ sont des représentations irréductibles non-équivalentes, m_i le nombre de copies de $X^{(i)}$ dans X , et telles que leurs degrés respectifs sont d_i . Alors

1. $\deg X = \sum_{i=1}^k m_i d_i$,
2. $\text{Com } X = \{\oplus_{i=1}^k (M_{m_i} \otimes I_{d_i}) : M_{m_i} \in \text{Mat}_{m_i}, \forall i\}$,
3. $\dim(\text{Com } X) = \sum_{i=1}^k m_i^2$,
4. $Z_{\text{Com } X} = \{\oplus_{i=1}^k c_i I_{m_i \cdot d_i} : \forall c \in \mathbb{C}, \forall i\}$,
5. $\dim Z_{\text{Com } X} = k$.

L'analogie de ce théorème pour les modules est le suivant :

Théorème 1.45. Soit V un G -module tel que

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^k m_i V^{(i)}$$

où les $V^{(i)}$ sont des sous-modules irréductibles non-équivalents de V , m_i le nombre de copies de $V^{(i)}$ contenues dans V et où d_i est la dimension de $V^{(i)}$. Alors,

1. $\dim V = \sum_{i=1}^k m_i d_i$,
2. $\text{End } V \cong \bigoplus_{i=1}^k \text{Mat}_{m_i}$,
3. $\dim(\text{End } V) = \sum_{i=1}^k m_i^2$,
4. $Z_{\text{End } V}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices diagonales de dimension k ,
5. $\dim Z_{\text{End } V} = k$

Les relations exprimées dans les théorèmes 1.44 et 1.45 seront très importantes afin d'étudier les *caractères* des représentations irréductibles des groupes finis.

1.3 Relativement à la théorie des caractères des groupes finis

Jusqu'ici, notre étude des représentations ne nous permet pas encore de déterminer quelles sont ses composantes irréductibles d'une représentation quelconque. Nous allons devoir employer une statistique, le *caractère*, qui sera invariante pour chacune des représentations irréductibles d'un groupe.

Définition 1.46. Soit G un groupe et $X(g)$ une représentation matricielle de $g \in G$. Le *caractère associé à la représentation X* est une application $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ associant à chaque représentation matricielle $X(g)$ sa trace.

Autrement dit, $\chi(g) = \text{Tr } X(g)$. Si V est un G -module, le *caractère de V* est le caractère de la représentation X qui lui est associée. Dans tous les cas, on dira que le caractère est *irréductible* s'il est associé à une représentation irréductible.

Le fait que deux représentations équivalentes puissent être obtenues à partir d'une matrice de changement de base fait en sorte que le caractère est unique pour une classe d'isomorphisme de représentations : puisque la trace est invariante de par l'action de la conjugaison, le caractère d'un G -module est bien défini. De ce fait, la trace sera constante sur chacune des classes de conjugaison du groupe pour lequel on étudie sa représentation

Proposition 1.47. *Soit X une représentation matricielle de degré d d'un groupe G , et soit χ son caractère associé. Alors,*

1. $\chi(e) = d$,
2. Si $g, k \in G$ sont dans la même classe de conjugaison, alors $\chi(g) = \chi(k)$,
3. si Y est une représentation matricielle ayant ψ pour caractère et que $X \cong Y$, alors $\chi(g) = \psi(g), \forall g \in G$.

Les applications constantes sur les classes de conjugaison du groupe G pour lequel on étudie la représentation, elles ont un nom.

Définition 1.48. Une *fonction de classes* sur un groupe G est une application $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ qui est constante sur une même classe de conjugaison. Autrement dit, si $g, h \in G$ sont dans la même classe de conjugaison, alors $f(g) = f(h)$. L'ensemble de toutes les fonctions de classes de G est dénoté $R(G)$.

On organise les statistiques obtenues, à partir d'un caractère et pour chacune des classes de conjugaisons, dans une table.

Définition 1.49. Soit G un groupe. La *table des caractères de G* est une table étiquetant les rangées par les caractères irréductibles inéquivalents de G , et étiquetant les colonnes par les différentes classes de conjugaisons de G . Par convention, le caractère trivial et la classe de conjugaison de l'élément neutre de G étiquettent respectivement la première rangée et la première colonne.

Dans le but d'étudier les relations entre les différents caractères d'une représentation, on impose le produit scalaire suivant entre les fonctions concernées.

Définition 1.50. Soient f et g deux applications quelconques ayant pour domaine G et pour codomaine $\mathbb{C}$. On définit le *produit scalaire de f et g* de cette façon :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} f(h) \overline{g(h)}$$

Ce produit scalaire se traduit ainsi pour les caractères qui nous intéressent.

Proposition 1.51. *Si χ et ψ sont deux caractères, alors*

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \chi(h) \psi(h^{-1})$$

Et, comme par magie, l'imposition du produit scalaire entre les fonctions $G \rightarrow \mathbb{C}$ nous permettent d'obtenir une jolie organisation entre les caractères des représentations de G . On en déduit la première relation d'orthogonalité entre ceux-ci :

Théorème 1.52. (*Première relation d'orthogonalité*) *Si χ, ψ sont deux caractères irréductibles de G , alors*

$$\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi, \psi}$$

Cette première relation d'orthogonalité nous outille afin de mieux comprendre quelles sont les représentations irréductibles d'une représentation finie arbitraire.

Corollaire 1.53. *Soit X une représentation matricielle de G telle que*

$$X = \sum_{i=1}^k m_i X^{(i)}$$

où les $X^{(i)}$ sont des représentations irréductibles non-équivalentes, m_i le nombre de copies de $X^{(i)}$ dans X , et telles que leurs degrés respectifs sont d_i . Supposons que χ soit son caractère et que $\chi^{(i)}$ soit le caractère associé à $X^{(i)}$, $\forall i$. Alors,

1. $\chi = \sum_{i=1}^k m_i \chi^{(i)}$,
2. $\langle \chi, \chi^{(i)} \rangle = m_i, \forall i$,
3. $\langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i=1}^k m_i^2$,
4. X est irréductible $\iff \langle \chi, \chi \rangle = 1$,
5. si Y est une autre représentation matricielle de G ayant pour caractère ψ , alors

$$X \cong Y \iff \chi(g) = \psi(g), \forall g \in G.$$

Si nous avons une (assez) petite table des caractères pour un groupe G , et si nous avons à notre disposition assez d'information, nous sommes en mesure de remplir le reste encore inconnu de la table des caractères à partir de la première relation d'orthogonalité.

Remarque 1.54. La représentation régulière $\mathbb{C}G$ d'un groupe G nous permet de tirer des résultats intéressants à partir de son caractère χ . De par le théorème de Maschke,

$$\mathbb{C}G = \bigoplus_{i=1}^k m_i V^{(i)}$$

et de par (2) du corollaire 1.53,

$$m_i = \langle \chi, \chi^{(i)} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \chi^{(i)}(g).$$

Or, dans la représentation régulière, $\chi(e) = |G|$ et $\chi(g) = 0$ si $g \neq e$. Alors

$$m_i = \langle \chi, \chi^{(i)} \rangle = \frac{1}{|G|} \chi(e) \chi^{(i)}(e) = \chi^{(i)}(e) = \dim V^{(i)}.$$

On en conclut que toutes les représentations irréductibles et non-équivalentes possibles pour G sont contenues dans sa représentation régulière.

Proposition 1.55. *Si G est un groupe fini et supposons que $\mathbb{C}G = \bigoplus_{i=1}^k m_i V^{(i)}$ où les $V^{(i)}$ forment l'ensemble de tous les G -modules non-équivalents. Alors,*

1. $m_i = \dim V^{(i)},$
2. $\sum_i (\dim V^{(i)})^2 = |G|,$
3. *Le nombre de $V^{(i)}$ différents est égal au nombre de classes de conjugaison dans G .*

La proposition 1.55 nous assure que la table des caractères d'un groupe est carrée. Le fait que les caractères irréductibles soient orthogonaux fait en sorte que cette table se traduit en une matrice inversible. Or, la première relation d'orthogonalité concerne les différentes rangées de la table. Nous pouvons en déduire une deuxième relation d'orthogonalité qui, cette fois-ci, concerne les colonnes de la table des caractères.

Théorème 1.56. *(deuxième relation d'orthogonalité) Soient K, L deux classes de conjugaisons dans G . Alors,*

$$\sum_{\chi} \chi_K \cdot \overline{\chi_L} = \frac{|G|}{|K|} \delta_{K,L}$$

sur laquelle la somme s'effectue sur tous les caractères irréductibles de G .

À partir de l'organisation intrinsèque de la table des caractères, nous avons une certaine idée des relations entre les représentations irréductibles d'un groupe. Or, il n'est pas toujours évident de trouver explicitement quelles sont ces composantes (malgré le fait que la table puisse nous donner leurs dimensions respectives). On pourrait se demander s'il est possible de déduire quelles sont les représentations irréductibles manquantes à partir de celles déjà connues. Si nous avons deux représentations pour un groupe, nous sommes en mesure d'en construire une nouvelle en considérant leur produit tensoriel. Si deux représentations à notre disposition sont irréductibles, on peut se demander si leur produit tensoriel le sera aussi. En général, ce ne sera pas le cas. Par contre, ce le sera dans beaucoup de situations qui nous concernent.

Définition 1.57. Soient G et H deux groupes ayant respectivement des représentations matricielles de X et Y . Leur *représentation par produit tensoriel*, notée $X \otimes Y$, est définie de la manière suite :

$$X \otimes Y = X(g) \otimes Y(h).$$

Théorème 1.58. *Si X et Y sont respectivement des représentations pour des groupes G et H , alors*

1. $X \otimes Y$ est une représentation du groupe $G \times H$,
2. Si X, Y et $X \otimes Y$ ont respectivement pour caractères χ, ψ et $\chi \otimes \psi$, alors

$$(\chi \otimes \psi)(g, h) = \chi(g) \cdot \psi(h)$$

pour tout $(g, h) \in G \times H$.

Théorème 1.59. *Soient G et H deux groupes.*

1. *Si X et Y sont respectivement des représentations irréductibles de G et H , alors $X \otimes Y$ est une représentation irréductible de $G \times H$.*

2. Soient $\mathbb{I}, \mathbb{J}$ deux index finis. Si $\{X^{(i)}\}_{i \in \mathbb{I}}$ et $\{Y^{(j)}\}_{j \in \mathbb{J}}$ forment des listes contenant toutes les différentes représentations irréductibles et toutes deux-à-deux inéquivalentes pour respectivement G et H , alors $\{X^{(i)} \otimes Y^{(j)}\}_{(i,j) \in \mathbb{I} \times \mathbb{J}}$ forme une liste contenant toutes les représentations irréductibles et toutes deux-à-deux non équivalentes pour $G \times H$.

Notre intérêt envers le théorème 1.59 vient du fait que nous allons bientôt étudier le groupe symétrique et ses représentations. Ces représentations sont étroitement liées à ses sous-groupes eux-mêmes associés aux différentes classes de conjugaison de $\mathcal{S}_n$. Chacun de ces sous-groupes peut être exprimé à partir d'un produit direct isomorphe à un produit direct de groupes symétriques d'ordres plus petits.

Définition 1.60. Soit H un sous-groupe de G et X une représentation matricielle de G . La *restriction de X à H* , notée $X \downarrow_H^G$, est pour tout $h \in H$ définie par

$$X \downarrow_H^G (h) = X(h).$$

De plus, si χ est le caractère associé à X , on dénote le caractère de $X \downarrow_H^G$ par $\chi \downarrow_H^G$.

Notre intérêt pour la restriction d'une représentation irréductible d'un groupe G à un de ses sous-groupes H se rapporte au fait qu'elle nous fournisse une représentation qui ne soit pas nécessairement irréductible pour H .

Définition 1.61. Soit H un sous-groupe de G et soit $\{t_1, t_2, \dots, t_l\}$ un ensemble de représentants des coensembles de H dans G . Si Y est une représentation de H , alors la *représentation induite par H dans G* , dénotée $Y \uparrow_H^G$, est pour tout $g \in G$ définie par

$$Y \uparrow_H^G (g) = (Y(t_i^{-1}gt_j))_{1 \leq i,j \leq l}$$

(où $Y(g)$ est une matrice nulle si $g \notin H$).

Les représentations induites ont pour cas particulier la représentation des coensembles à gauche.

Proposition 1.62. Soit H un sous-groupe de G et soit $\mathcal{H} = \{t_1H, t_2H, \dots, t_lH\}$ un ensemble des co-ensembles distincts de H dans G . Alors, si 1 dénote la représentation triviale de H , les matrices de la représentation induite $1 \uparrow_H^G$ sont identiques à celles de la représentation du G -module $\mathbb{C}\mathcal{H}$.

Théorème 1.63. Soit H un sous-groupe de G et soit $\{t_1, t_2, \dots, t_l\}$ un ensemble de représentants des co-ensembles de H dans G . Si Y est une représentation matricielle de H , alors $X := Y \uparrow_H^G$ est une représentation de G .

Pour un sous-groupe H de G , le résultat suivant nous indique que le choix des représentants de ses coensembles n'altère par la représentation induite obtenue.

Proposition 1.64. Soit H un sous-groupe de G et Y une représentation de H . Si $\{t_1, t_2, \dots, t_l\}$ et $\{s_1, s_2, \dots, s_l\}$ sont deux ensembles de représentants des co-ensembles de H dans G et que leurs représentations induites associées sont X et Z , lors X et Z sont des représentation équivalentes.

Afin de conclure nos rappels sur la théorie des caractères des groupes finis, on énonce la réciprocité de Frobenius compte-tenu du fait que c'est un résultat essentiel aux démonstrations de certains résultats que nous obtiendrons lors de notre future étude des représentations du groupe symétrique. Elle nous permet aussi de constater un lien entre l'induction et la restriction tout à fait élégant concernant les caractères d'un groupe G et les caractères d'un de ses sous-groupes H , le tout à travers la lunette du produit scalaire précédemment défini entre ceux-ci.

Théorème 1.65. (Réciprocité de Frobenius) Soit H un sous-groupe de G et supposons que χ et ψ soient respectivement des caractères associés à H et G . Alors,

$$\langle \chi \uparrow_H^G, \psi \rangle = \langle \chi, \psi \downarrow_H^G \rangle.$$

1.4 Relativement à la théorie de la représentation du groupe symétrique

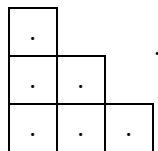
Ce sous-chapitre tire principalement le fil de sa narration à partir du deuxième chapitre de la référence de Bruce Sagan.

1.4.1 Hors-d'oeuvre en combinatoire, et un peu d'ordre

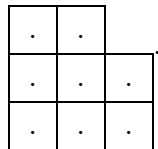
Avant tout, établissons quelques outils ludiques et élémentaires en combinatoire.

Définition 1.66. Supposons que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$. Selon la convention française, le *diagramme de Ferrer*, ou *la forme*, de λ est un tableau constitué de n coordonnées organisées en l rangées alignées à gauche pour lesquelles, si $1 \leq i \leq l$, la i^e rangée contient, du bas vers le haut, λ_i coordonnées.

Exemple 1.67. Pour le partage $\lambda = (3, 2, 1) \vdash 6$, le diagramme de Ferrer associé est le suivant :



Pour le partage $\mu = (3, 3, 2) \vdash 8$, le diagramme de Ferrer associé est le suivant :



Définition 1.68. Soit $\lambda \vdash n$. Un *tableau de Young de forme λ* , ou λ -tableaux, est un diagramme de Ferrer associé à λ et dans lequel l'ensemble des adresses est associé de façon bijective avec l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Les éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$ deviennent ainsi des éléments associés à chacune des adresses du diagramme de Ferrer.

Exemple 1.69. Soit $\lambda = (2, 1) \vdash 3$. Les tableaux de Young de forme $(2, 1)$ sont :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array}.$$

Dans certaines situations, nous voudrions regrouper certaines adresses d'un diagramme de Young de telle sorte que leurs éléments soient indissociables et forment des « blocs ». Pour ce faire, et ce sans contredire la définition d'un diagramme de Young, on définit les *tabloïdes*.

Définition 1.70. On dit que deux λ -tableaux t_1 et t_2 sont *équivalents par rangées*, ou $t_1 \sim t_2$, si leurs rangées correspondantes contiennent les mêmes éléments. Un *tabloïde de forme λ* , ou λ -tabloïde, est une classe d'équivalence $\{t\}$ regroupant des λ -tableaux équivalents par rangées. Autrement dit,

$$\{t\} = \{t_1 | t_1 \sim t\}$$

Exemple 1.71. En prenant les tableaux de l'exemple 1.69, on obtient les équivalences suivantes:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}; \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array}; \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array}.$$

Ces trois classes d'équivalences distinctes sont, respectivement, dénotées par les trois tabloïdes suivants:

$$\overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}}; \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}}; \overline{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}}.$$

On peut étiqueter chaque sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ par un unique tabloïde. Plusieurs de ces sous-groupes sont isomorphes. Nous pouvons, pour chacune de ces classes d'isomorphismes, désigner un unique représentant. On dira que chacun de ces représentants est un *sous-groupe*

de Young associé à un certain partage.

Définition 1.72. Supposons que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$. On définit le *sous-groupe de Young associé à λ dans $\mathcal{S}_n$* par

$$\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_{\{1, \dots, \lambda_1\}} \times \mathcal{S}_{\{\lambda_1+1, \dots, \lambda_1+\lambda_2\}} \times \dots \times \mathcal{S}_{\{n-\lambda_{l-1}+1, \dots, n\}} \cong \prod_{i=1}^l \mathcal{S}_{\lambda_i}.$$

À chaque sous-groupe de Young $\mathcal{S}_\lambda$, on associe un *tabloïde* $\{t^\lambda\}$ contenant les tableaux ayant les éléments $\{1, \dots, \lambda_1\}$ en ordre croissant, de la gauche vers la droite, dans sa première rangée, les éléments $\{\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_1 + \lambda_2\}$ en ordre croissant, de gauche vers la droite, dans sa deuxième rangée, ... , les éléments $\{n - \lambda_{l-1} + 1, \dots, n\}$ en ordre croissant, de la gauche vers la droite, dans sa dernière rangée.

Exemple 1.73. Si $\lambda = (3, 3, 2)$, alors on associe à $\mathcal{S}_\lambda$ le tabloïde

7	8		
4	5	6	
1	2	3	

Afin d'étudier les représentation irréductibles du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$, nous allons construire, individuellement pour chaque partage λ de n , un espace vectoriel engendré par les différents tabloïdes de forme λ . Ces espaces, qu'on dénotera respectivement par M^λ , auront pour but de mettre en lumière comment les éléments de $\mathcal{S}_n$ permutent ses tabloïdes (ou sous-groupes de même partage) entre eux. La permutation entre ces sous-groupes de même partage se fait à partir de l'action de la conjugaison appliquée sur l'ensemble de leurs éléments. Simplifions cette action à partir de la définition suivante.

Définition 1.74. Supposons que l'on définisse une action de $\mathcal{S}_n$ sur l'ensemble des λ -tabloïdes telle que, pour tout $\pi \in \mathcal{S}_n$ et tout tabloïde $\{t\}$, nous obtenions :

$$\pi\{t\} = \{\pi t\}$$

où πt est le tableau obtenu en appliquant π sur les éléments des adresses de

t. Construisons l'espace vectoriel

$$M^\lambda = \mathbb{C}\{\{t_i\}\}_{i \in \mathbb{I}}$$

où $\{\{t_i\}\}_{i \in \mathbb{I}}$ forme l'ensemble complet des λ -tabloïdes. On nomme M^λ le *module des permutations associé à λ* .

Exemple 1.75. Si $\pi = (3, 4) \in \mathcal{S}_7$ et $\{t\} = \begin{array}{ccc} \overline{7} & \overline{8} \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array}$, alors

$$\pi\{t\} = \begin{array}{ccc} \overline{7} & \overline{8} \\ 3 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 4 \end{array}.$$

Définition 1.76. Soit G un groupe. Un G -module M est dit *cyclique* s'il existe $v \in M$ de telle sorte que $M = \mathbb{C}Gv$ si $Gv = \{gv | g \in G\}$. Dans ce cas, on dit aussi que M est *généralisé* par v .

Proposition 1.77. Si $\lambda \vdash n$, alors M^λ est cyclique, généralisé par n'importe lequel λ -tabloïde, et sa dimension est $\frac{n!}{\lambda!}$ (soit le nombre de différentes λ -tabloïdes).

Exemple 1.78. Puisque $M^{(2,1)} = \text{eng}\left\{ \begin{array}{cc} \overline{3} \\ 1 & 2 \end{array}; \begin{array}{cc} \overline{2} \\ 1 & 3 \end{array}; \begin{array}{cc} \overline{1} \\ 2 & 3 \end{array} \right\}$, et puisque

$$\begin{array}{cc} \overline{3} \\ 1 & 2 \end{array} = e \cdot \begin{array}{cc} \overline{3} \\ 1 & 2 \end{array}; \begin{array}{cc} \overline{2} \\ 1 & 3 \end{array} = (3, 2) \cdot \begin{array}{cc} \overline{3} \\ 1 & 2 \end{array}; \begin{array}{cc} \overline{1} \\ 2 & 3 \end{array} = (1, 3) \cdot \begin{array}{cc} \overline{3} \\ 1 & 2 \end{array},$$

il est clair que $M^{(2,1)}$ est cyclique et engendré par $\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$. Les trois tabloïdes sont égaux à un facteur inversible de $\mathcal{S}_3$ près. Le choix du générateur de $M^{(2,1)}$ est ainsi arbitraire parmi les trois.

Théorème 1.79. Soit $\lambda \vdash n$, son sous-groupe de Young $\mathcal{S}_\lambda$ et son tabloïde $\{t^\lambda\}$ associé. Supposons que $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_l\}$ soit un ensemble de représentants des co-ensembles de $\mathcal{S}_\lambda$ dans $\mathcal{S}_n$ et posons l'espace vectoriel $V^\lambda =$

$\mathbb{C}\{\pi_1\mathcal{S}_\lambda, \pi_2\mathcal{S}_\lambda, \dots, \pi_l\mathcal{S}_\lambda\}$. Alors, V^λ est, en tant que $\mathcal{S}_n$ -module, isomorphe à M^λ .

Remarque 1.80. Il existe une bijection entre les conjugués du sous-groupe de Young associé au partage $\mathcal{S}_\lambda$ et les différentes classes d'équivalences définies à la définition 1.70. Pour $\pi \in \mathcal{S}$, la multiplication de la classe d'équivalence $\{t_\lambda\}$ par π est isomorphe à l'action de la conjugaison par π sur $\mathcal{S}_\lambda$. Autrement dit, il existe un isomorphisme $\pi\{t_\lambda\} \rightarrow \pi\mathcal{S}_\lambda\pi^{-1}$. On obtient ainsi que M^λ est comparable à l'espace vectoriel engendré par les sous-groupes distincts de $\mathcal{S}_n$ associés au partage λ , et donc qu'il est comparable à une représentation « par permutations » entre ces sous-groupes de même partage λ .

En terminant ce sous-chapitre, nous établissons quelques notions élémentaires en lien avec différentes façons d'ordonner les partages entre eux.

Définition 1.81. Si A est un ensemble, on dit qu'un *ordre partiel sur A* est une relation $\leq$ faisant en sorte que, $\forall a, b, c \in A$,

1. $a \leq a$;
2. si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$,
3. si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.

On dénote par $(A, \leq)$ l'ensemble partiellement ordonné (couramment réduit à *poset*, de l'anglais *partially ordered set*). De plus, si pour toute paire $(a, b) \in A \times A$ nous sommes en mesure d'établir que $a \leq b$ ou $b \leq a$, on dira alors que A est un *ensemble totalement ordonné*.

Définition 1.82. Soient $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ deux partages de n . On dit que λ domine μ , noté $\lambda \trianglerighteq \mu$, si

$$\sum_{k=1}^i \lambda_k \geq \sum_{k=1}^i \mu_k$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$ et en prenant $\lambda_k = 0$ si $k > l$ et $\mu_j = 0$ si $j > m$.

Exemple 1.83. Voici l'ordre de dominance parmi les partages de 5 :

$$(1, 1, 1, 1, 1) < (2, 1, 1, 1) < (2, 2, 1) < (3, 1, 1) < (3, 2) < (4, 1) < (5)$$

Parmi les partages de 6, (3,3) et (4,1,1) sont incomparables selon l'ordre de dominance.

La définition suivante permet de décrire les éléments successifs dans un l'ordre partiel.

Définition 1.84. Soient $(A, \leq)$ un poset et $b, c \in A$. On dit que b est *couvert* par c , dénoté $b \prec c$ (ou $c \succ b$), si $b < c$ et que $\nexists d \in A$ tel que $b < d < c$.

Lemme 1.85. Soient t^λ et s^μ deux tableaux de forme λ et μ respectivement. Si, $\forall i$, les éléments de la i^e rangée de s^μ sont tous dans différentes colonnes de t^λ , alors $\lambda \supseteq \mu$.

Définition 1.86. Soient $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ deux partages de n . On aura que $\lambda < \mu$ dans l'ordre lexicographique si, pour un certain $i \in \mathbb{N}$, on aura que $\lambda_j = \mu_j, \forall j \leq i$ et $\lambda_i < \mu_i$.

Exemple 1.87. Voici l'ordre lexicographique parmi les partages de 6 :

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1) < (2, 1, 1, 1, 1) < (2, 2, 1, 1) < (2, 2, 2) < (3, 1, 1, 1) \\ < (3, 2, 1) < (3, 3) < (4, 1, 1) < (4, 2) < (5, 1) < (6)$$

Proposition 1.88. Si $\lambda, \mu \vdash n$ et que $\lambda \supseteq \mu$, alors $\lambda \geq \mu$ en ordre lexicographique.

1.4.2 Modules de Specht

Tel qu'exposé à la remarque 1.80, M^λ est une représentation comparable à celle des permutations entre les différents sous-groupes de $\mathcal{S}_n$ de partage

λ . Cette représentation n'est pas nécessairement irréductible. Nous allons cependant établir, au fil des prochaines pages, des résultats nous permettant de trouver des représentations irréductibles au sein de M^λ . De par notre étude des représentations des groupes finis, les représentations irréductibles d'un groupe sont en bijection avec les classes de conjugaison qu'il contient. Les classes de conjugaison du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ sont en bijection avec les différents partages de n . Alors, pour chaque $\lambda \vdash n$, nous obtiendrons que M^λ nous révélera une représentation irréductible.

Définition 1.89. Soit t un tableau comportant l rangées et k colonnes et pour lequel on étiquette sa i^e rangée par R_i et pour lequel on étiquette sa i^e colonne par C_i . Dans ce cas,

$$R_t = \mathcal{S}_{R_1} \times \mathcal{S}_{R_2} \times \cdots \times \mathcal{S}_{R_l}$$

$$C_t = \mathcal{S}_{C_1} \times \mathcal{S}_{C_2} \times \cdots \times \mathcal{S}_{C_k}$$

sont respectivement les *stabilisateurs des rangées et des colonnes* de t .

Remarque 1.90. R_t est donc le stabilisateur de $\{t\}$ dans $\mathcal{S}_n$. Si $\pi \in R_t$, alors $\pi\{t\} = \{t\}$.

Définition 1.91. Soit t un tableau. Posons

$$\kappa_t = \sum_{\sigma \in C_t} \text{signe}(\sigma) \cdot \sigma.$$

On définit le *polytabloïde associé* à t par

$$e_t = \kappa_t\{t\}.$$

Exemple 1.92. Concernant $t = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$, on a que $\kappa_t = e - (1, 3)$ et que son polytabloïde associé est le suivant :

$$e_t = (e - (1, 3)) \frac{\overline{3}}{\overline{1 \quad 2}} = \frac{\overline{3}}{\overline{1 \quad 2}} - \frac{\overline{1}}{\overline{2 \quad 3}}.$$

Puisque les tabloïdes associés à un partage λ fixé indexent les conjugués du sous-groupe de Young $\mathcal{S}_\lambda$, on en déduit le lemme 1.93 permettant d'interrelier les stabilisateurs des colonnes et des rangées des différents tabloïdes de forme λ .

Lemme 1.93. *Soit t un tableau et $\pi \in \mathcal{S}_n$. Alors,*

$$1. R_{\pi t} = \pi R_t \pi^{-1},$$

$$2. C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1},$$

$$3. \kappa_{\pi t} = \pi \kappa_t \pi^{-1},$$

$$4. e_{\pi t} = \pi e_t.$$

Au sein de M^λ , on va s'intéresser à son sous-module engendré par les polytabloïdes.

Définition 1.94. Soit λ un partage. On définit le *module de Specht associé à λ* , noté S^λ , comme étant le sous-module de M^λ engendré par l'ensemble des polytabloïdes $\{e_t\}$ pour lesquels t est de forme λ .

Exemple 1.95. En posant $\lambda = (2, 1)$, $t_1 = \frac{\overline{3}}{\overline{1 \quad 2}}$, $t_2 = \frac{\overline{2}}{\overline{1 \quad 3}}$, et $t_3 = \frac{\overline{1}}{\overline{2 \quad 3}}$, on a que

$$S^{(2,1)} = \text{eng}\{e_{t_1}; e_{t_2}, e_{t_3}\}.$$

Nous allons démontrer que les modules de Specht S^λ associés aux différents partages $\lambda \vdash n$ sont exactement en bijection avec les différentes représentations irréductibles de $\mathcal{S}_n$ et que M^λ contient une unique copie de S^λ .

Proposition 1.96. *Pour tout partage λ , le module de Specht S^λ est un module cyclique engendré par n'importe lequel polytabloïde e_t pour lequel t est de forme λ .*

Remarque 1.97. La proposition 1.96 est un résultat du point (4) du lemme 1.93 au regard de la proposition 1.77.

Par construction, les tabloïdes distincts de M^λ sont linéairement indépendants. On peut les organiser de telle sorte qu'ils soient orthogonaux dans cet espace.

Définition 1.98. (Produit scalaire de M^λ) Soient t, s deux tableaux de forme λ . On définit un produit scalaire entre les tabloïdes de M^λ :

$$\langle \{t\}, \{s\} \rangle = \delta_{\{t\}, \{s\}}$$

où $\delta_{a,b}$ est la fonction delta de Kronecker ($\delta_{a,b} = 1$ si $a = b$, et $\delta_{a,b} = 0$ sinon).

On va s'intéresser aux éléments de $\mathbb{C}\mathcal{S}_n$ s'exprimant à partir de combinaisons linéaires reflétant les signes des permutations qu'ils contiennent (finalement, ayant des constructions rappelant celles des polytabloïdes à partir desquels l'on construit les modules de Specht).

Définition 1.99. Soit H un sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$. On définit

$$H^- = \sum_{\sigma \in H} \text{signe}(\sigma) \cdot \sigma.$$

Les éléments ayant la forme définie à la définition 1.99, comme le démontre le lemme suivant, se comportent bien avec le produit scalaire de la définition 1.98.

Lemme 1.100. *(du signe) Soit $H \leq \mathcal{S}_n$.*

1. *Si $\pi \in H$, alors*

$$\pi H^- = H^- \pi = \text{signe}(\pi) H^-$$

et, en particulier, $\pi^- H^- = H^-$.

2. *$\forall u, v \in M^\lambda$,*

$$\langle H^- u, v \rangle = \langle u, H^- v \rangle.$$

3. *Si $(a, b) \in H$ est une transposition, alors*

$$H^- = k(e - (a, b))$$

où e est la permutation neutre et $k \in \mathbb{C}\mathcal{S}_n$.

4. *Si t est un tableau ayant les éléments b et c dans la même rangée, et si $(b, c) \in H$, alors*

$$H^- \{t\} = 0.$$

Les scalaires de forme κ_t ont des relations intéressantes avec l'ordre de dominance entre les partages.

Corollaire 1.101. *Soient t^λ et s^μ les tableaux associés aux sous-groupes de Young de partages λ et μ tels que $\lambda, \mu \vdash n$. Si $\kappa_t\{s\} \neq 0$, alors $\lambda \supseteq \mu$. De plus, si $\lambda = \mu$, alors $\kappa_t\{s\} = \pm e_t$.*

Corollaire 1.102. *Si $u \in M^\mu$ et que t est un tableau de forme μ , alors $\kappa_t u$ est un multiple de e_t .*

Les corollaires 1.101 et 1.102 nous permettent de déduire qu'il doit exister une unique copie de S^μ , à isomorphisme près, dans M^μ .

Théorème 1.103. *(du sous-module) Soit U un sous-module de M^μ . Alors, soit $U \subseteq S^\mu$, soit $U \subseteq (S^\mu)^\perp$.*

Le théorème 1.103 nous permet de déduire que S^λ est irréductible dans M^λ . Il établit ainsi que, pour chaque partage λ de n , nous pouvons découvrir une nouvelle représentation irréductible de $\mathcal{S}_n$ dans M^λ . Afin de les calculer, il serait bien de savoir quelles sont les autres sous-modules différents de S^λ dans M^λ .

Proposition 1.104. *Supposons que le corps des scalaires est $\mathbb{C}$ et que $\theta \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ est une application non-nulle. Alors, $\lambda \supseteq \mu$. Si $\lambda = \mu$, alors θ est une multiplication par un scalaire.*

Donc, si λ domine μ , il existe une copie de S^λ dans M^μ .

Théorème 1.105. *$\{S^\lambda | \lambda \vdash n\}$ est un ensemble formant une liste exhaustive des $\mathcal{S}_n$ -modules irréductibles sur $\mathbb{C}$.*

Alors, toute représentation irréductible de $\mathcal{S}_n$ est de la forme S^λ pour $\lambda \vdash n$. Le corollaire suivant nous donne une expression pour M^λ découlant de nos résultats obtenus jusqu'ici.

Corollaire 1.106. *Nous obtenons la décomposition des modules de permutations :*

$$M^\mu = \bigoplus_{\lambda \supseteq \mu} m_{\lambda\mu} S^\lambda$$

pour laquelle $m_{\mu\mu} = 1$.

Si nous arrivons à définir une base pour les modules de Specht, la décomposition de M^λ sera probablement plus évidente. Pour ce faire, nous aurons recours à des tableaux bien particuliers : les *tableaux standards*.

Définition 1.107. Un tableau t est dit *standard* si les éléments de chacune de ses lignes et de chacune de ses colonnes sont croissantes au fur et à mesure que les adresses croissent. On dira également que le polytabloïde e_t est standard si t l'est.

Exemple 1.108. Le tableau suivant de partage $\lambda = (3, 3, 1)$ est standard :

5		
3	4	7
1	2	6

mais le suivant ne l'est pas :

3		
5	4	6
1	7	2

Les résultats qui suivront auront pour but de démontrer que l'ensemble des polytabloïdes associés aux différents tableaux standards de forme λ forment une base pour S^λ . Les démonstrations emploient, en particulier, un ordre partiel établi entre les différents tabloïdes de forme λ . Cet ordre partiel, nous permettant de généraliser l'ordre de dominance aux tabloïdes, est défini à partir de suites de *compositions* associées individuellement aux tabloïdes.

Définition 1.109. Une *composition* de n est une suite ordonnée d'entiers naturels $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ de telle sorte que $\sum_{i=1}^l \lambda_i = n$. On dira que λ_i est la i^e *partie* de λ .

Remarque 1.110. Un partage est une composition. Une composition, c'est simplement un partage sur lequel on n'impose pas que les coordonnées soient faiblement décroissantes.

Définition 1.111. Supposons que $\{t\}$ soit un tabloïde de forme $\lambda \vdash n$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, posons $\{t^i\}$ comme étant le tabloïde contenant les éléments de $\{t\}$ inférieurs ou égaux à i , et posons λ^i comme étant la composition décrivant la forme de $\{t^i\}$. Si $\{s\}, \{t\}$ sont deux tabloïdes ayant pour suites de compositions respectives λ^i et μ^i , on dira que $\{s\}$ *domine* $\{t\}$, aussi noté $\{s\} \trianglerighteq \{t\}$, si $\sum_{j=1}^i \lambda^j \geq \sum_{j=1}^i \mu^j, \forall i$ tels que $1 \leq i \leq n$.

Exemple 1.112. Si $\{t\} = \frac{\overline{1 \ 3}}{\overline{2 \ 4}}$, alors $\{t^1\} = \frac{\overline{1}}{\overline{\emptyset}}$, $\{t^2\} = \frac{\overline{1}}{\overline{2}}$, $\{t^3\} = \frac{\overline{1 \ 3}}{\overline{2}}$ et finalement $\{t^3\} = \frac{\overline{1 \ 3}}{\overline{2 \ 4}}$. Dans ce cas, $\lambda^1 = (\emptyset, 1)$, $\lambda^2 = (\overline{1, 1})$, $\lambda^3 = (1, 2)$ et $\lambda^4 = (2, 2)$.

Lemme 1.113. *(de dominance entre tabloïdes) Si $k < l$ et k est un élément apparaissant dans une rangée supérieure à celle de l dans $\{t\}$, alors*

$$\{t\} \triangleleft (k, l)\{t\}$$

Définition 1.114. Si $v = \sum_i c_i \{t_i\} \in M^\mu$, on dira que $\{t_i\}$ apparaît dans v si $c_i \neq 0$.

À partir du lemme 1.113, on en déduit immédiatement le prochain corollaire.

Corollaire 1.115. *Si t est standard et que $\{s\}$ apparaît dans e_t , alors $\{t\} \supseteq \{s\}$.*

Définition 1.116. Soit $(A, \leq)$ un poset. On dit que $b \in A$ est le *maximum* si $b \geq c, \forall c \in A$. Un élément $b \in A$ est un *élément maximal* si $\nexists c \in A$ tel que $c > b$. On définit le *minimum* et un *élément minimal* d'une façon analogue.

Lemme 1.117. *Soient $v_1, v_2, \dots, v_m$ des éléments de M^μ . Supposons que, pour chacun des v_i , l'on puisse choisir un tabloïde $\{t_i\}$ apparaissant dans v_i de telle sorte que*

1. $\{t_i\}$ soit un maximum parmi les tabloïdes apparaissant dans v_i , et
2. les $\{t_i\}$ sont tous distincts.

Alors, $v_1, v_2, \dots, v_m$ sont indépendants.

À partir du lemme 1.117 se déduit la prochaine proposition.

Proposition 1.118. *L'ensemble suivant est indépendant :*

$$\{e_t : t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}.$$

Bref, S^λ est une représentation irréductible ayant pour base un ensemble incluant les polytabloïdes e_t où t est standard : il nous reste à se convaincre que ces éléments forment la base dans son entièreté. Souvent, on exprime l'élément e_t par t afin de simplifier les calculs de « redressement » que l'on va exposer au fil des prochains résultats. Tout polytabloïde de S^λ doit pouvoir être exprimé à partir d'une combinaison linéaire de ces éléments de la base (ou de tableaux de Young standards). Nous voulons développer un algorithme de redressement permettant de ce faire. Cet algorithme se fait à partir des éléments de Garnir (que nous allons exposer immédiatement).

Définition 1.119. Soient A et B deux ensembles disjoints d'entiers positifs. Supposons que $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k\} = \Pi$ soit un ensemble de représentants des co-ensembles de $\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_B$ dans $\mathcal{S}_{A \cup B}$. On définit *un élément de Garnir* de la manière suivante :

$$g_{A,B} = \Pi^-.$$

En particulier, si t est un tableau, et si A et B sont respectivement des sous-ensembles de sa j^e et $(j+1)^e$ colonne, on définit *l'élément de Garnir associé à A, B et t* comme étant l'élément de Garnir préservant la croissance des colonnes de $\pi_i t$, et ce pour chacun des représentants π_i .

Exemple 1.120. Posons $t = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array}$. t n'est pas standard. En particulier, sa première colonne n'est pas croissante. Puisque $(2, 3) \in C_t$, on a que

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

La première rangée du tableau résultant contient $2 > 1$, alors elle n'est pas croissante : notre tableau résultant n'est toujours pas standard. À partir

d'ici, on utilise les éléments de Garnir afin de déduire l'égalité

$$-\left[\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}\right] \cdot (e + (1, 3, 2) - (1, 2)) = 0$$

et le redressement de l'algorithme nous permet d'établir la combinaison linéaire suivante à partir de tableaux standards :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}.$$

Remarque 1.121. En pratique, pour l'algorithme de redressement, si $t_{i,j}$ est l'élément contenu dans le tableau t à l'adresse (i, j) , on cherche i de telle sorte que $t_{i,j} > t_{i,j+1}$. Dans ce cas, $A = \{t_{k,j} : k \geq i\}$ et $B = \{t_{k,j+1} : k \leq i\}$.

Proposition 1.122. Soit t, A et B définis comme dans la dernière définition (des éléments de Garnir). Si $|A \cup B|$ est plus grand que le nombre d'éléments dans la colonne j de t , alors $g_{A,B}e_t = 0$.

On résume, à partir du prochain théorème, ce que l'on a découvert sur les représentations irréductibles de $\mathcal{S}_n$ au regard des résultats obtenus à partir de la théorie générale de la représentation des groupes finis.

Théorème 1.123. Supposons que f^λ soit le nombre de tableaux standards de forme λ .

1. L'ensemble suivant engendre S^λ et forme une base :

$$\{e_t : t \text{ est un } \lambda\text{-tableau standard}\}$$

2. $\dim S^\lambda = f^\lambda$,

3. $\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$

Ces représentations irréductibles, obtenues à partir des modules construits à partir des bases elles-mêmes précédemment définies grâce aux poly-

tabloïdes associés aux tableaux standards, ont un nom : les *représentations naturelles de Young*.

Définition 1.124. Soit $\lambda \vdash n$. La *représentation naturelle de Young du groupe symétrique* $\mathcal{S}_n$ est une représentation du $\mathcal{S}_n$ -module S^λ ayant pour base l'ensemble des λ -polytabloïdes standards.

Nous avons maintenant une bonne compréhension des différentes représentations irréductibles de $\mathcal{S}_n$, et nous savons que S^λ existe en une unique copie isomorphe dans M^λ . De par la construction des bases des modules de Specht à partir de tableaux standards, on peut rapidement s'intéresser aux inductions et restrictions de ces représentations irréductibles sur des groupes symétriques d'ordres différents et rapprochés.

Définition 1.125. Posons λ un diagramme de Ferrer. Un *coin intérieur de* λ est une adresse $(i, j) \in \lambda$ de telle sorte que $\lambda / \{(i, j)\}$, noté λ^- , ait une forme de partage. Un *coin extérieur de* λ est une adresse $(i, j) \notin \lambda$ faisant en sorte que $\lambda \cup \{(i, j)\}$, noté λ^+ , ait une forme de partage.

Exemple 1.126. Si l'on identifie par « + » les coins extérieurs et par « - » les coins intérieurs, posons

$$\lambda = (5, 4, 4, 2) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & + \\ \hline & . & - & + & \\ \hline & . & . & . & - \\ \hline & . & . & . & . & + \\ \hline & . & . & . & . & - & + \\ \hline \end{array}$$

Alors,

$$\lambda^- : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline . & , & & \\ \hline . & . & . & . \\ \hline . & . & . & . \\ \hline . & . & . & . \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline . & . & & & \\ \hline . & . & . & & \\ \hline . & . & . & . & \\ \hline . & . & . & . & . \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline . & & & & \\ \hline . & . & . & . & \\ \hline . & . & . & . & \\ \hline . & . & . & . & . \\ \hline \end{array}$$

et

$$\lambda^+ : \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} , \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} ,$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} , \quad \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} .$$

Ces restrictions et inductions nous permettent de déduire que

$$S^{(5,4,4,2)} \downarrow_{\mathcal{S}_{14}} \cong S^{(4,4,4,2)} \oplus S^{(5,4,3,2)} \oplus S^{(5,4,4,1)}, \text{ et}$$

$$S^{(5,4,4,2)} \uparrow_{\mathcal{S}_{16}} \cong S^{(6,4,4,2)} \oplus S^{(5,5,4,2)} \oplus S^{(5,4,4,3)} \oplus S^{(5,4,4,2,1)}.$$

Lemme 1.127. *Soit $\lambda \vdash n$ et f^λ le nombre de λ -polytabloïdes standards. Alors,*

$$f^\lambda = \sum_{\lambda^-} f^{\lambda^-}$$

Théorème 1.128. (des ramifications) *Soit $\lambda \vdash n$. Alors,*

$$1. S^\lambda \downarrow_{\mathcal{S}_{n-1}} \cong \bigoplus_{\lambda^-} S^{\lambda^-},$$

$$2. S^\lambda \uparrow_{\mathcal{S}_{n+1}} \cong \bigoplus_{\lambda^+} S^{\lambda^+}$$

1.4.3 La décomposition de M^μ

Nous comprenons maintenant les « blocs » irréductibles nous permettant de construire le module M^λ . Nous voulons maintenant comprendre comment se décompose M^λ    partir de ses sous-modules irréductibles.

Définition 1.129. Un λ -tableau généralisé de Young est un tableau T obtenu à partir d'un diagramme de Ferrer de forme λ et dans lequel on associe un entier positif à chacune de ses adresses (les répétitions sont permises). Le *type* de T , aussi appelé *contenu* de T , est une composition $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ pour lesquels μ_i est égal au nombre d'adresses dans T contenant i . On définit ainsi l'ensemble suivant :

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu} = \{T : T \text{ ait un forme } \lambda \text{ et ait pour contenu } \mu\}.$$

Exemple 1.130. Le tableau

$$T = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & \\ 4 & 1 & 4 \end{array}$$

est de partage $(3, 2)$ et de contenu $(2, 0, 1, 2)$.

Soit t^λ le tableau associé au sous-groupe de Young de partage λ . t et le nouveau tableau T qui lui est associé ont la même forme. On définit $T(i)$ comme étant l'élément de T qui est situé à la même adresse que i dans t^λ . Établissons le $\mathcal{S}_n$ -module $\mathbb{C}\mathcal{T}_{\lambda\mu}$ à partir de l'action à gauche suivante pour $\pi \in \mathcal{S}_n$:

$$(\pi T)(i) := T(\pi^{-1}i).$$

L'avantage des tableaux généralisés de $\mathcal{T}_{\lambda\mu}$ est qu'ils nous permettent d'obtenir des présentations alternatives pour M^μ .

Proposition 1.131. *Pour tout partage λ , on a que $M^\mu \cong \mathbb{C}\mathcal{T}_{\lambda\mu}$.*

La proposition 1.131 nous donne une présentation de M^μ plus adéquate si l'on désire étudier cet espace vectoriel à partir des homomorphismes qu'il implique. En comprenant quels sont les homomorphismes de M^λ , nous avons une meilleure idée des multiplicités des différents sous-modules de Specht compris à isomorphisme près.

Définition 1.132. $\forall T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$, on définit l'homomorphisme associé à T comme étant l'application $\theta_T \in \text{Hom}(M^\lambda, M^\mu)$ ayant pour règle d'association

$$\{t\} \xrightarrow{\theta_T} \sum_{S \in \{T\}} S$$

où $\{T\}$ est la classe d'équivalence contenant tous les tableaux généralisés ayant les mêmes éléments que T , rangée par rangée, et où t est le tableau associé à T .

On développe ensuite un concept analogue à celui des tableaux standards mais adaptés aux tableaux généralisés: les *tableaux semi-standard*. Comme les tableaux standards qui forment une base pour les modules de Specht, les tableaux semi-standard formeront une base pour M^λ .

Proposition 1.133. Si t est un λ -tableau, et si $T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}$ est son tableau généralisé qui lui est associé, alors $\kappa_t T = 0$ si et seulement si T possède deux éléments identiques dans une même colonne.

Définition 1.134. On dit qu'un tableau généralisé T est *semi-standard* si ses rangées sont faiblement croissantes et que ses colonnes sont strictement croissantes. On note $\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0$ l'ensemble des λ -tableaux généralisés de contenu μ qui sont semi-standard.

Exemple 1.135. Le tableau $\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{smallmatrix}$, de forme $\lambda = (3, 2)$ et de contenu $\mu =$

$(2, 0, 1, 2)$, n'est pas semi-standard. Mais, $\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{smallmatrix}$ l'est.

Théorème 1.136. L'ensemble suivant est une base pour $\text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$:

$$\{\bar{\theta}_T : T \in \mathcal{T}_{\lambda\mu}^0\}$$

Si λ domine μ , nous sommes en mesure de déduire combien de copies isomorphes à S^λ sont comprises dans M^μ à partir du théorème 1.136. On

formalise ces nombres à partir des *nombres de Koska*.

Définition 1.137. Le *nombre de Kostka* $K_{\lambda\mu}$ représente le nombre de tableaux généralisés semi-standards de forme λ et de contenu μ . Autrement dit, $K_{\lambda\mu} = |\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0|$.

Théorème 1.138. *La multiplicité de S^λ dans M^μ est égale au nombre de λ -tableaux semi-standards de contenu μ . Autrement dit,*

$$M^\mu \cong \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda\mu} S^\lambda$$

Exemple 1.139. Si $\lambda = (2, 1, 1) \vdash 4$, alors λ , $(3, 1)$ et (4) sont les seuls partages de 4 qui dominent λ . On vérifie donc les ensembles suivants :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 3 \\ 2 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 1 \quad 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \end{array} \\ \mathcal{T}_{\lambda\lambda}^0 = \{ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \end{array} \}, & \mathcal{T}_{\lambda(3,1)}^0 = \{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \quad 1 \end{array} \}, & \mathcal{T}_{\lambda(4)}^0 = \{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \end{array} \} \end{array}$$

nous permettant de déduire que $M^\lambda, M^{(3,1)}$ et $M^{(4)}$ sont les seuls espaces vectoriels de la forme M^γ avec $\gamma \vdash 4$ qui contiennent une (unique) copie de S^λ .

Exemple 1.140. Fixons $\mu = (2, 1, 1) \vdash 4$. Tous les partages de 4 qui dominent $(2, 1, 1)$ sont $\{(4); (3, 1); (2, 1, 1); (2, 2)\}$. Puisque

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 3 \\ 2 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 1 \quad 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \end{array} \\ \mathcal{T}_{(4)\mu}^0 = \{ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \end{array} \}, & \mathcal{T}_{(3,1)\mu}^0 = \{ \begin{array}{c} 3 \\ 1 \quad 1 \end{array}, \begin{array}{c} 2 \\ 1 \quad 1 \end{array} \}, & \\ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 1 \quad 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \end{array} \\ \mathcal{T}_{(2,1,1)\mu}^0 = \{ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \quad 1 \\ 1 \quad 1 \end{array} \}, & \mathcal{T}_{(2,2)\mu}^0 = \{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \quad 1 \end{array}, \begin{array}{c} 3 \\ 1 \quad 1 \end{array} \}, & \end{array}$$

nous en concluons que $M^{(2,1,1)} \cong S^{(4)} \oplus 2S^{(3,1)} \oplus S^{(2,1,1)} \oplus S^{(2,2)}$.

CHAPITRE II

CONSTRUCTIONS PRINCIPALES

2.1 Généralités sur les monoïdes finis d'inversibles

Notre compréhension de la décomposition de M^λ à partir de ses sous-modules irréductibles de Specht est maintenant satisfaisante : nous passons maintenant à l'étude des structures algébriques fondamentales au présent mémoire : celle des monoïdes finis. Ce sous-chapitre tire principalement sa narration successivement des chapitres 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 et 3.1 de la référence de Benjamin Steinberg².

2.1.1 Notions élémentaires

Si la théorie des groupes fait partie de la culture générale des mathématiciens, la théorie des monoïdes n'en fait généralement pas partie. Pour cette raison, on entame l'étude de nos constructions principales à partir des propriétés générales des monoïdes finis.

²Steinberg, B. (2016). *Representation theory of finite monoids* de Universitext. Springer, Cham.

Définition 2.1. Un *demi-groupe* est un ensemble D muni d'une opération binaire associative « $\cdot$ » appelée *multiplication*. Un *monoïde* M est un demi-groupe comprenant un élément neutre dénoté par 1_M (ou simplement 1). Autrement dit, $\forall m \in M, 1 \cdot m = m \cdot 1 = m$.

Définition 2.2. Un *sous-demi-groupe* est un sous-ensemble d'un demi-groupe fermé sous la multiplication. Un *sous-monoïde* est un sous-demi-groupe contenant un élément neutre.

À partir d'ici, on considérera que tout ensemble dénoté M sera un monoïde et que tout ensemble dénoté D sera un demi-groupe. Un demi-groupe peut être vide, alors qu'un monoïde contient minimalement un élément (neutre).

