

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉTUDE DES VISIONS DE L'ERREUR CHEZ DES ENSEIGNANTS
DE MATHÉMATIQUES DU SECONDAIRE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

IORELLA TINETTO PREZA

JUIN 2023

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.04-2020). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Ce mémoire de maîtrise laisse entrevoir mon actuelle compréhension du monde de la recherche. Cette compréhension étant en évolution depuis plusieurs années, elle est fortement influencée par la rencontre de plusieurs personnes qui ont collaboré à mon développement comme étudiante de recherche, et collatéralement, comme professionnelle de l'enseignement.

Je remercie sincèrement mes deux directeurs de projet, Jérôme Proulx et Jean François Maheux, d'avoir accueilli mes intérêts de recherche avec enthousiasme, de les avoir alimentés avec leurs idées inspirantes, et de m'avoir guidé et accompagné tout au long de ce processus enrichissant. Je les remercie, plus précisément, de m'avoir aidé à encadrer et à mettre en mots mes réflexions (parfois éparpillées); j'ai beaucoup appris de cet exercice. Ma gratitude envers eux concerne aussi l'opportunité qu'ils m'ont offerte de faire partie du LEAM. Ceci m'a permis de vivre de près leur stimulante manière de faire la recherche.

J'aimerais aussi remercier mes collègues étudiants Rox-Anne, Geneviève, Jean Christophe, Antoine et Chantal d'avoir partagé avec moi des discussions particulièrement intéressantes, qui ont beaucoup apporté à ma formation comme étudiante de recherche. Il y a un peu de chacun d'entre vous dans ce projet. Un merci spécial à Charlotte Mégrouèche d'avoir été très généreuse dans le partage d'idées dans lesquelles je me reconnais souvent. Son regard large et positif a grandement aidé, et aide encore, dans mon cheminement pour donner un sens à ma compréhension de l'erreur en mathématiques.

L'aboutissement de ce projet n'aurait pas eu lieu sans l'appui de quelques personnes qui me sont chères. Je remercie mes parents de se montrer toujours intéressés et enthousiastes par les projets que j'entreprends. Je remercie aussi mon amie Morgane d'être positivement présente dans ma vie. Ses réflexions lucides, ses conseils pertinents et son appui chaleureux m'ont énormément aidé ces dernières années.

Il est très difficile de mettre en mots ma gratitude envers ceux qui partagent la vie avec moi. Les encouragements d'Andrés ont été essentiels pour démarrer ce projet et son support quotidien a été la clé pour que je puisse le terminer. Le regard fier de mes enfants Felipe, Lucia et Serena en lien avec cet accomplissement représente pour moi, en retour, ma plus grande fierté à propos de ce projet. Pour tout cela, je vous en suis très reconnaissante.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iii
TABLE DES MATIÈRES.....	iv
LISTE DES FIGURES	vii
LISTE DES TABLEAUX	viii
RÉSUMÉ.....	ix
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1	
PROBLÉMATIQUE	3
1.1 L'origine du questionnement	3
1.2 La place centrale de l'erreur dans la classe de mathématiques.	6
1.2.1 L'erreur et la relation didactique élève-enseignant-mathématiques.	6
1.2.2 L'erreur et les caractéristiques de l'activité mathématique.....	9
1.3 Les perceptions de l'enseignant à propos de l'erreur	10
1.4 Les questions de recherche.....	13
CHAPITRE 2	
CADRE THÉORIQUE.....	14
2.1 Les différentes visions de l'erreur en mathématiques	14
2.1.1 L'erreur comme une incompréhension mathématique.....	15
2.1.2 L'erreur comme une compréhension mathématique en construction	18
2.1.3 L'erreur comme une source d'exploration mathématique	21
2.1.4 L'erreur comme une production mathématique.....	24
2.2 Le mot « vision » de l'erreur en mathématiques.....	29
2.2.1 La vision et les croyances	29
2.2.2 La vision et les représentations sociales	31
2.3 Des aspects susceptibles d'influencer la compréhension de l'enseignant sur ses interventions en classe	32
2.4 Quelques nuances sur l'interprétation du discours de l'enseignant.	35
CHAPITRE 3	
MÉTHODOLOGIE.....	38
3.1 Les orientations méthodologiques.....	38
3.2 La collecte de données et les enseignants participants.....	40
3.2.1 Les modalités adoptées pour la collecte de données.....	41
3.2.2 La création du questionnaire.....	42

3.3 La démarche d'analyse.....	44
CHAPITRE 4	
ANALYSES	46
4.1 Henri: l'importance et l'utilité des erreurs en mathématiques.....	46
4.1.1 Description des propos d'Henri	46
4.1.2 Analyse des propos d'Henri selon les visions de l'erreur.....	51
4.2 Kathya: l'erreur comme une entrave à la progression.....	52
4.2.1 Description des propos de Kathya	52
4.2.2 Analyse des propos de Kathya.....	56
4.3 Clara: l'exploitation de l'erreur à travers les explications	57
4.3.1 Description des propos de Clara	57
4.3.2 Analyse des propos de Clara.....	61
4.4 Julie: l'erreur et les caractéristiques de l'élève	63
4.4.1 Description des propos de Julie	63
4.4.2 Analyse des propos de Julie.....	67
4.5 Lise: l'utilisation de l'erreur pour éviter des erreurs futures.....	68
4.5.1 Description des propos de Lise	68
4.5.2 Analyse des propos de Lise.....	72
4.6 Oscar: l'erreur comme occasion d'ajustement.....	73
4.6.1 Description des propos d'Oscar.....	74
4.6.2 Analyse des propos d'Oscar.....	77
4.7 Synthèse des thématiques des propos des six enseignants.....	78
CHAPITRE 5	
ANALYSES TRANSVERSALES.....	80
5.1 Vision 1: L'erreur comme une incompréhension mathématique	81
5.1.1 Le manque de compréhension mathématique.....	82
5.1.2 La défaillance à diagnostiquer et à rectifier	83
5.1.3 L'élimination des erreurs	85
5.1.4 Le bilan sur l'erreur comme une incompréhension mathématique.....	87
5.2 Vision 2: L'erreur comme une compréhension mathématique en construction.....	87
5.2.1 Les compréhensions mathématiques en développement.....	87
5.2.2 Les obstacles à dépasser.....	89
5.2.3 La confrontation de l'erreur	90
5.2.4 Le bilan sur l'erreur comme une compréhension en construction	91
5.3 Vision 3: L'erreur comme une source d'investigation mathématique	92
5.3.1 Une occasion à saisir pour faire des mathématiques.....	92
5.3.2 L'exploration de l'erreur pour contribuer au développement des mathématiques.....	93
5.3.3 L'investigation des erreurs selon différents cadres de référence	94
5.3.4 Le bilan sur l'erreur comme une source d'investigation mathématique	95
5.4 Vision 4: L'erreur comme une production mathématique	96
5.4.1 L'erreur comme une réalisation à part entière contrasté au statut de l'erreur.....	96

5.4.2	Un travail mathématique valable, contrasté à l'erreur comme un outil en mathématiques	97
5.4.3	Le bilan sur l'erreur comme une production mathématique	98
5.5	Le bilan sur les quatre visions de l'erreur en mathématiques	98
CHAPITRE 6		
CONCLUSION		101
6.1	Les questions de recherche et leur contexte scientifique	101
6.2	Les résultats de cette recherche.....	103
6.3	De nouveaux objectifs et de nouvelles questions.....	105
6.4	Les résultats de cette recherche sur moi comme enseignante	106
ANNEXE A		
LES RÉPONSES DES ENSEIGNANTS		109
BIBLIOGRAPHIE		117

LISTE DES FIGURES

Figure		Page
Figure 1.1	Triangle didactique : élève-enseignant-mathématiques	7
Figure 1.2	Dispositions différentes d'un même carré.....	8
Figure 2.1	Résolutions proposées par des élèves pour la recherche d'une fraction	25
Figure 2.2	Illustration de la relation dynamique entre le discours et la vision.....	36
Figure 3.1	Aperçu du questionnaire en format « form » rempli par les enseignants	41
Figure 5.1	Interactions entre les quatre visions de l'erreur en mathématiques.....	100

LISTE DES TABLEAUX

Tableau		Page
Tableau 2.1	Résumé des principaux éléments des quatre visions sur l'erreur en mathématiques	28
Tableau 4.1	Synthèse des thématiques issues des propos des enseignants	78
Tableau 5.1	Récapitulatif des caractéristiques des quatre visions sur l'erreur en mathématiques.....	81

RÉSUMÉ

Les erreurs en mathématiques occupent une place primordiale à l'école. Que l'intention soit de les corriger, d'éviter leur manifestation, de les utiliser pour améliorer des compréhensions ou de les exploiter pour générer des réflexions mathématiques, les activités de la classe de mathématiques sont souvent axées autour des erreurs des élèves. Ces erreurs se traduisent souvent en perte de points dans les évaluations et même en échecs. Force est d'admettre qu'elles occupent une place centrale dans la classe de mathématiques et donc dans les préoccupations de l'enseignant. Parfois, elles ne sont pas encore là, mais elles animent déjà l'activité de la classe en étant anticipées et discutées. La vision de l'enseignant sur les erreurs, sa manière de les comprendre, de les reconnaître et d'agir en lien avec elles n'est-elle pas en ce sens indissociable de l'activité mathématique qui se produit dans la classe?

Ce travail de recherche de maîtrise étudie différentes visions d'enseignants sur l'erreur en mathématiques en lien avec la mobilisation de ces visions en classe. Pour ce faire, quatre visions théoriques de l'erreur en mathématiques sont identifiées et décortiquées. À partir d'elles, un questionnaire a été préparé dans le but de faire ressortir les visions sur l'erreur d'enseignants de mathématiques et leurs façons de les aborder dans leurs classes. Six enseignants du secondaire ont répondu à ce questionnaire administré en ligne. Leurs réponses ont permis de (1) dessiner des portraits de différentes visions (des enseignants) de l'erreur en mathématiques et de (2) confronter les visions théoriques aux propos des enseignants en dégagant des relations, des nuances et même potentiellement des contradictions entre celles-ci. Les analyses effectuées dans cette recherche nous permettent d'apprécier de manière concrète la façon dont les erreurs et leur traitement sont perçues par des enseignants de mathématiques du secondaire. Ces analyses contribuent à approfondir nos compréhensions sur la place et le rôle de l'erreur en classe de mathématiques.

Mots clés : Didactique des mathématiques; Erreurs en mathématiques; Vision de l'erreur; Activités mathématiques; Enseignants de mathématiques au secondaire.

INTRODUCTION

Ce mémoire de maîtrise en didactique des mathématiques est le résultat d'un travail fait autour d'une préoccupation provenant du monde de l'enseignement. En effet, ce projet est né d'un intérêt chez moi à comprendre les possibles conflits entre les discours des enseignants autour des erreurs en mathématiques et leurs interventions de classes en lien avec ces mêmes erreurs. Cet intérêt m'a conduit vers l'exploration des questions de recherche suivantes: (1) Quelles sont les différentes visions de l'erreur en mathématiques manifestées par des enseignants de mathématiques? et (2) Qu'est-ce que ces manifestations révèlent concernant la mobilisation de ces visions en classe?

Dans le premier chapitre, j'explique d'abord l'origine de mon questionnement, lié à mon expérience comme enseignante de mathématiques. Ensuite, je mets en avant la place centrale de l'erreur dans la classe de mathématiques. Je présente ensuite des idées sur les perceptions des enseignants à propos de l'erreur, mettant l'accent sur la relation entre la théorie et la pratique.

Dans le deuxième chapitre, j'identifie quatre visions de l'erreur en mathématiques: l'erreur comme une incompréhension mathématique, l'erreur comme une compréhension mathématique en construction, l'erreur comme une source d'exploration mathématique et l'erreur comme une production mathématique. Ces quatre visions mènent à conceptualiser le mot *vision* de l'erreur en mathématiques et offrent un ancrage théorique à mes questions de recherche (et servent plus loin de référence pour l'analyse des propos des enseignants recueillis par la suite).

Dans le troisième chapitre, j'annonce l'orientation méthodologique qui guide la démarche suivie pour répondre empiriquement à mes questions de recherche. Je présente le questionnaire qui a permis d'obtenir mes données de recherche (les propos des enseignants en lien avec les erreurs en mathématiques et leurs manières de concevoir leurs interventions en classe en lien avec ces erreurs). Je décris ensuite la démarche utilisée pour analyser les réponses des enseignants au questionnaire.

Dans le quatrième chapitre, je présente une première analyse des propos de chacun des six enseignants ayant répondu au questionnaire. Ceci permet de tracer un portrait de chacun de ces enseignants relativement à leurs visions de l'erreur en mathématiques et de la mobilisation de ces visions.

Dans le cinquième chapitre, par une analyse transversale, les visions de l'erreur en mathématiques présentées au chapitre 2 sont revues et creusées à partir des propos des enseignants. Ceci permet d'approfondir les liens entre la théorie et la pratique. Je soulève aussi des relations possibles entre chacune des différentes visions de l'erreur qui se dégagent des propos des enseignants.

Dans la conclusion, j'offre une synthèse des réponses à mes questions de recherche. Je soulève des réflexions se rattachant à l'origine de mon questionnement, et pointe vers de nouveaux questionnements pour des recherches subséquentes relativement aux erreurs en mathématiques et aux pratiques des enseignants en relation avec celles-ci.

CHAPITRE 1

PROBLÉMATIQUE

1.1 L'origine du questionnement

Il n'est pas encore 8h45 du matin. Mon cours démarre à peine et je suis déjà en train de corriger une erreur d'un de mes élèves. Malgré le temps passé à réfléchir sur la façon d'aborder ce que je considère comme une erreur en mathématiques, je me retrouve encore une fois à reproduire un aspect de l'enseignement qui provoque chez moi un certain malaise, et qui me questionne.

L'élève a fait son travail. Il a résolu l'équation $2a^2 - 5a = 6a - 15$ en se servant de la factorisation. Il me dit que la solution est $a=3$. Je lui réponds que le nombre 3 vérifie en effet l'équation, mais qu'il n'est pas le seul nombre à la vérifier. Je rappelle alors à tous les élèves de la classe que : résoudre une équation consiste à déterminer, parmi les nombres qu'ils connaissent, tous ceux qui rendent l'égalité vraie. Nous observons la résolution, en groupe. L'élève écrit sa démarche au tableau:

$2a^2 - 5a = 6a - 15$
$a(2a - 5) = 3(2a - 5)$
$a(\cancel{2a - 5}) = 3(\cancel{2a - 5})$
$a = 3$

Avec la participation des autres élèves, nous analysons chacune des étapes. La discussion tourne autour de *ce qui ne va pas* dans la résolution de l'élève. J'interviens pour mettre l'accent sur les opérations (+, -, ×, ÷), qui permettent la transformation d'une équation en s'assurant de conserver ses solutions. Nous concluons qu'à la dernière étape la division par (2a-5) permet de transformer $a(2a-5) = 3(2a-5)$ en $a = 3$, mais que si $a = \frac{5}{2}$, alors $(2a - 5) = 0$. Un élève dit qu'il est impossible de diviser par 0 et qu'il a trouvé deux nombres qui vérifient l'équation en utilisant la méthode nommée « somme-produit ». Cet élève partage avec la classe sa résolution :

$2a^2 - 5a = 6a - 15$ $2a^2 - 11a + 15 = 0$ $2a^2 - 5a - 6a + 15 = 0$ $a(2a-5) - 3(2a-5) = 0$ $(2a-5)(a-3) = 0$ $2a-5 = 0 \quad \text{ou} \quad a-3 = 0$ $a = 3 \quad \text{ou} \quad a = \frac{5}{2}$		$\left. \begin{array}{l} m + n = -11 \\ m \cdot n = 30 \end{array} \right\}$ $m = -5 \quad \text{et} \quad n = -6$
--	--	--

J'appuie la démarche de l'élève, faisant remarquer qu'à la première étape l'élève a ordonné l'équation de façon à l'écrire de la forme $ax^2+bx+c = 0$. Par la suite, les élèves continuent de résoudre d'autres équations et aucun d'entre eux n'effectue une division par un polynôme lors des résolutions suivantes. Pourtant, ils pourraient bien le faire, en suivant une démarche qui demande une analyse de cas. Par exemple, si $a \neq \frac{5}{2}$, il est possible de diviser par (2a-5) et de continuer à transformer l'équation. Si $a = \frac{5}{2}$, il est possible de vérifier l'égalité remplaçant a par $\frac{5}{2}$. Par mes

interactions, j'ai l'impression d'avoir dirigé mes élèves vers une démarche aseptisée d'erreurs, mais aussi de réflexions, et de leur avoir donné une méthode, une marche à suivre ou encore de les avoir empêchés d'emprunter un chemin potentiel à la suite de mes « avertissements » au sujet de l'erreur.

D'une certaine façon, c'est l'erreur corrigée et prise en charge par mon enseignement qui me dérange dans mon intervention. Mon intention comme enseignante est d'aider mes élèves à construire de nouvelles connaissances, et ce, souvent à partir de leurs erreurs. En ce sens, je vois dans l'erreur décrite une belle occasion pour travailler avec mes élèves des idées à propos du nombre de solutions d'une équation ou bien pour qu'ils explorent différentes manières de résoudre une équation. Toutefois, mon souci de régler le problème qui s'est présenté m'a conduit à effectuer une mise en garde sur ce qui serait une démarche inappropriée.

De plus, je me demande dans quelle mesure cette erreur mathématique est relative au type de travail proposé en classe. Si les élèves avaient été en activité d'exploration, est-ce que j'aurais vu comme une erreur le fait de donner un seul nombre comme la solution? Quelle aurait été mon intervention dans ce cas? Si j'ai montré aux élèves une méthode de résolution d'équations, pourquoi suis-je dérangée par ma façon d'intervenir en lien avec le fonctionnement de cette dernière? En bref, je me demande de quelle manière ma compréhension de l'erreur de l'élève s'articule avec l'ensemble de mes interventions dans la classe.

Mon travail de recherche à la maîtrise est motivé par ce type de situation. Ce sont des situations qui font ressortir un possible paradoxe entre, d'un côté, ma façon de penser la place et le rôle centraux des erreurs dans le travail mathématique de mes élèves et, de l'autre côté, ma façon de comprendre mes interventions en lien avec les erreurs de ceux-ci. Suis-je la seule à percevoir ce conflit entre ces deux composantes qui ressortent dans mon enseignement? Les discussions informelles que j'ai eues avec des enseignants des différents milieux où j'ai travaillé m'ont amenée à penser que le corps enseignant véhicule un discours assez uniforme sur le rôle de l'erreur dans l'apprentissage. En effet, beaucoup d'enseignants avec qui j'ai discuté affirment comme moi que l'erreur est un outil d'apprentissage, qu'elle fait partie des obstacles à franchir par l'élève, qu'elle participe à la création des concepts, etc. L'erreur serait même nécessaire à la formation mathématique d'un individu pour certains. Je me demande si ces enseignants vivent les mêmes malaises et déchirements que moi dans l'exercice de leur fonction. D'autres enseignants pourraient

aussi percevoir l'erreur et son rôle de manières différentes. À quoi peuvent ressembler ces visions? Comment les propos des enseignants articulent une dynamique entre leur vision de l'erreur et leurs actions en salle de classe? Ce sont ces questions qui orientent mon travail de recherche de maîtrise.

1.2 La place centrale de l'erreur dans la classe de mathématiques

L'erreur est au cœur de l'enseignement-apprentissage des mathématiques, et cela, dans une variété de façons de la comprendre. Il est possible de dire que les erreurs motivent l'activité mathématique de la classe. En effet, les devoirs des élèves sont corrigés et les évaluations sont généralement observées sous l'angle de la recherche d'erreurs qui ont été anticipées par des grilles d'évaluation. Les erreurs ne sont pas encore présentes, mais elles animent déjà implicitement l'activité de la classe.

Le thème de l'erreur a été étudié par plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques depuis l'origine de cette discipline (Flückiger, 2006). En effet, au début des années 1980, dans les premières publications de la revue *Recherche en Didactique des Mathématiques*, des idées à propos de l'erreur, de son interprétation et de son traitement sont exposées par Brousseau. La série de livres de Stella Baruk (Échec et maths, 1973 ; Fabrice ou l'école des mathématiques, 1977 ; L'âge du capitaine, 1985) met aussi en évidence l'intérêt de réfléchir en profondeur à la place de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Et, en 1987, un colloque du CIEAEM a été organisé précisément autour de ce sujet. Parmi les multiples réflexions qui ont contribué à faire évoluer les idées sur le statut de l'erreur en enseignement des mathématiques, deux aspects mettent en évidence la place centrale de cette dernière dans la classe de mathématiques: la relation didactique élève-enseignant-mathématiques et les caractéristiques de l'activité mathématique.

1.2.1 L'erreur et la relation didactique élève-enseignant-mathématiques

L'erreur occupe une place centrale dans la classe de mathématiques. Pour Fabre (1995), elle est une partie constitutive du processus d'apprentissage. Il est possible de dire en ce sens qu'elle est omniprésente dans le phénomène d'enseignement-apprentissage. Plus précisément, ce serait à travers l'erreur que se construirait la relation entre l'enseignant et l'élève, disent Ravenstein et Sensevy (1993-1994):

Combien seraient bouleversés les rapports dans la classe, si l'élève, à l'instar du maître idéal, ne fournissait plus d'erreurs! Quelle serait la substance, la matière première, à partir de laquelle se construirait, avec le maître, le dialogue sur l'apprentissage? L'erreur, par le discours qu'elle provoque, par le message qu'elle renvoie, par les repères qu'elle crée, est bel est bien le principal vecteur de communication sur ce qui façonne pour l'essentiel la relation didactique [...]. (p. 83)

Ainsi, l'erreur représente un élément sans lequel il est difficile d'imaginer l'interaction entre les protagonistes de l'enseignement-apprentissage. Poussant cette idée à un extrême, il est même possible d'affirmer que sans erreur il ne peut y avoir d'enseignements, ni d'apprentissages.

Dans une perspective de remédiation, le groupe de didactique des mathématiques de l'IREM d'Aquitaine (2013) étudie les erreurs de la classe et les organise selon leur cause. Une erreur peut alors être due à des conceptions erronées, à des choix didactiques, au contrat didactique, à des obstacles épistémologiques ou encore à des obstacles ontogéniques. Tous ces éléments se retrouvent dans les interactions pouvant se représenter par le triangle didactique élève-enseignant-mathématiques suivant:

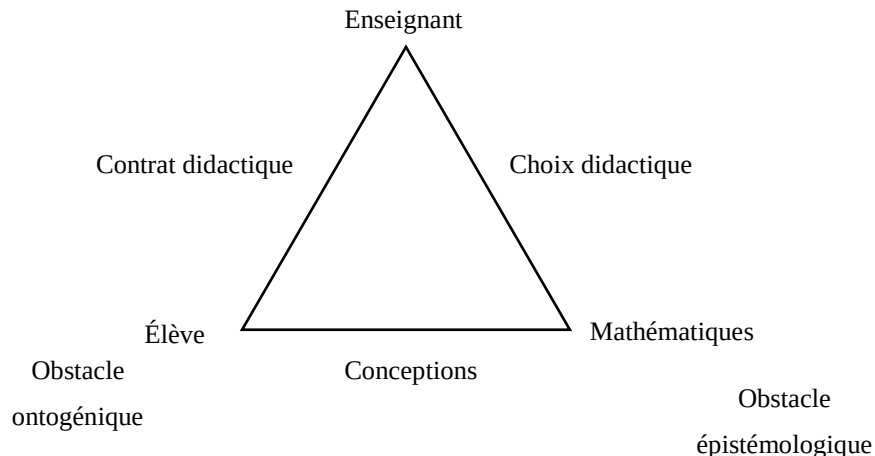


Figure 1.1 Triangle didactique : élève-enseignant-mathématiques (inspiré de *L'erreur dans l'apprentissage des mathématiques*, Groupe de l'IREM d'Aquitaine, 2013, p. 20)

Par exemple, pour ce groupe, l'expression $1,7 \times 10 = 1,70$ est une erreur qui provient de l'interaction entre l'élève et les mathématiques. Il s'agit d'une conception erronée qui se développe par l'application d'anciennes connaissances dans des contextes où elles ne sont plus valides : ajouter

un zéro à droite dans un nombre qui est multiplié par 10 fonctionne avec les nombres naturels, mais ne fonctionne plus avec les nombres ayant une partie décimale. De la même façon, l'égalité $(a+b)^2 = a^2+b^2$ est une erreur dont la cause se trouve aussi dans la relation entre l'élève et les mathématiques : la distributivité de l'exposant conduit à une expression équivalente dans le cas de la multiplication de nombres, mais pas pour l'addition de ces derniers.

Pour le groupe de l'IREM d'Aquitaine, la relation entre l'enseignant et les mathématiques (les choix didactiques) est à l'origine d'autre type d'erreurs. C'est par exemple le cas des figures géométriques qui sont souvent représentées avec un côté parallèle au côté inférieur du tableau ou du cahier. De façon implicite, ces représentations peuvent conduire l'élève à associer une figure à sa position (horizontale/verticale). La figure suivante (Figure 1.2) peut illustrer cette idée soulevée par le groupe de l'IREM. Un élève habitué à voir un carré comme celui représenté dans l'image de gauche de la figure 1.2 (côtés du carré en position horizontale/verticale) peut rencontrer un obstacle (dans ses connaissances antérieurs) pour reconnaître un carré dans l'image de droite de la figure 1.2 (côtés du carré en position non horizontale/verticale).

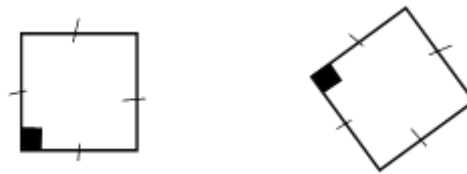


Figure 1.2 Dispositions différentes d'un même carré

Lorsque les conditions de travail sont modifiées, la relation didactique entre l'élève et l'enseignant pourrait aussi être à l'origine d'erreurs mathématiques. Par exemple, au secondaire, les élèves sont confrontés au problème de montrer qu'un angle est droit à partir des propriétés de droites parallèles coupées par une sécante, ou en se servant de la définition de droite médiatrice. Or, jusqu'à ce moment, pour montrer qu'un angle est droit, il suffisait d'utiliser l'équerre ou le rapporteur d'angles. Dans ce nouveau contexte de l'enseignement secondaire, l'élève qui se sert des outils de mesure pour faire la démonstration demandée commet alors une « erreur » dont la cause peut se retrouver dans le contrat didactique.

Les exemples précédents montrent comment l'erreur est imbriquée, d'une façon ou d'une autre, dans les interactions entre l'enseignant, l'élève et les mathématiques. Toutefois, il est possible de penser que dans cette perspective ce ne sont pas tous les enseignants qui opèrent et agissent de la même façon. De plus, le travail du groupe de l'IREM d'Aquitaine ne reflète qu'une façon de concevoir la place de l'erreur dans la classe de mathématiques. D'autres compréhensions sont envisageables.

1.2.2 L'erreur et les caractéristiques de l'activité mathématique

L'erreur occupe une place centrale dans la classe de mathématiques, et elle peut aussi être vue comme étant constitutive de l'activité mathématique elle-même. Pour Borasi (1996), historiquement, les erreurs ont été le point de départ de certaines avancées mathématiques qui se sont produites autour de celles-ci. Ceci peut être illustré par le cas de la division par zéro dans la méthode de maxima et minima de Fermat, dans son *Ad eandem methodum* de 1638, qui a conduit à faire avancer des méthodes pour le calcul de la dérivée dans un point, ou encore par l'utilisation des raisonnements pour des domaines finis dans des domaines infinis qui ont conduit Cantor à proposer un critère de correspondance un-à-un pour la comparaison de la cardinalité des ensembles infinis.

Borasi propose d'organiser le travail mathématique de la classe en s'appuyant sur les erreurs qu'y se produisent, afin de développer de nouvelles idées. Elle suggère de se centrer sur ce qui peut émerger comme construction mathématique à partir des erreurs. Ses propos peuvent être illustrés par l'exemple suivant :

$$\frac{\cancel{16}}{\cancel{64}} = \frac{1}{4}$$

Une erreur peut être notée dans la démarche de simplification (éliminer les deux chiffres six qui apparaissent au numérateur et au dénominateur) qui permet de réduire la fraction $\frac{16}{64}$ pour obtenir une fraction toutefois équivalente ($\frac{1}{4}$). Dans la perspective de Borasi, cette erreur pourrait être un déclencheur potentiel d'un travail qui vise à étudier des cas où cette façon de simplifier une fraction fonctionne. Une activité d'exploration pourrait être développée autour des questions comme : est-

il possible de trouver d'autres cas pour lesquels la démarche utilisée permet d'arriver à une fraction équivalente à la première? Qu'en est-il si le numérateur et le dénominateur sont des nombres à trois chiffres? Et si le nombre de chiffres du numérateur est différent de celui du dénominateur? Est-ce que les nombres ou les fractions dont ce type de réduction conduit à des égalités valides ont des caractéristiques communes? Une recherche essentiellement mathématique peut naître de l'étude de l'erreur. L'erreur est donc ici exploitée dans le but d'investiguer les mathématiques qui peuvent émerger se retrouvant au centre du travail mathématique qui se fait dans la classe.

La perspective de Lakatos (1976) permet aussi de voir les erreurs comme étant constitutives de l'activité mathématique. Pour Lakatos, les mathématiques avancent à coup d'ajustements, les erreurs étant des charnières entre deux vérités (considérées « vérités » à la suite de preuves). Dans son livre *Proofs and Refutations*, il présente le cas du théorème d'Euler ($S+F-A=2$) étant en conflit avec un exemple de solide troué. Cet exemple pointe vers une erreur dans la relation d'Euler et conduit à préciser la définition de polyèdre. La façon de travailler en mathématiques mène à considérer les erreurs comme des éléments essentiels au développement des mathématiques; ce qui pourrait être aussi le cas dans la classe, lorsque les élèves effectuent un travail mathématique et développent leurs propres connaissances en mathématiques. Le développement d'idées mathématiques étant un des premiers objectifs de l'enseignement et l'erreur étant au cœur des mathématiques qui se produisent, il est possible d'affirmer que dans cette façon de comprendre l'erreur, celle-ci peut occuper aussi une place centrale dans la classe de mathématiques.

La différence de perspectives sur la place de l'erreur dans la classe de mathématiques conduit à s'interroger sur la manière dont la compréhension de l'erreur peut influencer l'enseignant de mathématiques en ce qui concerne sa façon de penser son enseignement et la nature du traitement de celle-ci dans son enseignement. Il est en ce sens possible de penser que l'enseignement est fortement influencé par ses visions de ce que sont les erreurs. Ceci renforce mon intérêt de mieux comprendre le rapport que l'enseignant entretient avec l'erreur quotidiennement dans sa classe.

1.3 Les perceptions de l'enseignant à propos de l'erreur

Si les erreurs se conçoivent comme des éléments centraux de la classe de mathématiques, la vision de l'enseignant à propos de ces dernières devient étroitement liée à la façon dont ce même

enseignant comprend l'apprentissage et l'enseignement, voire les mathématiques elles-mêmes. Que ce soit pour l'éliminer, pour y remédier ou pour construire son enseignement dessus, identifier l'erreur est un processus d'interprétation. Les actions de l'enseignant en lien avec les erreurs semblent être dépendantes de la lecture que l'enseignant fait du travail de l'élève. Ce qui est une erreur pour un enseignant pourrait ne pas l'être pour autre enseignant ou être interprété différemment.

En 2006, Flückiger remarquait que le développement de la vision constructiviste de l'apprentissage, qui influence plusieurs travaux de recherche en didactique des mathématiques et divers programmes de formation à l'enseignement des mathématiques, ne se manifestait pas nécessairement de façon concrète dans l'action de la salle de classe:

En effet un pas important reste à faire pour que se traduisent dans les pratiques réelles les prises de position initiées par les recherches en didactique, positions souvent intégrées au niveau des injonctions que reçoivent les enseignants. (p. 44)

Pour Flückiger, il est important de prendre conscience des fondements théoriques à travers lesquels l'enseignant comprend et donne un sens à l'erreur de l'élève. Par exemple :

Prendre en compte les stratégies des élèves, suppose en amont de la séquence d'enseignement un travail d'analyse de contenus et d'identification des erreurs potentielles ainsi qu'un positionnement théorique permettant l'interprétation des erreurs observées. (p. 47)

Flückiger suggère que l'enseignant qui organise son enseignement autour des contenus et des erreurs possibles tout en étant conscient de sa propre orientation sur la façon d'interpréter ces erreurs met forcément ses idées en pratique. Ainsi, il paraît naturel que les actions de l'enseignant pour qui l'objectif premier est d'éliminer l'erreur soient organisées de façon à montrer à l'élève la « bonne façon » de faire. Au contraire, l'enseignant qui vise la réparation de l'erreur par l'élève développerait des stratégies pour permettre à l'élève de remédier à ses erreurs. Ou encore, il est possible de penser que l'enseignant qui envisage de se laisser guider par les erreurs des élèves dans sa classe soit porté à modifier le déroulement de son cours en fonction de celles-ci. Tout ceci suivrait une cohérence claire relative aux perspectives sur l'erreur, guidant les enseignants vers des

des idées à mettre concrètement en pratique. Bien que logique, cette relation de cause à effet demeure tout de même à investiguer empiriquement.

Pour Flückiger, l'enseignant utilise en classe un cadre pour l'interprétation des erreurs, cadre qui demeure souvent implicite. En ce sens, il est possible de penser qu'il est rare que l'enseignant cherche à rendre explicite sa compréhension de l'erreur ou qu'il se serve explicitement de cette « théorie » pour penser à ses interventions avec les élèves. Mon expérience d'enseignante me dit que lorsque l'enseignant se questionne sur les tâches à proposer aux élèves ou sur la façon dont il doit intervenir sur l'erreur en classe, il se sert davantage de son expérience, de ce qui a déjà fonctionné dans ses cours, de ce dont il a parlé avec ses collègues, des formations qu'il a suivies, des manuels scolaires, des écrits conçus pour des enseignants, etc. Pour répondre à ses questions, l'enseignant fait souvent des essais à partir d'informations trouvées dans son milieu. En bref, il a une démarche qui ne s'ancre pas nécessairement dans des explications formelles ni explicites, et il est davantage à la recherche de solutions concrètes pour l'action immédiate de la classe.