Remarque 2.3. L'élément neutre du monoïde est nécessairement unique. Autrement, si 1_A et 1_B sont deux neutres, on aurait que $1_A = 1_A \cdot 1_B = 1_B$. Remarquablement, si M' est un sous-monoïde de M , alors il n'est pas nécessaire que l'identité de M coïncide avec l'identité de M' .

Dans un monoïde fini, on peut retrouver un sous-ensemble ayant une structure comparable à celle d'un groupe.

Définition 2.4. On dit que $m \in M$ est une *unité* s'il existe $m^{-1} \in M$ tel que $m \cdot m^{-1} = m^{-1} \cdot m = 1$.

L'ensemble des unités de M , combinant les propriétés des monoïdes à sa définition, forme un groupe (maximal dans M) qui est également un sous-monoïde de M .

Définition 2.5. On dit que $d' \in D$ est un *zéro* si $d'd = dd' = d', \forall d \in D$.

On peut rapidement vérifier, d'une façon analogue à la vérification de l'unicité de 1, qu'un zéro, s'il existe, est nécessairement unique.

Définition 2.6. Soient A, B deux sous-ensembles d'une demi-groupe D . On définit l'ensemble

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

Définition 2.7. Soit $(D, \cdot)$ un demi-groupe. On définit le *demi-groupe opposé* à D , noté D^{opp} , qui est l'ensemble D muni de l'opération binaire « $*$ » définie de la manière suivante, $\forall a, b \in D^{opp}$:

$$a * b = b \cdot a.$$

Définition 2.8. Un *homomorphisme de monoïdes* (ou *homomorphisme*) est une application $\phi : M \rightarrow N$ pour laquelle M et N sont des monoïdes et de telle sorte que, $\forall a, b \in M$,

1. $\phi(1_M) = 1_N$,
2. $\phi(ab) = \phi(a) \cdot \phi(b)$

Si ϕ est bijective, on dira que c'est un *isomorphisme de monoïdes* (ou *isomorphisme*) et que M, N sont *isomorphes* (dénnoté $M \cong N$). On définit le *noyau* de ϕ , dénoté $\ker \phi$, ainsi :

$$\ker \phi = \{m \in M : \phi(m) = 1_N\}.$$

Définition 2.9. Soient $m_1, m_2 \in M$. Une *congruence sur M* est une relation d'équivalence « $\equiv$ » faisant en sorte que si $m_1 \equiv m_2$, alors $am_1b \equiv am_2b, \forall a, b \in M$.

Soient $[m_1]_{\equiv}, [m_2]_{\equiv}$ les classes d'équivalences contenant respectivement m_1 et m_2 de par la congruence $\equiv$. On peut vérifier que, si M muni d'une congruence (noté $M/\equiv$) a pour opération binaire

$$[m_1]_{\equiv} \cdot [m_2]_{\equiv} = [m_1 \cdot m_2]_{\equiv},$$

alors l'ensemble des classes d'équivalences de M est un monoïde. L'associativité et l'élément neutre de ce monoïde découlent directement des propriétés de M . On peut vérifier la bonne définition de la multiplication. Soient a, b dans

la même classe d'équivalence que m_1 . On a que si $a \equiv b$, alors $am_2 \equiv bm_2$. Donc, $[am_2]_{\equiv} = [bm_2]_{\equiv}$ et on a bien que $[a]_{\equiv} \cdot [m_2]_{\equiv} = [b]_{\equiv} \cdot [m_2]_{\equiv}$.

La projection $\pi : M \rightarrow M/ \equiv$ définie pour tout $m \in M$ par $\pi(m) = [m]_{\equiv}$ est un homomorphisme surjectif. D'une façon similaire au premier théorème d'isomorphisme pour les groupes, les anneaux ou les modules, ce résultat pour la projection π nous permet de déduire que pour tout homomorphisme $\phi : M \rightarrow N$, on aura que $\phi(M) \cong N/ \equiv$ dans le cas où $m_1 \equiv m_2$ si $\phi(m_1) = \phi(m_2)$.

Définition 2.10. Soit $A \subseteq M$. On dénote le sous-monoïde engendré par A par $\langle A \rangle$. On définit le sous-demi-groupe engendré par A d'une façon similaire.

Définition 2.11. Soient D_1, D_2 deux demi-groupes. Le produit direct de D_1 et D_2 , noté $D_1 \times D_2$, est un demi-groupe lorsque muni de l'opération binaire « $\cdot$ » définie de la manière suivante, $\forall (d_1, d_2), (d_3, d_4) \in D_1 \times D_2$:

$$(d_1, d_2) \cdot (d_3, d_4) = (d_1d_3, d_2d_4)$$

Le produit direct de deux monoïdes M_1 et M_2 est un monoïde compte tenu du fait que les propriétés des monoïdes M_1, M_2 sont conservées coordonnée par coordonnée et que $(1_{M_1}, 1_{M_2})$ est l'élément neutre du produit direct.

Définition 2.12. On dit qu'un élément $e \in D$ est un *idempotent* si $e = e \cdot e$. Pour un sous-ensemble X de D , on dénote l'ensemble des idempotents contenus dans X par $E(X)$.

Clairement, $1_M \in E(M)$ pour tout monoïde M . Supposons également que D soit un sous-demi-groupe inclus dans un monoïde M . Alors, si $e \in E(D)$, on aura que eDe est un sous-monoïde de M ayant e pour élément

neutre. Ceci se vérifie en considérant que tout élément dans eDe a la forme ede pour un certain $d \in D$ et en observant que $e \cdot ede = ede \cdot e = ede$.

Définition 2.13. Soit D un demi-groupe et $e \in E(D)$. On dénote l'ensemble des unités de eDe par G_e . Ce groupe est appelé *le sous-groupe maximal de D en e* .

Remarque 2.14. Si M est un monoïde, alors $1_M \cdot M \cdot 1_M = M$ et G_{1_M} est son groupe des unités. De plus, on peut vérifier que si $\phi : M \rightarrow N$ est un homomorphisme et que $e \in E(M)$, on aura que $\phi(e) = \phi(e \cdot e) = \phi(e) \cdot \phi(e)$. Ceci implique qu'un homomorphisme associe des idempotents à d'autres idempotents.

Définition 2.15. Soit D un demi-groupe et $e \in E(D)$. On dénote *le complément du sous-groupe maximal des unités dans eDe* par I_e . Autrement dit, $I_e = eDe \setminus G_e$.

Définition 2.16. Soit D un demi-groupe. On définit un *ordre partiel naturel* sur $E(D)$: soient $e, f \in E(D)$, alors $e \leq f \iff eDe \subseteq fDf$.

D'une façon équivalente, cela revient à dire que $e \leq f$ si et seulement si $ef = fe = e$. Si $ef = fe = e$, alors $eDe = (fe)D(e) = f(eDe)f \subseteq fDf$. Supposons que $eDe \subseteq fDf$. Alors, $e \cdot 1_M \cdot e = e = fdf$ pour un certain $d \in D$. Or, $f \cdot e = f \cdot fdf = fdf \cdot f = e \cdot f = e$.

2.1.2 Demi-groupes cycliques

Puisque nous nous intéressons à des demi-groupes *finis*, il est certain que pour tout $d \in D$, $\exists i, p \in \mathbb{N}$ tels que $d^i = d^{i+p}$. Autrement, le demi-groupe aurait une infinité d'éléments. On nommera le plus petit i respectant cette condition *l'index de d* , et on nommera le plus petit p respectant cette condition *la périodicité de d* . En particulier, on aura que $d^i = d^{i+qp}, \forall q \in \mathbb{N}$.

Nous sommes convaincus de l'existence d'un tel i et d'un tel p car, si l'on multiplie un élément d avec lui-même un certain nombre de fois, sa progression devrait se stabiliser en un cycle. Ce cycle devrait alors contenir p éléments, et, si $\langle d \rangle$ n'est pas monogène, les $i - 1$ premiers multiples de d n'en feront pas partie.

Proposition 2.17. *Soit $d \in D$ ayant respectivement pour index et pour périodicité i et p . Alors, $d^k = d^j$ si et seulement si $k = j$ ou si $k \equiv j \pmod p$ dans le cas où $k, j \geq p$.*

Démonstration. « $\Leftarrow$ » Le cas où $k = j$ est évident. Si $k \neq j$, on peut sans perte de généralité supposer que $k < j$. Si $k, j \geq i$, alors $(k - i) \geq 0$ et nécessairement $j = k + qp$ pour un certain $q \in \mathbb{N}$ par hypothèse. Dans ce cas,

$$d^j = d^{k+qp} = d^{k+qp+i-i} = d^{i+(k-i)+qp} = d^{i+(k-i)} = d^k.$$

« $\Rightarrow$ » Supposons que $d^k = d^j$ tels que $k < j$. On aura que $k \geq i$ de par la définition de l'index. Si l'on suppose que $j - k = qp + r$ où $0 \leq r < p$ des entiers naturels, le fait que $d^k = d^j$ fait en sorte que

$$d^{i+r} = d^{i+qp+r} = d^{i+j-k} = d^{i+kp+j-k} = d^j d^{i+kp-k} = d^k d^{i+kp-k} = d^{i+kp} = d^i.$$

Alors, nécessairement $r = 0$ puisque $r \equiv 0 \pmod p$, et $0 \leq r < p$. Il faut donc que $j \equiv k \pmod p$. $\square$

Définition 2.18. Soit $d \in D$ d'index i et de période p . On définit le *sous-demi-groupe cyclique engendré par d* , noté $\langle d \rangle$, ainsi :

$$\langle d \rangle = \{d^n : n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

De par la proposition 2.17, nous avons que la présentation donnée pour $\langle d \rangle = \{d, d^2, d^3, \dots, d^{i+p-1}\}$ ne contient aucun doublon.

Corollaire 2.19. Soit $d \in D$ d'index i et de période p . Alors, le sous-demi-groupe de $\langle d \rangle$ défini par

$$C = \{d^n : n \geq i\}$$

est un sous-groupe cyclique d'ordre p . L'élément neutre de C , dénoté d^ω , est l'unique idempotent dans $\langle d \rangle$ et est donné par d^m où $m \geq i$ et $m \equiv 0 \pmod p$. Si $d^{\omega+1} = d^\omega d$, alors $C = \langle d^{\omega+1} \rangle$.

Démonstration. L'associativité et l'opération induites sur C par $\langle d \rangle$ rendent C un sous-demi-groupe. Posons l'application $\phi : C \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ définie par $\phi(d^n) = n + p\mathbb{Z}$. Puisque $n \geq i$, nous aurons que ϕ est injective et bien définie de par la proposition 2.17. La surjectivité est explicite en constatant que $n + p\mathbb{Z} = \phi(d^{n+ip})$ pour $n \geq 0$. ϕ est un homomorphisme puisque, pour $i \leq n_1, n_2 \leq p$ et $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \phi(d^{n_1+q_1p} \cdot d^{n_2+q_2p}) &= \phi(d^{(n_1+n_2)+(q_1+q_2)p}) \\ &= n_1 + n_2 + p\mathbb{Z} \\ &= (n_1 + p\mathbb{Z}) + (n_2 + p\mathbb{Z}) \\ &= \phi(d^{n_1+q_1p}) + \phi(d^{n_2+q_2p}) \end{aligned}$$

faisant en sorte que ϕ est un isomorphisme de demi-groupe. C est donc cyclique, d'ordre p , et a pour élément neutre d^m pour lequel $m \equiv 0 \pmod p$. Concernant l'unicité de d^ω en tant qu'idempotent dans $\langle d \rangle$, supposons que $d^k \in E(\langle d \rangle)$. Alors, $d^{2k} = d^{k+k} = d^k$. Il faut donc que $k \geq i$ de par la minimalité de l'index. Le fait que C soit un groupe fait en sorte qu'un seul élément peut être un idempotent : $d^\omega = d^k$. Puisque $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$, et puisque $m \equiv 0 \pmod p$, il est clair (par isomorphisme) que $C = \langle d^{m+1} \rangle$. $\square$

Remarque 2.20. $\langle d \rangle$ est un groupe si et seulement si $d^{\omega+1} = d$. De plus, si i et p sont l'index et la période de $d \in D$ tels que $|D| = n$, alors, inévitablement, $n \geq i, n \geq p$. Il faut donc que $n! \geq i$ et que $n! \equiv 0 \pmod p$. Pour cette raison, et de par le corollaire 2.19, on a que $d^{n!} = d^\omega, \forall d \in D$.

Le corollaire suivant démontre que les idempotents sont indissociables de la structure des demi-groupes (et donc des monoïdes) finis.

Corollaire 2.21. *Tout demi-groupe non-vidé et fini contient un idempotent.*

Démonstration. Si D est un demi-groupe non-vidé et fini, et si $d \in D$, alors $\langle d \rangle \subseteq D$ contient un idempotent de par le corollaire 2.19. $\square$

Le lemme suivant sera employé ultérieurement dans des démonstrations. Il démontre que les éléments d'un monoïde de cardinalité n , exprimés à partir d'un produit de n facteurs, peuvent être exprimés simplement à partir de trois facteurs (dont le deuxième est un idempotent).

Lemme 2.22. *Soit D un demi-groupe de cardinalité $n > 0$. Alors, $D^n = DE(D)D$. D'une façon équivalente, $d \in D^n$ si et seulement si $d = uev$ pour $u, v \in D$ et $e \in E(D)$.*

Démonstration. Commençons par montrer l'équivalence des deux énoncés. Si on a que $D^n = DE(D)D$, il est explicite que $\forall d \in D^n$, on aura que $d = uev$ tels que décrits. Supposons que $\forall d \in D^n, d = uev$ tels que décrits. Alors, $D^n \subseteq DE(D)D$. Puisque $E(D) \subseteq D$, on a que $DE(D)D \subseteq D(E(D))^{n-2}D \subseteq D^n$. Alors, par double inclusion, $D^n = DE(D)D$.

Nous n'avons pas besoin de montrer que $DE(D)D \subseteq D^n$ en se référant au dernier paragraphe. Soit $d = d_1 d_2 \dots d_n \in D^n$ où $d_i \in D, \forall i$. Considérons l'ensemble

$$K = \{d_1, d_1 d_2, d_1 d_2 d_3, \dots, \prod_{i=1}^n d_i\}.$$

Si les éléments de K sont distincts, le corollaire 2.21 nous permet d'établir qu'il doit y avoir un idempotent contenu dans D . Alors, si les éléments de K sont tous distincts, alors, ils constituent les n éléments de D et, en particulier, $\exists j$ tel que $1 \leq j \leq n$ faisant en sorte que $\prod_{k=1}^j d_k = e$. Dans ce cas, $d = (\prod_{k=1}^j d_k) \cdot e \cdot (\prod_{k=j+1}^n d_k) \in DE(D)D$. Si les éléments de K ne

sont pas tous distincts, alors $\exists k, j$ tels que $k < j$ et pour lesquels

$$d_1 d_2 \dots d_k = d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots d_j = d_1 d_2 \dots d_k (d_{k+1} \dots d_j)^m, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Puisque, de par le corollaire 2.21, $(d_{k+1} \dots d_j)^\omega = e \in E(D)$ pour un certain $\omega \in \mathbb{N}$, on conclut que $d = (\prod_{i=1}^k d_i) \cdot e \cdot (\prod_{i=k+1}^n d_i) \in DE(D)D$. $\square$

Lemme 2.23. *Soit $\phi : D \rightarrow T$ un homomorphisme surjectif de demi-groupes finis. Alors, $\phi(E(D)) = E(T)$.*

Démonstration. Avec la remarque 2.14, nous sommes convaincus qu'un homomorphisme $\phi : D \rightarrow T$ associe les idempotents de D à des idempotents de T . Il est donc évident que $\phi(E(D)) \subseteq E(T)$. Puisque ϕ est surjective, $\forall e \in E(T) \exists \lambda \in D$ tel que $\phi(\lambda_e) = e$. Or, $\phi(\lambda^m) = e, \forall m \in \mathbb{N}$ et $\langle \lambda_e \rangle \subseteq D$ est un sous-demi-groupe qui contient un idempotent e_λ de par les résultats précédents. On a donc bien que $\phi(e_\lambda) = e$, établissant que $\phi(E(D)) = E(T)$. $\square$

2.1.3 Idéaux et relations de Green

Afin de mieux comprendre la structure d'un demi-groupe, on va sélectionner un de ses sous-ensembles et lui appliquer, par multiplication, des éléments d'un autre de ses sous-ensembles. On s'intéresse particulièrement aux sous-ensembles pour lesquels la multiplication de ses éléments ne les transforme pas en des éléments du monoïde qui leur sont étrangers.

Définition 2.24. Soit M un monoïde fini. On dit qu'un sous-ensemble I de M est un *idéal à gauche* (respectivement un *idéal à droite*) si $MI \subseteq I$ (respectivement $IM \subseteq I$). Si I est un idéal à gauche et un idéal à droite ($MIM \subseteq I$), on dit que I est un *idéal*.

Remarque 2.25. De par la définition des idéaux, si I_1 et I_2 sont des idéaux d'un monoïde M , alors $I_1 I_2$ est un idéal de M également qui est à la fois inclus dans I_1 et I_2 . Donc, si $\{I_i\}_{i=1}^n$ est une collection de tous les idéaux distincts contenus dans M , il existe un unique idéal minimal $\prod_{i=1}^n I_i$ qui soit contenu dans tous les autres. Nous avons également que $I_1 \cup I_2$ est un idéal de M qui contient I_1 et I_2 .

Définition 2.26. Soit M un monoïde fini et $m \in M$. On définit les ensembles MmM , Mm et mM comme étant, respectivement, l'*idéal principal*, l'*idéal principal à gauche* et l'*idéal principal à droite* qui sont générés par m . On définit

$$I(m) = \{s \in M : m \notin MsM\}$$

comme étant l'ensemble des générateurs d'idéaux principaux dans lesquels m ne se retrouve pas (ou, d'une manière analogue, comme étant l'ensemble des éléments ne pouvant pas être facteurs de m).

Remarque 2.27. On peut déduire que si $I(m) \neq \emptyset$, alors $I(m)$ est un idéal. On s'en convainc en posant que si $s \in I(m)$, alors $M(MsM)M = (MM)s(MM) \subseteq MsM$ et donc $m \notin M(MsM)M$. On a donc que $MsM \subseteq I(m)$. Autrement, si $I(m) = \emptyset$, m est inclus dans tous les idéaux principaux et doit donc être inclus dans l'idéal minimal du monoïde : tout élément peut, à partir d'une certaine expression, être un facteur de m .

Les trois classes d'équivalences que nous définirons immédiatement seront cruciales tout au long du reste de notre exposé. Elles permettent de regrouper par classe d'équivalence les éléments du demi-groupe qui engendrent respectivement les mêmes idéaux principaux, idéaux principaux à gauche et idéaux principaux à droite.

Définition 2.28. Entre deux éléments m_1, m_2 d'un demi-groupe, l'on définit les trois *relations de Green* suivantes.

$$(1) \quad m_1 \equiv_{\mathcal{J}} m_2 \iff Mm_1M = Mm_2M,$$

$$(2) \quad m_1 \equiv_{\mathcal{L}} m_2 \iff Mm_1 = Mm_2,$$

$$(3) \quad m_1 \equiv_{\mathcal{R}} m_2 \iff m_1M = m_2M.$$

On dira que m_1 et m_2 sont dans la même *classe- $\mathcal{K}$* si $m_1 \equiv_{\mathcal{K}} m_2$ pour $\mathcal{K} \in \{\mathcal{J}, \mathcal{L}, \mathcal{R}\}$. On dénote la classe- $\mathcal{J}$ contenant $m \in M$ par J_m , la classe- $\mathcal{L}$ contenant m par L_m , et finalement la classe- $\mathcal{R}$ contenant m par R_m . On peut également démontrer que, d'une façon équivalente,

$$(a) \quad m_1 \equiv_{\mathcal{J}} m_2 \iff \exists a, b, c, d \in M \text{ tels que } m_1 = am_2b \text{ et } m_2 = cm_1d,$$

$$(b) \quad m_1 \equiv_{\mathcal{L}} m_2 \iff \exists a, b \in M \text{ tels que } m_1 = am_2 \text{ et } m_2 = cm_1,$$

$$(c) \quad m_1 \equiv_{\mathcal{R}} m_2 \iff \exists c, d \in M \text{ tels que } m_1 = m_2b \text{ et } m_2 = m_1d.$$

On démontre l'équivalence pour $(b) \iff (2)$, puisque les démonstrations pour $(a) \iff (1)$ et $(c) \iff (3)$ sont analogues. Supposons que $Mm_1 = Mm_2$. Puisque $1 \in M, \exists a, b \in M$ tels que $m_1 = am_2$ et $m_2 = bm_1$. Réciproquement, s'il existe $a, b \in M$ tels que $m_1 = am_2$ et $m_2 = bm_1$, alors $Mm_1 = (Ma)m_2 \subseteq Mm_2$ et $Mm_2 = (Mb)m_2 \subseteq Mm_1$. Donc, $Mm_1 = Mm_2$.

Les relations de Green sont préservées lorsqu'on restreint l'étude d'un demi-groupe D à un de ses sous-demi-groupes de forme eDe où e est un idempotent.

Lemme 2.29. *Soit $e \in E(M)$ et soient $m_1, m_2 \in eMe$. Alors, si $\mathcal{K} \in \{\mathcal{J}, \mathcal{L}, \mathcal{R}\}$,*

$$m_1 \equiv_{\mathcal{K}} m_2 \text{ dans } M \iff m_1 \equiv_{\mathcal{K}} m_2 \text{ dans } eMe$$

Démonstration. On le démontre pour le cas où $\mathcal{K} = \mathcal{J}$. Les deux autres classes ont des démonstrations analogues.

« $\Leftarrow$ » Supposons que $m_1 \equiv_{\mathcal{J}} m_2$ dans eMe . Alors, nécessairement $em_1 = m_1e = m_1$ et $em_2 = m_2e = m_2$ de par la construction des éléments de eMe . En particulier, $(eee)m_1(eee) = m_1$ et $(eee)m_2(eee) = m_2$. Donc, si $(eMe)m_1(eMe) = (eMe)m_2(eMe)$, il existe $a, b, c, d \in M$ tels que $m_1 = (eae)m_2(ebe)$ et $m_2 = (ece)m_1(edc)$. Puisque eae, ebe, ece et ede sont des éléments de M , ceci revient à dire que $Mm_1M = Mm_2M$.

« $\Rightarrow$ » Supposons que $m_1 \equiv_{\mathcal{J}} m_2$ dans M et que $m_1, m_2 \in eMe$, alors $Mm_1M = Mm_2M$ et l'on obtient par calcul direct

$$\begin{aligned} (eMe)m_1(eMe) &= eM(em_1e)Me = e(Mm_1M)e = e(Mm_2M)e \\ &= (eMe)m_2(eMe). \end{aligned} \quad \square$$

De la même façon que l'on peut définir une action de groupe sur un ensemble, on définit une action de monoïde sur un ensemble.

Définition 2.30. Soit M un monoïde. Un M -ensemble à gauche est un ensemble X muni d'une application $M \times X \rightarrow X$ définie par $(m, x) \rightarrow mx$ nommée *action à gauche* respectant, $\forall x \in X$ et $\forall m_1, m_2 \in M$, les deux caractéristiques suivantes :

- (i) $1x = x$,
- (ii) $m_1(m_2x) = (m_1m_2)x$.

On définit les M -ensembles à droite d'une façon analogue ou à partir de M^{opp} -ensembles à gauche. On dit qu'un M -ensemble est *fidèle* si, $\forall x \in X$ et pour $m_1, m_2 \in M$, l'égalité $m_1x = m_2x$ implique que $m_1 = m_2$. Si X et Y sont des M -ensembles. On dira qu'une application $\phi : X \rightarrow Y$ est M -équivalente si $\phi(mx) = m\phi(x)$, $\forall x \in X$. Si un tel ϕ est bijectif, on dira que ϕ est un M -isomorphisme d'ensembles et que X et Y sont *isomorphes* (noté $X \cong Y$). On note l'ensemble de toutes les applications M -équivalentes, entre deux M -ensembles X et Y , par $\text{Hom}_M(X, Y)$.

Pour un monoïde M , on comprend bien comment représenter les homomorphismes de $\text{Hom}_M(Me, X)$.

Proposition 2.31. *Soit $e \in E(M)$ et X un M -ensemble. Il existe une bijection entre $\text{Hom}_M(Me, X)$ et eX à partir de l'association $\phi \rightarrow \phi(e)$.*

Démonstration. Soient $m \in Me$ et $\phi : Me \rightarrow X$ où ϕ est M -équivariant. Alors, $m = me$ de par la construction des éléments de Me et $\phi(m) = \phi(me) = m\phi(e)$. En particulier, $\phi(e) = \phi(ee) = e\phi(e) \in eX$. On en déduit que ϕ est entièrement définie par l'image $\phi(e)$ qui est elle-même incluse dans eX .

Il reste à montrer que $\forall x \in eX, \exists \phi$ équivariant tel que $\phi(e) = x$. Puisque $x \in eX, \exists y \in X$ tel que $x = ey$. Soit $\phi : Me \rightarrow X$ définie par $\phi(m) = mx$. Alors, $\phi(m'm) = (m'm)x = m'(mx) = m'\phi(m)$ pour $m' \in M$ et $m \in Me$. ϕ est donc bien M -équivariant. De plus, $\phi(e) = ex = eey = ey = x$. $\square$

La proposition 2.31 nous aide donc à comprendre quels sont, pour Me , ses M -endomorphismes. Le corollaire suivant nous permet de les étiqueter aux éléments de $(eMe)^{opp}$.

Corollaire 2.32. $\text{End}_M(Me) \cong (eMe)^{opp}$ et $\text{Aut}_M(Me) \cong G_e^{opp}$.

Démonstration. À partir de la proposition 2.31, on pose $X = Me$ et l'on obtient l'égalité $\text{Hom}_M(Me, X) = \text{End}_M(Me)$ par définition des endomorphismes. De plus, la même proposition nous expose une bijection entre $\text{Hom}_M(Me, X)$ et $eX = eMe$. Prenons $\phi, \psi \in \text{End}_M(Me)$. Nous avons que $\phi(e) \in eMe \subseteq M$. Alors, puisque ψ est M -équivariant,

$$\psi(\phi(e)) = \psi(\phi(e)e) = \phi(e)\psi(e).$$

L'application $\text{End}_M(Me) \rightarrow (eMe)^{opp}$ définie par $\alpha \rightarrow \alpha(e)$ est donc un isomorphisme : $\text{End}_M(Me) \cong (eMe)^{opp}$. Finalement, puisque seules les unités

de eMe peuvent être ramenées vers $e = 1_{eMe}$ par multiplication, il est clair que les endomorphismes inversibles de la forme $Me \rightarrow Me$ (bref, les automorphismes) sont en bijection avec les unités de eMe de par l'isomorphisme $\text{End}_M(Me) \cong (eMe)^{opp}$. Autrement dit, $\text{Aut}_M(Me) \cong G_e^{opp}$. $\square$

On peut résumer l'importance du corollaire 2.32 ainsi : pour un certain idempotent $e \in E(M)$ fixé, on a que G_e agit à droite sur L_e (la classe- $\mathcal{L}$ contenant e). La proposition suivante nous permet d'ajouter que l'action de G_e sur L_e est libre (donc, que le stabilisateur de chaque élément de L_e est trivial).

Proposition 2.33. Soit $e \in E(M)$. Alors, G_e agit librement par multiplication à droite sur L_e et à gauche sur R_e .

Démonstration. En premier lieu, on démontre que l'action à droite de G_e sur L_e est libre. La démonstration permettant de se convaincre que G_e agit librement à gauche sur R_e est analogue. Supposons que $m \in L_e$ et $g \in G_e$. De par la construction des éléments de G_e , $ge = e$. Donc, $mge = mg$ et on déduit que $Mmg = (Mmg)e \subseteq Me$. Si $m \in L_e$, alors $Mm = Me$ et on a $ym = e$ pour un certain $y \in M$. Alors, $g^{-1}ymg = g^{-1}eg = e$ et on déduit que $Me = (Mg^{-1}y)mg \subseteq Mmg$. Il faut donc que $Mmg = Me$, ce qui implique que $mg \in L_e$. Nous venons de démontrer que G_e agit à droite sur L_e .

Il nous reste à démontrer que l'action est libre. Supposons que $g \in \text{Stab}(m)$ et que $mg = m$ pour un certain $m \in L_e$. Dans ce cas, puisque $e = ym$ pour un certain $y \in M$, nous avons $g = eg = ymg = ym = e$. Alors, $\text{Stab}(m)$ est trivial et l'action est libre. $\square$

Il en résulte ainsi le théorème suivant permettant de mettre en relief la structure intrinsèque d'un demi-groupe à partir de ses classes de Green.

Théorème 2.34. Soient $e, f \in E(M)$. Les énoncés suivants sont équivalents.

(i) $Me \cong Mf$ en tant que M -ensembles à gauche,

(ii) $eM \cong fM$ en tant que M -ensembles à droite,

(iii) $\exists a, b \in M$ tels que $ab = e$ et $ba = f$,

(iv) $\exists x, x' \in M$ tels que $xx'x = x$, que $x'xx' = x'$, que $x'x = e$ et que $xx' = f$,

(v) $MeM = MfM$.

Démonstration. Les équivalences impliquant (ii) sont analogues à celles impliquant (i).

« (i) $\implies$ (iv) » Supposons que $Me \cong Mf$ et que $\phi : Me \rightarrow Mf$ soit l'isomorphisme associé. Posons $\phi(e) = x' \in eMf$ et $\phi^{-1}(f) = x \in fMe$ en se référant au résultat de la proposition 2.31. Alors,

$$x'x = x'\phi^{-1}(f) = \phi^{-1}(x'f) = \phi^{-1}(x') = \phi^{-1}(\phi(e)) = e$$

et

$$xx' = x\phi(e) = \phi(xe) = \phi(x) = \phi(\phi^{-1}(f)) = f.$$

De plus, $x'xx' = ex' = x'$ et $xx'x = fx = x$ puisque $x \in fMe$ et $x' \in eMf$.

« (iv) $\implies$ (iii) » En posant $a = x'$ et $b = x$, c'est démontré.

« (iii) $\implies$ (i) » Si $m \in Me$, alors $ma = mea = maba = maf$ et $ma \in Mf$. Construisons les applications $\phi : Me \rightarrow Mf$ et $\psi : Mf \rightarrow Me$ qui sont M -équivariantes par construction en les définissant par

$$\phi(m) = \phi(me) = m\phi(e) = ma$$

et

$$\psi(m) = \psi(mf) = m\psi(f) = mb.$$

Ainsi, $\psi(\phi(m)) = \psi(ma) = mab = me = m$ si $m \in Me$ et $\phi(\psi(m)) = \phi(mb) = mba = mf = m$ si $m \in Mf$. On a donc que $\psi = \phi^{-1}$ et $Me \cong Mf$ en tant que M -ensembles à gauche.

« (iii) $\implies$ (v) » Puisque $e = ab$ et $f = ba$, alors

$$\begin{aligned} MeM &= MeeM = (Ma)ba(bM) \\ &\subseteq MfM = MffM = (Mb)ab(aM) \\ &\subseteq MeM. \end{aligned}$$

On en déduit que $MeM = MfM$.

« (v) $\implies$ (i) » Si $MeM = MfM$, alors $f = xey$ pour $x, y \in M$. En particulier, $f = ff = xeyf$. Donc, $Mf = Mff = (Mx)eyf \subseteq (Mey)f \subseteq Mf$ et l'on déduit que $Mf = Meyf$. De par la propositions 2.31, il existe une unique application M -équivalente $\phi : Me \rightarrow Mf$ telle que $\phi(e) = eyf \in e(Mf)$. Donc, $\phi(Me) = M\phi(e) = Meyf = Mf$ et on déduit que ϕ est surjective. Avec un raisonnement similaire, on pose que $e = x'fy'$ pour $x', y' \in M$, une application M -équivalente $\psi : Mf \rightarrow Me$ définie par $\psi(f) = fy'e$ nous donnant que $\psi(Mf) = M\psi(f) = (Mfy')e = Me$. On a donc que $\psi = \phi^{-1}$ et que $Me \cong Mf$ en tant que M -ensembles à gauche. $\square$

En particulier, deux éléments qui sont dans la même $\mathcal{J}$ -classe engendrent des sous-groupes maximaux isomorphes.

Corollaire 2.35. *Soient $e, f \in E(M)$ tels que $MeM = MfM$. Alors, $eMe \cong fMf$ et $G_e \cong G_f$.*

Démonstration. De par le théorème 2.34, si $MeM = MfM$, alors $Me \cong Mf$ en tant que M -ensembles à gauche. Puisque $\text{End}(Me) \cong (eMe)^{opp}$ et $\text{End}(Mf) \cong (fMf)^{opp}$ de par le théorème 2.31, deux monoïdes sont isomorphes si leurs espaces d'endomorphismes sont isomorphes également. Alors, $eMe \cong fMf$. Cet isomorphisme implique que $\text{Aut}(Mf) \cong \text{Aut}(Me)$, et donc que $G_e \cong G_f$ en se référant au corollaire 2.32. $\square$

Le théorème suivant sera ultérieurement employé dans des démonstrations. *Grosso modo*, il établit que si xm est obtenu à partir d'une action à gauche sur m , la $\mathcal{L}$ -classe et la $\mathcal{J}$ -classe contenant m se confondent. On obtient également l'analogue à droite.

Théorème 2.36. (de la stabilité) Soient $m, x \in M$, alors

$$(1) \quad MmM = MxmM \iff Mm = Mxm,$$

$$(2) \quad MmM = MmxM \iff mM = mxM$$

Autrement dit, $J_m \cap Mm = L_m$ et $J_m \cap mM = R_m$.

Démonstration. On démontre (1) et la démonstration de (2) est analogue.

« $\Leftarrow$ » Puisque $Mm = Mxm$, alors $m = m_1xm$. Donc, $MmM = (Mm_1)xm(M) \subseteq MxmM$. Aussi, $(Mx)mM \subseteq MmM$. Ainsi, $MmM = MxmM$.

« $\Rightarrow$ » Si $MmM = MxmM$, alors $m = uxm v$ pour $u, v \in M$. Clairement, $Mxm = (Mx)m \subseteq Mm = (Mu)xmv \subseteq Mxmv$. Alors, $|Mxm| \leq |Mxmv|$. Pourtant, l'application $Mxm \rightarrow Mxmv$ définie par $m \rightarrow mv$ est surjective : $|Mxm| \geq |Mxmv|$. Il faut donc que $|Mxm| = |Mxmv|$. Puisqu'on a l'inclusion $Mxm \subseteq Mm \subseteq Mxmv$, il faut que $Mxm = Mxmv = Mm$. $\square$

En reformulant les résultats du théorème 2.36 de la stabilité, on en déduit que si $xm \in J_m$, alors $xm \in L_m$. Aussi, si $mx \in J_m$, alors $mx \in R_m$. Ceci nous permet de mieux comprendre les classes- $\mathcal{J}$, mais également d'établir un lien entre la classe $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ d'un élément m à partir du théorème suivant.

Corollaire 2.37. Soient $m_1, m_2 \in M$. Les énoncés suivants sont équivalents.

$$(1) \quad Mm_1M = Mm_2M,$$

$$(2) \quad \exists r \in M \text{ tel que } Mm_1 = Mr \text{ et } rM = m_2M,$$

$$(3) \quad \exists s \in M \text{ tel que } m_1M = sM \text{ et } Ms = Mm_2.$$

Démonstration. L'équivalence entre (3) et (1) se démontre d'une façon analogue à celle de (2) et (1).

« (2) $\implies$ (1) » Par hypothèse, on a que $m_1 = xr = xm_2y$ et $m_2 = rx' = y'm_1x'$ pour $x, y, x', y' \in M$. Donc, $Mm_1M = Mm_2M$.

« (1) $\implies$ (2) » Supposons que $m_1 = um_2v$ et $m_2 = xm_1y$ pour $u, v, x, y \in M$. Posons aussi que $r = xm_1$. Donc, $m_1 = um_2v = u(xm_1y)v = uryv$. Ainsi, $Mxm_1M = MrM = Mm_1M$ puisque $Mm_2M = M(xm_1)y \subseteq MrM = (Mx)m_1M \subseteq Mm_1M$ et $Mm_1M = Mm_2M$ par hypothèse. De par le théorème 2.36 de la stabilité,

$$Mxm_1M = Mm_1M \iff M(xm_1) = Mr = Mm_1.$$

À partir de la même notation, $m_2 = (xm_1)y = ry$ et $r = xm_1 = xum_2v$. Puisque $MrM = Mm_2M = MryM$ de par l'inclusion précédente, le théorème 2.36 de la stabilité nous permet de déduire que

$$MryM = MrM \iff m_2M = (ry)M = rM. \quad \square$$

Le théorème 2.36 de la stabilité nous permet également de démontrer que l'ensemble des éléments qui ne sont pas des unités dans un monoïde fini forme un idéal.

Corollaire 2.38. Soit M un monoïde fini ayant G pour groupe d'unités. Alors, $G = J_1$ et M/G est un idéal de M si non-vide.

Démonstration. L'inversibilité des unités dans G , ainsi que le fait que G agît librement sur les classes $\mathcal{L}$ de par la proposition 2.33, oblige à ce que $MgM = M1M, \forall g \in G$. Donc, $G \subseteq J_1$. Supposons que $m \in J_1$. On a que $MmM = M1M = M$ par hypothèse. Puisque $1m = m1 = m$, et combiné au fait que $MmM = M1M = M$, le théorème 2.36 de la stabilité nous permet de déduire que $Mm = mM = M$, et donc que $xm = my = 1$ pour $x, y \in M$. On conclut que m a un inverse à gauche et à droite et ainsi que $m \in G$ en plus du fait que $J_1 \subseteq G$. On a donc démontré que $G = J_1$ et que, puisque $M = M1M$,

$$I(1) = \{m \in M : 1 \notin MmM = M\} = M/J_1 = M/G$$

est un idéal car nous avons précédemment démontré à la remarque 2.27 que $I(m)$ est un idéal de M si non-vidé et $m \in M$ arbitraire. $\square$

On peut étendre ce dernier résultat obtenu pour 1_M à n'importe lequel idempotent inclus dans M . Rappelons que $I_e = eMe \setminus G_e$.

Corollaire 2.39. *Soit $e \in E(M)$. On a que $J_e \cap eMe = G_e$ et que $I_e = eI(e)e$ est un idéal de eMe si non-vidé.*

Démonstration. Le lemme 2.29 nous permet de conclure que les classes de Green de M sont « préservées » en eMe . Donc, $J_e \cap eMe$ est la classe $\mathcal{J}$ contenant e dans eMe . Or, J_e est le groupe des unités G_e dans eMe de par le corollaire 2.38 (en remplaçant e par 1 compte-tenu du fait que $e = 1_{eMe}$). Bref, $J_e \cap eMe = G_e$. Posons $em'e, \in eMe$ et l'ensemble

$$I(e) = \{m \in M : e \notin MmM\}.$$

Si $em''e \in eI(e)e$, on a $(em'e) \cdot (em''e) = e(m'em'')e$. Puisque $M(m'em'')M \subseteq Mm''M$, on a que $e(m'em'')e \in eI(e)e$. Résultat : $eI(e)e$ est un idéal de eMe s'il est non-vidé.

Il nous reste à montrer que $I_e = eI(e)e$. Si $m \in I(e)$, on a que $eme \in eMe$ et que $e \notin MmM$. Alors, m n'est pas une unité de eMe et $eme \notin G_e$. Directement, $eI(e)e \subseteq eMe \setminus G_e = I_e$. Supposons inversement que $m \in I_e = eMe/G_e$, alors $m \notin J_e$ de par le fait que $J_e = G_e$ dans eMe . Aussi, $m = eme$. Or, $m \in MeM$: il faut que $e \notin MmM$ (autrement, nous aurions que $J_e = J_m$). Donc, $m \in I(e)$. Puisque $m = eme, m \in eI(e)e$. On a ainsi démontré que $I_e \subseteq eI(e)e$ et, finalement, que $I_e = eI(e)e$. $\square$

Remarque 2.40. Le corollaire 2.39 nous donne plus d'information sur la structure de l'idéal minimal I d'un monoïde fini. Si $m \in I$, alors $MmM \subseteq I$ (puisque I est un idéal), mais $MmM = I$ par minimalité. Donc, pour tout élément $m \in I$, l'idéal principal MmM doit être le même et I doit être une classe- $\mathcal{J}$. Le prochain corollaire nous permet de mieux comprendre les orbites obtenues de par l'action de G_e sur L_e et R_e .

Corollaire 2.41. *Soit $e \in E(M)$.*

- (1) *$m, n \in L_e$ sont dans la même G_e -orbite à droite si et seulement si $mM = nM$.*
- (2) *Aussi, $m, n \in R_e$ sont dans la même G_e -orbite à gauche si et seulement si $Mm = Mn$.*

Démonstration. On démontre seulement (1) puisque la démonstration de (2) est analogue.

« $\implies$ » Si $mG_e = nG_e$, il existe $g_1, g_2 \in G_e \subseteq M$ tels que $m_1 = m_2g_2$ et $m_2 = m_1g_1$. Alors, $mM = nM$.

« $\impliedby$ » Supposons que $mM = nM$, que $m = nu$ pour $u \in M$ et que $m, n \in L_e$. Alors, $m = m_1e$ et $n = m_2e$ pour $m_1, m_2 \in M$. Donc, et de par la construction des éléments dans L_e , $m = me$ et $n = ne$. Puisque

$m = me = (nu)e = neue$, et puisque $e = km$ pour $k \in M$, on a l'inclusion

$$MeM = (Mk)mM \subseteq MmM = (Mn)eueM \subseteq MeueM \subseteq MeM$$

nous permettant de déduire que $MeueM = MeM$ et que $eue \in J_e$. Or, $eue \in eMe \cap J_e = G_e$ de par le corollaire 2.39. Directement, $m = neue = ng \in nG_e$ pour un certain $g \in G_e$. Aussi, $n = ne = ngg^{-1} = mg^{-1} \in mG_e$. Alors, $mG_e = nG_e$. $\square$

Corollaire 2.42. Si I est l'idéal minimal de M et si $e \in E(I)$, alors $eIe = eMe = G_e$.

Démonstration. De par le fait que I soit un idéal de M et que $e \in I$, on a que $eMe \subseteq I$. Puisque $eMe = e(eMe)e \subseteq eIe \subseteq eMe$, on déduit que $eMe = eIe \subseteq I$. En considérant que $I = J_e$ à partir de la remarque 2.40, on obtient que $G_e = eMe \cap J_e = eIe \cap I = eIe$ de par l'identité $G_e = eMe \cap J_e$ obtenue dans le corollaire 2.41. $\square$

Étudions maintenant les demi-groupes à partir de la façon par laquelle s'emboîtent ses différents idéaux.

Définition 2.43. Posons $I_0 = \{\emptyset\} \subset M$ par convention malgré le fait que ce ne soit pas un idéal de M . Une *série principale d'un monoïde M* est une chaîne d'inclusions d'idéaux (et de l'ensemble vide) ne pouvant pas être raffinée

$$\emptyset = I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_s = M$$

On dira que cette chaîne d'idéaux ne peut pas être raffinée si, $\forall k$, on ne peut pas trouver un idéal I de M tel que $I_{k-1} \subset I \subset I_k$.

On s'intéresse aux séries principales puisque, pour tout k tel que $1 \leq k \leq s$, les différences successives I_k/I_{k-1} sont exactement les classes- $\mathcal{J}$ de M .

Proposition 2.44. Soit $\emptyset = I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_s = M$ une série principale pour un monoïde fini M . Alors, I_k/I_{k-1} est une classe- $\mathcal{J}$ et l'ensemble des classes- $\mathcal{J}$ est en bijection avec l'ensemble de ces différences I_k/I_{k-1} , pour $1 \leq k \leq s$.

Démonstration. On commence par démontrer que I_k/I_{k-1} est une classe- $\mathcal{J}$. Pour deux éléments $m_1, m_2 \in I_k/I_{k-1}$, alors $Mm_1M \cup I_{k-1} = I_k = Mm_2M \cup I_{k-1}$ de par le fait que la série principale ne puisse pas être raffinée. Nécessairement, puisque $m_1, m_1 \notin I_{k-1}$, il faut que $m_1 \in Mm_2M$ et $m_2 \in Mm_1M$. Alors, $Mm_1M = Mm_2M$ et m_1, m_2 sont dans la même classe- $\mathcal{J}$. On a ainsi démontré que $I_k/I_{k-1} \subseteq J_{m_1}$.

Montrons que $J_{m_1} \subseteq I_k/I_{k-1}$. Si $m_1 \in I_k/I_{k-1}$ et $Mm_1M = Mm_2M$, on doit avoir que $m_2 \in I_k/I_{k-1}$ de par le fait que la série principale ne puisse pas être raffinée. Donc, $J_{m_1} \subseteq I_k/I_{k-1}$: on a démontré que $J_{m_1} = I_k/I_{k-1}$.

Il reste à montrer que les classes- $\mathcal{J}$ sont en bijection avec les différents I_k/I_{k-1} . Soit $m \in M$ et $i \in \mathbb{N}$ minimal faisant en sorte que $m \in I_i/I_{i-1} = J_m$. Le choix du i est unique et les I_k/I_{k-1} sont disjoints pour chaque $1 \leq k \leq s$. Puisque m est arbitraire, nous obtenons la bijection voulue. $\square$

2.1.4 La régularité de von Neumann

Une distinction majeure entre les groupes et les demi-groupes concerne l'inversibilité de leurs éléments. Certains demi-groupes ont des éléments dits *réguliers* et cette propriété supplémentaire nous permet de minimiser cette distinction.

Définition 2.45. Soit M un monoïde fini et $m \in M$. On dit que m est *régulier* (au sens de von Neumann) s'il existe $a \in M$ tel que $m = mam$. On

dit qu'un sous-ensemble S de M est *régulier* si tous ses éléments le sont.

Exemple 2.46. Un exemple simple d'éléments réguliers : les unités $g \in G_1$ d'un monoïde (ou d'un groupe quelconque) sont toujours réguliers puisque $g = gg^{-1}g$.

Tout comme les classes de Green, la régularité d'un demi-groupe D est conservée lorsqu'on se restreint à son sous-demi-groupe eDe où e est un de ses idempotents.

Proposition 2.47. *Soient $e \in E(M)$ et $m \in eMe$. Alors, m est régulier dans M si et seulement s'il est régulier dans eMe . Autrement dit, si M est régulier, alors eMe l'est aussi.*

Démonstration. Si $m \in eMe$, alors $m = me = em$ et on a donc que $mMm = m(eMe)m$.

« $\implies$ » Si m est régulier dans M , alors $m = mam = m(eae)m$ pour $a \in M$ et $eae \in eMe$. m est donc régulier dans eMe .

« $\impliedby$ » Si m est régulier dans eMe , on a que $m = m(eae)m = (me)a(em) = mam$ pour un certain $a \in M$. Alors, m est régulier dans M . □

La régularité d'un élément est une caractéristique qui lui confère de jolies propriétés. En particulier, les classes de Green d'un tel élément se rapportent toujours à celles d'un idempotent.

Nous allons dorénavant chercher à définir un monoïde régulier à partir de ses idéaux. Ceci nous permettra de déduire les conditions nécessaires nous permettant de déterminer quand un monoïde est régulier.

Proposition 2.48. *Soit $m \in M$. Les énoncés suivants sont équivalents.*

(i) m est régulier,

(ii) $Mm = Me$ pour un certain $e \in E(M)$,

(iii) $mM = eM$ pour un certain $e \in E(M)$,

(iv) $MmM = MeM$ pour un certain $e \in E(M)$.

Démonstration. « (i) $\implies$ (ii) et (iii) » Si m est régulier dans M , alors $m = mam$ pour $a \in M$. Remarquons alors que $ma = (mam)a = (ma)^2$ et que $am = amam = (am)^2$. Donc, ma et am doivent être des idempotents. Puisque $Mm = (Mm)am \subseteq Mam \subseteq Mm$ et que $mM = ma(mM) \subseteq maM \subseteq Mm$, on a que $Mam = Mm$ et $mM = maM$ pour $am, ma \in E(M)$.

« (ii) $\implies$ (i) » Si $Mm = Me$, alors $m = ae$ et $e = bm$ pour $a, b \in M$. Dans ce cas, $mbm = me = (ae)e = ae = m$. Donc, m est régulier. « (iii) $\implies$ (i) » se démontre d'une façon analogue.

« (ii) $\implies$ (iv) » Puisque $Mm = Me$, alors $m = ae1$ et $e = bm1$ pour $a, b \in M$. Alors, $MmM = MeM$.

« (iv) $\implies$ (i) » Si $MmM = MeM$, le corollaire 2.37 nous permet d'établir l'existence de $r \in M$ tel que $Mm = Mr$ et $rM = eM$. De par l'implication « (iii) $\implies$ (i) », on a que r doit être régulier. Alors, « (i) $\implies$ (ii) » nous permet d'établir que $Mm = Mr = Mf$ pour un certain $f \in E(M)$. Par « (ii) $\implies$ (i) », on a que m est régulier. $\square$

La proposition 2.48 nous permet d'établir qu'une classe- $\mathcal{J}$ contient un idempotent si et seulement si tous les éléments de la classe sont réguliers. Une classe- $\mathcal{J}$ contenant un idempotent est donc nécessairement régulière.

Proposition 2.49. *Soit I un idéal de M . Alors, $I^2 = I$ si et seulement si I est un idéal généré par ses idempotents. Autrement dit, $I^2 = I$ si et seulement si $I = ME(I)M = IE(I)I$.*

Démonstration. Clairement, puisque $I \subseteq M$, on a que $IE(I)I \subseteq ME(I)M$. Aussi, $ME(I) \subseteq I$ et $E(I)M \subseteq I$ puisque I est un idéal. De plus, $E(I) \subseteq E(I)^3$ en considérant que chaque idempotent $e \in E(I)$ s'écrit $e = eee$. Alors

$$ME(I)M \subseteq (ME(I))E(I)(E(I)M) \subseteq IE(I)I.$$

Nous sommes ainsi convaincus que $ME(I)M = IE(I)I$.

« $\Leftarrow$ » Supposons que $m \in I$ et que $I = ME(I)M$. Alors $m = uev$ pour $u, v \in M$. Puisque $m = uev = (ue)(ev)$, on a que $I \subseteq I^2$. De par les propriétés des idéaux, $I^2 \subset I$ et on a donc que $I^2 = I$.

« $\Rightarrow$ » Supposons que $I = I^2$ et que $|I| = n$. Le lemme 2.22 nous permet d'établir que $I^n = IE(I)I$. Puisque $I = I^2$, nécessairement $I = I^n$ et l'on conclut que $I = IE(I)I$. $\square$

Corollaire 2.50. *Si $m \in M$, alors $(MmM)^2 = MmM$ si et seulement si $MmM = MeM$ pour un certain $e \in E(M)$. Autrement dit, $(MmM)^2 = MmM$ si et seulement si m est régulier.*

Démonstration. On pose $I = MmM$ à partir de la proposition 2.49.

« $\Rightarrow$ » Supposons que $I^2 = I$. Puisque I est un idéal, la proposition 2.49 implique que I est généré par ses idempotents. Ceci nous permet d'établir que si $m \in I$, alors $m \in IE(I)I = ME(I)M = I$. On a alors que $ME(MmM)M = MmM$, que $m = uev$ et que $e = amb$ pour $a, b, u, v \in M$. Ainsi, $MeM = MmM$. La proposition 2.48 nous permet de conclure que $MmM = MeM$ est équivalent à dire que m est régulier.

« $\Leftarrow$ » Si m est régulier, alors $MmM = MeM$ pour un certain $e \in E(M)$ à partir de la proposition 2.48. Puisque MmM est généré par un

idempotent, le corollaire 2.49 nous permet d'établir que $(MmM)^2 = MmM$ en posant $I = MmM$. $\square$

En combinant les résultats de la proposition 2.48, proposition 2.49 et du corollaire 2.50, on obtient une jolie propriété pour les monoïdes réguliers.

Corollaire 2.51. *Un monoïde fini M est régulier si et seulement si $I^2 = I$ pour chacun des idéaux $I \subseteq M$.*

Démonstration. « $\Leftarrow$ » La proposition 2.49 nous permet d'établir que si $I^2 = I$, I est engendré par ses idempotents. Si c'est vrai pour chacun des idéaux de M , c'est aussi le cas pour ses idéaux principaux. Pour $m \in M$, on a $I^2 = (MmM)^2 = MmM$ et m doit être régulier de par le corollaire 2.50. Puisque MmM est un idéal pour $m \in M$ arbitraire, il faut que M soit régulier.

« $\Rightarrow$ » Supposons maintenant que M soit régulier et que I soit un idéal de M . Puisque $1 \in M$, on a que $MIM = I$. Également, $I = \{MmM : m \in I\}$. Puisque m est dans M , m est régulier et $(MmM)^2 = MmM, \forall m \in I$ de par le corollaire 2.50. Clairement, $I^2 \subseteq I$ puisque I est un idéal. De plus,

$$I = \{MmM : m \in I\} = \{(MmM)^2 : m \in I\} \subseteq I^2$$

Alors, $I = I^2$. $\square$

Nous obtenons ainsi une caractérisation des monoïdes réguliers à partir de leurs idéaux.

2.1.5 Monoïdes d'inversibles

Si la régularité réduit la distinction entre les groupes et les monoïdes, l'inversibilité d'un monoïde est une caractéristique encore plus forte.

Définition 2.52. Un monoïde M est dit un *monoïde d'inversibles* (ou *monoïde inversif*) si, $\forall m \in M, \exists ! m^* \in M$ faisant en sorte que $mm^*m = m$ et $m^*mm^* = m^*$.

Dans un monoïde d'inversibles, tout élément m peut se rapporter à un idempotent e pouvant être considéré comme étant l'élément neutre d'un sous-groupe maximal contenant m . Comme le démontre le théorème qui suit, la définition précédente revient à dire que tous les éléments $m \in M$ sont réguliers et possèdent une unique présentation de la forme $m = mam$ où $a = m^*$.

Théorème 2.53. M est un monoïde d'inversibles si et seulement si M est régulier et ses idempotents commutent entre eux.

Démonstration. « $\Leftarrow$ » Supposons que M soit régulier et que ses idempotents commutent entre eux. Si $m \in M$, alors $m = mxm$ de par sa régularité et pour un certain $x \in M$. En posant $u = xmx$, on obtient $mum = mxm = m$ et $umu = xmx(mxm)x = x(mxm)x = xmx = u$. Vérifions maintenant l'unicité des inversibles en supposant que $mvm = m$ et que $vmv = v$. Puisque um, vm, mu et mv sont des idempotents, ces éléments commutent entre eux. Nous avons alors que

$$\begin{aligned} u &= umu = (um)(vm)u = v(mu)^2 \\ &= v(mu) = v(mv)(mu) = v(mum)v = vmv \\ &= v \end{aligned}$$

et que les inversibles doivent être deux par deux uniques. Nous avons ainsi montré que M est un monoïde d'inversibles.

« $\Rightarrow$ » Supposons que M soit un monoïde d'inversibles. Puisque $\forall m \in M$, on a que $m = mm^*m$, il est clair que M est régulier. Soient $e, f \in E(M)$ et définissons $x = f(ef)^*e$. On constate que $x^2 = f(ef)^*(ef)(ef)^*e =$

$f(ef)^*e = x$ et que x est un idempotent. Donc, $x^* = x$. Par calcul direct,

$$\begin{aligned} x(ef)x &= f(ef)^*eef f(ef)^*e = f(ef)^*ef(ef)^*e = f(ef)^*e = x \\ (ef)x(ef) &= (ef)f(ef)^*e(ef) = (ef)(ef)^*(ef) = ef \end{aligned}$$

et l'on conclut que $ef = x^* = x$: ef est donc un idempotent. En posant $y = e(fe)^*f$, on trouve d'une manière similaire que $y^2 = y = fe$ et que fe est un idempotent. Alors,

$$\begin{aligned} (ef)(fe)(ef) &= (ef)(ef) = ef \\ (fe)(ef)(fe) &= (fe)(fe) = fe \end{aligned}$$

et l'on déduit que $fe = (ef)^* = ef$ par idempotence, et donc que tous les idempotents commutent entre eux de par le fait que le choix de $e, f \in E(M)$ est arbitraire. $\square$

Le sous-monoïde $E(M)$ d'un monoïde M se comporte très bien lorsque M est un monoïde d'inversibles.

Corollaire 2.54. *Soit M un monoïde d'inversibles. Alors, $E(M)$ est un sous-monoïde commutatif de M .*

Démonstration. Soient $e, f \in E(M)$. Alors, $ef = fe$ de par le théorème 2.53. Puisque $(ef)(ef) = e(fe)f = e(ef)f = ef$, $E(M)$ est fermé sous la multiplication induite par celle de M . $\square$

La commutativité des idempotents dans un monoïde d'inversibles nous permet de déduire le corollaire suivant.

Corollaire 2.55. *Soit M un monoïde d'inversibles et $m, n \in M$. Alors,*

$$(1) \quad (m^*)^* = m,$$

$$(2) \quad mm^*nn^* = nn^*mm^*,$$

$$(3) \quad (mn)^* = n^*m^*,$$

$$(4) \quad \forall e \in E(M), \text{ } mem^* \text{ est un idempotent.}$$

Démonstration. (1) Le fait que $m^* = m^*mm^*$ dans un monoïde d'inversibles rend m l'inverse de m^* .

(2) Puisque mm^* et nn^* sont des idempotents, ils commutent dans le monoïde d'inversibles de par le corollaire 2.54.

(3) Par calcul direct,

$$\begin{aligned} (mn)(n^*m^*)(mn) &= m(nn^*)(m^*m)n = m(m^*m)(nn^*)n \\ &= (mm^*m)(nn^*n) = mn \\ (n^*m^*)(mn)(n^*m^*) &= n^*(m^*m)(nn^*)m^* = n^*(nn^*)(m^*m)m^* \\ &= (n^*nn^*)(m^*mm^*) = n^*m^* \end{aligned}$$

alors $(mn)^* = n^*m^*$.

(4) En employant la commutativité des idempotents donnée par le corollaire 2.54, et le fait que mm^* est un idempotent, on peut calculer directement :

$$\begin{aligned} (mem^*)(mem^*) &= me(m^*m)em^* = m(m^*m)eem^* = (mm^*m)em^* \\ &= mem^*. \end{aligned} \quad \square$$

Les homomorphismes de monoïdes préservent l'inversibilité induite par les éléments de leurs domaines respectifs.

Corollaire 2.56. *Soit M un monoïde d'inversibles et $\phi : M \rightarrow N$ un homomorphisme surjectif. Alors, N est un monoïde d'inversibles.*

Démonstration. Par surjectivité, $\phi(M) = N$. De par la régularité de M , $\forall m \in M, m = mxm$ pour un certain $x \in m$. Donc, $\phi(m) = \phi(mxm) =$

$\phi(m)\phi(x)\phi(m)$ et l'on déduit que N est régulier. Afin de montrer que N est un monoïde d'inversibles, il suffit, de par le théorème 2.53, de montrer qu'il est régulier (ce qui est déjà fait) et que ses idempotents commutent entre eux. Soient $e, f \in E(N)$, alors $\exists x, y \in M$ tels que $\phi(x) = e$ et $\phi(y) = f$. Puisque $xx^*x = x$, on a que $e = \phi(x) = \phi(xx^*x) = \phi(x)\phi(x^*)\phi(x) = e\phi(x^*)e$. On déduit que $e = \phi(x^*)$ de par l'unicité de e^* , et donc que $f = \phi(y^*)$ d'une façon similaire. Or, $ef = \phi(xx^*)\phi(yy^*) = \phi((xx^*)(yy^*)) = \phi((yy^*)(xx^*)) = \phi(yy^*)\phi(xx^*) = fe$ de par la commutativité des idempotents dans M . Les idempotents commutent alors dans N . $\square$

Dans un monoïde régulier M , et pour $e \in E(M)$, le fait que eMe préserve la régularité nous permet de déduire d'une façon analogue que eMe préserve l'inversibilité de ses éléments si M est un monoïde d'inversibles.

Corollaire 2.57. *Soit M est un monoïde d'inversibles. Alors, $\forall e \in E(M)$, on a que eMe est également un monoïde d'inversibles pour lequel*

$$G_e = \{m \in M : m^*m = mm^* = e\}.$$

Démonstration. De par la proposition 2.47, nécessairement eMe sera régulier si M l'est. Puisque les idempotents de eMe sont des idempotents de M , ils commutent entre eux de par le fait que M soit un monoïde d'inversibles (théorème 2.53). On a donc démontré que eMe est un monoïde d'inversibles. Concernant l'égalité à démontrer, on peut ainsi, et sans perte de généralité, poser que $e = 1$ dans eMe compte-tenu que nous sommes maintenant convaincus que eMe est un monoïde d'inversibles ayant e pour élément neutre. Si $g \in G_1$, alors $g^{-1} = g^*$ et $gg^* = 1 = g^*g$. Si $mm^* = 1 = m^*m$, alors $m \in G_1$. Alors, $G_e \subseteq \{m \in M : mm^* = m^*m = e\}$ et l'on conclut que $G_e = \{m \in M : m^*m = mm^* = e\}$. $\square$

Dans un monoïde d'inversibles, on obtient de jolies restrictions concernant les classes engendrées par les relations de Green : chaque classe est étiquetée par un unique idempotent.

Proposition 2.58. Soit M un monoïde (pas nécessairement fini). Alors, M est un monoïde d'inversibles si et seulement si chaque classe- $\mathcal{L}$ et chaque classe- $\mathcal{R}$ contient un unique idempotent.

Démonstration. « $\implies$ » Supposons que M soit un monoïde d'inversibles et $m \in M$. Puisque $m = (mm^*)m = em = m(m^*m) = me$ et que $e = m^*m = mm^*$ pour un certain $e \in E(M)$, on a que $Me = Mm$ et que $eM = mM$. Puisque m est arbitraire, il est clair que chaque classe- $\mathcal{L}$ et chaque classe- $\mathcal{R}$ contient un idempotent. Il reste à vérifier que l'idempotent, dans une même classe, est unique. Supposons que $e, f \in E(M)$ tels que $Mf = Me$. Alors $e = xf$ pour un certain $x \in M$ et la commutativité entre idempotents nous donne $fe = ef = xff = xf = e$. De par l'ordre naturel sur les idempotents de M , on a que $e \leq f$. Or, puisque $f = ye$ pour un certain $y \in M$, un argument similaire nous permet d'établir que $f \leq e$. On doit donc avoir $e = f$ et nous avons ainsi démontré l'unicité de l'idempotent dans une classe- $\mathcal{L}$ ou classe- $\mathcal{R}$ de Green donnée.

« $\impliedby$ » Supposons réciproquement que toutes les classes- $\mathcal{L}$ et toutes les classes- $\mathcal{R}$ contiennent un unique idempotent. Si $\forall m \in M, \exists e, f \in E(M)$ tels que $mM = eM$ et $Mm = Mf$, la proposition 2.48 nous permet de conclure que M est régulier. Chaque classe- $\mathcal{L}$ et chaque classe- $\mathcal{R}$ contient un idempotent unique par hypothèse. Soit $m \in M$ arbitraire, alors $m = mxm$ pour un certain $x \in M$. Posons $u = xmx$. Alors, $mum = (mxm)xm = mxm = m$ et $umu = x(xmx)xmx = x(xmx)x = xmx = u$. On peut vérifier que um et mu sont des idempotents. Supposons qu'il existe v différent de u faisant en sorte que $mvm = m$ et $vmv = v$. On a alors que mv et vm sont des idempotents. Or, $um \equiv_{\mathcal{L}} m \equiv_{\mathcal{L}} vm$ et $mu \equiv_{\mathcal{R}} m \equiv_{\mathcal{R}} mv$.

L'unicité des idempotents dans chacune des classes impose que $vm = um$ et $mv = mu$, ce qui nous donne par calcul direct que

$$u = (um)u = (vm)u = v(mu) = vmv = v.$$

Alors, chaque élément $m \in M$ possède un unique m^* faisant en sorte que $mm^*m = m$ et $m^*mm^* = m^*$: M est donc un monoïde d'inversibles. $\square$

Puisque chaque classe de Green ne contient qu'un unique idempotent, chaque élément d'un monoïde d'inversibles possède un facteur idempotent et s'exprime à partir de celui-ci.

Lemme 2.59. Soit M un monoïde d'inversibles et soient $m, n \in M$. Les énoncés suivants sont équivalents.

- (i) $m = ne$ pour un certain $e \in E(M)$,
- (ii) $m = fn$ pour un certain $f \in E(M)$,
- (iii) $m = nm^*m$,
- (iv) $m = mm^*n$.

Démonstration. « (iii) $\implies$ (i) » Directement, on pose $e = m^*m$. L'implication « (iv) $\implies$ (ii) » se démontre d'une façon similaire.

« (i) $\implies$ (iii) » Si $m = ne$, alors $nm^*m = n(e^*n^*)(ne) = ne(n^*n)e = n(n^*n)ee = (nn^*n)e = ne = m$ en rappelant que n^*n est un idempotent et que les idempotents d'un monoïde d'inversibles commutent entre eux (théorème 2.53). L'implication « (ii) $\implies$ (iv) » se démontre d'une façon analogue.

« (i) $\implies$ (ii) » Supposons que $nn^* = e$. On a que

$$m = ne = nee = ne(n^*n) = (nen^*)n.$$

Aussi, $nen^* \in E(M)$ puisque

$$(nen^*)(nen^*) = ne(n^*n)en^* = n(n^*n)een^* = (nn^*n)en^* = nen^*$$

et en usant du fait que les idempotents commutent entre eux dans un monoïde d'inversibles. L'implication « (ii) $\implies$ (i) » se démontre d'une façon similaire. $\square$

À partir du lemme 2.59, nous sommes en mesure d'induire une relation d'ordre partiel entre les éléments d'un monoïde d'inversibles à partir de celle naturellement établie entre ses idempotents.

Définition 2.60. On définit *l'ordre partiel naturel* entre les éléments d'un monoïde d'inversibles M définie de telle sorte que, pour $m, n \in M$, on ait que $m \leq n$ si $m = ne$ pour un certain $e \in E(M)$.

Une telle relation entre deux éléments m et n peut se vérifier par n'importe lequel des quatre énoncés du lemme 2.59. En particulier, $m = mm^*m$ alors $m \leq m$. Cet ordre partiel conserve l'ordre partiel naturel préétabli entre les idempotents de $E(M)$. La proposition suivante met en lumière certaines propriétés de cet ordre partiel sur un monoïde d'inversibles. En particulier, elle démontre que l'ordre partiel est conservé de par l'association $m \rightarrow m^*$ et de par la multiplication.

Proposition 2.61. *Soit M un monoïde d'inversibles. Alors, $\leq$ est un ordre partiel impliquant les énoncés suivants :*

1. $m \leq n \iff m^* \leq n^*$,
2. si $m \leq n$ et $m' \leq n'$, alors $mm' \leq nn'$.

Démonstration. On commence par montrer que $\leq$ est un ordre partiel. (Réflexivité) $m = (mm^*)m$ et $mm^* \in E(M)$, alors $m \leq m$. (Anti-symétrie) si $m \leq n$ et $n \leq m$, alors $m = nm^*m$ et $n = mn^*n$. Donc, $m = nm^*m =$

$m(n^*n)(m^*m) = m(m^*m)(n^*n) = (mm^*m)(n^*n) = mn^*n = n$. (Transitivité) si $m \leq n$ et $n \leq k$, alors $m = en$ et $n = fk$ pour $e, f \in E(M)$. Donc, $m = (ef)k$ et $ef \in E(M) : m \leq k$.

1. « $\implies$ » Si $m \leq n$, alors $m = en$ et $m^* = n^*e$ pour $e \in E(M)$. En se référant aux quatre énoncés équivalents du lemme 2.59, $m^* \leq n^*$.
« $\impliedby$ » En posant $m = (m^*)^*$ et $n = (n^*)^*$, la démonstration est analogue à celle de « $\implies$ ».
2. Si $m \leq n$ et $m' \leq n'$, alors $m = fn$ et $m' = n'e$ pour $e, f \in E(M)$. Alors, $mm' = (mn')e \leq mn' = f(nn') \leq nn'$. $\square$

La proposition suivante nous permet de déduire que deux éléments d'un monoïde d'inversibles sont dans la même classe de Green si et seulement s'ils se rapportent au même idempotent.

Proposition 2.62. Soient M un monoïde d'inversibles et $m_1, m_2 \in M$. Alors,

- (1) $m_1 \equiv_{\mathcal{L}} m_2 \iff m_1^*m_1 = m_2^*m_2$,
- (2) $m_1 \equiv_{\mathcal{R}} m_2 \iff m_1m_1^* = m_2m_2^*$.

Démonstration. On ne démontre que (1) puisque la démonstration pour (2) est analogue. On rappelle que si $m^*m = e \in E(M)$, alors $e = m^*m \in Mm$ et $m = m(m^*m) = me \in Me$. On rappelle également que chaque classe de Green ne contient qu'un unique idempotent dans un monoïde d'inversibles (proposition 2.58). Il faut donc que $m \equiv_{\mathcal{L}} m^*m$.

« $\impliedby$ » Si $m_1^*m_1 = m_2^*m_2$, alors $Mm_1 = Mm_1^*m_1 = Mm_2^*m_2 = Mm_2$. Alors, $m_1 \equiv_{\mathcal{L}} m_2$.

« $\implies$ » Si $m_1 \equiv_{\mathcal{L}} m_2$, alors $m_1 = xm_2$ et $m_2 = ym_1$ pour $x, y \in M$. Alors, $m_1^*m_1 = (xm_2)^*(xm_2) = [m_2^*(x^*x)]m_2 \leq m_2^*m_2$ en se référant au deuxième point de la proposition 2.61. D'une façon similaire, $m_2^*m_2 = m_1^*(y^*y)m_2 \leq m_1^*m_1$. Par anti-symétrie de la relation d'ordre sur les éléments de M (proposition 2.61), on a que $m_1^*m_1 = m_2^*m_2$. $\square$

La dernière proposition nous permet de mieux comprendre les classes $\mathcal{J}$ d'un monoïde d'inversibles commutatif.

Proposition 2.63. *Soit M un monoïde d'inversibles commutatif. Alors, ses classes $\mathcal{J}$ sont ses sous-groupes maximaux.*

Démonstration. Si $m \in M$, alors $mm^* = m^*m = e \in E(M)$ par commutativité. Il faut donc que $m \in G_e = \{m \in M : m^*m = mm^* = e\}$. La commutativité de M rend les classes $\mathcal{J}, \mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ équivalentes. De par la proposition 2.62, $m_1 \equiv_{\mathcal{J}} m_2 \iff m_1^*m_1 = m_2^*m_2 = e$. Donc, $J_m = G_e$ de par le corollaire 2.57. $\square$

Corollaire 2.64. *Si M est un monoïde d'inversibles commutatif et fini, alors un sous-monoïde N de M est un monoïde d'inversibles.*

Démonstration. Puisque tous les idempotents de N sont des idempotents de M , ils sont commutatifs entre eux. En se référant au théorème 2.53, il ne reste qu'à montrer que N est régulier. Soit $m \in N$. Nous avons montré au corollaire 2.63 que les classes $\mathcal{J}$ de M commutatif sont ses sous-groupes maximaux. Si $|G_e| = n$ et $mm^* = e$, alors $m^{n-1} \in N$ (car la cardinalité du groupe cyclique $\langle m \rangle$ divise $|G|$ et $m^n = e$). Donc, $mm^{n-1}m = m$. On a ainsi démontré que N est régulier. $\square$

Les éléments au sein d'une même classe $\mathcal{J}$ dans un monoïde d'inversibles fini ne sont pas comparables à partir de l'ordre partiel naturel. Dans un sens, si l'ordre naturel établit des degrés de symétries entre les éléments au sein du monoïde, alors les éléments d'une même $\mathcal{J}$ -classe sont du même degré.

Proposition 2.65. *Soit M un monoïde d'inversibles fini et $m, n \in M$ faisant en sorte que $MmM = MnM$ et que $m \leq n$. Alors, $m = n$.*

Démonstration. Puisque $m \leq n$, on a $m = n(m^*m)$. Le théorème 2.36 (de la stabilité) nous permet d'établir que, puisque $MmM = Mn(m^*m)M =$

MnM par hypothèse, on a que $nM = n(m^*m)M = mM$ (en posant $m^*m = x$ pour le x du théorème de stabilité). On a donc que $mm^* = nn^*$ puisque $m \equiv_{\mathcal{R}} n$ et en se référant à la proposition 2.62. Or, si m et n sont comparables, $m = (mm^*)n = (nn^*)n = n$. Un élément d'une classe- $\mathcal{J}$ n'est donc comparable qu'avec lui-même au sein de la même classe- $\mathcal{J}$. $\square$

La proposition suivante établit un lien entre les idempotents associés à des classes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}$ et nous permet de mieux comprendre le produit de deux éléments pris dans ces deux classes.

Proposition 2.66. *Soit M un monoïde d'inversibles et supposons que $m^*m = nn^*$ pour $m, n \in M$. Alors, $(mn)^*mn = n^*n$ et $mn(mn)^* = mm^*$.*

Démonstration. Par calcul direct,

$$\begin{aligned} (mn)^*mn &= n^*(m^*m)n = (n^*nn^*)n = n^*n \\ mn(mn)^* &= m(nn^*)m^* = m(m^*mm^*) = mm^*. \end{aligned} \quad \square$$

En particulier, si l'on se restreint aux éléments ayant le plus « petit degré de symétries » à partir de l'ordre naturel établi, les présentations des éléments de l'énoncé de la proposition 2.66 sont uniques.

Lemme 2.67. *Soit M un monoïde d'inversibles et soient $m, n \in M$. Alors, $\exists! m_0, n_0$ tels que $m_0 \leq m$ et $n_0 \leq n$ faisant en sorte que $m_0n_0 = mn$ et que $m_0^*m_0 = n_0n_0^*$.*

Démonstration. Posons $m_0 = m(nn^*)$ et $n_0 = (m^*m)n$. Puisque $nn^*, m^*m \in E(M)$, on obtient que $n_0 \leq n$ et $m_0 \leq m$. Directement, et en se remémorant de la commutativité entre les idempotents au sein d'un monoïde

d'inversibles (théorème 2.53), l'on calcule directement

$$\begin{aligned} m_0 n_0 &= m(nn^*)(m^*m)n = m(m^*m)(nn^*)n = (mm^*m)(nn^*n) = mn, \\ m_0^* m_0 &= (nn^*m^*)mnn^* = nn^*(m^*m)(nn^*) = (nn^*)^2 m^*m = nn^*m^*m, \\ n_0 n_0^* &= (m^*mn)(n^*m^*m) = (m^*m)(nn^*)m^*m = (nn^*)(m^*m)^2 = nn^*m^*m. \end{aligned}$$

Alors, $m_0 n_0 = mn$ et $m_0^* m_0 = n_0 n_0^*$. On a donc bien démontré l'existence de m_0 et n_0 : il reste à démontrer leur unicité. Supposons qu'il $\exists m_1, n_1$ qui respectent respectivement les mêmes conditions que m_0 et n_0 . Alors, la proposition 2.66 nous permet d'établir que

$$(1) \quad m_1 m_1^* = (m_1 n_1)(m_1 n_1)^* = (mn)(mn)^* = mnn^*m^*,$$

$$(2) \quad n_1^* n_1 = (m_1 n_1)^*(m_1 n_1) = (mn)^*(mn) = n^*m^*mn.$$

Puisque $m_1 \leq m$ et $n_1 \leq n$, on utilise (1) afin d'obtenir

$$\begin{aligned} m_1 &= (m_1 m_1^*)m = (mnn^*m^*)m = m(nn^*)(m^*m) \\ &= m(m^*m)(nn^*) = mnn^* \\ &= m_0 \end{aligned}$$

et on utilise (2) afin de montrer d'une façon analogue que $n_1 = n_0$. On a donc bien montré l'unicité. $\square$

Nous avons ainsi une vue d'ensemble satisfaisante concernant les propriétés élémentaires des monoïdes finis (et, en particulier, d'inversibles).

2.2 L'algèbre festive

Afin de rendre notre étude des monoïdes finis plus concrète, on se munit d'un exemple : celui de *l'algèbre festive*. La présente partie du chapitre est consacrée à sa construction. Cette construction s'inspire explicitement du deuxième chapitre de la référence d' ORELLANA, SALIOLA, SCHILLING et ZABROCKI³.

2.2.1 Notions préalables

Définition 2.68. On définit l'ensemble des vecteurs de partages à k coordonnées et de norme k ainsi :

$$I_k = \{\lambda = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(k)}) : \text{les différents } \lambda^{(i)} \text{ sont des partages tels que } \sum_{i=1}^k i|\lambda^{(i)}| = k\}.$$

Un élément de I_k est dénoté par $\vec{\lambda}$. Par convention, si $\lambda^{(i)}$ est un partage de 0, alors on pose $\lambda^{(i)} = \emptyset$ comme étant le seul partage possible.

Exemple 2.69. Si λ_j est un partage de j , et si $k = 5$, alors la contrainte $\sum_{i=1}^k i|\lambda^{(i)}| = k$ de la définition précédente nous impose que

$$\begin{aligned} &\text{que } (\lambda_5, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset), & \text{que } (\lambda_3, \lambda_1, \emptyset, \emptyset, \emptyset), & \text{que } (\lambda_2, \emptyset, \lambda_1, \emptyset, \emptyset), \\ &\text{que } (\lambda_1, \emptyset, \emptyset, \lambda_1, \emptyset), & \text{et que } (\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \lambda_1) \end{aligned}$$

sont toutes les formes que peuvent prendre les éléments de I_5 . On développe

³ORELLANA, SALIOLA, SCHILLING et ZABROCKI. (2021). Plethysm and the Algebra of Uniform Block Permutations.

alors ces formes afin d'expliciter tous les éléments de I_5 :

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{(\lambda_1, \emptyset, \emptyset, \lambda_1, \emptyset)}{((1), \emptyset, \emptyset, (1), \emptyset)} & & \frac{(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \lambda_1)}{(\emptyset, \dots, (1))} \\
 \\
 \frac{(\lambda_5, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)}{((1, 1, 1, 1, 1), \emptyset, \dots)} & \frac{(\lambda_3, \lambda_1, \emptyset, \emptyset, \emptyset)}{((1, 1, 1), (1), \emptyset, \dots)} & \frac{(\lambda_2, \emptyset, \lambda_1, \emptyset, \emptyset)}{((1, 1), \emptyset, (1), \emptyset, \emptyset)} \\
 ((2, 1, 1, 1), \emptyset, \dots) & ((2, 1), (1), \emptyset, \dots) & ((2), \emptyset, (1), \emptyset, \emptyset) \\
 ((2, 2, 1), \emptyset, \dots) & ((3), (1), \emptyset, \dots) & \\
 ((3, 1, 1), \emptyset, \dots) & & \\
 ((3, 2), \emptyset, \dots) & & \\
 ((4, 1), \emptyset, \dots) & & \\
 ((5), \emptyset, \dots) & &
 \end{array}$$

Définition 2.70. Une *partition* π d'un ensemble X est une collection de sous-ensembles non-vides $\{\pi_1, \dots, \pi_l\}$ deux-à-deux disjoints ($\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$ si $i \neq j$) de telle sorte que leur union soit égale à X ($\cup_{i=1}^l \pi_i = X$). Dans ce cas, on note $\pi \vdash X$. Si $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_l\}$, on dira que les π_i est le i^e *bloc* de π . On note $|\pi_i|$ le nombre d'éléments contenus dans le bloc π_i . Si $X = [k]$ pour $k \in \mathbb{N}$, on note P_k l'ensemble des partitions de $[k]$.

Exemple 2.71. Voici toutes les partitions de $[3]$:

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}; \{\{1, 2\}, \{3\}\}; \{\{1, 3\}, \{2\}\}; \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{1, 2, 3\}\}.$$

Définition 2.72. Supposons que $X = [k]$. Soit $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_l\}$ de telle sorte que $\pi \vdash X$. Entre les blocs de π , on définit l'*ordre du classement par la dernière lettre* de la manière suivante. On dira que $\pi_i \leq \pi_j$ si $|\pi_i| < |\pi_j|$ si leurs cardinalités sont différentes, ou si $\max(\pi_i) < \max(\pi_j)$ si leurs cardinalités sont identiques.

Exemple 2.73. Si $\pi = \{\{2, 6, 8\}, \{9, 12\}, \{10, 11\}, \{4\}, \{7\}, \{1, 3, 5\}\}$ est une partition de $[12]$, alors

$$\{4\} \leq \{7\} \leq \{10, 11\} \leq \{9, 12\} \leq \{1, 3, 5\} \leq \{2, 6, 8\}$$

présente les blocs de π de façon ordonnée selon l'ordre de classement par la dernière lettre. Il sera parfois plus simple d'épurer la notation de π tout en employant l'ordre dans la présentation :

$$\begin{aligned} \pi &= \{\{4\}, \{7\}, \{10, 11\}, \{9, 12\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 6, 8\}\}, \\ &= 4|7|10, 11|9, 12|1, 3, 5|2, 6, 8. \end{aligned}$$

Définition 2.74. Soit $\pi \vdash [k]$, on définit le *type de π* (noté $type(\pi)$) comme étant un partage pour lequel les cardinalités des différents blocs de π possèdent chacune une adresse dans celui-ci.

Exemple 2.75. En se référant à π donné en exemple précédemment,

$$type(\pi) = type(4|7|10, 11|9, 12|1, 3, 5|2, 6, 8) = (3, 3, 2, 2, 1, 1) = (1^2, 2^2, 3^2).$$

Remarque 2.76. Si l'on fixe un certain type de partition $(i^{a_i})_{i=1}^k$, on pourrait s'intéresser au nombre de différentes partitions $\pi \vdash [k]$ qui possèdent ce type. Fixons $type(\pi) = (1^1, 2^2, 3^3)$ qui partitionne $[14]$. Supposons que $\pi = 1|2, 3|4, 5|6, 7, 8|9, 10, 11|12, 13, 14$. Il y a $k! = 14!$ façons de permuter les 14 nombres entre eux. Les répétitions se produisent si l'on permute les blocs de mêmes grandeurs, ou si l'on permute les éléments au sein d'un même bloc. Dans le premier cas, nous avons $1!2!3!$ façons, et dans le deuxième, $(1!)^1(2!)^2(3!)^3$ façons. On aura donc que le nombre de partitions de $[14]$ de type $(1, 2^2, 3^3)$ est égal à $\frac{k!}{(1!2!3!)(1!)^1(2!)^2(3!)^3}$. Plus généralement, si $\pi \vdash k$

est de type $\lambda = (i^{a_1})_{i=1}^k$, on note le nombre de partitions de ce type ainsi :

$$sp_k(\lambda) = \frac{k!}{(\prod_{i=1}^k a_i!)(\prod_{i=1}^k (i!)^{a_i})}.$$

Définition 2.77. Soient $\pi = \{\pi_i\}_i, \gamma = \{\gamma_j\}_j$ deux partitions. On établit un ordre partiel entre les partitions. On dira que π est un *raffinement* de γ , noté $\pi \leq \gamma$, si chaque bloc π_i de π est inclus dans un bloc γ_j de γ . Autrement dit, $\pi \leq \gamma$ si et seulement si $\forall i, \exists j$ tel que $\pi_i \subseteq \gamma_j$. D'une façon équivalente, on dit que γ est *plus grossier* que π et que π est *plus fin* que γ .

Exemple 2.78. Voici un ordre partiel entre des partitions de [5].

$$\begin{aligned} \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\} &\leq \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\} \leq \{\{1, 2, 5\}, \{3, 4\}\} \\ &\leq \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\} \end{aligned}$$

En particulier, la partition la plus fine de $[k]$ est $\bigcup_{i=1}^k \{\{i\}\}$ et la plus grossière est $\{\bigcup_{i=1}^k \{i\}\}$.

Définition 2.79. Soit $P_k = \{\pi : \pi \vdash [k]\}$ et I un index fini. On peut définir une action du groupe symétrique $\mathcal{S}_k$ sur P_k de la manière suivante. Si $\pi = \{\pi_i\}_i$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on définit $\sigma\pi$ comme étant l'application de σ à chacun des éléments contenus dans chacun des blocs π_i . Autrement dit,

$$\sigma\pi = \{\sigma\pi_i\}_{i \in I}$$

où $\sigma\pi_i = \{\sigma(a) : a \in \pi_i\}$.

Exemple 2.80. Si $\sigma = (1, 3)(4, 5)$ en notation cyclique, et si l'on choisit la partition $\pi = \{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}\}$, alors $\sigma\pi = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$.

Remarque 2.81. Clairement, $|\sigma\pi_i| = |\pi_i|$. Alors, l'application de σ sur π n'altère pas son type. Autrement dit, $type(\sigma\pi) = type(\pi), \forall \pi \in P_k$.

2.2.2 Les trois présentations de l'algèbre festive

L'objet principal à l'étude dans ce mémoire est l'ensemble des *permutations entre blocs uniformes d'ordre k* , où $k \in \mathbb{N}$. En anglais, cet ensemble est aussi appelé « party algebra ». *Algèbre festive* (d'ordre k) est donc une francisation que je donne à cet ensemble qui me semble invitante. On la note $\mathcal{U}_k$.

Les éléments de l'algèbre festive peuvent être exprimés à partir de trois présentations :

1. en tant que partitions $\bigcup_i \{\{\pi_i \uplus \bar{\gamma}_i\}\}$ de l'ensemble $[k] \uplus [\bar{k}]$ telles que $|\pi_i| = |\bar{\gamma}_i|, \forall i$ concerné,
2. en tant que bijections ϕ , entre les blocs de deux partitions π, γ préservant leurs cardinalités respectives. Autrement dit, $\phi(\pi_i) = \gamma_j$ et $|\phi(\pi_i)| = |\pi_i|$,
3. à partir de diagrammes à deux lignes (très ludiques).

On emploie la première présentation afin de la définir. Une fois cette définition établie, on associe des bijections à chacune de ces partitions à partir de la deuxième présentation. Ces bijections nous rappelleront celles des permutations du groupe symétrique $\mathcal{S}_k$. La troisième présentation nous permet de nous représenter ces bijections (rendant l'objet un peu plus intuitif). Ultérieurement, nous définirons une opération entre ces éléments et la présentation la plus intuitive nous permettant de la comprendre se fera à partir de celle des diagrammes. Ces trois façons sont cependant interchangeables en ce qui a trait aux démonstrations des résultats qui suivront.

Première présentation Supposons que $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Nous avons déjà défini $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$. Posons une copie distincte de cet ensemble qui sera notée $[\bar{k}] = \{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{k}\}$. On définit une association naturelle $\phi : [k] \rightarrow [\bar{k}]$

entre ces deux ensembles définie par $\phi(a) = \bar{a}$ et de telle sorte que $\phi^2(a) = \phi(\bar{a}) = \bar{\bar{a}} = a$ (donc, l'association est une involution en posant $[k] = \bar{\bar{[k]}}$).

Définition 2.82. Soit $d = \{d_1, d_2, \dots, d_l\}$ une partition de $[k] \uplus [\bar{k}]$. Alors, chacun des d_i s'exprime uniquement de la façon $d_i = \pi_i \uplus \bar{\gamma}_i$ pour lesquels nous avons $\cup_{i=1}^l \pi_i = \pi$ et $\cup_{i=1}^l \bar{\gamma}_i = \bar{\gamma}$ où $\pi \vdash [k]$ et $\bar{\gamma} \vdash [\bar{k}]$. On dit que d est *uniforme* si, $\forall i$, nous avons que $|\pi_i| = |\bar{\gamma}_i|$. Alternativement, cela revient à dire que d est uniforme si $|d_i \cap [k]| = |d_i \cap [\bar{k}]|, \forall i$.

Définition 2.83. On définit l'*algèbre festive* comme étant l'algèbre du monoïde $\mathcal{U}_k$ (pour lequel nous définirons le produit ultérieurement) dont les éléments sont les partitions uniformes de $[k] \uplus [\bar{k}]$. Formellement,

$$\mathcal{U}_k = \{d : d \vdash [k] \uplus [\bar{k}] \text{ et } d \text{ est uniforme}\}.$$

On m'a fait remarquer que le nom *monoïde festif* serait approprié pour le monoïde $\mathcal{U}_k$ afin de le différencier de l'algèbre festive tout en soulignant ce qui rapproche ces deux constructions.

Exemple 2.84. Les partitions de $[2]$ sont $\{\{1\}, \{2\}\}$ et $\{\{1, 2\}\}$. Les partitions de $[\bar{2}]$ sont $\{\{\bar{1}\}, \{\bar{2}\}\}$ et $\{\{\bar{1}, \bar{2}\}\}$. Voici les trois éléments dans $\mathcal{U}_2$:

$$\{\{1, \bar{1}\}, \{2, \bar{2}\}\}; \{\{1, \bar{2}\}, \{2, \bar{1}\}\}; \{\{1, 2, \bar{1}, \bar{2}\}\}.$$

Définition 2.85. Soit $d = \{d_1, d_2, \dots, d_l\} \in \mathcal{U}_k$. Par construction, il existe deux partitions $\pi = \{\pi_1, \dots, \pi_l\}$ et $\bar{\gamma} = \{\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_l\}$ faisant en sorte que $\pi \vdash [k]$, $\bar{\gamma} \vdash [\bar{k}]$ et $d_i = \pi_i \uplus \bar{\gamma}_i$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq l$. On définit alors π comme étant le *haut de* d , noté $d^\uparrow$, et $\bar{\gamma}$ comme étant le *bas de* d , noté $d_\downarrow$.

Exemple 2.86. Illustrons concrètement le haut et le bas d'une partition d :

$$\begin{aligned} d &= \{\{5, \bar{6}\}, \{6, \bar{5}\}, \{3, 4, \bar{7}, \bar{8}\}, \{1, 2, \bar{9}, \bar{10}\}, \{7, 8, 9, 10, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}\}, \\ d^\uparrow &= \{\{5\}, \{6\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{7, 8, 9, 10\}\}, \\ d_\downarrow &= \{\{\bar{5}\}, \{\bar{6}\}, \{\bar{7}, \bar{8}\}, \{\bar{9}, \bar{10}\}, \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}\}. \end{aligned}$$

Deuxième présentation Puisque nous savons généralement mieux manipuler les fonctions que les ensembles, il est assez pragmatique de penser les éléments de $\mathcal{U}_k$ en termes de bijections entre des blocs respectifs de partitions de $[k]$ et $[\bar{k}]$ préservant les cardinalités des blocs par association.

Définition 2.87. Soit $d \in \mathcal{U}_k$ tel que $d = \pi \uplus \bar{\gamma} = \cup_{i=1}^l d_i = \cup_{i=1}^l \{\pi_i \uplus \bar{\gamma}_i\}$. Alors, la *bijection naturelle induite par d* est une application $\phi_d : d^\uparrow \rightarrow d_\downarrow$ définie par $\phi(\pi_i) = \bar{\gamma}_i$.

Remarque 2.88. Une des raisons pour pour lesquelles l'algèbre festive est aussi appelée « uniform block permutations » en anglais est que chacune des bijections ϕ_d peut être exprimée à partir d'une notation à deux lignes (comme les éléments du groupe symétrique qui sont aussi communément appelés « permutations »).

Exemple 2.89. À partir de la notation sur deux lignes

$$\phi_d = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_l \\ \bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \dots & \bar{\gamma}_l \end{pmatrix},$$

et en prenant pour exemple

$$d = \{\{5, \bar{6}\}, \{6, \bar{5}\}, \{3, 4, \bar{7}, \bar{8}\}, \{1, 2, \bar{9}, \bar{10}\}, \{7, 8, 9, 10, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}\},$$

nous obtenons la bijection suivante :

$$\begin{pmatrix} \{5\} & \{6\} & \{1, 2\} & \{3, 4\} & \{7, 8, 9, 10\} \\ \{\bar{6}\} & \{\bar{5}\} & \{\bar{9}, \bar{10}\} & \{\bar{7}, \bar{8}\} & \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.90. Nous avons déduit à la remarque 2.76 que le nombre de différentes partitions de $[k]$, à partir d'un partage $\lambda = (i^{a_i})_{i=1}^k$ fixé, est donné par la formule $sp_k(\lambda)$. Il y a donc $(sp_k(\lambda))^2$ différentes partitions de $[k] \uplus [\bar{k}]$ si l'on se contraint à ce que le haut de la partition dans $[k]$ et le bas de la partition dans $[\bar{k}]$ soient des partitions de même partage λ . Étant donnée une telle partition, combien y a-t-il de différentes façons de connecter les blocs de mêmes tailles? Il y en a $\prod_{i=1}^k (a_i!)$. Nous en déduisons la cardinalité de l'algèbre festive en effectuant la somme sur les différents partages de $[k]$:

$$|\mathcal{U}_k| = \sum_{\lambda=(i^{a_i})_{i=1}^k} [sp_k^2(\lambda) \cdot \prod_{i=1}^k (a_i!)] .$$

Avec cette formule, on peut se donner une idée de la très rapide croissance de $|\mathcal{U}_k|$ au fur et à mesure que k croît. Afin de donner quelques cardinalités, et à partir de la suite A023998 de la « On-line encyclopedia of integer sequences »⁴ :

$$\begin{aligned} & (|\mathcal{U}_0|, |\mathcal{U}_1|, |\mathcal{U}_2|, |\mathcal{U}_3|, |\mathcal{U}_4|, |\mathcal{U}_5|, |\mathcal{U}_6|, |\mathcal{U}_7|) \\ &= (1, 1, 3, 16, 131, 1496, 22482, 426833). \end{aligned}$$

Troisième présentation La plus ludique et la plus intuitive des trois présentations : on va chercher à représenter un élément $d \in \mathcal{U}_k$ à partir d'un graphe. Ce graphe est constitué de deux lignes contenant chacune k sommets. Sur la ligne du haut, on étiquette les sommets par $1, 2, \dots, k$ en partant du sommet le plus à gauche jusqu'au sommet le plus à droite. Sur la ligne du bas, on étiquette les sommets par $\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{k}$ en partant du sommet le plus à gauche jusqu'au sommet le plus à droite. On cherche à représenter $d^\uparrow$ par la ligne du haut et à représenter $d_\downarrow$ par la ligne du bas. Pour ce faire, on impose que les sommets du graphe qui sont dans un même bloc

⁴OEIS Foundation Inc. (2019). The on-line encyclopedia of integer sequences. Lu en ligne le 13 juillet 2022

2.2.3 Une multiplication pour $\mathcal{U}_k$

Définissons l'opération entre les éléments de $\mathcal{U}_k$.

Définition 2.93. Soient $d, d' \in \mathcal{U}_k$ tels que $d = \cup_{i=1}^l d_i = \pi \uplus \bar{\gamma} = \cup_{i=1}^l (\pi_i \uplus \bar{\gamma}_i)$ et $d' = \cup_{i=1}^l d'_i = \pi' \uplus \bar{\gamma}' = \cup_{i=1}^k (\pi'_i \uplus \bar{\gamma}'_i)$. On définit la multiplication dd' de la manière suivante. Posons $A = \{\gamma, \pi'\}$ l'ensemble contenant les blocs de $d_\downarrow$ et de $d'^\uparrow$. On veut définir les blocs propres à A ainsi : on impose que si $\gamma_i \cap \pi'_j \neq \emptyset$, alors $\bar{\gamma}_i$ et π'_j sont dans le même bloc de A . Soit A_k un bloc arbitraire de A . Il existe deux index maximaux I et I' de telle sorte que $\{\pi_i\}_{i \in I}$ soit l'ensemble des blocs de $d^\uparrow$ faisant en sorte que $\cup_{i \in I} \bar{\gamma}_i = A_{k_\downarrow}$ et de telle sorte que $\{\bar{\gamma}'_i\}_{i \in I'}$ soit l'ensemble des blocs de $d'_\downarrow$ faisant en sorte que $\cup_{i \in I'} \pi'_i = A_k^\uparrow$. Alors, le premier bloc de dd' est donné par

$$dd'_1 = (\cup_{i \in I} \pi_i) \uplus (\cup_{i \in I'} \bar{\gamma}'_i).$$

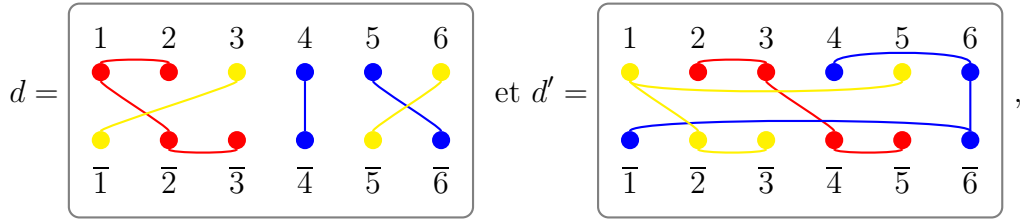
On définit dd'_2 en recommençant le processus effectué sur A_k comme précédemment mais en prenant A_l tel que $A_l \cap A_k = \emptyset$, et ainsi de suite pour chacun des blocs de dd' .

Cette définition, plutôt lourde, est en phase avec la première présentation des éléments de $\mathcal{U}_k$. Une façon de vulgariser cette opération se fait par l'entremise de la troisième présentation en respectant les étapes suivantes :

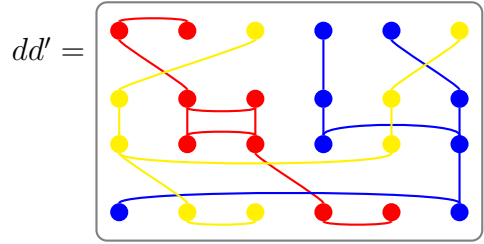
1. superposez le diagramme de d au-dessus de celui de d' de telle sorte que l'élément étiqueté par $\bar{i} \in d_\downarrow$ soit confondu avec celui de $i \in d'^\uparrow$. On obtient alors un diagramme à trois lignes dont seule la deuxième est commune à d et d' ,
2. calculer les composantes connexes résultant de cette superposition,
3. puis, faites disparaître les sommets de la deuxième ligne tout en gardant intactes les composantes connexes entre la première et la

troisième ligne. La première ligne résultante devient $(dd')^\uparrow$ et la troisième ligne résultante devient $(dd')_\downarrow$.

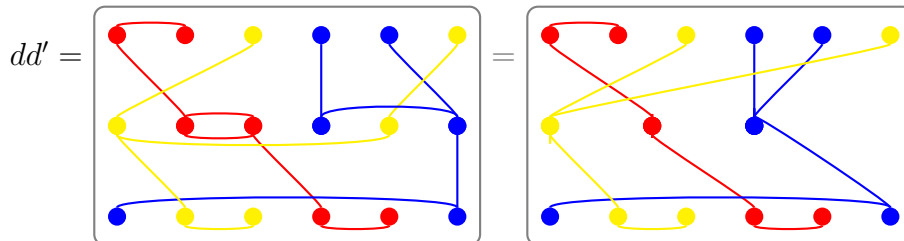
Exemple 2.94. Clarifions la multiplication entre deux graphes d et d' nous permettant d'obtenir dd' . Si

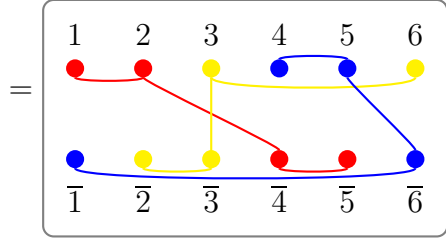


la première étape du calcul du diagramme de dd' consiste à superposer $d_\downarrow$ et $d'^\uparrow$:



À partir des couleurs distinctes, les composantes connexes du diagramme résultant sont explicites. On voit que les points $\{1, 2\}$ de $d^\uparrow$ sont connexes aux points $\{4, 5\}$ de $d'_\downarrow$. Ainsi, $\{\{1, 2, 4, 5\}\}$ sera le premier bloc de dd' . D'une façon similaire, les deux autres blocs obtenus pour dd' sont $\{\{3, 6, 2, 3\}\}$ et $\{\{4, 5, 1, 6\}\}$. En réduisant les composantes connexes de la section intermédiaire du diagramme en des points, puis en retirant ces points, le diagramme obtenu est le suivant :





Proposition 2.95. $\mathcal{U}_k$, muni de la multiplication définie précédemment, est un monoïde.

Démonstration. L'associativité est plus facilement démontrable à partir de la troisième présentation. Soient $d, d', d'' \in \mathcal{U}_k$. Superposez $d_\downarrow$ sur $d'^\uparrow$ et $d''^\uparrow$ sur $d'_\downarrow$. On obtient un diagramme à quatre lignes représentant $dd'd''$. On peut calculer ses composantes connexes. Si l'on retire la deuxième ligne, on obtient $(dd')d''$. Si l'on retire la troisième ligne, on obtient $d(d'd'')$. Retirer une ligne intermédiaire n'altère pas les composantes connexes de $dd'd''$. Alors, $d(d'd'') = dd'd'' = (dd')d''$.

Le fait que le haut et le bas de dd' soient des unions de blocs uniformes de d et d' fera en sorte que dd' sera aussi uniforme : $\mathcal{U}_k$ est donc fermé sous cette multiplication. De plus, $1_{\mathcal{U}_k} = \{\{i, \bar{i}\}\}_{1 \leq i \leq k}$ est l'élément neutre :

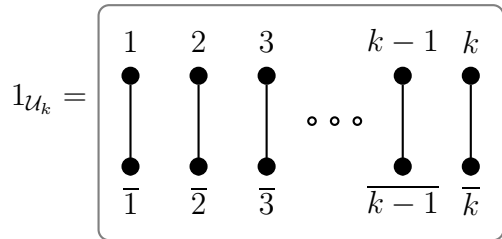


Figure 2.3: Représentation par diagramme de l'élément neutre de $\mathcal{U}_k$

Montrons que $1d = d$ pour $d \in \mathcal{U}_k$ arbitraire. Si π_i et $\{\bar{i}\}$ sont les blocs respectifs de $d^\uparrow$ et $(1_{\mathcal{U}_k})_\downarrow$ contenant i , alors l'union $\{\bar{i}\} \cup \pi_i = \pi_i$. Les blocs intermédiaires du diagramme de $1d$ sont donc les blocs de $d^\uparrow$. On a donc

que $1d = d$. Un raisonnement similaire nous permet de démontrer que $d1 = d$. $\square$

Corollaire 2.96. *Soient $d, d' \in \mathcal{U}_k$. Alors, $d^\uparrow$ est plus fin que $(dd')^\uparrow$ et $d'_\downarrow$ est plus fin que $(dd')^\downarrow$. Si $n(d)$ est le nombre de blocs de $d^\uparrow$ (ou $d_\downarrow$), par conséquent, $n(dd') \leq \min(n(d), n(d'))$.*

Démonstration. C'est un résultat direct obtenu en définissant la multiplication dd' de telle sorte que les blocs de $(dd')_\downarrow$ soient des unions de blocs de $d'_\downarrow$ et que les blocs de $(dd')^\uparrow$ soient des unions de blocs de $d^\uparrow$. Puisque dd' est à la fois plus grossier que d et d' individuellement, il s'ensuit que $n(dd') \leq \min(n(d), n(d'))$. $\square$

Remarque 2.97. De par la deuxième présentation, nous pouvons décrire chacun des éléments de $\mathcal{U}_k$ à partir d'une notation sur deux lignes ainsi :

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_l \\ \bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \dots & \bar{\gamma}_l \end{pmatrix}.$$

Si l'on pose que chacun des blocs π_i et $\bar{\gamma}_i$ ne contiennent respectivement qu'un seul élément de $[k]$ et $[\bar{k}]$, on obtient une permutation usuelle de $\mathcal{S}_k$: on en déduit qu'une unique copie de $\mathcal{S}_k$ réside dans $\mathcal{U}_k$.