Dans le cas des compréhensions de l'enseignant sur ses interventions, le lien entre « théorie » et « pratique » semble donc être complexe. Mon exemple personnel en début de chapitre sur la résolution d'équations est représentatif de cette complexité: mes « orientations théoriques » et ma façon de concevoir mes interventions comme enseignante semblent se mettre difficilement en relation. Si ma vision de l'erreur en mathématiques me paraît claire, lorsqu'il s'agit de sa mobilisation en classe tout ceci est moins évident. Est-ce que j'aurais donc une vision se situant en conflit avec mes interventions en classe? Est-ce le cas pour tous les enseignants? De quelles façons, selon eux, leur vision de l'erreur se mobilise-t-elle dans leur classe?

Schön (1994) propose en ce sens que le praticien peut avoir plus d'un rationnel. Selon lui, la pensée et l'agir du professionnel (dans ce cas l'enseignant) sont en partie influencés par des connaissances construites dans la pratique, qui demeurent sous-entendues. L'enseignant répond aux contraintes de l'activité elle-même et il réfléchit à partir de ces dernières. Il suit une démarche pragmatique, réfléchie, mais personnelle. Dans cette perspective, les interventions de l'enseignant en tant que professionnel sont fortement influencées par une réflexion qui se fait dans l'action :

En même temps qu'il s'efforce d'en tirer un certain sens, il réfléchit aussi sur les évidences implicites dans ses actions, évidences qu'il se remémore, qu'il critique, restructure et incorpore dans ses actions ultérieures. (p. 77)

Ainsi, le rationnel derrière les interventions de l'enseignant demeure souvent, selon Schön, implicite; même si cet enseignant peut reconnaître *a posteriori* la ou les théories sur lesquelles il s'appuie ou des éléments de celle-ci pour intervenir en classe (par exemple, ici, d'identifier les erreurs et d'agir sur celles-ci). Cette relation entre théories implicites, explicites et compréhensions d'interventions dans l'action, en ce qui a trait à l'erreur, est en ce sens à mieux comprendre, et à investiguer, en particulier pour saisir la portée possible des visions de l'erreur dans l'enseignement des mathématiques. Ceci représente le sujet de mon mémoire de maîtrise.

1.4 Les questions de recherche

Mon travail de recherche veut investiguer les visions des enseignants à propos des erreurs en mathématiques et le lien entre ces visions et leur travail en classe autour de ces erreurs. Mon travail est orienté par les deux questions de recherche suivantes:

1. *Visions de l'erreur* : Quelles sont les différentes visions de l'erreur en mathématiques manifestées par des enseignants de mathématiques?
2. *Mobilisation de ces visions de l'erreur* : Qu'est-ce que ces manifestations révèlent concernant la mobilisation de ces visions en classe?

Cette recherche est organisée autour de deux objectifs. Toutefois, l'interrelation entre ces deux objectifs conduit, dans ce mémoire, à les considérer de façon simultanée.

CHAPITRE 2

CADRE THÉORIQUE

Ce travail de recherche présente comme objectif d'étudier les manières dont des enseignants de mathématiques conçoivent les erreurs des élèves (vision de l'erreur). Un deuxième objectif est d'étudier ce que leurs propos révèlent concernant la dynamique entre leur vision de l'erreur et leur travail en classe (mobilisation de la vision de l'erreur). Une première façon d'aborder les questions de recherche se trouve dans la description de diverses visions sur l'erreur en mathématiques. Dans un premier temps (section 2.1), quatre types de visions de l'erreur sont proposées à partir de travaux en didactique des mathématiques. Ensuite (section 2.2), une conceptualisation de ce que veut dire soutenir une *vision* à propos de l'erreur en mathématiques pour un enseignant est offerte. À la section 2.3, différents éléments qui influencent globalement la compréhension de l'enseignant sur leurs interventions en classe sont étudiés. Finalement (section 2.4), des idées sur la relation entre le discours de l'enseignant et sa vision de l'erreur en mathématiques sont présentées.

2.1 Les différentes visions de l'erreur en mathématiques

Divers travaux en didactique de mathématiques permettent de circonscrire différentes compréhensions des erreurs en mathématiques. Ceci mène à distinguer quatre visions de l'erreur : l'erreur comme une incompréhension mathématique, l'erreur comme une compréhension

mathématique en construction, l'erreur comme une source d'exploration mathématique et l'erreur comme une production mathématique¹.

2.1.1 L'erreur comme une incompréhension mathématique

L'erreur en mathématiques peut être associée à un insuccès, à une faillite. Il s'agit de déterminer des catégories d'erreurs et de s'en servir pour diagnostiquer une certaine déviance à la norme établie et corriger le tir. Bélanger (1990-1991) donne des exemples de travaux sur l'erreur qui se basent sur la comparaison du travail des élèves à une norme. Des listes détaillées contenant des cas de démarches ou de résultats différents à ce qui est attendu sont construites et chaque cas est associé à une fréquence. Tenant pour acquis qu'il est possible de mesurer la compréhension de l'élève en la reliant aux erreurs, ces travaux font correspondre chaque catégorie d'erreur au nombre de fois qu'elle se répète.

Cette façon de voir l'erreur est liée à une conception du savoir mathématique comme étant quelque chose déjà construit, existant en lui-même, et qui sert de norme à laquelle il est souhaitable de se rapprocher. Cette comparaison des connaissances des élèves à un savoir attendu mène à deux types de conclusions. D'une part, les erreurs plus fréquentes correspondent à des connaissances plus difficiles. Bélanger (1990-1991) donne l'exemple de l'étude réalisée par Clapp (1924), où toutes les additions de nombres à un chiffre sont ordonnées selon la répétition de résultats erronés. Ainsi, l'addition $8+8$ est considérée comme la plus difficile des additions des nombres à un chiffre puisqu'elle correspond au plus grand nombre de fois où les élèves commettent des erreurs. D'autre part, comme l'explique Bélanger (1990-1991), les listes d'erreurs conduisent au classement de la performance des groupes, mais aussi à l'identification de différences individuelles. Les propos de Bélanger (1990-1991) sont illustrés par l'exemple du livre *Diagnostic and Remedial Teaching in Arithmetic* de Brueckner (1930), où l'erreur est comprise comme une déficience ou un dysfonctionnement. Dans cet ouvrage, le mot difficulté est directement utilisé en tant que synonyme d'erreur. L'expression « liste d'erreurs » est remplacée par « liste de difficultés » et le mot déficience est associé à « de mauvaises habitudes », c'est-à-dire à des démarches non attendues.

¹ Ces distinctions entre les quatre visions sont théoriques et n'impliquent pas une dissociation complète et rigide entre les différentes visions de l'erreur en mathématiques. Bien que ces dernières puissent présenter des différences significatives, il est possible qu'un enseignant adopte des éléments appartenant à plusieurs de ces visions.

Par exemple, la stratégie d'un élève qui trouve la réponse à une addition en comptant sur les doigts est considérée comme une difficulté, car une façon de faire différente à celle-ci est prévue. Pour Brueckner, l'élève qui décompose les nombres à additionner pour retrouver des combinaisons qui lui facilitent la tâche se retrouve dans cette catégorie. Ainsi, dans ce livre, la démarche qui amène à la réponse de l'addition $6+7+9$ par la décomposition suivante : $9+3=12$, $12+4=16$, $16+6=22$ est classée comme une difficulté. La démarche alternative de l'élève est ainsi considérée comme une difficulté à réaliser ce qui est attendu, c'est-à-dire qu'elle est comprise comme une difficulté à calculer 6 plus 7 (13) et ensuite additionner 9 pour obtenir 22.

Ce paradigme du diagnostic et du correctif sur l'erreur se dégage de plusieurs études sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. C'est le cas de celui de Kundu et Sengupta (2014), qui effectuent un classement du type d'erreurs retrouvées fréquemment chez les élèves selon des catégories : erreur conceptuelle, erreur de transcription, erreur de calcul ou erreur de construction géométrique (et d'autres sous-catégories). Les auteurs présentent des tableaux distinguant les différentes catégories et offrent des exemples de réponse attendue en comparaison à celles données par les élèves. Ainsi, le calcul $25,7-10,9=15,8$ se trouve dans la sous-catégorie « erreur de démarche » de la catégorie « erreur conceptuelle », car l'élève ne semble pas avoir effectué la démarche prévue (emprunter une unité à 25 et effectuer alors $24-10$ pour obtenir 14 unités), et obtient un résultat erroné.

Kundu et Sengupta (2014) soulèvent l'importance de catégoriser les erreurs et de les diagnostiquer afin d'agir pour « réparer » ce qui est jugé erroné (et qui, selon les auteurs, pourrait empêcher les élèves de comprendre de nouveaux concepts plus tard). Même si les auteurs affirment dans leurs conclusions que les erreurs peuvent être des indices de compréhensions partielles et que les réponses incorrectes peuvent agir comme un point de départ pour des discussions mathématiques subséquentes en classe, leur catégorisation faite autour des attentes sur la façon de comprendre et sur la façon de faire par les élèves mène à considérer que l'erreur est réduite au constat de celui qui compare et voit dans la production de l'élève une discordance avec la réponse ou la démarche attendue.

Le travail d'Ashlock (1972) illustre aussi cette idée d'erreur comme un défaut de compréhension mathématique. En particulier, ce dernier propose d'étudier différentes catégories d'erreurs de

calcul arithmétique, suivi du développement de stratégies qui permettraient de s'attaquer à chaque type d'erreur et d'éradiquer ces erreurs chez les élèves. De ce point de vue, pour Ashlock, ces erreurs renseignent l'enseignant sur les manques au plan des savoirs mathématiques chez l'élève, et elles sont vues comme un signe d'incompréhension mathématique.

Si l'erreur amène à une pratique de repérage et d'intervention dans le but de redresser une mauvaise compréhension mathématique, quels seraient plus précisément les effets de cette vision sur les actions de l'enseignant ? Un enseignant qui soutient cette perspective pourrait s'attendre à ce que ses élèves résolvent un problème ou raisonnent d'une façon prédéfinie. Il offrirait alors peut-être aux élèves des corrigés détaillés pour valider leur travail. L'enseignant concentrerait peut-être ses efforts sur la recherche de méthodes et de techniques visant à mesurer leur écart à la norme. Et il pourrait vouloir intervenir pour éviter que les élèves continuent de commettre des erreurs. Les situations reconnues comme étant les plus difficiles devraient alors être pratiquées davantage et des règles seraient développées pour outiller l'élève avec des procédures qui lui permettraient de ne plus commettre certaines erreurs. Aussi, à travers des techniques, il lui serait possible de diagnostiquer des déficiences qui pourraient empêcher le progrès de l'élève en mathématiques, en plus de développer des exercices correctifs visant à permettre à l'élève d'atteindre des niveaux satisfaisants.

Qu'est-ce que ceci pourrait vouloir dire dans un cas précis ? Pour l'exemple du début avec l'équation $2a^2 - 5a = 6a - 15$ où l'élève donne uniquement la valeur $a=3$, il est possible de penser que l'enseignant montrerait à l'élève une démarche de résolution « appropriée ». Ensuite, qu'il lui demanderait de la noter et il lui donnerait à résoudre une série d'équations semblables lui permettant de répéter la bonne démarche proposée. Enfin, l'enseignant pourrait aussi planifier des tests afin de s'assurer que l'élève obtient les réponses voulues. Bref, dans cette vision de l'erreur comme une incompréhension mathématique, l'enseignant serait attentif aux discordances entre les démarches de l'élève et les démarches attendues. Il interviendrait pour que les connaissances de l'élève s'ajustent et se rapprochent d'un savoir uniforme et normatif.

2.1.2 L'erreur comme une compréhension mathématique en construction

D'autres auteurs proposent une vision de l'erreur qui, à première vue, semble moins normative que celle décrite précédemment. C'est le cas du travail offert par l'IREM d'Aquitaine (2013), où l'erreur est présentée comme l'indice d'une connaissance en construction. Cette dernière fait alors partie d'un processus qui se bâtit continuellement, de façon non linéaire, où elle est aussi la manifestation d'une connaissance qui a déjà fonctionné dans un contexte différent à celui où elle ne fonctionne plus, soit une connaissance qui a déjà été viable par le passé de l'élève. L'erreur est ici associée à une compréhension mathématique qui se base sur des connaissances antérieures, en transformation. D'où vient cette erreur et quelles sont ses causes ? Cette vision, qui veut expliquer l'erreur pour ensuite agir associe cette dernière à des raisons autres qu'une déficience.

Ce travail du groupe de l'IREM d'Aquitaine s'appuie sur la notion d'obstacle développée par Bachelard (1938). Pour ce dernier, l'être humain apprend *contre* une connaissance du passé, où celle-ci fait obstacle à de nouvelles connaissances. Le sens donné par Bachelard à l'obstacle est différent du celui du sens commun. En effet, un obstacle est généralement pensé comme ce qui vient arrêter un processus ou bien ce qui empêche son avancement. La conceptualisation du mot obstacle de Bachelard permet de voir celui-ci comme un élément essentiel dans l'évolution des compréhensions de l'élève. L'obstacle motive et permet le développement de compréhensions, et il est (avant tout) une connaissance. L'élève apprend en surmontant des obstacles, les erreurs sont des manifestations de ces derniers.

Dans cette même lignée, Brousseau (1998) décrit les erreurs persistantes chez les élèves comme étant « liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente sinon correcte, une " connaissance " ancienne et qui a réussi dans tout un domaine d'actions ». Pour mieux comprendre les causes des erreurs, Brousseau pointe vers des éléments permettant de reconnaître des obstacles et propose une classification de ces derniers. Ainsi, quatre types d'obstacles sont distingués : ontologiques, didactiques, épistémologiques et culturels.

Les *obstacles ontologiques* sont relatifs à la génétique et à la psychologie de l'élève. Dans une perspective évolutive, différentes étapes du développement cognitif sont en lien avec l'apprentissage de l'élève. Certains obstacles se manifestent en lien avec ces étapes de

développement de l'enfant formant une partie naturelle du processus de construction de connaissances. Par exemple, le concept de complétude des nombres réels ne semble pas correspondre au stade du développement de l'enfant à l'école primaire. Des erreurs en lien avec ce concept dans le travail d'un enfant d'école primaire seraient des manifestations de l'état d'évolution cognitive de l'élève, plutôt qu'un signe de déficience de ce dernier. Les *obstacles didactiques* concernent la manière dont le concept ou la situation sont travaillés, soit les choix didactiques. Par exemple, le choix didactique d'introduire les nombres décimaux comme codage de mesures de longueur (1,17 m correspond à 1 m et 17 cm) pourrait expliquer le traitement indépendant de la partie entière et de la partie décimale d'un nombre lors d'une addition. Ainsi, l'élève peut être porté à conclure que $5,9 + 2,5$ est égal à 7,14. Il est possible de penser que, dans cette vision, certaines erreurs s'associent à la façon avec laquelle l'élève « rencontre » un sujet mathématique. L'erreur ne signifie pas que l'élève ne comprend pas, mais plutôt qu'il aurait une compréhension liée aux choix didactiques dans lesquels les connaissances mathématiques de l'élève ont été travaillées. Les *obstacles épistémologiques* sont en lien avec la nature de la connaissance en jeu, à l'histoire de ce concept mathématique. Par exemple, la compréhension chez l'élève du rôle du nombre 0 dans la multiplication 0×5 peut agir comme un obstacle et se manifester par une erreur (résultat égal à 5); tel que ceci s'est retrouvé dans l'histoire. Finalement, les *obstacles culturels* font référence aux contextes (scolaire, travail, etc.) dans lesquels une connaissance est mise à l'épreuve. En ce sens, Bednarz et Proulx (2015) offrent l'exemple de l'interprétation graphique associée à la lecture « fonctionnelle » (lecture de l'axe des abscisses en premier et des ordonnées en deuxième), faisant partie de la culture scolaire, en contraste au décodage « inversé » fait par les économistes lorsqu'ils lisent un graphique d'offre et demande (ordonnées en premier et abscisses en deuxième). Certaines erreurs seraient ainsi des indices d'une adaptation de celui qui fait un travail mathématique à des conditions précises, propres à la culture de « travail » où les connaissances mathématiques se développent.

Cette vision de l'erreur comme une compréhension mathématique en construction n'est donc pas associée à l'indice d'un défaut de connaissance. L'erreur est une composante du processus d'apprentissage, un certain signe de progrès. Sur la base des idées de Brousseau, l'IREM d'Aquitaine propose une organisation de la cause des erreurs (telle que retrouvée au chapitre 1 pour le triangle didactique, p.8-9). L'erreur qui se produit pendant l'activité mathématique trouve son

origine dans un ou plusieurs éléments du triangle didactique, qui permet d'interpréter l'apprentissage. De cette façon, l'erreur concerne l'élève, mais elle n'est pas envisagée du point de vue du dysfonctionnement de ce dernier. Il est à remarquer que le savoir mathématique n'est pas ici associé à quelque chose d'universel, mais plutôt contextualisé et temporaire. Tel que l'explique Brousseau (2009) :

[...] une erreur est d'abord une déclaration "contradictoire" avec un certain contexte accepté au préalable. Le contexte est celui d'une culture ou plus généralement celui d'une action en cours. (p. 4)

Baruk (1985) parle des erreurs comme une étape nécessaire pour le développement de compréhensions mathématiques. Pour elle, essayer d'empêcher l'erreur « c'est rendre impossible l'édification d'une pensée mathématique » (p. 82). À travers des nombreux exemples, Baruk met en valeur le sens mathématique pouvant être associé aux erreurs autant pour celui qui la fait que pour celui que l'identifie comme erreur. Le travail d'Astolfi (1997) manifeste aussi cette vision de l'erreur comme une compréhension mathématique en construction. Il décrit les erreurs comme « des indicateurs de ce à quoi se trouve affrontée la pensée des élèves ainsi que des raisonnements auxquels ils s'essaient. » (p. 102). Pour Astolfi, l'erreur est inévitable, tolérée et même bienvenue en classe de mathématiques. Elle est ancrée dans le processus d'apprentissage de l'élève et représente « un outil pour enseigner », qui est le titre de son ouvrage.

En somme, une différence substantielle se trace entre la vision de l'erreur présentée ici comme une compréhension mathématique en construction et celle de la section précédente comme une incompréhension mathématique. Dans la première vision, les erreurs sont perçues comme des ratées qui auraient pu être évitées. À l'opposé, dans cette deuxième vision, elles sont l'indice d'apprentissages en cours. Toutefois, les deux perspectives ont en commun de voir l'erreur tel que la définit Adihou (2011) : « l'erreur relève de la variation ou de la différence entre une assertion reconnue comme vraie par rapport à une autre qui n'est pas en phase avec cette dernière » (p. 93). Ainsi bien que ces deux visions révèlent des façons opposées de voir l'erreur en mathématiques, le regard posé sur elle est du même type : il s'agit essentiellement d'une comparaison avec une norme externe.

Quelles seraient les implications de cette vision de l'erreur en mathématiques sur l'agir de l'enseignant ? Si l'erreur est comprise comme une compréhension mathématique en construction, le regard de l'enseignant pourrait se poser sur le dépassement de l'erreur en tant qu'étape nécessaire à l'apprentissage de l'élève. D'une part, cette perspective pourrait amener l'enseignant à se questionner sur les différentes façons d'aborder un sujet afin de « diminuer les effets négatifs » des erreurs, associées aux obstacles didactiques. Il est possible que l'enseignant planifie alors soigneusement les activités à faire en classe tenant compte des erreurs qui pourraient apparaître pour mieux les exploiter dans son enseignement. D'autre part, il y a les actions qui visent le traitement de l'erreur. L'enseignant dans cette perspective pourrait vouloir anticiper ses interventions en prévoyant des façons de confronter l'élève aux erreurs possibles, pour l'accompagner dans la construction adéquate de ses connaissances.

Comment pourrait agir un enseignant soutenant une vision de l'erreur comme une compréhension mathématique en construction face à la solution donnée par l'élève dans l'exemple précis du chapitre 1 ? Il pourrait demander à l'élève de remplacer la lettre « a » dans l'équation $2a^2 - 5a = 6a - 15$ par 2,5, le confrontant ainsi à l'existence d'une deuxième valeur qui vérifie l'équation. De cette façon, l'enseignant se servirait des connaissances de l'élève (toute valeur qui rend l'égalité valide fait partie de la solution) pour l'amener à revoir sa démarche de résolution. Il est aussi possible que l'enseignant demande à l'élève d'expliquer la situation, soit de le guider en lui demandant de remplacer la lettre « a » dans chacune des étapes effectuées pour coïncider l'erreur ou lui demander de justifier chacune des étapes de la résolution.

En conclusion, pour cette vision de l'erreur comme une compréhension mathématique en construction, il est souhaitable de faire ressortir les erreurs et de s'en servir pour enseigner. L'enseignant guide le travail autour de l'erreur pour aider les élèves à remédier à celles-ci et qu'elles ne se produisent plus. Les erreurs sont vues ici comme étant intéressantes : elles sont tolérées et même nécessaires, mais tout de même à corriger.

2.1.3 L'erreur comme une source d'exploration mathématique

Certains auteurs offrent une compréhension de l'erreur en mathématiques qui place cette dernière au centre d'un travail mathématique. Ce travail est animé par une intention d'investiguer des

possibilités qui se rendent disponibles à partir de l'erreur. Un résultat ou une façon de faire imprévus conduisent vers l'exploration de nouvelles manières de penser ou d'aborder une situation. Bien que non cohérent, est-ce que ce résultat pourrait éventuellement fonctionner? Dans quels contextes? Sous quelles conditions? Il est alors ici question de domaines de validités reliés à l'erreur en mathématiques. Les travaux de Borasi (1994) sont un exemple de travaux se situant dans cette vision :

Thus, within this study, even borderline case such as contradictions, tentative hypotheses, contrasting results, or results that do not make sense will be considered as legitimate starting for the development of "error activities" designed to initiate and support student inquiry. (p.170)

Par exemple, elle propose aux élèves d'analyser une liste de définitions erronées d'un cercle. L'analyse de ces définitions amène ces élèves à développer une compréhension des objets décrits dans chaque énoncé, ce qui est potentiellement une occasion pour la construction de nouvelles compréhensions mathématiques. Dans les travaux de Borasi, la définition « All the possible series of points equidistant from a single point (A) » (p. 175) est étudiée par les élèves dans l'objectif de faire ressortir des aspects qu'ils considèrent erronés. Cette exploration pourrait conduire les élèves, par exemple, à préciser qu'un cercle est une figure plane et à soulever des distinctions entre la définition d'un cercle et celle d'une sphère, ouvrant ainsi des portes vers des contextes où cette définition n'est pas erronée pour représenter une figure géométrique.

Cette étude de Borasi montre que, pendant l'activité, les élèves (et l'enseignant) passent par-dessus la correction d'erreurs et s'attardent à la résolution de problèmes posés par, dans ce cas précis, les définitions données. L'ensemble de définitions proposées provoque des questions et des réflexions concernant la géométrie analytique, la représentation graphique et le sens de ces définitions mathématiques. De plus, le questionnement continu autour de ces définitions en lien avec la notion du cercle contribue à la construction d'une compréhension des élèves sur différents sujets mathématiques (par exemple celui de la sphère), ainsi qu'au développement de thèmes mathématiques qui n'étaient pas prévus au début de l'activité, tel que la représentation de figures géométriques sur un plan cartésien. L'activité proposée par Borasi n'est pas alors organisée de manière à éviter ou à remédier à l'erreur, c'est-à-dire que l'attention est portée sur le potentiel de ce qui est proposé, soit le potentiel de l'erreur commise. Selon cette vision, l'erreur représente une

opportunité mathématique. Elle offre une occasion pour le développement de compréhensions mathématiques supplémentaires. Autrement dit, cette troisième vision de l'erreur se différencie des deux premières, car elle n'est pas centrée sur l'idée de « connaître » mais plutôt d'explorer et de « faire » des mathématiques à partir de ces erreurs, tel qu'exprimé dans Proulx et Maheux (2012).

Cette vision de l'erreur comme une source d'exploration mathématique considère en ce sens l'erreur comme étant relative à son contexte. Elle peut être jugée « erreur » selon un domaine de validité précis. Ainsi, il y a toujours un travail d'interprétation qui est nécessaire. En ce sens Mégrourèche (2020, p. 35) propose l'exemple de l'addition de fractions $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$, où l'égalité est une erreur si les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ sont considérées par rapport au même tout. Toutefois, s'il s'agit de la demie de 2, du tiers de 3 et des deux cinquièmes de 5, l'égalité peut bien fonctionner ($\frac{1}{2}(2) + \frac{1}{3}(3) = \frac{2}{5}(5)$).

Un deuxième exemple en lien à la dimension relative de l'erreur caractérisant cette vision est celui de l'élève qui voulant additionner les nombres $\frac{3}{17}$ et $\frac{3}{20}$ offre la réponse $\frac{3}{37}$. L'enseignant, selon ses connaissances de la situation qui a conduit à donner cette réponse, peut avoir une certaine interprétation de l'erreur dans ce résultat : l'élève a peut-être confondu numérateur et dénominateur, ou il a retenu que pour additionner deux fractions il faut garder le même numérateur (lorsqu'ils sont égaux) et additionner les deux dénominateurs, etc. Si l'enseignant discute avec l'élève, il n'a plus les mêmes connaissances de la situation. Si l'élève explique avoir inversé les fractions avant de les additionner, car il a retenu que l'addition de deux fractions demande d'avoir le même dénominateur, et qu'il a ensuite inversé le résultat (il calcule $\frac{17}{3} + \frac{20}{3} = \frac{37}{3}$ et retient comme réponse $\frac{3}{37}$), l'enseignant ne voit plus la même erreur. L'élève comprend que la somme de deux fractions peut se calculer directement si les deux fractions ont le même dénominateur et il cherche des moyens pour se trouver dans cette situation. Pour ceci, il fonctionne dans un contexte où la somme de deux fractions est équivalente à l'inverse de la somme des inverses de ces deux fractions. La catégorie d'erreur donnée à un travail mathématique et la compréhension de celle-ci sont alors liées à la connaissance de la situation où elle se produit.

De quelle façon se manifesterait cette vision de l'erreur en mathématiques dans le travail de l'enseignant en classe? Il est possible d'imaginer que l'enseignant qui suit cette démarche d'exploration des erreurs soit centré sur l'activité mathématique qui se fait autour de l'erreur. Ainsi, il ne voudrait pas nécessairement diagnostiquer, ni remédier à l'erreur sinon la regarder dans une perspective d'exploration de son potentiel pour promouvoir le questionnement et encourager la réflexion à propos des nouveaux chemins que ces erreurs peuvent permettre de découvrir ou de construire. Ici, l'enseignant pourrait vouloir pousser les élèves à imaginer et à décrire des « univers » où cette erreur fonctionne, soit des domaines de validité.

Imaginons maintenant l'exemple de la résolution d'équation de degré 2, dans une classe où l'enseignant soutient une vision de l'erreur comme une source d'exploration mathématique. Quelles seraient les interventions possibles de l'enseignant à la suite de la solution présentée par l'élève? Il pourrait proposer aux élèves d'analyser divers cas où une équation de 2^e degré ne présente qu'une seule solution possible et la nature de ces équations où il n'y a qu'une seule solution. Si le regard est mis sur la démarche mathématique au lieu de la solution erronée et que l'erreur ciblée est plutôt la division par 0, il est possible que l'enseignant propose aussi aux élèves d'embarquer dans la construction d'un ensemble de nombres et d'une opération où la division par 0 soit possible. Cela pourrait conduire à étudier les propriétés de cette opération sur cet ensemble de nombres. Mais ce ne sont que quelques exemples, les explorations mathématiques à la suite de cette erreur étant nombreuses.

Finalement, dans cette perspective, l'enseignant prône davantage une démarche de « recherche » pour donner un sens aux affirmations et observations mathématiques qui se produisent dans la classe. Les erreurs sont ici vues comme des portes pouvant s'ouvrir, des tremplins dit Borasi (1994) pour explorer les mathématiques. Cette vision se centre sur le potentiel des erreurs commises plutôt que sur leur état erroné et associe ces dernières à des compréhensions situées.

2.1.4 L'erreur comme une production mathématique

Les écrits scientifiques permettent d'identifier une quatrième façon d'approcher l'erreur en mathématiques. Selon cette vision, il est possible d'étudier les mathématiques faites par quelqu'un sans nécessairement faire de comparaisons à des savoirs mathématiques préétablis. En ce sens,

Proulx et Maheux (2012) soulèvent les aspects historique et culturel des mathématiques, qui mènent les didacticiens à s'intéresser aux relations qui entretiennent « les mathématiques des uns et les mathématiques des autres », questionnant ainsi l'idée de savoirs mathématiques universels. Ils ajoutent que « les mathématiques n'existent pas, du moins pas telles que nous les rencontrons, en dehors des personnes qui « font » des mathématiques » (p. 44), mettant ainsi l'accent sur la dimension personnelle et créative de l'activité mathématique en elle-même. Qu'est-ce qui serait une erreur alors s'il n'y a pas de comparaison à des savoirs mathématiques préétablis?

Certains travaux en didactique des mathématiques permettent de caractériser cette quatrième vision en lien avec la façon de considérer le travail de l'élève en mathématiques. Par exemple, Kieren (1995) utilise l'expression « bringing forth a world of mathematical signifiacance » (p. 1), pour parler de la façon dont les mathématiques peuvent se produire dans la classe. Un monde de signification apparaît lorsqu'une ou des personnes s'engage dans une activité mathématique. Kieren offre l'exemple d'une activité proposée à un groupe d'élèves d'environ 8 ans qui doivent donner une fraction associée à un nombre plus grand que $\frac{1}{4}$, mais plus petit que $\frac{3}{4}$. Il décrit quelques-unes des résolutions partagées par les élèves pour montrer comment les situations de la classe (actions, questions et réponses des élèves et de l'enseignant) sont interreliés et que chaque événement pendant le cours est vue comme un développement mathématique en lui-même, à part entière. Les idées qui émergent dans la classe pour trouver une solution sont variées et certaines d'entre-elles favorisent des nouvelles compréhensions mathématiques chez les élèves de la classe tel qu'illustré dans la figure suivante (Figure 2.2).

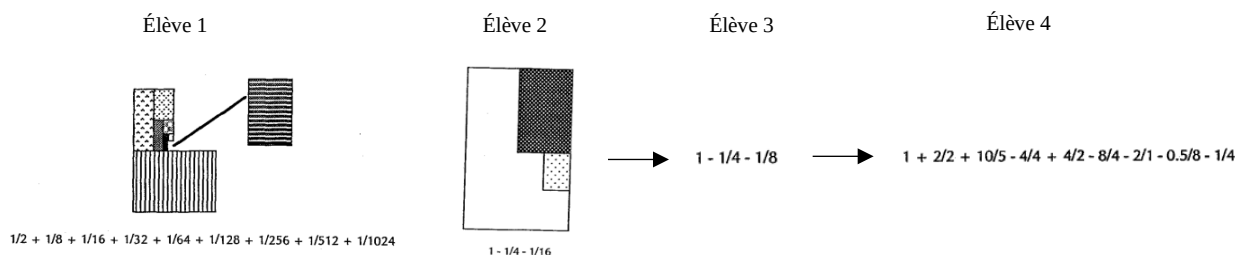


Figure 2.1 Résolutions proposées par des élèves pour la recherche d'une fraction. (Tiré de « *Teaching mathematics (in-the-middle): Enactivist view on learning and teaching mathematics* », Kieren, 1995, pp. 4-5)

Cet exemple permet d'apprécier deux façons différentes d'aborder le problème. Si l'élève 1 décide d'additionner des fractions s'assurant de ne pas atteindre les $\frac{3}{4}$, l'élève 2 aborde le problème par soustraction de fractions, en enlevant à l'unité plus que $\frac{1}{4}$ et moins que $\frac{2}{4}$. La proposition de cet élève inspire l'élève 3 pour enlever des fractions différentes à celles utilisées par l'élève 2, et conduit l'élève 4 à proposer une résolution autour de laquelle plusieurs élèves se mettent à chercher des additions et soustractions possibles pour obtenir une fraction entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$. Les actions des élèves sont ici au centre du travail effectué, dans une perspective de favoriser un certain engagement et de participer à un travail qui permet de « faire » des mathématiques ayant une signification pour les élèves sans nécessairement faire des comparaisons à un référentiel externe.

Cette façon de considérer le travail des élèves en mathématiques mène l'enseignant à proposer des tâches comme celle de l'exemple précédent, où « There is no "right" answer » (Kieren, 1995, p. 19). L'objectif ici n'est pas de converger vers une réponse attendue sinon de permettre la divergence d'idées, de solutions proposées, et l'interaction entre les différentes façons de penser des élèves de la classe. Dans cette perspective, l'enseignant ne s'intéresse pas à la validation de la réponse d'un élève en comparaison à une réponse prédéfinie. En ce sens, Kieren (1995) explique que « To the extent that the student's action is not wrong or falls within the conditions of the prompt, then that action is "good enough" » (p. 19). L'enseignant évalue alors le fonctionnement de la solution proposée par rapport à cette même solution et s'intéresse au partage des différentes façons de faire des élèves pour que chacun d'entre eux soit exposé à des nouvelles possibilités : « In such evaluation it is expected that the students explain their thinking both to show that their answer "works" or is good enough, but also to relate that thinking to the community in which they exist » (p. 19). Cette vision de l'erreur se caractérise alors par un type d'activité mathématique où le travail des élèves n'est pas considéré en termes de justesse de résultats attendus. Ce travail est plutôt vu comme une occasion pour faire émerger des nouvelles idées dans un groupe.

Maheux et Thom (2009) offrent aussi des éléments permettant de caractériser cette quatrième vision de l'erreur en mathématiques. Ils présentent un extrait d'un échange entre un élève et un enseignant-chercheur. Lorsque l'élève se sert d'une appellation qui pourrait être considérée non conforme à la norme pour un certain objet mathématique, l'enseignant-chercheur accueille la contribution de l'élève renvoyant la discussion au groupe, autour du concept associé à l'objet

nommé. Enseignant-chercheur et élèves sont engagés dans un travail mathématique où l'objectif premier est de donner un sens aux aspects soulevés par les élèves en lien avec cet objet. Cet exemple illustre la dimension « concrète, expérientielle et vécue » (p. 401) de l'activité mathématique qui amène à la voir comme indissociable des personnes qui la font exister. Il n'est pas ici question d'erreur mathématique mais bien de travail mathématique considéré en lui-même et pour lui-même.