Lemme 2.98. *Dans $\mathcal{U}_k$, il existe une unique copie isomorphe à $\mathcal{S}_k$ et son élément neutre est le neutre de $\mathcal{U}_k$.*

Démonstration. Si l'on prend une présentation sur deux lignes de $\sigma \in \mathcal{S}_k$ arbitraire, il est clair que $\sigma \in \mathcal{U}_k$. De plus, et de par la notation sur deux lignes, tous les éléments $d \in \mathcal{U}_k$ à n blocs sont isomorphes à des éléments de $\mathcal{S}_n$ où $n \leq k$. Nous avons déjà démontré à la proposition 2.95 que l'élément neutre de $\mathcal{S}_k$ est l'élément neutre du monoïde $\mathcal{U}_k$. $\square$

Définition 2.99. On dit que $d \in \mathcal{U}_k$ est une *permutation* si $d = \{\{i, \overline{\sigma(i)}\}\}_{i \in [k]}$ pour un certain $\sigma \in \mathcal{S}_k$. Dans ce cas, on note d simplement par σ afin de

souligner le fait que d est une permutation. On rappelle qu'une transposition $s \in \mathcal{S}_k$ est une permutation qui n'échange que deux éléments de $[k]$ entre eux. On note alors la transposition $d \in \mathcal{U}_k$ identique à $1_{\mathcal{U}_k}$, hormis le fait qu'elle contienne les associations $\{i, \overline{i+1}\}$ et $\{i+1, \bar{i}\}$, par s_i :

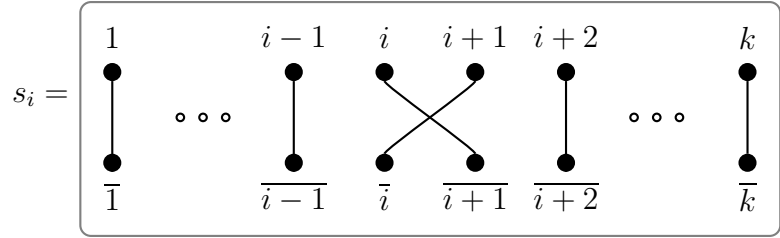


Figure 2.4: Représentation par diagramme du générateur s_i de $\mathcal{U}_k$

La notation sur deux lignes nous permet de rendre le corollaire 2.96 plus précis.

Lemme 2.100. *Supposons que $d, d' \in \mathcal{U}_k$. Alors,*

$$[d_{\downarrow} = (d')^{\uparrow}] \iff [n(dd') = n(d) = n(d')].$$

Démonstration. « $\implies$ » Si $d_{\downarrow} = (d')^{\uparrow}$, on a naturellement que $n(d) = n(d')$ et la définition de la multiplication dd' implique que le sens de l'implication n'est vrai que si $(dd')^{\uparrow} = d^{\uparrow}$ et $(dd')_{\downarrow} = (d')_{\downarrow}$. Alors, $n(dd') = n(d) = n(d')$.

« $\impliedby$ » De par le corollaire 2.96, $d \leq (dd')^{\uparrow}$ et $(d')_{\downarrow} \leq (dd')_{\downarrow}$. Si $n(dd') = n(d) = n(d')$, alors $d = (dd')^{\uparrow}$ et $(d')_{\downarrow} = (dd')_{\downarrow}$. Si $d_{\downarrow} \neq (d')^{\uparrow}$, nous aurions alors que $n(dd') < n(d)$ et $n(dd') < n(d')$ et ce serait une contradiction. $\square$

Si l'on exprime les éléments de $\mathcal{S}_k$ à partir d'une notation sur deux lignes, il est clair que leurs inverses au sein du groupe sont obtenus en échangeant colonne par colonne les éléments de la première et de la deuxième ligne. On

peut appliquer le même processus si

$$d = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_l \\ \bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \dots & \bar{\gamma}_l \end{pmatrix}$$

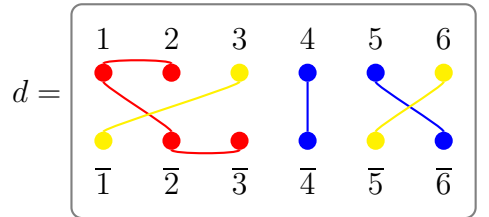
pour deux partitions π et $\bar{\gamma}'$ arbitraires rendant d uniforme. On aurait que

$$d\tilde{d} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_l \\ \bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \dots & \bar{\gamma}_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \dots & \bar{\gamma}_l \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_l \\ \overline{(\pi_1)} & \overline{(\pi_2)} & \dots & \overline{(\pi_l)} \end{pmatrix} \text{ et}$$

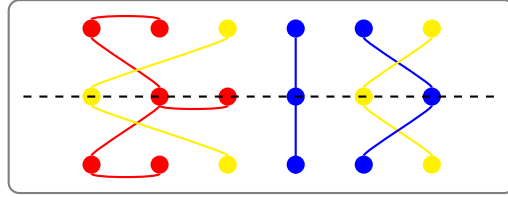
$$\tilde{d}d = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \dots & \bar{\gamma}_l \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_l \\ \bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \dots & \bar{\gamma}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_1 & \bar{\gamma}_2 & \dots & \bar{\gamma}_l \\ \overline{(\bar{\gamma}_1)} & \overline{(\bar{\gamma}_2)} & \dots & \overline{(\bar{\gamma}_l)} \end{pmatrix}$$

où $\overline{(\pi_i)}$ est le même bloc que π_i mais avec ses éléments étiquetés par une barre. En particulier, $(dd')d = d$ et $(d'd)d' = d'$: nous avons que $(dd')^2 = dd'$ et $(d'd)^2 = d'd$. La notation sur deux lignes nous permet donc de déduire que l'unique diagramme représentant l'inverse d'un élément $d \in \mathcal{U}_k$ est obtenu de la manière suivante : considérer la deuxième ligne du graphe comme étant un axe de symétrie, effectuer une symétrie résultant en un graphe dd' où d' est son inverse, puis retirer la première ligne en ne gardant que la deuxième et troisième ligne.

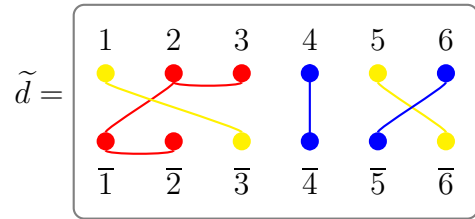
Exemple 2.101. Calculons l'inverse de d si



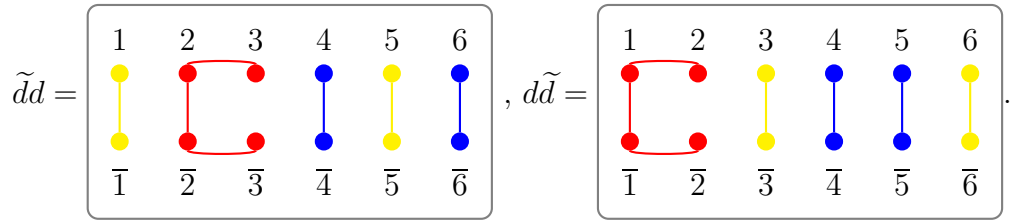
On commence par considérer la deuxième ligne comme étant un axe de réflexion ::



En ne gardant que la partie inférieure de l'axe de symétrie, nous obtenons l'inverse de d :



Les produits à gauche et à droite de d avec son inverse nous donnent les diagrammes suivants :



Remarque 2.102. Remarquons que $dd\tilde{d}$ et $\tilde{d}d$ ne sont pas nécessairement égaux, mais les deux seront des éléments idempotents ; $(dd\tilde{d})^2 = dd\tilde{d}$ et $(\tilde{d}d)^2 = \tilde{d}d$.

Définition 2.103. Soit $d \in \mathcal{U}_k$. On définit l'inverse de d comme étant l'unique élément $\tilde{d} \in \mathcal{U}_k$, s'il existe, faisant en sorte que $dd\tilde{d} = d$ et de telle sorte que $\tilde{d}d\tilde{d} = \tilde{d}$.

Proposition 2.104. $\mathcal{U}_k$ est un monoïde d'inversibles.

Démonstration. À partir du paragraphe précédent, et en se référant à la notation sur deux lignes, on est convaincu que pour chaque $d \in \mathcal{U}_k$, il existe un (unique) inversible $\tilde{d}$ faisant en sorte que $dd\tilde{d} = d$ et $\tilde{d}d\tilde{d} = \tilde{d}$ de telle sorte que $dd\tilde{d} = e_{d\uparrow}$ et $\tilde{d}d\tilde{d} = e_{d\downarrow}$. $\square$

Nous sommes maintenant convaincus que l'on peut utiliser tous les résultats exposés sur les monoïdes finis d'inversibles afin d'étudier l'algèbre festive!

Lemme 2.105. Soit $\pi = \{\pi_i\}_{1 \leq i \leq l}$ une partition de $[k]$. Posons

$$e_\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_l \\ \overline{(\pi_1)} & \overline{(\pi_2)} & \dots & \overline{(\pi_l)} \end{pmatrix}.$$

Alors, $E(\mathcal{U}_k) = \{e_\pi : \pi \vdash [k]\}$ est l'ensemble complet des idempotents de $\mathcal{U}_k$.

Démonstration. Supposons que $e^2 = e$. On va déduire sa notation sur deux lignes. De par le lemme 2.100, puisque $ee = e$, il faut que $e^\uparrow = e_\downarrow$ puisqu'autrement nous aurions que e^2 est plus grossier que e . Supposons que $e(\pi_i) \neq \overline{(\pi_i)}$. Alors, $e(\pi_1) = \overline{(\pi_j)}$ pour un certain $j \neq i$. Or, $e^2(\pi_1) = e(\pi_j) = \overline{(\pi_j)}$ puisque $e^2 = e$. On déduit que e n'est pas une bijection entre blocs et nous obtenons une contradiction. Donc, si e est un idempotent, il doit avoir la forme décrite dans l'énoncé. Réciproquement, si e a cette forme, il sera naturellement un idempotent. On en conclut que $E(\mathcal{U}_k)$ contient tous et seulement les idempotents de $\mathcal{U}_k$. $\square$

Soit $d \in \mathcal{U}_k/\mathcal{S}_k$. Puisque chaque bloc de $\sigma \in \mathcal{S}_k$ ne peut pas contenir moins qu'un seul élément, on a que, pour $d \in \mathcal{U}_k$ arbitraire, les permutations incluses dans $\mathcal{S}_k$ sont au moins plus raffinées que d . Cela nous convainc, de par la définition de la multiplication dans le monoïde, que $n(\sigma d) = n(d\sigma) = n(d)$. Si $d = \pi \uplus \bar{\gamma}$ où $\pi \uplus \bar{\gamma} \vdash [k] \uplus [\bar{k}]$, alors σd est simplement d sur lequel on applique la permutation σ^{-1} sur $d^\uparrow = \pi$. Similairement, $d\sigma$ est obtenu à partir de d sur lequel on applique la permutation σ sur $d_\downarrow = \bar{\gamma}$. Cette observation nous permet de déduire que $d = \sigma_1 e_{d_\downarrow} = e_{d^\uparrow} \sigma_2$, pour $e_{d_\downarrow}, e_{d^\uparrow} \in E(\mathcal{U}_k)$ et certaines permutations $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_k$. Dans ce cas, on dira que $\mathcal{U}_k$ est *factorisable* si le monoïde est égal à GE où G est un de ses sous-groupes et E un ensemble d'idempotents du monoïde.

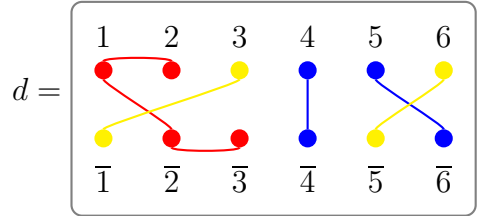
Proposition 2.106. Pour $d = \{\{\pi_i \uplus \bar{\gamma}_i\}\}_{1 \leq i \leq l} \in \mathcal{U}_k$ arbitraire et $\sigma \in \mathcal{S}_k$ faisant en sorte que $\sigma(\pi_i) = \overline{(\bar{\gamma}_i)}$ pour chaque i . Alors,

$$d = e_{d\uparrow} \sigma = \sigma e_{d\downarrow}$$

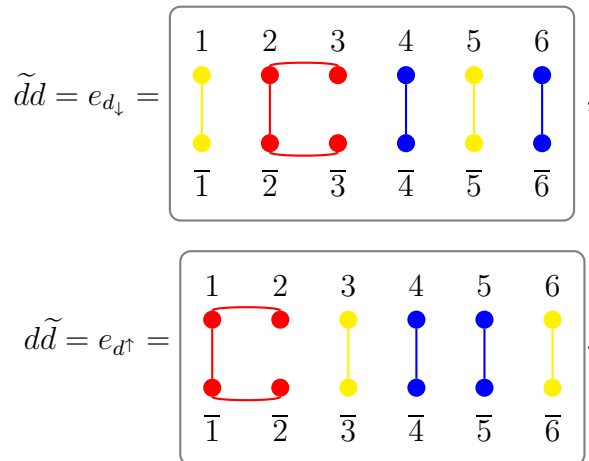
et, par conséquent, $\mathcal{U}_k = E(\mathcal{U}_k) \mathcal{S}_k = \mathcal{S}_k E(\mathcal{U}_k)$.

Démonstration. Si cette condition est respectée pour chaque i , alors $\pi_i = \sigma^{-1}(\overline{(\bar{\gamma}_i)})$. Ceci revient à dire que σ redresse les blocs connexes des première et deuxième rangées du diagramme associé à d de telle sorte qu'ils soient verticalement alignés. Donc, $d\sigma^{-1} = e_{d\uparrow}$ et $\sigma^{-1}d = e_{d\downarrow}$. L'inversibilité des permutations et l'associativité du monoïde font en sorte que $d = e_{d\uparrow} \sigma = \sigma e_{d\downarrow}$. $\square$

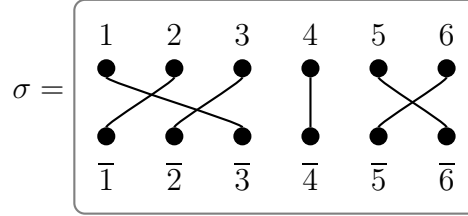
Exemple 2.107. Nous avons précédemment calculé que pour



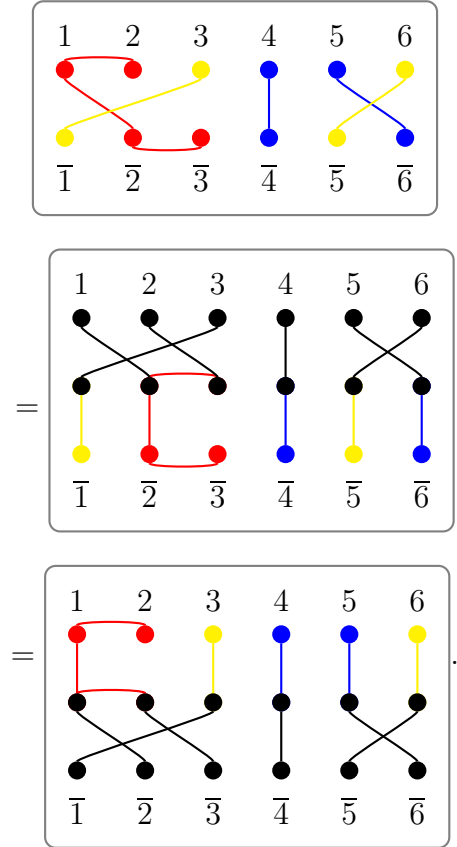
les idempotents obtenus en multipliant d par $\tilde{d}$ à gauche et à droite résultent en les idempotents suivants :



Si l'on veut redresser $d_{\downarrow}$ de telle sorte que cette partition soit alignée verticalement bloc par bloc avec ceux de $d^{\uparrow}$, on peut utiliser la permutation



afin d'obtenir la factorisation $d = \sigma^{-1}e_{d_{\downarrow}} = e_{d^{\uparrow}}\sigma^{-1}$:



Exposons quelques propriétés utiles des idempotents qui seront employées ultérieurement dans les démonstrations.

Lemme 2.108. Soit $\pi \vdash [k]$, $\sigma \in \mathcal{S}_k$ et $d \in \mathcal{U}_k$.

1. $\tilde{e}_{\pi} = e_{\pi}$,

2. $(\sigma e_{\pi})^{\uparrow} = \sigma^{-1}(\pi)$ et $(e_{\pi}\sigma)_{\downarrow} = \sigma(\pi)$,

3. $\sigma e_\pi \sigma^{-1} = e_{\sigma^{-1}(\pi)}$, alors $e_\pi \sigma = \sigma e_{\sigma(\pi)}$ et $\sigma e_\pi = e_{\sigma^{-1}(\pi)} \sigma$,
4. $e_{d^\uparrow} d = d e_{d_\downarrow} = d$,
5. $(de_\pi)^\uparrow$ et $(e_\pi d)_\downarrow$ sont plus grossiers ou égaux que π .

Démonstration. Procédons point par point.

1. Par idempotence, il est clair que $e_\pi^3 = e_\pi$ et donc que $\tilde{e}_\pi = e_\pi$.
2. Puisque $\pi = e^\uparrow$, puisque σ est plus fin que π , et puisque σe_π n'effectue uniquement qu'une permutation σ sur $e_\pi^\uparrow$, on a clairement que $(\sigma e_\pi)^\uparrow = \sigma^{-1}(\pi)$. Le résultat $(e_\pi \sigma)_\downarrow = \sigma(\pi)$ se déduit d'une façon analogue.
3. Multiplier e_π par σ à gauche revient à appliquer σ^{-1} sur $e_\pi^\uparrow$, et appliquer σ^{-1} à droite de e_π revient à appliquer σ^{-1} sur $(e_\pi)_\downarrow$. Au final, $\sigma e_\pi \sigma^{-1}$ applique σ^{-1} sur $(e_\pi)^\uparrow$ et $(e_\pi)_\downarrow$: c'est égal à $e_{\sigma^{-1}(\pi)}$. Les égalités $e_\pi \sigma = \sigma e_{\sigma(\pi)}$ et $\sigma e_\pi = e_{\sigma^{-1}(\pi)} \sigma$ sont obtenues de par l'associativité du monoïde et en substituant σ par σ^{-1} .
4. Par construction de $\tilde{d}$ à partir des « réflexions » au sein du graphe de d , puisque $d\tilde{d} = e_{d^\uparrow}$ et puisque $\tilde{d}d = e_{d_\downarrow}$, le résultat est naturel par construction en prenant en compte que $d\tilde{d}d = d$ et $\tilde{d}d\tilde{d} = \tilde{d}$ si d et $\tilde{d}$ sont les inverses associés.
5. Nous avons déjà montré au corollaire 2.96 que le produit de deux diagrammes aura une partition plus grossière ou égale à la plus grossière des deux partitions associées aux deux éléments multipliés. π est la partition d'un des éléments multipliés, alors le résultat est direct. $\square$

2.2.4 Les générateurs de $\mathcal{U}_k$

Établissons une présentation de $\mathcal{U}_k$ par générateurs. Celles et ceux s'intéressant aux origines de cette présentation peuvent se référer à la section 3 de l'article

de FitzGerald⁵ ou à l'introduction de l'article de Kosuda⁶. On rappelle que s_i est l'élément de $\mathcal{U}_k$ identique à la partition de l'identité à l'exception que les associations $\{i, \overline{i+1}\}$ et $\{i+1, \bar{i}\}$ lui sont des sous-ensembles. On définit également $b_i \in \mathcal{U}_k$ identique à la partition de l'identité à l'exception que l'association $\{i, i+1, \bar{i}, \overline{i+1}\}$ lui est un sous-ensemble.

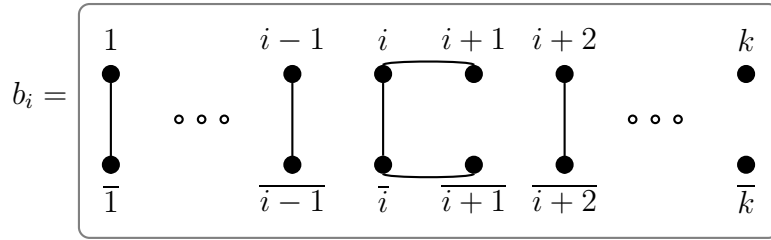


Figure 2.5: Représentation par diagramme du générateur b_i de $\mathcal{U}_k$

Alors,

$$\mathcal{U}_k = \langle \{s_i, b_i\} : 1 \leq i \leq k-1 \rangle$$

et les générateurs profitent des propriétés suivantes :

1. $s_i^2 = 1_{\mathcal{U}_k}$ et $b_i^2 = b_i$ si $1 \leq i \leq k-1$,
2. $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ et $s_i b_{i+1} s_i = s_{i+1} b_i s_{i+1}$ si $1 \leq i \leq k-2$,
3. $s_i s_j = s_j s_i$ et $b_i s_j = s_j b_i$ si $|i-j| \geq 2$,
4. $b_i s_i = s_i b_i = b_i$ et $b_i b_j = b_j b_i$ si $1 \leq i \leq k-1$.

Ces propriétés peuvent, lors d'une première lecture, ne pas être évidentes du tout. Une démonstration explicite et ensembliste serait ici, à mon avis, laborieuse et n'aiderait pas à l'intuition. À ceci, je vous propose un exercice ludique : pour $k \in \{4, 5\}$, dessinez quelques produits de diagrammes pour chacune des égalités impliquées par les quatre propriétés précédentes. Un visuel de ces propriétés devrait suffire à vous convaincre ! Globalement, ces

⁵D. G. FitzGerald. *A presentation for the monoid of uniform block permutations*. Bull. Austral. Math. Soc., 68(2):317-324, 2003.

⁶Masashi Kosuda. *Characterization for the party algebra*. Ryukyu Math. J., 13:7-22, 2000.

propriétés découlent du fait que les blocs qui interagissent de par le produit sont disjoints dans les parties supérieures et inférieures des diagrammes impliqués.

Si vous n'êtes toujours pas convaincus que les s_i et b_i engendrent $\mathcal{U}_k$, remarquez la chose suivante : tout diagramme $d \in \mathcal{U}_k$ possède une décomposition $\sigma_1 e_\pi \sigma_2$ pour $\pi = d^\dagger$ et $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_k$. Remarquez que les s_i correspondent exactement aux transpositions du groupe symétrique. Alors, il est clair que σ_1 et σ_2 se décomposent en un produit de différents s_i (puisque $\mathcal{S}_k$ est généré par les transpositions). De plus, il devrait également être clair que l'idempotent e_π puisse être obtenu à partir d'un produit de différents b_i ! En combinant ces deux constats, vous devriez être convaincus que tout diagramme de $\mathcal{U}_k$ peut être obtenu à partir d'un produit de différents s_i et b_i , et donc que ces derniers éléments sont les générateurs du monoïde.

CHAPITRE III

REPRÉSENTATIONS

3.1 Théorie de la représentation des monoïdes finis

Dans ce sous-chapitre, nous allons établir certains résultats généraux à propos des algèbres finies qui nous permettront ultérieurement d'aborder la théorie de la représentation des monoïdes finis. Afin de garder la présentation concise, nous omettrons certaines démonstrations au fil de cette section. Le fil de narration s'inspire successivement des annexes A.1, A.2, A.3 et des chapitres 4.1, 4.2, 5.1, 5.2 et 5.4 de la référence de Benjamin Steinberg : « Representation Theory of Finite Monoids ».

3.1.1 À propos des algèbres de dimension finie

Définition 3.1. Soit $\mathbb{K}$ un corps et A un ensemble. Une $\mathbb{K}$ -algèbre A est une structure algébrique $(A, +, \cdot, \times)$ de telle sorte que

1. $(A, +, \cdot)$ soit un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$,

2. $\times$ est bilinéaire et définie de sorte que $\times : A \times A \rightarrow A$.

Remarque 3.2. En particulier, si l'on remplace A par un monoïde fini M , on obtient un cas particulier de $\mathbb{K}$ –algèbre. Notre but à court terme est d'étudier l'action à gauche d'une $\mathbb{K}$ –algèbre A sur un A –modules S afin de potentiellement déterminer sa décomposition en sous-modules simples (et ainsi comprendre ses représentations irréductibles).

Pour le reste de cette partie du mémoire, on considèrera que A est une $\mathbb{K}$ –algèbre de dimension finie.

Définition 3.3. Soit S un A –module. On dit que S est *simple* (ou *irréductible*) si $Av = S \neq 0$ pour tout $v \in S$.

Nous avons déjà établi un analogue au très pratique résultat suivant lors de notre exposé sur la théorie de la représentation des groupes finis: le lemme de Schur. En voici une adaptation pour les $\mathbb{K}$ –algèbres. Il nous permet d'établir que tout A –module d'une $\mathbb{K}$ –algèbre A de dimension finie sera aussi de dimension finie et que les A –modules simples sont des quotients de A .

Lemme 3.4. (Schur) Si S, S' sont des A –modules simples, alors tout homomorphisme $\phi : S \rightarrow S'$ non-nul est un isomorphisme. Puisque tout homomorphisme non-nul est inversible, $\text{End}_A(S)$ est une algèbre intègre de dimension finie sur $\mathbb{K}$. De plus, si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, on a que $\text{End}_A(S) \cong \mathbb{K} \cdot 1_S$ où 1_S est l'application identité.

Définition 3.5. On dit qu'un A –module M est *semi-simple* si $M = \bigoplus_{\alpha \in I} S_\alpha$ pour I un index fini et S_α un module simple pour chaque $\alpha \in I$.

Proposition 3.6. Si M est un A –module et si I est un index fini, alors les énoncés suivants sont équivalents.

1. M est semi-simple.
2. $M = \bigoplus_{\alpha \in I} S_\alpha$ tel que S_α est un sous-module simple de M , $\forall \alpha \in I$.

3. Pour chaque sous-module N de M , il existe un autre sous-module N' faisant en sorte que $M = N \oplus N'$.

Définition 3.7. Si M est une algèbre finie, alors M possède un unique sous-module maximal semi-simple. Cet unique sous-module simple maximal, on le nomme *socle* de M (noté $\text{soc}(M)$).

Remarque 3.8. Si M est semi-simple, alors $\text{soc}(M) = M$.

Proposition 3.9. La sous-catégorie des A -modules semi-simples est fermée si l'on considère leurs sous-modules, leurs quotients et leurs sommes directes.

Définition 3.10. Un sous-module maximal d'un module V est un sous-module de M de V faisant en sorte que M soit un sous-module propre de V et qu'il n'existe pas M' un autre sous-module propre de M faisant en sorte que $M \subset M' \subset V$. On définit le *radical* de V , noté $\text{rad}(V)$, comme étant l'intersection commune à tous les sous-modules maximaux de V . On définit aussi le radical de V comme étant l'idéal de A faisant en sorte que $aS = 0$ pour tout A -module S simple inclus dans V et pour tout $a \in \text{rad}(V)$.

Proposition 3.11. Soit V un A -module.

1. V est semi-simple si et seulement si $\text{rad}(V)$ est trivial.
2. $V/\text{rad}(V)$ est semi-simple.
3. Si $W \leq V$, alors V/W est semi-simple si et seulement si $\text{rad}(V) \subseteq W$.

Définition 3.12. On définit le A -module régulier comme étant le $\mathbb{K}$ -module A agissant à gauche sur lui-même en tant qu'algèbre de dimension finie.

Dans le cas du A -module régulier, les sous-modules maximaux sont les idéaux maximaux à gauche. Alors, $\text{rad}(A)$ est l'intersection de tous les idéaux maximaux à gauche de A . Rappelons qu'un idéal I est dit *nilpotent*

si $I^n = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Voici quelques propriétés du radical d'une algèbre de dimension finie A .

Théorème 3.13. *Soit A une $\mathbb{K}$ -algèbre de dimension finie.*

1. $\text{rad}(A)$ est l'intersection de tous les idéaux maximaux à droite de A .
2. $\text{rad}(A)$ est un idéal à gauche et à droite.
3. $\text{rad}(A)$ est l'intersection des annihilateurs respectifs de chacun des A -sous-modules simples.
4. Si V est un A -module de dimension finie, alors $\text{rad}(V) = \text{rad}(A) \cdot V$.
5. Un A -module M est semi-simple si et seulement si $\text{rad}(A) \cdot M = 0$.
6. $\text{rad}(A)$ est nilpotent.
7. $\text{rad}(A)$ est le plus grand idéal nilpotent de A .

Lemme 3.14. (Nakayama) *Si V est un A -module de dimension finie, alors $\text{rad}(A) \cdot V = V$ implique que $V = 0$.*

Théorème 3.15. (Wedderburn) *Pour une $\mathbb{K}$ -algèbre de dimension finie, les énoncés suivants sont équivalents.*

1. A est semi-simple.
2. Chaque A -module est semi-simple.
3. $\text{rad}(A) = 0$.
4. $A \cong \prod_{i=1}^r M_{n_i}(D_i)$ où D_i sont des algèbres intègres de dimensions finies.

Proposition 3.16. *Les quotients des algèbres semi-simples de dimensions finies sont semi-simples.*

Théorème 3.17. *Si A est une $\mathbb{K}$ –algèbre de dimension finie, alors :*

1. $A/\text{rad}(A)$ est semi-simple,
2. si I est un idéal de A tel que A/I est semi-simple, alors $\text{rad}(A) \subset I$,
3. $A/\text{rad}(A)\text{--mod}$ est identifiée à la sous-catégorie entière de $A\text{--mod}$ ayant pour objets les A –modules semi-simples.

En particulier, les A –modules simples sont des inflations de $A/\text{rad}(A)$ –modules simples. Donc, A possède un nombre fini de classes d’isomorphismes pour les A –modules.

Corollaire 3.18. *Soit I un idéal nilpotent d’une $\mathbb{K}$ –algèbre A faisant en sorte que A/I soit semi-simple. Alors, $I = \text{rad}(A)$.*

Définition 3.19. Un élément *nilpotent* $a \in A$ en est un si $a^n = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Aussi, on dit qu’un A –module est *fidèle* si son ensemble d’annulateurs est trivial. Autrement dit, $aV = 0$ implique que $a = 0$.

Théorème 3.20. *Un idéal I de A est nilpotent si et seulement s’il est engendré par un ensemble d’éléments nilpotents.*

Proposition 3.21. *Soit V un A –module irréductible fidèle. Alors, A est simple (autrement dit, A ne possède pas d’idéal propre).*

Définition 3.22. Soit

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

une chaîne d’inclusions de sous-modules de V . On dit que cette chaîne est une *série de composition* de longueur n si V_i/V_{i-1} est irréductible. On nomme les V_i/V_{i-1} les *facteurs* de la série de décomposition.

Théorème 3.23. (Jordan-Hölder) Soit V un A -module de dimension finie et soient les deux séries de composition de V suivantes :

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V,$$

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_m = V.$$

Alors, $m = n$ et il existe une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ faisant en sorte que $V_i/V_{i-1} \cong W_{\sigma(i)}/W_{\sigma(i)-1}$ pour chaque i concerné.

Théorème 3.24. (Schur et Frobenius) Soit $\mathbb{K}$ algébriquement clos et A une algèbre sur ce corps de dimension finie. Supposons que $\{S_i\}_{i \in I}$ forme un ensemble de représentants pour chacune des classes d'isomorphismes entre les A -modules irréductibles. Pour chaque $k \in I$, fixez une base pour S_i et posez $\phi^{(k)} : A \rightarrow M_{n_k}(\mathbb{K})$ un homomorphisme de $\mathbb{K}$ -algèbres défini par

$$\phi^{(k)}(a) = (\phi_{ij}^{(k)}(a))$$

de par l'opérateur $v \rightarrow av$. Alors, les différents $\phi_{ij}^{(k)} : A \rightarrow \mathbb{K}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{K}$.

3.1.2 Modules indécomposables

Dans cette section, on considère toujours que A est une algèbre de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

Définition 3.25. On dit qu'un A -module M est *indécomposable* si le fait que $M = M' \oplus M''$ implique que M' ou M'' est trivial.

Tout module irréductible est indécomposable, mais tout module indécomposable n'est pas nécessairement irréductible. Cependant, le théorème

suisant nous permet d'établir que tout module sur une algèbre de dimension finie possède essentiellement une unique décomposition à partir d'une somme directe de ses sous-modules indécomposables.

Théorème 3.26. (Krull-Schmidt) *Soit V un A -module de dimension finie. Alors, $V \cong \bigoplus_{i=1}^s M_i$ où M_i est un module indécomposable pour chacun des i . De plus, si $V \cong \bigoplus_{i=1}^r N_i$ est une autre décomposition de V à partir d'une somme directe de modules indécomposables, alors $r = s$ et il existe $\sigma \in \mathcal{S}_r$ faisant en sorte que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ pour chacun des i .*

On dira dorénavant qu'une algèbre de dimension finie est de *type de représentation finie* si elle n'a qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes pour des modules indécomposables de dimensions finies. En appliquant le dernier théorème de Krull-Schmidt (théorème 3.26) au A -module régulier, on déduit que $A \cong \bigoplus_{i=1}^s P_i$ où P_i est indécomposable et (surtout) projectif.

Théorème 3.27. *Supposons que*

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^s P_i$$

soit une décomposition de A à partir de modules indécomposables.

1. *Tout A -module projectif indécomposable est isomorphe à P_i pour un certain i concerné.*
2. *$P_i/\text{rad}(P_i)$ est simple.*
3. *$P_i \cong P_j \iff P_i/\text{rad}(P_i) \cong P_j/\text{rad}(P_j)$.*
4. *Nous avons que*

$$A/\text{rad}(A) \cong \bigoplus_{i=1}^s P_i/\text{rad}(P_i)$$

et, en particulier, chaque A -module simple est isomorphe à un certain $P_i/\text{rad}(P_i)$ pour un certain i concerné. La multiplicité de $P_i/\text{rad}(P_i)$ dans

la somme directe $A/\text{rad}(A)$ est la même que la multiplicité de P_i dans la somme directe de A .

Si V est un A -module de dimension finie et si P est un A -module projectif de dimension finie, on dit qu'un épimorphisme $\phi : P \rightarrow V$ est un *recouvrement projectif* si le fait que $W + \ker(\phi) = P$ implique que $W = P$. Le lemme de Nakayama (lemme 3.14) permet, sans être ici exhaustif, de démontrer que $\ker(\phi) \subseteq \text{rad}(P)$.

Théorème 3.28. *Soit $\{S_i\}_{1 \leq i \leq r}$ un ensemble complet de représentants des classes d'isomorphismes des A -modules simples, et soit $\{P_i\}_{1 \leq i \leq r}$ un ensemble complet de représentants des classes d'isomorphismes des A -modules simples projectifs ordonnés de telle sorte que $P_i/\text{rad}(P_i) \cong S_i$.*

1. *L'épimorphisme canonique $\eta : P_i \rightarrow P_i/\text{rad}(P_i)$ est un recouvrement projectif.*
2. *Si V est un A -module de dimension finie tel que*

$$V/\text{rad}(V) \cong \bigoplus_{i=1}^n n_i \cdot S_i,$$

il existe un recouvrement projectif de la forme suivante :

$$\psi : \bigoplus_{i=1}^n n_i \cdot P \rightarrow V.$$

3. *Si $\phi : P \rightarrow V$ et $\psi : Q \rightarrow V$ sont des recouvrements projectifs, alors il existe un isomorphisme τ tel que $\psi\tau = \phi$.*

Résumons : chaque A -module de dimension finie possède un recouvrement projectif et le A -module projectif correspondant est unique à isomorphisme-près.

3.1.3 Jolis idempotents

Les idempotents au sein de l'algèbre A nous aideront à mieux comprendre quels sont les A -modules indécomposables.

Définition 3.29. Soient $e, f \in E(A)$. On dit que e et f sont *orthogonaux* si $ef = fe = 0$.

Proposition 3.30. Soient $e, f \in E(A)$ des idempotents orthogonaux. Alors, $(e + f)$ est aussi un idempotent et $A(e + f) = Ae \oplus Af$.

Démonstration. Puisque $(e + f)^2 = e^2 + ef + fe + f^2 = e^2 + 0 + 0 + f^2 = e + f$, il est clair que $(e + f)$ est un idempotent de par l'orthogonalité ($ef = fe = 0$). On remarque, en particulier, que $e(e + f) = e^2 + ef = e$ et que $f(e + f) = fe + f^2 = f$. Soit $a \in A$ arbitraire, alors $a(e + f) = ae + af$ et $A(e + f) = Ae + Af$. Supposons que $a \in Ae \cap Af$. Alors, $ae = a$ puisque $a \in Ae$ et $af = a$ puisque $a \in Af$. Donc, $a = ae = af$ implique $ae = ae^2 = a(fe) = 0$. On a donc bien montré que $Ae \cap Af = \{0\}$ et que $A(e + f) = Ae \oplus Af$. $\square$

Remarque 3.31. Soient $1, e \in E(A)$. On remarque que $(1 - e) = 1^2 - 2e + e^2 = 1 - e$. Alors, $(1 - e)$ est un idempotent de A . De plus, $e(1 - e) = (1 - e)e = 0$. Alors, e et $(1 - e)$ sont orthogonaux.

À partir de la proposition 3.30, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 3.32. Soit $e \in E(A)$. Alors, $A = Ae \oplus A(1 - e)$.

Démonstration. En posant $A = A \cdot 1 = A \cdot (e + (1 - e))$, la proposition 3.30 impose le résultat. $\square$

Définition 3.33. Supposons que $\{e_i\}_{i \in I}$ forme un ensemble d'idempotents deux-à-deux orthogonaux. On dit que $\{e_i\}_{i \in I}$ est un *ensemble complet d'idempotents orthogonaux* si $1 = \sum_{i \in I} e_i$.

Remarque 3.34. Dans ce cas, $A = A \cdot 1 = A \cdot \sum_{i \in I} e_i = \bigoplus_{i \in I} Ae_i$ en réitérant l'argument de la dernière proposition. Nous obtenons ainsi une décomposition en somme directe de A à partir de ses idéaux de la forme Ae_i . En particulier, puisque A est de dimension finie, que $e \in E(A)$ et que Ae et $\text{rad}(A)$ sont des idéaux de A , nous avons l'égalité

$$\text{rad}(Ae) = \text{rad}(A) \cdot Ae = \text{rad}(A) \cdot e.$$

La proposition suivante est une adaptation aux algèbres de la proposition 2.31 et du corollaire 2.32.

Proposition 3.35. Soit $e \in E(A)$ et M un A -module.

1. $\text{Hom}_A(Ae, M) \cong eM$ de par l'association $\phi \rightarrow \phi(e)$.
2. $\text{End}_A(Ae) \cong (eAe)^{opp}$, et donc $\text{End}_A(A) \cong A^{opp}$.

Remarque 3.36. Supposons que L soit une somme directe dans le A -module régulier. Il doit alors exister une projection $\pi : A \rightarrow L$. Si $\iota : L \rightarrow A$ est l'inclusion canonique, alors $\iota\pi \in \text{End}_A(A)$. Donc, de par la proposition 3.35, $\exists e \in E(A)$ tel que $\iota\pi(1) = e$. Alors,

$$L = \iota\pi(A) = A \cdot \iota\pi(1) = Ae$$

Bref, on déduit la proposition suivante.

Proposition 3.37. Si A est une algèbre pour laquelle son module régulier se décompose en une somme directe de A -modules simples, alors on a que chacun de ses sous-modules simples est de la forme Ae_i pour un certain $e_i \in E(A)$.

Définition 3.38. On dit que $e \in (E(A) - \{0\})$ est *primitif* si l'écriture $e = e_1 + e_2$ tels que $e_1, e_2 \in E(A)$ orthogaux fait en sorte que soit $e_1 = 0$, soit $e_2 = 0$.

Proposition 3.39. Soit $e \in (E(A) - \{0\})$. Les énoncés suivants sont équivalents.

1. e est primitif.
2. Ae est indécomposable.
3. $E(eAe) = \{0, e\}$.

Démonstration. « (1) $\implies$ (3) » Si e est primitif et $f \in E(eAe)$, on a que $fe = ef = f$ de par la présentation des éléments de $E(eAe)$. Alors,

$$(e - f)^2 = e^2 - ef - fe + f^2 = e - 2f + f = (e - f)$$

et $f(e - f) = ef - f^2 = f - f = 0$. On a donc que f et $(e - f)$ sont des idempotents orthogonaux. Puisque $e = f + (e - f)$, le fait que e soit primitif fait en sorte que soit $f = 0$, soit $(e - f) = 0$. Alors, soit $f = 0$, soit $f = e$.

« (3) $\implies$ (2) » Supposons que $E(eAe) = \{0, e\}$. Alors, en supposant que V et W soient des sous-modules propres à Ae , et si l'on suppose que $Ae = V \oplus W$, il doit exister l'homomorphisme de projection canonique $\pi \in \text{End}_A(Ae)$ faisant en sorte que $\pi(Ae) = V$ et tel que $\pi^2 = \pi$. Or, de par la proposition 3.35, nous avons que $\text{End}_A(Ae) \cong (eAe)^{opp}$. Alors, $\pi \in E(eAe) = \{0, e\}$. C'est une contradiction : les seuls endomorphismes de Ae sont l'identité et le morphisme nul. On a donc que Ae est indécomposable.

« (2) $\implies$ (1) » Supposons que Ae soit indécomposable et supposons que $e = e_1 + e_2$ ne soit pas primitif pour e_1, e_2 orthogonaux. Alors, $Ae = A(e_1 + e_2) = Ae_1 \oplus Ae_2$ de par le fait que e_1 et e_2 sont orthogonaux. Contradiction : afin de préserver l'indécomposabilité de Ae , il faut que soit $e_1 = 0$, soit $e_2 = 0$. Alors, e est nécessairement primitif. $\square$

Définition 3.40. Supposons que $\{e_i\}_{i \in I}$ soit un ensemble complet d'idempotents orthogonaux. On dira que c'est un *ensemble complet d'idempotents orthogonaux primitifs* si chaque e_i est primitif.

Théorème 3.41. *Rappelons que A est une $\mathbb{K}$ –algèbre de dimension finie. Supposons que $\{e_i\}_{i \in I}$ soit un ensemble d’idempotents.*

1. *$A = \bigoplus_{i \in I} Ae_i$ est une somme directe de modules projectifs indécomposables si et seulement si $\{e_i\}_{i \in I}$ est un ensemble complet d’idempotents orthogonaux primitifs.*
2. *Si $\{e_i\}_{i \in I}$ est un ensemble complet d’idempotents orthogonaux primitifs, alors $\{e_i + \text{rad}(A)\}_{i \in I}$ est un ensemble complet d’idempotents orthogonaux primitifs pour $A/\text{rad}(A)$.*
3. *Tout ensemble complet d’idempotents orthogonaux primitifs associé à $A/\text{rad}(A)$ est de la forme donnée en (2).*

De par le théorème 3.41, nous en déduisons que tout A –module projectif indécomposable est de la forme Ae ainsi que tout A –module simple est de la forme $Ae/\text{rad}(A)e$ avec e primitif (car, souvenons-nous, $\text{rad}(Ae) = \text{rad}(A)e$ de par le quatrième point du théorème 3.13).

Proposition 3.42. *Soit $e \in E(A)$. Posons $S = Ae/\text{rad}(A)e$ le module simple correspondant à e . Si V est un A –module de dimension finie, alors $\text{Hom}_A(Ae, V) \cong eV \neq 0$ si et seulement si S est un facteur d’une série de composition pour V . De plus, si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, on aura que $\dim(eV) = [V : S]$.*

3.1.4 Une pléthore de foncteurs

Les représentations irréductibles des monoïdes finis que nous allons considérer dans ce mémoire seront obtenues à partir de produits tensoriels appliqués sur des représentations indécomposables d’idéaux stratégiquement choisis. Puisqu’un idéal indécomposable d’un monoïde M aura la forme Ae

pour $e \in E(M)$, on fixe dans cette section un certain idempotent e et on étudie son produit tensoriel à scalaires dans eAe .

Soit A une $\mathbb{K}$ -algèbre de dimension finie, et soit $e \in E(A)$ fixé. Soulignons le fait que eA est un eAe - A -bimodule et que Ae est un A - eAe -bimodule. Définissons les foncteurs suivants qui seront utilisés tout au long de la sous-section.

Définition 3.43. Considérons les foncteurs suivants :

1. Le foncteur *induction* $\text{Ind}_e : eAe\text{-mod} \rightarrow A\text{-mod}$ défini par

$$\text{Ind}_e(V) = Ae \otimes_{eAe} V.$$

2. Le foncteur *coinduction* $\text{Coind}_e : eAe\text{-mod} \rightarrow A\text{-mod}$ défini par

$$\text{Coind}_e(V) = \text{Hom}_{eAe}(eA, V).$$

3. Le foncteur *restriction* $\text{Res}_e : A\text{-mod} \rightarrow eAe\text{-mod}$ défini par

$$\text{Res}_e(V) = eV \cong eA \otimes_A V \cong \text{Hom}_A(Ae, V).$$

4. Le foncteur *trace* $T_e : A\text{-mod} \rightarrow eAe\text{-mod}$ défini par

$$T_e(V) = (Ae)V.$$

5. Le foncteur $N_e : A\text{-mod} \rightarrow eAe\text{-mod}$ défini par

$$N_e(V) = \{v \in V : (eA)v = 0\}.$$

Remarque 3.44. Concernant la définition de Res_e : le fait que $eV \cong \text{Hom}_A(Ae, V)$ est un résultat obtenu grâce à la proposition 3.35, et le fait que $eV \cong eA \otimes_A V$

provient de l'isomorphisme $eA \otimes_A V \rightarrow eV$ défini par $(ea \otimes v) \rightarrow eav$ de telle sorte que son application inverse soit donnée par $v \rightarrow (e \otimes v)$.

Sans entrer dans les détails des démonstrations des résultats de la théorie des catégories, considérons la proposition suivante.

Proposition 3.45. *Soit V un A -module et soit W un eAe -module. Il existe des isomorphismes naturels faisant en sorte que*

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Ind}_e(W), V) &\cong \operatorname{Hom}_{eAe}(W, \operatorname{Res}_e(V)), \\ \operatorname{Hom}_A(V, \operatorname{Coind}_e(W)) &\cong \operatorname{Hom}_{eAe}(\operatorname{Res}_e(V), W). \end{aligned}$$

Remarque 3.46. L'idéal AeA est l'idéal de A comprenant tous ses éléments pouvant être exprimé à partir de e parmi un de leurs facteurs. Alors, la catégorie des A/AeA -modules peut être identifiée à la sous-catégorie des A -modules V pour lesquels $eV = 0$. Puisque $N_e(V)$ est le plus grand sous-module de V annihilé par e , il est clair dans cette situation que $N_e(V) = V$.

Les foncteurs précédemment établis ont de jolies propriétés concernant leurs exactitudes.

Proposition 3.47. *Res_e est un foncteur exact. Si Ae est un eAe -module plat à droite, Ind_e est exact. Si eA est un eAe -module projectif à gauche, Coind_e est exact.*

Démonstration. Puisque $\operatorname{Res}_e(-) \cong \operatorname{Hom}_A(Ae, -)$, l'exactitude des deux foncteurs vont de pair. Or, nous avons montré à partir du théorème 3.27 et de la proposition 3.39 que les idéaux de la forme Ae pour $e \in E(A)$ primitif sont des A -modules projectifs. Alors, $\operatorname{Hom}_A(Ae, -)$ est exact. Les deux autres résultats sont des observations obtenues sur les foncteurs concernés à partir des définitions des modules projectifs et plats. $\square$

En considérant les deux dernières propositions, on en déduit la suivante.

Proposition 3.48. *Ind_e associe des eAe-modules projectifs à des A-modules projectifs. Coind_e associe des eAe-modules injectifs à des A-modules injectifs.*

Démonstration. Soit P un eAe -module. Puisque nous avons l'isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ind}_e(W), V) \cong \mathrm{Hom}_{eAe}(W, \mathrm{Res}_e(V))$$

donné par la proposition 3.45, on peut remplacer W par P et obtenir

$$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ind}_e(P), -) \cong \mathrm{Hom}_{eAe}(P, \mathrm{Res}_e(-)).$$

De par les propriétés du foncteur Hom , le fait que P soit projectif et que Res_e soit exact oblige $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ind}_e(P), -)$ à être exact par isomorphisme. Ceci n'est possible que si $\mathrm{Ind}_e(P)$ est projectif. On a donc bien que $\mathrm{Ind}_e(-)$ associe des modules projectifs entre eux. Concernant $\mathrm{Coind}_e(-)$, les arguments analogues s'appliquent avec essentiellement la même démarche que précédemment mais en remplaçant « projectif » par « injectif ». $\square$

Le foncteurs Res_e interagît joliment avec les produits tensoriels de modules et les foncteurs Hom .

Proposition 3.49. *Soient A, B des algèbres de dimensions finies et soit $e \in E(A)$. Supposons que U soit un B - A -bimodule et que V soit un A - B -bimodule. Alors, Ue est un B - eAe -bimodule et eV est un eAe - B -bimodule par restriction des actions. De plus, il existe des isomorphismes naturels de eAe -modules pour chaque B -module W tels que*

$$\begin{aligned} e(V \otimes_B W) &\cong eV \otimes_B W \\ e \cdot \mathrm{Hom}_B(U, W) &\cong \mathrm{Hom}_B(Ue, W) \end{aligned}$$

Démonstration. Il existe un isomorphisme de eAe - B -bimodule de la forme $eA \otimes_A V \rightarrow eV$ défini par $a \otimes v \rightarrow av$ et ayant pour application inverse

$v \rightarrow e \otimes v$. À partir de cet isomorphisme, nous avons des isomorphismes de eAe -modules

$$\begin{aligned} e(V \otimes_B W) &\cong eA \otimes_A (V \otimes_B W) \cong (eA \otimes_A V) \otimes_B W \cong (e \otimes_A V) \otimes_B W \\ &\cong eV \otimes_B W. \end{aligned}$$

Aussi, il existe un isomorphisme de B - eAe -bimodule $U \otimes_A Ae \rightarrow Ue$ défini par $u \otimes a \rightarrow ua$ et ayant pour inverse l'application définie par $v \rightarrow v \otimes e$. Rappelons que $eV' \cong \text{Hom}_A(Ae, V')$ pour V un A -module d'après la définition du foncteur restriction. Alors,

$$\begin{aligned} e \cdot \text{Hom}_B(U, W) &\cong \text{Hom}_A(Ae, \text{Hom}_B(U, W)) \\ &\cong \text{Hom}_B(U \otimes_A Ae, W) \\ &\cong \text{Hom}_B(Ue, W). \end{aligned} \quad \square$$

À partir d'ici, nous sommes en mesure d'identifier $e(V \otimes_B W)$ par $eV \otimes_B W$. Un résultat de la proposition 3.49 est le suivant : les foncteurs $\text{Ind}_e(-)$ et $\text{Coind}_e(-)$ sont des « inverses » à droite du foncteur $\text{Res}_e(-)$.

Proposition 3.50. *Pour tout eAe -module V , il existe des isomorphismes naturels*

$$\text{Res}_e \circ \text{Ind}_e(V) \cong V \cong \text{Res}_e \circ \text{Coind}_e(V).$$

Démonstration. La dernière proposition nous permet d'établir

$$\begin{aligned} \text{Res}_e \circ \text{Ind}_e(V) &= e(Ae \otimes_{eAe} V) \cong eAe \otimes_{eAe} V \cong V, \\ \text{Res}_e \circ \text{Coind}_e(V) &= e \cdot \text{Hom}_{eAe}(eA, V) \cong \text{Hom}_{eAe}(eAe, V) \cong V. \quad \square \end{aligned}$$

Dans la théorie des catégories, un concept analogue à l'injectivité d'un foncteur est celui de la *pleine fidélité*.

Proposition 3.51. *Ind_e et Coind_e sont pleinement fidèles.*

Démonstration. Puisque le cas de Coind_e est similaire, ne considérons que le cas de Ind_e . Soient V, W des eAe -modules. Alors,

$$\psi : \text{Hom}_{eAe}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_A(\text{Ind}_e(V), \text{Ind}_e(W))$$

est un homomorphisme $\mathbb{K}$ -linéaire injectif défini par $f \rightarrow \text{Ind}_e(f) = 1_{Ae} \otimes f$. On déduit cette injectivité à partir de la proposition 3.50 et de par le fait que $\text{Res}_e \circ \text{Ind}_e$ est isomorphe à un foncteur identité sur les eAe -modules. Puisque nous avons déjà établi à la proposition 3.45 l'existence de l'isomorphisme naturel

$$\text{Hom}_A(\text{Ind}_e(W), V) \cong \text{Hom}_{eAe}(W, \text{Res}_e(V)),$$

on obtient par isomorphisme

$$\text{Hom}_{eAe}(V, W) \cong \text{Hom}_{eAe}(V, \text{Res}_e(\text{Ind}_e(W))) \cong \text{Hom}_A(\text{Ind}_e(V), \text{Ind}_e(W)).$$

En comparant les dimensions de son domaine et de son image, l'injectivité impose que ψ soit un isomorphisme. $\square$

Nous avons jusqu'ici démontré des relations intéressantes entre le foncteur Res_e et les foncteurs Ind_e et Coind_e . Intéressons-nous maintenant aux relations entre Res_e et les foncteurs T_e et N_e .

Corollaire 3.52. *Soit V une A -module. Alors,*

1. $\text{Res}_e(N_e(V)) = 0$,
2. $\text{Res}_e(T_e(V)) = \text{Res}_e(V)$,
3. $\text{Res}_e(V/N_e(V)) \cong \text{Res}_e(V)$,
4. $\text{Res}_e(V/T_e(V)) \cong 0$.

Démonstration. 1. Par définition, $N_e = \{v \in V : eAv = 0\}$. Alors, puisque $\text{Res}_e(V) \cong eV$, il est clair que $\text{Res}_e(N_e(V)) \cong eN_e(V) = 0$.

2. Puisque

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_e(T_e(V)) &= e(AeV) \subseteq eV = \operatorname{Res}_e(V) \subseteq eAeV = e(AeV) \\ &= \operatorname{Res}_e(T_e(V)),\end{aligned}$$

le résultat est obtenu par double inclusion.

3. Le fait que Res_e soit exact (proposition 3.47) implique que $\operatorname{Res}_s(V/-) \cong \operatorname{Res}_e(V)/\operatorname{Res}_e(-)$. Le point (3) se déduit du point (1).
4. Argument similaire à (3), et l'on conclut le point (4) à partir du point (2). $\square$

Établissons maintenant une relation entre les foncteurs T_e et N_e avec les foncteurs Ind_e et Coind_e .

Proposition 3.53. *Soit V un eAe -module. Alors,*

1. $T_e(\operatorname{Ind}_e(V)) = \operatorname{Ind}_e(V)$,
2. $N_e(\operatorname{Coind}_e(V)) = 0$.

Démonstration. 1. Directement,

$$T_e(\operatorname{Ind}_e(V)) = Ae(Ae \otimes_{eAe} V) = Ae(eAe) \otimes_{eAe} V = Ae \otimes_{eAe} V = \operatorname{Ind}_e(V).$$

2. Supposons $\phi \in N_e(\operatorname{Coind}_e(V))$. Par définition de N_e , on doit poser que $\phi : eA \rightarrow V$ est un eAe -homomorphisme tel que $eA\phi = 0$ par définition de N_e . Pour $a \in A$, on a $\phi(ea) = \phi(eea) = ea\phi(e) = 0$ car $ea\phi = 0$. Alors, $\phi = 0$ et donc $N_e(\operatorname{Coind}_e(V)) = 0$. $\square$

À partir des deux prochains résultats, démontrons que Ind_e et Coind_e préservent l'indécomposabilité.

Proposition 3.54. Soit V un A -module tel que eV soit un eAe -module indécomposable. Alors, si $T_e(V) = V$, ou si $N_e(V) = 0$, nous avons que V est indécomposable.

Démonstration. Supposons que V ne soit pas indécomposable. Alors, $V = V_1 \oplus V_2$ pour certains A -sous-modules V_1 et V_2 de V . Alors, $eV = eV_1 \oplus eV_2$. Or, puisque eV est indécomposable, on a que eV_1 ou eV_2 est trivial. Sans perte de généralité, supposons que $eV_2 = 0$. Dans ce cas, $V_2 \subseteq N_e(V)$ par définition de $N_e(V)$. Si $N_e(V) = 0$, alors $V_2 = 0$ et donc $V = V_1$ est indécomposable. Si $T_e(V) = V$, alors

$$T_e(V) = AeV = AeV_1 \oplus AeV_2 = AeV_1 = V$$

puisque $AeV_2 = A(eV_2) = 0$ par indécomposabilité de eV . Puisque $AeV_1 = AeV$, l'indécomposabilité de V_1 fait en sorte que $AeV_1 = V_1$: on en déduit que V est indécomposable. $\square$

Corollaire 3.55. Soit V un eAe -module indécomposable. Alors, $\text{Ind}_e(V)$ et $\text{Res}_e(V)$ sont des A -modules indécomposables.

Démonstration. Supposons que V soit indécomposable. Alors, $eV = V \cong \text{Res}_e(V)$. En particulier, la proposition 3.50 nous permet d'établir que

$$\text{Res}_e \circ \text{Ind}_e(V) \cong V \cong \text{Res}_e \circ \text{Coind}_e(V).$$

Alors,

$$e \cdot \text{Ind}_e(V) \cong V \cong e \cdot \text{Coind}_e(V)$$

sont des eAe -modules isomorphes indécomposables. On a déjà montré, à la proposition 3.53, que $T_e(\text{Ind}_e(V)) = V$ et $N_e(\text{Coind}_e(V)) = 0$ si V est un eAe -module. Puisque $\text{Ind}_e(V)$ et $\text{Coind}_e(V)$ sont des A -modules, la proposition 3.54 nous permet de conclure que $\text{Ind}_e(V)$ et $\text{Coind}_e(V)$ sont indécomposables. $\square$

De par la proposition 3.45 de la sous-section, et pour V un A -module, il existe des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{eAe}(\mathrm{Res}_e(V), \mathrm{Res}_e(V)) &\cong \mathrm{Hom}_{eAe}(eV, \mathrm{Res}_e(V)) \cong \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ind}_e(eV), V) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{eAe}(\mathrm{Res}_e(V), eV) \cong \mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{Coind}_e(eV)).\end{aligned}$$

Donc, pour $1_{eV} \in \mathrm{Hom}_{eAe}(\mathrm{Res}_e(V), \mathrm{Res}_e(V))$, il doit pouvoir lui associer deux morphismes $\alpha : \mathrm{Ind}_e(eV) \rightarrow V$ et $\beta : V \rightarrow \mathrm{Coind}_e(eV)$ uniques à isomorphismes-près. À partir de ce constat, on va montrer le lien entre α et β à partir de T_e et $N_e(V)$.

Proposition 3.56. *Soit V un A -module et soient $\alpha : \mathrm{Ind}_e(eV) \rightarrow V$, $\beta : V \rightarrow \mathrm{Coind}_e(eV)$ définies par*

$$\begin{aligned}\alpha(a \otimes v) &= av, \text{ pour } a \in Ae, v \in eV \\ \beta(v)(a) &= av, \text{ pour } a \in eA, v \in V\end{aligned}$$

Alors, $T_e(V) = \alpha(\mathrm{Ind}_e(eV))$ et $N_e(V) = \ker(\beta)$. De plus, nous avons les inclusions $\ker(\alpha) \subseteq N_e(\mathrm{Ind}_e(V))$ et $T_e(\mathrm{Coind}_e(eV)) \subseteq \beta(V)$.

Démonstration. Au premier point de la proposition 3.53, nous avons démontré que

$$\alpha(\mathrm{Ind}_e(eV)) = \alpha(T_e(\mathrm{Ind}_e(eV))) \subseteq T_e(V).$$

Concernant l'inclusion inverse, si $x \in T_e(V)$, alors $x = aev$ pour $a \in A, e \in E(A)$ et $v \in V$. Or, $ae v = (ae)(ev) = \alpha(ae \otimes ev)$. Alors, $T_e(V) \subseteq \alpha(\mathrm{Ind}_e(eV))$. Par double inclusion, $T_e(V) = \alpha(\mathrm{Ind}_e(eV))$. Pour $a \in Ae, v \in eV$, observons que

$$e(a \otimes v) = ea \otimes v = e \otimes eav = e \otimes (e\alpha(a \otimes v)).$$

Alors, $\forall x \in \mathrm{Ind}_e(eV)$, nous avons que $ex = e \otimes e\alpha(x)$. Si $x \in \ker(\alpha)$ et

$a \in A$, nous avons l'égalité

$$eax = e \otimes e\alpha(ax) = e \otimes ea\alpha(x) = 0.$$

Donc, $x \in N_e(\text{Ind}_e(eV))$ impliquant que $\ker(\alpha) \subseteq N_e(\text{Ind}_e(V))$. Au second point de la proposition 3.53, nous avons démontré que $N_e(\text{Coind}_e(eV)) = 0$ en prenant en compte que eV est un eAe -module. Alors, $\beta(N_e(V)) \subseteq N_e(\text{Coind}_e(eV)) = 0$ et il est immédiat que $N_e(V) \subseteq \ker(\beta)$. Or, si $v \in \ker(\beta)$, alors $eAv = \beta(v)(eA) = 0$ et donc $v \in N_e(V)$: il faut que $\ker(\beta) = N_e(V)$. Soit $\phi \in e \cdot \text{Coind}_e(eV)$ de telle sorte que $e\phi = \phi$. Fixons $\phi(e) = v \in eV$. Pour $a \in A$, on aura

$$\phi(a) = (e\phi)(a) = \phi(ae) = ae\phi(e) = a\phi(e) = av = \beta(v)(a)$$

et ainsi que $\phi = \beta(v)$. Donc, $e \cdot \text{Coind}_e(eV) \subseteq \beta(V)$. On en déduit que

$$T_e(\text{Coind}_e(eV)) = Ae \cdot \text{Coind}_e(eV) \subseteq A \cdot \beta(V) = \beta(V). \quad \square$$

Pour un eAe -module V , nous avons montré à la proposition 3.50 qu'il existe des isomorphismes naturels

$$\text{Res}_e \circ \text{Ind}_e(V) \cong V \cong \text{Res}_e \circ \text{Coind}_e(V)$$

qui impliquent, en prenant en compte que $\text{Res}_e(V) = eV$, que

$$e \cdot \text{Ind}_e(V) \cong V \cong e \cdot \text{Coind}_e(V).$$

Dans le corollaire suivant, nous démontrons que l'application identité 1_V correspond à un homomorphisme $\phi : \text{Ind}_e(V) \rightarrow \text{Coind}_e(V)$ qui se confond avec les isomorphismes naturels obtenus à la proposition 3.45.

Corollaire 3.57. *Soit W un eAe -module et soit $\phi : \text{Ind}_e(W) \rightarrow \text{Coind}_e(W)$*

définie par

$$\phi(a \otimes w)(b) = baw$$

pour $a \in Ae, b \in eA$ et $w \in W$. Alors, $\phi(\text{Ind}_e(W)) = T_e(\text{Coind}_e(W))$ et $\ker(\phi) = N_e(\text{Ind}_e(W))$. Donc, nous obtenons l'isomorphisme de A -modules suivant :

$$\text{Ind}_e(W)/N_e(\text{Ind}_e(W)) \cong T_e(\text{Coind}_e(W)).$$

Démonstration. L'astuce de la démonstration est d'employer la proposition 3.56 à deux reprises : une première fois en posant $V = \text{Coind}_e(W)$, puis une seconde fois en posant $V = \text{Ind}_e(V)$, et le tout combiné au fait que

$$e \cdot \text{Ind}_e(W) \cong W \cong e \cdot \text{Coind}_e(W)$$

de par la proposition 3.50.

Prenons l'isomorphisme $W \rightarrow e \cdot \text{Coind}_e(W)$ associant $w \rightarrow \phi_w$ pour lequel l'application $\phi_w : eA \rightarrow W$ est définie par $\phi_w(b) = bew$ pour $b \in eA$. Alors, $\alpha(a \otimes \phi_w) = a\phi_w$ pour $a \in Ae$. Puisque $(a\phi_w)(b) = \phi_w(ba) = baew = baw$, nous avons que $\alpha(a \otimes \phi_w) = \phi(a \otimes w)$ et nous concluons que ϕ et α se confondent.

Concernant l'isomorphisme $W \rightarrow e \cdot \text{Ind}_e(W)$ défini par $w \rightarrow e \otimes w$, prenons $a \in Ae$ et $b \in eA$. Alors, $ba \in eAe$ et nous avons alors que

$$\beta(a \otimes w)(b) = ba \otimes w = e \otimes baw = e \otimes \phi(a \otimes w)(b).$$

Donc, ϕ et β se confondent. Puisque $T_e(V) = \alpha(\text{Ind}_e(eV))$ et $N_e(V) = \ker(\beta)$ de par la dernière proposition, nous avons que

$$T_e(\text{Coind}_e(W)) = \alpha(\text{Ind}_e \circ \text{Res}_e \circ \text{Coind}_e(W)) = \alpha(\text{Ind}_e(W)) = \phi(\text{Ind}_e(W))$$

et que

$$N_e(\text{Ind}_e(W)) = \ker \beta = \ker \phi. \quad \square$$

3.1.5 Relations entre idempotents et modules simples

Dans cette section, considérons toujours que A soit une $\mathbb{K}$ –algèbre de dimension finie. Le foncteur Res_e étudié à la dernière section possède la jolie propriété qu’il associe des A –modules simples soit à des eAe –modules simples, soit au eAe –module trivial.

Lemme 3.58. *Soit S un A –module simple. Alors, $\text{Res}_e(S) = eS$ est soit nul, soit un eAe –module simple.*

Démonstration. Soit $v \in eS$ non nul. Alors, puisque $Av = S$ par simplicité, et puisque

$$eAev = eA(ev) = eAv = e(Av) = eS,$$

ceci implique que eS est un eAe –module simple. $\square$

Corollaire 3.59. *Si V est un A –module semi-simple, alors $\text{Res}_e(V) = eV$ est un eAe –module semi-simple.*

Démonstration. De par l’écriture du socle de V obtenu par $\bigoplus_i V_i$, le fait que

$$\text{Res}_e(V) = eV = \bigoplus_i eV_i,$$

combiné au lemme 3.58, rend le résultat immédiat. $\square$

Corollaire 3.60. *Soit V un A –module de dimension finie ayant pour facteurs de ses séries de composition $\{S_i\}_{i=1}^m$ (avec multiplicités). Alors, les facteurs des séries de composition de eV en tant que eAe –module sont obtenus à partir de $\{eS_i\}_{i=1}^m$ (avec multiplicités) pour lesquels $eS_i \neq 0$.*

Démonstration. Soit $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_m = V$ une série de composition ayant $S_i \cong V_i/V_{i-1}$ pour facteurs pour les i concernés. Nous avons montré à la proposition 3.47 que Res_e est un foncteur exact. Alors, $eV_i/eV_{i-1} \cong e(V_i/V_{i-1}) = eS_i$. Puisque chacun des S_i est simple de par la définition des facteurs, eS_i est simple de par le lemme 3.58. Si l'on retire les répétitions de la série de composition, alors $0 = eV_0 \subset eV_1 \subset \dots \subset eV_m = V$ est une série de composition pour eV ayant pour facteurs les eS_i obtenus à partir de la liste $\{eS_i\}_{i=1}^m$. $\square$

Nous voulons maintenant mettre en relation le radical de A avec le radical de eAe . Rappelons que l'on note le radical d'un certain module V par $\text{rad}(V)$.

Proposition 3.61. *$\text{rad}(eAe) = e(\text{rad}(A))e$. En particulier, si A est semi-simple, alors eAe est semi-simple.*

Démonstration. Soit S un A -module simple. Alors, eS est un eAe -module simple. Rappelons que le radical d'une algèbre est un idéal nilpotent (théorème 3.13, point 6). De par la définition du radical, $\text{rad}(eAe)S = \text{rad}(eAe)eS = 0$. Puisque $\text{rad}(eAe) \subseteq \text{rad}(A)$, on a que $\text{rad}(eAe) = e(\text{rad}(eAe))e \subseteq e(\text{rad}(A))e$.

Concernant l'inclusion inverse, observons que $e(\text{rad}(A))e$ est un idéal de eAe . On veut démontrer que $e(\text{rad}(A))e$ est nilpotent (en utilisant le théorème 3.13, point 7). Puisque $\text{rad}(A)^n = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ par nilpotence, et puisque $\text{rad}(A)$ est un idéal, nous avons l'inclusion $[e(\text{rad}(A))e]^n \subseteq \text{rad}(A)^n = 0$. Nous sommes maintenant convaincus que $e(\text{rad}(A))e \subseteq \text{rad}(eAe)$.

Nous avons déjà établi dans le chapitre précédent que A est semi-simple si et seulement si son radical est trivial (proposition 3.11). L'égalité ici démontrée nous permet de conclure que eAe est semi-simple si A l'est. $\square$

Abordons maintenant les socles et les radicaux des modules induits et coinduits par les foncteurs Ind_e et Coind_e .

Proposition 3.62. *Soit V un A -module de dimension finie.*

1. *Si $V = T_e(V)$, alors $N_e(V) \subseteq \text{rad}(V)$ et ce sera une égalité si et seulement si V est semi-simple.*
2. *Si $N_e(V) = 0$, alors $\text{soc}(V) \subseteq T_e(V)$ et l'égalité tiendra si et seulement si V est semi-simple.*

Démonstration. Posons $R = \text{rad}(A)$ et rappelons que le radical de V est l'intersection de tous les sous-modules maximaux de V .

1. Supposons que M soit un sous-module maximal de V . Si $N_e(V) \not\subseteq M$, alors $V = N_e(V) + M$ et $eV = e(N_e(V) + M) = eM$. Ceci implique l'inclusion $M \supseteq A(eM) = A(eV) = (Ae)V = T_e(V) = V$. Puisque c'est une contradiction, il faut que $N_e(V) \subseteq M$. Puisque M est un sous-module maximal arbitraire, on déduit que $N_e(V) \subseteq \text{rad}(V)$. Le théorème 3.13 (point 4) nous permet d'obtenir que $RV = \text{rad}(V)$. De par la proposition 3.61, $eRe = \text{rad}(eAe)$. Donc, puisque $V = T_e(V)$ par hypothèse, et puisque $RA = R$ par définition du radical de A , on obtient que

$$\begin{aligned} e \cdot \text{rad}(V) &= eRV = eR \cdot T_e(V) = eRAeV \\ &= (eRe)eV = \text{rad}(eAe)eV \\ &= \text{rad}(eV). \end{aligned}$$

Nous avons que $\text{rad}(eV)$ est nul si et seulement si eV est semi-simple (théorème 3.13, point 4). Donc, eV est semi-simple si et seulement si $e \cdot \text{rad}(V) = 0$. Alors, par double inclusion, $\text{rad}(V) = N_e(V)$ si et seulement si eV est semi-simple.

2. Soit S un sous-module simple de V . Par hypothèse, $N_e(V) = 0$. On en déduit que $0 \neq eS \subseteq eV$: ceci fait en sorte que $S = AeS \subseteq AeV =$

$T_e(V)$. Alors, $\text{soc}(V) \subseteq T_e(V)$. En observant que

$$e \cdot \text{rad}(AeV) = e(RAeV) = eReeV = \text{rad}(eAe)eV = \text{rad}(eV),$$

on en déduit, d'une façon similaire à la partie (1), que eV est semi-simple si et seulement si $e \cdot \text{rad}(T_e(V)) = 0$, et donc si et seulement si $\text{rad}(T_e(V)) \subseteq N_e(V) = 0$. Or, $\text{rad}(T_e(V)) = 0$ si et seulement si $T_e(V) \subseteq \text{soc}(V)$, alors eV est semi-simple si et seulement si $T_e(V) = \text{soc}(V)$. $\square$

Établissons une relation entre un A -module V et un de ses sous-modules simples non nuls eV .

Proposition 3.63. *Soit V un A -module et eV un de ses sous-modules simples.*

1. *Si $V = T_e(V)$, alors $V/\text{rad}(V) = V/N_e(V)$ est simple.*
2. *Si $N_e(V) = 0$, alors $\text{soc}(V) = T_e(V)$ est simple.*

Démonstration. 1. Puisque $V = T_e(V)$, la proposition 3.62 établit que $N_e(V) = \text{rad}(V)$. Si $v \notin N_e(V)$, alors $0 \neq eAv \subseteq eV$. Rappelons que eV est un eAe -sous-module de V . Alors, $eAv = eV$ de par la simplicité de eV . De plus,

$$Av \supseteq Ae(Av) = Aev = T_e(V) = V.$$

Alors, $A(v + N_e(V)) = V/N_e(V)$ doit être simple.

2. Puisque $N_e(V) = 0$, la proposition 3.62 établit que $\text{soc}(V) = T_e(V)$. Soit $0 \neq v \in T_e(V) = AeV$, alors $eAv \neq 0$ (autrement, $v \in N_e(V) = 0$ est en contradiction avec le choix de v). Alors, $eAv = eV$ de par la simplicité de eV . Ceci nous permet d'établir l'inclusion

$$\text{soc}(V) \supseteq Av \supseteq A(eAv) \supseteq AeV = T_e(V)$$

nous permettant de conclure que $T_e(V)$ est simple. $\square$

Enfin, appliquons ces résultats aux modules induits et coinduits.

Corollaire 3.64. *Soit V un eAe -module semi-simple. Alors,*

$$\text{Ind}_e(V)/\text{rad}(\text{Ind}_e(V)) \cong \text{soc}(\text{Coind}_e(V)).$$

Qui plus est, si V est simple, alors $\text{Ind}_e(V)/\text{rad}(\text{Ind}_e(V))$ et $\text{soc}(\text{Coind}_e(V))$ sont des modules simples isomorphes et il existe des eAe -isomorphismes

$$\text{Res}_e(\text{Ind}_e(V)/\text{rad}(\text{Ind}_e(V))) \cong V \cong \text{Res}_e(\text{soc}(\text{Coind}_e(V))).$$

Démonstration. En se référant à la proposition 3.50, nous obtenons

$$\text{Res}_e \circ \text{Ind}_e(V) \cong V \cong \text{Res}_e \circ \text{Coind}_e(V).$$

De par les propositions 3.53 et 3.62, nous obtenons les égalités $\text{rad}(\text{Ind}_e(V)) = N_e(V)$ et $\text{soc}(\text{Coind}_e(V)) = T_e(\text{Coind}_e(V))$. Le corollaire 3.57 établit l'isomorphisme

$$\text{Ind}_e(V)/N_e(\text{Ind}_e(V)) \cong T_e(\text{Coind}_e(V))$$

et nous sommes alors convaincus que

$$\text{Ind}_e(V)/\text{rad}(\text{Ind}_e(V)) \cong \text{soc}(\text{Coind}_e(V)).$$

Puisque $T_e(\text{Ind}_e(V)) = \text{Ind}_e(V)$ et $N_e(\text{Coind}_e(V)) = 0$ de par la proposition 3.53, et puisque $\text{Res}_e(V/N_e(V)) \cong \text{Res}_e(V)$ pour V un A -module (corollaire 3.52), on aura que

$$e \cdot \text{Ind}_e(V) \cong V \cong e \cdot \text{Coind}_e(V)$$

sont des modules simples. On en conclut finalement l'isomorphisme

$$\text{Res}_e(\text{Ind}_e(V)/\text{rad}(\text{Ind}_e(V))) \cong V \cong \text{Res}_e(\text{soc}(\text{Coind}_e(V))). \quad \square$$

Caractérisons maintenant les isomorphismes naturels entre les modules induits et coinduits.

Corollaire 3.65. *Soit V un eAe -module semi-simple et soit*

$$\phi : \text{Ind}_e(V) \rightarrow \text{Coind}_e(V)$$

telle que donnée dans la section précédente et définie par la règle d'association $\phi(a \otimes v)(b) = bav$ pour $a \in Ae, b \in eA, v \in V$. Alors,

1. *ϕ est injective si et seulement si $\text{Ind}_e(V)$ est semi-simple.*
2. *ϕ est surjective si et seulement si $\text{Coind}_e(V)$ est semi-simple.*
3. *ϕ est un isomorphisme si (1) et (2) sont respectés.*

Démonstration. En se référant aux propositions 3.50, 3.53 et 3.63, et au corollaire 3.57, on a que $\ker \phi = \text{rad}(\text{Ind}_e(V))$. Nous obtenons ainsi que l'injectivité de ϕ est obtenue si le module induit est semi-simple. Nous avons aussi démontré, à partir des mêmes résultats mentionnés, que $\phi(\text{Ind}_e(V)) = \text{soc}(\text{Coind}_e(V))$. La surjectivité en découle si $\text{Coind}_e(V)$ est semi-simple. $\square$

Nous établissons maintenant une bijection entre les classes d'isomorphismes des eAe -modules simples et les classes d'isomorphismes des A -modules qui ne sont pas annihilés par l'idempotent e .

Théorème 3.66. *Il existe une bijection entre les classes d'isomorphismes des eAe -modules simples et les classes d'isomorphismes des A -modules qui*

ne sont pas annihilés par l'idempotent e . Celle-ci est induite par

$$\begin{aligned} V &\rightarrow \text{Ind}_e(V)/N_e(\text{Ind}_e(V)) = \text{Ind}_e(V)/\text{rad}(\text{Ind}_e(V)) \\ &\cong \text{soc}(\text{Coind}_e(V)) \cong T_e(\text{Coind}_e(V)) \\ S &\rightarrow \text{Res}_e(S) = eS \end{aligned}$$

pour V un eAe -module simple et S un A -module simple tel que $eS \neq 0$. Il existe donc une bijection entre les ensembles des différentes classes d'isomorphismes des A -modules simples et l'union disjointe des ensembles de classes d'isomorphismes des eAe -modules simples avec les A/AeA -modules simples.

Démonstration. On se réfère aux propositions 3.53, 3.62, au lemme 3.58 et au corollaire 3.64 afin d'établir que, puisque V est un eAe -module simple, nous avons

$$e \cdot \text{soc}(\text{Coind}_e(V)) \cong V.$$

Il suffit de démontrer que si S est un A -module simple tel que $eS \neq 0$, alors

$$S \cong \text{soc}(\text{Coind}_e(eS)).$$

De par l'isomorphisme naturel établi à la proposition 3.45,

$$\text{Hom}_A(S, \text{soc}(\text{Coind}_e(eS))) \cong \text{Hom}_A(S, \text{Coind}_e(eS)) \cong \text{Hom}_{eAe}(eS, eS) \neq 0$$

Le fait que eS soit simple (lemme 3.58) rend $\text{soc}(\text{Coind}_e(eS))$ simple de par le corollaire 3.64. Le lemme de Schur (lemme 3.4) nous permet de conclure que $S \cong \text{soc}(\text{Coind}_e(V))$. Finalement, les A -modules simples annihilés par e sont exactement les A/AeA -modules simples. $\square$

Enfin, on lie les idempotents primitifs de A et eAe grâce au lemme suivant.

Lemme 3.67. *Supposons que S soit un A -module simple tel que $eS \neq 0$, et donc que eS soit un eAe -module simple. Si $f \in eAe$ est un idempotent primitif tel que $eAef/(e \cdot \text{rad}(A) \cdot e)f \cong eS$, alors f est un idempotent primitif de A tel que $Af/\text{rad}(A)f \cong S$.*

Démonstration. Soit $f \in eAe$ un idempotent primitif. Alors, $fAf = feAef$ et $E(fAf) = E(feAef) = \{0, f\}$ de par la proposition 3.39. Alors, la même proposition nous permet d'établir que f est primitif dans A . Puisque

$$0 \neq \text{Hom}_{eAe}(eAef, eS) \cong feS = fS$$

de par la proposition 3.35, on doit avoir $\text{Hom}_A(Af/\text{rad}(A)f, S) \cong \text{Hom}_A(Af, S) \cong fS \neq 0$ compte-tenu du fait que Af est indécomposable (proposition 3.39).

Pourtant, $Af/\text{rad}(A)f$ et S sont simples : le lemme de Schur (lemme 3.4) nous permet de conclure que $Af/\text{rad}(A)f \cong S$. $\square$

3.1.6 Algèbres de monoïdes et représentations

Un peu à la manière d'une représentation sur l'algèbre d'un groupe, on définit les représentations sur les algèbres de monoïdes.

Définition 3.68. Soit M un monoïde fini et $\mathbb{K}$ un corps. On définit une *représentation de M sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel V* comme étant un homomorphisme $\rho : M \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. La *dimension de ρ* est la dimension de V . Deux représentations $\rho : M \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ et $\psi : M \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(W)$ sont dites *équivalentes* s'il existe un $\mathbb{K}$ -isomorphisme d'espaces vectoriels $T : V \rightarrow W$ faisant en sorte que $T^{-1}\psi T = \rho$. On dit qu'une représentation est *fidèle* si elle est injective.

Si l'on fixe une base d'une représentation sur V d'un monoïde M , on est en mesure d'identifier $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ avec $M_n(\mathbb{K})$ où $n = \dim V$ et l'on définit les

représentations matricielles d'une façon analogue à celles des représentations matricielles pour les groupes finis. Puisque nous nous intéressons aux classes d'équivalences de représentations pour un certain monoïde fini M , on s'en tiendra aux représentations en termes de modules.

Définition 3.69. Soit M un monoïde fini et $\mathbb{K}$ un corps. On définit *l'algèbre de M* , notée $\mathbb{K}M$, comme étant le $\mathbb{K}$ –espace vectoriel ayant pour base les éléments de M . Puisque M est fini, l'algèbre de M est de dimension finie. Les éléments de l'algèbre de M sont de la forme $\sum_{m_i \in M} k_i m_i$ où $k_i \in \mathbb{K}$. La multiplication des éléments de $\mathbb{K}M$ est définie à partir de la distribution usuelle :

$$\left(\sum_{m_i \in M} k_i m_i \right) \cdot \left(\sum_{m_j \in M} k'_j m_j \right) = \sum_{m_i, m_j \in M} k_i k'_j m_i m_j.$$

En particulier, chaque homomorphisme de monoïde $\phi : M \rightarrow A$ possède une unique extension linéaire en tant que $\mathbb{K}$ –homomorphisme d'espace vectoriel.

Proposition 3.70. *Soit A une $\mathbb{K}$ –algèbre et M un monoïde. Tout homomorphisme $\phi : M \rightarrow A$ se prolonge linéairement en un unique homomorphisme de $\mathbb{K}$ –algèbre $\Phi : \mathbb{K}M \rightarrow A$.*

Démonstration. C'est un résultat direct de par la définition suivante à partir d'un tel ϕ arbitraire :

$$\Phi\left(\sum_{m \in M} k_m m\right) = \sum_{m \in M} k_m \phi(m).$$

L'unicité se démontre en considérant que deux telles extensions se confondent point par point. $\square$

Définition 3.71. Rappelons qu'un M –module sur un $\mathbb{K}$ –espace vectoriel V est la même chose qu'un $\mathbb{K}M$ –module muni d'un $\mathbb{K}$ –homomorphisme $\rho : M \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Dans ce cas, on dira que le $\mathbb{K}M$ –module V se permet la représentation $\rho : M \rightarrow V$. On dénotera l'ensemble des classes d'isomorphismes d'un $\mathbb{K}M$ –module simple par $\text{Irr}_{\mathbb{K}}(M)$.

Corollaire 3.72. Soit M un monoïde fini et $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos. Supposons que $\{S_i\}_{i=1}^r$ forme un ensemble complet de représentants des classes d'isomorphismes de $\mathbb{K}M$ -modules simples et que S_k se permet une représentation $\phi^{(k)} : M \rightarrow M_{n_k}(\mathbb{K})$ telle que $\phi^{(k)}(m) = (\phi_{ij}^{(k)}(m))$. Alors, les applications $\phi_{ij}^{(k)} : M \rightarrow \mathbb{K}$ sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{K}^{|M|}$ pour $1 \leq k \leq r$ et $1 \leq i, j \leq n_k$.

Démonstration. Si l'on restreint $\phi \rightarrow \phi|_M$, on constate que $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}M, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{|M|}$ de par la construction de l'algèbre de M . Le résultat découle du théorème 3.24. $\square$

Définition 3.73. Si $\phi : M \rightarrow N$ est homomorphisme de monoïdes, alors tout $\mathbb{K}N$ -modules V peut être vu comme étant un $\mathbb{K}M$ -modules de par l'action $mv = \phi(m)v$ pour $m \in M$ et $v \in V$. On dira alors que le $\mathbb{K}M$ -module V est une *inflation* du $\mathbb{K}N$ -module V à M . En général, si $\psi : A \rightarrow B$ est un homomorphisme d'algèbres et que V' est un B -modules, alors on dira que le A -module défini par $av = \psi(a)v$ (pour $a \in A$ et $v \in v$) est l'inflation du B -module V à A à partir de ψ .

3.1.7 La théorie de Clifford-Munn-Ponizovskii

Fixons M un monoïde et $\mathbb{K}$ un corps. Si V est un $\mathbb{K}M$ -module, si $X \subseteq M$, et si $Y \subseteq V$, on note alors

$$XY = \left\{ \sum k_i x_i y_i : k_i \in \mathbb{K}, x_i \in X, y_i \in Y, \text{ et la somme est finie} \right\}$$

ainsi que $\mathbb{K}X$ pour le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}M$ engendré par X . Remarquons, à partir de cette notation, que si I est un idéal (resp. à gauche et à droite) de M , alors $\mathbb{K}I$ est un idéal (resp. à gauche et à droite) de $\mathbb{K}M$.

Définition 3.74. Soit S in $\mathbb{K}M$ -module simple. Rappelons l'égalité $I_e = eMe \setminus G_e = eI(e)e$, que $I(e) = \{m \in M : e \notin MmM\}$ et que $eI(e)e = I_e$. On dit que $e \in E(M)$ est une *pointe* de S si $eS \neq 0$ mais $I_e S = 0$.

Quelques notions élémentaires concernant les pointes.

Proposition 3.75. Soit S un $\mathbb{K}M$ -module simple ayant $e \in E(M)$ pour *pointe*.

1. $I(e) = \{m \in M : mS = 0\}$.
2. Si $f \in E(M)$, alors f est une *pointe* pour S si et seulement si $MeM = MfM$.

Démonstration. 1. Puisque S est simple et que $eS \neq 0$ (sinon e ne serait pas une *pointe*), nous avons que $MeS = MS = S$. Alors, $I(e)S = I(e)(MeS) = I(e)eS$. Supposons que $I(e)S \neq 0$ et que $I(e) \neq \emptyset$. Puisque $I(e)$ est un idéal de M , $I(e)S$ est un sous-module de S . La simplicité de S nous contraint à établir que $(I(e)e)S = I(e)S = S$. Or, puisque e est une *pointe*, cela implique que

$$eS = e(I(e)eS) = (eI(e)e)S = I_e S = 0.$$

C'est une contradiction : on a que $I(e)S = 0$ et nous avons démontré l'inclusion $I(e) \subseteq \{m \in M : mS = 0\}$. Supposons que $m \in \{m \in M : mS = 0\}$ et que $e \in MmM$. Alors,

$$0 \neq eS \subseteq MmMS \subseteq M(mS)$$

et $mS \neq 0$: c'est une contradiction. On a donc que $m \in I(e)$ et que l'égalité voulue est démontrée par double inclusion.

2. « $\implies$ » Si $f \in E(M)$ est une *pointe*, alors $fS \neq 0$ et $f \notin I(e)$ de par le résultat de (1). Alors, de par la définition de $I(e)$, on a que

$e \in MfM$ et donc que $MeM \subseteq MfM$. On peut échanger e et f dans le même argument : ceci nous permet de déduire que $MeM = MfM$ par double inclusion.

« $\Leftarrow$ » Supposons que $MeM = MfM$. Par (1), le fait que $f \notin I(e)$ nous permet de déduire que $I(f) \subseteq I(e)$, ce qui implique $fI(f)f = I_f \subseteq fI(e)f \subseteq I(e)$. Donc, nous avons $fS \neq 0$ et $I_f S = 0$: il faut que f soit une pointe pour S . $\square$

Remarque 3.76. Supposons que M soit un monoïde et que I soit un de ses idéaux. Alors, $\mathbb{K}M/\mathbb{K}I$ est un espace vectoriel ayant pour base $\{m + \mathbb{K}I : m \notin I\}$ et ayant pour multiplication

$$(m + \mathbb{K}I)(m' + \mathbb{K}I) = \begin{cases} mm' & \text{si } mm' \notin I, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'identification du co-ensemble $(m + \mathbb{K}I)$ se fait naturellement par m si $m \notin I$. Dans ce cas, on peut écrire $(\mathbb{K}M/\mathbb{K}I)m$ plutôt que $(\mathbb{K}M/\mathbb{K}I)(m + \mathbb{K}I)$ afin d'alléger la notation.

Fixons un idempotent $e \in E(M)$. Nous allons, au cours de tout le reste de notre étude des représentations irréductibles des monoïdes finis, s'intéresser particulièrement au monoïde

$$A_e = \mathbb{K}M/\mathbb{K}I(e).$$

Les A_e -modules forment la sous-catégorie des $\mathbb{K}M$ -modules annihilés par $I(e)$. De plus, nous avons que

$$eA_e e \cong \mathbb{K}(eMe)/\mathbb{K}I_e \cong \mathbb{K}G_e$$

de par le corollaire 2.39. La proposition 3.75 nous dit qu'un module simple S possède e pour pointe si et seulement si S est annihilé par $I(e)$ mais pas

e . Alors, les $\mathbb{K}M$ –modules simples ayant e pour pointe sont précisément les inflations des A_e –modules simples tels que $eS \neq 0$.

Remarque 3.77. Remarquons que $A_e e \cong \mathbb{K}L_e$ et que $eA_e \cong \mathbb{K}R_e$. On peut s'en convaincre à partir d'un résultat de la théorie des monoïdes finis établissant que $J_e \cap Me = L_e$ et que $J_e \cap eM = R_e$. De ce fait, $Me/L_e \subseteq I(e)$ et $eM/R_e \subseteq I(e)$.

Définition 3.78. On définit le $\mathbb{K}M$ –module $\mathbb{K}L_e$ à partir de l'action à gauche suivante pour $m \in M$ et $l \in L_e$:

$$m \odot l = \begin{cases} ml & \text{si } ml \in L_e, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le module $\mathbb{K}L_e$ muni de cette multiplication est nommé la *représentation à gauche de Schützenberger*. On peut définir la représentation à droite de Schützenberger sur $\mathbb{K}R_e$ d'une façon analogue.

L'intérêt de la représentation de Schützenberger relève du fait que G_e agit librement à droite sur les classes $\mathcal{L}$ qui lui sont associées (proposition 2.33). Puisque G_e est un $eA_e e$ –module, on fait le lien entre l'étude des foncteurs des sections précédentes et A_e à partir des définitions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{G_e} : \mathbb{K}G_e\text{-mod} &\rightarrow \mathbb{K}M\text{-mod}, \\ \text{Coind}_{G_e} : \mathbb{K}G_e\text{-mod} &\rightarrow \mathbb{K}M\text{-mod}, \\ \text{Res}_{G_e} : \mathbb{K}M\text{-mod} &\rightarrow \mathbb{K}G_e\text{-mod}, \\ T_e : \mathbb{K}M\text{-mod} &\rightarrow \mathbb{K}M\text{-mod}, \\ N_e : \mathbb{K}M\text{-mod} &\rightarrow \mathbb{K}M\text{-mod}, \end{aligned}$$

ayant pour règles d'associations

$$\begin{aligned}
\text{Ind}_{G_e}(V) &= A_e e \otimes_{eA_e e} V = \mathbb{K}L_e \otimes_{\mathbb{K}G_e} V, \\
\text{Coind}_{G_e}(V) &= \text{Hom}_{eA_e e}(eA_e, V) = \text{Hom}_{G_e}(R_e, V), \\
\text{Res}_{G_e}(V) &= eV, \\
T_e(V) &= \mathbb{K}MeV = MeV, \\
N_e(V) &= \{v \in V : e(\mathbb{K}M)v = 0\} = \{v \in V : eMv = 0\}.
\end{aligned}$$

Des modules libres sont nécessairement projectifs et plats. Puisque $\mathbb{K}L_e$ et $\mathbb{K}G_e$ sont des G_e -modules libres, nous avons que les foncteurs Ind_{G_e} et Coind_{G_e} sont exacts de par la proposition 3.47. De plus, si V est un A_e -module, alors $\mathbb{K}MeV = A_e eV$. Donc, $e\mathbb{K}Mv = 0$ si et seulement si $eA_e v = 0$ pour $v \in V$.

Établissons le théorème nous permettant de décrire les représentations irréductibles d'un monoïde fini à partir des représentations irréductibles de ses sous-groupes maximaux.

Théorème 3.79. (*Clifford-Munn-Ponizovskii*) *Soit M un monoïde fini et $\mathbb{K}$ un corps.*

1. *Il existe une bijection entre les classes d'isomorphismes des $\mathbb{K}M$ -modules simples ayant $e \in E(M)$ pour pointe ainsi que les classes d'isomorphismes des $\mathbb{K}G_e$ -modules simples. Si S est un $\mathbb{K}M$ -module simple ayant e pour pointe et si V est un $\mathbb{K}G_e$ -module simple, alors cette bijection est induite par l'association*

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow \text{Res}_{G_e}(S) = eS, \\
V &\rightarrow V^\# = \text{Ind}_{G_e}(V)/N_e(\text{Ind}_{G_e}(V)) = \text{Ind}_{G_e}(V)/(\text{rad}(\text{Ind}_{G_e}(V))) \\
&\cong \text{soc}(\text{Coind}_{G_e}(V)) = T_e(\text{Coind}_{G_e}(V)).
\end{aligned}$$

2. Chaque $\mathbb{K}M$ -module possède une unique pointe (à $\mathcal{J}$ -équivalence-près).
3. Si V est un $\mathbb{K}G_e$ -module simple, alors chaque facteur de composition de $\text{Ind}_{G_e}(V)$ et de $\text{Coind}_{G_e}(V)$ possède une pointe f telle que $MeM \subseteq MfM$. Qui plus est, $V^\sharp$ est de multiplicité 1 et est l'unique facteur de composition de chacun de ces deux modules ayant e pour pointe.

Démonstration. 1. Les $\mathbb{K}M$ -modules ayant e correspondent à des inflations de A_e -modules simples. Le résultat (1) découle du théorème 3.66 en posant $A := A_e$ et $eAe := eA_e e \cong G_e$.

2. Supposons que S soit un $\mathbb{K}M$ -module simple et que I soit minimal parmi les idéaux de M faisant en sorte que $IS \neq 0$. Puisque IS est un sous-module de S , la minimalité de S nous permet de déduire que $IS = S$. Alors, $I^2S = IS = S \neq 0$ et la minimalité de I implique que $I^2 = I$.

Soit $m \in M$ faisant en sorte que $mS \neq 0$. Alors, $MmMS \neq 0$ et $I = MmM$ par minimalité. Puisque $(MmM)^2 = MmM$, le corollaire 2.50 nous permet d'établir qu'il existe $e \in E(M)$ faisant en sorte que $MmM = MeM$.

Démontrons que e est une pointe. Remarquons que $S = IS = MeMS = MeS$, alors $eS \neq 0$. Aussi, de par le corollaire 2.39,

$$MI_eM = MeI(e)eM \subsetneq MeM = I.$$

Il faut que $MI_eMS = 0$ de par la minimalité de I (impliquant que $I_eS = 0$). L'idempotent e est donc une pointe pour S et l'unicité à $\mathcal{J}$ -équivalence près découle du point (2) de la proposition 3.75.

3. Supposons que $f \in E(M)$ tel que $f \in I(e)$. Alors, $fV = 0$ et nous pouvons en déduire que

$$f \cdot \text{Ind}_{G_e}(V) \cong 0 \cong f \cdot \text{Coind}_{G_e}(V)$$

de par le corollaire 3.60. Il faut que f annihile chacun des facteurs de composition de $\text{Ind}_{G_e}(V)$ et $\text{Coind}_{G_e}(V)$. Ces facteurs ne peuvent donc pas avoir f pour pointe. De par le même corollaire, et de par la relation

$$e \cdot \text{Ind}_{G_e}(V) \cong V \cong e \cdot \text{Coind}_{G_e}(V),$$

on en déduit que $V^\sharp$ est le seul facteur de composition, à la fois des deux modules $\text{Ind}_{G_e}(V)$ et $\text{Coind}_{G_e}(V)$, ayant e pour pointe. Cet unique facteur est de multiplicité 1 dans les deux modules. $\square$

Finalement, paramétrisons les représentations irréductibles d'un monoïde fini M .

Corollaire 3.80. *Soit $\{e_i\}_{i=1}^s$ un ensemble complet d'idempotents représentants pour chacune des $\mathcal{J}$ -classes de M . Il existe une bijection entre $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(M)$ et $\biguplus_{i=1}^s \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G_{e_i})$.*

Démonstration. De par le théorème 3.79, chaque classe d'isomorphisme dans $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(M)$ est associée à un module ayant une unique pointe. Puisque deux modules simples ayant pour pointe deux idempotents $\mathcal{J}$ -équivalents sont associés à la même classe d'isomorphismes, chaque classe de $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(M)$ est associée à un unique idempotent dans $\{e_i\}_{i=1}^s$. $\square$

3.1.8 Semi-simplicité

La semi-simplicité est une propriété de certains modules rendant leur étude très élégante. Nous nous intéressons ici à savoir dans quelles circonstances

un $\mathbb{K}M$ -module est semi-simple pour M un monoïde fini. En particulier, nous voudrions démontrer que les monoïdes d'inversibles finis sont semi-simples.

Si J_a est la classe- $\mathcal{J}$ de $a \in M$, alors $I = MaM/J_a$ est un idéal de M . À partir de ce constat, on déduit que $\mathbb{K}(MaM)/\mathbb{K}I \cong \mathbb{K}J_a$ est un idéal de $\mathbb{K}M/\mathbb{K}I$. La structure de $\mathbb{K}M$ -module de $\mathbb{K}J_a$ est donnée, pour $m \in M$ et $x \in J_a$, par la multiplication suivante :

$$m \odot x = \begin{cases} mx & \text{si } mx \in J_a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme 3.81. *Soit $e \in E(M)$ et n le nombre de classes- $\mathcal{L}$ dans J_e . Alors, $\mathbb{K}J_e \cong n \cdot \mathbb{K}L_e$ en tant que $\mathbb{K}M$ -modules à gauche.*

Démonstration. Le théorème 2.36 (de la stabilité) fait en sorte que si $f \in E(J_e)$, alors $\mathbb{K}L_f$ est un sous-module de $\mathbb{K}J_e$. Puisque chaque classe- $\mathcal{J}$ est une union disjointe de classes- $\mathcal{L}$ et que chacune de ces classes- $\mathcal{L}$ possède un idempotent (proposition 2.48), il suffit de démontrer que si $MeM = MfM$, alors $\mathbb{K}L_e \cong \mathbb{K}L_f$. Or, si $MeM = MfM$, alors $I(e) = I(f)$. Ceci implique que Me et Mf sont isomorphes en tant que M -ensembles (théorème 2.34). Le théorème 2.36 de stabilité implique que $Me/I(e)e = L_e$ et $Mf/I(f)f = L_f$. Puisque tout isomorphisme $Me \rightarrow Mf$ de M -ensembles associe L_e (les générateurs de Me) à L_f (les générateurs de Mf), on conclut que $\mathbb{K}L_e = \mathbb{K}Me/\mathbb{K}I(e)e \cong \mathbb{K}Mf/\mathbb{K}I(f)f = \mathbb{K}L_f$. $\square$

Soient $e \in E(M)$ et W un $\mathbb{K}G_e$ -module. Rappelons que $A_e = \mathbb{K}M/\mathbb{K}I(e)$. Nous obtenons alors une adaptation de l'homomorphisme naturel entre les A_e -modules du corollaire 3.57

$$\phi_W : \text{Ind}_{G_e}(W) \rightarrow \text{Coind}_{G_e}(W).$$

Si $l \in L_e, w \in W$ et $r \in R_e$, sa règle d'association est définie par

$$\phi_W(l \otimes w)(r) = (r \diamond l)w$$

où

$$r \diamond l = \begin{cases} rl & \text{si } rl \in G_e, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, soulignons que $rl \in (eM)(Me) \subseteq eMe$.

Tel qu'indiqué au chapitre 5 de la référence de Clifford et Preston⁷, le théorème suivant fut proposé indépendamment par Munn (1955) et Pozinovsky (1958). La démonstration ici proposée est cependant celle de Steinberg.

Théorème 3.82. (*Munn⁸ et Ponizovsky⁹*) *Soit M un monoïde fini et $\mathbb{K}$ un corps. Alors, nous avons que $\mathbb{K}M$ est semi-simple si et seulement si :*

1. *M est régulier,*
2. *la caractéristique de $\mathbb{K}$ ne divise pas $|G_e|$, pour tout $e \in E(M)$,*
3. *et l'homomorphisme naturel $\phi_{\mathbb{K}G_e} : \text{Ind}_{G_e}(\mathbb{K}G_e) \rightarrow \text{Coind}_{G_e}(\mathbb{K}G_e)$ est un isomorphisme, pour tout $e \in E(M)$.*

Démonstration. (Steinberg) « $\implies$ » Supposons que $\mathbb{K}M$ soit semi-simple. Si M n'est pas régulier, le corollaire 2.51 implique qu'il existe un idéal $I \subseteq M$ de telle sorte que $I^2 \subsetneq I$. Alors, $\mathbb{K}I/\mathbb{K}I^2$ est un idéal nilpotent de $\mathbb{K}M/\mathbb{K}I^2$ et donc $\mathbb{K}M/\mathbb{K}I^2$ n'est pas semi-simple. Puisque les quotients

⁷A. H. Clifford, G. B. Preston. (1961) *The Algebraic theory of semigroups. Volume I.* Mathematical Surveys, No. 7. American Mathematical Society, Providence, RI.

⁸Munn, W. D. (1957). *Matrix representations of semigroups.* Proc. Cambridge Phil. Soc. 53(1957) 5-12 (MR 18, 489)

⁹Pozinovsky, I. S. (1958). *On irreducible matrix representations of finite semigroups.* Uspehi Mat. Nauk 13(1958) 139-144 (MR 21, 383)

d'algèbres semi-simples sont aussi semi-simples (proposition 3.9), cela contredit l'hypothèse que $\mathbb{K}M$ soit semi-simple. Il faut donc que M soit régulier afin que $\mathbb{K}M$ soit semi-simple. Si $e \in E(M)$, alors $A_e = \mathbb{K}M/\mathbb{K}I(e)$ est semi-simple car c'est un sous-module de $\mathbb{K}M$ supposé semi-simple. Donc, $eA_e e \cong \mathbb{K}G_e$ est semi-simple aussi de par le fait que $\text{rad}(eA_e e) = e \cdot \text{rad}(A_e) \cdot e$ (démontré à la proposition 3.61). Alors, le théorème de Maschke nous permet de conclure que $\mathbb{K}$ ne divise pas $|G_e|$. Puisque $\mathbb{K}G_e$ est un $eA_e e$ -module semi-simple et que $\text{Ind}_{G_e}(\mathbb{K}G_e)$ et $\text{Coind}_{G_e}(\mathbb{K}G_e)$ sont des A_e -modules semi-simples, l'injectivité et la surjectivité de $\phi_{\mathbb{K}G_e}$ est démontrée par le corollaire 3.65. Il faut donc que $\phi_{\mathbb{K}G_e}$ soit un isomorphisme pour tout $e \in E(M)$.