Cette vision est aussi présente dans les travaux de Steffe (2007, 2010). Son objectif scientifique est de rendre explicites les mathématiques de l'élève, sans les juger en fonction des mathématiques des « adultes ». Il ne s'agit pas pour lui d'observer des bonnes ou des mauvaises mathématiques que l'élève pourrait faire, ni d'étudier la découverte d'idées préétablies. Par la façon de s'intéresser aux réalisations des élèves, en elles-mêmes, en voulant comprendre leur rationnel sous-jacent, Steffe manifeste une compréhension de ce qui est fait par l'élève comme un travail mathématique à part entière.

Qu'est-ce que cette vision de l'erreur signifierait pour un enseignant dans la classe ? Une caractéristique des interventions de l'enseignant qui soutient cette vision se trouve dans la façon de s'intéresser au travail des élèves. Sans porter de jugement externe et immédiat sur la véracité d'un résultat, il s'agirait peut-être d'offrir aux élèves un espace de travail où les questions et les réponses favoriseraient les associations entre les différentes idées qui se manifestent dans la classe. Selon cette vision, l'écoute devient un élément central (au sens d'Arcavi & Isoda, 2007), qui empruntent à Smith (2003) l'expression « écoute attentive » par opposition à celle de « écoute évaluative », tel que la nomme Davis (1997)². Si l'écoute évaluative consiste à valider la communication de ce qui est attendu comme message, l'écoute attentive est plutôt associée à une attitude de la part de l'enseignant. Ce dernier explore les idées exprimées par les élèves lorsqu'il se force à leur donner de sens en elles-mêmes, relatives à leur propre rationnel comme le dit Steffe.

En relation à l'exemple de l'élève qui résout l'équation $2a^2 - 5a = 6a - 15$ et qui offre comme solution $a=3$, il est possible d'imaginer qu'un enseignant qui adhère à cette vision pourrait demander à l'élève d'expliquer son raisonnement et de le partager avec les autres élèves de la classe

² L'écoute évaluative est un concept cité par Davis (1997) à partir duquel il développe le concept d'écoute herméneutique.

sans faire mention d'une solution qui serait bonne ou mauvaise. L'enseignant pourrait proposer aux autres élèves de la classe de partager eux aussi leur résolution et il pourrait présenter d'autres exemples qui seraient discutés. Ensemble, élèves et enseignant travailleraient sur la résolution d'équations pendant un certain temps. Finalement, il est possible de penser que l'enseignant demanderait aux élèves de faire ressortir, parmi les idées travaillées, les résolutions qui leur semblent les plus significatives, d'autres qui seraient plus efficaces, d'autres plus élégantes, et certaines autres qu'ils nommeraient par exemple de pratiques. Mais, par-dessus tout, l'emphase pourrait être placée sur le sens donné à ce $a=3$ et en quoi il est mathématiquement valide, voire, en quoi il fonctionne et permet de comprendre comment résoudre une équation. En résumé, cette vision de l'erreur en mathématiques est associée à une façon de comprendre l'activité mathématique comme un événement social où les participants sont engagés les uns et les autres autour d'un objectif commun qui est celui du trouver un sens aux mathématiques qui résultent de cet engagement.

Ces quatre perspectives sur l'erreur en mathématiques, présentées ici, donnent un aperçu de la variété des compréhensions qu'il est possible de rencontrer chez l'enseignant à propos de l'erreur en mathématiques, ainsi que de ce qui peut être fait dans l'action de la classe relativement à celle-ci. Le tableau suivant (Tableau 2.1) résume les éléments principaux (des mots clés) pouvant être associés à chacune des quatre visions de l'erreur en mathématiques soulevés dans cette section.

Tableau 2.1 Résumé des principaux éléments des quatre visions sur l'erreur en mathématiques

Vision de l'erreur en mathématiques	Éléments principaux
L'erreur comme une incompréhension mathématique	• Défaut/Dysfonctionnement/Blocage • Difficulté/Échec • Évitement/Remédiation • Diagnostique/Correction • Application de techniques
L'erreur comme une compréhension mathématique en construction	• Indice d'apprentissage • Compréhension partielle • Développement/Construction • Dépassement d'obstacles/Ajustements • Confrontation de l'erreur

L'erreur comme une source d'exploration mathématique	• Potentiel/Fonctionnement possible • Investigation/Exploration • Relativité/Domaines de validité • Nouvelles compréhensions mathématiques
L'erreur comme une production mathématique	• Travail mathématique à part entière • Recherche de sens mathématique • Dimension personnelle/créative • Écoute attentive (du rationnel sous-jacente)

2.2 Le mot « vision » de l'erreur en mathématiques

Dans ce mémoire, les différentes manières de comprendre l'erreur sont associées à l'expression « vision » de l'erreur en mathématiques. Mais qu'est-ce qu'une vision plus précisément? En s'appuyant sur des travaux du domaine de la sociologie, des sciences de l'éducation et en didactique des mathématiques, cette section offre une définition de ce qui est compris par cette idée de vision de l'enseignant à propos de l'erreur en mathématiques.

2.2.1 La vision et les croyances

Le mot croyance est souvent utilisé en didactique des mathématiques pour décrire des manières personnelles de comprendre et des valeurs qui façonnent la pratique et orientent les connaissances. Selon Ernest (1989), des expériences et une réflexion amènent une personne à adhérer à une idée ou à un ensemble d'idées en mathématiques. Plus précisément, la définition de croyance est ici associée à la façon dont les enseignants pensent la nature des mathématiques, de l'enseignement et de l'apprentissage. Par exemple, une façon de comprendre l'apprentissage des mathématiques peut être de penser que l'élève apprend par répétition à partir d'exemples, en effectuant plusieurs exercices du même type jusqu'à ce que ceci devienne un automatisme. Une autre croyance peut être de penser qu'il faut confronter l'élève à de nouvelles situations pour qu'il apprenne en mathématiques. Ernest (1989) décrit les croyances comme étant des philosophies personnelles, parfois implicites, et constituées de conceptions et de valeurs. Ces philosophies personnelles sont imbriquées dans la construction d'une vision que possède une personne sur un sujet donné.

Pour un enseignant, sa vision de l'erreur correspond à sa propre définition du mot erreur, et elle est fortement teintée par ses croyances. Cette définition ne prend pas nécessairement la forme d'une

idée finement réfléchie et élaborée (Schön, 1994). L'enseignant pourrait l'extérioriser de façon explicite à travers un ensemble d'explications donnant un sens à ses pensées, à ses gestes et à ses actions, mais il pourrait aussi vivre sa vision de façon implicite, par ses gestes et ses actions, sans nécessairement utiliser la parole. Par exemple, il est possible de penser que la croyance selon laquelle il faut corriger rapidement l'erreur quand elle se produit pour ne pas laisser de traces chez l'élève peut exercer une influence sur l'enseignant, le dirigeant vers le développement d'une vision de l'erreur *comme une incompréhension mathématique*. Ou encore, un enseignant qui croit que l'élève apprend de ses erreurs peut être porté à soutenir une vision de l'erreur *comme une compréhension mathématique en construction*. Toutefois, ces idées ne seraient pas nécessairement verbalisées ainsi par l'enseignant.

Aguirre et Speer (2000) expliquent que les croyances des enseignants concernant les mathématiques, l'enseignement et l'apprentissage exercent une influence significative sur leurs pratiques pédagogiques. Selon ces auteurs, la façon dont les enseignants perçoivent et interprètent l'interaction entre les élèves et les mathématiques provient de leurs croyances. Celles-ci se manifestent dans les actions entreprises par ces enseignants. Ils donnent l'exemple d'un élève qui commence à décrire incorrectement la résolution d'un problème et qui est arrêté par l'enseignant afin de présenter une solution appropriée. Estimant que les élèves apprennent en écoutant ce qui est dit, le souci de veiller à ce qu'une solution correcte soit présentée aux élèves de la classe repose en partie sur des convictions relatives à la façon dont les élèves apprennent. Toutefois, il est possible d'imaginer que ce même enseignant estime que d'interrompre les explications de l'élève peut nuire à son apprentissage. Cet enseignant serait alors devant un conflit provoqué par deux croyances qui peuvent influencer ses actions de manières non alignées. Selon Green (1971), ce type de conflit peut se régler par la hiérarchisation de croyances. Green décrit un schéma d'organisation qui sert d'inspiration à Leatham (2006) pour étudier les croyances en termes de « systèmes sensibles ». Pour ce dernier, un système sensible est une organisation des croyances qui interagissent chez une personne qui cherche à donner de sens à ses différentes croyances personnelles. Ainsi, la vision de l'enseignant à propos de l'erreur se développe et est influencée par un ensemble de croyances organisées autour de l'erreur, mais aussi de l'enseignement, de l'apprentissage et des mathématiques elles-mêmes.

2.2.2 La vision et les représentations sociales

Si certains auteurs mettent l'accent sur l'aspect personnel des compréhensions, d'autres auteurs posent un regard sur la construction des idées à travers l'interaction entre individus. Le concept de représentation sociale défini par la sociologie et les sciences de l'éducation se rapproche de celui du mot vision. Pour le sens commun, « avoir une vision » signifie de se représenter quelque chose. Afin de caractériser cette représentation, Moscovici (1968) affirme que les représentations sociales sont l'ensemble des croyances, convictions et conceptions propres à un groupe. Elles résultent des perceptions personnelles, d'un processus cognitif et de l'interaction avec d'autres individus de la société. Selon Moscovici, une société est formée de sous-groupes qui partagent des références politiques, intellectuelles, morales et culturelles qui leurs sont propres.

Dans cette même perspective, Jodelet (1991) précise que les représentations sociales sont une forme de pensée sociale, un savoir de sens commun propre à un groupe : « une représentation est forcément socialement élaborée et partagée et elle participe à l'établissement d'une vision commune à un ensemble social » (p. 668). Chaque personne comprend, maîtrise et communique ses idées par l'entremise de représentations sociales qui constituent son environnement social. Dans ce sens, il est possible de penser qu'un enseignant affirme que : « les erreurs sont importantes » simplement par adéquation sociale. La vision de l'erreur de l'enseignant se développe et est influencée par des idées d'un milieu qui les soutient et dont l'enseignant fait partie. Cette importance donnée à l'erreur ferait écho différemment d'un enseignant à un autre. Pour certains, que les erreurs soient importantes reviendrait à dire qu'il faut les faire ressortir chez les élèves, pour les étudier et les surmonter; développant par le fait même une vision de l'erreur comme une compréhension mathématique en construction. Pour d'autres enseignants, l'importance des erreurs pourrait vouloir dire qu'elles sont à l'origine de l'avancement des mathématiques, tel que ce fut le cas dans l'histoire. Ainsi, la même affirmation peut être le résultat de représentations sociales différentes, et donc ayant un sens différent.

Pour sa part, Rouquette (1994) décrit les représentations sociales comme la synthèse d'une expérience de connaissance d'un monde qui est interprété. Si les représentations sociales fonctionnent comme des éléments médiateurs entre l'individu et la société, c'est parce qu'elles

permettent d'articuler les idées formulées par une théorie et l'enracinement conceptuel au niveau du sens commun.

Selon les descriptions précédentes, le mot « vision » est entendu comme une façon de comprendre le monde, qui se construit à partir d'un ensemble de perceptions, d'informations et d'expériences véhiculées par des compréhensions communes. Cette vision guide en retour la manière dont chaque personne, par exemple un enseignant se met en relation avec les autres et avec soi-même à propos d'un sujet. Pour l'enseignant, une vision de l'erreur en mathématiques est une façon d'appréhender certaines situations en lien avec le travail mathématique de la classe et ceci prend forme chez lui à travers ses croyances et celles sur son environnement.

2.3 Des aspects susceptibles d'influencer la compréhension de l'enseignant sur ses interventions en classe

Pour certains auteurs, la formation d'une vision est quelque chose de complexe, étroitement liée à la pratique de l'enseignant elle-même. Schön (1994) propose de concevoir l'agir du professionnel (dans ce cas, l'enseignant) comme une activité qui évolue au rythme des interactions sociales. Dans l'action, le professionnel est amené à réfléchir dans le sens où il cherche une « solution » à un « problème » qui se présente à lui. Bien qu'il se fonde sur ses connaissances pour agir efficacement, connaissances souvent acquises par l'apprentissage de théories et l'expérience, sa réflexion en-action enrichit ses connaissances professionnelles. Ses retours suite à l'action, soit sur son action, permettent à l'enseignant non seulement de développer une prise de conscience sur sa réflexion dans l'action, mais également permettent une amélioration raisonnée de sa pratique. C'est une véritable conversation qui se crée entre la théorie apprise et l'expérience chez le praticien, entre ce qui est appris et ce qui est acquis. La compréhension de l'enseignant sur ses pratiques évolue continuellement à travers la résolution de situations problématiques auxquelles il fait face. Ce processus n'est évidemment pas linéaire, mais plutôt formé d'allers-retours. L'enseignant peut ainsi repérer les similitudes et les contradictions entre ce qui était su et ce qu'il fait. Cette réflexion sur la réflexion nourrit la pratique d'exceptions, de contextes, de personnalités, etc., et se retrouve au cœur de la formation d'une vision pour le praticien.

L'expérience et le retour réflexif sur l'expérience permettent d'affiner ou de développer les connaissances de l'enseignant et sa pratique, soit par la sélection des connaissances utiles, soit par

l'organisation de nouveaux schèmes. En bref, les connaissances n'existent qu'en même temps que l'action et elles se transforment constamment. Les visions des enseignants seraient enracinées dans ce dialogue entre théorie et pratique pour Schön. La façon de comprendre se manifeste dans les actions de l'enseignant et elle est, en même temps, susceptible d'être transformée par l'expérience, la pratique et la réflexion. Il est possible d'imaginer que les théories clairement formulées lors de la formation d'un enseignant subissent des transformations dues aux expériences vécues par l'enseignant et elles deviennent des théories que Schön nomme davantage personnelles et implicites; mais théories tout de même.

Robert et Rogalski (2002, 2005) affirment que la pratique enseignante se développe sous l'influence de certaines composantes, caractéristiques de cette profession. L'ensemble des actions de l'enseignant est pour elles affecté par des contraintes qui pèsent sur ses décisions (Coulange et Robert, 2015). Ainsi, la *compréhension* des enseignants sur leurs interventions est liée au contexte dans lequel ces interventions se développent et se manifestent. Quels éléments font partie des expériences vécues par l'enseignant de mathématiques ? L'histoire d'apprentissage de l'enseignant, sa formation mathématique à l'enseignement, la culture du milieu de travail concernant l'enseignement-apprentissage des mathématiques, les conditions physiques de sa classe, l'organisation scolaire dans laquelle il évolue, les obligations de l'enseignant envers les élèves, et son degré d'adaptation à des situations différentes ne sont que quelques exemples des éléments en lien avec ses interventions.

Le programme d'études peut orienter les décisions des enseignants sur le travail à faire avec les élèves. Deux composantes de l'activité de l'enseignant peuvent ici être distinguées. D'une part, il y a le contenu, les connaissances mathématiques, qui sont exigées pour chaque niveau de formation. Encadré par les obligations définies dans le programme, l'enseignant prend des décisions sur le type et la succession des tâches à proposer aux élèves. D'autre part, il y a le temps. L'enseignant prévoit le déroulement des cours estimant le temps alloué aux activités de la classe. Il coordonne les activités offertes aux élèves et leur donne du temps pour travailler ces activités en fonction de la longueur du cours et du temps prévu dans l'ensemble de sa planification. En ce sens, il est possible de se demander comment un enseignant comprendrait la mobilisation de sa vision de

l'erreur comme une source d'exploration mathématique dans un contexte encadré par un programme d'études.

L'enseignant prévoit aussi des moments et des types d'évaluations qui tiennent compte des exigences institutionnelles (par exemple la date de remise des bulletins). Cet aspect prescriptif de la tâche de l'enseignant rejoint une composante locale, celle de l'organisation scolaire. L'enseignant fait partie d'une école qui fonctionne selon une certaine organisation : la longueur des périodes des cours, le calendrier scolaire, le nombre d'élèves et la composition des groupes. La dimension et le partage des locaux ont aussi une influence sur le plan de travail de l'enseignant et sur ses actions durant les cours (mobilière, organisation de l'espace de travail, type de tableau, etc.). Par exemple, si le local d'enseignement est partagé avec d'autres enseignants et que la disposition des pupitres est par défaut en rangée, l'enseignant qui veut proposer à ses élèves des activités en petits groupes doit trouver du temps pour réorganiser la classe à chaque période. Comment ferait un enseignant qui comprend l'erreur comme une compréhension mathématique en construction, et tient à faire ressortir celles-ci à travers les interactions entre élèves, pour négocier les contraintes institutionnelles pouvant limiter le travail de groupe? Quelle serait la compréhension de l'enseignant à propos d'une telle situation?

Rendre des résultats et informer les parents de l'évolution de l'élève sont aussi des obligations de l'enseignant associées à l'organisation scolaire. Elles mènent les enseignants à prendre des décisions sur l'organisation de leur pratique. Il est possible d'imaginer que les pratiques des enseignants tendent à reproduire les pratiques habituelles du milieu scolaire dans lequel elles ont lieu. Ici aussi, la culture de l'école concernant le travail en équipe par les enseignants joue un rôle significatif dans l'appropriation du programme et dans les choix des ressources pour le travail en classe (par exemple le choix d'un manuel scolaire, ou les évaluations communes). Et si les pratiques habituelles d'un milieu ne sont pas en accord avec la façon de comprendre l'erreur par l'enseignant? Bien que la vision à propos de l'erreur se développe et se transforme à travers ses expériences professionnelles, jusqu'à quel point ces décisions communes s'harmonisent-elles avec les actions de l'enseignant en classe? Les interventions de l'enseignant sont influencées par ses expériences en tant qu'élève dans un cours de mathématiques (Cooney, 1999). Le praticien tend

souvent à reproduire des expériences d'apprentissage qu'il a jugé satisfaisantes. Ceci peut aussi avoir un impact significatif sur sa vision de l'erreur et ce qu'il dit de ses interventions en classe.

En résumé, les propos de l'enseignant sur ses interventions sont influencés par des aspects implicites de leurs visions de l'erreur en mathématiques, mais aussi par une série de contraintes qui caractérisent la profession de l'enseignant; et qui en retour façonnent cette vision de l'erreur. Ces aspects implicites résultent de la dynamique entre la façon de comprendre l'erreur pour l'enseignant (soit sa vision de l'erreur) et sa compréhension de la mobilisation de cette vision de l'erreur dans sa classe (qu'il serait possible de reconnaître dans ses propos) ³.

2.4 Quelques nuances sur l'interprétation du discours de l'enseignant

Il est possible de comprendre le discours de l'enseignant comme une tentative de synthèse de sa pensée. Ce discours correspond à l'ensemble d'explications offertes par une personne afin de faire connaître ses idées, comme moyen de communication. Toutefois, il serait simpliste d'affirmer que ce discours est une représentation directe ou conforme de l'autre. Des études sur l'analyse conversationnelle (Roth, 2005) soulèvent que les propos d'une personne ne reflètent pas nécessairement ce qu'elle pense ou ce qu'elle fait de façon exacte puisque ces propos se font toujours dans un contexte, en réponse à des attentes, à des contraintes, etc.

De plus, puisque les mécanismes développés pour communiquer avec soi-même sont essentiellement les mêmes que pour communiquer avec les autres, Sfard (2001) fait la distinction entre le discours privé et le discours public. Selon Sfard, la pensée elle-même est une forme de discours (discours privé). Il s'agit d'une conversation avec soi-même, d'une forme de réflexion. Lorsque ce discours est partagé à d'autres personnes, il devient public. Ce partage est possible à travers le langage (oral ou écrit), des expressions non conventionnelles, des gestes, etc. Qu'il soit privé ou public, le discours est rattaché à la communication d'idées et aux interactions. La

³ C'est en ce sens que mon travail de recherche ne s'intéresse pas aux pratiques déclarées et aux pratiques effectives selon le sens donné en didactique des mathématiques. Il ne s'agit pas ici de distinguer la vision de l'enseignant de sa pratique, mais plutôt d'étudier des possibles visions de l'erreur en mathématique chez un enseignant, en relation avec les manifestations de sa compréhension de la mobilisation de sa vision dans sa classe de mathématiques.

communication d'une forme de pensée comprend, pour sa part, l'interprétation de quelqu'un (éventuellement celui qui offre le discours et celui qui l'interprète pourrait être la même personne).

La compréhension du discours fait donc partie de ce discours et c'est à travers cette interprétation qu'il se développe, se construit et se transforme. En ce sens, le discours est difficilement dissociable de l'interprétation de ce dernier, ou bien discours et interprétation sont une seule et même manifestation de la pensée. De cette façon, le discours d'une personne est orienté par sa vision au moment où le discours est prononcé. Réciproquement, le discours intervient dans la réflexion de cette personne et il influence donc la vision de cette dernière. Cette relation pourrait être représentée par le schéma suivant :

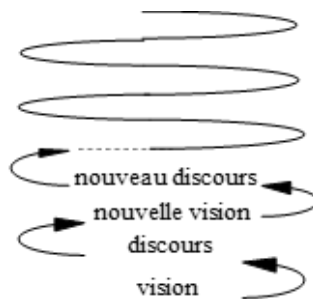


Figure 2.2 Illustration de la relation dynamique entre le discours et la vision

Ainsi, le discours de l'enseignant à propos de l'erreur en mathématiques est orienté par sa vision de l'erreur en même temps que la vision de l'enseignant est influencée par son discours. Étant sensible à la relation dynamique, voire dialectique, entre ces deux aspects, cette étude propose une reconstruction du discours de l'enseignant comme façon d'interpréter sa vision de l'erreur en mathématiques. Cette interprétation, toutefois, se fait à un moment précis, et justement elle ne représente pas un aspect statique : elle évolue tout en se développant dans l'action. En ce sens, la vision de l'erreur de l'enseignant, son discours sur cette vision et son discours sur ses interventions en classe forment un tout très dynamique et évolutif qu'il est uniquement possible d'en saisir un aperçu à un moment donnée.

Le chapitre suivant présente la méthodologie encadrant ce travail de maitrise. Cette méthodologie permet d’aborder empiriquement les questions de recherche relativement aux visions d’enseignants sur l’erreur en mathématiques en lien avec la mobilisation de ces visions en classe.

CHAPITRE 3

MÉTHODOLOGIE

Ce chapitre présente la démarche méthodologique suivie dans ce projet de maîtrise pour répondre empiriquement aux questions de recherche sur la vision de l'erreur en mathématiques. L'objectif de cette recherche est d'investiguer différentes visions d'enseignants sur l'erreur en mathématiques et leurs propos sur leurs façons de considérer la mobilisation de ces visions en classe. Pour atteindre cet objectif, des réponses écrites à un questionnaire par des enseignants de mathématiques ont été recueillies. Ces réponses représentent mes données de recherche. Elles ont été analysées suivant une méthode d'analyse inductive, inspirée par la théorisation ancrée et orientée par une méthodologie qualitative/interprétative. Dans ce qui suit, les orientations méthodologiques qui guident la démarche effectuée dans ce projet de recherche sont exposées. Ensuite, des éléments concernant la collecte des données sont présentés. Finalement, la démarche d'analyse suivie est décrite.

3.1 Les orientations méthodologiques

Ce travail de recherche veut étudier les visions des enseignants sur l'erreur en mathématiques, pour mieux les comprendre. Cet objectif se distingue de celui de les catégoriser. En effet, il ne s'agit pas ici de dévoiler des indices permettant de classer les participants selon une des quatre visions théoriques sur l'erreur en mathématiques soulevées au chapitre 2. Le but n'est pas de confirmer ou d'infirmer la théorie par la pratique, mais possiblement de confronter ces deux dernières, et de

soulever des nuances. En ce sens, les questions de recherche au cœur de cette étude mènent à une démarche voulant donner un sens aux visions des enseignants sur l'erreur en mathématiques, ainsi qu'aux façons dont ces enseignants disent mobiliser ces visions dans leur classe. Une démarche de la sorte s'aligne bien avec une recherche qualitative/interprétative, telle qu'expliquée par Savoie-Zajc (2018): « La recherche qui s'inscrit dans le courant interprétatif est ainsi animée du désir de mieux comprendre le sens qu'une personne donne à son expérience. » (p. 192)

Le sujet à l'étude présente des caractéristiques pouvant expliquer ce « choix » méthodologique. D'abord, la dynamique entre la variété de facteurs (le rapport aux mathématiques, à l'apprentissage, à l'enseignement, la compréhension des rôles de l'élève et de l'enseignant dans l'activité mathématique, etc.) pouvant influencer une vision de l'erreur en mathématiques en fait un phénomène pouvant être considéré comme étant complexe. La recherche qualitative/interprétative se réclame d'offrir une démarche qui permet au chercheur de reconnaître des manifestations précises d'un phénomène complexe, par exemple, à travers l'analyse fine et détaillée des données à l'étude.

Ensuite, il est possible de parler de trois dimensions associées au phénomène ici étudié (sociale, évolutive et émergente), qui s'alignent bien avec une orientation méthodologique de type qualitatif/interprétatif. Premièrement, une vision de l'erreur en mathématiques est considérée comme un phénomène ayant une dimension sociale. Tel que décrit dans le chapitre 2, la vision de l'erreur d'un enseignant en mathématiques est une façon d'appréhender certaines situations en lien avec le travail mathématique se produisant en classe, et qui prend forme chez lui (l'enseignant) à travers une mise en relation entre ses croyances, celles de son environnement et ses expériences vécues. La dimension sociale se retrouve alors dans l'activité sociale qu'est l'enseignement-apprentissage, à travers laquelle l'enseignant vit des expériences l'amenant à façonner sa vision de l'erreur. De plus, cette dimension sociale, tel que l'explique Bednarz (1991), se retrouve aussi au cœur même de la nature des mathématiques, qui sont nées et se sont développées dans une intention de les communiquer.

Deuxièmement, la vision de l'enseignant sur l'erreur en mathématiques représente un phénomène ayant une dimension évolutive. Cette vision peut se transformer en lien avec les diverses expériences vécues (y compris la réflexion de l'enseignant en lien avec les réponses offertes au

questionnaire dans cette étude, tel qu'expliqué par la dynamique entre discours et vision à la section 2.4). Cette vision de l'erreur peut évoluer d'autant plus qu'elle concerne les mathématiques, qui sont elles-mêmes une discipline dynamique et évolutive. Cette recherche vise à capter ces possibles évolutions, ou du moins à les prendre en compte, pour mieux comprendre différentes visions des enseignants sur l'erreur en mathématiques⁴. Ainsi, une démarche flexible et adaptative comme l'offre une orientation qualitative/interprétative convient à cette étude.

Troisièmement, la vision de l'enseignant sur l'erreur en mathématiques peut être vue comme un phénomène émergent. Le chapitre 2 soulève la relation dynamique entre le discours sur l'erreur et l'interprétation de ce dernier. Une vision devient celle de l'enseignant du fait que ce dernier la verbalise par son discours et que le chercheur interprète ses propos. En ce sens, les visions ne sont pas ici considérées comme étant fixes et statiques ne nécessitant qu'à les identifier, mais plutôt comme un phénomène qui se dessine et est mis à jour à travers une certaine analyse des propos des enseignants. La recherche qualitative/interprétative offre au chercheur une proximité avec les données qui lui permet de développer des compréhensions fines du phénomène à l'étude (dans ce cas les visions des enseignants sur l'erreur en mathématique). Par l'entremise d'un « dialogue » avec les données, et dans un va-et-vient continu entre l'analyse et le sens qui peut leur être donné, le chercheur demeure constamment à l'affût de nouvelles idées, tout en renforçant la nature de la compréhension qu'il développe sur ses données. Dans cette recherche, une analyse fine des propos des enseignants sur leurs visions de l'erreur en mathématiques en relation avec leurs interventions autour de ces erreurs permet de dégager des particularités et des nuances en relation avec les quatre visions théoriques identifiées au chapitre 2. Ceci est particulièrement important pour ce travail de recherche, qui veut donner un sens aux visions des enseignants et à ce qu'ils affirment à propos de leur mobilisation.

3.2 La collecte de données et les enseignants participants

Un ensemble d'affirmations (nommé ici « le questionnaire ») sur le thème de l'erreur en mathématiques a été proposé à des enseignants de mathématiques du secondaire. Ceux-ci devaient

⁴ En lien avec ce qui est dit par Flückiger, les réponses peuvent en quelque sorte permettre de rendre explicite les visions de l'erreur qui demeurent souvent implicites chez les praticiens.

commenter ces affirmations. Les sections suivantes expliquent les modalités adoptées pour la collecte de données et la façon dont ce questionnaire a été construit.

3.2.1 Les modalités adoptées pour la collecte de données

Une invitation à participer au projet (avec une description des objectifs de ce dernier) a été envoyée par courriel aux enseignants de plusieurs écoles de la grande région de Montréal, par l'entremise de conseillers pédagogiques et autres contacts personnels. Six enseignants volontaires ont répondu (par courriel) à cette invitation, en manifestant un intérêt pour participer à cette étude. Un formulaire de consentement pour participer à la recherche leur a alors été envoyé. Par la suite, un lien web pour remplir le questionnaire en format « form » contenant les cinq affirmations a été acheminé aux six enseignants, ainsi qu'un code pour s'identifier au début du document (afin d'assurer leur confidentialité). Voici un aperçu du questionnaire, tel que vu par les enseignants sur le web.

Une vision de l'erreur en mathématiques

Merci de remplir ce formulaire. Votre collaboration est essentielle à la réalisation d'un projet de recherche sur les différentes façons dont les enseignants de mathématiques perçoivent l'erreur de l'élève et mettent en pratique ces visions, en classe. Ce projet est mené par Fiorella Tinetto, sous la direction de Jérôme Proulx et Jean-François Maheux, dans le cadre du programme de maîtrise en didactique au département de mathématiques de l'UQAM.

Votre participation consiste à expliquer votre position concernant chacune des affirmations des sections 2 à 6.

1. Inscrivez votre identifiant à deux chiffres

Entrez votre réponse

2. Les erreurs sont importantes en mathématiques.

Entrez votre réponse

3. Les erreurs de mes élèves occupent une place importante dans ma classe.

Entrez votre réponse

4. « On apprend de nos erreurs » : les erreurs permettent aux élèves de progresser en mathématiques.

Entrez votre réponse

5. Les élèves ne font pas d'erreurs volontairement.

Entrez votre réponse

6. Les erreurs des élèves peuvent amener à réfléchir sur certaines dimensions et contenus mathématiques.

Entrez votre réponse

Vous pouvez imprimer une copie de votre réponse après envoi

Envoyer

Figure 3.1 Aperçu du questionnaire en format « form » rempli par les enseignants

Aucune limite de temps pour répondre au questionnaire n'a été imposée aux enseignants participants. Ils ont tous répondu dans les sept jours qui ont suivi l'envoi du lien web (la plupart d'entre eux répondant dans les trois premiers jours après cet envoi).

3.2.2 La création du questionnaire

Afin d'étudier la vision des enseignants sur l'erreur en mathématiques, un questionnaire composé de cinq affirmations a été créé. La construction de ces affirmations a été guidée par les quatre visions de l'erreur soulevées au chapitre 2. Dans ce qui suit, chacune des affirmations est présentée et son rationnel est justifié en fonction de ces quatre visions du chapitre 2.

La première affirmation est:

LES ERREURS SONT IMPORTANTES EN MATHÉMATIQUES.

Cette affirmation offre aux enseignants l'occasion de s'exprimer sur l'erreur en lien avec les mathématiques comme discipline. Certaines visions identifiées au chapitre 2 se distinguent par la façon de comprendre les mathématiques. Par exemple, si, dans les deux premières visions, les mathématiques sont associées à des savoirs universels, et que les erreurs apparaissent en comparaison avec ces savoirs, les deux dernières visions considèrent la discipline dans son aspect historique (celle-ci se serait développée à coup d'erreurs et d'ajustements). Les propos des enseignants en lien avec cet aspect peuvent offrir des éléments permettant de mieux comprendre leur vision de l'erreur en mathématiques, et possiblement entrer sur leurs compréhensions de la mobilisation de cette vision dans leur classe.

La deuxième affirmation est:

LES ERREURS DE MES ÉLÈVES OCCUPENT UNE PLACE IMPORTANTE DANS MA CLASSE.

Cette affirmation a été proposée pour que les enseignants parlent directement de la façon dont les erreurs sont traitées en classe. Diverses caractéristiques en lien avec cet aspect pour les quatre visions ont été identifiées au chapitre 2. Par exemple, la vision 1 de l'erreur comme une incompréhension mathématique est associée à des pratiques de diagnostic et de correction, la vision 2 de l'erreur comme une compréhension mathématique en construction est alignée avec des

pratiques de confrontation de l'erreur, la vision 3 de l'erreur comme une source d'exploration mathématique se rapproche de l'idée d'exploiter l'erreur pour faire émerger de nouvelles compréhensions mathématiques en classe et la vision 4 de l'erreur comme une production mathématique est centrée sur la considération des mathématiques faites en la classe pour elles-mêmes. Les propos des enseignants en lien avec cette affirmation peuvent éclairer sur le statut qu'ont les erreurs dans leur classe, et possiblement ici aussi d'entrer sur leurs compréhensions de la mobilisation de cette vision dans leur classe.

La troisième affirmation est:

« ON APPREND DE NOS ERREURS » : LES ERREURS PERMETTENT AUX ÉLÈVES DE PROGRESSER EN MATHÉMATIQUES.