« $\Leftarrow$ » Si l'on suppose que la caractéristique de $\mathbb{K}$ ne divise pas $|G_e|$ pour tout $e \in E(M)$, le théorème de Maschke nous permet d'établir que $\mathbb{K}G_e$ est semi-simple. Soit $e \in E(M)$, on constate que

$$\text{Ind}_{G_e}(\mathbb{K}G_e) = \mathbb{K}L_e \otimes_{\mathbb{K}G_e} \mathbb{K}G_e \cong \mathbb{K}L_e.$$

En considérant une série principale $\emptyset = I_0 \subset I_e \subset \dots \subset I_s = M$, et posons $J_k = I_k/I_{k-1}$. Alors, J_k est une classe- $\mathcal{J}$ régulière (en supposant M régulier) et $\mathbb{K}J_k \cong \mathbb{K}I_k/\mathbb{K}I_{k-1}$. Posons $e_k \in E(J_k)$ et n_k le nombre de classes- $\mathcal{L}$ dans J_k . Le lemme 3.81 nous permet d'établir les isomorphismes de $\mathbb{K}M$ -modules suivants :

$$\mathbb{K}J_k \cong \mathbb{K}I_k/\mathbb{K}I_{k-1} \cong n_k \cdot \mathbb{K}L_{e_k}.$$

Nous voulons démontrer que $\mathbb{K}M/\mathbb{K}I_{k-1} \cong \mathbb{K}J_k \oplus \mathbb{K}M/\mathbb{K}I_k$ pour chaque k tel que $0 \leq k \leq s$. Posons $A = \mathbb{K}M/\mathbb{K}I_{k-1}$. Alors, A est une $\mathbb{K}$ -algèbre de dimension finie et $e_k A e_k \cong G_{e_k}$ (puisque $J_k \cap e_k M e_k = G_{e_k}$, de par le corollaire 2.39). Aussi, $\text{Ind}_{e_k}(\mathbb{K}G_{e_k}) = \text{Ind}_{G_{e_k}}(\mathbb{K}G_{e_k})$ et $\text{Coind}_{e_k}(\mathbb{K}G_{e_k}) =$

$\text{Coind}_{G_{e_k}}(\mathbb{K}G_{e_k})$ compte-tenu du fait que $Ae_k \cong \mathbb{K}L_{e_k}$ et $e_k A \cong \mathbb{K}R_{e_k}$ de par le théorème 2.36 de la stabilité. Puisque $\mathbb{K}G_{e_k}$ est semi-simple, tous ses modules sont injectifs. Alors, $\text{Coind}_{G_{e_k}}(\mathbb{K}G_{e_k})$ est un A -module injectif compte-tenu du fait que le foncteur $\text{Coind}_{G_{e_k}}$ associe des modules injectifs à des modules injectifs (proposition 3.48). Puisque, par hypothèse, on suppose $\phi_{\mathbb{K}G_{e_k}}$ un isomorphisme, on peut conclure que $\text{Ind}_{G_{e_k}}(\mathbb{K}G_{e_k}) \cong \mathbb{K}L_{e_k}$ est un A -module injectif. Puisque $\mathbb{K}J_k \cong n_k \cdot \mathbb{K}L_{e_k}$, il faut que $\mathbb{K}J_k$ soit injectif et que la suite exacte de A -modules suivante se scinde :

$$0 \rightarrow \mathbb{K}J_k \rightarrow \mathbb{K}A \rightarrow \mathbb{K}M/\mathbb{K}I_k \rightarrow 0.$$

Ceci démontre que $\mathbb{K}M/\mathbb{K}I_{k-1} \cong \mathbb{K}J_k \oplus \mathbb{K}M/\mathbb{K}I_k$. Si l'on répète la démarche à plusieurs reprises, on obtient

$$\mathbb{K}M \cong \bigoplus_{k=1}^s \mathbb{K}J_k \cong \bigoplus_{k=1}^s n_k \cdot \mathbb{K}L_{e_k}.$$

Or, $\mathbb{K}L_{e_k} \cong \text{Ind}_{G_{e_k}}(\mathbb{K}G_{e_k})$ est semi-simple en tant que $\mathbb{K}M/\mathbb{K}I(e_k)$ -module pour $e_k \in E(M)$ de par le fait que $\phi_{\mathbb{K}G_{e_k}}$ soit un isomorphisme (corollaire 3.65). Alors, $\mathbb{K}L_{e_k}$ est un $\mathbb{K}M$ -module semi-simple, $\mathbb{K}M$ l'est aussi. On conclut que $\mathbb{K}M$ est une algèbre semi-simple. $\square$

D'une manière plus classique, le dernier point du théorème 3.82 est exposé à partir du langage des matrices dites *sandwiches*. En effet, nous allons démontrer que les matrices associées aux homomorphismes naturels ϕ_W sont exactement les matrices sandwiches. Une fois que nous allons mieux comprendre la forme matricielle de ces homomorphismes, nous serons plus en mesure de déterminer quand ceux-ci seront des isomorphismes (et ainsi déterminer si un monoïde fini est semi-simple).

Définition 3.83. Soit $\{\lambda_i\}_{i=1}^l$ un ensemble de représentants pour les orbites L_e/G_e et soit $\{\rho\}_{i=1}^r$ un ensemble des représentants pour les orbites R_e/G_e .

Dans ce cas, l est le nombre de classes- $\mathcal{R}$ contenues dans J_e , et r est le nombre de classes- $\mathcal{L}$ contenues dans J_e . Définissons le produit

$$\rho \diamond \lambda = \begin{cases} \rho\lambda & \text{si } \rho\lambda \in G_e, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors $P(e)$ comme étant la *matrice sandwich associée* à J_e de format $r \times l$ et telle que $P(e)_{ij} = \rho_i \diamond \lambda_j \in G_e \cup \{0\}$.

Remarque 3.84. Remarquons que $\mathbb{K}L_e = \text{Ind}_{G_e}(\mathbb{K}G_e)$ est un $\mathbb{K}G_e$ -module libre à droite ayant pour base $\{\lambda_i\}_{i=1}^l$ à partir de l'action à droite de G_e sur L_e . De plus, $\text{Coind}_{G_e}(\mathbb{K}G_e) = \text{Hom}_{G_e}(R_e, G_e)$ est un $\mathbb{K}G_e$ -module à droite de par la définition $(\psi g)(x) = \psi(x)g$ pour $g \in G_e$. Puisque R_e est un G_e -ensemble à gauche libre pour la base $\{\rho_i\}_{i=1}^r$, on déduit que $\text{Coind}_{G_e}(\mathbb{K}G_e)$ est un $\mathbb{K}G_e$ -module libre à droite sur la base $\{\rho_i^*\}_{i=1}^r$ tel que

$$\rho_i^*(g\rho_j) = \begin{cases} g & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour $g \in G_e$.

Lemme 3.85. Soit $\phi_{\mathbb{K}G_e} : \text{Ind}_{G_e}(\mathbb{K}G_e) \rightarrow \text{Coind}_{G_e}(\mathbb{K}G_e)$ l'homomorphisme naturel tel que décrit au corollaire 3.57. Alors, la matrice sandwich $P(e)$ est la matrice de $\phi_{\mathbb{K}G_e}$ en tant qu'homomorphisme de $\mathbb{K}G_e$ -module à droite libre ayant pour bases $\{\lambda_i\}_{i=1}^l$ pour $\mathbb{K}L_e = \text{Ind}_{G_e}(\mathbb{K}G_e)$ et $\{\rho_i^*\}_{i=1}^r$ pour $\text{Hom}_{G_e}(R_e, \mathbb{K}G_e) = \text{Coind}_{G_e}(\mathbb{K}G_e)$.

Démonstration. Par calcul direct,

$$\phi_{\mathbb{K}G_e}(l_j)(g\rho_k) = (g\rho_k) \diamond l_j = g(\rho_k \diamond l_j) = gP(e)_{kj} = \sum_{i=1}^r \rho_i^*(g\rho_k)P(e)_{ij}$$

alors l'égalité $\phi_{\mathbb{K}G_e}(l_j) = \sum_{i=1}^r \rho_i^*P(e)_{ij}$ permet de conclure. $\square$

Il deviendra, à partir d'ici, assez aisé de démontrer qu'un monoïde fini d'inversibles possède des représentations semi-simples.

Proposition 3.86. (*Exercice 3.5 du manuel de Steinberg*) *Soit M un monoïde d'inversibles et $a, b \in M$. Montrez que $a \equiv_{\mathcal{L}} b$ si et seulement si $a^* \equiv_{\mathcal{R}} b^*$. En déduire que chaque classe- $\mathcal{J}$ d'un monoïde fini d'inversibles contient autant de classes- $\mathcal{R}$ que de classes- $\mathcal{L}$.*

Démonstration. Dans un monoïde fini d'inversibles M , nous avons démontré à la proposition 2.62 que pour $m_1, m_2 \in M$, nous avons que $m_1 m_1^* = m_2 m_2^*$ si et seulement si $m_1 \equiv_{\mathcal{R}} m_2$ et que $m_1^* m_1 = m_2^* m_2$ si et seulement si $m_1 \equiv_{\mathcal{L}} m_2$. Si $a \equiv_{\mathcal{L}} b$, alors nécessairement $a^* a = b^* b$. Ceci n'est vrai que si $a^* \equiv_{\mathcal{R}} b^*$ en posant $a = (a^*)^*$ et $b = (b^*)^*$. La symétrie de l'argument nous permet de conclure la démonstration. $\square$

Nous avons déjà établi durant notre étude portant sur les monoïdes finis que si $e \in E(M)$, alors deux éléments $m, n \in L_e$ sont dans la même G_e -orbite à droite si et seulement si $mM = nM$ (corollaire 2.41, point 1). D'une façon similaire, deux éléments $m', n' \in R_e$ sont dans la même G_e -orbite à gauche si et seulement si $Mm' = Mn'$. Pour la matrice sandwich $P(e)$, si on prend $\{\lambda_i\}_{i=1}^r$ des représentants pour les co-ensembles de G_e dans L_e , alors on peut poser $\{\lambda_i^*\}_{i=1}^r$ un ensemble de représentants des co-ensembles de G_e dans R_e . On aura ainsi que $P(e)$ est une matrice identité. Donc, $P(e)$ est inversible et le théorème 3.82, combiné au lemme 3.85, permet de conclure qu'une $\mathbb{C}$ -algèbre d'un monoïde fini d'inversibles est nécessairement semi-simple.

Corollaire 3.87. *Un monoïde d'inversibles fini est semi-simple.*

3.2 L'étude des représentations irréductibles de l'algèbre festive

La narration de ce chapitre s'inspire directement de celle du chapitre 3 de la référence d' ORELLANA, SALIOLA, SCHILLING et ZABROCKI : « Plethysm and the Algebra of Uniform Block Permutations ». Établissons une stratégie afin de développer la théorie de la représentation de l'algèbre festive au regard des résultats développés pour la théorie des monoïdes à partir de la référence de Steinberg. Si M un monoïde fini d'inversibles, alors on démontrera ...

1. ... que pour chaque idempotent $e \in E(M)$, il existe un sous-groupe maximal G_e contenu dans M ayant e pour élément neutre. Puisque les représentations irréductibles sur $\mathbb{C}$ de M sont déterminées par celles des différents G_e , on commencera par décrire ces sous-groupes maximaux.
2. ... que deux de ses sous-groupes maximaux G_e et G_f sont isomorphes si et seulement si $e \equiv_{\mathcal{J}} f$. On cherchera ensuite à décrire les classes- $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_k$ compte-tenu du fait que les classes d'isomorphismes des représentations irréductibles des sous-groupes maximaux déterminent en partie les représentations irréductibles de M .
3. ... que les représentations irréductibles de M se construisent à partir de celles de ses sous-groupes maximaux (à isomorphisme près). Pour ce faire, on construit les représentations de Schützenberger permettant de décrire les représentations irréductibles de $\mathcal{U}_k$ en mettant en relation des représentants des sous-groupes maximaux et des différentes classes- $\mathcal{L}$ de $\mathcal{U}_k$. Le produit tensoriel des représentations de Schützenberger avec celles des sous-groupes maximaux formeront les représentations irréductibles de M .

3.2.1 Les sous-groupes maximaux de $\mathcal{U}_k$

Lemme 3.88. *Soient $\pi \vdash [k]$ et $e_\pi \in E(\mathcal{U}_k)$. Alors, le sous-groupe maximal de $\mathcal{U}_k$ ayant e_π pour neutre est l'ensemble suivant :*

$$G_{e_\pi} = \{d \in \mathcal{U}_k : d\tilde{d} = \tilde{d}d = e_\pi\} = \{d \in \mathcal{U}_k : d^\uparrow = d_\downarrow = \pi\}.$$

Démonstration. L'égalité $G_{e_\pi} = \{d \in \mathcal{U}_k : d\tilde{d} = \tilde{d}d = e_\pi\}$ est simplement la définition du sous-groupe maximal associé à e_π . On veut plutôt démontrer que $\{d \in \mathcal{U}_k : d^\uparrow = d_\downarrow\}$ est un ensemble égal à G_{e_π} car cette égalité nous permet de nous représenter facilement ces éléments à partir de diagrammes. Si $d \in G_{e_\pi}$, alors nécessairement $d^n = e_\pi$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $d^\uparrow \neq d_\downarrow$. Alors, le corollaire 2.96 nous permet d'établir que d^2 est plus grossier que d , et donc par induction que $e_\pi = d^n$ est plus grossier que d . C'est une contradiction puisque, par définition, $d\tilde{d} = e_\pi = e_{d^\uparrow}$ et donc e_π ne peut pas être plus grossier que d . Il faut alors que $d^\uparrow = d_\downarrow$ et que $G_{e_\pi} \subseteq \{d \in \mathcal{U}_k : d^\uparrow = d_\downarrow\}$. Réciproquement, si $d \in \{d \in \mathcal{U}_k : d^\uparrow = d_\downarrow\}$, alors on a aussi que $\tilde{d} \in \{d \in \mathcal{U}_k : d^\uparrow = d_\downarrow\}$. Puisque $d\tilde{d} = e_{d^\uparrow}$ et $\tilde{d}d = e_{d_\downarrow}$, le fait que $d_\downarrow = d^\uparrow$ fait en sorte que $d\tilde{d} = \tilde{d}d = e_\pi$. Donc $\{d \in \mathcal{U}_k : d^\uparrow = d_\downarrow\} \subseteq G_{e_\pi}$ et l'égalité est démontrée par double inclusion. $\square$

Ainsi, un élément de $\mathcal{U}_k$ réside dans un sous-groupe maximal si et seulement si, à partir de leur troisième présentation, des blocs de même grandeurs sont verticalement alignés. On se rendra rapidement compte, compte-tenu du fait que seuls les blocs ayant des tailles identiques peuvent être connectés dans un même diagramme $d \in \mathcal{U}_k$, que ces sous-groupes maximaux sont chacun isomorphes à un produit direct de groupes symétriques (un objet mathématique que nous connaissons bien).

Proposition 3.89. *Soit $\pi = \{\pi_i\}_{1 \leq i \leq l} \vdash [k]$. Posons $I_i = \{j : |\pi_j| = i\}$ contenant les indices des blocs de π de cardinalité i . Alors,*

1. $G_{e_\pi} \cong \prod_{j=1}^k \mathcal{S}_{|I_j|}$, et
2. Si $d \in G_{e_\pi}$, alors $\exists \sigma \in \prod_{j=1}^k \mathcal{S}_{|I_j|}$ tel que $d = \{\{\pi_i \uplus \overline{\pi_{\sigma(i)}}\}\}_{1 \leq i \leq l}$.

Démonstration. 1. Pour chaque $d \in G_{e_\pi}$, on a que $d^\uparrow = d_\downarrow = \pi$ de par le lemme 3.88. Par définition de d qui est uniforme, d applique une bijection entre ses blocs de mêmes tailles. En utilisant la présentation par diagramme, on peut comprimer chacun des blocs en un seul « point » étiqueté par l'indice du bloc. Dans ce cas, nous pouvons clairement comparer d à une bijection entre l'ensemble des indices des blocs et le même ensemble. En particulier, chacune de ces bijections sera de la forme $I_i \rightarrow I_i$: on peut reconstituer, pour chacune d'elles, un $d \in \mathcal{U}_k$ associant d'une façon similaire des blocs de taille i . Il est donc clair que $G_{e_\pi} \cong \prod_{j=1}^k \mathcal{S}_{|I_j|}$ puisque ce raisonnement se fait pour chaque taille de bloc i concernée (tel que $1 \leq i \leq k$).

2. C'est une façon équivalente de dire que $d \in G_{e_\pi}$ effectue une permutation entre les indices des blocs ayant les mêmes tailles et que d s'exprime à partir d'un certain produit de permutations pour lequel chaque facteur ne concerne qu'une unique taille de blocs, et que pour chacune des tailles de blocs de π , il existe un unique facteur de ce produit de permutations qui la concerne. $\square$

Maintenant que l'on peut comparer les sous-groupes maximaux de $\mathcal{U}_k$ à des produits directs de groupes symétriques, simplifions leur emploi à partir d'une notation plus pragmatique grâce au corollaire suivant.

Corollaire 3.90. *Soit $\pi \vdash [k]$ tel que $\text{type}(\pi) = (i^{a_i})_{1 \leq i \leq k}$. Alors, $G_{e_\pi} \cong \prod_{j=1}^k \mathcal{S}_{a_i}$.*

Démonstration. À partir des ensembles I_i définis à la proposition 3.89, posons $|I_i| = a_i$. On change alors les étiquettes des éléments contenus dans I_i de telle sorte que l'ensemble des nouvelles étiquettes soit $[a_i]$. $\square$

Nous avons montré au lemme 2.108 que $\sigma e_\pi \sigma^{-1} = e_{\sigma^{-1}(\pi)}$ pour $\sigma \in \mathcal{S}_k$. On rappelle qu'une telle conjugaison par σ pour un $d \in \mathcal{U}_k$ quelconque ne fait qu'appliquer σ^{-1} sur $d^\uparrow$ et $d_\downarrow$. Cette conjugaison par σ n'altère pas $\text{type}(\pi)$. Nous sommes donc en mesure de déduire quels sont les sous-groupes maximaux qui sont isomorphes.

Corollaire 3.91. *Soient $\pi, \gamma \vdash [k]$ tels que $\text{type}(\pi) = \text{type}(\gamma)$. Alors, $G_{e_\pi} \cong G_{e_\gamma}$ et $\exists \sigma \in \mathcal{S}_k$ faisant en sorte que $\sigma^{-1} G_{e_\pi} \sigma = G_{e_\gamma}$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du corollaire 3.90 puisque chaque sous-groupe maximal se rapporte au même produit de groupes symétriques obtenu de par la notation pragmatique obtenue par ce corollaire, en plus du fait que si $d = \pi \uplus \bar{\gamma}$ où $\pi, \bar{\gamma} \vdash [k]$, on a que $\sigma^{-1} d \sigma = \sigma(\pi) \uplus \sigma(\bar{\gamma})$ de par le lemme 2.108. $\square$

3.2.2 Les classes- $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_k$

Le but de cette sous-section est de démontrer que les classes- $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_k$ sont indexées par les différents partages de k . Ainsi, pour chaque partage de k , on aura à isomorphisme près un unique sous-groupe maximal à considérer afin d'étudier les classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de $\mathcal{U}_k$.

Proposition 3.92. *Soit $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.*

1. *Chaque classe- $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_k$ contient un idempotent.*
2. *$\mathcal{U}_k d \mathcal{U}_k = \mathcal{U}_k d' \mathcal{U}_k$ si et seulement si $\text{type}(d^\uparrow) = \text{type}((d')^\uparrow)$.*
3. *Les classes- $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_k$ sont indexées par les partages λ de k de la manière suivante :*

$$J_\lambda := J_d = \{d \in \mathcal{U}_k : \text{type}(d^\uparrow) = \lambda\}$$

4. Si $\pi \vdash [k]$ et $\text{type}(\pi) = \lambda$, alors

$$J_\lambda = \{\sigma e_\pi \tau : \sigma, \tau \in \mathcal{S}_k\}$$

Démonstration. 1. Nous avons montré à la proposition 2.106 que $\mathcal{U}_k = \mathcal{S}_k E(\mathcal{U}_k)$. Alors, chaque $d \in \mathcal{U}_k$ s'exprime d'une certaine façon $d = \sigma e_{d_\downarrow}$ où $e_{d_\downarrow} \in E(\mathcal{U}_k)$ et $\sigma \in \mathcal{S}_k$. Alors,

$$\mathcal{U}_k d \mathcal{U}_k = \mathcal{U}_k (\sigma e_{d_\downarrow}) \mathcal{U}_k = (\mathcal{U}_k \sigma) e_{d_\downarrow} \mathcal{U}_k = \mathcal{U}_k e_{d_\downarrow} \mathcal{U}_k$$

où le fait que σ soit une unité de $\mathcal{U}_k$ implique que $\mathcal{U}_k \sigma = \mathcal{U}_k$.

2. Rappelons le résultat du corollaire 3.91 nous permettant d'établir que si nous avons deux idempotents e_γ et e_π tels que $\text{type}(\gamma) = \text{type}(\pi)$, alors il existe $\sigma \in \mathcal{S}_k$ faisant en sorte que $\sigma(\pi) = \gamma$ et $\sigma^{-1} e_\pi \sigma = e_{\sigma(\pi)} = e_\gamma$.

« $\Leftarrow$ » Si $\text{type}(d^\uparrow) = \text{type}((d')^\uparrow)$, alors pour certains $\tau, \sigma \in \mathcal{S}_k$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_k d \mathcal{U}_k &= \mathcal{U}_k \tau e_{d_\downarrow} \mathcal{U}_k = \mathcal{U}_k \tau (\sigma e_{(d')_\downarrow}) \sigma^{-1} \mathcal{U}_k \\ &= (\mathcal{U}_k \tau \sigma) e_{(d')_\downarrow} (\sigma^{-1} \mathcal{U}_k) = \mathcal{U}_k e_{(d')_\downarrow} \mathcal{U}_k \\ &= \mathcal{U}_k d' \mathcal{U}_k \end{aligned}$$

où la dernière égalité $\mathcal{U}_k e_{(d')_\downarrow} \mathcal{U}_k = \mathcal{U}_k d' \mathcal{U}_k$ est déduite à partir de la partie (1) de la proposition, et où la première égalité est déduite du fait que $\mathcal{U}_k = \mathcal{S}_k E(\mathcal{U}_k)$.

« $\Rightarrow$ » Supposons que $\mathcal{U}_k d \mathcal{U}_k = \mathcal{U}_k d' \mathcal{U}_k$. Alors, $\mathcal{U}_k e_{d_\downarrow} \mathcal{U}_k = \mathcal{U}_k e_{(d')_\downarrow} \mathcal{U}_k$ de par la partie (1) de la proposition. Cette égalité nous permet

d'établir que $e_{d_{\downarrow}} = d_1 e_{(d')_{\downarrow}} d_2$ et que $e_{(d')_{\downarrow}} = d_3 e_{d_{\downarrow}} d_4$ pour certains $d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathcal{U}_k$. De par la définition de la multiplication dans $\mathcal{U}_k$ et le résultat du corollaire 2.96, l'égalité $e_{d_{\downarrow}} = d_1 e_{(d')_{\downarrow}} d_2$ implique que $e_{d_{\downarrow}}$ est, à une permutation près, plus grossier ou égal à $e_{(d')_{\downarrow}}$. D'une façon similaire, $e_{(d')_{\downarrow}} = d_3 e_{d_{\downarrow}} d_4$ implique que $e_{(d')_{\downarrow}}$ est, à une permutation près, plus grossier ou égal à $e_{d_{\downarrow}}$. On en déduit que $d_{\downarrow}$ est, à une permutation près, égal à $(d')_{\downarrow}$. Puisque $\text{type}(d^{\uparrow}) = \text{type}(d_{\downarrow})$ pour tout $d \in \mathcal{U}_k$, le résultat voulu est démontré.

3. La partie (2) de la proposition implique que tous les idempotents associés au même partage sont dans la même classe- $\mathcal{J}$. La partie (1) nous permet d'associer la classe- $\mathcal{J}$ de chaque $d \in \mathcal{U}_k$ à celle d'un idempotent associé à un unique partage.
4. Si deux idempotents e_{π} et e_{γ} sont de même type λ , alors il existe $\sigma \in \mathcal{S}_k$ tel que $\sigma^{-1} e_{\pi} \sigma = e_{\gamma}$. Si $d \in J_{\lambda}$, alors $d = \tau e_{d_{\downarrow}} = (\tau \sigma^{-1}) e_{\pi} \sigma$ pour certains $\tau, \sigma \in \mathcal{S}_k$. Alors $J_{\lambda} \subseteq \{\sigma e_{\pi} \tau : \sigma, \tau \in \mathcal{S}_k\}$. L'inclusion inverse $\{\sigma e_{\pi} \tau : \sigma, \tau \in \mathcal{S}_k\} \subseteq J_{\lambda}$ est claire puisque $\text{type}((\sigma e_{\pi} \tau)^{\uparrow}) = \lambda$ pour toute permutation $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_k$ et de par la partie (3). $\square$

Exemple 3.93. Les partages de 3 sont : $(3, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$. La répartition des éléments de $\mathcal{U}_3$ en classes- $\mathcal{J}$ indexées par ses différents partages est donnée par les figures 3.1, 3.2 et 3.3.

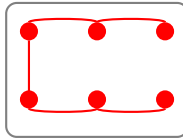


Figure 3.1: L'élément de la classe- $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_3$ associé au partage $(3, 0, 0)$.

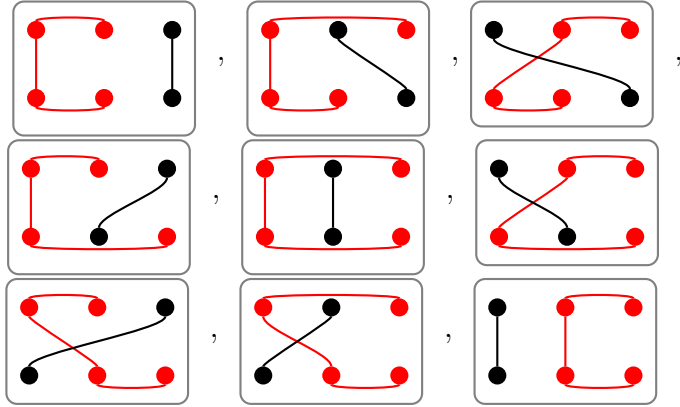


Figure 3.2: Les éléments de la classe- $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_3$ indexés par le partage $(2, 1, 0)$.

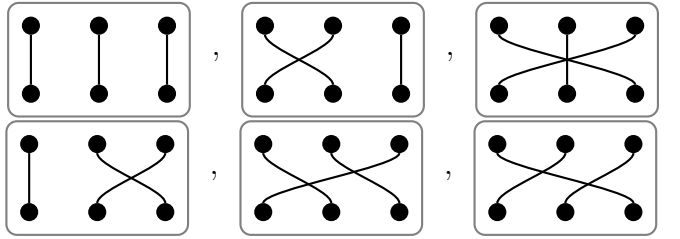


Figure 3.3: Les six éléments de la classe- $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_3$ associés au partage $(1, 1, 1)$.

Puisque l'on s'intéresse à la construction des représentations irréductibles inéquivalentes de $\mathcal{U}_k$ à partir de ses sous-groupes maximaux, il est nécessaire de se doter de représentants pour chacune des classes de représentations équivalentes. En effet, si une même classe- $\mathcal{J}$ contient plus d'un idempotent, alors elle contiendra plus d'un sous-groupe maximal. Or, chacun des sous-groupes maximaux inclus dans une même classe- $\mathcal{J}$ sont isomorphes et engendrent des représentations équivalentes. De par ce fait, on va choisir un seul sous-groupe maximal par classe- $\mathcal{J}$ qui servira de représentant pour la classe de toutes les représentations équivalentes associées à cette classe- $\mathcal{J}$.

Définition 3.94. Rappelons que les classes- $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_k$ sont indexées par les différents partages de k . Soit $\lambda = (i^{a_i})_{i=1}^k$ un tel partage. On définit alors

la *partition représentante de k associée à λ* , notée π_λ , de cette façon :

$$\pi_\lambda = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{a_1\}, \{a_1 + 1, a_1 + 2\}, \dots, \{a_1 + 2a_2 - 1, a_1 + 2a_2\}, \dots\}.$$

Aussi, on définit le *sous-groupe maximal représentant associé au partage λ* comme étant le sous-groupe maximal de $\mathcal{U}_k$ contenant e_{π_λ} . Autrement dit, $G_{e_{\pi_\lambda}}$ est ce sous-groupe maximal et on le dénote simplement par G_λ .

Exemple 3.95. Posons $\lambda = (1^3, 2^2, 3)$. Alors

$$\pi_\lambda = \pi_{(1^3, 2^2, 3)} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}, \{8, 9, 10\}\}$$

et le diagramme de l'idempotent associé à $G_{(1^3, 2^2, 3)}$ est le suivant :

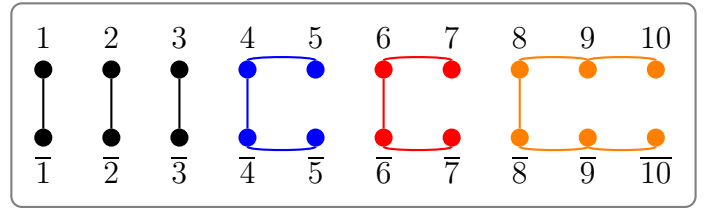


Figure 3.4: L'idempotent du sous-groupe maximal qui soit représentant de la classe- $\mathcal{J}$ associé au partage $(1^3, 2^2, 3^1)$.

Donc, puisque les classes- $\mathcal{J}$ sont indexées par les différents partages λ de k dans $\mathcal{U}_k$, et puisque G_λ est l'unique sous-groupe maximal représentant pour ce partage, nous avons que $\{G_\lambda : \lambda \vdash k\}$ est un ensemble complet de sous-groupes maximaux représentants dans $\mathcal{U}_k$ pour lesquels leurs représentations sont deux-à-deux inéquivalentes.

3.2.3 Représentations irréductibles des sous-groupes maximaux de $\mathcal{U}_k$

Soit $\pi \vdash [k]$ et définissons a_i comme étant le nombre de blocs dans π contenant i éléments. Nous avons déjà établi que le sous-groupe maximal G_{e_π}

peut être exprimé plus simplement à partir d'un produit direct de groupes symétriques de la manière suivante :

$$G_{e_\pi} = \prod_{i=1}^k \mathcal{S}_{a_i}$$

Donc, si $V^{(i)}$ est une représentation irréductible pour $\mathcal{S}_{a_i}$, nous aurons que $\bigotimes_{i=1}^k V^{(i)}$ sera une représentation irréductible de G_{e_π} (et toutes ses représentations irréductibles auront cette forme). À partir de cette observation, l'étude des représentations des sous-groupes maximaux de $\mathcal{U}_k$ se résume à la théorie de la représentation du groupe symétrique impliquant des espaces vectoriels engendrés par des polytabloïdes standards de partages $\lambda \vdash a_i$ et sur lesquels l'action de $\mathcal{S}_{a_i}$ peut être exprimée à partir de polytabloïdes standards en employant l'action usuelle du groupe symétrique sur ces polytabloïdes, ainsi qu'en employant la relation de Garnir afin de ramener les résultants de cette action à des combinaisons linéaires de polytabloïdes standards.

Pour chaque partage $\lambda \vdash k$, la théorie de la représentation du groupe symétrique nous permet de dire qu'il existe, à isomorphisme près, une unique représentation irréductible : celle du module de Specht S^λ . Fixons un partage $\lambda^{(i)} \vdash a_i$ pour chaque a_i . On obtient alors que $V^{(i)} \cong S^{\lambda^{(i)}}$ en tant que $\mathcal{S}_{a_i}$ -module. Notons ce module irréductible par $V_{\mathcal{S}_{a_i}}^{\lambda^{(i)}}$. Alors, chaque représentation irréductible d'un sous-groupe maximal de $\mathcal{U}_k$ prendra la forme

$$\bigotimes_{i=1}^k V^{(i)} \cong \bigotimes_{i=1}^k V_{\mathcal{S}_{a_i}}^{\lambda^{(i)}}.$$

Encapsulons les choix des différents partages $\lambda^{(i)}$ (associés aux choix des représentations irréductibles des différents $V^{(i)}$) dans un vecteur

$$\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(k)})$$

et dénotons la représentation irréductible du sous-groupe maximal ainsi :

$$V_{G_{e_\pi}}^{\vec{\lambda}} := \bigotimes_{i=1}^k V_{\mathcal{S}_{a_i}}^{\lambda^{(i)}}.$$

On a bien que $\lambda^{(i)} \vdash |a_i|$ et que $\sum_{i=1}^k i|\lambda^{(i)}| = k$. On en déduit que $\vec{\lambda}$ est un élément de l'ensemble I_k de la définition 2.68. De plus, il deviendra clair, au fil des pages qui suivront, que chaque élément de I_k est associé à une unique représentation irréductible d'un unique sous-groupe maximal représentant. On pourra en conclure que I_k est un index complet des représentations irréductibles des sous-groupes maximaux représentants de $\mathcal{U}_k$, et donc un index pour chacune des représentations irréductibles non équivalentes pour ces sous-groupes maximaux.

Adaptons la notation des espaces vectoriels de polytabloïdes à celle des représentations irréductibles des sous-groupes maximaux de $\mathcal{U}_k$ indexées par I_k .

Définition 3.96. Soit $\pi \vdash [k]$. On définit un π -*tableau* T de forme $\vec{\lambda} = (\lambda^{(i)})_{1 \leq i \leq k}$ comme étant un vecteur à k coordonnées $(T^{(1)}, T^{(2)}, \dots, T^{(k)})$ pour lesquels $T^{(i)}$ est, $\forall i$ concerné, un tableau standard de forme $\lambda^{(i)}$ et ayant pour contenu les blocs de π contenant i éléments.

Soulignons que si a_i est le nombre de blocs de π contenant i éléments de $[k]$, alors les éléments de chacun de ces blocs forment des amas ne pouvant pas être segmentés (puisque les blocs sont individuellement considérés comme étant un seul élément dans $\mathcal{S}_{a_i}$). On peut ordonner le contenu de ces blocs à partir de l'ordre du classement par la dernière lettre : il devient ainsi clair comment obtenir des tableaux standards dans les cas où chacune des cases d'un tableau contient tout le contenu d'un bloc de π .

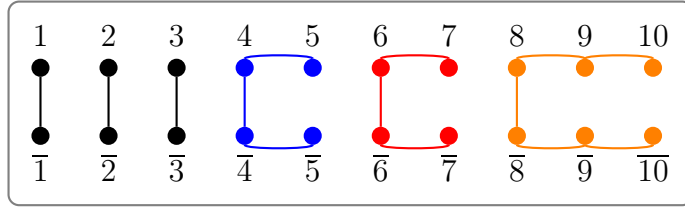
Puisque $G_{e_\pi} \cong \prod_{i=1}^k \mathcal{S}_{a_i}$, chaque élément $\sigma \in G_{e_\pi}$ s'exprime uniquement

à partir de la forme $\sigma = \prod_{i=1}^k \sigma_i$ où $\sigma_i \in \mathcal{S}_{a_i}$. L'action de G_{e_π} sur $V_{G_{e_\pi}}^{\vec{\lambda}}$ est donc définie ainsi :

$$\sigma \cdot T = (\sigma_1 T^{(1)}, \sigma_2 T^{(2)}, \dots, \sigma_k T^{(k)})$$

(pour lesquels les $\sigma_i T^{(i)}$ peuvent être exprimés à partir d'une combinaison linéaire de polytabloïdes standards en employant la relation de Garnir).

Exemple 3.97. Démontrons les représentations irréductibles d'un sous-groupe maximal représentant G_λ . En posant $\lambda = (1^3, 2^2, 1)$, on obtient que $G_\lambda \cong \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_1$. Les partages de 3 sont $(3, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$. Les partages de 2 sont $(2, 0)$ et $(1, 1)$. Finalement, le seul partage de 1 est (1) . Rappelons l'apparence du diagramme de l'idempotent associé à ce sous-groupe maximal représentant :



Concernant le partage $(3, 0, 0)$, son seul tableau standard est $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Pour le partage $(1, 1, 1)$, son seul tableau standard est $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Pour le partage

$(2, 1, 0)$, les deux tableaux standards sont donnés par $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Le

tableau standard du partage $(2, 0)$ est $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ et celui de $(1, 1)$ est donné

par $\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Finalement, en posant $a = 10$, le seul tableau standard associé à

(1) est $\begin{bmatrix} 8 & 9 & a \end{bmatrix}$. On est ainsi en mesure de déduire toutes les représentations irréductibles de G_λ :

$$\begin{aligned}
V_{G_\lambda}^{((3),(2),(1))} &= \text{eng}\left\{\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 45 & 67 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 89a \\ \hline \end{array}\right)\right\}, \\
V_{G_\lambda}^{((2,1),(2),(1))} &= \text{eng}\left\{\left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 45 & 67 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 89a \\ \hline \end{array}\right); \left(\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 45 & 67 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 89a \\ \hline \end{array}\right)\right\}, \\
V_{G_\lambda}^{((1,1,1),(2),(1))} &= \text{eng}\left\{\left(\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 45 & 67 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 89a \\ \hline \end{array}\right)\right\}, \\
V_{G_\lambda}^{((3),(1,1),(1))} &= \text{eng}\left\{\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 67 \\ \hline 45 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 89a \\ \hline \end{array}\right)\right\}, \\
V_{G_\lambda}^{((2,1),(1,1),(1))} &= \text{eng}\left\{\left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 67 \\ \hline 45 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 89a \\ \hline \end{array}\right); \left(\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 67 \\ \hline 45 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 89a \\ \hline \end{array}\right)\right\}, \\
V_{G_\lambda}^{((1,1,1),(1,1),(1))} &= \text{eng}\left\{\left(\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 67 \\ \hline 45 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 89a \\ \hline \end{array}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Figure 3.5: Représentations irréductibles du sous-groupe maximal représentant pour le partage $(1^3, 2^2, 3^1)$.

3.2.4 Les classes- $\mathcal{L}$ et les représentations de Schützenberger de $\mathcal{U}_k$

Pour M un monoïde, et pour chaque idempotent $e \in E(M)$ qui soit une pointe, on est en mesure de définir un (M, G_e) -bimodule $\mathbb{C}\mathcal{L}_e$ qui soit une représentation à gauche de Schützenberger associée à e . Ici, on ne fait que poser $M = \mathcal{U}_k$ et $G_e = G_{e_\pi}$ pour un certain partage $\pi \vdash [k]$ afin d'obtenir la représentation dans le contexte de l'algèbre festive. Il nous reste cependant à clarifier les présentations des éléments qui sont dans les différentes classes- $\mathcal{L}$ de $\mathcal{U}_k$.

Proposition 3.98. Soit $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et $d_1, d_2 \in \mathcal{U}_k$.

1. $\mathcal{U}_k d_1 = \mathcal{U}_k d_2$ si et seulement si $(d_1)_\downarrow = (d_2)_\downarrow$.
2. Chaque classe- $\mathcal{L}$ contient un unique idempotent.
3. Les classes- $\mathcal{L}$ de $\mathcal{U}_k$ sont en bijection avec les partitions d'ensembles

de $[k]$. En particulier,

$$L_\pi := L_{e_\pi} = \{d \in \mathcal{U}_k : d_\downarrow = \pi\}.$$

4. Si $\lambda \vdash k$, alors la classe- $\mathcal{J}$ J_λ est une union disjointe de différentes classes- $\mathcal{L}$. En particulier,

$$J_\lambda = \bigsqcup_{\{\pi : \text{type}(\pi) = \lambda\}} L_\pi.$$

Démonstration. 1. Soient $d_1, d_2 \in \mathcal{U}_k$. Puisque $\mathcal{U}_k = \mathcal{S}_k E(\mathcal{U}_k)$ de par la proposition 2.106, on aura que $d_1 = \sigma_1 e_{(d_1)_\downarrow}$ et $d_2 = \sigma_2 e_{(d_2)_\downarrow}$ pour $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_k$. En posant $i \in \{1, 2\}$, on remarque que

$$\mathcal{U}_k d_i = (\mathcal{U}_k \sigma_i) e_{(d_i)_\downarrow} = \mathcal{U}_k e_{(d_i)_\downarrow}$$

et l'on déduit que, si $m \in \mathcal{U}_k d_i$, alors $m_\downarrow$ est plus grossier ou égal à $(d_i)_\downarrow$ (résultat du corollaire 2.96). Il est alors direct que $\mathcal{U}_k d_1 = \mathcal{U}_k d_2$ si et seulement si $\mathcal{U}_k e_{(d_1)_\downarrow} = \mathcal{U}_k e_{(d_2)_\downarrow}$, ce qui n'est vrai que si et seulement si $(d_1)_\downarrow = (d_2)_\downarrow$.

2. Si $e_\pi \in L_d$, alors $(e_\pi)_\downarrow = d_\downarrow$ de par (1). Inévitablement, $\pi = d_\downarrow$ et cet idempotent $e_{d_\downarrow}$ est unique.
3. Par (2), les classes- $\mathcal{L}$ sont en bijection avec les idempotents distincts. Il est évident que les idempotents sont en bijection avec les partitions de $[k]$. Donc, les classes- $\mathcal{L}$ sont en bijection avec les partitions de $[k]$.
4. Par (3), nous pouvons formuler que $L_\pi = \{\sigma e_\pi : \sigma \in \mathcal{S}_k\}$. Or, nous avons déjà démontré à la proposition 3.92 dans la sous-section précédente que $J_\lambda = \{\sigma e_\pi \tau : \sigma, \tau \in \mathcal{S}_k, \text{type}(\pi) = \lambda\}$. Rappelons que la multiplication à droite de e_π par τ fixe $(e_\pi)^\uparrow$ et applique τ sur $(e_\pi)_\downarrow$. La multiplication à gauche de e_π par σ fixe $(e_\pi)_\downarrow$ et applique σ^{-1} sur

$(e_\pi)^\dagger$. Au regard de (1), on a que l'action à gauche de $\mathcal{S}_k$ sur les éléments de J_λ effectue des permutations entre les éléments d'une même classe- $\mathcal{L}$ et que l'action à droite de $\mathcal{S}_k$ sur les éléments de J_λ effectue des permutations entre les différentes classes- $\mathcal{L}$ disjointes au sein de la classe- $\mathcal{J}$ J_λ . $\square$

Exemple 3.99. Voici, aux figures 3.6, 3.7 et 3.8, les éléments de $\mathcal{U}_3$ répartis par classes- $\mathcal{L}$ (elles-mêmes réparties par classes- $\mathcal{J}$).

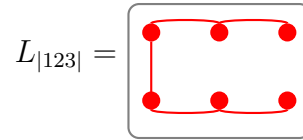


Figure 3.6: Le seul élément de la classe- $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_3$ associé au partage $(3, 0, 0)$ est aussi le seul associé à la partition $|123|$.

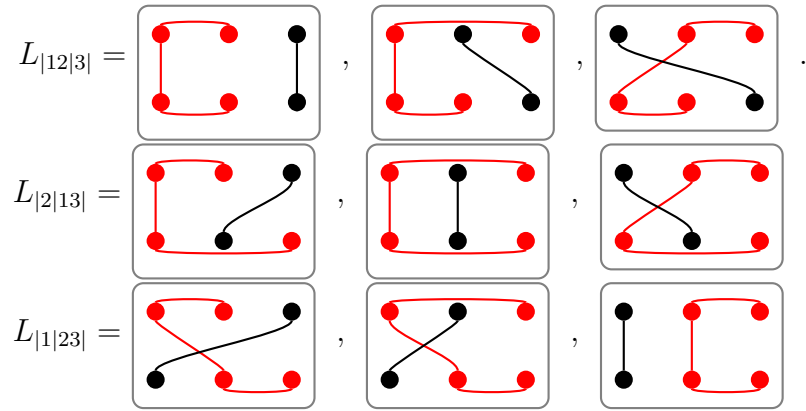


Figure 3.7: Les éléments de la classe- $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_3$ associés au partage $(2, 1, 0)$ partitionnés en les trois classes- $\mathcal{L}$ $L_{|12|3|}$, $L_{|1|23|}$ et $L_{|2|13|}$.

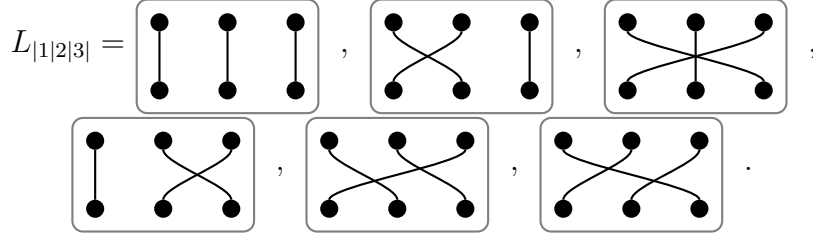


Figure 3.8: Les six éléments de la classe- $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_3$ associés au partage $(1, 1, 1)$ sont également les six éléments de la classe- $\mathcal{L}$ $L_{|1|2|3|}$.

Dans le but de poursuivre notre étude des représentations irréductibles de $\mathcal{U}_k$ à partir des représentation de Schützenberger sur le $(\mathcal{U}_k, G_{e_\pi})$ -bimodule $\mathbb{C}\mathcal{L}_\pi$, on est en mesure d'adapter l'action de $\mathcal{U}_k$ à gauche sur cet espace vectoriel de la manière suivante pour $m \in \mathcal{U}_k$ et $l \in L_\pi$:

$$m \odot l = \begin{cases} ml & \text{si } ml \in L_\pi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque la multiplication à gauche par m d'un élément l ne peut que donner un élément ml de telle sorte que $(ml)_\downarrow$ sera plus grossier ou égal à $l_\downarrow$, le résultat suivant, découlant du corollaire 2.96, caractérise les produits sur $\mathbb{C}\mathcal{L}_\pi$ qui ne seront pas nuls.

Lemme 3.100. *Soit $m \in \mathcal{U}_k$ et $l \in L_\pi$. Alors, $m \odot l \neq 0$ si et seulement si $m_\downarrow$ est plus fin que $l^\uparrow$.*

Du côté de l'action à droite de $\mathbb{C}\mathcal{L}$ par G_{e_π} , elle est obtenue par prolongement linéaire de l'action de G_{e_π} sur L_π . Cette action à droite, nous allons l'adapter pour $\mathcal{U}_k$ ainsi afin de mieux comprendre ses orbites.

Proposition 3.101. *Soit $\pi \vdash [k]$.*

1. G_{e_π} agit librement par multiplication à droite sur L_π .
2. $d_1, d_2 \in L_\pi$ sont dans la même G_{e_π} -orbite si et seulement si $d_1^\uparrow = d_2^\uparrow$.

3. Soient π fixé et $\{\gamma : \gamma \vdash [k], \text{type}(\pi) = \text{type}(\gamma)\}$. Alors,

$$L_\pi^\gamma = \{d \in \mathcal{U}_k : d^\uparrow = \gamma, d_\downarrow = \pi\}$$

est une orbite pour l'action à droite de G_{e_π} sur L_π , et chacune des G_{e_π} -orbites de cette action est de cette forme pour un certain γ tel que décrit. Donc, les G_{e_π} -orbites sur L_π sont en bijection avec les partitions γ telles que $\text{type}(\gamma) = \text{type}(\pi)$.

Démonstration. 1. On a que $l \in L_\pi$ si et seulement si $l_\downarrow = \pi$. Si $g \in G_{e_\pi}$, on a que $g^\uparrow = g_\downarrow = \pi$. Alors, le fait que $g^\uparrow = l_\downarrow$ fait en sorte que $(lg)_\downarrow = \pi$: on a donc que $lg \in L_\pi$. L'associativité de l'action découle de celle du monoïde $\mathcal{U}_k$, et il est assez évident que $le_\pi = l$. On a donc bien vérifié que G_{e_π} agit à droite sur L_π ; il reste à montrer que l'action est libre. Supposons que $lg_1 = lg_2$ pour $g_1, g_2 \in G_{e_\pi}$. En prenant la deuxième présentation des éléments de $\mathcal{U}_k$, les bijection g_1, g_2 font en sorte que, de par les propriétés de l'action,

$$lg_1g_1^{-1} = le_\pi = l = lg_2g_1^{-1}.$$

Donc, $e_\pi = g_2g_1^{-1}$ et l'on conclut que $g_1 = g_2$.

2. « $\implies$ » Supposons que $d_2 = d_1g$ pour un certain $g \in G_{e_\pi}$. Puisque $g^\uparrow = (d_1)_\downarrow$, alors $d_1^\uparrow = (d_1g)^\uparrow = d_2^\uparrow$.

« $\impliedby$ » Supposons que $d_1^\uparrow = d_2^\uparrow$. Le fait que $d_1, d_2 \in L_\pi$ fait en sorte que $(d_1)_\downarrow = (d_2)_\downarrow = \pi$. Donc, $\tilde{d}_2d_1 \in G_{e_\pi}$ en tant que bijection entre des blocs de mêmes tailles. Il existe donc $g \in G_{e_\pi}$ tel que $g = \tilde{d}_2d_1$. Alors,

$$d_2g = d_2\tilde{d}_2d_1 = d_1$$

et nous avons que d_1 et d_2 sont dans la même orbite de par cette action à droite sur L_π .

3. De par la partie (2), on a montré que pour π fixé et un γ quelconque respectant $type(\gamma) = type(\pi)$, alors L_π^γ est une telle orbite pour cette action à droite. Puisque

$$L_\pi = \bigsqcup_{\gamma: type(\gamma)=type(\pi)} L_\pi^\gamma,$$

il est clair que toute orbite aura cette forme. $\square$

Pour une certaine classe $\mathcal{L}$ L_π associée à une partition $\pi \vdash [k]$, nous avons démontré à la proposition 3.101 que celle-ci peut être partitionnée en différents sous-ensembles L_π^γ (pour chacune des différentes partitions γ de même type que π). Ces sous-ensembles L_π^γ vont très souvent contenir plus d'un élément dans $\mathcal{U}_k$ pour $k \geq 4$. Nous verrons assez rapidement que notre représentation irréductible que l'on cherche à construire traduit, vulgairement, une représentation de G_{e_π} jumelée à une représentation décrivant une permutation entre les différents L_π^γ . Pour cette raison, nous allons immédiatement définir des représentants uniques pour chacun des sous-ensembles L_π^γ de L_π .

Définition 3.102. Soient $\gamma, \pi \vdash [k]$ tels que $type(\pi) = type(\gamma)$, et soit L_π^γ . Supposons que $\pi_1 < \pi_2 < \dots < \pi_l$ et $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_l$ soient les différents blocs de π et γ ordonnés selon l'ordre de classement par la dernière lettre. On définit le *représentant* de L_π^γ comme étant l_π^γ défini ainsi :

$$l_\pi^\gamma = \{\{\gamma_i \uplus \overline{\pi_i}\}\}_{i=1}^l.$$

En particulier, si $\gamma = \pi$, alors $l_\pi^\gamma = e_\pi$.

Exemple 3.103. Déterminons le représentant pour $L_{1|234|5|6|789}^{12|34|5|6|789}$. On pose les différentes partitions $\gamma = \{\{12\}, \{34\}, \{5\}, \{6\}, \{789\}\}$ pour laquelle

$$\{5\} < \{6\} < \{1, 2\} < \{3, 4\} < \{7, 8, 9\}$$

et $\pi = \{\{1\}, \{234\}, \{5\}, \{67\}, \{89\}\}$ pour laquelle

$$\{1\} < \{5\} < \{6, 7\} < \{8, 9\} < \{2, 3, 4\}.$$

Donc, le représentant l_π^γ est égal à la partition suivante

$$\begin{aligned} l_{1|234|5|67|89}^{12|34|5|6|789} &= \{\{5\} \uplus \{\bar{1}\}; \{6\} \uplus \{\bar{5}\}; \\ &\quad \{1, 2\} \uplus \{\bar{6}, \bar{7}\}; \\ &\quad \{3, 4\} \uplus \{\bar{8}, \bar{9}\}; \\ &\quad \{7, 8, 9\} \uplus \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}\}. \end{aligned}$$

Ou, plus intuitivement, au diagramme suivant :

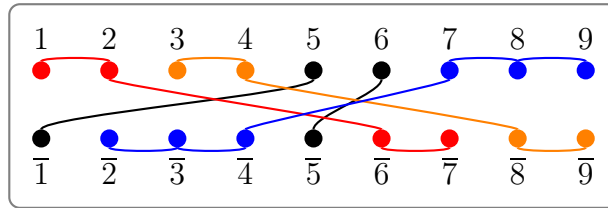


Figure 3.9: Diagramme du représentant $l_{1|234|5|67|89}^{12|34|5|6|789}$ d'une orbite de la classe- $\mathcal{L}$ $L_{1|234|5|67|89}$.

Au final, en partant de la droite vers la gauche, le premier bloc de la première rangée, pour une certaine taille de bloc fixée, est associé au premier bloc de la même taille sur la deuxième rangée (toujours en partant de la droite vers la gauche). On réitère le processus entre les blocs qui n'ont pas encore été associés.

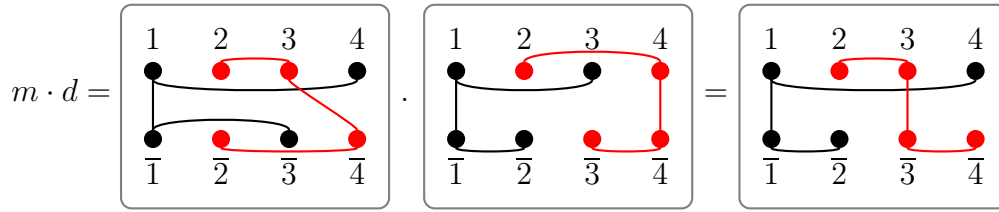
Le résultat suivant met en relation l'action à gauche et à droite sur le $(\mathcal{U}_k, G_{e_\pi})$ -bimodule $\mathbb{C}\mathcal{L}$. Ce résultat est l'essence de la raison pour laquelle on dit qu'on peut ramener toute représentation irréductible de $\mathcal{U}_k$ à celles de ses sous-groupes maximaux.

Proposition 3.104. Soit $m \in \mathcal{U}_k$ et $d \in L_\pi^\gamma$ tels que $m \odot d \neq 0$. Posons $m = \sigma e_{m_\downarrow}$ pour un certain $\sigma \in \mathcal{S}_k$. Alors, $\exists! g \in G_{e_\pi}$ faisant en sorte que

$md = l_\pi^{\gamma'} g$ où $\gamma' = \sigma^{-1}(\gamma)$ pour n'importe lequel $\sigma \in \mathcal{S}_k$ faisant aussi en sorte que $m = \sigma e_{m_\downarrow}$.

Démonstration. Soient m, d tels que décrits dans l'hypothèse. Alors, $md \in L_\pi$ et l'on déduit que $m_\downarrow$ est nécessairement au moins aussi fin que $\gamma = d^\uparrow$. L'ordre naturel entre les idempotents impose donc $e_{m_\downarrow} \geq e_\gamma$ faisant en sorte que $e_{m_\downarrow} e_\gamma = e_\gamma$. Puisque $d^\uparrow = \gamma$, $e_\gamma d = d$. Donc, $md = \sigma e_{m_\downarrow} d = \sigma d$. L'application de σ à gauche sur d revient à appliquer σ^{-1} sur $d^\uparrow$ tout en fixant $d_\downarrow$. Donc, $\sigma d \in L_\pi^{\sigma^{-1}(\gamma)} = L_\pi^{\gamma'}$. Puisque nous avons déjà démontré à la proposition 3.101 que l'action à droite de G_{e_π} sur L_π est libre, il est donc clair que, pour l'orbite $L_\pi^{\gamma'}$ et son représentant $l_\pi^{\gamma'}$, $\exists! g \in G_{e_\pi}$ faisant en sorte que $md = l_\pi^{\gamma'} g$. $\square$

Exemple 3.105. Afin d'illustrer le résultat de la proposition 3.104, on pose les deux partitions $\pi = 12|34$ et $\gamma = 13|24$. Le produit suivant



est factorisable de la manière suivante :

$$= \text{[Diagram 1]} \cdot \text{[Diagram 2]} = l_{12|34}^{23|14} \cdot g_{12 \rightarrow 34}^{34 \rightarrow 12}$$

où $g_{12 \rightarrow 34}^{34 \rightarrow 12} \in G_{12|34}$ et $l_{12|34}^{23|14}$ est le représentant de la partition $\gamma' = 23|14$ dans la classe $\mathcal{L} L_{12|34}$.

3.2.5 Représentations irréductibles de $\mathcal{U}_k$

On est enfin en mesure de rassembler toutes les parties jusqu'ici exposées afin de justifier le fait que toute représentation irréductible de $\mathcal{U}_k$ est obtenue à partir d'une inflation d'une représentation irréductible prise à partir de ses sous-groupes maximaux.

Proposition 3.106. Les classes d'isomorphismes des représentations irréductibles de $\mathcal{U}_k$ sont indexées par l'ensemble I_k .

Démonstration. Au corollaire 3.80, nous avons montré que l'ensemble des classes d'isomorphismes des représentations irréductibles d'un monoïde fini M (dénnoté $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(M)$) est en bijection avec l'union de toutes les classes de représentations irréductibles de ses différents sous-groupes maximaux G_e (dénnoté $\bigcup_e \text{Irr}(G_e)$ où e est, pour chaque classe $\mathcal{J}$, choisi uniquement). Pour chacune des classes $\mathcal{J}$ de $\mathcal{U}_k$ indexées par les différents partages λ de k , nous avons précédemment défini un unique groupe représentant G_λ isomorphe à un certain produit direct $\prod_{i=1}^k \mathcal{S}_{a_i}$ (si $\lambda = (i^{a_i})_{i=1}^k$). Les classes

d'isomorphismes des représentations irréductibles de G_λ sont alors indexées par les vecteurs de partages $\vec{\lambda} = (\lambda^{(i)})_{1 \leq i \leq k}$ de telle sorte que $\lambda^{(i)} \vdash a_i$ et $\sum_{i=1}^k i|\lambda^{(i)}| = k$. $\square$

Définition 3.107. Soit $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}) \in I_k$ tel que $|\lambda^{(i)}| = a_i$ pour $1 \leq i \leq k$. On définit le *type du vecteur de partages* $\vec{\lambda}$, noté $\text{type}(\vec{\lambda})$, comme étant le seul type des partitions d'ensembles auxquels on peut l'associer. Autrement dit, $\text{type}(\vec{\lambda}) = (i^{a_i})_{1 \leq i \leq k}$.

Soit $V_{G_\lambda}^{\vec{\lambda}}$ une représentation irréductible de G_λ indexée par $\vec{\lambda}$. Lors de notre exposé sur la théorie de la représentation des monoïdes finis, au théorème 3.79, nous avons établi que la représentation suivante en est une irréductible pour $\mathcal{U}_k$:

$$W_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}} = \text{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{U}_k}(V_{G_\lambda}^{\vec{\lambda}}) / \text{rad}(\text{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{U}_k}(V_{G_\lambda}^{\vec{\lambda}})).$$

De plus, nous avons déjà exposé qu'un monoïde fini d'inversibles est semi-simple (corollaire 3.87)! On a donc que $\text{rad}(\text{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{U}_k}(V_{G_\lambda}^{\vec{\lambda}})) = 0$ et que

$$W_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}} = \text{Ind}_{G_\lambda}^{\mathcal{U}_k}(V_{G_\lambda}^{\vec{\lambda}}) = \mathbb{C}L_\lambda \otimes_{\mathbb{C}G_\lambda} V_{G_\lambda}^{\vec{\lambda}}$$

où $\mathbb{C}L_\lambda$ est la représentation à gauche de Schützenberger qu'on associe à l'idempotent e_{π_λ} . Cette représentation est un $(\mathcal{U}_k, G_\lambda)$ -bimodule : ceci rend $W_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}}$ un $\mathcal{U}_k$ -module à gauche de telle sorte qu'on ait, $\forall d \in \mathcal{U}_k, l \in L_\lambda$ et $v \in V_{G_\lambda}^{\vec{\lambda}}$,

$$d \cdot (l \otimes v) = (d \odot l) \otimes v.$$

Afin de trouver une base pour les représentations irréductibles $W_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}}$ de $\mathcal{U}_k$, nous n'aurons qu'à effectuer un produit tensoriel entre la base du sous-groupe maximal concerné avec les représentants l_λ^γ des orbites de G_λ dans L_λ .

Proposition 3.108. Soit $\vec{\lambda} \in I_k$ tel que $\text{type}(\vec{\lambda}) = \lambda$, et soit π_λ la partition

représentante associée à ce partage. Soit $\{l_\pi^\gamma : \gamma \vdash [k], \text{type}(\gamma) = \lambda\}$ les représentants des orbites de G_λ de par son action à droite sur L_λ . Posons $\mathcal{B}_{\vec{\lambda}}(G_\lambda)$ comme étant une base pour la G_λ -représentation irréductible $V_{G_\lambda}^{\vec{\lambda}}$ indexée par $\vec{\lambda}$. Alors, l'ensemble suivant est une base pour la représentation irréductible $W_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}}$ de $\mathcal{U}_k$:

$$\mathcal{B}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{U}_k) := \{l_\pi^\gamma \otimes T : \gamma \vdash [k], \text{type}(\gamma) = \lambda, T \in \mathcal{B}_{\vec{\lambda}}(G_\lambda)\}.$$

Démonstration. Puisque $\mathcal{B}_{\vec{\lambda}}(G_\lambda)$ est une base pour $V_{G_\lambda}^{\vec{\lambda}}$, il est clair, de par la définition de $W_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}}$ à partir du produit tensoriel $\mathbb{C}L_\lambda \otimes_{\mathbb{C}G_\lambda} V_{G_\lambda}^{\vec{\lambda}}$, que $W_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}}$ est engendré par l'ensemble des éléments $l \otimes T$ où $l \in L_\lambda$ et $T \in \mathcal{B}_{\vec{\lambda}}(G_\lambda)$. En particulier, la proposition 3.104 établit que si $d \odot l \neq 0$, alors $\exists! g \in G_\lambda, \exists! \gamma \vdash [k]$ tel que $\text{type}(\gamma) = \lambda$ et faisant en sorte que $d \odot l = l_\lambda^\gamma g$. Alors,

$$d \cdot (l \otimes T) = l_\lambda^\gamma g \otimes T = l_\lambda^\gamma \otimes gT$$

et, de ce fait, $W_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}}$ est engendré par les éléments de $\mathcal{B}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{U}_k)$. L'indépendance linéaire de ces éléments découle du fait que les représentants l_λ^γ forment une base pour $\mathbb{C}L_\lambda$ en tant que G_λ -module à droite et que les $\mathcal{B}_{\vec{\lambda}}(G_\lambda)$ est une base pour la représentation irréductible $V_{G_\lambda}^{\vec{\lambda}}$ de G_λ . $\square$

À partir de cette présentation des représentations irréductibles de $\mathcal{U}_k$ avec des bases, nous sommes en mesure de définir leurs dimensions. Rappelons que le nombre de représentants l_λ^γ dans L_λ est égal au nombre de partitions qui ont le même type que λ . Autrement dit, $sp_k(\lambda)$ est ce nombre. Rappelons que f^λ est la dimension du module de Specht S^λ . Le fait que $\dim(\mathbb{C}L_\lambda \otimes V_{G_\lambda}^{\vec{\lambda}}) = \dim(\mathbb{C}L_\lambda) \cdot \dim(V_{G_\lambda}^{\vec{\lambda}})$ a pour résultat immédiat le corollaire suivant.

Corollaire 3.109. Soit $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}) \in I_k$ et $\text{type}(\vec{\lambda}) = \lambda$, alors

$$W_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}} = sp_k(\lambda) \cdot \prod_{i=1}^k f^{\lambda^{(i)}}.$$

où $sp_k(\lambda)$ est le nombre de partitions de type λ et $f^{\lambda^{(i)}}$ est le nombre de tableaux standards de forme $\lambda^{(i)}$.

Exemple 3.110. Voici, à la figure 3.10, toutes les représentations irréductibles distinctes (à isomorphisme près) de $\mathcal{U}_3$.

$$\begin{aligned}
W_{\mathcal{U}_3}^{((3))} &= \text{eng}\{l_{1|2|3}^{1|2|3} \otimes \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \right)\}, \\
W_{\mathcal{U}_3}^{((2,1))} &= \text{eng}\{l_{1|2|3}^{1|2|3} \otimes \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \right); l_{1|2|3}^{1|2|3} \otimes \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right)\}, \\
W_{\mathcal{U}_3}^{((1,1,1))} &= \text{eng}\{l_{1|2|3}^{1|2|3} \otimes \left(\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \right)\}, \\
W_{\mathcal{U}_3}^{((1),(1))} &= \text{eng}\{l_{1|23}^{1|23} \otimes \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 23 \\ \hline \end{array} \right); l_{1|23}^{2|13} \otimes \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 23 \\ \hline \end{array} \right); l_{1|23}^{3|12} \otimes \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 23 \\ \hline \end{array} \right)\}, \\
W_{\mathcal{U}_3}^{((\emptyset,\emptyset,(1))} &= \text{eng}\{l_{123}^{123} \otimes (\emptyset, \emptyset, \begin{array}{|c|} \hline 123 \\ \hline \end{array})\}.
\end{aligned}$$

Figure 3.10: Toutes les représentations irréductibles de $\mathcal{U}_3$.

3.2.6 Présentation des représentations irréductibles à partir de tableaux

Nous avons jusqu'ici exposé le nécessaire nous permettant de calculer les représentations irréductibles de l'algèbre festive. Cependant, bien qu'ils soient théoriquement rigoureux, les outils mis au point ne sont pas optimaux relativement au calcul. Il est alors proposé de comparer les éléments de la base d'une représentation irréductible donnée $W_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}}$ à des vecteurs de tableaux standards et à partir desquels un $\mathcal{U}_k$ -module isomorphe est engendré.

Définition 3.111. Soit $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}) \in I_k$. On définit un *tableau uniforme de forme $\vec{\lambda}$* comme étant un vecteur de tableaux $S = (S^{(1)}, \dots, S^{(k)})$ de telle sorte que :

1. $S^{(i)}$ est un tableau de forme $\lambda^{(i)}$ rempli avec des sous-ensembles de $[k]$,
2. $S^{(i)}$ est un tableau standard de par l'ordre de classement par la dernière lettre,
3. les sous-ensembles de $[k]$ qui figurent dans les blocs des $S^{(i)}$ forment une partition de $[k]$.

On définit alors $\mathcal{T}_{\vec{\lambda}}$ comme étant l'ensemble des tableaux uniformes de forme $\vec{\lambda}$.

Exemple 3.112. Voici $\mathcal{T}_{((1),(1,1))}$.

$$\begin{array}{c}
 \left(\boxed{1}, \boxed{\begin{array}{c} 45 \\ 23 \end{array}} \right), \left(\boxed{1}, \boxed{\begin{array}{c} 35 \\ 24 \end{array}} \right), \left(\boxed{1}, \boxed{\begin{array}{c} 25 \\ 34 \end{array}} \right), \\
 \left(\boxed{2}, \boxed{\begin{array}{c} 45 \\ 13 \end{array}} \right), \left(\boxed{2}, \boxed{\begin{array}{c} 35 \\ 14 \end{array}} \right), \left(\boxed{2}, \boxed{\begin{array}{c} 15 \\ 34 \end{array}} \right), \\
 \left(\boxed{3}, \boxed{\begin{array}{c} 45 \\ 12 \end{array}} \right), \left(\boxed{3}, \boxed{\begin{array}{c} 25 \\ 14 \end{array}} \right), \left(\boxed{3}, \boxed{\begin{array}{c} 15 \\ 24 \end{array}} \right), \\
 \left(\boxed{4}, \boxed{\begin{array}{c} 35 \\ 12 \end{array}} \right), \left(\boxed{4}, \boxed{\begin{array}{c} 25 \\ 13 \end{array}} \right), \left(\boxed{4}, \boxed{\begin{array}{c} 15 \\ 23 \end{array}} \right), \\
 \left(\boxed{5}, \boxed{\begin{array}{c} 34 \\ 12 \end{array}} \right), \left(\boxed{5}, \boxed{\begin{array}{c} 24 \\ 13 \end{array}} \right), \left(\boxed{5}, \boxed{\begin{array}{c} 14 \\ 23 \end{array}} \right).
 \end{array}$$

Figure 3.11: Tous les éléments de $\mathcal{T}_{((1),(1,1))}$.

Nous voulons démontrer que $\mathbb{C}\mathcal{T}_{\vec{\lambda}} \cong W_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}}$ en tant que $\mathcal{U}_k$ -modules. Pour ce faire, rappelons que $\mathcal{U}_k$ est engendré par les éléments b_i et s_i où $1 \leq i \leq k-1$. Établissons que $b_i S = S$ si $\{i, i+1\}$ est un des blocs de S , ou 0 autrement. Établissons aussi que $s_i S$ est obtenu de S en échangeant i et $i+1$ dans leurs cases concernées. Si $s_i S$ n'est pas standard, on peut employer la relation de Garnir sur chacune de ses coordonnées afin d'obtenir une combinaison linéaire d'éléments dans $\mathcal{T}_{\vec{\lambda}}$.

Théorème 3.113. *Soit $\vec{\lambda} \in I_k$ tel que $\text{type}(\vec{\lambda}) = \lambda$, et soit $\pi_\lambda = \pi$ la partition représentante associée au partage λ . Pour $l_\pi^\gamma \otimes T \in \mathcal{B}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{U}_k)$, posons $\rho(l_\pi^\gamma \otimes T)$ comme étant la suite de tableaux obtenue à partir de T en remplaçant les blocs $\pi_i \in \pi$ par le bloc $\gamma_i \in \gamma$ associé de par le diagramme de l_π^γ . Alors, ρ se prolonge linéairement en tant qu'isomorphisme de représentation $\rho : W_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}} \rightarrow \mathbb{C}\mathcal{T}_{\vec{\lambda}}$.*

Démonstration. Rappelons que les représentants $l_\pi^\gamma = \{\gamma_i \uplus \bar{\pi}_i\}_{i=1}^l$ ont été construits de telle sorte que $\pi_i < \pi_{i+1}$ et $\gamma_i < \gamma_{i+1}$ pour les i concernés et pour l'ordre de classement par la dernière lettre. Alors, l'application de la bijection l_π^γ à gauche de T revient à appliquer les bijections inverses de $\tilde{l}_\pi^\gamma$ sur les contenus des différents blocs des tableaux de T . Donc, cette bijection maintient les tableaux de $\rho(l_\pi^\gamma \otimes T)$ standards si T l'est. On a donc que $S = \rho(l_\pi^\gamma \otimes T) \in \mathcal{T}_{\vec{\lambda}}$.

On veut montrer que ρ et l'action à gauche de $\mathcal{U}_k$ commutent. Pour ce faire, on se restreint à le démontrer pour les générateurs s_i et b_i de $\mathcal{U}_k$. Commençons par b_i . Par définition,

$$b_i \cdot (l_\pi^\gamma \otimes T) = (b_i \odot l_\pi^\gamma) \otimes T = \begin{cases} b_i l_\pi^\gamma \otimes T & \text{si } b_i l_\pi^\gamma \in L_\pi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que $b_i l_\pi^\gamma \in L_\pi$ si et seulement si $b_i l_\pi^\gamma = l_\pi^\gamma$, si et seulement si i et $i+1$ sont dans le même bloc de γ . Alors,

$$b_i \cdot (l_\pi^\gamma \otimes T) = \begin{cases} l_\pi^\gamma \otimes T & \text{si } i \text{ et } i+1 \text{ sont dans le même bloc de } \gamma \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À partir de ce constat, on obtient que l'action à gauche sur $\mathbb{C}\mathcal{T}_\lambda^\rightarrow$ et sur $W_{\mathcal{U}_k}^\lambda$ par b_i coïncident. On a donc bien que $\rho(b_i \cdot (l_\pi^\gamma \otimes T)) = b_i \rho(l_\pi^\gamma \otimes T)$.

Concernant s_i , on a l'égalité

$$s_i \cdot (l_\pi^\gamma \otimes T) = (s_i \odot l_\pi^\gamma) \otimes T = s_i l_\pi^\gamma \otimes T$$

(où la dernière égalité à droite est déduite à partir du fait que $(s_i)_\downarrow$ est au moins aussi fin que γ , et donc $(s_i l_\pi^\gamma)_\downarrow = \pi$). Soit $s_i l_\pi^\gamma = \{s_i(\gamma_j) \uplus \bar{\pi}_j\}_j$. Si $s_i(\gamma_j) < s_i(\gamma_{j+1})$ pour chaque j concerné, alors $s_i l_\pi^\gamma = l_\pi^{s_i(\gamma)}$ et donc $s_i \cdot (l_\pi^\gamma \otimes T) = l_\pi^{s_i(\gamma)} \otimes T$. De par la définition de ρ sur les représentants de forme l_π^γ , on a bien que $\rho(s_i \cdot (l_\pi^\gamma \otimes T)) = \rho(l_\pi^{s_i(\gamma)} \otimes T) = s_i \rho(l_\pi^\gamma \otimes T)$. Supposons plutôt que s_i ne préserve pas l'ordre entre les γ_j . De par l'action de s_i , il existe deux blocs $\gamma_k, \gamma_{k+1} \in \gamma$ de telle sorte que $|\gamma_k| = |\gamma_{k+1}|$, que $\max(\gamma_k) = i$ et que $\max(\gamma_{k+1}) = i+1$ résulte en l'ordre de classement par la dernière lettre pour $s_i(\gamma)$ suivant :

$$s_i(\gamma_1) < s_i(\gamma_2) < \cdots < s_i(\gamma_{k-1}) < s_i(\gamma_{k+1}) < s_i(\gamma_k) < s_i(\gamma_{k+2}) < \cdots < s_i(\gamma_l).$$

Bref, on obtient que s_i échange l'ordre de deux blocs côte-à-côte à partir de l'ordre de départ donné par γ . Alors, $\exists g \in G_\lambda$ tel que $s_i l_\pi^\gamma = l_\pi^{s_i(\gamma)} g$ fixant les blocs de π à l'exception que g échange π_k avec π_{k+1} . Dans ce cas, $s_i \cdot (l_\pi^\gamma \otimes T) = l_\pi^{s_i(\gamma)} \otimes gT$ et l'image de $\rho(s_i \cdot (l_\pi^\gamma \otimes T))$ est obtenue, comme pour sa définition sur les éléments de la base, en échangeant le contenu des blocs π_i et π_{i+1} dans le tableau $S^{(i)}$ concerné de T (résultant en gT), puis en remplaçant les contenus des cases de gT par celles concernées par

la bijection $\widetilde{l_\pi^{s_i(\gamma)}}$. Au final, l'image de $\rho(s_i \cdot (l_\pi^\gamma \otimes T))$ revient à échanger les éléments i et $i + 1$ à partir de l'image de $\rho(l_\pi^\gamma \otimes T)$: ceci est équivalent à $s_i \rho(l_\pi^\gamma \otimes T)$. $\square$

Exemple 3.114. Le théorème 3.113 nous permet de simplifier les présentations des éléments formant la base des représentations irréductibles étudiées.

Pour $W_{\mathcal{U}_3}^{((1),(1,1))}$, nous obtenons les associations suivantes :

$$\begin{aligned} l_{1|23}^{1|23} \otimes (\boxed{1}, \boxed{23}) &\rightarrow (\boxed{1}, \boxed{23}), \\ l_{1|23}^{2|13} \otimes (\boxed{1}, \boxed{23}) &\rightarrow (\boxed{2}, \boxed{13}), \\ l_{1|23}^{3|12} \otimes (\boxed{1}, \boxed{23}) &\rightarrow (\boxed{3}, \boxed{12}). \end{aligned}$$

De par cette logique, on simplifie les représentation irréductibles de la figure 3.10 ainsi :

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{U}_3}^{((3))} &= \text{eng}\{(\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3})\}, \\ W_{\mathcal{U}_3}^{((2,1))} &= \text{eng}\{(\boxed{2} \boxed{1} \boxed{3}); (\boxed{3} \boxed{1} \boxed{2})\}, \\ W_{\mathcal{U}_3}^{((1,1,1))} &= \text{eng}\{(\boxed{3} \boxed{2} \boxed{1})\}, \\ W_{\mathcal{U}_3}^{((1),(1))} &= \text{eng}\{(\boxed{1}, \boxed{23}); (\boxed{2}, \boxed{13}); (\boxed{3}, \boxed{12})\}, \\ W_{\mathcal{U}_3}^{((\emptyset, \emptyset, (1))} &= \text{eng}\{(\emptyset, \emptyset, \boxed{123})\}. \end{aligned}$$

Figure 3.12: Toutes les représentations irréductibles de $\mathcal{U}_3$ adaptées à la présentation par tableaux.

Exemple 3.115. Considérons l'élément de la base de $W_{\mathcal{U}_{17}}^{(1^3, 2^4, 3^2)}$

$$S = (\begin{array}{|c|c|} \hline g & \\ \hline 2 & 7 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 5b & 9e \\ \hline 13 & 6d \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 8fh \\ \hline 4ac \\ \hline \end{array})$$

et posons $a = 10, b = 11, \dots$ afin d'alléger la notation. Si l'on pose

$$d = \{2\bar{8}|8\bar{2}|9\bar{g}|a\bar{d}|b\bar{7}|c\bar{6}|e\bar{a}|f\bar{3}|h\bar{1}|14\bar{5}\bar{b}|67\bar{9}\bar{e}|3d\bar{4}\bar{e}|5g\bar{f}\bar{h}\},$$

le produit

$$d \cdot S = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 9 & \\ \hline 8 & b \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 14 & 67 \\ \hline fh & ac \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 25g \\ \hline 3de \\ \hline \end{array} \right)$$

n'est pas un vecteur de tableaux standards (les premier et troisième si, mais pas le tableau 2×2 du centre). En considérant que c'est une présentation *française* des tableaux de Young, il faut utiliser l'algorithme de redressement de Garnir afin d'exprimer $d \cdot S$ à partir d'une combinaison linéaire d'éléments de la base de la représentation. Puisque $14 < 67 < ac < fh$ à partir de l'ordre de classement par la dernière lettre établi, on pose (sans perte de généralité) que

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 14 & 67 \\ \hline fh & ac \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array}$$

afin de se simplifier la tâche. Puisque les permutations $(1, 4)$ et $(2, 3)$ n'échangent respectivement que des éléments d'une même colonne, on obtient

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array} = 1 \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array} = \text{signe}((1, 4)(2, 3)) \cdot (1, 4)(2, 3) \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

(pour lequel le dernier tableau à droite a des colonnes croissantes). Puisque $3 < 4$, on utilise l'algorithme de redressement de Garnir sur ces coordonnées et l'on obtient

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \cdot (e - (3, 4) + (2, 3, 4)) = 0$$

et donc que

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline ac & fh \\ \hline 14 & 67 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 67 & fh \\ \hline 14 & ac \\ \hline \end{array}.$$

Finalement, on obtient la combinaison linéaire voulue à partir des éléments de la base :

$$d \cdot S = \left(\begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline 8 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline b \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline ac & fh \\ \hline 14 & 67 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 25g \\ \hline 3de \\ \hline \end{array} \right) - \left(\begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline 8 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline b \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 67 & fh \\ \hline 14 & ac \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 25g \\ \hline 3de \\ \hline \end{array} \right).$$

CHAPITRE IV

CARACTÈRES

4.1 Survol de la théorie des caractères des monoïdes finis

Ce sous-chapitre tire ses résultats des chapitres 7.1 et 7.2 de la référence de Benjamin Steinberg : « Representation Theory of Finite Monoids ».

4.1.1 Fonctions de classes et classes de conjugaison généralisées

Rappelons que lorsque nous avons étudié les demi-groupes, nous avons posé que i et p dénotent respectivement l'index et la période associé à un élément. Dans cette section, posons que pour un élément m d'un monoïde fini, ω soit le plus petit entier positif faisant en sorte que m^ω soit un idempotent. Soit p la période de m . Alors, $m^{\omega+1} = m^k$ si $k \geq \omega$ et $k - \omega \equiv_p 1$.

Définition 4.1. Une *fonction de classe* sur un monoïde M est une application $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ faisant en sorte que $\forall m, n \in M$,

1. $f(mn) = f(nm)$,
2. $f(m^{\omega+1}) = f(m)$.

On dénote par $\text{Cl}(M)$ l'anneau des fonctions de classes de M . En particulier, $\text{Cl}(M)$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre.

Démontrons que les notions de fonctions de classes pour les groupes finis et pour les monoïdes finis sont étroitement liées.

Proposition 4.2. *Si G est un groupe fini, alors $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de classe si et seulement si f est constante sur les classes de conjugaisons de G .*

Démonstration. « $\implies$ » Supposons que f soit une fonction de classe sur G . Alors, $f(gxg^{-1}) = f(xgg^{-1}) = f(x)$ et donc f est constante sur les classes de conjugaisons de G . « $\impliedby$ » Si f est constante sur chacune des classes de conjugaison de G , alors $f(gh) = f(g^{-1}(gh)g) = f(hg)$. De plus, puisque $g^{\omega+1} = g$, nous avons que $f(g^{\omega+1}) = f(g)$ et nous avons bel et bien démontré que f est une fonction de classe. $\square$

Concernant les fonctions de classes d'un monoïde fini, le but est de les définir à partir de celles de ses sous-groupes maximaux qui sont déjà bien connues pour ceux et celles qui sont familiers avec la théorie des caractères des groupes finis.

Définition 4.3. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur M telle que $m \sim n$ si et seulement s'il existe $x, x' \in M$ tels que $xx'x = x, x'xx' = x', xx' = n^\omega, x'x = m^\omega$ et $xm^{\omega+1}x' = n^{\omega+1}$. Les classes d'équivalences de $\sim$ sont nommées les *classes de conjugaison généralisées de M* . La classe de conjugaison généralisée contenant $m \in M$ est dénotée par $[m]_\sim$.

Grosso modo, on voit x' comme étant un inverse généralisé pour x faisant en sorte que $m^{\omega+1}$ et $n^{\omega+1}$ soient des éléments conjugués dans un certain sous-groupe maximal de M . Le but de cette classe d'équivalence est de comparer chaque élément de M à un élément d'un sous-groupe maximal à partir duquel la théorie des caractères devient familière.

Proposition 4.4. *La relation $\sim$ est une classe d'équivalence sur M .*

Démonstration. 1. Réflexivité. Soit $m \in M$. Alors, en posant $x = m^\omega = x'$, nous avons que $m \sim m$.

2. Symétrie. Supposons que $m \sim n$. Alors, $xm^{\omega+1}x' = n^{\omega+1}$ tels que $xx'x = x, x'xx' = x', x'x = m^\omega, xx' = n^\omega$. Nous avons donc

$$x'n^{\omega+1}x = x'xm^{\omega+1}x'x = m^\omega m^{\omega+1} m^\omega = m^{\omega+1}$$

et on en déduit que $n \sim m$.

3. Transitivité. Supposons que $a \sim b$ et que $b \sim c$. Alors, il existe $x, x', y, y' \in M$ faisant en sorte que $xx'x = x, x'xx' = x', yy'y = y, y'yy' = y', x'x = a^\omega, xx' = b^\omega = y'y, yy' = c^\omega, xa^{\omega+1}x' = b^{\omega+1}$ et $yb^{\omega+1}y' = c^{\omega+1}$. Posons $z = yx$ et $z' = x'y'$. Alors, $zz'z = yxx'y'yx = yy'y'yy'yx = yx = z, z'zz' = x'y'yx'x'y' = x'xx'xx'y' = x'y' = z', z'z = x'y'yx = x'xx'x = a^\omega, zz' = yxx'y' = yy'y'yy' = c^\omega$. De plus, $za^{\omega+1}z' = yxa^{\omega+1}x'y' = yb^{\omega+1}y' = c^{\omega+1}$. Nous avons donc montré que $a \sim c$. $\square$

La proposition suivante démontre que les classes de conjugaison généralisées sont les plus petites parties de M sur lesquelles une fonction de classe doit être constante.

Proposition 4.5. *Soit $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ une application. Alors, f est une fonction de classe si et seulement si f est constante sur chacune des classes de conjugaison généralisées.*

Démonstration. « $\implies$ » Soit f une fonction de classe et supposons $m \sim n$ pour $m, n \in M$. Alors, il existe x, x' tels que $xx'x = x, x'xx' = x', x'x =$

$m^\omega, xx' = n^\omega$, et $xm^{\omega+1}x' = n^{\omega+1}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n^{\omega+1}) = f(xm^{\omega+1}x') = f(x'xm^{\omega+1}) = f(m^\omega m^{\omega+1}) = f(m^{\omega+1}) \\ &= f(m) \end{aligned}$$

et il devient ainsi clair que f est constante sur les classes de conjugaison généralisées.

« $\Leftarrow$ » Supposons que f soit constante sur chacune des classes de conjugaison généralisées. Puisque $m^\omega m^\omega = m^\omega$ et $m^\omega m m^\omega = m^{\omega+1}$, nous avons que $m \sim m^{\omega+1}$ en posant $x = x' = m^\omega$. Donc, $f(m) = f(m^{\omega+1})$. Prenons $n, m \in M$ et $k > 0$ tel que $x^k = x^\omega$ pour tout $x \in M$ (on peut prendre $k = n!$ où $|M| = n$ de par la remarque 2.20). Observons que $x^\omega x^r = x^r$ pour tout $r \geq k$ puisque x^ω et x^r sont dans un sous-groupe maximal de M et que x^ω en est l'identité. Si l'on pose $x = n(mn)^{2k-1} = (nm)^{2k-1}n$ et $x' = (mn)^k m = m(nm)^k$, on calcule directement

$$\begin{aligned} x'x &= (mn)^k mn(mn)^{2k-1} = (mn)^{3k} = (mn)^\omega, \\ xx' &= (nm)^{2k-1} nm(nm)^k = (nm)^{3k} = (nm)^\omega, \\ xx'x &= (nm)^\omega (nm)^{2k-1} n = (nm)^{2k-1} n = x, \\ x'xx' &= (mn)^\omega (mn)^k m = (mn)^k m = x', \\ x(mn)^{\omega+1}x' &= n(mn)^{2k-1}(mn)^{k+1}m = n(mn)^{4k}m = nm(nm)^{4k} = (nm)^{\omega+1}. \end{aligned}$$

Alors, $mn \sim nm$ et $f(mn) = f(nm)$. Nous avons donc bien démontré que f est une fonction de classe. $\square$

Remarque 4.6. À partir de la dernière démonstration, retenons que $m \sim m^{\omega+1}$ pour tout $m \in M$.

Soit G un groupe. On dénote l'ensemble de ses classes de conjugaison par $\text{Conj}(G)$ et la classe de conjugaison contenant l'élément $g \in G$ se dénote $\text{cl}(g) \in \text{Conj}(G)$. Il s'avère que chaque classe de conjugaison généralisée d'un

monoïde fini n'intersecte qu'une seule et unique classe de conjugaison d'un seul et unique sous-groupe maximal.

Proposition 4.7. Soit $\{e_i\}_{i=1}^s$ un ensemble complet de représentants des idempotents des classes- $\mathcal{J}$ de M . La restriction de $\sim$ à G_{e_i} est la conjugaison et l'application naturelle

$$\psi : \bigcup_{i=1}^s \text{Conj}(G_{e_i}) \rightarrow M / \sim$$

définie par $\psi(\text{cl}(g)) = [g]_{\sim}$ est une bijection.

Démonstration. Commençons par démontrer que si deux éléments d'un sous-groupe maximal sont conjugués, alors ils sont dans la même classe de conjugaison généralisée. Soient $g, h, x \in G_{e_i}$ tels que $h = xgx^{-1}$. En posant $x' = x^{-1}$, nous avons que $xx'x = x, x'xx' = x', g^\omega = e_i = h^\omega = x'x = xx'$ et $h^{\omega+1} = xgx^{-1} = xg^{\omega+1}x^{-1}$. Alors, $g \sim h$.

Ensuite, démontrons que si deux éléments d'un sous-groupe maximal sont dans la même classe de conjugaison généralisée, alors ils sont conjugués. Supposons que $g \sim h$ et que $x, x' \in M$ font en sorte que $xx'x = x, x'xx' = x', x'x = g^\omega = e_i = h^\omega = xx'$ et que $xg^{\omega+1}x' = h^{\omega+1}$. Alors, $x, x' \in e_i M e_i$ et nous avons que x, x' sont des inversibles : il faut que x, x' soient dans G_{e_i} et que $x' = x^{-1}$. Puisque $g = g^{\omega+1}$ et $h = h^{\omega+1}$, nous avons que $xgx^{-1} = h$. Alors, g et h sont conjugués dans G_{e_i} .

Ainsi, la restriction de $\sim$ à G_{e_i} est bien définie et se résume à la conjugaison. On en déduit que ψ est bien définie et injective lorsque restreinte à $\text{Conj}(G_{e_i})$ pour un i arbitraire et concerné. Si $g \in G_{e_i}$ et $h \in G_{e_j}$ tels que $g \sim h$, alors il existe $x, x' \in M$ tels que $x'x = g^\omega = e_i$ et $xx' = h^\omega = e_j$. Or, $Me_i M = Me_j M$ de par les points (iv) et (v) du théorème 2.34. Ceci n'est possible que si $e_j = e_i$ (puisque les $\{e_i\}_{i=1}^s$ ne contiennent qu'un seul représentant par classe- $\mathcal{J}$). ψ est donc injective.

Concernant la surjectivité de ψ , supposons $m \in M$ tel que $Mm^\omega M =$

Me_iM . De par le théorème 2.34, il doit exister $x, x' \in M$ tels que $xx'x = x, x'xx' = x', x'x = m^\omega, xx' = e_i$. Posons $g = xm^{\omega+1}x'$, alors $e_i g e_i = xx'xm^{\omega+1}x'xx' = xm^{\omega+1}x' = g$ et donc $g \in e_i M e_i$. Puisque $x'gx = m^\omega m^{\omega+1} m^\omega = m^{\omega+1}$, on a que $g \sim m$. De plus, puisque $Mm^{\omega+1}M = Mm^\omega M$, on a que $MgM = Mm^\omega M = Me_iM$. Alors, $g \in G_{e_i}$ compte-tenu du fait que $g \in e_i M e_i \cap J_{e_i} = G_{e_i}$ (corollaire 2.39). Nous avons donc que $[m]_\sim = \psi(\text{cl}(g))$ et la surjectivité est ainsi démontrée. $\square$

À partir de la proposition 4.7, on est en mesure d'identifier l'anneau des fonctions de classes de M à partir d'un produit d'anneaux de fonctions de classes de ses sous-groupes maximaux.

Corollaire 4.8. *Soit $\{e_i\}_{i=1}^s$ un ensemble complet de représentants des idempotents sur chacune des classes- $\mathcal{J}$ de M . Alors,*

$$\text{res} : \text{Cl}(M) \rightarrow \prod_{i=1}^s \text{Cl}(G_{e_i})$$

$$\text{res}(f) = (f|_{G_{e_1}}, f|_{G_{e_2}}, \dots, f|_{G_{e_s}})$$

est un isomorphisme de $\mathbb{C}$ -algèbre.

Démonstration. En identifiant $\text{Cl}(M)$ avec la $\mathbb{C}$ -algèbre A des applications $f : M/\sim \rightarrow \mathbb{C}$, et en identifiant $\prod_{i=1}^s \text{Cl}(G_{e_i})$ avec la $\mathbb{C}$ -algèbre B des applications de la forme $f : \bigcup_{i=1}^s \text{Conj}(G_{e_i}) \rightarrow \mathbb{C}$, la proposition 4.2 nous permet de déduire que $\text{res} : \text{Cl}(M) \rightarrow \prod_{i=1}^s \text{Cl}(G_{e_i})$ correspond à l'homomorphisme d'algèbre $\psi^* : A \rightarrow B$ donné par $f \rightarrow f \circ \psi$ où ψ est la bijection déduite à la proposition 4.7. L'application res est donc un isomorphisme. $\square$

Corollaire 4.9. *Soit $\{e_i\}_{i=1}^s$ un ensemble complet de représentants des idempotents sur chacune des classes- $\mathcal{J}$ de M . Alors, si $\kappa_i = |\text{Conj}(G_{e_i})|$, nous avons l'égalité*

$$\dim \text{Cl}(M) = \sum_{i=1}^s \kappa_i.$$

Démonstration. La décomposition de l'anneau des fonctions de classes de M en un produit d'anneaux de fonctions de classes de ses sous-groupes maximaux rend le résultat direct à partir du corollaire 4.8. $\square$

Une base naturelle pour $\text{Cl}(M)$ consiste en les fonctions indicatrices $\delta_C : M \rightarrow \mathbb{C}$ des classes de conjugaison généralisées de telle sorte que, pour C une classe de conjugaison généralisée,

$$\delta_C(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \in C, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.1.2 Survol de la théorie des caractères des monoïdes finis

Dans cette sous-section, nous allons établir que les caractères irréductibles des $\mathbb{C}M$ -modules forment une base pour $\text{Cl}(M)$.

Définition 4.10. Soit $\rho : M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ une représentation matricielle d'un monoïde M . On définit le *caractère de ρ* , noté χ_ρ , comme étant une application $\chi_\rho : M \rightarrow \mathbb{C}$ associant à chaque $m \in M$ la trace de sa représentation matricielle. Autrement dit, $\chi_\rho(m) = \text{tr}(\rho(m))$.

Deux représentations ρ et ϕ équivalentes ont nécessairement des caractères égaux. En effet, si T est une matrice inversible faisant en sorte que $\rho(m) = T\phi(m)T^{-1}$ pour chaque $m \in M$, alors l'invariance de la trace par la conjugaison nous donne l'égalité

$$\chi_\rho(m) = \text{tr}(\rho(m)) = \text{tr}(T\phi(m)T^{-1}) = \text{tr}(\phi(m)) = \chi_\phi(m).$$

Si V est un $\mathbb{C}M$ -module de dimension finie et $\rho : M \rightarrow V$ une représentation, on peut établir l'égalité $\chi_V = \chi_\rho$. De par l'égalité précédente,

$V \cong W$ implique que $\chi_V = \chi_W$. On peut également affirmer que V se permet un caractère χ_V lorsque V se permet une représentation associée à ρ . Si V est irréductible (ou simple), on dira que χ_V est un caractère irréductible (ou simple). L'application nulle est considérée comme étant le caractère d'un module trivial.

Théorème 4.11. *Soient $\{V_i\}_{i=1}^r$ un ensemble de $\mathbb{C}M$ -modules simples et deux-à-deux non équivalents. Alors, $\{\chi_{V_i}\}_{i=1}^r$ est un ensemble de caractères linéairement indépendants en tant que fonctions $\chi_{V_i} : M \rightarrow \mathbb{C}$.*

Démonstration. Supposons que V_k se permette une représentation matricielle $\phi^{(k)} : M \rightarrow M_{d_k}(\mathbb{C})$ pour chaque k tel que $1 \leq k \leq r$. Supposons que les caractères associés à ces représentations ne soient pas linéairement indépendants et que $\sum_{i=1}^r c_i \chi_{V_i} = 0$ pour $c_i \in \mathbb{C}$ pour chaque i concerné. Alors, de par la définition de la trace,

$$\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{d_k} c_k \phi_{ii}^{(k)} = 0.$$

Or, les $\phi_{ij}^{(k)}$ ont été démontrés comme étant linéairement indépendants sur $\mathbb{C}^M$ (corollaire 3.72). Ceci n'est possible que si les c_i sont tous nuls : contradiction. On a donc que les caractères établis sont linéairement indépendants. $\square$

Lemme 4.12. *Soit $\rho : M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ une représentation et soit $m \in M$ d'index i et de période p .*

1. *Le polynôme minimal de $\rho(m)$ divise $x^i(x^p - 1)$.*
2. *Chaque valeur propre non nulle de $\rho(m)$ est une p^e -racine de l'unité.*
3. *$\chi_\rho(m)$ est un entier algébrique.*
4. *$\chi_\rho(m) = n$ si et seulement si $\rho(m) = Id_n$.*

Démonstration. 1. Puisque $m^i = m^{i+p}$, il faut que $\rho(m)^i = \rho(m)^{i+p}$. Ça implique que $\rho(m)^i - \rho(m)^{i+p} = \rho(m)^i[\rho^p(m) - 1] = 0$.

2. C'est un résultat direct de (1) puisque $(x^p - 1)$ est un facteur du polynôme minimal de $\rho(m)$.

3. Les racines de l'unité sont des entiers algébriques puisqu'elles sont des racines d'un polynôme monique. La trace étant une somme de valeurs propres qui sont toutes des racines de l'unité de par (2), le résultat est obtenu puisqu'une somme avec multiplicités entières d'entiers algébriques est aussi un entier algébrique.

4. Supposons que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ soient les valeurs propres de $\rho(m)$. Alors, en se référant au fait que ces valeurs propres sont des racines de l'unité de par (2), on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivante

$$\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq n$$

pour laquelle l'égalité n'est vraie que si $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n \neq 0$. Si $\chi_\rho(m) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = n$, on doit avoir que $\lambda_i = 1$ pour chaque i . Il faut donc que le polynôme minimal de $\rho(m)$ divise $(x - 1)^n$ en plus de $x^i(x^p - 1)$. Le plus petit commun diviseur de ces deux polynômes étant $(x - 1)$, il faut que $\rho(m) = Id_n$. $\square$

On pourra alors se référer aux résultats obtenus pour les fonctions de classes de M afin d'étudier ses caractères grâce au résultat suivant.

Proposition 4.13. Les caractères des représentations sur un $\mathbb{C}M$ -module sont des fonctions de classes de M .

Démonstration. Soit $\rho : M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ une représentation. Alors,

$$\chi_\rho(m_1 m_2) = \text{tr}(\rho(m_1) \rho(m_2)) = \text{tr}(\rho(m_2) \rho(m_1)) = \chi_\rho(m_2 m_1).$$

Puis, supposons que m ait un index i et une période p . Alors, $m^{\omega+1} = m^k$ si $k \geq c$ et $k \equiv_p 1$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de $\rho(m)$ avec multiplicités. Alors, $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ sont des valeurs propres de $\rho^k(m) = \rho(m^k) = \rho(m^{\omega+1})$. Puisque le lemme 4.12 nous permet d'établir que les valeurs propres λ_i sont des p^e -racines de l'unité ou 0, il est clair que $\lambda_i^k = \lambda_i$ pour chaque i concerné. On obtient ainsi l'égalité

$$\chi_\rho(m) = \text{tr}(\rho(m)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \text{tr}(\rho^k(m)) = \chi_\rho(m^{\omega+1}).$$

Il a donc été démontré que χ_ρ est une fonction de classe pour M . □

On peut construire une base pour $\text{Cl}(M)$ à partir des caractères irréductibles des $\mathbb{C}M$ -modules.

Théorème 4.14. *Soit $\{V_i\}_{i=1}^r$ un ensemble complet de représentants des classes d'isomorphismes de $\mathbb{C}M$ -modules simples. Alors, $\{\chi_{V_i}\}_{i=1}^r$ forme une base pour $\text{Cl}(M)$. En particulier, le nombre de classes d'isomorphismes de $\mathbb{C}M$ -modules coïncide avec le nombre de classes de conjugaison généralisées dans M .*

Démonstration. Nous avons déjà démontré, à partir du théorème 4.11, que les caractères χ_{V_i} sont linéairement indépendants. Nous avons aussi établi, à partir du corollaire 4.9, que $\dim \text{Cl}(M)$ est le nombre de classes de conjugaison généralisées dans M . Soit $\{e_i\}_{i=1}^s$ un ensemble complet de représentants des idempotents pour chacune des classes- $\mathcal{J}$ de M , et posons $\kappa_i = |\text{Conj}(G_{e_i})|$. Alors, $\dim \text{Cl}(M) = \sum_{i=1}^s \kappa_i$ de par ce même corollaire. Puisque $\kappa_i = |\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G_{e_i})|$ de par la théorie des caractères des groupes finis, nous avons que $\dim \text{Cl}(M) = r$. On obtient que $\{\chi_{V_i}\}_{i=1}^r$ forme une base pour $\text{Cl}(M)$. □

Définition 4.15. On définit la *table des caractères de M* , notée $X(M)$, comme étant la transposée de la matrice de changement de base vers la base des caractères irréductibles et à partir de la base des fonctions indicatrices sur

les classes de conjugaisons généralisées $\{\delta_C : C \in M / \sim\}$. Autrement dit, $X(M)_{\chi, C} = \chi(C)$ où $\chi(C)$ est la valeur prise par le caractère χ sur la classe de conjugaison généralisée C .

Corollaire 4.16. *Si $\{e_i\}_{i=1}^s$ est un ensemble complet de représentants des idempotents associés aux différentes classes- $\mathcal{J}$ d'un monoïde fini M , et si $X(G_{e_i})$ est la table des caractères associée à son sous-groupe maximal G_{e_i} , alors la table des caractères de M est inversible et a la forme suivante :*

$$X(M) = \begin{pmatrix} X(G_{e_1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X(G_{e_2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X(G_{e_s}) \end{pmatrix}.$$

Démonstration. C'est un résultat direct du fait que les classes de conjugaison généralisées de M n'intersectent individuellement qu'une seule classe de conjugaison d'un seul sous-groupe maximal (proposition 4.7). De par la construction de la table des caractères de M , on aura que $X(M)$ aura les tables des caractères de ses sous-groupes maximaux sur la diagonale et des zéros ailleurs. L'inversibilité de $X(M)$ provient de l'inversibilité individuelle des tables des caractères de ses sous-groupes maximaux et $X^{-1}(M)$ est obtenue en prenant $X(M)$ et en remplaçant chacun des $X(G_{e_i})$ par $X^{-1}(G_{e_i})$. $\square$

4.2 Quelques observations concernant les caractères de $\mathcal{U}_k$

Les résultats présentés dans cette section sont tirés du chapitre 4 de la référence d'ORELLANA, SALIOLA, SCHILLING et ZABROCKI : « Plethysm and the Algebra of Uniform Block Permutations ».

4.2.1 Classes de conjugaison généralisées dans $\mathcal{U}_k$

Soit M un monoïde fini. Nous avons déjà exposé lors de notre étude des demi-groupes cycliques que, pour chaque $m \in M$, il doit exister un plus petit entier $\omega \in \mathbb{N}$ faisant en sorte que m^ω soit un idempotent de M (corollaire 2.21). Nous rappelons que deux éléments $m, n \in M$ sont *conjugués* s'il existe $x, x' \in M$ faisant en sorte que $xx'x = x, x'xx' = x', x'x = m^\omega, xx' = n^\omega$ et $xm^{\omega+1}x' = n^{\omega+1}$. En particulier, il a été soulevé à la remarque 4.6 que m et $m^{\omega+1}$ sont conjugus.

Rappelons aussi qu'il a été démontré à la proposition 4.7 que les classes de conjugaison généralisées d'un monoïde fini M sont en bijection avec l'union disjointe des classes de conjugaison des sous-groupes maximaux (en prenant un seul de ces sous-groupes maximaux par classe— $\mathcal{J}$). Si l'on fait l'intersection entre une classe de conjugaison de M et celle d'un sous-groupe maximal de l'union disjointe, on réalise qu'elle est vide sauf pour un unique i . Ceci revient à dire que nous pouvons choisir des représentants pour les différentes classes de conjugaison de M en choisissant un unique représentant dans chacune des classes de conjugaison des différents sous-groupes maximaux G_{e_i} .

Le fait que $\mathcal{U}_k$ soit un monoïde d'inversibles nous permet d'établir que chaque $x \in \mathcal{U}_k$ possède un unique inverse $\tilde{x}$ faisant en sorte que $x\tilde{x}x = x$ et que $\tilde{x}x\tilde{x} = \tilde{x}$. Alors, deux éléments $c, d \in M$ sont conjugus si et seulement s'il existe $x \in \mathcal{U}_k$ faisant en sorte que $\tilde{x}x = c^\omega, x\tilde{x} = d^\omega$ et que $xc^{\omega+1}\tilde{x} = d^{\omega+1}$.

Dans le groupe symétrique, le type cyclique d'une permutation est clair. Par exemple, dans $\mathcal{S}_4$, la permutation fixant 1 et 4 mais transposant 2 avec 3 est de type cyclique $(2, 1, 1)$. Dans $\mathcal{S}_k$, on peut associer à chaque

permutation un certain partage de k . Afin de définir quelles sont les classes de conjugaison généralisées de $\mathcal{U}_k$, abordons la définition suivante.

Définition 4.17. Soit $d_{e_\pi} \in G_{e_\pi} \subset \mathcal{U}_k$. Posons $\mu^{(i)}$ le type cyclique de la permutation de d_{e_π} restreinte à ses blocs de taille i . On définit le *type cyclique* de d , noté $typecyclique(d)$ comme étant le vecteur de partages $(\mu^{(i)})_{1 \leq i \leq k}$. En général, on pose $typecyclique(x) = typecyclique(x^{\omega+1})$ pour un $x \in \mathcal{U}_k$ arbitraire.

Au final, et comme le démontre la proposition suivante, on peut référer le type cyclique de chaque élément de $\mathcal{U}_k$ au type cyclique d'un unique élément dans un unique sous-groupe maximal.

Proposition 4.18. Soient $c, d \in \mathcal{U}_k$. Alors,

$$c \text{ et } d \text{ sont conjugués} \iff typecyclique(c) = typecyclique(d).$$

Démonstration. « $\Leftarrow$ » Supposons que

$$typecyclique(c) = typecyclique(d) = (\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(l)}).$$

De par la définition des types cycliques pour $c, d \in \mathcal{U}_k$,

$$typecyclique(c^{\omega+1}) = typecyclique(d^{\omega+1}).$$

Alors, $c^\omega = e_\pi$ et $d^\omega = e_\gamma$ pour certaines partitions $\pi, \gamma \vdash [k]$ qui ont le même type cyclique $(i^{a_i})_{1 \leq i \leq l}$ où $|a_i| = |\mu^{(i)}|$. Nous avons déjà démontré au corollaire 3.91 que, puisque π et γ ont le même type cyclique, alors $G_{e_\pi} \cong G_{e_\gamma}$ et $G_{e_\gamma} = \sigma^{-1}G_{e_\pi}\sigma$ pour $\sigma \in \mathcal{S}_k$. Dans ce cas, $\sigma^{-1}c^{\omega+1}\sigma$ et $d^{\omega+1}$ sont tous les deux des éléments de G_{e_γ} qui ont tous les deux le même type cyclique. Le fait qu'ils soient de même type cyclique dans un groupe isomorphe à un produit direct de groupes symétriques revient à dire qu'ils sont conjugués dans ce groupe, et donc qu'ils sont conjugués dans $\mathcal{U}_k$. Donc,

c est conjugué avec $c^{\omega+1}$ qui est conjugué avec $d^{\omega+1}$ qui est conjugué avec d . La conjugaison étant une relation d'équivalence, la transitivité implique que c et d sont conjugués.