Cette affirmation soulève un aspect de l'erreur en lien avec l'apprentissage, reprenant une formulation souvent entendue relativement aux erreurs. Bien qu'il soit possible d'imaginer que tout enseignant a pour objectif de contribuer à l'apprentissage de ses élèves, la façon de voir le rôle des erreurs en lien avec cet apprentissage peut être assez différente d'un enseignant à un autre. En effet, les visions identifiées au chapitre 2 permettent de penser à ces différences possibles. Si dans la vision 1 les erreurs sont vues comme des entraves à l'apprentissage, dans la vision 2 elles sont vues comme des éléments essentiels (et pour certains nécessaires) à cet apprentissage. Dans la vision 3, le développement de compréhensions découle du fait qu'une exploration mathématique supplémentaire a été réalisée autour de l'erreur pour lui trouver un domaine de validité. Alors que dans la vision 4, les compréhensions mathématiques découlent de l'engagement des élèves dans les mathématiques elles-mêmes réalisées dans la classe, sans une classification de celles-ci par rapport à un référent externe. Les propos des enseignants pourront permettre de voir comment ces derniers voient la place de l'erreur dans l'apprentissage, et probablement encore avancer sur leurs compréhensions de la mobilisation de cette vision dans leur classe.

La quatrième affirmation est:

LES ÉLÈVES NE FONT PAS D'ERREURS VOLONTAIREMENT.

Cette affirmation permet de soulever le lien entre l'erreur et l'élève lui-même en mathématiques. Les quatre visions se distinguent aussi sur cet aspect, où pour la vision 1 l'erreur est vue comme

une défaillance dans la compréhension de l'élève, tandis que dans la vision 2 elle est plutôt vue comme l'indice d'une compréhension en développement. Si dans les deux cas, il est possible de considérer que l'élève ne fait pas par exprès de commettre des erreurs, les explications reliés à cette affirmation peuvent être de nature très différente. Les propos des enseignants sur cette affirmation pourront donner accès à la considération de l'élève lui-même, et sa responsabilité, dans la création des erreurs.

La cinquième affirmation est:

LES ERREURS DES ÉLÈVES PEUVENT AMENER À RÉFLÉCHIR SUR CERTAINES DIMENSIONS ET CONTENUS MATHÉMATIQUES.

Cette affirmation a été proposée comme une forme d'invitation pour les enseignants à partager des éléments de leur propre relation avec l'erreur et leurs pratiques d'enseignement. Dans les deux premières visions, il est possible de parler d'une certaine distance entre l'erreur et l'enseignant. Bien qu'elle occupe du temps dans la pratique de l'enseignant, dans ces deux visions, l'erreur appartient surtout à l'élève en ce qui concerne ses compréhensions. Dans la vision 3, l'erreur est cependant davantage associée aux mathématiques et elle peut même ne pas être considérée comme erreur dans de nouveaux contextes (domaines différents de validité). Les propos des enseignants permettront d'en connaître davantage sur la relation qu'ils entretiennent avec les erreurs et leur façon de comprendre l'impact sur leurs interventions.

Ces cinq affirmations veulent aborder différentes caractéristiques relevées pour les quatre visions soulevées au chapitre 2. Elles touchent en ce sens autant aux mathématiques, à l'enseignement, à l'apprentissage, à l'élève qu'à l'enseignant lui-même, relativement aux erreurs en mathématiques.

3.3 La démarche d'analyse

L'analyse de données réalisée dans cette étude s'inspire de principes issus de la théorisation ancrée (Strauss et Corbin, 1990), soit une méthode inductive basée sur des « lectures » répétées des données, permettant l'émergence de différentes thématiques. En effet, des lectures itératives des propos de chaque enseignant ont été effectuées. Ces lectures m'ont amené à dégager des thématiques, tout en étant orientée par des éléments saillants du cadre théorique. Plus précisément, les affirmations du questionnaire permettent d'identifier cinq dimensions initiales pouvant être

liées aux visions de l'erreur en mathématiques. Comme mentionné à la section précédente, il est possible de parler de l'erreur en lien avec: les mathématiques, l'enseignement, l'apprentissage, l'élève et l'enseignant. Ces cinq dimensions initiales ont servi de premier éclairage pour la lecture et l'analyse des propos des enseignants participants sur l'erreur et leurs compréhension de leurs interventions en classe. Ainsi, c'est dans le but de « faire parler les données » qu'une méthode inductive a été adoptée, où chaque thématique a été mise à l'épreuve par des relectures successives des données. Cette démarche itérative, composée de retours constants sur les propos des enseignants, a permis de préciser certaines thématiques et d'en faire émerger des nouvelles pour chacun des enseignants participants.

Les deux prochains chapitres traitent des analyses des propos de six enseignants participants, relativement aux cinq affirmations proposées dans le questionnaire. Le chapitre 4 présente l'étude des réponses de chaque enseignant (un à la fois) et le chapitre 5 traite des différentes manières dont les visions de l'erreur en mathématiques du chapitre 2 peuvent être reconnues dans les propos de ces enseignants.

CHAPITRE 4

ANALYSES

Ce chapitre présente une première analyse des réponses des six enseignants participants. Chacune des sections suivantes correspond au portrait d'un participant : Henri (section 4.1), Kathya (section 4.2), Clara (section 4.3), Julie (section 4.4), Lise (section 4.5) et Oscar (section 4.6). Pour chaque enseignant, l'analyse est organisée autour de différents thèmes ayant émergé des propos émis et un retour réflexif aux différentes visions est offert. À la section 4.7, un tableau synthèse des thématiques issues des propos des enseignants est aussi présenté.

4.1 Henri: l'importance et l'utilité des erreurs en mathématiques

Henri enseigne les mathématiques en secondaire 1. Ses réponses détaillées font, pour la plupart, référence aux expériences de sa classe. Pour lui, les erreurs sont directement constitutives des mathématiques, et elles sont très utiles pour leur enseignement. À travers ses propos, Henri laisse entrevoir une sensibilité envers l'histoire des mathématiques, où celle-ci guide d'une certaine façon ses actions en lien avec les erreurs qui se produisent dans sa classe.

4.1.1 Description des propos d'Henri

Il est possible de décrire les propos d'Henri autour de quatre thèmes en lien avec l'erreur en mathématiques. Henri parle de *l'erreur comme une façon d'apprendre en mathématiques*, de *l'erreur comme une façon de faire des mathématiques*, de *l'erreur comme un outil pour l'enseignement*, et de *l'erreur pour faire de liens entre différents concepts mathématiques*.

L'erreur comme une façon d'apprendre en mathématiques. En réponse à l'affirmation LES ERREURS DE MES ÉLÈVES OCCUPENT UNE PLACE IMPORTANTE DANS MA CLASSE, Henri dit « Tout à fait. J'essaie le plus souvent possible de faire "parler" mes élèves de leurs démarches. Le processus de résolution de problèmes m'intéresse davantage que la solution en tant que tel (sic.) ». En disant que son intérêt est porté sur les démarches des élèves lorsqu'il veut expliquer la place importante qu'il donne à l'erreur dans sa classe, Henri laisse comprendre que les démarches des élèves peuvent comporter des erreurs ou bien que lorsque les élèves travaillent et expriment leurs raisonnements, il risque de croiser des erreurs durant son cours. D'une certaine façon, il laisse entrevoir qu'il est habituel que des erreurs se produisent lors de la résolution de problèmes.

Henri explique aussi, lorsqu'il répond à la phrase LES ERREURS SONT IMPORTANTES EN MATHÉMATIQUES, que « ...c'est en essayant et en se trompant surtout qu'on peut ensuite corriger nos perceptions et "apprendre" ». De cette façon, il manifeste le fait que l'apprentissage est un processus dans lequel l'élève fait des essais, commet des erreurs et doit s'ajuster. L'apprentissage se réalise à travers des ajustements successifs dont l'élève tire des leçons : il ne s'agit pas seulement de voir que nous nous sommes trompés et corriger nos perceptions, mais aussi, de réaliser certaines choses en lien avec ces erreurs et donc d'apprendre du fait de s'être trompé. Autrement dit, pour Henri, apprendre des mathématiques apparaît comme le résultat d'un processus qui passe par un travail mathématique; travail qui peut être d'abord un peu approximatif et qui comporte possiblement des erreurs. Ces erreurs, il sera ensuite possible de les examiner, de les corriger, etc. Et c'est à travers ce processus que quelqu'un peut apprendre.

Il est aussi à remarquer que Henri parle d'erreurs et d'apprentissages des mathématiques sans explicitement faire allusion aux élèves. Il ne dit pas « c'est en essayant et en se trompant surtout *que les élèves* peuvent ensuite... », mais plutôt « c'est en essayant et en se trompant *qu'on* peut ensuite... ». De cette façon, l'utilisation par Henri du pronom indéfini permet de comprendre que si un élève peut commettre des erreurs, c'est peut-être aussi le cas d'un enseignant, d'un mathématicien ou toute autre personne faisant des mathématiques. En d'autres mots, quiconque faisant des mathématiques est susceptible de devoir s'ajuster. C'est donc l'activité mathématique elle-même qui est propice aux erreurs et qui nécessite de s'ajuster, d'apprendre, peu importe qui se prête à cette activité.

L'erreur comme une façon de faire des mathématiques. En réponse à l'affirmation LES ERREURS SONT IMPORTANTES EN MATHÉMATIQUES, Henri dit aussi « Certainement! Dans ma classe, je fais la promotion des erreurs en expliquant que la plupart des théories mathématiques ont demandée (*sic.*) énormément d'essais et d'erreurs avant d'aboutir ». Il ici met en valeur une dimension historique, où les notions mathématiques avanceraient fréquemment à coup d'erreurs et d'ajustements. Les mathématiques sont pour lui le résultat d'un travail qui nécessite des adaptations pour arriver à avoir la forme qu'elles ont actuellement. Ainsi, Henri reconnaît un rôle aux erreurs dans le développement des mathématiques en tant que discipline.

Si les erreurs sont importantes en mathématiques, il semble alors aussi important pour Henri de partager cette vision à ses élèves. Il fait un lien entre la façon dont les théories mathématiques se sont développées et la manière dont les élèves apprennent. D'une part, Henri affirme que la plupart des théories mathématiques ont avancé par la voie d'essais divers, d'erreurs et d'ajustements. D'autre part, il conçoit qu'il est fréquent de rencontrer des erreurs en cours d'apprentissage. Ces deux idées sont présentées dans la même phrase de Henri et enchaînées par le mot "également". Ainsi, comme il avait affirmé « ... la plupart des théories mathématiques ont demandées (*sic.*) énormément d'essais et d'erreurs avant d'aboutir. *Également*, c'est en essayant et en se trompant surtout qu'on peut ensuite corriger nos perceptions et "apprendre" ». Le lien entre le développement des mathématiques et celui des élèves en mathématiques est saillant. Ce parallèle entre des théories mathématiques et l'apprentissage mathématique d'une personne laisse comprendre que, d'une certaine façon pour Henri, les élèves font des mathématiques à travers un processus semblable à celui du mathématicien, en commettant et en corrigeant des erreurs, mais aussi plus largement relativement à la discipline elle-même. De plus, il est pertinent de faire connaître ceci aux élèves; peut-être pour qu'ils aient une vision positive de l'erreur, qu'ils n'hésitent pas à essayer, même si le résultat est incertain. En tenant compte de l'intention exprimée par Henri de « faire parler les élèves », il est possible de penser qu'il est important pour lui que les élèves s'engagent dans l'activité mathématique et ne se découragent pas devant l'erreur.

L'erreur comme un outil pour l'enseignement. Henri met en valeur l'erreur comme outil pour son enseignement. Il « profite des erreurs pour expliquer la matière sous un autre angle et démontrer que ces erreurs ne sont pas toujours vides (*sic.*) de sens ». Henri exprime ces propos en réponse à l'affirmation « ON APPREND DE NOS ERREURS » : LES ERREURS PERMETTENT AUX ÉLÈVES DE

PROGRESSER EN MATHÉMATIQUES. Il encourage ses élèves à s'exprimer et à partager leurs compréhensions éventuellement erronées, car c'est pour lui une façon d'apprendre. Et, il se sert aussi des erreurs qui apparaissent pour revisiter les notions mathématiques. Aborder ces notions selon une nouvelle perspective est une occasion pour enrichir son cours, pour travailler des nouvelles idées mathématiques avec ses élèves. Henri est centré sur les mathématiques à développer dans la classe à partir des erreurs, manifestant de cette façon une vision selon laquelle les erreurs sont ce qui pourrait s'appeler « productives » (Mégrouèche, 2020). Ainsi, se distingue chez Henri une compréhension de l'erreur comme étant un outil pour l'enseignement, pour approfondir les mathématiques dans son cours lui-même. De plus, aligné avec l'idée développée plus haut selon laquelle l'élève et le mathématicien parcourent des démarches similaires, Henri affirme que les erreurs des élèves ne sont pas nécessairement vides de sens. Tout comme pour le mathématicien, les erreurs comportent un certain potentiel et travailler sur ces erreurs peut permettre d'avancer en mathématiques. Si les erreurs ne sont pas vides de sens, c'est qu'elles ne représentent pas des idées à remplacer, mais plutôt des idées à retravailler, à ajuster et à repenser.

Dans le même sens, en réaction à la phrase LES ÉLÈVES NE FONT PAS DES ERREURS VOLONTAIREMENT, Henri dit « Je suis en accord avec cela également. J'ajouterais même qu'en faisant la promotion d'erreurs il y a plus des solutions proposées et nécessairement plus d'erreurs mais ces erreurs sont saines et derrière elles se cachent une logique, parfois maladroite, par laquelle il faut débiter la reconstruction de bases mal comprises ». D'une part, Henri affirme qu'habituellement les erreurs apparaissent dans le travail mathématique des élèves et qu'elles ne sont pas fortuites (elles peuvent s'expliquer par un raisonnement de l'élève, ce qu'il nomme une logique). D'autre part, bien que pour Henri les erreurs ne soient pas toujours vides de sens et qu'elles soient motivées par une logique, elles lui signalent le besoin d'un ajustement. Selon lui, la compréhension de cette logique cachée, ces erreurs, se trouve à la base de l'ajustement que suivra. Cette compréhension permet d'identifier les aspects sur lesquels intervenir comme enseignant et représente le point de départ d'une nouvelle construction.

Juste avant d'affirmer qu'il profite des erreurs pour expliquer la matière de façon différente, en réponse à l'énoncé « ON APPREND DE NOS ERREURS » : LES ERREURS PERMETTENT AUX ÉLÈVES DE PROGRESSER EN MATHÉMATIQUES, Henri dit « Effectivement, je suis en accord avec cette affirmation! Aucune réponse n'est écartée lorsqu'on en discute en grand groupe ». Si, tel que

souligné plus haut, Henri voit les erreurs comme une forme d'apprentissage en mathématiques, il explique ici qu'elles sont un outil pour alimenter les discussions avec l'ensemble des élèves. Ces propos ainsi que l'utilisation du pronom « nous » dans des phrases comme: « nous dévions très souvent vers d'autres notions déjà vues » permettent de dire que Henri donne une importance particulière au travail autour de l'erreur qui se passe de façon collective et exploite les opportunités qui se présentent pour tirer profit des erreurs dans le groupe.

L'erreur pour faire des liens entre différents concepts mathématiques. Henri ne semble pas être incommodé par les contraintes de son plan de cours. Il explique qu'il utilise les erreurs pour travailler la matière sous un angle différent « Parfois, cela nous amène "en dehors" du plan de cours mais est très formateurs (sic.) lorsqu'on l'analyse sur une longue période de temps durant l'année ». Bien qu'il utilise les erreurs pour approfondir son cours dans le moment présent, tel que souligné plus haut, il manifeste une vision de l'enseignement qui tient compte d'un apprentissage se réalisant sur le long terme. En réaction à l'affirmation LES ERREURS DES ÉLÈVES PEUVENT AMENER À RÉFLÉCHIR SUR CERTAINES DIMENSIONS ET CONTENUS MATHÉMATIQUES, Henri dit « Comme mentionné plus haut, j'introduis une notion mathématique en classe et nous dévions très souvent vers d'autres notions déjà vues ou non et on "réfléchis" sur le comment et le pourquoi ». De cette façon, Henri explique qu'en allant voir les raisons qui font qu'un travail mathématique comporte des erreurs, il est possible de sortir du contenu immédiat du cours et de faire de liens avec d'autres notions. Il ajoute: « Les mathématiques ne doivent pas être enseignées de façon linéaire et cloisonnée. C'est plutôt un tout et énormément de liens entre les notions qu'il faut développer ». Henri précise ici sa vision de l'enseignement des mathématiques. Il est important pour lui de montrer aux élèves les relations entre les différents sujets mathématiques. Ce processus d'aller-retour entre différentes notions est nourri par les erreurs qui se présentent dans les démarches des élèves. Henri encourage ces derniers à se servir des notions déjà vues, ce qu'il appelle la boîte à outils, pour les aider à faire des liens entre ces différentes notions et comprendre leurs erreurs sur celles-ci. Pour lui, le développement des mathématiques chez l'élève se fait à travers des liens entre diverses notions. En modifiant le déroulement de son plan de cours, dans l'action, Henri se sert alors des erreurs pour amener les élèves à faire ces liens.

En résumé, l'erreur apparaît centrale dans la pratique d'Henri. Ce dernier s'attend à que les élèves s'engagent mathématiquement, qu'ils essaient de résoudre des problèmes et commettent

naturellement des erreurs. Il accueille ces erreurs dans une perspective d'ajustement de leurs compréhensions. Henri encourage les élèves à partager leurs démarches et leurs raisonnements, convaincu que des erreurs feront leur apparition. Ces erreurs orientent le cours et donnent à Henri une raison pour revenir sur certaines bases et faire des liens entre diverses notions mathématiques. C'est par une trajectoire non linéaire et en faisant des associations entre différents sujets que les mathématiques se développent dans sa classe, tout comme dans l'histoire, et il est important pour lui, que les élèves apprécient cela. Pour offrir aux élèves la possibilité de faire ces associations, Henri n'hésite pas à sortir du déroulement prévu de son cours, ayant en tête une image plus large de ce qui doit être appris durant l'année scolaire et de la formation des élèves en mathématiques.

4.1.2 Analyse des propos d'Henri selon les visions de l'erreur

Par ses réponses, Henri manifeste une vision de l'erreur en mathématiques ayant des points en commun avec différentes visions soulevées au chapitre 2. Premièrement, Henri semble voir à l'erreur comme une source potentielle pour enrichir le déroulement de son cours, en lien avec la vision 3 de l'erreur *comme une source d'exploration mathématique*. L'erreur est ici une occasion à saisir pour faire développer des nouvelles compréhensions mathématiques avec les élèves. Henri veut profiter des erreurs et faire évoluer son cours à travers ces dernières. Par exemple, il affirme que les mathématiques elles-mêmes se bâtissent à partir des erreurs, traçant un parallèle entre la discipline, les mathématiciens et les élèves. L'erreur ouvre la voie à l'exploration potentielle de nouvelles compréhensions mathématiques. De plus, son intention pour que les élèves deviennent sensibilisés à ce phénomène et sa façon de voir les élèves s'aligne avec ce qu'annonce Borasi (1994) :

This error activity suggests that some mathematical errors-especially those that cannot be totally eliminated-have the potential to stimulate students' reflections on the nature of mathematics and make them realize that mathematics, too, is the product of human activity and thus not as "perfect" as they might have expected. (p. 185)

Henri est intéressé à ce que les élèves s'essaient et expriment leurs raisonnements lors d'un travail mathématique, car c'est dans celui-ci que les erreurs peuvent être saisies et exploitées. C'est pour lui par ces erreurs présentes dans les essais qu'il est possible de débiter un travail de construction. De plus, lorsqu'il dit que les erreurs mènent « en dehors du plan de cours » ou que « nous dévions très souvent vers d'autres notions déjà vues ou non », il partage une idée de l'erreur comme tremplin

pour faire d'autres mathématiques (Borasi, 1994), des mathématiques qui n'étaient souvent pas prévues avant l'apparition de l'erreur. Dans ce sens, il est possible de dire que pour Henri l'erreur ouvre des opportunités pour faire davantage de mathématiques dans son cours.

Deuxièmement, lorsque Henri affirme que « c'est en essayant et en se trompant surtout qu'on peut ensuite corriger nos perceptions et "apprendre" », il manifeste une vision selon laquelle les élèves apprennent par le dépassement de leurs erreurs, rejoignant ainsi la vision théorique de l'erreur *comme une compréhension mathématique en construction*. En effet, pour Henri les erreurs ne sont pas « vides de sens » et derrière elles « se cache une logique » à partir de laquelle commence la reconstruction. Elles ne sont pas à ignorer ou à remplacer, mais sont plutôt à retravailler. La vision d'Henri s'aligne ici avec celle de Brousseau (1989) lorsqu'il parle des erreurs comme des « conceptions, qui, même lorsqu'elles sont fausses, ne sont pas des accidents, mais des acquisitions souvent positives ». De plus, par sa compréhension de l'erreur comme un outil pour l'enseignement, Henri rejoint la vision d'Astolfi (1997) qui parle du « traitement didactique stratégique » pour mettre en valeur la pratique de l'enseignant qui concerne en « mieux examiner les qualités en devenir des productions des élèves, celles qui peuvent être développées à partir de l'état présent » (p. 104).

4.2 Kathya: l'erreur comme une entrave à la progression

Kathya est une enseignante de mathématiques qui travaille en secondaire 3. Dans ses réponses aux affirmations, elle alterne entre des propos généraux et d'autres qui concernent des aspects plus personnels en lien avec sa pratique. Tout au long de ses réponses, elle parle de l'erreur en fonction des conséquences qu'elle peut entraîner sur l'élève, l'enseignant et les problèmes en mathématiques. Kathya laisse entrevoir que, pour elle, les erreurs appartiennent à ceux qui présentent des difficultés en mathématiques.

4.2.1 Description des propos de Kathya

Les propos de Kathya peuvent être organisés autour de quatre thèmes. Elle explique que *les erreurs doivent être réglées rapidement*, que *les erreurs servent à l'enseignant pour comprendre les compréhensions des élèves*, que *les erreurs empêchent les élèves d'exprimer leurs raisonnements*, et que *les erreurs ne s'appliquent pas aux enseignants de mathématiques*.

Les erreurs doivent être réglées rapidement. Kathya aborde la question du temps entourant l'erreur, expliquant que l'erreur doit être prise en charge dès qu'elle se manifeste, car il sera alors plus simple pour l'élève de se reprendre. Par exemple, Kathya affirme « Je vois l'erreur comme un angle. Si l'erreur est prise au début, il sera facile de la corriger. Si on attend trop, l'élève se sentira tellement loin de ce qu'il doit atteindre qu'il perdra confiance en ses capacités ». L'intervention rapide vise donc à corriger l'erreur de manière que l'élève puisse continuer à suivre et à rester engagé. Son propos mène à penser que le temps de la classe avance un peu indépendamment des difficultés des élèves, qui ont comme responsabilité d'atteindre des savoirs mathématiques. La question de l'estime de soi et l'inscription de l'erreur dans le temps revient dans une autre affirmation de Kathya, quand elle dit que l'erreur « aura des répercussions » sur « la vision qu'aura l'enseignant sur l'apprentissage du jeune à long terme ou que le jeune aura sur l'estime qu'il a de lui-même ». Ici, la question du temps concerne le fait que l'erreur peut perdurer dans le temps et avoir des répercussions à long terme chez l'élève et l'enseignant.

Cette dernière affirmation de Kathya pointe ainsi sur l'impact négatif de l'erreur aussi sur l'enseignant. Son propos sur la manière dont l'élève et son apprentissage sont vus par l'enseignant est venu en réponse à l'affirmation LES ERREURS SONT IMPORTANTES EN MATHÉMATIQUES. Elle commente alors « Je ne suis pas certaine de ce que “importante” veut dire. J'imagine que c'est qu'une erreur aura des répercussions sur le reste du problème ou sur la vision qu'aura l'enseignant sur l'apprentissage du jeune à long terme ». Bien que Kathya donne peu d'indices sur sa vision à propos de ces répercussions sur ce que l'enseignant fait, elle semble suggérer que la présence d'erreurs dans ce que font les élèves implique un certain travail différent de la part de l'enseignant, et qu'à long temps ceci pourrait affecter leur relation. Cette relation enseignant-élève semble s'appuyer pour elle sur une certaine finalité, un « problème » (à résoudre), des apprentissages à « réaliser », et l'erreur vient affecter l'atteinte de ces objectifs. Lorsque Kathya mentionne le « long terme », il est possible qu'elle fasse référence à certaines étiquettes qui pourraient être attribuées à l'élève concernant ses capacités à apprendre. Un enseignant pourrait-il être porté à dire qu'un élève qui commet souvent des erreurs lorsqu'il fait des mathématiques a plus besoin d'attention? Peut-être même qu'elle entrevoit que l'enseignant juge alors limitées les aptitudes de l'élève à apprendre et le traite différemment. Les propos de Kathya font sentir que l'erreur n'implique pas seulement l'élève, mais aussi l'enseignant.

Les erreurs servent à l'enseignant pour comprendre les compréhensions des élèves. En plus de ses effets sur l'élève ou l'enseignant, pour Kathya l'erreur a des retombées sur le travail mathématique lui-même. Dans l'extrait précédent, elle parle des « répercussions sur le reste du problème ». Kathya semble suggérer que l'erreur, lors d'une résolution de problèmes, peut empêcher l'élève d'effectuer le travail attendu ou de trouver la solution souhaitée. Plus précisément, si l'erreur est vue « comme un angle » et que l'élève risque de s'éloigner de « ce qu'il doit atteindre », il est possible de comprendre que, pour Kathya, l'élève a un chemin à suivre pour se rendre au bon endroit, et que l'erreur l'éloigne de cet endroit en lui faisant prendre une direction différente. Elle parle, par exemple, d'erreurs de calcul qui pourraient entraver la résolution. Ces erreurs auraient leur source dans un mauvais apprentissage des procédés « Les opérations avec les nombres négatifs amène (*sic.*) souvent des erreurs importantes lorsqu'elles sont apprises par "trucs" ».

Cette mention de « trucs » comme source d'erreur suggère aussi que, pour Kathya, il y a un lien entre les erreurs commises par les élèves et leurs compréhensions des processus mathématiques: un truc correspond généralement à un apprentissage qui n'est pas basé sur la compréhension. À l'affirmation LES ERREURS DE MES ÉLÈVES OCCUPENT UNE PLACE IMPORTANTE DANS MA CLASSE, Kathya répond « Oui, lorsqu'ils ne savent pas quoi faire, je leur demande d'écrire quelque chose de faux. C'est comme ça que j'arrive à lire dans leur tête ». L'erreur sert ici à Kathya à mieux comprendre la compréhension de ses élèves. Elle veut connaître les idées de ses élèves et pour cela elle les encourage à écrire quelque chose même lorsqu'ils ne savent pas trop quoi écrire. De plus, il est possible de penser qu'elle s'attend à ce que les élèves commettent des erreurs lorsqu'ils ne savent pas quoi répondre. En lien avec ce qui est discuté plus haut, pour Kathya l'erreur est aussi une raison pour que l'enseignant intervienne. Elle se montre intéressée à voir les erreurs des élèves afin d'intervenir. Comme les erreurs doivent être corrigées rapidement lors de leur apparition, Kathya veut se rapprocher de la compréhension des élèves et prévenir que ces erreurs affectent leur travail mathématique. Dans ses propos, Kathya explique peu ce que corriger l'erreur signifie pour elle, mais sa remarque sur les trucs en mathématiques suggère une approche par la « compréhension » : l'erreur vient de choses qui n'ont pas été comprises et qu'il s'agirait de les faire comprendre.

Les erreurs possibles empêchent les élèves d'exprimer leurs raisonnements. Kathya voit dans les erreurs des entraves à la progression de l'apprentissage des élèves, mais dont l'identification (et la

correction) permet d'avancer. En réaction à l'énoncé « ON APPREND DE NOS ERREURS » : LES ERREURS PERMETTENT AUX ÉLÈVES DE PROGRESSER EN MATHÉMATIQUES, elle affirme « Les réussites permettent de progresser. Voir et comprendre nos erreurs permettent de voir comment progresser ». Bien que les erreurs ne soient pas souhaitables, une fois présentes elles semblent permettre, pour Kathya, de voir comment s'améliorer. À ce compte, il devient nécessaire de dépasser les obstacles que sont ces erreurs pour se diriger vers la réussite. En nous disant « comment progresser », les erreurs ne font pas que bloquer ou ralentir le développement de compréhensions des élèves, mais elles pointent vers des éléments à travailler et à comprendre.

En même temps, pour Kathya, les élèves s'arrêtent souvent devant la possibilité de commettre des erreurs. Elle commente l'affirmation LES ÉLÈVES NE FONT PAS DES ERREURS VOLONTAIREMENT en disant « Souvent, ils préfèrent ne rien écrire que d'écrire quelque chose qui leur semble inexact ». Si les élèves ne sont pas certains de ce qu'ils doivent dire ou écrire, ils préfèrent ne pas s'exprimer pour éviter de se tromper ou de commettre des erreurs. Pour Kathya, les élèves perçoivent tout autant l'erreur comme étant quelque chose de négatif et à laquelle ils ne veulent pas être associés. Dans ce sens, ils préfèrent éviter d'avancer quelque chose pour ne pas commettre des erreurs.

Parallèlement à tout ça, Kathya accorde de l'importance au regard que les élèves portent à leurs propres compréhensions. Après avoir dit qu'elle encourageait parfois ses élèves à écrire quelque chose de faux, elle complète son explication en ajoutant « C'est là aussi qu'ils se rendent compte qu'ils en savent plus que ce qu'ils pensent ». Pour Kathya, les élèves sous-estiment souvent leurs propres connaissances en mathématiques. L'erreur devient alors aussi un indice révélateur des connaissances et des compréhensions des élèves pour eux-mêmes.

Les erreurs ne s'appliquent pas aux enseignants de mathématiques. Kathya dissocie par ailleurs les enseignants des erreurs en mathématiques. Lorsqu'elle est invitée à commenter l'affirmation LES ERREURS DES ÉLÈVES PEUVENT AMENER À RÉFLÉCHIR SUR CERTAINES DIMENSIONS ET CONTENUS MATHÉMATIQUES, elle dit « Si on est prof de math, c'est qu'à la base on ne faisait pas d'erreurs majeures ». Pour Kathya, les enseignants de mathématiques ne sont pas censés commettre des erreurs (majeures) en mathématiques. Dans sa formulation conditionnelle, par l'utilisation du « si », il est possible de voir l'absence d'erreurs majeures en mathématiques comme une condition à la profession enseignante. D'une certaine façon, les erreurs deviennent éloignées des compréhensions

des enseignants. Plus précisément, ces erreurs sont presque absentes de leur propre passé d'élève où l'enseignant « ne faisait pas » d'erreurs importantes. En complément à sa réponse, elle ajoute que « pour bien enseigner les mathématiques, il faut se mettre à la place d'un élève qui a des difficultés et essayé (*sic.*) de voir ce qu'il voit ». Un défi de l'enseignant de mathématiques consiste donc à comprendre la perspective de l'élève, et non seulement d'identifier l'erreur ou ce que l'élève n'a pas compris.

En résumé, pour Kathya, les erreurs sont non souhaitables en mathématiques et constituent des entraves à la progression des élèves en mathématiques. Celles-ci doivent être corrigées rapidement, à la suite de leur apparition. Les erreurs ont des effets négatifs pour l'élève (qui risque de s'éloigner de ce qui est visé) et sur l'enseignant (qui doit réagir et peut être en venir à concevoir négativement l'élève). Son rôle d'enseignante l'amène à identifier et à agir sans tarder sur les erreurs des élèves pour éviter que ces dernières affectent le travail subséquent de l'élève et son engagement en mathématiques. Ceci représente un défi pour l'enseignant, considérant que commettre des erreurs lui arrive peu et que les élèves sont peut-être peu enclins à prendre des risques dont les résultats sont néanmoins révélateurs. Aussi, il est à souligner que Kathya se montre sensible à l'influence négative que les erreurs peuvent avoir sur la perception des élèves d'eux-mêmes, tant leur confiance à effectuer un travail mathématique qu'à exprimer leurs compréhensions.

4.2.2 Analyse des propos de Kathya

Kathya croit que l'élève qui commet des erreurs comprend les mathématiques d'une façon différente de celle de l'enseignant. Ceci explique pourquoi ce dernier doit se mettre à la place de l'élève et tenter de « voir ce qu'il voit ». L'intention de Kathya de s'attarder à la compréhension des élèves semble par ailleurs s'expliquer par le désir d'assurer une bonne compréhension chez ces derniers. À ceci s'ajoute l'importance pour elle de régler rapidement les erreurs. En ce sens, les propos de Kathya s'alignent avec la vision de l'erreur *comme une incompréhension mathématique*, en lien avec les idées d'Ashlock (1972), lorsqu'il propose aux enseignants des stratégies pour éradiquer les erreurs des élèves. Pour Ashlock, l'enseignant doit cibler les erreurs des élèves, et les comprendre, afin de les classer selon le type d'erreur et de se servir des mesures prévues, à mettre en application pour éliminer ces erreurs.

De façon différente d'Ashlock toutefois, pour retracer les erreurs de ses élèves, Kathya les encourage à communiquer leurs compréhensions. Elle s'attend à y retrouver des corrections à faire et mise sur cette stratégie afin d'aider ses élèves à dépasser leurs erreurs et de cette façon les aider à progresser dans leurs apprentissages en mathématiques. Il est possible de faire des liens entre les propos de Kathya et la vision de l'erreur *comme une compréhension mathématique en construction*. Selon cette perspective, l'erreur est révélatrice de connaissances (celles que Kathya se donne comme défi de comprendre) et moteur d'apprentissage (la cause pour l'intervention de Kathya qui pointe vers l'apprentissage).

Finalement, il semble y avoir des défis importants soulevés par Kathya pour l'enseignant et l'erreur en mathématiques. D'une part, elle affirme que ses élèves préfèrent de ne pas s'exprimer pour éviter de commettre des erreurs, tandis que Kathya compte sur leurs manifestations afin d'assurer le développement de compréhensions appropriées. D'autre part, Kathya affirme comme enseignante commettre peu d'erreurs, et son défi devient celui de se mettre à la place de l'élève relativement à ces erreurs.

4.3 Clara: l'exploitation de l'erreur à travers les explications

Clara est enseignante de mathématiques en secondaire 5. Plusieurs de ses réponses comportent des affirmations générales sur l'erreur en mathématiques. Toutefois, elle commente plus en détail la phrase sur la place donnée à l'erreur en classe. À cet énoncé, Clara répond de façon plutôt personnelle (en offrant plusieurs exemples de sa pratique) et en mettant l'accent sur l'importance de s'occuper des erreurs des élèves.

4.3.1 Description des propos de Clara

Les propos de Clara permettent d'identifier trois thèmes en lien avec l'erreur en mathématiques. Elle parle de *la normalité des erreurs*, de *l'erreur comme une aide à l'apprentissage* et du *contexte dans lequel l'erreur se produit et son impact*. De façon transversale, la notion d'explication en lien avec les erreurs est soulevée à différents moments dans ses propos, tant les siennes que celles de ses élèves.

La normalité des erreurs. Tout au long de ses réponses, Clara laisse comprendre que pour elle les erreurs sont normales lorsque les élèves apprennent des mathématiques. À la phrase LES ERREURS SONT IMPORTANTES EN MATHÉMATIQUES, elle commence par répondre « Les erreurs font partie du processus d'apprentissage ». Il est donc habituel de voir des erreurs dans le travail de quelqu'un qui apprend des mathématiques. De plus, en réponse à l'énoncé LES ERREURS DES ÉLÈVES PEUVENT AMENER À RÉFLÉCHIR SUR CERTAINES DIMENSIONS ET CONTENUS MATHÉMATIQUES, elle dit « L'erreur est très positive dans le processus d'apprentissage et c'est la raison pour laquelle les devoirs sont si importants en mathématiques! » Bien que Clara ne développe pas par la suite sa mention des devoirs, sa réponse en lien avec l'affirmation proposée semble suggérer que des erreurs se produisent aussi dans les devoirs faits par les élèves. À la phrase LES ERREURS DE MES ÉLÈVES OCCUPENT UNE PLACE IMPORTANTE DANS MA CLASSE, elle répond « Lorsque je corrige une évaluation, j'annote chaque copie où j'explique le type d'erreur à l'élève à partir de sa démarche. Après une évaluation, il y a toujours une rétroaction avec le groupe sur les erreurs récurrentes! » Ainsi, Clara suggère que de faire des erreurs en cours d'apprentissage est normal, qu'elle s'attend à retrouver des erreurs dans les copies ou les devoirs des élèves, voire de trouver les mêmes erreurs dans les différentes copies (« les erreurs récurrentes »). Cette normalité des erreurs se reflète aussi dans son enseignement. Les erreurs des élèves sont au cœur du travail de Clara lorsqu'elle s'applique à les commenter et elle consacre systématiquement du temps de classe pour aborder des explications à propos de ces erreurs. Pour Clara, il est normal que les élèves commettent des erreurs lorsqu'ils travaillent en mathématiques, que ce soit en classe, en devoirs ou lors des évaluations, et qu'il est important d'organiser une partie de l'enseignement pour expliquer les erreurs des élèves.

Les erreurs comme aide à l'apprentissage. Clara affirme que les erreurs peuvent contribuer à faire comprendre des sujets mathématiques. À l'énoncé LES ERREURS SONT IMPORTANTES EN MATHÉMATIQUES, elle répond « Elles sont importantes car elles permettent de comprendre certaines notions en profondeur » et ajoute « L'erreur amène l'élève à faire des liens et à rectifier un raisonnement erroné ». Pour Clara, l'erreur est un point de départ qui donne la possibilité à l'élève de faire des associations entre ses compréhensions, d'effectuer des ajustements et de développer des compréhensions plus profondes. Clara complète sa réponse disant « L'erreur aide aussi à la rétention des apprentissages. Un élève qui comprend en profondeur est un élève qui retiendra! ». La compréhension en profondeur est ici associée à l'idée d'apprentissages qui perdurent chez l'élève. L'erreur joue un rôle important dans cette compréhension des élèves, en tant

qu'opportunité pour approfondir leur compréhension d'un sujet mathématique en rectifiant les raisonnements erronés et en permettant la rétention.

Tel que souligné plus haut, en lien avec la place de l'erreur dans sa classe, Clara affirme « Lorsque je corrige une évaluation, j'annote chaque copie où j'explique le type d'erreur à l'élève à partir de sa démarche. Après une évaluation, il y a toujours une rétroaction avec le groupe sur les erreurs récurrentes! ». Si l'erreur agit comme un déclencheur pour faire des liens, c'est surtout le fait d'être mis devant leurs erreurs qui semble permettre aux élèves de développer des « compréhensions en profondeur ». Clara montre alors à ses élèves leurs erreurs et ils lisent ou entendent des explications qui les amènent à faire des liens et parfois à rectifier leurs raisonnements. Pour Clara, les erreurs peuvent aider à l'apprentissage des élèves, ce qui semble se produire à la suite de ses explications et annotations.

Ce processus menant à des compréhensions plus profondes peut se faire à travers des discussions de groupe, qu'elle dirige dans sa classe. À la phrase LES ERREURS DE MES ÉLÈVES OCCUPENT UNE PLACE IMPORTANTE DANS MA CLASSE, Clara commente que « La gestion de l'erreur se fait souvent verbalement à travers l'enseignement et les devoirs. J'amène l'élève à expliquer son raisonnement, et s'il est erroné, on en discute en groupe ». L'erreur est une occasion saisie par Clara pour démarrer des discussions mathématiques avec ses élèves en les amenant à verbaliser leurs compréhensions. Elle ajoute « Ces discussions sont souvent assez riches car j'explique (ou un autre élève) la provenance de l'erreur, souvent lié à la confusion entre plusieurs notions ». La richesse des discussions mathématiques entre Clara et ses élèves est associée à l'étude de la cause de l'erreur. Considérant l'ensemble des réponses jusqu'ici, il est possible de dire qu'en étudiant les erreurs et leurs sources avec son groupe, Clara cherche à présenter elle-même (ou d'autres élèves) des explications qui permettraient aux élèves de comprendre en profondeur et de retenir (ce qui mènerait probablement à ne plus refaire ces erreurs).

Le contexte dans lequel l'erreur se produit et son impact. Ces idées sur l'erreur comme aide à l'apprentissage sont à considérer en regard du contexte dans lequel ces erreurs se produisent. Ce contexte pour Clara modifie la façon dont la progression des élèves peut être influencée. À l'énoncé « ON APPREND DE NOS ERREURS »: LES ERREURS PERMETTENT AUX ÉLÈVES DE PROGRESSER EN MATHÉMATIQUES, elle commente « En cours d'apprentissage, les erreurs permettent aux élèves de

progresser alors que dans l'évaluation, elles ont un côté plutôt négatif car elles sont peu valorisées et souvent trop pénalisées ». Elle trace ici une distinction entre les erreurs en cours d'apprentissage et celles relatives à l'évaluation. Pour Clara, la façon dont les erreurs sont perçues et traitées lors des évaluations a des conséquences sur l'effet que ces erreurs peuvent avoir dans l'avancement des élèves en mathématiques. Elle ajoute que les erreurs « peuvent même être source de frustration dans l'évaluation ». Cette allusion à la frustration des élèves illustre bien le « côté plutôt négatif » de l'erreur et en même temps suggère l'incidence d'un aspect émotif concernant les erreurs et l'apprentissage des élèves.

En réponse à l'énoncé LES ÉLÈVES NE FONT PAS DES ERREURS VOLONTAIREMENT, Clara dit « Puisque l'erreur est plus ou moins valorisée, je ne crois pas que les élèves la provoquent volontairement! ». Ses propos laissent sous-entendre que lorsque les élèves effectuent un travail mathématique, ils ne pensent pas commettre des erreurs. C'est *a posteriori*, une fois que Clara les a identifiées et à la suite des discussions et des explications offertes, que les erreurs sont conçues comme telles par les élèves. Ainsi, outre le contexte, il est possible de déduire que pour Clara ce n'est pas l'erreur en soi qui a des effets positifs sur l'apprentissage des élèves en mathématiques, mais plutôt le travail fait autour de l'erreur, les explications qu'elle ou les élèves donnent, les discussions en groupe sur leurs sources, etc. En ce sens, c'est l'exploitation de l'erreur qui permet aux élèves d'avancer en mathématiques.

De là, une autre distinction: les erreurs exploitées avec les élèves et les erreurs qui ne le sont pas. Les distinctions faites par Clara suggèrent que si les erreurs peuvent permettre aux élèves de progresser, elles ne sont pas garantes de progrès en elles-mêmes. En effet, cette exploitation des erreurs est facilitée ou encore limitée par des contraintes institutionnelles. En réponse à la phrase LES ERREURS DE MES ÉLÈVES OCCUPENT UNE PLACE IMPORTANTE DANS MA CLASSE, Clara affirme « Plus ou moins car je passe beaucoup de temps à enseigner de nouvelles notions et à essayer de respecter le calendrier des évaluations ». La dynamique de sa classe semble être conditionnée par des responsabilités associées à son rôle d'enseignante. D'une part, elle affirme que l'exploitation des erreurs favorise la compréhension en profondeur, où ceci provoque des discussions en classe autour de ces erreurs qui sont en retour très riches pour la compréhension de ses élèves. D'autre part, elle se reconnaît dans une routine d'enseignement encadrée par des contraintes de temps, qui peut avoir pour effet de limiter ces moments de discussions avec les élèves autour des erreurs. Il

est ainsi possible d'imaginer une tension entre la façon dont Clara utilise l'erreur pour favoriser le développement des compréhensions chez ses élèves et les contraintes liées à sa pratique, où elle semble se trouver coincée dans des exigences institutionnelles.

En résumé, pour Clara, il est normal de commettre des erreurs. En plus, ces erreurs peuvent être exploitées et expliquées pour aider à approfondir les compréhensions des élèves. À la suite d'un travail mathématique, si une erreur se manifeste, Clara intervient (en groupe ou individuellement) afin de retracer la cause de l'erreur et la rectifier, pour permettre aux élèves de faire des liens avec d'anciennes notions et approfondir leurs compréhensions. Les erreurs se trouvent donc dans le travail des élèves et Clara les saisit au bond pour les expliquer relativement aux concepts en jeu (un encore demande aux élèves d'expliquer). La situation est néanmoins différente si l'élève se trouve en contexte d'évaluation, où Clara se voit limitée au niveau des interventions possibles pour que l'erreur puisse aider l'élève à progresser en mathématiques, ce dernier devant en plus gérer les aspects émotifs et frustrants reliés à celle-ci. Finalement, le programme d'étude à respecter représente aussi, pour Clara, une contrainte limitant la place qu'elle réussit à donner aux erreurs dans sa classe, malgré l'importance explicite qu'elle affirme (devoir) attribuer à ces dernières dans l'apprentissage de ses élèves.

4.3.2 Analyse des propos de Clara

Dans les propos de Clara, il est possible de reconnaître une tension entre des aspects appartenant à différentes visions de l'erreur en mathématiques. Plus précisément, Clara souligne deux types d'erreurs: celles en cours d'apprentissage et celles en situation d'évaluation. D'une part, elle fait mention des erreurs en classe ou lors des devoirs qu'elle associe à des occasions pour progresser en mathématiques. Ce sont les erreurs en cours d'apprentissage. Clara saisit ces occasions et exploite les erreurs, provoquant ainsi des discussions avec ses élèves pour identifier la « provenance de l'erreur », faire des liens et amener les élèves, à travers des explications, à des compréhensions plus profondes. L'idée de retracer la provenance de l'erreur fait penser aux propos d'Ashlock (1972), lorsqu'il propose de comprendre les différents types d'erreur dans une perspective voulant les éliminer. En effet, il est possible de reconnaître dans les idées de Clara une intention d'éliminer les erreurs. Après l'erreur, il y a les explications qui sont suivies des compréhensions, lesquelles amènent à la rétention et donc à la disparition de l'erreur. Toutefois, à

la différence d'Ashlock qui présente les erreurs comme des ratés qui auraient pu être évitées, Clara parle des erreurs comme étant des indices d'apprentissages en cours. Elle laisse entendre que l'élève qui commet une erreur est en voie d'apprentissage et celle-ci sera bonifiée par l'écoute des explications données (par l'enseignant ou les élèves) et la création de liens entre les notions pour développer de nouvelles compréhensions. Les erreurs sont vues comme étant utiles au processus d'apprentissage de l'élève: si elles sont éliminées, elles sont alors remplacées par des « compréhensions plus profondes ». En ce sens, la vision de Clara sur l'erreur de l'élève présente des points en commun avec la vision de l'erreur *comme une compréhension mathématique en construction*. Concrètement, ces points en commun concernent la perspective positive de l'erreur, où cette dernière est normale. Clara s'attend à retrouver des erreurs dans les devoirs des élèves, car il est normal d'en commettre, mais elle ne s'arrête pas là. Elle encourage de plus ses élèves à faire leurs devoirs et veut se servir des erreurs commises dans ces derniers (surtout les récurrentes) pour avoir accès aux compréhensions des élèves et les aider à progresser. Clara associe les erreurs à des raisonnements qui s'expliquent, permettant des ajustements au niveau des compréhensions des élèves. Elle parle des erreurs qui amènent à tisser des liens entre les différentes notions, à la suite des explications offertes par les élèves et l'enseignante, discutées dans la classe. Autant les élèves que l'enseignante semblent jouer un rôle essentiel dans ce travail mathématique sur l'erreur. Cette vision, qui met aussi l'accent sur l'idée de retracer la provenance de l'erreur, se relie aux travaux du groupe de l'IREM d'Aquitaine (2013) sur l'organisation de la cause des erreurs où l'interaction entre l'enseignant, l'élève et les mathématiques est au cœur du travail sur l'erreur. En ce sens, les erreurs sont utiles au processus de développement de compréhensions chez les élèves.

D'autre part, il y a les erreurs lors des évaluations. Celles-ci sont vues par Clara de façon différente. Dans ce contexte d'évaluation, les erreurs sont d'abord corrigées. La possibilité d'exploiter ces erreurs est réduite à des commentaires écrits sur les copies d'élèves et à des rétroactions qui semblent perdre leur valeur à la suite du jugement de bien ou de mal vécu par les élèves à la suite des notes attribuées. Il est possible de reconnaître les propos rapportés par Bélanger (1990-1991), où les connaissances des élèves sont comparées à des savoirs universels et les erreurs conduisent au classement de la performance de l'élève. Ceci est du point de vue de l'élève et rejoint la vision de l'erreur *comme une incompréhension mathématique*. Lors des évaluations, les erreurs semblent

peu ou pas contribuer au processus de compréhension: elles ne représentent que des constats de ce qui aurait pu être fait différemment. L'apport de ces erreurs, non exploitées, est mince.

Cette idée de l'apport amoindri des erreurs dans ce contexte d'évaluation est mise encore plus en évidence lorsque Clara parle des limites l'empêchant de donner une place plus importante à l'erreur dans sa classe. Bien que Clara pense que les erreurs des élèves sont importantes et que dans certaines circonstances elles permettent aux élèves de progresser, il est possible de reconnaître une sorte de résignation dans ses propos quant à ses pratiques en classe vis-à-vis le temps nécessaire pour « finir » le programme (calendrier des évaluations, enseignement de nouvelles notions, etc.). L'importance de respecter le contenu du programme et les modalités d'évaluation, confrontée à la valeur attribuée à l'erreur de l'élève et à son potentiel lorsqu'exploité, témoigne d'une tension vive qui se manifeste dans les pratiques de Clara en classe. Son cas met en évidence un aspect de la réalité de l'enseignant qui semble se manifester ici sous forme de conflit entre sa vision de l'erreur et ce qui peut être fait dans sa classe malgré cette vision.

4.4 Julie: l'erreur et les caractéristiques de l'élève

Julie est une enseignante de mathématiques qui travaille dans des groupes multiniveaux, composés d'élèves ayant différents types de difficultés en lien avec l'apprentissage, au secondaire. Chaque élève reste dans sa classe temporairement, parfois pendant une brève partie de l'année. Ses réponses sont abondantes et plusieurs d'entre elles sont centrées sur ses actions en tant qu'enseignante vis-à-vis l'erreur de l'élève. Les propos de Julie traduisent une certaine inquiétude face à la réussite de ses élèves et un sentiment d'impuissance concernant ce qu'elle peut faire pour les aider.

4.4.1 Description des propos de Julie

Les propos de Julie peuvent être groupés autour de quatre thèmes saillants. Elle aborde *les erreurs selon les caractéristiques des élèves*, *l'erreur comme un problème à résoudre*, *les interventions de l'enseignant à la suite des erreurs des élèves* et *l'erreur qui caractérise l'élève*.

Les erreurs selon les caractéristiques des élèves. Julie explique que les erreurs de ses élèves en mathématiques témoignent d'un manque de connaissances de leur part. À l'affirmation LES ERREURS DE MES ÉLÈVES OCCUPENT UNE PLACE IMPORTANTE DANS MA CLASSE, elle dit « Au

secondaire, plusieurs de mes élèves ont de grosses lacunes en math » et elle ajoute « Rendu en secondaire 3, la base n'est pas là ou elle n'est pas solide ». Ainsi, Julie suggère que les erreurs sont conséquence d'apprentissages qui sont absents ou bien fragiles. Cette idée est aussi présente dans la réponse de Julie à l'énoncé LES ÉLÈVES NE FONT PAS D'ERREURS VOLONTAIREMENT. Elle affirme « Face à une situation, les élèves tentent le mieux possible de répondre ou de résoudre avec le meilleur de leurs connaissances ». Pour Julie, les élèves utilisent leurs connaissances, mais ces dernières sont insuffisantes. Ils commettent des erreurs et cela malgré leurs intentions de bien faire, soit de tenter de répondre aux questions ou de résoudre les problèmes.

Si pour Julie le manque de connaissances des élèves les conduit à commettre des erreurs, d'autres facteurs ont aussi une incidence sur les erreurs et l'apprentissage des élèves à la suite de ces erreurs. À la phrase « ON APPREND DE NOS ERREURS » : LES ERREURS PERMETTENT AUX ÉLÈVES DE PROGRESSER EN MATHÉMATIQUES, Julie dit « Pas toujours [...] Plusieurs causes viennent jouer dans "apprendre de ses erreurs" -La personnalité de l'élève -La gestion des émotions vs l'apprentissage -La disponibilité de l'élève (consommation, difficulté personnel, trouble diagnostiqué, santé mentale, etc) -Autonomie -Estime de soi (personnel ou envers la matière) -Niveau d'ouverture et de persévérance face à un obstacle etc. ». Un peu plus loin dans ces réponses, elle ajoute que « Ces facteurs influencent leur disponibilité lors de l'accomplissement de certaines tâches ». Ainsi, Julie soulève l'aspect de l'implication des élèves dans leur travail. L'erreur est en relation avec leur « disponibilité » pour apprendre. Cette énumération d'éléments exerçant une influence sur l'erreur de l'élève montre aussi que, pour Julie, l'erreur contribue à l'apprentissage selon certains facteurs qui sont propres à chaque élève. En somme, les erreurs dépendent de ce que les élèves peuvent faire avec leurs connaissances et l'apprentissage à partir de ces erreurs est relatif aux caractéristiques propres à chaque élève.

L'erreur comme un problème à résoudre. Aussi en réaction à l'énoncé « ON APPREND DE NOS ERREURS » : LES ERREURS PERMETTENT AUX ÉLÈVES DE PROGRESSER EN MATHÉMATIQUES, Julie ajoute « Il suffit de s'y attarder pour en prendre conscience afin de mieux y pallier la prochaine fois ». Ses propos suggèrent qu'en s'occupant des erreurs, il est possible de reconnaître ce qui fait défaut, d'en tenir compte et de compenser le manque de connaissances dans un travail ultérieur. La prise de conscience dont parle Julie fait penser à un retour en arrière pour examiner le travail fait, ce qui amènerait à commettre moins d'erreurs (« mieux y pallier la prochaine fois »). Julie ajoute

« Parfois, le type d'erreur sera récurrent puisque le nœud à défaire est trop grand et cristallisé dans la façon de faire de l'élève ». Ainsi, Julie explique que certaines erreurs se répètent, car elles sont ancrées chez les élèves, et tant qu'elles ne sont pas réglées elles y resteront. Même en ayant la possibilité de « s'y attarder », certaines erreurs sont tenaces et demeurent. En ce sens, les propos de Julie font penser à l'erreur non pas comme un événement passager, mais plutôt comme quelque chose qui s'installe et s'ancre chez l'élève et qu'il faut traiter.

Dans la réponse de Julie à la phrase LES ERREURS DE MES ÉLÈVES OCCUPENT UNE PLACE IMPORTANTE DANS MA CLASSE, il est possible de remarquer que les erreurs l'amènent à devoir s'adapter aux caractéristiques de chaque élève. Elle dit, par exemple, « Certains ont besoin de manipuler l'abstrait ou de le voir, d'autres ont un pauvre vocabulaire mathématique. Je dois m'adapter à chacun avec des exemples concrets pour mieux répondre au besoin de compréhension ». L'erreur représente un problème fréquent et présent pour Julie et elle s'adapte à chacun de ses élèves pour y trouver une solution.

Les interventions de l'enseignant à la suite des erreurs des élèves. Julie explique qu'elle veut aider ses élèves à comprendre leurs erreurs. En réponse à la phrase LES ERREURS DE MES ÉLÈVES OCCUPENT UNE PLACE IMPORTANTE DANS MA CLASSE, elle dit « oui, elles le sont si la question est de s'attarder au processus mental pour arriver à répondre à la question mathématique ». Elle veut retracer la démarche des élèves qui semble les conduire à une réponse erronée. Julie ajoute « Je m'attarde souvent à comprendre comment l'élève a procédé dans sa tête pour arriver à la réponse. Je veux savoir comment il a compris le problème. J'essai (sic.) de voir par quel chemin il passe pour mieux pouvoir lui expliquer son erreur afin qu'il comprenne ». Les réponses de Julie laissent voir une intention de sa part de comprendre et d'examiner les compréhensions des élèves dans le but de les aider à réparer leurs erreurs. Elle essaie d'interpréter les différentes démarches des élèves et d'élucider ce qui se passe dans leur « tête » pour leur expliquer ce qui ne fonctionne pas. Ainsi, en lien avec l'erreur, pour Julie une bonne part de l'enseignement exige de retracer les erreurs des élèves et de les corriger.

Le travail sur l'erreur pour Julie semble être davantage traité pour un élève à la fois. Lorsqu'elle explique ses actions en lien avec l'erreur de l'élève, elle utilise la troisième personne du singulier. Elle dit « comment l'élève a procédé dans sa tête », « comment il a compris le problème » ou « par

quel chemin il passe pour mieux pouvoir lui expliquer son erreur afin qu'il comprenne ». Aussi, lorsque Julie affirme qu'elle doit s'adapter « à chacun avec des exemples concrets pour mieux répondre au besoin de compréhension », elle suggère que les incompréhensions, variant d'un élève à un autre, doivent être prises en charge et que des explications nécessitent des interventions précises et individuelles. La composition de ses groupes « multi-niveaux » a assurément une influence avec cette forme d'intervention, et peut expliquer d'une certaine façon la préoccupation de Julie pour « répondre aux besoins de chaque élève ».

Julie laisse entendre, en même temps, qu'elle vit une certaine impuissance vis-à-vis les difficultés de ses élèves. Encore une fois en réaction à l'affirmation LES ERREURS DE MES ÉLÈVES OCCUPENT UNE PLACE IMPORTANTE DANS MA CLASSE, elle ajoute que « mes élèves ont de grosses lacunes en math puisque même s'ils avaient échoué la matière en secondaire 1 et/ou 2, ils avaient passé au prochain niveau puisque les autres matières de base étaient réussies (sic.) ». Elle considère que le système d'éducation permet aux élèves de passer d'un niveau à un autre sans qu'ils aient acquis les connaissances nécessaires pour aborder les cours ultérieurs. Elle fait de son mieux (ainsi que ses élèves) en s'intéressant et en s'adaptant aux caractéristiques de chaque élève, en analysant et en essayant de comprendre les raisonnements de chacun afin de les aider, et cela, sachant qu'elle fait face à un problème compliqué.

L'erreur qui caractérise l'élève. Si pour Julie les erreurs sont parfois ancrées chez les élèves, ces dernières semblent même en venir à caractériser ces mêmes élèves. À l'énoncé LES ÉLÈVES NE FONT PAS DES ERREURS VOLONTAIREMENT, Julie répond « Les plus construits se font confiance et tentent du mieux possible de compléter leurs numéros et s'investissent dans leurs apprentissages ». Ainsi, pour Julie, il est question de « tenter » et de faire « du mieux possible », ce qui laisse penser à des efforts des élèves qui ne conduisent pas en général à des résultats satisfaisants. Elle ajoute dans ce sens que ses élèves « sont intéressés à comprendre et cherche (sic.) parfois à se dépasser. Parfois, des erreurs mineures se glissent dans le processus mais tout y est ». Julie complète sa réponse affirmant « À la base, ils ont tous le désir de réussir, mais certains facteurs les amènent à faire n'importe quoi ou laisse le numéro vide pour éviter (sic.) d'être confronté à l'erreur, à l'échec...à eux-mêmes ». Julie dit que ses élèves peuvent éviter de s'engager dans le travail mathématique pour se tenir loin des erreurs. Elle laisse comprendre que l'erreur est inévitable dans le travail de ses élèves. Des erreurs, ses élèves en font tout le temps. Ils préfèrent ne rien faire plutôt que de commettre des

erreurs, surtout que ces dernières sont associées à des échecs. Que ce soit en parlant des élèves plus impliqués (« les plus construits ») ou de ceux qui sont affectés par plusieurs facteurs (les élèves « qui font n'importe quoi »), Julie met l'accent sur une caractéristique de ses élèves: ils commettent souvent des erreurs.

En résumé, Julie associe les erreurs de ses élèves à des manques de connaissances et aussi de motivation. Ses propos traduisent une certaine préoccupation envers ses élèves et leur contexte, une situation qui semble se caractériser par l'élève qui est en erreur et en échec. Julie est sensible à la réalité de chacun de ses élèves et les accompagne individuellement pour les aider à mieux comprendre. Elle voit les erreurs de ses élèves comme étant un problème compliqué, inévitable et à régler, sans qu'il soit toujours possible de le faire. En ce sens, elle souligne vivre une certaine impuissance lorsqu'elle explique que ses élèves font de leur mieux et qu'elle essaie de s'adapter et de régler leurs difficultés. Elle explique les limites de ce qu'elle peut accomplir face à la situation particulière des élèves dans ses groupes et par la façon dont le système d'éducation, pour elle, permet aux élèves de passer d'un niveau à un autre sans avoir les acquis nécessaires.

4.4.2 Analyse des propos de Julie

La vision de Julie sur l'erreur en mathématiques possède des points en commun avec la vision de l'erreur *comme une incompréhension mathématique*. Selon cette vision, l'erreur est un défaut de compréhension ou un manque de savoir mathématique chez l'élève. Dans le cas de Julie, il est possible de dire qu'elle manifeste une vision de l'erreur en tant que carence lorsqu'elle dit par exemple que ses élèves ont « des grosses lacunes » ou que « la base n'est pas là ». Dans la vision de l'erreur comme une incompréhension mathématique, les connaissances sont conçues comme des savoirs universels. De la même façon, lorsque Julie parle de bases absentes chez les élèves, elle laisse comprendre qu'un certain savoir préétabli est attendu et que les élèves devraient maîtriser ces savoirs au préalable (pour ne pas faire d'erreurs par la suite).

Les efforts de Julie pour comprendre la source des erreurs de chaque élève, dans le but de régler le problème (l'erreur), permettent d'associer sa vision de l'erreur aux propos d'Ashlock (1972) qui propose de retracer et d'éliminer l'erreur. Cette vision est aussi comparable à ce qu'explique Bélanger (1990-1991), sur les erreurs qui doivent être éliminées par la voie du diagnostic et de la correction. Il y a chez Julie une intention de libérer les élèves de leurs erreurs à travers ses

interventions (par exemple, lorsqu'elle dit s'occuper à « défaire des nœuds »). Si Julie se donne comme responsabilité de corriger ses élèves, elle donne surtout l'impression de vouloir compenser leur manque de connaissances (« mieux y pallier la prochaine fois »), dans une situation où l'erreur semble s'être installée chez l'élève, et où l'élève semble être coincé. L'erreur étant, selon elle, inévitable chez ses élèves, ces derniers s'abstiennent de s'engager dans l'apprentissage des mathématiques pour « éviter d'être confrontés à l'erreur ».

Kundu et Sengupta (2014) soulèvent que les erreurs peuvent empêcher les élèves de comprendre de nouveaux concepts. Dans ce même sens, le lien fait par Julie entre les erreurs de ses élèves et des aspects qui limitent ces derniers à progresser dans leurs apprentissages (les grosses lacunes, les nœuds, la non-disponibilité, le départ hâtif du cours, etc.) amène à penser qu'elle voit l'erreur comme une entrave à l'apprentissage, et cela même si elle affirme que « chaque type d'erreur permet de s'améliorer » à travers ses interventions. Si les élèves n'ont pas les bases, Julie attribue cette situation déficitaire au fonctionnement d'un système scolaire qui permet aux élèves de se rendre d'une année à l'autre sans avoir acquis les savoirs nécessaires pour éviter de commettre des erreurs. Ces erreurs deviennent reliées au système scolaire. Pour Julie, ce dernier place les élèves dans une situation compliquée et difficile à régler, et la place, elle comme enseignante, dans une situation d'impuissance.

4.5 Lise: l'utilisation de l'erreur pour éviter des erreurs futures

En comparaison aux autres participants, les réponses de Lise sont très synthétiques. Elle se montre en accord avec les cinq affirmations présentées, ajoutant quelques éléments explicatifs. Ces explications permettent de faire ressortir qu'à travers les erreurs, un lien se fait pour elle entre le passé et le futur. Plus précisément, Lise met l'accent sur la possibilité d'anticiper certains aspects du travail des élèves en se servant de leurs erreurs et de celles commises par leurs prédécesseurs dans sa classe.

4.5.1 Description des propos de Lise

Les propos de Lise tournent autour de trois thèmes. Elle parle de *l'erreur pour valider les actions mathématiques des élèves*, de *la correction de l'erreur* et de *la prévention de l'erreur future*.

L'erreur pour valider les actions mathématiques des élèves. À l'affirmation LES ERREURS SONT IMPORTANTES EN MATHÉMATIQUES, Lise commente « Oui pour savoir si les bons concepts sont utilisés et s'ils sont utilisés de la bonne façon ». Ces propos laissent entrevoir que, pour elle, un travail mathématique s'associe à des concepts précis (les bons) et à une façon de faire (la bonne façon). Lise affirme que les erreurs servent à différencier ce qui a été bien fait (utiliser les bons concepts de la bonne façon) de ce qui ne l'a pas été. L'erreur semble jouer le rôle d'un indicateur afin d'évaluer le travail de l'élève, le comparant à des notions et à des façons de faire reconnues comme étant les bonnes. D'une part, la présence d'erreurs souligne une mauvaise association de concepts en lien avec une situation mathématique à travailler ou une mauvaise application de ces concepts. D'autre part, l'absence d'erreurs amène implicitement à déduire que les bons concepts ont été utilisés tel qu'attendu. Cette idée des concepts qui sont vus par Lise d'un point de vue utilitaire est intéressante, car ceci distingue ses propos de ceux des autres participants. Julie et Kathya, par exemple, parlent des erreurs comme étant la conséquence d'une mauvaise conceptualisation. De son côté, Lise met surtout l'accent sur la mauvaise application de ces concepts et sur la façon dont l'élève se sert de ces mêmes concepts mathématiques.

Dans les propos de Lise, il est possible de voir des mentions reliées à l'idée d'une compréhension mathématique inadéquate ou partielle. À l'affirmation LES ERREURS DES ÉLÈVES PEUVENT AMENER À RÉFLÉCHIR SUR CERTAINES DIMENSIONS ET CONTENUS MATHÉMATIQUES, Lise dit « oui dans le sens où il peut être important de passer plus de temps sur des notions moins bien comprises donc ou (*sic.*) les élèves commettent beaucoup d'erreurs ». L'inférence qu'elle fait en utilisant la conjonction « donc » amène à dire que, pour elle, une moins bonne compréhension des notions conduit les élèves à faire des erreurs, voire beaucoup d'erreurs. Les mots utilisés par Lise lorsqu'elle dit « des notions moins bien comprises » font penser qu'il existe une gradation dans la compréhension des notions où les erreurs sont associées à des aspects incomplets de cette compréhension. Ces propos, combinés à l'idée précédente d'application de concepts, mènent à dire que pour Lise la compréhension mathématique est liée à la bonne façon de faire; et que des erreurs indiquent une incompréhension ou une mauvaise façon de faire. En somme, pour Lise, des erreurs se produisent lorsque des concepts ne sont pas complètement compris ou s'ils ne sont pas utilisés de façon adéquate, ou de façon différente des démarches attendues.

La correction de l'erreur. La validation des actions mathématiques des élèves mène Lise à réfléchir sur diverses façons d'agir auprès de ses élèves. Tel que souligné plus haut, Lise affirme qu'il « peut être important de passer plus de temps sur des notions moins bien comprises ». Lorsqu'une erreur survient, celle-ci peut conduire Lise à s'arrêter sur certaines notions et à travailler davantage avec ses élèves sur celles-ci (ce qui ne serait peut-être pas arrivé si ces erreurs n'étaient pas survenues). Même si les propos de Lise sont brefs et qu'ils ne nous permettent pas de connaître pleinement la nature du travail fait dans ce temps supplémentaire passé à travailler les notions « moins bien comprises », il est possible d'affirmer que les erreurs influencent l'enseignement de Lise, dans le sens où celles-ci motivent des ajustements dans son enseignement. Aussi, en commentaire à l'affirmation « ON APPREND DE NOS ERREURS »: LES ERREURS PERMETTENT AUX ÉLÈVES DE PROGRESSER EN MATHÉMATIQUES, Lise affirme « oui, en les commettant lors d'évaluations formatives l'élève voit lors de la correction comment il peut éviter ces erreurs lors d'évaluations futures ». Ces évaluations « formatives » sont ainsi des pratiques qui visent à éviter la réapparition des erreurs. Les élèves se servent des corrections effectuées, ces dernières pouvant être vécues comme étant des rétroactions pour ces élèves. Dans sa correction, Lise note les erreurs, ce qui peut ultimement conduire à des ajustements de la part de l'élève. Cette réponse de Lise en réaction à l'affirmation proposée laisse entendre que, pour elle, les erreurs permettent aux élèves d'apprendre; dans le sens où ces derniers ne commettraient plus ces erreurs dans le futur. Ce processus est marqué par la correction des erreurs lors d'évaluations diverses, ce qui conduit les élèves à voir ce qu'ils doivent éviter pour ainsi progresser. Les erreurs faites et corrigées sont de cette façon utilisées pour éviter des erreurs futures.