« $\implies$ » Supposons que c, d soient conjugués dans $\mathcal{U}_k$. Alors, par définition, il existe $x \in \mathcal{U}_k$ tel que $\tilde{x}x = c^\omega$, $x\tilde{x} = d^\omega$ et $xc^{\omega+1}\tilde{x} = d^{\omega+1}$. Posons $x_\downarrow = \pi$ et $x^\uparrow = \gamma$ de telle sorte que $d^\omega = e_\gamma$ et $c^\omega = e_\pi$. Nécessairement, la relation $\tilde{x}c^{\omega+1}x = d^{\omega+1}$ implique que $\text{type}(\gamma) = \text{type}(\pi)$ impliquant aussi que $G_{e_\pi} \cong G_{e_\gamma}$ et $\sigma^{-1}G_{e_\pi}\sigma = G_{e_\gamma}$ pour un certain $\sigma \in \mathcal{S}_k$. Dans ce cas, $\sigma^{-1}c^{\omega+1}\sigma$ et $d^{\omega+1}$ sont tous les deux conjugués dans $\mathcal{U}_k$. Ils sont également conjugués dans G_{e_γ} et leur type cyclique est identique puisque

$$\text{typecyclique}(c^{\omega+1}) = \text{typecyclique}(\sigma^{-1}c^{\omega+1}\sigma) = \text{typecyclique}(d^{\omega+1}). \quad \square$$

À partir de la proposition 4.18, nous avons un algorithme nous permettant de calculer le type cyclique d'un élément $m \in \mathcal{U}_k$ arbitraire.

Définition 4.19. Soit $\vec{\lambda} \in I_k$. On dénote par $C_{\vec{\lambda}}$ la classe de conjugaison ayant pour type cyclique $\vec{\lambda}$. Autrement dit,

$$C_{\vec{\lambda}} = \{x \in \mathcal{U}_k : \text{typecyclique}(x) = \vec{\lambda}\}.$$

Exemple 4.20. Aux figures 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5, nous présentons une partition de $\mathcal{U}_3$ à partir des classes de conjugaison indexées par les éléments de I_3 .

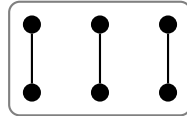
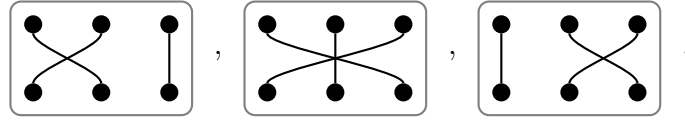
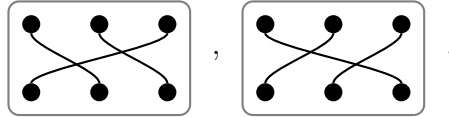
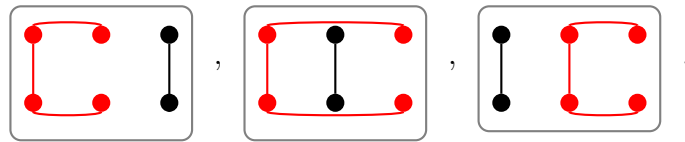
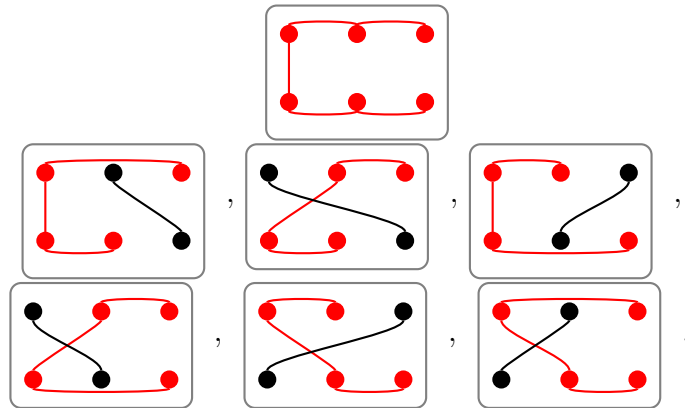


Figure 4.1: Le seul élément de $\mathcal{U}_3$ de type cyclique $((1, 1, 1), \emptyset, \emptyset)$.

Figure 4.2: Les éléments de $\mathcal{U}_3$ de type cyclique $((2, 1), \emptyset, \emptyset)$.Figure 4.3: Les éléments de $\mathcal{U}_3$ de type cyclique $((3), \emptyset, \emptyset)$.Figure 4.4: Les éléments de $\mathcal{U}_3$ de type cyclique $((1), (1), \emptyset)$.Figure 4.5: Les éléments de $\mathcal{U}_3$ de type cyclique $(\emptyset, \emptyset, (1))$.

Nous voudrions ultimement calculer les caractères associés aux représentations de l'algèbre festive $\mathcal{U}_k$. Or, puisque les représentations de l'algèbre festive se construisent à partir de celles de ses sous-groupes maximaux, les caractères sont eux aussi constants sur chacune des classes de conjugaison: nul besoin de calculer les caractères individuels de chacun des éléments puisque nous n'avons qu'à calculer le caractère d'un seul élément pour chacune des classes de conjugaison généralisées. Chacune de ces classes est

4.2.2 Caractères

Définissons les caractères des représentations irréductibles des éléments de l'algèbre festive $\mathcal{U}_k$ à partir des caractères associés aux représentations irréductibles des éléments de ses sous-groupes maximaux.

Définition 4.24. Soit $\vec{\lambda} \in I_k$, et soit $W_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}}$ une représentation irréductible de $\mathcal{U}_k$ telle que définie ultérieurement à partir d'une représentation matricielle $\rho : \mathcal{U}_k \rightarrow W_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}}$. On définit le *caractère associé* à $W_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}}$ comme étant l'application $\chi_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}} : \mathcal{U}_k \rightarrow \mathbb{C}$ définie de la manière suivante :

$$\chi_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}}(d) = \text{tr}(\rho(d)).$$

Soulignons le fait que ρ doit être associée à une base afin de fixer les matrices de son image. Cependant, puisque la trace est invariante en fonction du choix de la base, nous ne la mentionnons pas dans cette définition. De plus, tel qu'exposé à la proposition 4.2, les caractères sont constants sur les classes de conjugaison généralisées. De ce fait, le seul travail qui nous intéresse est le calcul des caractères pour chacun des représentants $d_{\vec{\lambda}}$. Commençons par exprimer $\chi_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}}$ en termes de caractères des sous-groupes maximaux de $\mathcal{U}_k$.

Définition 4.25. Soit $\vec{\mu} \in I_k$ et $\lambda \vdash k$. On définit l'ensemble suivant :

$$C(d_{\vec{\mu}}, \lambda) := \{d : d_{\downarrow} = d^{\uparrow}, \text{type}(d^{\uparrow}) = \lambda, \text{ et } d \text{ est plus grossier que } d_{\vec{\mu}}\}.$$

Cet ensemble regroupe, pour un partage $\lambda \vdash k$ fixé, les éléments des sous-groupes maximaux isomorphes à G_{λ} qui sont plus grossiers ou égaux au représentant $d_{\vec{\mu}}$.

Exemple 4.26. Posons $\vec{\lambda} = (\emptyset, (1, 1))$ et $\vec{\mu} = ((2, 2))$. Alors, $\lambda = (2, 2)$ et

$$d_{\vec{\mu}} = \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \diagdown & \diagup & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{array}} = \{\{1, \bar{2}\}; \{2, \bar{1}\}; \{3, \bar{4}\}; \{4, \bar{3}\}\}.$$

Quelles sont les partitions plus grossières que $d_{\vec{\mu}}$ ayant pour type de partage $(\emptyset, (1, 1))$? En unissant les blocs de $d_{\vec{\mu}}$ deux par deux :

$$\{\{1, \bar{2}\} \cup \{2, \bar{1}\}\}; \{\{3, \bar{4}\} \cup \{4, \bar{3}\}\}$$

$$= \{\{1, 2, \bar{1}, \bar{2}\}; \{3, 4, \bar{3}, \bar{4}\}\} = \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \text{---} & & \text{---} & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{array}} = d_1,$$

$$\{\{1, \bar{2}\} \cup \{3, \bar{4}\}\}; \{\{2, \bar{1}\} \cup \{4, \bar{3}\}\}$$

$$= \{\{1, 3, \bar{2}, \bar{4}\}; \{2, 4, \bar{1}, \bar{3}\}\} = \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{array}} = d_2,$$

$$\{\{1, \bar{2}\} \cup \{4, \bar{3}\}\}; \{\{2, \bar{1}\} \cup \{3, \bar{4}\}\}$$

$$= \{\{1, 4, \bar{2}, \bar{3}\}; \{2, 3, \bar{1}, \bar{4}\}\} = \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{array}} = d_3.$$

Alors,

$$C(d_{\vec{\mu}}, (2, 2)) = \{d_1, d_2, d_3\}.$$

Pour qu'il y ait une contribution à la trace de la matrice d'un élément d , il faut que l'action à gauche de $d \cdot (l_{\pi}^{\gamma} \otimes T) = (d \odot l_{\pi}^{\gamma}) \otimes T$ stabilise le

représentant l_π^γ . Autrement dit, les éléments de la base de $W_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}}$ sur lesquels il peut y avoir une contribution pour la trace de la matrice associée à d doivent prendre la forme $(l_\pi^{d_\downarrow} \otimes T)$. Ainsi, pour un unique $\sigma \in G_\lambda$, nous aurons l'égalité suivante (puisque l'action de G_λ à droite est libre) :

$$d \cdot (l_\pi^{d_\downarrow} \otimes T) = (d \odot l_\pi^{d_\downarrow}) \otimes T = (l_\pi^{d_\downarrow} \sigma) \otimes T = l_\pi^{d_\downarrow} \otimes \sigma T.$$

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 4.27. *Soit $\vec{\lambda} \in I_k$ tel que $\text{type}(\vec{\lambda}) = \lambda$. Si $d_\mu^\rightarrow$ est le représentant de $C_\mu^\rightarrow$ indexé par $\vec{\mu} \in I_k$, alors*

$$\chi_{\mathcal{U}_k}^{\vec{\lambda}}(d_\mu^\rightarrow) = \sum_{d \in C(d_\mu^\rightarrow, \lambda)} \chi_{G_\lambda}^{\vec{\lambda}}(\sigma_d)$$

où $\sigma_d \in G_\lambda$ est l'unique permutation faisant en sorte que $dl_{\pi_\lambda}^{d_\downarrow} = l_{\pi_\lambda}^{d_\downarrow} \sigma_d$.

Démonstration. On s'intéresse à la trace que l'on peut obtenir à partir de l'action de $d_\mu^\rightarrow$ sur les éléments de la base $\{l_{\pi_\lambda}^\gamma \otimes T : \text{type}(\gamma) = \lambda, T \in \mathcal{B}_\lambda(G_\lambda)\}$. Tel qu'abordé dans le commentaire précédant la proposition,

$$d_\mu^\rightarrow \cdot (l_{\pi_\lambda}^\gamma \otimes T) = (d_\mu^\rightarrow \odot l_{\pi_\lambda}^\gamma) \otimes T = \begin{cases} d_\mu^\rightarrow l_{\pi_\lambda}^\gamma \otimes T & \text{si } (d_\mu^\rightarrow l_\pi^\gamma)_\downarrow = \pi_\lambda, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $d_\mu^\rightarrow \in G_\mu$ et que π_λ est plus grossière ou égale à π_μ , $d_\mu^\rightarrow$ agit telle une permutation sur les éléments de G_λ . Donc, nous aurons naturellement que $(d_\mu^\rightarrow l_\pi^\gamma)_\downarrow = \pi_\lambda$ si et seulement si $\pi_\mu = (d_\mu^\rightarrow)_\downarrow$ est plus fin que γ (autrement, il n'y aura aucune contribution à la trace). Supposons que π_μ soit plus fine que γ . On peut unifier les blocs de $d_\mu^\rightarrow$ de sorte à obtenir un $d_\downarrow = \gamma$. Dans ce cas, $d_\mu^\rightarrow l_{\pi_\lambda}^\gamma = dl_{\pi_\lambda}^\gamma = l_{\pi_\lambda}^{d_\uparrow} \sigma_d$ pour un unique $\sigma_d \in G_\lambda$ du fait que l'action à droite est libre (proposition 3.101). Alors,

$$d_\mu^\rightarrow \cdot (l_{\pi_\lambda}^\gamma \otimes T) = l_{\pi_\lambda}^{d_\uparrow} \otimes \sigma_d T$$

ne contribue à la trace que si $d^\dagger = \gamma$. Dans ce cas,

$$d_{\vec{\mu}} \cdot (l_{\pi_\lambda}^\gamma \otimes T) = l_{\pi_\lambda}^\gamma \otimes \sigma_d T$$

et la trace résultante est obtenue à partir de la transformation associant T à $\sigma_d T$. Cette contribution sera exactement $\vec{\chi}_{G_\lambda}^\lambda(\sigma_d)$ puisque les T sont des éléments de la base $\mathcal{B}_\lambda(G_\lambda)$ pour la représentation irréductible $V_{G_\lambda}^\lambda$. $\square$

Exemple 4.28. Appliquons le résultat de la dernière proposition afin de calculer la trace de la représentation d'un représentant $d_{\vec{\mu}}$ pour un $\vec{\lambda} \in I_k$ fixé. Prenons le même représentant qu'à l'exemple 4.26. Posons $\sigma \in G_\lambda = \{e, \sigma\} \cong \mathcal{S}_2$. Puisque

$$\begin{aligned} d_1 \cdot l_{\pi_\lambda}^{(d_1)^\dagger} &= l_{\pi_\lambda}^{(d_1)^\dagger} \cdot e, \\ d_2 \cdot l_{\pi_\lambda}^{(d_2)^\dagger} &= l_{\pi_\lambda}^{(d_2)^\dagger} \cdot \sigma, \\ d_3 \cdot l_{\pi_\lambda}^{(d_3)^\dagger} &= l_{\pi_\lambda}^{(d_3)^\dagger} \cdot \sigma, \end{aligned}$$

on obtient que

$$\chi_{\mathcal{U}_4}^{(\emptyset, (1,1))}(d_{\vec{\mu}}) = \chi_{G_{(2,2)}}^{(\emptyset, (1,1))}(e) + 2 \cdot \chi_{G_{(2,2)}}^{(\emptyset, (1,1))}(\sigma)$$

et, puisque

$$W_{G_{(2,2)}}^{(\emptyset, (1,1))} = \text{eng}\left\{\begin{bmatrix} 34 \\ 12 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 24 \\ 13 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 14 \\ 23 \end{bmatrix}\right\} = \{w_1, w_2, w_3\},$$

on calcule

$$\begin{aligned} e \cdot w_1 &= w_1, & \sigma \cdot w_1 &= -w_1, \\ e \cdot w_2 &= 0, & \sigma \cdot w_2 &= 0, \\ e \cdot w_3 &= 0, & \sigma \cdot w_3 &= 0, \end{aligned}$$

nous permettant d'obtenir les représentations

$$\rho(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho(\sigma) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et, finalement, le caractère

$$\chi_{\mathcal{U}_4}^{(\emptyset, (1,1))}(d_{\vec{\mu}}) = \chi_{G_{(2,2)}}^{(\emptyset, (1,1))}(e) + 2 \cdot \chi_{G_{(2,2)}}^{(\emptyset, (1,1))}(\sigma) = 1 + 2 \cdot (-1) = -1.$$

CONCLUSION

À travers cet exposé démontrant mes recherches effectuées au cours de mon cursus de maîtrise, nous avons pu explorer la théorie de la représentation des groupes finis. À partir de celle-ci, nous avons étudié les représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ en construisant un certain espace de polytabloïdes M^λ à partir duquel nous sommes en mesure d'y trouver toutes ses représentations irréductibles indexées par chacun des partages λ de n . Puis, nous nous sommes penchés sur les constructions principales à l'étude dans ce mémoire : les monoïdes finis et l'algèbre festive $\mathcal{U}_k$. Nous avons mis sur table les grandes généralités et caractéristiques des monoïdes finis et, particulièrement, des monoïdes d'inversibles. Nous avons pu associer les concepts abstraits de la théorie des monoïdes finis à des exemples concrets des propriétés observées dans l'algèbre festive $\mathcal{U}_k$. Afin de mieux comprendre ces structures, nous avons étudié la théorie de la représentation des monoïdes finis. En particulier, nous nous sommes rendu compte que celle-ci était étroitement liée à la théorie de la représentation des groupes finis puisque chacune des représentations irréductibles d'un monoïde fini est indexée par un de ses sous-groupes maximaux. Notamment, nous avons démontré que les représentations des monoïdes finis d'inversibles sont semi-simples et nous avons, à partir de là, obtenu une élégante présentation pour les représentations irréductibles de l'algèbre festive $\mathcal{U}_k$. Enfin, nous avons survolé la théorie des caractères des monoïdes au regard de ce que nous avons développé pour leurs représentations et tout en la liant à la théorie des caractères des groupes finis.

Mon directeur de recherche, Franco Saliola, m'a proposé de me pencher sur un problème encore ouvert concernant les représentations de l'algèbre festive. Nous savons que $\mathcal{U}_k$ est engendré par les éléments $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}$ et b_1 . Le problème est le suivant : « Comment se décomposent les représentations irréductibles de $\mathcal{U}_k$ si nous nous re-

streignons à l'action de son sous-monoïde engendré par $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}$ et b' (où $b' \in \mathcal{U}_k/\mathcal{S}_k$ est arbitraire) ? ».

Premièrement, remarquons que le choix de b' peut, sans perte de généralité, se limiter à un idempotent b^* . En effet, puisque $\sigma_1 b^* \sigma_2 = b'$ pour certaines permutations $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_k$, nous avons que b' et b^* sont dans la même classe $\mathcal{J}$. Alors, les sous-monoïdes de M engendrés par les générateurs $\{s_1, \dots, s_{k-1}, b'\}$ et $\{s_1, \dots, s_{k-1}, b^*\}$ sont identiques. Puisque chaque classe d'isomorphisme est indexée par une classe $\mathcal{J}$, on peut supposer que b^* est un idempotent e_λ associé à un sous-groupe maximal G_λ représentant un certain partage λ . Si nous connaissons les représentations matricielles de $s_1, \dots, s_{k-1}$ et b_1 , nous sommes en mesure de trouver la représentations matricielle de e_λ . Les représentations irréductibles pour l'action du monoïde engendré par $\{s_1, \dots, s_{k-1}, e_\lambda\}$ seront celles pour lesquelles la matrice associée à e_λ ne sera pas nulle. Autrement dit, les représentations irréductibles seront celles indexées par des vecteurs de partages pour lesquelles leurs types sont au moins aussi grossier que λ . Pour $1 \leq k \leq 5$, vous trouverez à l'annexe A les matrices associées aux représentations des générateurs $\{s_1, \dots, s_{k-1}, b_1\}$ de $\mathcal{U}_k$. Vous y trouverez également des diagrammes exposant les chaînes inverses de raffinement entre les différentes représentations indexées par les éléments de I_k .

Posons $\vec{\lambda} \in I_k$. Au regard des matrices calculées et exposées en l'annexe A, on constate que la matrice de b' sera nulle si et seulement si cette matrice est associée à une représentation indexées par $\vec{\lambda}$ pour laquelle le type de $\vec{\lambda}$ est strictement plus raffiné que le type de la partition de b' . Ceci revient à dire que seules les matrices associées aux éléments de $\mathcal{S}_n$ ne sont pas nulles pour l'action du sous-monoïde. Puisque b' est plus grossier que $\vec{\lambda}$, le sous-groupe maximal associé au partage associé à $\vec{\lambda}$ ne peut pas être inclus dans le sous-monoïde. Or, les représentations irréductibles d'un monoïde fini sont indexées

par ses sous-groupes maximaux. Donc, il faut que la représentation indexée par $\vec{\lambda}$ soit réductible. Qui plus est, il faut qu'elle se décompose en une somme directe de modules de Specht puisqu'ils sont exactement les modules irréductibles associés aux seuls éléments des générateurs $s_1, \dots, s_{k-1}$ n'ayant pas des matrices nulles.

Exemple 4.29. Considérons l'action du monoïde engendré par les générateurs $\{s_1, s_2, b_{|123|}\}$ sur $\mathcal{U}_3$. Les matrices de ces générateurs, pour représentation de $\mathcal{U}_3$ associée au vecteur de partages $((1), (1), \emptyset) \in I_k$, doivent être réductibles compte-tenu du fait que le type de $b' = b_{|123|}$ est plus grossier que le type de $((1), (1), \emptyset)$. En particulier, remarquons que la représentation obtenue est la représentation par permutations des éléments $\{1, 2, 3\}$. Grâce à notre étude des représentations du groupe symétrique, nous savons que celle-ci est isomorphe à $M^{(2,1)}$ et nous savons la décomposer en modules de Specht :

$$M^{(2,1)} \cong K_{(3),(2,1)} \cdot S^{(3)} \oplus K_{(2,1),(2,1)} S^{(2,1)} = S^{(3)} \oplus S^{(2,1)}.$$

Lorsque le vecteur de partages ne contient que des partages de la forme (1) , les éléments de la base de la représentation seront des vecteurs contenant, coordonnée par coordonnée, un tableau de Young à un seul bloc (pouvant respectivement contenir plus d'un nombre entre 1 et 3). Si l'on empile ces blocs, on obtient un tableau se comportant comme un tabloïde (définissant les éléments de $M^{(2,1)}$). J'en déduis le résultat suivant.

Proposition 4.30. *Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \in I_k$. Supposons que*

$$\{\lambda_{a_1}, \lambda_{a_2}, \dots, \lambda_{a_j}\} = \{(1), (1), \dots, (1)\}$$

soit un sous-ensemble complet de tous les partages non égaux à $\emptyset$ inclus dans $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$, et que $a_i < a_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq j - 1$. Alors, si la représentation de $\mathcal{U}_k$ indexée par $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ est réductible, elle est isomorphe à $M^{(a_j, a_{j-1}, \dots, a_1)}$.

Démonstration. Puisque tous les λ_{a_i} sont égaux à (1), les éléments de la base de la représentation indexée par $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \in I_k$ seront des vecteurs de tableaux pour lesquels les composantes contiendront individuellement soit $\emptyset$, ou soit un tableau de Young à une seule adresse. Soit $(A_{a_1}, A_{a_2}, \dots, A_{a_j})$ les contenus ordonnés de ces vecteurs pour lesquels on fait fi des composantes contenant $\emptyset$. On construit un tabloïde ayant les contenus $A_{a_j}, A_{a_{j-1}}, \dots, A_{a_2}$ et A_{a_1} respectivement du bas vers le haut (selon la convention française et ligne par ligne). Appelons le tableau obtenu T . On peut aisément démontrer qu'un $\mathcal{S}_n$ -isomorphisme existe entre l'ensemble des tabloïdes de même forme que T , et l'ensemble des éléments de la base de la représentation de $\mathcal{U}_k$ indexée par $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$. L'espace engendré par ces tabloïdes est exactement $M^{(a_j, a_{j-1}, \dots, a_1)}$. $\square$

Ce résultat établit un lien curieux entre les modules de la forme M^λ et certaines restrictions de l'algèbre festive à l'action d'un de ses sous-modules. Puisque nous savons qu'un monoïde fini d'inversibles est semi-simple, il serait intéressant de poursuivre l'étude des décompositions en irréductibles des représentations de $\mathcal{U}_k$ associées à l'action des générateurs $\{s_1, \dots, s_{k-1}, e_\lambda\}$, et ce pour chacune de ses représentations indexées par les vecteurs de partages de type plus fin que λ (pour $k \in \mathbb{N}$ arbitraire).

ANNEXE A

QUELQUES CALCULS DES REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES DES GÉNÉRATEURS DE $\mathcal{U}_k$

Dans cette section, on y expose les représentations irréductibles de $\mathcal{U}_k$ pour $1 \leq k \leq 5$ ainsi que les matrices de ses générateurs pour une certaine base fixée. Concernant les bases fixées pour les matrices obtenues, leur étiquetage est cohérent avec le sens de lecture de l'exposition des éléments de la base concernée. La notation des éléments de la base a été épurée afin de se limiter à l'information pertinente pour les calculs des matrices. Chacune des représentations irréductibles est présentée à partir de son étiquette dans I_k , et le morphisme associé à la représentation est dénoté par ρ .

Représentations irréductibles de $\mathcal{U}_1$

Le seul élément de I_1 est $((1))$. $\mathcal{U}_1$ est généré par un seul élément : $\{\{1, \bar{1}\}\}$. La seule classe- $\mathcal{L}$ est l_1^1 et le seul tableau de Young standard pour $\mathcal{S}_1$ est $\boxed{1}$. La seule matrice obtenue est alors $\rho(\{\{1, \bar{1}\}\}) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$. Puisque $\mathcal{U}_1$ ne contient pas b_1 mais seulement s_1 , on a que sa seule représentation irréductible est la représentation triviale $M^{(1)} \cong S^{(1)}$.

Représentations irréductibles de $\mathcal{U}_2$

Posons

$$1. A = \{((2), \emptyset); ((1, 1), \emptyset)\},$$

$$2. B = \{(\emptyset, (1))\}.$$

Alors, la chaîne inverse de raffinement des représentations irréductibles de $\mathcal{U}_2$ est :

$$\begin{array}{c} B \\ \uparrow \\ A \end{array}$$

Représentation irréductible étiquetée par $((2), \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \{(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array})\}$$

$$\rho(s_1) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\rho(b_1)$ est nulle, la représentation est isomorphe à $M^{(2)} \cong S^{(2)}$.

Représentation étiquetée par $((1, 1), \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \{(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array})\}$$

$$\rho(s_1) = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\rho(b_1)$ est nulle, la représentation est isomorphe à $M^{(1,1)} \cong S^{(1,1)} \oplus S^{(2)}$.

Représentation irréductible étiquetée par $(\emptyset, (1))$

$$\mathcal{B} = \{(\boxed{12})\}$$

$$\rho(s_1) = \rho(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

Représentations irréductibles de $\mathcal{U}_3$

Posons

1. $A = \{((3), \emptyset, \emptyset); ((2, 1), \emptyset, \emptyset); ((1, 1, 1), \emptyset, \emptyset)\},$
2. $B = \{((1), (1), \emptyset)\},$
3. $C = \{(\emptyset, \emptyset, (1))\}.$

Alors, la chaîne inverse de raffinement des représentations irréductibles de $\mathcal{U}_3$ est :

$$\begin{array}{c} C \\ \uparrow \\ B \\ \uparrow \\ A \end{array}$$

Représentation irréductible étiquetée par $((3), \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \{(\boxed{1 \mid 2 \mid 3})\}$$

$$\rho(s_1) = \rho(s_2) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \qquad \rho(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\rho(b_1)$ est nulle, la représentation est isomorphe à $M^{(3)} \cong S^{(3)}.$

Représentation étiquetée par $((1, 1, 1), \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \right) \right\}$$

$$\rho(s_1) = \rho(s_2) = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \quad \rho(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\rho(b_1)$ est nulle, la représentation est isomorphe à $M^{(1,1,1)} \cong S^{(3)} \oplus 2S^{(2,1)} \oplus S^{(1,1,1)}$.

Représentation étiquetée par $((2, 1), \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \right) \right\}$$

$$\rho(s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rho(s_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(b_1) = 0_{2 \times 2}$$

Puisque $\rho(b_1)$ est nulle, la représentation est isomorphe à $M^{(2,1)} \cong S^{(2,1)} \oplus S^{(3)}$.

Représentation irréductible étiquetée par $((1), (1), \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \right), \left(\begin{array}{|c|} \hline 23 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \right), \left(\begin{array}{|c|} \hline 13 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \right), \left(\begin{array}{|c|} \hline 12 \\ \hline \end{array} \right) \right\}$$

$$\rho(s_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho(s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(b_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Représentation irréductible étiquetée par $(\emptyset, \emptyset, (1))$

$$\mathcal{B} = \{(\boxed{123})\}$$

$$\rho(s_1) = \rho(s_2) = \rho(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

Représentations irréductibles de $\mathcal{U}_4$

Posons

1.

$$\begin{aligned} A = \{ & ((4), \emptyset, \emptyset, \emptyset); ((3, 1), \emptyset, \emptyset, \emptyset); \\ & ((2, 2), \emptyset, \emptyset, \emptyset); \\ & ((2, 1, 1), \emptyset, \emptyset, \emptyset); \\ & ((1, 1, 1, 1), \emptyset, \emptyset, \emptyset) \} \end{aligned}$$

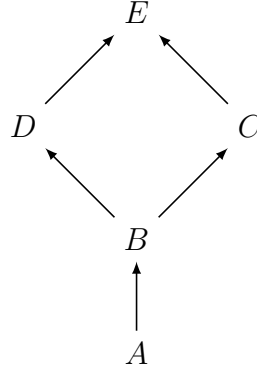
$$2. \ B = \{((2), (1), \emptyset, \emptyset); ((1, 1), (1), \emptyset, \emptyset)\},$$

$$3. \ C = \{((1), \emptyset, (1), \emptyset)\},$$

$$4. \ D = \{(\emptyset, (2), \emptyset, \emptyset); (\emptyset, (1, 1), \emptyset, \emptyset)\},$$

$$5. \ E = \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset, (1))\}.$$

Alors, la chaîne inverse de raffinement des représentations irréductibles de $\mathcal{U}_4$ est :



Représentation irréductible étiquetée par $(\emptyset, \emptyset, \emptyset, (1))$

$$\mathcal{B} = \{(\boxed{1234})\}$$

$$\rho(s_1) = \rho(s_2) = \rho(s_3) = \rho(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

Représentation irréductible étiquetée par $((1), \emptyset, (1), \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \{(\boxed{1}, \boxed{234}); (\boxed{2}, \boxed{134}); (\boxed{3}, \boxed{124}); (\boxed{4}, \boxed{123})\}$$

$$\rho(s_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho(s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho(s_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(b_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Représentation irréductible étiquetée par $(\emptyset, (2), \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \{(\begin{array}{|c|c|} \hline 12 & 34 \\ \hline \end{array}); (\begin{array}{|c|c|} \hline 13 & 24 \\ \hline \end{array}); (\begin{array}{|c|c|} \hline 23 & 14 \\ \hline \end{array})\}$$

$$\begin{aligned} \rho(s_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \rho(s_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \rho(s_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & & \rho(b_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Représentation irréductible étiquetée par $(\emptyset, (1, 1), \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \{(\begin{array}{|c|} \hline 34 \\ \hline 12 \\ \hline \end{array}); (\begin{array}{|c|} \hline 24 \\ \hline 13 \\ \hline \end{array}); (\begin{array}{|c|} \hline 14 \\ \hline 23 \\ \hline \end{array})\}$$

$$\begin{aligned} \rho(s_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \rho(s_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \rho(s_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ & & \rho(b_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Représentation irréductible étiquetée par $((2), (1), \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 34 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 24 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 14 \\ \hline \end{array} \right); \right. \\ \left. \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 13 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 23 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 12 \\ \hline \end{array} \right). \right\}$$

[illegible]

Représentation irréductible étiquetée par $((1, 1), (1), \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 34 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 24 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 14 \\ \hline \end{array} \right); \\ \left(\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 13 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 23 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 12 \\ \hline \end{array} \right). \right\}$$

$$\begin{aligned} \rho(s_1) &= \begin{pmatrix} -1 & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} & \rho(s_2) &= \begin{pmatrix} . & 1 & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & -1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 & . & . \end{pmatrix} \\ \rho(s_3) &= \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & -1 \end{pmatrix} & \rho(b_1) &= \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Représentation irréductible étiquetée par $((4), \emptyset, \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \right) \right\}$$

$$\rho(s_1) = \rho(s_1) = \rho(s_1) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \quad \rho(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\rho(b_1)$ est nulle, la représentation est isomorphe à $M^{(4)} \cong S^{(4)}$.

Représentation étiquetée par $((3, 1), \emptyset, \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & & \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \right) \right\}$$

$$\rho(s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rho(s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(s_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(b_1) = 0_{3 \times 3}$$

Puisque $\rho(b_1)$ est nulle, la représentation est isomorphe à $M^{(3,1)} \cong S^{(3,1)} \oplus S^{(4)}$.

Représentation étiquetée par $((2, 2), \emptyset, \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \right) \right\}$$

$$\rho(s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rho(s_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(s_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(b_1) = 0_{2 \times 2}$$

Puisque $\rho(b_1)$ est nulle, la représentation est isomorphe à $M^{(2,2)} \cong S^{(2,2)} \oplus S^{(3,1)} \oplus S^{(4)}$.

Représentation étiquetée par $((2, 1, 1), \emptyset, \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 4 \\ \hline 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} \right) \right\}$$

$$\rho(s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rho(s_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rho(s_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(b_1) = 0_{3 \times 3}$$

Puisque $\rho(b_1)$ est nulle, la représentation est isomorphe à $M^{(2,1,1)} \cong S^{(2,1,1)} \oplus S^{(2,2)} \oplus 2S^{(3,1)} \oplus S^{(4)}$.

Représentation étiquetée par $((1, 1, 1, 1), \emptyset, \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \right) \right\}$$

$$\rho(s_1) = \rho(s_2) = \rho(s_3) = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \quad \rho(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

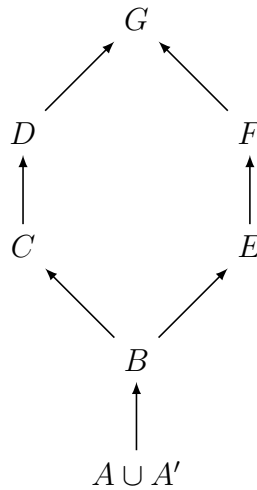
Puisque $\rho(b_1)$ est nulle, la représentation est isomorphe à $M^{(1,1,1,1)} \cong S^{(1,1,1,1)} \oplus 3S^{(2,1,1)} \oplus 2S^{(2,2)} \oplus 3S^{(3,1)} \oplus S^{(4)}$.

Représentations irréductibles de $\mathcal{U}_5$

Posons

1. $A = \{((5), \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset); ((4, 1), \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset); ((3, 2), \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset); ((3, 1, 1), \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)\},$
2. $A' = \{((2, 2, 1), \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset); ((2, 1, 1, 1), \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset); ((1, 1, 1, 1, 1), \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)\},$
3. $B = \{((3), (1), \emptyset, \emptyset, \emptyset); ((3, 1), (1), \emptyset, \emptyset, \emptyset); ((1, 1, 1), (1), \emptyset, \emptyset, \emptyset)\},$
4. $C = \{((1), (2), \emptyset, \emptyset, \emptyset); ((1), (1, 1), \emptyset, \emptyset, \emptyset)\},$
5. $D = \{((1), \emptyset, \emptyset, (1), \emptyset)\},$
6. $E = \{((2), \emptyset, (1), \emptyset, \emptyset); ((1, 1), \emptyset, (1), \emptyset, \emptyset)\},$
7. $F = \{(\emptyset, (1), (1), \emptyset, \emptyset)\},$
8. $G = \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, (1))\}.$

Alors, la chaîne inverse de raffinement des représentations irréductibles de $\mathcal{U}_5$ est :



Représentation irréductible étiquetée par $((5), \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \right) \right\}$$

$$\rho(s_1) = \rho(s_2) = \rho(s_3) = \rho(s_4) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \quad \rho(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\rho(b_1)$ est nulle, la représentation est isomorphe à $M^{(5)} \cong S^{(5)}$.

Représentation étiquetée par $((1, 1, 1, 1, 1), \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \right) \right\}$$

$$\rho(s_1) = \rho(s_2) = \rho(s_3) = \rho(s_4) = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \quad \rho(b_1) = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\rho(b_1)$ est nulle, la représentation est isomorphe à $M^{(1,1,1,1,1)} \cong S^{(1,1,1,1,1)} \oplus 4S^{(2,1,1,1)} \oplus 5S^{(2,2,1)} \oplus 6S^{(3,1,1)} \oplus 3S^{(3,2)} \oplus 4S^{(4,1)} \oplus S^{(5)}$.

Représentation étiquetée par $((4, 1), \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} \right); \\ \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & & & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & & & \\ \hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \right). \end{array} \right\}$$

$$\rho(s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(s_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(s_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(b_1) = 0_{4 \times 4}$$

Puisque $\rho(b_1)$ est nulle, la représentation est isomorphe à $M^{(4,1)} \cong S^{(4,1)} \oplus S^{(5)}$.

Représentation étiquetée par $((2, 1, 1, 1), \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 1 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 4 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \end{array} \right\};$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \end{array} \right\}.$$

$$\rho(s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(s_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(s_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(s_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(b_1) = 0_{4 \times 4}$$

Puisque $\rho(b_1)$ est nulle, la représentation est isomorphe à $M^{(2,1,1,1)} \cong S^{(5)} \oplus 3S^{(3,2)} \oplus 2S^{(2,2,1)} \oplus 3S^{(4,1)} \oplus 3S^{(3,1,1)} \oplus S^{(2,1,1,1)}$.

Représentation étiquetée par $((3, 1, 1), \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \\ \left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \right); \quad \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \\ \left(\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \right); \quad \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \\ \left(\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \right); \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \\ \left(\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \right); \quad \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \\ \left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \right); \quad \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \\ \left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \right). \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline \end{array} \end{array} \right\}$$

$$\rho(s_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & 1 & -1 & . \\ . & 1 & . & -1 & . & -1 \end{pmatrix} \quad \rho(s_2) = \begin{pmatrix} . & . & 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & -1 & . \\ . & . & . & 1 & . & . \end{pmatrix}$$

$$\rho(s_3) = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & -1 & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & 1 & . \end{pmatrix} \quad \rho(s_4) = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & 1 \\ . & -1 & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ 1 & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

$$\rho(b_1) = 0_{6 \times 6}$$

Puisque $\rho(b_1)$ est nulle, la représentation est isomorphe à $M^{(3,1,1)} \cong S^{(3,1,1)} \oplus S^{(3,2)} \oplus 2S^{(4,1)} \oplus S^{(5)}$.

Représentation étiquetée par $((2, 2, 1), \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} \rho(s_1) &= \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . \\ -1 & -1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ -1 & . & 1 & -1 & . \\ . & . & -1 & . & -1 \end{pmatrix} & \rho(s_2) &= \begin{pmatrix} . & 1 & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & -1 & . \\ . & . & 1 & . & . \end{pmatrix} \\ \rho(s_3) &= \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . \\ . & -1 & . & . & . \\ -1 & . & -1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & 1 & . \end{pmatrix} & \rho(s_4) &= \begin{pmatrix} . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 \\ 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & -1 & . \\ . & 1 & . & . & . \end{pmatrix} \\ \rho(b_1) &= 0_{5 \times 5} \end{aligned}$$

Puisque $\rho(b_1)$ est nulle, la représentation est isomorphe à $M^{(2,2,1)} \cong S^{(2,2,1)} \oplus S^{(3,1,1)} \oplus 2S^{(3,2)} \oplus 2S^{(4,1)} \oplus S^{(5)}$.

Représentation étiquetée par $((3, 2), \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} \right); \\ \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \right); \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \right). \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \rho(s_1) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ . & 1 & . & -1 & -1 \end{pmatrix} & \rho(s_2) &= \begin{pmatrix} . & . & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . \\ . & -1 & . & . & 1 \\ . & 1 & . & 1 & . \end{pmatrix} \\ \rho(s_3) &= \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ -1 & . & . & -1 & -1 \end{pmatrix} & \rho(s_4) &= \begin{pmatrix} . & -1 & . & . & 1 \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . \end{pmatrix} \\ \rho(b_1) &= 0_{5 \times 5} \end{aligned}$$

Puisque $\rho(b_1)$ est nulle, la représentation est isomorphe à $M^{(3,2)} \cong S^{(3,2)} \oplus S^{(4,1)} \oplus S^{(5)}$.

Représentation irréductible étiquetée par $(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, (1))$

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{array}{|c|} \hline 12345 \\ \hline \end{array} \right) \right\}$$

$$\rho(s_1) = \rho(s_2) = \rho(s_3) = \rho(s_4) = \rho(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

Représentation irréductible étiquetée par $((1), \emptyset, \emptyset, (1), \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ (\boxed{1}, \boxed{2345}); (\boxed{2}, \boxed{1345}); (\boxed{3}, \boxed{1245}); (\boxed{4}, \boxed{1235}); (\boxed{5}, \boxed{1234}) \right\}$$

$$\begin{aligned} \rho(s_1) &= \begin{pmatrix} . & 1 & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} & \rho(s_2) &= \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \\ \rho(s_3) &= \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} & \rho(s_4) &= \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & 1 & . \end{pmatrix} \\ \rho(b_1) &= \begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Représentation irréductible étiquetée par $(\emptyset, (1), (1), \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{l} (\boxed{12}, \boxed{345}); (\boxed{13}, \boxed{245}); (\boxed{14}, \boxed{235}); \\ (\boxed{15}, \boxed{234}); (\boxed{23}, \boxed{145}); \\ (\boxed{24}, \boxed{135}); (\boxed{25}, \boxed{134}); (\boxed{34}, \boxed{125}); \\ (\boxed{35}, \boxed{124}); (\boxed{45}, \boxed{123}). \end{array} \right\}$$

$$\rho(s_1) = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \end{bmatrix} \quad \rho(s_4) = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho(s_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \quad \rho(s_3) = \begin{bmatrix} 1 & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho(b_1) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Représentation irréductible étiquetée par $((2), \emptyset, (1), \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{l} (\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 345 \\ \hline \end{array}); (\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 245 \\ \hline \end{array}); (\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 235 \\ \hline \end{array}); (\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 234 \\ \hline \end{array}); \\ (\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 145 \\ \hline \end{array}); (\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 135 \\ \hline \end{array}); (\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 134 \\ \hline \end{array}); (\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 125 \\ \hline \end{array}); \\ (\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 124 \\ \hline \end{array}); (\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 123 \\ \hline \end{array}). \end{array} \right\}$$

$$\rho(s_1) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 1 & & & & 1 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \rho(s_4) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho(s_2) = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad \rho(s_3) = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

[illegible]

Représentation irréductible étiquetée par $((1, 1), \emptyset, (1), \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\left(\frac{2}{1} \right), \boxed{345} \right); \left(\left(\frac{3}{1} \right), \boxed{245} \right); \left(\left(\frac{4}{1} \right), \boxed{235} \right); \left(\left(\frac{5}{1} \right), \boxed{234} \right); \\ \left(\left(\frac{3}{2} \right), \boxed{145} \right); \left(\left(\frac{4}{2} \right), \boxed{135} \right); \left(\left(\frac{5}{2} \right), \boxed{134} \right); \left(\left(\frac{4}{3} \right), \boxed{125} \right); \\ \left(\left(\frac{5}{3} \right), \boxed{124} \right); \left(\left(\frac{5}{4} \right), \boxed{123} \right). \end{array} \right\}$$

$$\rho(s_1) = \begin{bmatrix} -1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \end{bmatrix} \quad \rho(s_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rho(s_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \rho(s_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

[illegible]

Représentation irréductible étiquetée par $((3), (1), \emptyset, \emptyset, \emptyset)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{l} (\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3}, \boxed{45}); (\boxed{1} \boxed{2} \boxed{4}, \boxed{35}); (\boxed{1} \boxed{3} \boxed{4}, \boxed{25}); \\ (\boxed{2} \boxed{3} \boxed{4}, \boxed{15}); (\boxed{1} \boxed{2} \boxed{5}, \boxed{34}); (\boxed{1} \boxed{3} \boxed{5}, \boxed{24}); \\ (\boxed{2} \boxed{3} \boxed{5}, \boxed{14}); (\boxed{1} \boxed{4} \boxed{5}, \boxed{23}); (\boxed{2} \boxed{4} \boxed{5}, \boxed{13}); \\ (\boxed{3} \boxed{4} \boxed{5}, \boxed{12}). \end{array} \right\}$$

$$\rho(s_1) = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \quad \rho(s_2) = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho(s_3) = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \quad \rho(s_4) = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

[illegible]

Représentation irréductible étiquetée par $((2, 1), (1), \emptyset, \emptyset, \emptyset)$

Ici, les éléments de la base sont étiquetés le long de la première, puis de la deuxième colonne de l'ensemble suivant :

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{ll} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \boxed{45} \right); & \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \boxed{24} \right); \\ \\ \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \boxed{45} \right); & \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}, \boxed{24} \right); \\ \\ \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \boxed{35} \right); & \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \boxed{14} \right); \\ \\ \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}, \boxed{35} \right); & \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 5 \\ \hline \end{array}, \boxed{14} \right); \\ \\ \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array}, \boxed{25} \right); & \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}, \boxed{23} \right); \\ \\ \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array}, \boxed{25} \right); & \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}, \boxed{23} \right); \\ \\ \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \boxed{15} \right); & \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}, \boxed{13} \right); \\ \\ \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}, \boxed{15} \right); & \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 2 & 5 \\ \hline \end{array}, \boxed{13} \right); \\ \\ \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \boxed{34} \right); & \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \boxed{12} \right); \\ \\ \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 5 \\ \hline \end{array}, \boxed{34} \right); & \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 3 & 5 \\ \hline \end{array}, \boxed{12} \right). \end{array} \right\}$$

[illegible]

$$\rho(s_4) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

INDEX

- $\mathbb{K}$ —algèbre, 108
- $\mathcal{S}_k$ —action sur P_k , 89
- π —tableau de forme $\overset{\rightarrow}{\lambda}$, 161
- b_i dans $\mathcal{U}_k$, 106
- $C(d_{\overset{\rightarrow}{\mu}}, \lambda)$, 197
- $d^\uparrow$ et $d^\downarrow$, 91
- G —homomorphisme, 18
- G —module, 13
- G —module cyclique, 32
- G —module irréductible, 16
- G —module libre sur l'ensemble E , 13
- G —représentations équivalentes et in-
équivalentes, 18
- G —sous-module, 16
- H^- , 37
- I_k , 86
- M —action, 60
- M —ensemble, 60
- N_e , 119
- P_k , 89
- s_i dans $\mathcal{U}_k$, 98
- t^λ , 31
- T_e , 119
- $[k]$, 7
- Éléments de Garnir, 42
- Éléments maximaux et minimaux, 41
- Algèbre commutante, 19
- Algèbre d'endomorphismes, 19
- Caractère d'une G —représentation, 21
- Caractère d'une représentation de $\mathcal{U}_k$,
197
- Caractère, représentation d'un monoïde,
187
- Catégories, 10
- Classe de conjugaison généralisée $C_{\overset{\rightarrow}{\lambda}}$,
194
- Classes de conjugaison généralisées,
182
- Classes— $\mathcal{L}$, classes— $\mathcal{R}$ et classes— $\mathcal{J}$,
58
- Coind $_e$, 119
- Coins intérieurs et extérieurs d'un tableau,
44
- Composition de n , 40
- Congruence sur un monoïde, 51
- Conjugués, 8
- Contenu d'un tableau, 46
- Demi-groupe, 50
- Demi-groupe opposé D^{opp} , 51
- Deuxième présentation, $\mathcal{U}_k$, 92
- Diagramme de Ferrer, 29

- Dominance entre partages, 33
- Dominance entre tabloïdes, 40
- Ensemble d'idempotents orthogonaux, 116
- Ensemble d'idempotents primitifs, 118
- Fonction de classe d'un monoïde, 181
- Fonction de classe sur un groupe, 22
- Homomorphisme de monoïdes, 51
- Idéal d'un monoïde, 57
- Idéal principal, 58
- Idempotent, 52
- Idempotent primitif, 117
- Idempotents orthogonaux, 116
- Ind_e , 119
- Index d'un élément d'un monoïde fini, 53
- Inflation d'un module, 139
- Inverse $\tilde{d}$ dans $\mathcal{U}_k$, 101
- L'algèbre d'un monoïde, 138
- L'algèbre festive $\mathcal{U}_k$, 91
- Le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$, 5
- Matrice sandwich, 149
- Module de Specht, 36
- Module des permutations M^λ , 31
- Module fidèle sur une algèbre, 112
- Module libre, 11
- Module plat, 11
- Module projectif, 12
- Module régulier sur une algèbre, 110
- Module semi-simple, 109
- Module simple sur une algèbre, 109
- Modules indécomposables, 113
- Monoïde d'inversibles, 75
- Monoïde régulier, 70
- Nilpotence, 112
- Nombres de Kostka, 48
- Opération sur $\mathcal{U}_k$, 95
- Ordre de classement par la dernière lettre, 87
- Ordre lexicographique, 34
- Ordre partiel naturel entre idempotents, 53
- Ordre partiel naturel sur les éléments d'un monoïde, 81
- Ordre partiel sur un ensemble, 33
- Période d'un élément d'un monoïde fini, 53
- Partage λ , 7
- Partition, 87
- Partition π_λ représentante associée au partage λ , 158
- Partitions de $[k] \uplus [\bar{k}]$ uniformes, 91
- Pointe, idempotent, 139
- Polytabloïdes, 35
- Poset, 33
- Première présentation de $\mathcal{U}_k$, 90

- Produit direct de demi-groupes, 52
- Produit scalaire entre tabloïdes, 37
- Produit scalaire, fonctions de classe, 23
- Produit tensoriel de matrices, 9
- Raffinement entre partitions, 89
- Relations de Green, 58
- Représentant l_π^γ de la classe $\mathcal{L} L_\pi^\gamma$, 168
- Représentants $d_{\vec{\lambda}}$ de $C_{\vec{\lambda}}$, 196
- Représentation *signe* de $\mathcal{S}_n$, 9
- Représentation d'un monoïde, 137
- Représentation de coensembles, 14
- Représentation de Schützenberger, 142
- Représentation induite, 27
- Représentation matricielle, 12
- Représentation naturelle de Young de $\mathcal{S}_n$, 44
- Représentation par produit tensoriel, 26
- Représentation régulière d'un groupe G , 14
- Représentation restreinte, 27
- Représentation standard de $\mathcal{S}_n$, 14
- Représentation triviale, 14
- Res_e , 119
- Série principale d'un monoïde, 69
- Séries de compositions, 112
- Socle d'un monoïde M , $\text{soc}(M)$, 110
- Sous-demi-groupe, 50
- Sous-demi-groupe cyclique, 54
- Sous-groupe de Young, 31
- Sous-groupe maximal d'un monoïde, 53
- Sous-module, 15
- Sous-module maximal, 110
- Sous-monoïde engendré, 52
- Stabilisateurs de rangées et de colonnes R_t et C_t , 35
- Suite exacte, 11
- Table des caractères d'un groupe, 23
- Table des caractères, monoïde fini, 190
- Tableaux de Young, 29
- Tableaux de Young généralisé, 46
- Tableaux de Young standards, 39
- Tableaux uniformes de forme $\vec{\lambda}$, 174
- Tabloïdes, 30
- Troisième présentation, $\mathcal{U}_k$, 93
- Type cyclique d'une permutation, 6
- Type d'un tableau, 46
- Type d'une partition, 88
- Type de $\vec{\lambda}$, 172
- Type cyclique de $d \in \mathcal{U}_k$, 193
- Unité d'un demi-groupe, 50
- Zéro d'un demi-groupe, 50

BIBLIOGRAPHIE

- A. H. Clifford, G. B. Preston. (1961) *The Algebraic theory of semigroups. Volume I*. Mathematical Surveys, No. 7. American Mathematical Society, Providence, RI.
- FitzGerald, D. G. (2003) *A presentation for the monoid of uniform block permutations*. Bull. Austral. Math. Soc., 68(2):317-324.
- Kosuda, M. (2000). *Characterization for the party algebra*. Ryukyu Math. J., 13:7-22.
- Munn, W. D. (1957). *Matrix representations of semigroups*. Proc. Cambridge Phil. Soc. 53(1957) 5-12 (MR 18, 489).
- OEIS Foundation Inc. (2019). The on-line encyclopedia of integer sequences. Lu en ligne le 13 juillet 2022.
- Orelanna, Saliola, Schilling et Zabrocki. (2021). Plethysm and the Algebra of Uniform Block Permutations.
arXiv:2112.13909
- Pozinovsky, I. S. (1958). *On irreducible matrix representations of finite semigroups*. Uspehi Mat. Nauk 13(1958) 139-144 (MR 21, 383).
- Sagan, B. E. (2001). *The Symmetric Group : Representation, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*. Springer.
- Steinberg, B. (2016). *Representation theory of finite monoids* de *Universitext*. Springer, Cham.