Dans cette intention d'éviter l'apparition d'erreurs futurs, les élèves jouent pour Lise un rôle essentiel. À l'affirmation LES ÉLÈVES NE FONT PAS DES ERREURS VOLONTAIREMENT, elle dit « Plutôt vrai! À moins de tricher... ». Selon elle, faire volontairement une erreur serait « tricher » au sens où ce serait enfreindre une règle implicite que les élèves doivent suivre, une sorte de clause du contrat didactique (Brousseau, 1989). Cette règle, cette clause, représente une forme d'obligation pour les élèves de faire de leur mieux, sans faire exprès de se tromper par malice. Alors, si un élève commet une erreur volontairement, c'est qu'il est mauvais joueur et qu'il triche. Ainsi, il est possible de dire que si Lise corrige les erreurs de ses élèves, elle s'attend à que ces derniers soient engagés de façon authentique dans leur travail mathématique.

La prévention de l'erreur future. Lise répond à la phrase LES ERREURS DE MES ÉLÈVES OCCUPENT UNE PLACE IMPORTANTE DANS MA CLASSE EN DISANT « Oui, elles me permettent de prévoir les erreurs de mes futurs élèves ». Pour elle, les erreurs de ses actuels élèves lui permettent d'être avertie, de connaître à l'avance les possibles erreurs de ses prochains élèves. Elle ajoute « Je peux ainsi mieux les prévenir en leur indiquant comment ne pas commettre une erreur en particulier (priorité des opérations, propriétés des fonctions, isolement de variable, ...) ». Si les erreurs ont aussi un rôle de prévention, elles ont surtout pour Lise un impact sur ses actions lors des prochains cours. Les erreurs sont ici un outil pour l'enseignement futur de Lise. Elle peut montrer aux élèves ce que d'autres élèves ont fait de façon inappropriée pour les mettre en garde, dans le but d'éviter celles-ci et de ne pas les commettre plus tard. Ainsi, les erreurs semblent constituer une « banque de cas » sur laquelle Lise peut se baser pour organiser son enseignement avec ses (futurs) élèves, pour les prévenir.

Bien que Lise ne donne pas d'exemples précis en lien avec les types d'erreurs nommés, celles-ci font référence à des règles (priorités des opérations), des définitions (propriétés des fonctions) ou d'algorithmes mathématiques (isolement de variables). Il est possible d'imaginer que si un de ses élèves effectue l'opération combinée $17+3\times 6$, additionnant en premier lieu 17 et 3 et multipliant en suite par 6 pour obtenir 120, ceci mènera Lise à insister auprès de ses prochains élèves sur cette erreur possible en leur expliquant qu'ils peuvent l'éviter en appliquant adéquatement les priorités des opérations (en faisant en premier lieu 3×6 , et ensuite $17+18$ pour obtenir 35). De cette façon, elle met en alerte ses élèves à propos de leurs possibles futures mauvaises applications d'une règle mathématique, pour leur permettre d'éviter ces erreurs et que ces notions soient « moins bien comprises ». Les propos de Lise concernant les types d'erreurs sont alignés avec ses affirmations sur l'erreur en tant que mauvaise utilisation ou application de concepts, qui dévie de ce qui est attendu. Ainsi, l'utilisation appropriée ou attendue permettrait d'éviter l'erreur.

Les erreurs permettent à Lise d'anticiper (la mettre en garde sur ce qui pourrait se produire de façon inappropriée dans le travail de ses élèves) et d'agir (mettre en garde ses élèves sur ce qu'ils pourraient faire d'inadéquat). Il est possible d'entrevoir à travers ses propos un lien entre des erreurs commises et des erreurs éventuelles, qu'elle veut voir évitées. Pour elle, les erreurs permettent de savoir ce qui est incompris, de prévoir les erreurs futures ou manques de compréhension, et d'ajuster son enseignement pour éviter qu'elles se (re)produisent.

En résumé, pour Lise, les erreurs en mathématiques offrent des informations importantes sur les mauvaises mobilisations des concepts mathématiques par celui ou celle qui les commet. Lise se sert de ces « renseignements » pour prévoir les erreurs futures de ses élèves. Les erreurs exercent une influence sur l'enseignement de Lise, qui les utilise pour prévenir ses élèves. Par la correction d'erreurs ou par la mise en garde d'éventuelles erreurs, elle montre à ses élèves des façons d'éviter ces dernières, de bien comprendre et bien utiliser les concepts. Pour Lise, les erreurs semblent faire partie d'un cycle potentiel où ces dernières pourraient se produire de moins en moins dans le futur. Elles sont corrigées et utilisées pour prévenir leur réapparition. Éviter la répétition des erreurs semble être un objectif pour elle, ce qui l'amène à recommencer le processus de prévention à partir des erreurs de ses élèves.

4.5.2 Analyse des propos de Lise

Dans ses propos, Lise met l'accent sur un aspect de l'erreur en mathématiques qui se retrouve au carrefour de deux des visions présentées au chapitre 2. Tel que soulevé, les visions de l'erreur *comme une incompréhension mathématique* et *comme une compréhension mathématique en construction* se joignent dans le type de regard posé sur l'erreur en tant que comparaison avec une norme externe. Si Bélanger (1990-1991) analyse des études où l'erreur est vue comme un indicateur de la déviance à une norme, Brousseau (2009) dans une perspective différente affirme qu'une erreur « est d'abord une déclaration "contradictoire" avec un certain contexte acceptés au préalable » (p.4). Ainsi, dans le cas de Lise, cette norme (implicite) ou ce contexte accepté au préalable se manifeste à plusieurs égards. Il ne s'agit pas seulement de comparer des concepts à de bons concepts, mais aussi de les utiliser à la bonne place et de la bonne façon; celle qui est attendue.

La perspective de prévention de l'erreur mise en avant par Lise permet aussi de faire des liens entre sa vision et les propos d'Ashlock (1972), qui propose aux enseignants des stratégies pour éviter que les élèves commettent des erreurs. La stratégie de Lise est d'avertir ses élèves des éventuelles erreurs, où ils pourraient les éviter en étant avertis des erreurs possibles et déjà commises par d'autres élèves. De cette façon, elle semble diriger ses élèves vers l'utilisation des bons concepts (et de la bonne façon) par élimination: à travers des exemples, Lise montre aux élèves ce qu'ils ne doivent pas faire. Toutefois, certains éléments permettent de dissocier la vision de Lise de celle d'Ashlock. Bien qu'elle « prévienne » ses élèves, les erreurs surviennent et agissent comme des

indicateurs de compréhensions partielles (« moins bien comprises »). Lise s'arrête ainsi sur certaines notions mathématiques et passe plus de temps avec ses élèves pour les travailler. Dans ce sens, les erreurs sont vues par Lise comme des outils de rétroaction, autant pour elle que pour ses élèves. Elle ajuste son enseignement à partir de ces erreurs, et en retour amène ses élèves, eux-aussi, à faire des ajustements dans leurs compréhensions. À travers ses idées, il est possible de parler d'une vision de l'erreur en tant qu'outil pour l'enseignant permettant aux élèves de progresser, ce qui rejoint davantage les idées d'Astolfi (1997).

Les propos de Kunda et Sengupta (2014) ont des points en commun avec certaines idées de Lise. Ces derniers soulèvent l'importance de diagnostiquer les erreurs afin d'agir pour réparer ce qui est jugé erroné. Pour sa part, Lise parle de se servir des erreurs pour prévoir les futures erreurs et de prendre les moyens (la prévention) pour que ces dernières ne se reproduisent plus. Les exemples d'erreurs présentés dans l'étude de Kunda et Sengupta s'apparentent à ceux nommés par Lise. Dans les deux cas, le travail en mathématiques est vu comme un travail où il y a utilisation de règles et de méthodes, et où les concepts sont associés à des procédures. Ces exemples s'associent particulièrement à des erreurs d'application qui engendrent une certaine continuité, à travers le temps. Des erreurs commises (dans le passé) influencent les interventions de l'enseignant (dans le présent) dans le but d'avoir un impact sur le travail des élèves (dans le futur).

Finalement, la vision de l'erreur de Lise se caractérise par un aspect cyclique. Les erreurs sont à éliminer, en elles-mêmes, et sont aussi des outils qui mènent à leur propre élimination. Dans ce processus, des éléments pouvant être associés à différentes visions de l'erreur de l'élève en mathématiques sont mis en avant, d'une part, car les erreurs indiquent une ratée (mauvaise application de concepts) et, d'autre part, car elles sont utiles et elles permettent de s'améliorer.

4.6 Oscar: l'erreur comme occasion d'ajustement

Tout comme Lise, Oscar offre des commentaires assez brefs sur chacune des affirmations proposées et avec lesquelles il se montre toujours en accord. Malgré le peu de mots d'Oscar, ses propos font sentir que, pour lui, les erreurs sont des occasions d'ajustement, autant pour les élèves que pour lui, qui permettent de continuer le travail à faire en mathématiques.

4.6.1 Description des propos d'Oscar

Les réponses d'Oscar peuvent être organisées autour de quatre thèmes. Ces quatre thèmes sont: *l'erreur donne lieu à de nouvelles explications*, *l'erreur amène à poursuivre un travail mathématique*, *l'erreur fait partie du processus habituel d'enseignement-apprentissage* et *l'erreur permet de réfléchir*.

L'erreur donne lieu à de nouvelles explications. À l'affirmation LES ERREURS DE MES ÉLÈVES OCCUPENT UNE PLACE IMPORTANTE DANS MA CLASSE, Oscar dit « Oui » et ajoute qu'elles sont « une occasion pour expliquer d'une autre façon ». Oscar voit dans les erreurs des opportunités d'offrir aux élèves des entrées différentes en lien avec la compréhension d'un sujet, soit des occasions pour varier le type d'explications données. En ce sens, les erreurs amènent Oscar à agir sur son enseignement, comme dans le cas de Lise qui voit aussi dans les erreurs une possibilité d'ajustement. Si, pour Lise, elles permettent de prévenir d'autres erreurs futures, pour Oscar, les erreurs sont plutôt des occasions de diversifier ses explications. Son enseignement semble être modulé par les erreurs des élèves qui apparaissent en cours de route.

Oscar ajoute que « Souvent, ces erreurs reviennent d'une année à l'autre ». Il y a donc une récurrence des erreurs, qui se produisent année après année dans le travail des élèves, et qui amènent Oscar à offrir des explications différentes. À travers ce processus d'erreurs qui se répètent et des explications qui s'ajustent, Oscar semble décrire une certaine routine d'enseignement dans laquelle il paraît à l'aise. Contrairement à Julie, il ne semble pas subir le poids des erreurs des élèves, mais semble plutôt les avoir intégrées à son enseignement (ce qui est aussi soulevé dans les sections suivantes). Il est à noter qu'Oscar parle encore ici d'explications, ceci étant sa manière de « répondre » à l'erreur. Il ne s'agit pas par exemple de faire débattre les élèves où de présenter des contradictions au cœur des erreurs commises, mais bien d'expliquer et de réexpliquer les concepts mathématiques en question.

L'erreur amène à poursuivre un travail mathématique. Pour Oscar, les erreurs motivent la suite du travail mathématique qui se fait en classe. À l'affirmation « ON APPREND DE NOS ERREURS »: LES ERREURS PERMETTENT AUX ÉLÈVES DE PROGRESSER EN MATHÉMATIQUES, il dit « Oui. Sous la forme de travaux complémentaires et de consolidation ». Pour Oscar, les erreurs peuvent montrer que les élèves ont besoin de faire plus de travail sur les notions mathématiques associées aux erreurs

commises. En d'autres mots, les erreurs informent Oscar sur les notions qui doivent être travaillées davantage par les élèves. Il est possible de comprendre que le travail qu'il propose alors aux élèves est « complémentaire », dans le sens où ce travail offre aux élèves l'opportunité de compléter quelque chose qui est actuellement incomplet et rendu visible à travers les erreurs. Ces erreurs provoquent le besoin de compléter le travail fait, et qui est erroné. Ce travail mathématique supplémentaire en est aussi un de « consolidation », dans le sens où il permet de rendre plus solide ce qui ne semble pas l'être à la suite de l'apparition de l'erreur. Les erreurs soulignent des aspects du travail des élèves qui requièrent une amélioration et provoquent en retour le besoin d'une poursuite d'activités mathématiques autour de ces mêmes aspects. Les propos d'Oscar amènent à penser que ce travail supplémentaire a pour but de rendre plus complètes et plus solides les notions mathématiques chez l'élève. Ces propos d'Oscar à l'affirmation sur la progression par les erreurs permettent de dire qu'il voit la consolidation des bases mathématiques comme une forme de progrès des élèves en mathématiques. C'est de cette façon, pour lui, qu'il est possible d'apprendre de nos erreurs.

L'erreur fait partie du processus habituel d'enseignement-apprentissage. À la phrase LES ÉLÈVES NE FONT PAS D'ERREURS VOLONTAIREMENT, Oscar dit « Non » et ajoute « les élèves bloquent souvent aux mêmes notions ou aux mêmes questions ». Il affirme ainsi que si les élèves bloquent, ils le font lorsqu'ils abordent les « mêmes notions » ou les « mêmes questions ». Pour Oscar, les erreurs s'associent davantage à des notions ou des questions qui sont plus difficiles et elles se reproduisent d'une façon qui peut être vue de façon indépendante des élèves ou de l'enseignement. Ainsi, l'ajustement d'Oscar dans son enseignement à la suite d'une erreur ne semble pas être centré particulièrement sur l'évitement de l'erreur, car celles-ci se produisent tout simplement, d'une année à l'autre, d'un groupe d'élèves à un autre. Elles sont en lien avec les mêmes concepts, et non avec les élèves, guidant en partie le travail de l'enseignant et celui des élèves. Les erreurs semblent représenter un aspect auquel Oscar s'attend dans le processus d'enseignement-apprentissage: une certaine récurrence d'erreurs, une certaine roue d'erreurs-explications qui se joue et avec laquelle Oscar compose. En quelque sorte inévitables, elles font partie de son quotidien année après année.

Oscar associe aussi les erreurs à des obstructions lorsqu'il dit que les « élèves bloquent » devant certaines notions. Ceci, combiné à ses propos sur les explications et les travaux supplémentaires, mène à dire que pour lui les erreurs arrêtent momentanément le travail des élèves. Et, alors,

l'intervention de l'enseignant (soit par de nouvelles explications ou la proposition d'autres travaux) a pour but d'aider l'élève à surmonter ces obstacles et à mieux comprendre les mathématiques en jeu.

L'erreur permet de réfléchir. À l'affirmation LES ERREURS SONT IMPORTANTES EN MATHÉMATIQUES, Oscar répond « Oui. Surtout des erreurs de compréhension en relation avec une situation problème ». De cette façon, il distingue différents types d'erreurs et attribue une importance particulière à celles qu'il associe à la compréhension d'une situation problème. Oscar affirme, en réaction à la phrase LES ERREURS DES ÉLÈVES PEUVENT AMENER À RÉFLÉCHIR SUR CERTAINES DIMENSIONS ET CONTENUS MATHÉMATIQUES, que les erreurs peuvent aider à la réflexion. Il dit « Surtout en CD1, en situation-problème afin d'aborder un nouveau chapitre ou un exercice synthèse ». Oscar affirme ici que les erreurs se produisant dans une démarche exigeant un travail de longue haleine (comme la résolution d'une situation problème) peuvent en retour provoquer le besoin de réflexions sur les notions à travailler (« afin d'aborder un nouveau chapitre »). Certaines erreurs, pour Oscar, semblent se produire lors de situations où les élèves doivent établir de liens entre différentes idées mathématiques. Il suggère ainsi que ce type d'erreurs arrive à motiver des réflexions envers certaines notions mathématiques, ce qui s'ajoute aux propos précédents où elles sont aussi des occasions d'expliquer de façon différente aux élèves. Si le processus de réflexion suggère une démarche personnelle, les propos d'Oscar peuvent toutefois être compris sous l'angle d'une action externe qui est exercée sur l'élève (ou la classe), tout comme le besoin de faire des travaux supplémentaires. C'est aussi ce jeu « interne-externe » qui caractérise la nature des réactions et interventions à réaliser à la suite des erreurs.

En résumé, pour Oscar, les erreurs font partie du paysage quotidien de l'enseignant et des élèves. Elles apparaissent dans le travail de ces derniers lorsqu'ils travaillent certaines notions, qu'ils répondent à certaines questions, mais aussi lorsqu'ils doivent établir des liens (lors des situations problèmes ou des exercices synthèses). Certaines erreurs récurrentes dans sa classe semblent toutefois détachées des élèves et associées à des contenus précis, qui sont constamment à travailler, d'une année à l'autre. Les erreurs sont vues par Oscar comme des indices d'incompréhensions ou des compréhensions partielles chez les élèves, l'amenant à varier ses explications et à proposer encore plus de travaux mathématiques à ces derniers en lien avec les notions pour lesquelles des erreurs ont été commises.

4.6.2 Analyse des propos d'Oscar

Certains aspects de la vision d'Oscar se rapprochent de la vision de l'erreur *comme une incompréhension mathématique*. Oscar voit dans les erreurs des occasions pour expliquer et faire travailler davantage les élèves pour mieux comprendre. Les ajustements à faire au niveau de la compréhension des élèves répondent à des façons de comprendre que l'enseignant tente de transmettre, à travers des explications variées et des travaux supplémentaires. Ces idées d'Oscar s'alignent à ce que Bélanger (1990-1991) décrit comme le savoir en tant que norme à laquelle il est souhaitable de se rapprocher. Dans le cas d'Oscar, la diversité d'explications et les travaux supplémentaires peuvent être compris comme des manières pour aider les élèves à comprendre ce qui doit être compris (la norme).

D'autres aspects dans les propos d'Oscar présentent des points s'apparentant à la vision de l'erreur *comme une compréhension mathématique en construction*. En effet, il est possible de reconnaître une intention implicite d'éliminer l'erreur, tout en acceptant qu'elle soit en même temps inévitable. Par exemple, autant l'IREM d'Aquitaine (2013) qu'Astolfi (1997) se placent dans une perspective où l'erreur est un signe de progrès. De plus, ces derniers ne présentent pas l'élimination de l'erreur comme étant l'objectif ultime, même s'il est possible de comprendre qu'une intention d'élimination de ces erreurs peut guider le travail de l'enseignant. Oscar n'énonce pas explicitement lui non plus cet objectif d'élimination. Toutefois, avec la reprise d'explications à la suite des erreurs, et l'attribution de travaux supplémentaires aux élèves lors d'erreurs (« travaux complémentaires et de consolidation »), Oscar apparaît motivé par un souci de faire disparaître ces mêmes erreurs par le développement de compréhensions adéquates chez les élèves. Il affirme aussi que les mêmes erreurs reviennent à travers les années et les élèves, le faisant se détacher d'une « pathologie » résidant chez l'élève, mais peut être une qui est au cœur du contenu mathématique lui-même, une sorte d'obstacle épistémologique pour Brousseau (1989).

La vision d'Oscar sur l'erreur en mathématiques est teintée par l'utilité qu'il attribue à l'erreur dans et pour son enseignement. Ses propos s'alignent avec ceux d'Astolfi (1997), lorsqu'il décrit l'erreur comme « un outil pour enseigner ». À la suite de l'erreur, Oscar diversifie ses explications pour arriver à faire comprendre les élèves. Ces erreurs agissent, pour Oscar, comme des occasions d'ajustement (pour lui et en retour pour les élèves). De la même façon qu'Astolfi propose d'utiliser

les erreurs pour enrichir l'enseignement, Oscar le fait en intégrant une diversification dans son enseignement et le travail fait en classe (explications et travaux supplémentaires).

Tout ceci n'est pas vécu comme une tension pour Oscar: la récurrence des erreurs chez les élèves et les adaptations nécessaires à celles-ci étant vues comme des constantes de son enseignement; et ne sont pas questionnées ni possiblement vues comme inefficaces au point de vouloir les éviter en amont. Selon la vision de l'erreur comme une compréhension mathématique en construction, les connaissances se bâtissent de façon continue, par le dépassement d'obstacles. Les erreurs étant des indices de la rencontre d'obstacles, elles témoignent que des compréhensions sont en train de se développer chez l'élève. Celles-ci sont vues comme des indices des choses à ajuster (par de nouvelles explications ou des travaux supplémentaires); ajustements qui semblent se faire en continuité avec le travail déjà entamé en classe et avec les élèves.

4.7 Synthèse des thématiques des propos des six enseignants

Le tableau suivant (Tableau 4.1) présente une synthèse des portraits des six enseignants participants, présentés dans les sections précédentes. Celui-ci récapitule les différents thèmes ayant émergé des propos de ces enseignants.

Tableau 4.1 Synthèse des thématiques issues des propos des enseignants

Enseignants	Thématiques issues des propos des enseignants
Henri : L'importance et l'utilité des erreurs en mathématiques	• L'erreur comme une façon d'apprendre en mathématiques • L'erreur comme une façon de faire des mathématiques • L'erreur comme un outil pour l'enseignement • L'erreur pour faire des liens entre différents concepts mathématiques
Kathya : L'erreur comme une entrave à la progression	• Les erreurs doivent être réglées rapidement • Les erreurs servent à l'enseignant pour comprendre les compréhensions des élèves • Les erreurs empêchent les élèves d'exprimer leurs raisonnements • Les erreurs ne s'appliquent pas aux enseignants de mathématiques
Clara : L'exploitation de l'erreur à travers les explications	• La normalité des erreurs • L'erreur comme une aide à l'apprentissage • Le contexte dans lequel l'erreur se produit et son impact
Julie : L'erreur et les caractéristiques de l'élève	• Les erreurs selon les caractéristiques des élèves • L'erreur comme un problème à résoudre • Les interventions de l'enseignant à la suite des erreurs des élèves • L'erreur qui caractérise l'élève

Enseignants	Thématiques issues des propos des enseignants
Lise : L'utilisation de l'erreur pour éviter des erreurs futures	• L'erreur pour valider les actions mathématiques des élèves • La correction de l'erreur • La prévention de l'erreur future
Oscar: L'erreur comme occasion d'ajustement	• L'erreur donne lieu à des nouvelles explications • L'erreur amène à poursuivre un travail mathématique • L'erreur fait partie du processus habituel d'enseignement-apprentissage • L'erreur permet de réfléchir

CHAPITRE 5

ANALYSES TRANSVERSALES

Ce projet de recherche investigate différentes visions de l'erreur en mathématiques chez des enseignants de mathématiques au secondaire et ce que leurs propos révèlent concernant la mobilisation de ces visions dans leur classe. Au chapitre précédent, une description des propos de six enseignants a été faite et une première analyse de leurs réponses a été effectuée, s'appuyant sur les quatre visions sur l'erreur présentées au chapitre 2. Dans ce chapitre 5, l'analyse est approfondie en étudiant de façon transversale les manières dont chacune de ces visions peut être reconnue dans les propos des enseignants. Ces analyses transversales présentées ici permettent d'approfondir le sens pouvant être donné à ces quatre visions et conduit, en retour, à une meilleure appréciation des façons dont des enseignants de mathématiques du secondaire peuvent comprendre l'erreur en mathématiques et leurs actions sur celle-ci.

Le tableau 5.1 synthétise les caractéristiques des quatre visions de l'erreur en mathématiques présentées au chapitre 2. Les sections suivantes explorent chacune de ces caractéristiques des quatre visions à travers les propos des enseignants.

Tableau 5.1 Récapitulatif des caractéristiques des quatre visions de l’erreur en mathématiques

Quatre visions sur l’erreur en mathématiques			
VISION 1 L’erreur comme une incompréhension mathématique	VISION 2 L’erreur comme une compréhension mathématique en construction	VISION 3 L’erreur comme une source d’investigation mathématique	VISION 4 L’erreur comme une production mathématique
L’erreur est vue comme un manque dans les compréhensions mathématiques	L’erreur est vue comme une compréhension mathématique en développement	L’erreur est vue comme une occasion à saisir pour faire des mathématiques	L’erreur est vue comme une réalisation mathématique à part entière
L’erreur est une défaillance à diagnostiquer et à rectifier	L’erreur est une manifestation d’un obstacle à surpasser	L’erreur est une opportunité pour contribuer au développement des mathématiques	L’erreur est la trace d’un travail mathématique valable
Cette vision est centrée sur l’importance d’éliminer les erreurs pour qu’elles ne se reproduisent plus	Cette vision est centrée sur l’importance de confronter les erreurs pour assurer une bonne construction des compréhensions mathématiques	Cette vision est centrée sur l’importance d’investiguer les erreurs selon différents cadres de référence en mathématiques	Cette vision est centrée sur le sens mathématique déployé et son rationnel sous-jacent

5.1 Vision 1: L’erreur comme une incompréhension mathématique

Les propos des enseignants font ressortir des éléments qui permettent de plus et de mieux parler de la vision de l’erreur comme une incompréhension mathématique. Il est possible de reconnaître dans leurs propos des caractéristiques décrites dans le tableau précédent, qui se manifestent de façons variées d’un enseignant à un autre, en lien avec leurs interventions en salle de classe.

5.1.1 Le manque de compréhension mathématique

Certains des enseignants affirment que l'erreur peut être une conséquence de notions mal comprises, de bases absentes ou de lacunes importantes. Dans cette vision, des carences ou compréhensions défectueuses de l'élève appellent à une intervention de l'enseignant afin de « faire comprendre » ces notions. Dans la classe, ces sont les élèves qui commettent des erreurs et l'enseignant est vigilant pour les repérer et pour intervenir afin que la cause des erreurs soit réparée, et que le manque soit comblé.

Le travail de l'enseignant. Selon ce que nous disent les enseignants, un point intéressant s'ajoute aux propos précédents: l'erreur dans cette vision vient influencer de près l'organisation de leur travail enseignant. Dans leurs réponses, les enseignants disent que les erreurs des élèves les engagent dans une tâche qui consiste à s'occuper constamment de celles-ci : il y a des choses à faire comprendre, des nœuds à défaire, et ils conçoivent des plans pour les éviter. Ceci est mis en évidence, par exemple, lorsque Julie dit : « J'essaie de voir par quel chemin il passe pour mieux pouvoir lui expliquer son erreur afin qu'il comprenne » ou lorsque Lise affirme que les erreurs lui permettent de prévoir les erreurs que ses élèves feront dans le futur. Ce type d'intervention se caractérise alors par une prise en charge de l'erreur par l'enseignant, qui semble même voir dans cette prise en charge une partie constitutive de son travail.

Cette vision de l'erreur comme une incompréhension mathématique offre des clés permettant de comprendre la place centrale du travail de l'enseignant autour de l'erreur de l'élève (le diagnostic, la rectification et l'élimination), tel que le propose Ashlock (1972). Les propos des enseignants ajoutent à cette idée en renvoyant la réflexion vers la place centrale de l'erreur dans leur propre travail (avec des objectifs de redressement). Si dans cette vision les erreurs des élèves sont constitutives du travail des enseignants (ils organisent leur travail en partie autour d'elles), il n'est pas étonnant que ceux-ci offrent des illustrations concrètes de façons dont l'erreur influence ce même travail enseignant. Mais, plus encore, leurs propos permettent de réfléchir aux finalités des interventions qu'ils disent déployer afin de repérer les erreurs et de corriger les incompréhensions des élèves.

5.1.2 La défaillance à diagnostiquer et à rectifier

L'intervention sur les erreurs. Les enseignants parlent de l'erreur comme d'un problème à régler. Le travail de l'enseignant consiste alors à s'assurer qu'une solution à ce problème (l'erreur) soit trouvée pour lever l'incompréhension. Cette idée de trouver une solution au problème de l'erreur peut être vue comme une façon de veiller à la compréhension des élèves. D'une part, l'enseignant envisage un certain contrôle de l'erreur dans le but de bien faire fonctionner la compréhension de l'élève, comme l'explique Julie en disant qu'elle doit s'« adapter à chacun avec des exemples concrets pour mieux répondre au besoin de compréhension » des élèves. L'enseignant veut aussi protéger l'élève des conséquences que l'erreur pourrait entraîner sur son estime de soi et sa confiance pour réussir en mathématiques, tel que le dit Kathy en lien avec son intervention pour éviter que l'élève perde « confiance en ses capacités ». D'autre part, cette surveillance de l'erreur peut être interprétée comme une façon de garantir la qualité de l'enseignement: l'enseignant explique et réexplique jusqu'à que les notions soient comprises, comme le dit Oscar. Ainsi, les enseignants affirment que l'erreur (en particulier le manque de compréhensions mathématiques) peut être vue comme un déclencheur d'actions chez eux, basées sur une disposition favorable face à la compréhension des élèves et par une intention de bien faire leur travail, qui conduisent à une réorganisation de ce même travail d'enseignant.

Ces façons dont les enseignants parlent de leurs interventions en lien avec l'erreur de l'élève offrent un regard complémentaire aux propos d'Ashlock (1972) qui présente une perspective plutôt mécanique de mise en application de solutions pour chaque type d'erreur par l'enseignant. Les enseignants manifestent dans leurs réponses des éléments qui mènent à voir cette recherche de « solutions au problème de l'erreur » comme une action plus complexe que l'application de méthodes préparées à l'avance. Leurs intentions de veiller sur les compréhensions des élèves et de donner un enseignement de qualité se mêlent à celles du diagnostic et de la réparation.

Les erreurs et la question du temps. Pour certains enseignants, il est important d'intervenir sur les erreurs rapidement pour atteindre une bonne compréhension. Il y a dans ces propos une idée associée au temps, qui joue un rôle par rapport à cette bonne compréhension. Avec Kathy, ne pas tarder à s'occuper de l'erreur est considéré en lien avec la motivation de l'élève et par le fait même avec son engagement face à la tâche mathématique. Pour Julie, cette question du temps est plutôt

associée au danger d'un ancrage de l'erreur chez l'élève (il peut se produire un « nœud trop grand et cristallisé »), qui peut mener ce dernier à répéter cette erreur et à l'éloigner encore plus d'une bonne compréhension. Dans les cas de ces deux enseignants, les actions qui règlent l'erreur se produisent *a posteriori*, à la suite d'un fait accompli: une erreur qui est apparue, reconnue par l'enseignant et pour laquelle il agit sans tarder. Pour d'autres enseignants, l'accent est plutôt mis sur l'*a priori*, sur la possibilité que les élèves commettent une erreur. Pour Lise, par exemple, prévoir les erreurs possibles des élèves fait partie de son enseignement: l'erreur n'est pas encore survenue qu'elle l'anticipe et pose des gestes pour éviter de devoir la rectifier plus tard.

Cette idée d'intervention rapide est alignée avec les propos de Kundu et Sengupta (2014) lorsqu'ils affirment :

The most effective method of eliminating errors is to address them immediately when observed. This is imperative, so students do not carry these errors any further and develop a better understanding of the subject. (p. 122).

L'intervention rapide est ainsi vue (autant en théorie que par les enseignants) comme nécessaire pour éviter des conséquences négatives pour l'élève en lien avec ses compréhensions en mathématiques (un peu de la même façon qu'une intervention médicale rapide peut permettre d'éviter la propagation d'une maladie). Cependant, l'aspect motivationnel joue ici un rôle supplémentaire chez les enseignants. Et, sur cet aspect, une distinction peut être faite en relation avec l'objectif des interventions. Si Kathya met en lien l'intervention rapide et « la confiance [de l'élève] en ses capacités » pour s'engager dans une tâche mathématique (une vision de la motivation surtout à long terme), les propos de Julie sont plutôt centrés sur les actions immédiates pour compenser les « [multiples] facteurs qui viennent influencer l'erreur⁵», permettant de garder l'élève dans l'activité (une motivation qui, à court terme, offre de solutions au problème de l'erreur). La dimension préventive liée à l'anticipation soulevée par les enseignants n'évoque pas ici un intérêt pour une recherche systématique d'erreurs qui seraient « persistantes » chez les élèves en général: il s'agit plutôt pour eux de prendre en considération leurs élèves et les erreurs que ceux-ci

⁵ Julie fait ici référence à « La personnalité de l'élève -La gestion des émotions vs l'apprentissage -La disponibilité de l'élève (consommation, difficulté personnel, trouble diagnostiqué, santé mentale, etc) -Autonomie -Estime de soi (personnel ou envers la matière) -Niveau d'ouverture et de persévérance face à un obstacle etc »

ont faites ou pourraient faire. Il n'est pas question d'un élève épistémique pour l'enseignant, ce dernier anticipe pour sa classe et pour ses élèves.

Les explications suite à l'erreur. Une façon d'agir face à l'erreur, nommée par les enseignants, est celle de fournir des explications supplémentaires pour rectifier les compréhensions. L'idée d'expliquer revient en effet souvent dans les réponses offertes par les enseignants. Par exemple, Julie veut expliquer à l'élève « son erreur afin qu'il comprenne ». Pour Oscar, « chaque erreur se répétant est une occasion pour expliquer d'une autre façon ». Clara parle quant à elle des explications données par elle-même ou par un autre élève lorsqu'une erreur survient et Lise dit plutôt qu'elle envisage d'expliquer comment ne pas commettre encore la même erreur. Ces différentes formes d'explications abordent à leur façon l'idée de « rectifier l'erreur » qui survient en classe. Julie prend en charge elle-même les explications et les associe à une adaptation de sa part aux besoins de chaque élève. D'autres enseignants, comme Clara, parlent d'une activité collective qui permet de faire participer l'ensemble du groupe : des élèves partagent leurs raisonnements erronés, des élèves qui expliquent à la classe la provenance d'erreurs.

Or, si pour certains enseignants les explications semblent un outil ponctuel qui amène l'élève à mieux comprendre les notions mathématiques et qui lui permet d'aider l'élève dans cette compréhension, pour d'autres enseignants ces explications liées à l'erreur semblent plutôt être de l'ordre d'un mode d'enseignement. De ce point de vue, les erreurs amènent l'enseignant à modifier ses explications jusqu'à ce qu'elles soient satisfaisantes (et que l'élève ne commette plus d'erreurs). Les enseignants pointent alors le rôle de premier plan que les explications jouent dans la production d'erreurs et la réparation des défaillances qui se manifestent en classe chez les élèves.

5.1.3 L'élimination des erreurs

Si la plupart des enseignants interrogés manifestent l'intention d'éliminer les erreurs qui surviennent, leurs façons de procéder à cette élimination sont variées. Il est possible de distinguer différentes intentions dans l'idée d'éliminer l'erreur.

Le redressement. L'idée de redresser les compréhensions de l'élève vise une intervention sur ces compréhensions, à la suite d'une erreur reconnue, dans le but de corriger ce qui est jugé inadéquat. Alors que Clara parle de rectifier un raisonnement erroné, Kathya dit qu'elle corrige les erreurs dès

qu'elles se manifestent. Oscar et Julie affirment quant à eux qu'ils expliquent de façon variée pour faire comprendre l'élève et Henri parle de corriger les perceptions erronées. Le redressement d'une compréhension implique de façon implicite l'élimination de l'erreur. Si la cause de l'erreur est une compréhension inadéquate, par cette compréhension modifiée l'erreur s'en veut idéalement effacée.

La non-reproduction de l'erreur. Lise mise sur l'apparition des erreurs lors des évaluations formatives afin de les prendre en exemple et de montrer aux élèves ce qui ne doit plus être fait. Elle veut « les prévenir en leur indiquant comment ne pas commettre une erreur en particulier ». Lise manifeste ainsi une intention d'éviter la reproduction de l'erreur dans le travail de ses élèves, visant à éliminer leur réapparition. Il est à remarquer cependant que cette enseignante met l'accent sur l'élimination des manifestations de l'erreur, plutôt que l'élimination de sa source⁶.

L'évitement de l'erreur. Une troisième intention de l'élimination de l'erreur est celle de l'évitement, où il s'agit d'éradiquer l'erreur, en s'organisant pour qu'elle n'apparaisse pas en situation d'enseignement. L'idée de protéger la classe de l'erreur est mise en évidence lorsque Lise nous parle de prévoir et de prévenir ses élèves (futurs). Si l'enseignant cherche à éviter que les élèves commettent des erreurs, ce sont aussi les élèves qui veulent éviter de mal faire (comme l'explique Kathya en disant que les élèves préfèrent « ne rien écrire que d'écrire quelque chose qui leur semble inexact »). Cette conception a une influence sur la vie de la classe à travers une démarche qui idéalise une forme de neutralisation des erreurs en classe. Il est possible de dire que, selon cette compréhension, où l'évitement de l'erreur est au premier plan, la classe idéale en devient une classe sans erreurs.

Les idées des enseignants sont alors alignées avec les propos d'Ashlock (1972) et de Kundu et Sengupta (2014) en ce qui concerne l'éradication des erreurs. Toutefois, il est possible de remarquer que les enseignants ne parlent pas de façon explicite de cet idéal (une classe aseptisée), mais ils ne parlent pas non plus de l'erreur comme quelque chose de souhaitable dans une classe de mathématiques. Leurs réponses sont plutôt centrées sur des actions à prendre afin d'assurer une

⁶ En ce sens, la cause de l'erreur pourrait ne pas disparaître, par exemple si des techniques sont montrées pour éviter l'erreur sans nécessairement se questionner à propos de l'origine de cette dernière.

intervention en lien avec les erreurs. La description de ces actions permet, en ce sens, de nuancer la compréhension de l'élimination de l'erreur.

5.1.4 Le bilan sur l'erreur comme une incompréhension mathématique

Les réponses des enseignants nous font remarquer que dans une vision de l'erreur comme une incompréhension mathématique, l'enseignant peut en venir à définir son travail à travers la relation qu'il entretient avec l'erreur. Pour certains enseignants, l'erreur est une entrave à leur enseignement. Pour d'autres, il est normal de devoir s'en occuper. Mais, dans tous ces cas, l'erreur façonne le travail de l'enseignant (de vigilance et d'intervention). L'enseignant joue un rôle central dans le travail des élèves sur la compréhension de notions mathématiques, se servant des explications comme moyen pour protéger les élèves des conséquences négatives des erreurs. Bien que l'élève ne soit pas passif, tel que l'affirme Borasi (1994), l'accent est mis sur l'enseignant qui diagnostique l'erreur et qui s'organise pour mener les élèves vers une situation où l'erreur n'est plus présente.

5.2 Vision 2: L'erreur comme une compréhension mathématique en construction

La vision de l'erreur comme une compréhension mathématique en construction telle que vue dans la première partie d'analyse se manifeste dans les propos de quelques-uns des enseignants. L'étude transversale de leur réponse permet de dégager certaines nuances autour de la notion de sens et d'obstacle en particulier.

5.2.1 Les compréhensions mathématiques en développement

Cette caractéristique de l'erreur comme une compréhension mathématique en construction fait référence aux erreurs comme indices d'apprentissages en cours. L'erreur est vue comme une composante du processus d'apprentissage, soit un signe de progrès. Aligné avec ces idées, Henri nous dit que les erreurs sont des indices de ce qui est en train de se passer dans la construction de compréhensions mathématiques de celui qui les fait. Il affirme qu'il se sert des erreurs pour « démontrer qu'elles ne sont pas toujours vides de sens ». Il est alors possible de faire une distinction entre le sens donné à l'erreur par l'élève et celui donné par l'enseignant.

L'erreur comme travail mathématique. Du côté de l'élève, l'erreur suit le cours de ses compréhensions pendant qu'il est engagé dans un travail mathématique. L'erreur a pour lui le sens

de ses propres compréhensions et ce même sens fait que l'élève ne la reconnaît pas comme une erreur. Cette idée est présente dans les propos de Clara lorsqu'elle affirme que les élèves ne provoquent pas leurs erreurs eux-mêmes ou dans ceux d'Henri lorsqu'il dit qu'il y a une logique cachée derrière le travail des élèves. Du côté de l'enseignant, l'erreur de l'élève provoque des actions de repérage (les erreurs *ne sont pas toujours* vides de sens), de compréhension (le sens que l'enseignant donne à ces erreurs) et de communication (pour *démontrer* que ces erreurs ont un sens). Les idées d'Astolfi (1997) sont ainsi reconnues dans les propos des enseignants lorsqu'ils soulèvent l'importance de retrouver les sens dont l'erreur est la trace. Plus précisément, le sens donné à l'erreur par les enseignants témoigne d'un travail mathématique qui se produit chez l'élève et qui pousse l'enseignant à s'engager lui-même dans un travail (mathématique) de repérage, de compréhension et de communication.

L'erreur comme occasion de faire des liens. Astolfi (1997) suggère que les erreurs représentent la face visible du progrès qui se produit dans le développement de compréhensions. Les propos des enseignants nous aident à mieux apprécier les façons dont les erreurs peuvent jouer un rôle dans ce développement de compréhensions. Plus précisément, Clara affirme que l'erreur peut permettre, ou représente une occasion, de faire des liens (supplémentaires) avec d'autres contenus, et Henri parle des compréhensions mathématiques comme « un tout à développer tissant des liens entre les différentes notions ».

De cette façon, ils parlent de l'erreur comme étant un élément clé pour le maillage entre différents concepts et permettant par le fait même l'évolution des compréhensions mathématiques chez l'élève. Pour d'autres enseignants, comme Julie, l'erreur peut mener à faire un retour sur des notions déjà vues. Une distinction existe alors entre la ramification de concepts, où l'erreur est à l'origine des relations possibles entre ceux-ci, versus une démarche rétrospective, où l'erreur agit plutôt comme un déclencheur d'un processus de révision et conduit à revisiter des concepts mathématiques déjà travaillés.

Les propos des enseignants permettent aussi de souligner des différences entre l'idée de « développement de compréhensions mathématiques » et celle de « faire comprendre des mathématiques » soulevées à la section 5.1. Si la première peut être associée à la construction d'un sens par l'élève qui se fait, entre autres, à travers le maillage entre plusieurs notions, la deuxième

semble plus alignée avec une idée de provoquer des compréhensions (par exemple, par des explications supplémentaires). Cette idée rejoint les propos d'Astolfi (1997) qui affirme que: « les modes de traitement de l'erreur sont révélateurs du type de rapport que les enseignants entretiennent eux-mêmes avec les savoirs qu'ils professent » (p. 102). Si, tel qu'affirmé par Henri, « les mathématiques ne doivent pas être enseignées de façon linéaire et cloisonnée » et qu'il s'agit de développer « énormément de liens entre les notions », il est alors possible de dire que les réponses des enseignants révèlent une conception des mathématiques⁷, associée à la deuxième vision de l'erreur, comme un réseau complexe d'idées en contraste à des mathématiques vues comme un seul morceau compact.

5.2.2 Les obstacles à dépasser

Dans la deuxième vision de l'erreur comme une compréhension mathématique en construction, cette construction de compréhensions se fait par le dépassement d'obstacles⁸, et les erreurs sont des manifestations de la rencontre de ces derniers. Pour certains enseignants, le dépassement d'obstacles peut être associé à un retour sur des notions antérieures, et, pour d'autres, c'est par une démarche d'essais-erreurs que se réalise ce dépassement. Par exemple, Henri affirme que « c'est en essayant et en se trompant surtout qu'on peut ensuite corriger nos perceptions et "apprendre" ». Pour d'autres, comme Clara, les erreurs « permettent de comprendre certaines notions en profondeur ». Ceci fait considérer les erreurs comme des éléments clés lors du passage d'un niveau de compréhension à un autre.

Les erreurs, vues comme des obstacles à dépasser, suscitent l'intérêt et l'attention des enseignants. Ces derniers veulent les comprendre. Henri affirme, dans ce sens, qu'avec ses élèves il étudie « le comment et le pourquoi » des erreurs. En même temps, il est guidé par un objectif de redressement des compréhensions erronées lorsqu'il explique que cette démarche amène à la correction de perceptions. Ceci concorde avec les remarques faites par Borasi (1994) à propos d'une vision de l'erreur centrée sur la compréhension mathématique de l'élève: « the scope of analyzing errors is

⁷ Le mot « mathématiques » fait ici référence autant à la discipline qu'aux construits des élèves en lien avec la discipline.

⁸ Le mot « obstacle » est ici utilisé dans le sens de Bachelard (1938), où, au lieu de représenter un empêchement, il est compris comme une connaissance qui ne s'adapte pas à un certain contexte.

still dominated by a concern for diagnosing learning difficulties and suggesting strategies to remediate or avoid them in mathematics instruction [...] » (p. 171). Ainsi, l'étude de l'erreur vise le dépassement d'obstacles dans le but d'améliorer les compréhensions mathématiques de l'élève.

5.2.3 La confrontation de l'erreur

Alignées avec les propos précédents, les réponses des enseignants montrent que l'idée d'obstacle fait aussi référence à celle d'une certaine confrontation nécessaire à son dépassement à la manière du groupe de l'IREM d'Aquitaine (2013) qui soulève que « le franchissement d'un obstacle exige un traitement spécifique » (p. 8). Il s'agit pour ces auteurs de la présentation de situations mathématiques qui amènent à rendre l'obstacle inopérant⁹, poussant de cette façon vers la reconstruction des compréhensions mathématiques. Clara dit qu'elle « amène l'élève à expliquer son raisonnement, et s'il est erroné, on en discute en groupe ». Kathya affirme quant à elle que lorsque les élèves « ... ne savent pas quoi faire, je leur demande d'écrire quelque chose de faux ». Et, Henri explique que: « Aucune réponse n'est écartée lorsqu'on en discute en grand groupe ». Ces réponses font penser à un traitement de l'erreur basé sur sa confrontation et sur la discussion de différentes idées, contrairement au traitement soulevé à la section 5.1 en lien avec les explications. Ici, la confrontation de l'erreur conduit l'élève à une sorte de « conflit » dans ses compréhensions, utilisée comme moyen pour dépasser cette erreur et pour le fait même cet obstacle. Le caractère *public* de ces confrontations dans certains propos est aussi à souligner. Il ne s'agit pas simplement d'un élève confronté à son erreur et qui apprend de celle-ci, mais d'une situation où des raisonnements ou des affirmations erronés sont publiquement examinés. Il y a ici une dimension collective associée au dépassement de l'obstacle.

L'erreur « de » et « pour » la classe. Les enseignants expliquent qu'ils promeuvent le partage des raisonnements erronés dans la classe. Ceci est ressenti dans les réponses d'Henri, qui utilise souvent les pronoms « on » et « nous » pour parler de la dynamique au tour des erreurs en classe (« on discute en grand groupe », « on "réfléchis" (sic.) sur le comment et le pourquoi », « nous dévions très souvent vers d'autres notions », « nous amène en dehors du plan de cours »). Il affirme aussi qu'il essaie « le plus souvent possible de faire parler » les élèves de leurs démarches. Pour sa part,

⁹ Un obstacle étant compris comme une ancienne connaissance, rendre inopérant l'obstacle signifie de confronter cette connaissance aux limites de celle-ci dans un nouveau contexte.

Clara explique que les raisonnements erronés des élèves génèrent des discussions dans la classe. Les erreurs proviennent alors de la classe et sont exploitées pour la classe. C'est donc moins en tant que défi personnel que l'erreur est ici abordée, mais plutôt dans son potentiel pour l'ensemble des élèves.

Toutefois, ces enseignants ne parlent pas de provoquer l'erreur comme le propose le groupe de l'IREM d'Aquitaine (2013) : « pour que l'enseignant puisse prendre en compte les erreurs et les traiter, il faut que les élèves soient mis en situation de les produire » (p. 8). Les enseignants voient plutôt l'erreur comme quelque chose qui apparaît, qui est à repérer et qui peut être utilisé ou mis à profit pour leur enseignement à travers la confrontation, sans pour autant la provoquer. En d'autres mots, l'erreur vient de l'élève, elle est sa production et l'enseignant la saisit lors de sa manifestation; il n'est pas pour eux question de la provoquer. Il est possible d'imaginer l'enseignant dans un rôle attentif vis-à-vis l'erreur: il l'attend et s'en sert une fois qu'elle se présente. Et si, tel que pour la vision 1, l'enseignant est en charge de repérer l'erreur, ici son intention est de la retourner vers l'élève pour lui permettre de la dépasser.

5.2.4 Le bilan sur l'erreur comme une compréhension en construction

Les propos des enseignants nous permettent de tracer des différences importantes entre la vision 1 et la vision 2 l'erreur en mathématiques. Si dans la première vision l'accent est mis sur l'enseignant et sur ses actions face à l'erreur de l'élève, dans la deuxième il est possible de voir une sorte de partenariat, une responsabilité partagée, entre élèves et enseignant. L'enseignant et l'élève se retrouvent tous deux devant une situation qu'ils ne peuvent pas (et ne veulent pas) ignorer. Ils sont pris de manière inévitable avec l'erreur commise, et travaillent sur elle, ensemble. Arriver à développer une compréhension « en profondeur », par exemple, nécessite de faire un cheminement où l'élève et l'enseignant jouent chacun des rôles complémentaires (les repérer, et guider une discussion pour l'enseignant, expliquer son raisonnement et s'impliquer dans une discussion pour l'élève). Si l'enseignant ajuste son enseignement, l'élève s'ajuste lui aussi. Si l'erreur provoque des ajustements au niveau des compréhensions de l'élève, l'enseignement suit en retour tout autant ces ajustements. Une deuxième distinction entre les deux premières visions de l'erreur concerne l'aspect personnel dans la première en contraste à l'aspect collectif et public dans la deuxième.

Dans la vision 1, l'erreur caractérise les personnes et la pratique des enseignants est centrée sur l'individu. Dans la vision 2, la classe est davantage l'objectif d'intervention.

5.3 Vision 3: L'erreur comme une source d'investigation mathématique

Cette vision de l'erreur en mathématiques se décrit en mettant l'accent sur le potentiel mathématique des erreurs et sur leur exploitation. Les propos des enseignants manifestent peu d'éléments en lien avec cette vision, mais certaines réponses permettent tout de même d'aborder chacune des caractéristiques de cette dernière.

5.3.1 Une occasion à saisir pour faire des mathématiques

Henri dit qu'il utilise les erreurs pour expliquer la matière d'une autre façon, que « cela nous amène "en dehors" du plan de cours », que « nous dévions très souvent vers d'autres notions déjà vues ou non », et que les élèves et lui réfléchissent sur « le comment et le pourquoi ». Selon lui, les erreurs sont alors vues comme des opportunités pour faire plus de mathématiques que celles qui auraient pu être faites s'il s'en tenait strictement à son plan de cours. Ainsi, par ses propos concernant les détours vers d'autres notions à la suite d'une erreur, Henri montre qu'il voit l'erreur comme une opportunité pour faire d'autres mathématiques avec sa classe.

Un regard vers l'avant. Pour certains enseignants, les erreurs peuvent représenter des occasions pour travailler avec les élèves des nouvelles façons de penser en mathématiques. Clara affirme que « L'erreur peut amener l'élève à poser de nouveaux raisonnements et à faire des liens avec d'autres contenus ». Cependant, bien que dans sa classe les discussions avec ses élèves autour des erreurs amènent ces derniers à faire des mathématiques, il n'est pas ici question d'explorations, mais plutôt de rectification (tel qu'elle le rend explicite dans ces propos). Et si les erreurs représentent des occasions pour avancer en mathématiques, c'est surtout la compréhension des élèves qui est visée dans cet avancement lorsque cette compréhension se rend à des niveaux qu'elle nomme plus profonds. Tel que vu précédemment, Julie, Lise ou Kathya expriment devant les erreurs une intention marquée de s'en occuper, car elles causent un problème. Elles le font en essayant de comprendre le type d'erreur commise par l'élève pour ensuite donner des explications supplémentaires ou mettre en garde les élèves. Dans la vision de l'erreur comme une source

d'investigation mathématique, l'erreur conserve un aspect problématique, elle conduit à se poser des questions supplémentaires. Elle est d'abord reconnue en tant qu'erreur (une anomalie, quelque chose qui ne va pas) avant d'être exploitée.

Les propos précédents permettent de voir les erreurs comme des outils pour faire apparaître dans l'activité de la classe des nouvelles idées et façons de faire. Plus précisément, ceux en relation avec de *liens* faits à partir des erreurs avec des aspects non abordés jusqu'à ce moment dans la classe (ou pas abordés de la même façon). L'idée de « voir autrement » se rattache du point de vue des nouveautés mathématiques aux réflexions sur « le comment et le pourquoi » des erreurs dont parle Henri. Ces réflexions nommées par Henri font penser aux idées de Lakatos (1976) pour qui une analyse critique d'affirmations erronées permet de peaufiner une idée mathématique. Les réponses des enseignants s'approchent alors d'une vision de l'erreur comme élément d'avancement des idées mathématiques à l'échelle de la classe.

Suivant ces dernières considérations, cette troisième vision de l'erreur se distingue des deux visions précédentes où les erreurs concernent fondamentalement l'élève (ou la classe) et ses compréhensions, et sont vues et utilisées pour « revenir en arrière » sur ce qui fait défaut dans les compréhensions des élèves (ce qui n'a pas fonctionné, qui devrait être rectifié, amélioré, ajusté, ou bien confronté). Dans la vision 3, les erreurs sont plutôt vues en lien avec l'activité mathématique. Bien que le « retour en arrière » ne soit pas totalement exclu (la réflexion des pourquoi d'Henri), ce retour est vu comme une avancée qui mène à préciser, ajuster ou bien développer des idées mathématiques de façon nouvelle, soit un regard orienté vers l'avant.

5.3.2 L'exploration de l'erreur pour contribuer au développement des mathématiques

Des possibles conflits. Henri met en valeur les mathématiques en tant que discipline qui se développe à coup d'erreurs. Il fait un parallèle entre le développement de la discipline mathématique et le travail des élèves en mathématiques. Ainsi, il va dans le même sens que Borasi (1994) lorsqu'elle souligne d'une part que dans l'histoire des mathématiques, les mathématiciens se sont souvent servi des erreurs pour faire avancer la discipline, et d'autre part, que les élèves pourraient aussi tirer profit de ces dernières par une démarche d'exploration. Lorsqu'Henri propose à ses élèves de faire des essais, qu'il tient compte de toutes leurs propositions, et qu'il les guide

pour réfléchir au « comment et pourquoi » des résultats, il manifeste une compréhension de l'activité mathématique comme quelque chose d'exploratoire qui avance à travers des possibles conflits (ce qui est essayé et qui parfois ne marche pas). De cette façon, Henri voit dans l'erreur un potentiel pour faire une exploration qui permet de déborder du plan de cours et aussi permettre à sa classe d'enrichir les idées mathématiques ou d'avancer sur d'autres.

5.3.3 L'investigation des erreurs selon différents cadres de référence

La valeur des incertitudes. Si les savoirs mathématiques se bâtissent par des essais successifs et des ajustements, alors ils peuvent comporter des failles et selon Borasi (1994) l'investigation d'erreurs peut éventuellement pointer vers ces failles. La théorie soulève aussi l'idée de la relativité de l'erreur, selon laquelle, « l'erreur en mathématique est relative à [des] cadres de références rendus légitimes par certaines cultures mathématiques, qui prennent forme à travers un observateur donnant (ou non) le statut d'erreur à un résultat mathématique » (Mégrouèche, 2020, p. 46).

Or, la démarche d'essais et erreurs promu par Henri et les réflexions qu'il propose à ses élèves autour de *chacune* de leurs réponses (« aucune réponse n'est écartée lorsque l'on discute en grand groupe ») font penser à une vision où le doute est reconnu comme faisant partie du travail en mathématiques, ce qui mène à considérer l'incertitude des notions mathématiques. Ceci se différencie des propos d'autres enseignants qui, en parlant de « bons concepts » ou de « solidifier les bases » des élèves, révèlent une vision où les mathématiques constituent un corps stable constitué de notions déjà finies et inamovibles. Si, pour ces derniers, le travail de l'enseignant consiste à rapprocher les élèves des mathématiques déjà faites, ici l'enseignant encourage la discussion autour des notions mathématiques en questionnant certaines d'entre-elles.

L'idée d'incertitude prend de la force lorsqu'elle est analysée en lien avec celle de la relativité de l'erreur. Bien que les enseignants ne parlent pas de ceci de façon explicite, ils manifestent des idées à propos d'une certaine relativité dans la façon d'aborder les erreurs. C'est le cas de Clara lorsqu'elle explique que les erreurs « en cours d'apprentissage » et « en évaluation » ne sont pas considérées de la même façon. Elle pointe ainsi vers des distinctions possibles à faire dans les types d'erreurs selon les moments de la classe et dans les actions qui suivent la reconnaissance de l'erreur (lorsqu'elle est « plus ou moins valorisée »). De son côté, Henri affirme que derrière les erreurs

« se cache » une certaine logique. Selon lui, la logique qui peut être associée à certaines idées mathématiques semble expliquer les erreurs, faisant ainsi penser à ces dernières comme relatives à la logique qui les soutient.

Bien que cette relativité de l'erreur rencontre ses limites dans les réponses des enseignants (lorsqu'ils parlent de corriger de perceptions par exemple), ces derniers manifestent des idées qui font penser que les erreurs en mathématiques peuvent être considérées selon un certain contexte (celui dans lequel l'activité se déroule), ou selon un certain cadre (celui où une logique fonctionne, donc un autre domaine de validité). Les propos des enseignants joignent ceux présentés par Mégrouèche (2020) lorsqu'elle explique qu'une réalisation mathématique jugée erronée dans une certaine situation pourrait ne pas avoir ce statut dans une situation différente (et vice versa). Les mêmes propos des enseignants se distinguent de ces idées théoriques qui avancent que les réalisations mathématiques erronées pourraient devenir l'occasion d'imaginer ou d'inventer d'autres contextes.

5.3.4 Le bilan sur l'erreur comme une source d'investigation mathématique

Dans cette troisième vision de l'erreur, un aspect commun aux deux visions précédentes concerne la reconnaissance de l'erreur, c'est-à-dire l'action de donner à un travail mathématique le statut d'erreur (relative ou pas). Mais à la différence des deux premières visions où cette reconnaissance passe par la comparaison à une production attendue (dans le sens donné par Adihou, 2011) vers laquelle les élèves devraient aller, ici l'erreur est placée à l'origine d'une investigation. Au lieu d'être un point d'arrivée insatisfaisant, c'est un point de départ ou un « tremplin » (pour reprendre l'expression connue de Borasi) pour faire des investigations. Cette vision se distingue alors des visions 1 et 2 par les intentions qui guident le travail mathématique autour de l'erreur. Si dans les deux premières ces intentions concernent la compréhension de l'élève (faire comprendre ou développer des compréhensions particulières), dans la troisième vision, une approche d'investigation des mathématiques basées sur la faillibilité de ces dernières vise à développer de nouvelles compréhensions mathématiques faisant apparaître des domaines de validité. Les propos analysés permettent d'illustrer des façons possibles pour un enseignant de s'approcher de cette vision de l'erreur comme une source d'investigation mathématique, par exemple par le questionnement des notions mathématiques ou l'exploration de ces dernières.

5.4 Vision 4: L'erreur comme une production mathématique

Contrairement à ce qui a été vu à propos de trois premières visions de l'erreur, il est très difficile de rapprocher les propos des enseignants de la quatrième vision dans laquelle le jugement de l'erreur est suspendu pour considérer simplement la production mathématique qu'elle représente. Dans les sous-sections suivantes, des conflits entre les propos des enseignants et des caractéristiques de cette vision sont présentés comme façon d'approfondir la compréhension de cette vision de l'erreur comme une production mathématique.

5.4.1 L'erreur comme une réalisation à part entière contrasté au statut de l'erreur

Pour les enseignants, l'erreur n'a pas la même valeur que n'importe quelle autre réalisation mathématique. Par exemple, pour certains enseignants, elle est *non souhaitable*: il est préférable qu'elle ne se produise pas. C'est le cas de Lise, lorsqu'elle nous parle de prévenir les erreurs et de mettre en garde les élèves contre celles-ci pour les éviter ou encore de Kathya qui veut les corriger dès qu'elles apparaissent pour empêcher que ceci provoque des conséquences négatives sur la réussite des élèves. Pour d'autres, comme Julie, l'erreur produit un effet *néfaste* sur les apprentissages des élèves, contrairement à celui des productions mathématiques non erronées: les erreurs provoquent des nœuds qui empêchent les élèves de progresser en mathématiques. Clara et Henri, qui donnent surtout une valeur positive à l'erreur, les conçoivent tout autant différentes des productions mathématiques non erronées, selon un critère de « vérité ». Alors qu'Henri affirme qu'« Aucune réponse n'est écartée lorsqu'on discute en grand groupe », il semble affirmer qu'il accorde la même importance à tout ce qui est produit par les élèves en mathématiques. Toutefois, il ajoute aussitôt que c'est à partir des erreurs que doit « débiter la reconstruction de bases mal comprises » et que les « essais-erreurs » permettent de corriger des perceptions non adéquates. Pour sa part, Clara explique que *si* le raisonnement d'un élève est erroné, ils en discutent en groupe, reconnaissant ainsi la nécessité d'examiner le travail mathématique d'un élève qui comporte des erreurs. Ainsi, ces deux enseignants soulignent le statut différent qu'ils donnent aux erreurs comme travail mathématique, par rapport aux réalisations sans erreur. Lorsque l'erreur se produit en classe, ils s'en servent et l'exploitent, chacun à leur façon, dans le but d'aider les élèves à ajuster leurs compréhensions mathématiques pour qu'elles deviennent sans erreur. L'erreur semble vouée à être temporaire, et à disparaître.

Ce qui ressort des propos des enseignants, que ce soit pour prévenir, corriger, réparer, se poser des questions ou exploiter l'erreur, c'est que ces derniers posent certains gestes basés sur un critère de vérité d'une production mathématique. Ces gestes semblent parfois répondre à une intention de veiller à la bonne compréhension des élèves; elles sont le signal de quelque chose qui est problématique chez l'élève. Pour certains, comme Henri, ces gestes semblent aussi être animés par une intention d'investiguer une problématique de type mathématique mise en lumière à travers l'erreur. Dans tous ces cas, les propos des enseignants mènent à dire que le sens donné à l'erreur en mathématiques se contraste avec une perspective où cette dernière est vue comme une réalisation mathématique à part entière.

5.4.2 Un travail mathématique valable, contrasté à l'erreur comme un outil en mathématiques

Cette caractéristique de la quatrième vision de l'erreur est ancrée dans l'idée d'apprécier l'activité mathématique qui se déroule. Ainsi, l'erreur est vue comme la trace d'un travail mathématique valable dans le sens où elle est constitutive de l'activité mathématique. Les raisonnements et les façons de faire (impliqués autour de cette erreur) sont reconnus comme un travail qui suscite de l'intérêt en lui-même. Puisqu'Henri affirme qu'il y a une logique cachée derrière les erreurs ou qu'il y a un sens mathématique dans ces dernières, il semble voir ces erreurs comme représentant un travail mathématique réellement valable. En effet, tel que souligné, Henri porte une attention particulière aux mathématiques qui se font autour des erreurs, par exemple, à travers des discussions avec le groupe d'élèves. Toutefois, si un intérêt auprès des productions erronées est observé, c'est surtout parce que ces erreurs sont utiles pour favoriser les compréhensions des élèves (en faisant des liens) et qu'elles le sont aussi pour l'enseignant (qui en profite pour « expliquer la matière sous un autre angle »). Dans ce sens, un point est à remarquer: Henri se sert de l'erreur (en faisant parler les élèves ou en débordant du plan du cours) pour répondre à un certain but (travailler les notions qui figurent à son plan de cours), mais se permet à l'occasion d'en déborder.

Les propos des enseignants aident ainsi à préciser la signification donnée au *travail mathématique valable*. Dans cette vision, l'activité mathématique va au-delà de s'intéresser aux erreurs des élèves et de les exploiter. Il s'agit surtout de s'intéresser au travail de l'élève, d'étudier leurs façons de faire en mathématique pour les comprendre en elles-mêmes et non pas pour comprendre leur validité. Finalement, cette caractéristique de la quatrième vision de l'erreur en mathématique nous

mène à poser le regard sur le présent (l'activité mathématique qui se fait) et sur le futur (les possibilités mathématiques qui découlent de cette même activité).

5.4.3 Le bilan sur l'erreur comme une production mathématique

Cette vision se distingue des trois précédentes par l'absence de jugement à l'égard de bonnes ou des mauvaises mathématiques. Si dans les trois premières visions, l'erreur est d'abord reconnue en tant qu'erreur (une anomalie, quelque chose qui ne va pas) pour ensuite être corrigée, ajustée ou bien exploitée, l'intention ici est plutôt centrée sur l'activité mathématique qui se fait, sans prescriptions, sans attentes de justesse. Si dans les trois premières visions, l'erreur est vue comme quelque chose qui vient dévier le travail mathématique (un point d'arrêt, un retour en arrière, des ramifications à travers des liens ou bien la recherche de domaines de validité), ici le travail mathématique n'est pas dévié par l'erreur, car il n'y a pas de direction précise concernant ce qui doit être dit, fait ou pensé dans un chemin qui émerge de l'activité qui se fait. En ce sens, dans la quatrième vision de l'erreur, ces ne sont pas des erreurs qui guident le travail mathématique, mais c'est le travail lui-même qui s'actualise ayant comme motivation d'appréhender l'activité faite autour des mathématiques produites.

5.5 Le bilan sur les quatre visions de l'erreur en mathématiques

L'analyse transversale des propos des enseignants permet de dégager des éléments qui enrichissent les caractéristiques de chacune des quatre visions de l'erreur en mathématiques, présentées dans le tableau 5.1. Par exemple, pour la vision 1 de l'erreur comme une incompréhension mathématique, il nous est maintenant possible de distinguer différentes façons de voir l'élimination de l'erreur, ou de faire des nuances dans les types d'explications associées à sa rectification. Pour la vision 2 de l'erreur comme une compréhension mathématique en construction, des façons précises de voir l'erreur comme une compréhension en développement sont suggérées (en faisant des liens ou donnant un sens au travail des élèves). Dans le cas de la vision 3 de l'erreur comme une source d'investigation mathématique, cette étude conduit à faire des distinctions sur les intentions guidant les démarches qui se font suite à la reconnaissance de l'erreur. Finalement, la vision 4 de l'erreur comme une production mathématique est décrite maintenant de façon plus précise, nettement en la contrastant à la compréhension de l'erreur en tant qu'outil.

L'image d'un chemin (son marcheur, sa marche et sa possible destination) pourrait servir à représenter des distinctions et de ressemblances entre les quatre visions de l'erreur en mathématiques. En ce sens, dans la première vision, ce chemin est déjà tracé et le point d'arrivée est préétabli. Le chemin se veut optimal pour ramasser les pièces d'un grand puzzle. L'erreur peut être vue comme une situation où le marcheur se sort du chemin et perd du temps pour se rendre à destination. Dans la deuxième vision, le chemin est variable, plusieurs itinéraires sont possibles, des détours existent. La destination est toutefois bien connue. Chaque marcheur prend son propre chemin influencé définitivement par les erreurs. Elles peuvent être vues comme des situations où le marcheur se réoriente pour mieux se rendre à destination. En route, il accumule et encastre des morceaux du puzzle. Dans la troisième vision, le marcheur explore un certain territoire et des chemins émergent de cette exploration. L'objectif est moins de se rendre quelque part, sinon de couvrir une certaine étendue et d'accumuler des trouvailles assez riches et variées. L'erreur peut être vue comme une occasion pour explorer un endroit et pour ramasser quelques pièces de puzzle. Finalement, dans la quatrième vision, l'accent est mis sur la marche et sur les façons d'habiter le territoire, de s'intéresser à ses reliefs et de dépasser ses frontières. Erreur ou pas, le marcheur appréhende le lieu, questionnant sa relation avec l'écosystème dont il fait partie. Si dans les deux premières visions le marcheur cherche à *traverser* le territoire, et dans la troisième il veut le *visiter*, la quatrième vision de l'erreur se caractérise par un marcheur qui veut surtout l'*habiter*.

Cette analyse transversale permet alors de soulever des différences, ainsi que des similitudes, dans les quatre visions de l'erreur en mathématiques. Le schéma suivant de la figure 5.1 montre de possibles regroupements et des dissociations en lien avec ces observations.

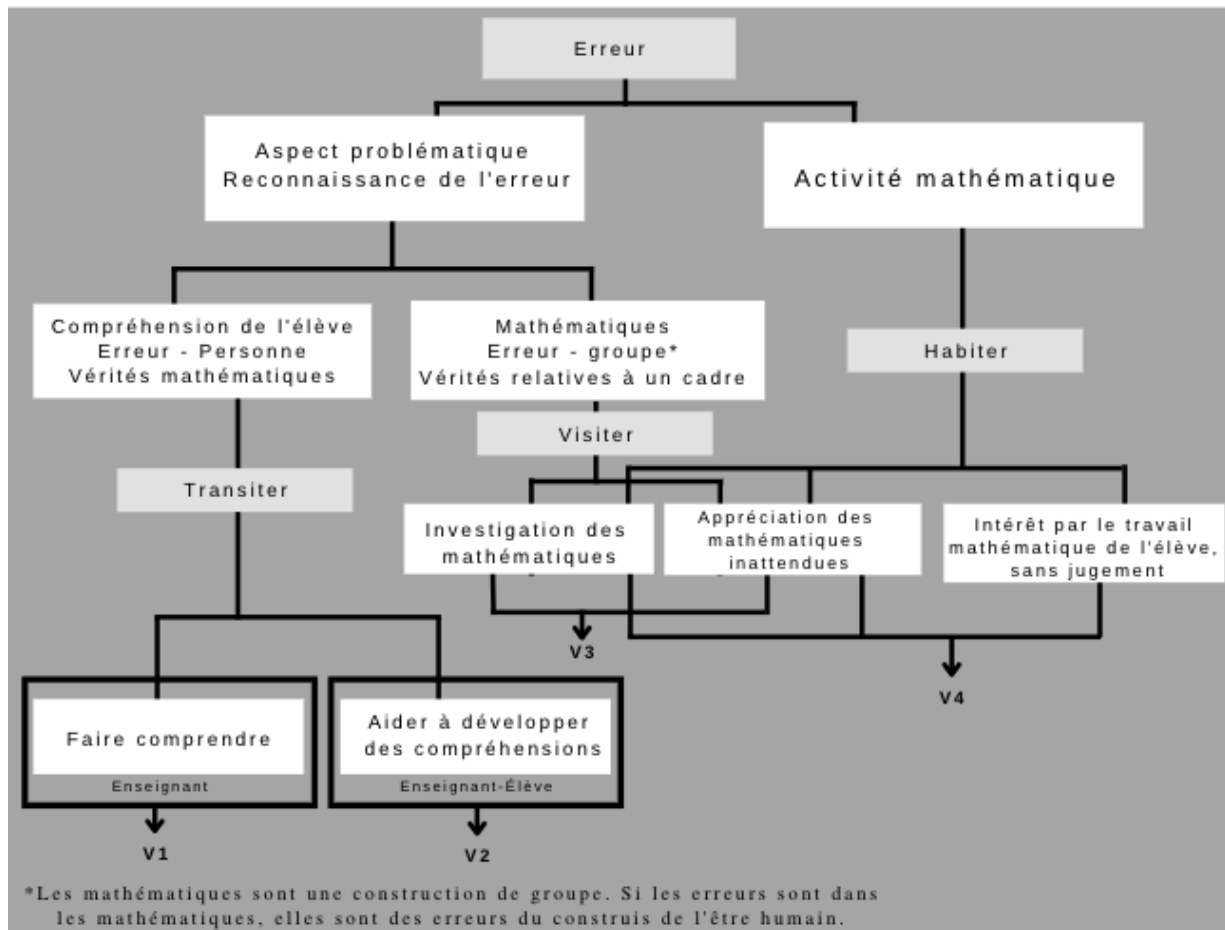


Figure 5.1 Interactions entre les quatre visions de l'erreur en mathématiques

CHAPITRE 6

CONCLUSION

Ce chapitre de conclusion met en avant l'éclairage offert par cette étude de maîtrise concernant les visions d'enseignants sur l'erreur en mathématiques et ce que leurs propos révèlent concernant la mobilisation de ces visions dans leur classe. D'abord, un retour sur les questions de recherche et sur la façon dont elles ont été abordées est présenté. Ensuite, des éléments de réponse pour ces questions considérant des aspects apportés par mon étude empirique sont proposés. À la section 6.3, de nouveaux questionnements sont soulevés en lien avec ces réponses. Finalement, une réflexion sur les apports de cette recherche sur moi comme enseignante est offerte.

6.1 Les questions de recherche et leur contexte scientifique

La problématique développée au début de ce travail est centrée sur la façon de voir les erreurs en mathématiques et les interventions de l'enseignant autour de celles-ci. De possibles tensions entre des idées théoriques et des compréhensions sur des actions concrètes en lien avec l'erreur ont mené à vouloir mieux comprendre la dynamique entre « vision de l'erreur » et « mobilisation de la vision de l'erreur » d'enseignants de mathématiques au secondaire. Les deux questions suivantes synthétisent la problématique qui oriente cette étude:

1. Quelles sont les différentes visions de l'erreur en mathématiques manifestées par des enseignants de mathématiques?
2. Qu'est-ce que ces manifestations révèlent concernant la mobilisation de ces visions en classe?

Pour aborder ces questions, différentes visions de l'erreur en mathématiques ont été identifiées à partir d'écrits en didactiques de mathématiques. Il est possible de parler de quatre visions de l'erreur en mathématiques: l'erreur comme une incompréhension mathématique, l'erreur comme une compréhension mathématique en construction, l'erreur comme une source d'exploration mathématique et l'erreur comme une production mathématique. Un tableau synthèse des caractéristiques de ces quatre visions, présenté au début du chapitre 5 (Tableau 5.1), a été élaboré pour mieux les distinguer. Ce tableau est ici repris.

Quatre visions sur l'erreur en mathématiques			
VISION 1 L'erreur comme une incompréhension mathématique	VISION 2 L'erreur comme une compréhension mathématique en construction	VISION 3 L'erreur comme une source d'investigation mathématique	VISION 4 L'erreur comme une production mathématique
L'erreur est vue comme un manque dans les compréhensions mathématiques	L'erreur est vue comme une compréhension mathématique en développement	L'erreur est vue comme une occasion à saisir pour faire des mathématiques	L'erreur est vue comme une réalisation mathématique à part entière
L'erreur est une défaillance à diagnostiquer et à rectifier	L'erreur est une manifestation d'un obstacle à surpasser	L'erreur est une opportunité pour contribuer au développement des mathématiques	L'erreur est la trace d'un travail mathématique valable
Cette vision est centrée sur l'importance d'éliminer les erreurs pour qu'elles ne se reproduisent plus	Cette vision est centrée sur l'importance de confronter les erreurs pour assurer une bonne construction des compréhensions mathématiques	Cette vision est centrée sur l'importance d'investiguer les erreurs selon différents cadres de référence en mathématiques	Cette vision est centrée sur le sens mathématique déployé, et son rationnel sous-jacent

Ainsi, un enseignant peut soutenir une vision où l'erreur est vue comme un manque de compréhensions mathématiques (vision 1) ou comme une compréhension mathématique en

développement (vision 2). Mais, tel que vu au chapitre 2, bien que certaines caractéristiques conduisent à distancer ces deux premières visions, l'élimination de l'erreur placée au centre de la vision 1 demeure un objectif de la vision 2 (où l'attention est centrée sur la confrontation de l'erreur et son élimination dans le futur). De la même façon, d'autres caractéristiques de ces quatre visions peuvent leur permettre de cohabiter. Ainsi, un enseignant de mathématiques peut soutenir une vision de l'erreur ayant des points en commun avec une ou plusieurs autres visions. C'est aussi ce qui a motivé cette étude, dans le but d'investiguer les propos d'enseignants du milieu scolaire. Un questionnaire a été construit pour être proposé à plusieurs enseignants. Parmi ceux-ci, six ont offert des réponses qui ont fait l'objet d'une analyse. La section suivante résume ce qui en ressort.

6.2 Les résultats de cette recherche

Deux résultats principaux peuvent être identifiés à la fin de cette étude. Premièrement, les propos des enseignants de cette recherche pointent vers de nouvelles façons de considérer l'erreur en mathématiques en lien avec leurs interventions en classe. Deuxièmement, ces propos permettent de développer des compréhensions plus fines sur le sens à donner aux quatre visions du chapitre 2.

Par les réponses des enseignants, il a été possible de dégager de nouveaux éléments pouvant être associés à des visions de l'erreur en mathématiques, c'est-à-dire qui mettent l'accent sur des aspects supplémentaires à considérer. Un premier élément concerne *l'utilité de l'erreur*. Les enseignants dans cette recherche mettent en avant cet aspect de l'erreur de différentes façons. Certains enseignants abordent l'utilité de l'erreur en l'associant à l'apprentissage (les erreurs sont utiles pour apprendre), d'autres à l'enseignement (les erreurs servent à enseigner), et d'autres parlent de l'erreur comme un outil pour développer davantage des compréhensions mathématiques chez les élèves en classe. Cette utilité traverse les trois premières visions de l'erreur présentées au chapitre 2. Ceci est à mettre en lien avec le fait que les trois premières visions de l'erreur peuvent cohabiter chez un même enseignant, comme dans le cas d'Henri, à travers une vision de l'erreur comme étant un « outil pour ». Si les enseignants mettent l'accent sur l'utilité de l'erreur, ils mobilisent cette dimension de leur vision de l'erreur à travers la place centrale donnée à cette dernière dans leur travail comme enseignant. Dans certains cas, ils se servent des erreurs pour éviter qu'elles se reproduisent, dans d'autres cas les erreurs sont utilisées pour y remédier, et dans d'autres encore

les erreurs servent à favoriser le développement de nouvelles compréhensions mathématiques en classe (par exemple en faisant des liens avec différents sujets).

Un deuxième élément qui ressort des propos des enseignants concerne le *rôle des explications* en lien avec la vision de l'erreur en mathématiques. Pour certains enseignants, leurs explications mathématiques (supplémentaires ou ajustées) sont provoquées par l'erreur, et pour d'autres enseignants les explications sont envisagées dans le but d'éviter les erreurs. De plus, certains enseignants conçoivent les explications de la part des élèves comme un moyen leur permettant de mieux comprendre les erreurs de ces derniers. Cette référence réitérée aux explications (et variée en même temps) en relation aux erreurs en mathématiques mène à penser au rôle des explications comme un élément saillant dans la vision des enseignants sur l'erreur en mathématiques. Ce rôle des explications se manifeste aussi dans leurs interventions à la suite de l'erreur de l'élève : réexpliquer, demander à un autre élève de le faire, offrir des explications par écrit, demander à l'élève qui commet une erreur d'expliquer sa compréhension, etc.

Un troisième élément est *la temporalité*. Le temps semble jouer un rôle important dans le rapport des enseignants à l'erreur. L'erreur est vécue pour certains enseignants comme « une conséquence de » quelque chose qui s'est produit *avant*. Pour d'autres enseignants, l'accent est mis sur l'erreur comme la possible « cause de » quelque chose qui se produirait *plus tard*. Ces différentes façons de voir l'erreur sont liées aux pratiques de classe qui sont dans certains cas organisées pour effectuer un « retour en arrière » et dans d'autres cas pour projeter le travail mathématique « vers l'avant ». La question du temps émerge aussi dans les pratiques des enseignants à travers l'importance, pour certains enseignants, d'agir sans tarder afin de régler un problème qui peut entraîner des conséquences négatives, ou de garder la motivation de l'élève pour qu'il demeure engagé. Pour d'autres enseignants, les actions autour des erreurs sont considérées comme une forme d'investissement à long terme (ce qu'elles permettent de construire, par exemple). Tout ceci se retrouve de façon nuancée et parfois implicite dans les propos des enseignants, ce qui permet de considérer cette caractéristique, la temporalité, comme étant un critère permettant de distinguer et mieux comprendre ce qui est sous-jacent aux visions des enseignants sur l'erreur en mathématiques.

La deuxième question de recherche trouve ainsi des réponses dans les paragraphes précédents par la façon des enseignants de parler de l'erreur en mathématiques de manière indissociable de leurs

intervention en classe. Toutefois, certaines tensions se manifestent entre les façons de voir l'erreur de certains enseignants et ce qui se passe, selon eux, dans leurs classes. Ces tensions sont souvent liées à une intention de la part de l'enseignant d'exploiter les erreurs afin qu'elles deviennent utiles pour la compréhension des élèves, mais où ces intentions sont confrontées à des situations de classe qu'ils voient comme étant contraires à cet objectif (par exemple, des contraintes de temps ou des élèves qui ne sont pas disponibles pour travailler en mathématiques).

Bien que l'analyse des propos des enseignants sur leur manière de voir l'erreur et de comprendre leurs interventions en classe autour de celle-ci permettent d'aborder les deux questions de recherche guidant cette étude, les analyses transversales effectuées permettent aussi de mieux distinguer les quatre visions « théoriques » l'une de l'autre et d'entrevoir de nouvelles similarités. En effet, chaque vision de l'erreur en mathématiques étudiée à travers les propos de six enseignants est maintenant caractérisée de façon plus fine. L'exercice est particulièrement révélateur en ce qui concerne la vision de l'erreur comme une production mathématique (vision 4), qui se retrouve peu dans les propos des enseignants. L'analyse des réponses des enseignants aide à mieux conceptualiser cette vision en la distinguant des trois autres par sa manière « non problématique » de voir l'erreur. En effet, les enseignants ayant participé à cette recherche voient tous l'erreur comme quelque chose de problématique et dont il faut s'occuper; et dont la résolution représente même quelque chose de central à leur rôle comme enseignants. La vision de l'erreur comme une production mathématique cadre mal en quelque sorte avec cette perspective dans l'enseignement (voir Mégrouèche, 2020, sur ces aspects).

6.3 De nouveaux objectifs et de nouvelles questions

Les données de recherche et leurs analyses permettent d'apporter des éléments de réponse aux questions de cette étude. Elles suscitent en même temps l'intérêt de continuer à vouloir mieux comprendre la mobilisation de ces visions de l'erreur en classe par les enseignants. Par exemple, il pourrait être intéressant d'observer des enseignants en action et de les questionner afin d'étudier l'interaction entre leur compréhension de la mobilisation de leur vision de l'erreur en mathématiques et ce qu'ils font en classe; rentrant ici davantage dans la dynamique « pratique déclarée » et « pratique effective » chez l'enseignant.

Il peut aussi s'avérer intéressant de continuer l'investigation, mais ici relativement à *l'évolution* de la vision d'un enseignant sur l'erreur en mathématiques à travers ses pratiques autour de celle-ci. La question suivante pourrait agir comme moteur à cette investigation :

- De quelles façons les visions de l'erreur en mathématiques d'un enseignant peuvent-elles se transformer à travers la confrontation à ses expériences de classe?

Le deuxième résultat présenté plus haut concerne l'approfondissement et le raffinement des visions de l'erreur. Les données de recherche font ressortir le peu d'éléments pouvant lier les visions des enseignants à la vision de l'erreur comme une production mathématique (vision 4). Ceci conduit à vouloir mieux comprendre cette vision en lien avec l'enseignement. Plus précisément :

- De quelles façons est-il possible pour un enseignant de mobiliser des pratiques de classe selon une vision de l'erreur comme une production mathématique?

La recherche de Mégrouèche (2020) aborde ces dimensions et soulève le besoin de continuer à investiguer ces aspects. De plus, l'article de Proulx et Mégrouèche (2021) sur la bienveillance didactique permet d'offrir des éléments supplémentaires pour continuer cette réflexion. La bienveillance didactique est décrite par ces chercheurs comme une relation entre les élèves et l'enseignant, basée sur un intérêt commun de mieux comprendre les productions des élèves pour faire avancer les mathématiques en classe. Cet intérêt envers le travail de l'élève permet de pousser l'activité mathématique réalisée en classe et place celle-ci au centre de la classe de mathématiques. Sur cet aspect, il est possible de mettre en relation cette perspective avec la vision de l'erreur comme une production mathématique (vision 4), où l'objectif premier dans le travail avec les élèves en devient non pas uniquement de comprendre des mathématiques, mais bien de faire des mathématiques.

6.4 Les résultats de cette recherche sur moi comme enseignante

Ce projet est parti de mon intérêt de comprendre de possibles conflits pouvant exister entre ma façon de voir les erreurs en mathématiques et ma compréhension des interventions en lien avec celles-ci. Qu'en est-il de ma perception de ce possible conflit, quelques années plus tard, à la suite

de la réalisation d'une étude sur ce sujet? La vignette suivante, notée au début d'un de mes derniers cours (comme enseignante) à l'automne 2022, m'aide à avancer sur une amorce de réponse.

Il est 8h30 du matin et un de mes élèves prend la parole:

É: J'ai fait mon devoir, madame. Est-ce que j'ai eu des bonnes réponses? Aimez-vous ma démarche?

Le cours vient de commencer et je suis déjà confrontée à la demande d'un élève qui veut que je valide ses réponses au devoir. Il veut aussi savoir si j'apprécie son travail mathématique. Je me trouve dans l'urgence de répondre à sa demande. Et je réponds.

Les attentes de mes élèves mettent en évidence, dans cette vignette, un aspect de mon travail d'enseignante (qui commence le cours par répondre à une demande de correction du devoir). Ma compréhension de cette intervention est probablement en conflit avec une vision basée sur la valorisation de l'erreur (visions 2 ou 3). Peu importe la suite de cette vignette, la réflexion que cette étude m'apporte concerne principalement les alternatives pouvant être envisagées pour aborder ce conflit implicite chez moi. En effet, la diversité des caractéristiques des visions de l'erreur, et leur cohabitation, examinées dans ce mémoire pourrait m'amener à penser à différents chemins, à différentes manières, de répondre à cet élève. Cette diversité pourrait plus précisément me conduire comme enseignante à mettre en valeur l'intérêt de l'élève relativement à son travail mathématique (« Aimez-vous ma démarche? »). Mais ce que je retire surtout est que lorsqu'une intervention autour de l'erreur est perçue comme étant en conflit avec la façon de penser l'erreur, ce conflit peut être vu comme quelque chose qui allume en retour un certain travail autour de cette erreur. Le conflit vécu par l'enseignante que je suis peut servir à préciser mes idées et peut-être même à revoir mes manières de faire; une réflexion en action dit Schön (1994). Voilà peut-être la façon dont cette étude me transforme le plus, soit par le développement d'une sensibilité augmentée face à mon envie et ma capacité d'aligner de façon plus cohérente mes visions sur l'erreur et mes interventions face à celle-ci. Déjà, cette ouverture et sensibilité face à ce monde des possibles est une avancée significative pour moi comme praticienne.

ANNEXE A
LES RÉPONSES DES ENSEIGNANTS

Les réponses d'Henri

Les erreurs sont importantes en mathématiques.

Certainement! Dans ma classe, je fais la promotion des erreurs en expliquant que la plupart des théories mathématiques ont demandées énormément d'essais et d'erreurs avant d'aboutir. Également, c'est en essayant et en se trompant surtout qu'on peut ensuite corriger nos perceptions et "apprendre".

Les erreurs de mes élèves occupent une place importante dans ma classe.

Tout à fait. J'essaie le plus souvent possible de faire "parler" mes élèves de leurs démarches. Le processus de résolution de problèmes m'intéresse davantage que la solution en tant que tel.

« On apprend de nos erreurs » : les erreurs permettent aux élèves de progresser en mathématiques.

Effectivement, je suis en accord avec cette affirmation! Aucune réponse n'est écartée lorsque l'on discute en grand groupe. Je profite des erreurs pour expliquer la matière sous un autre angle et démontrer que ces erreurs ne sont pas toujours vides de sens. Parfois, cela nous amène "en dehors" du plan de cours mais est très formateur lorsqu'on l'analyse sur une longue période de temps durant l'année.

Les élèves ne font pas d'erreurs volontairement.

Je suis en accord avec cela également. J'ajouterais même qu'en faisant la promotion des erreurs, il y a plus de solutions proposées et nécessairement plus d'erreurs mais ces erreurs sont saines et derrière elles se cachent une logique, parfois maladroite, par laquelle il faut débiter la reconstruction des bases mal comprises.

Les erreurs des élèves peuvent amener à réfléchir sur certaines dimensions et contenus mathématiques.

Comme mentionné plus haut, j'introduis une notion mathématique en classe et nous dévions très souvent vers d'autres notions déjà vues ou non et on "réfléchit" sur le comment et le pourquoi. Les mathématiques ne doivent pas être enseignées de façon linéaire et cloisonnée. C'est plutôt un tout et énormément de liens entre les notions qu'il faut développer. Je fais l'analogie avec mes élèves du coffre à outils (secondaire 1). Lorsqu'ils rencontrent un problème à résoudre, ils doivent fouiller dans leur coffre et utiliser les bons outils pour s'en sortir.

Les réponses de Kathya

Les erreurs sont importantes en mathématiques.

Je ne suis pas certaine de ce que "importante" veut dire. J'imagine que c'est qu'une erreur aura des répercussions sur le reste du problème ou sur la vision qu'aura l'enseignant sur l'apprentissage du jeune à long terme ou que le jeune aura sur l'estime qu'il a de lui-même. Je vois l'erreur comme un angle. Si l'erreur est prise au début, il sera facile de la corriger. Si on attend trop, l'élève se sentira tellement loin de ce qu'il doit atteindre qu'il perdra confiance en ses capacités. Les opérations avec les nombres négatifs amène souvent des erreurs importantes lorsqu'elles sont apprises par "trucs".

Les erreurs de mes élèves occupent une place importante dans ma classe.

Oui, lorsqu'ils ne savent pas quoi faire, je leur demande d'écrire quelque chose de faux. C'est comme ça que j'arrive à lire dans leur tête. C'est là aussi qu'ils se rendent compte qu'ils en savent plus que ce qu'ils pensent.

« On apprend de nos erreurs » : les erreurs permettent aux élèves de progresser en mathématiques.

Les réussites permettent de progresser. Voir et comprendre nos erreurs permettent de voir comment progresser.

Les élèves ne font pas d'erreurs volontairement.

Souvent, ils préfèrent ne rien écrire que d'écrire quelque chose qui leur semble inexact.

Les erreurs des élèves peuvent amener à réfléchir sur certaines dimensions et contenus mathématiques.

Si on est prof de math, c'est qu'à la base on ne faisait pas d'erreur majeure. Pour bien enseigner les mathématiques, il faut se mettre à la place d'un élève qui a des difficultés et essayé de voir ce qu'il voit.

Les réponses de Clara

Les erreurs sont importantes en mathématiques.

Les erreurs font partie du processus d'apprentissage.
Elles sont importantes car elles permettent de comprendre certaines notions en profondeur. L'erreur amène l'élève à faire des liens et à rectifier un raisonnement erroné. L'erreur aide aussi à la rétention des apprentissages. Un élève qui comprend en profondeur est un élève qui retiendra!

Les erreurs de mes élèves occupent une place importante dans ma classe.

Plus ou moins car je passe beaucoup de temps à enseigner de nouvelles notions et à essayer de respecter le calendrier des évaluations.
La gestion de l'erreur se fait souvent verbalement à travers l'enseignement et les devoirs. J'amène l'élève à expliquer son raisonnement, et s'il est erroné, on en discute en groupe. Ces discussions sont souvent assez riches car j'explique (ou un autre élève) la provenance de l'erreur, souvent lié à la confusion entre plusieurs notions.
Lorsque je corrige une évaluation, j'annote chaque copie où j'explique le type d'erreur à l'élève à partir de sa démarche. Après une évaluation, il y a toujours une rétroaction avec le groupe sur les erreurs récurrentes!

« On apprend de nos erreurs » : les erreurs permettent aux élèves de progresser en mathématiques.

En cours d'apprentissage, les erreurs permettent aux élèves de progresser alors que dans l'évaluation, elles ont un côté plutôt négatif car elles sont peu valorisées et souvent trop pénalisées. Elles peuvent même être source de frustration dans l'évaluation.

Les élèves ne font pas d'erreurs volontairement.

Puisque l'erreur est plus ou moins valorisée, je ne crois pas que les élèves la provoquent volontairement!

Les erreurs des élèves peuvent amener à réfléchir sur certaines dimensions et contenus mathématiques.

L'erreur peut amener l'élève à poser de nouveaux raisonnements et à faire des liens avec d'autres contenus. L'erreur est très positive dans le processus d'apprentissage et c'est la raison pour laquelle les devoirs sont si importants en mathématiques!

Les réponses de Julie

Les erreurs sont importantes en mathématiques.

Ça dépend...je vais répondre oui avec les justifications qui suivront aux prochaines questions.

Les erreurs de mes élèves occupent une place importante dans ma classe.

oui, elles le sont si la question est de s'attarder au processus mental pour arriver à répondre à la question mathématique.
j'ai une classe multi-niveaux où les élèves viennent de partout et ils sont dans ma classe temporairement (parfois 1 mois...rarement toute l'année)
Je m'attarde souvent à comprendre comment l'élève a procédé dans sa tête pour arriver à la réponse. Je veux savoir comment il a compris le problème. J'essai de voir par quel chemin il passe pour mieux pouvoir lui expliquer son erreur afin qu'il comprenne. Certains ont besoin de manipuler l'abstrait ou de le voir, d'autres ont un pauvre vocabulaire mathématique. Je dois m'adapter à chacun avec des exemples concrets pour mieux répondre au besoin de compréhension.
Au secondaire, plusieurs de mes élèves ont de grosses lacunes en math puisque même s'ils avaient échoués la matière en secondaire 1 et/ou 2, ils avaient passé au prochain niveau puisque les autres matières de base étaient réussies. Rendu en secondaire 3, la base n'est pas là ou elle n'est pas solide.

« On apprend de nos erreurs » : les erreurs permettent aux élèves de progresser en mathématiques.

Pas toujours, mais je vais justifier le oui.
Chaque type d'erreur permet de s'améliorer. Il suffit de s'y attarder pour en prendre conscience afin de mieux y pallier la prochaine fois. Toutes les étapes du raisonnement et de la réalisation sont importantes.

Parfois, le type d'erreur sera récurrent puisque le noeud à défaire est trop grand et cristallisé dans la façon de faire de l'élève.

Plusieurs causes viennent jouer dans "apprendre de ses erreurs"

- La personnalité de l'élève
- La gestion des émotions vs l'apprentissage
- La disponibilité de l'élève (consommation, difficulté personnelle, trouble diagnostiqué, santé mentale, etc)
- Autonomie
- Estime de soi (personnel ou envers la matière)
- Niveau d'ouverture et de persévérance face à un obstacle
- etc.

Les réponses de Julie (suite)

Les élèves ne font pas d'erreurs volontairement.

Je le crois.

Face à une situation, les élèves tentent le mieux possible de répondre ou de résoudre avec le meilleur de leurs connaissances.

Les plus construits se font confiance et tentent du mieux possible de compléter leurs numéros et s'investissent dans leurs apprentissages. Ils sont intéressés à comprendre et cherchent parfois à se dépasser. Parfois, des erreurs mineures se glissent dans le processus mais tout y est.

Comme je l'ai cité à la question 4, plusieurs facteurs viennent influencer l'erreur.

Ces facteurs influencent leur disponibilité lors de l'accomplissement de certaines tâches. À la base, ils ont tous le désir de réussir, mais certains facteurs les amènent à faire n'importe quoi ou laissent le numéro vide pour éviter d'être confronté à l'erreur, à l'échec...à eux-mêmes.

Les erreurs des élèves peuvent amener à réfléchir sur certaines dimensions et contenus mathématiques.

oui

parfois, l'erreur amène à l'ouverture possible d'un retour sur des notions antérieures afin de mieux solidifier les bases mathématiques ou à mieux comprendre la logique derrière un processus.

Les réponses de Lise

- . Les erreurs sont importantes en mathématiques.

Oui pour savoir si les bons concepts sont utilisés et s'ils sont utilisés de la bonne façon.

- . Les erreurs de mes élèves occupent une place importante dans ma classe.

Oui, elles me permettent de prévoir les erreurs de mes futurs élèves. Je peux ainsi mieux les prévenir en leur indiquant comment ne pas commettre une erreur en particulier (priorité des opérations, propriétés des fonctions, isolement de variable, ...)

- . « On apprend de nos erreurs » : les erreurs permettent aux élèves de progresser en mathématiques.

oui, en les commettant lors d'évaluations formatives l'élève voit lors de la correction comment il peut éviter ces erreurs lors d'évaluations futures.

- . Les élèves ne font pas d'erreurs volontairement.

Plutôt vrai! À moins de tricher...

- . Les erreurs des élèves peuvent amener à réfléchir sur certaines dimensions et contenus mathématiques.

oui dans le sens où il peut être important de passer plus de temps sur des notions moins bien comprises donc où les élèves commettent beaucoup d'erreurs.

Les réponses d'Oscar

Les erreurs sont importantes en mathématiques.

Oui. Surtout des erreurs de compréhension en relation avec une situation-problème.

Les erreurs de mes élèves occupent une place importante dans ma classe.

Oui. Chaque erreur se répétant est une occasion pour expliquer d'une autre façon. Souvent, ces erreurs reviennent d'une année à l'autre.

« On apprend de nos erreurs » : les erreurs permettent aux élèves de progresser en mathématiques.

Oui. Sous la forme de travaux complémentaires et de consolidation.

Les élèves ne font pas d'erreurs volontairement.

Non. À moins d'une intention malsaine, les élèves bloquent souvent aux mêmes notions ou aux mêmes questions.

Les erreurs des élèves peuvent amener à réfléchir sur certaines dimensions et contenus mathématiques.

Surtout en CD1, en situation-problème afin d'aborder un nouveau chapitre ou un exercice synthèse.

BIBLIOGRAPHIE

- Adihou, A. (2011). Enseignement-Apprentissage des mathématiques et souffrance à l'école. *Le collectif du Cirp*, 2, 90–102.
- Aguirre, J., & Speer, N. M. (2000). Examining the relationship between beliefs and goals in lecturers practices. *Journal of Mathematical Behaviour*, 18(3), 327-356.
- Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: From historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 111-129.
- Ashlock, R. B. (1972). *Error patterns in computation: Using errors patterns to help each student learn*. Pearson: Upper Saddle River, New Jersey.
- Astolfi, J. P. (1997). *L'erreur, un outil pour enseigner*. ESF éditeur : Paris, France.
- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Vrin : Paris, France.
- Baruk, S. (1973). *Échec et maths*. Éditions du Seuil : Paris, France
- Baruk, S. (1977). *Fabrice ou l'école de mathématiques*. Éditions du Seuil : Paris, France
- Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine. De l'erreur en mathématiques*. Éditions du Seuil : Paris, France.
- Bednarz, N. (1991). Interactions sociales et construction d'un système d'écriture des nombres en classe primaire. In N. Bednarz, C. Garnier et I. Ulanovskaya (dir.) *Après Vygotski et Piaget. Perspectives sociale et constructiviste*, (pp. 51-67). Bruxelles, De Boeck-Wesmael.
- Bednarz, N. & Proulx, J. (2009). Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement: Clarifications conceptuelles et épistémologiques. *For the Learning of Mathematics*, 29(3), 11-17.
- Bednarz, N. & Proulx, J. (2015). Réflexions sur les obstacles culturels en enseignements de mathématiques. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, 25(2), 347-352.
- Bélanger, M. (1990–91). Les erreurs en arithmétique : Un siècle de présomption américaine. *Petit x*, 26, 49–71.
- Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Heinemann : Portsmouth, NH.
- Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as springboards for inquiry : a teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 166–208.
- Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Ablex : NJ.
- Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In N. Bednarz et C. Garnier (dir.) *Construction des savoirs obstacles et conflits* (p. 41-63). Ottawa: CIRADE.

- Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. Éditions La pensée sauvage : Grenoble.
- Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques : études dans le cadre de la théorie des situations didactiques. *Petit x*, 57, 5–30.
- Brousseau, G. (2009). L’erreur en mathématique du point de vue didactique. *Tangente Éducation*, 7, 4–7.
- Chatelet, G. (1987). L’enchantement du virtuel. *Chimères. Revue des schizoanalyses*, 2(1), 1-20.
- Cooney, T. J. (1999). Conceptualizing teachers’ ways of knowing. In Tirosh, D. (Ed.) *Forms of mathematical knowledge* (pp. 163-187). Springer, Dordrecht.
- Corbin, J. M., & Strauss, A. (1990). Grounded theory research: Procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative sociology*, 13(1), 3-21.
- Coulange L., & Robert A (2015). Les mathématiques dans les activités du professeur – Conséquences pour la formation. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (GT1, pp. 81-94), Actes du colloque EMF2015.
- Davis, B. (1997). Listening for differences: An evolving conception of mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 355–376.
- Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères IREM*, 15. Topiques Editions, Pont à Mousson.
- Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In: P. Ernest, (Ed.) *Mathematics Teaching: The State of the Art* (pp. 249-254), London, Falmer Press.
- Fabre, M. (1995). *Bachelard éducateur*. Presses Universitaires de France : Paris, France.
- Flückiger, A. (2006). Formation au travail de l’erreur et didactique des mathématiques. *Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften*, 28(1), 43-61.
- Green, T. F. (1971). *The activities of teaching*. New York: McGraw-Hill.
- Ingram, J. (2018). Moving forward with ethnomethodological approaches to analysing mathematics classroom interactions. *International journal of Mathematics Education*, 50(6), 1065-1075.
- IREM d’Aquitaine. (2013). L’erreur dans l’apprentissage des mathématiques. *Petit x*, 93, 7–28.
- Jodelet, D. (1991). Représentations sociales. *Grand Dictionnaire de psychologie*, 667-672.
- Kieren, T. (1995). Teaching in the middle: Enactivist view on teaching and learning mathematics. Plenary lecture at the *Queens/Gage Canadian National Mathematics Leadership Conference*. Queens University, Kingston, Canada, June 1995.
- Kline, M. (1980). *Mathematics: the loss of certainty*. Oxford University press : New York.
- Kundu, U., et Segupta, D. (2014). Error analysis in mathematics in relation to secondary school students. *Indian Journal of Educational Research*, 3, 105–125.

- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. New Cambridge University Press: New York.
- Leatham, K. R. (2006). Viewing mathematics teachers' beliefs as sensible systems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(1), 91-102.
- Luitel, B. C. (2013). Mathematics as an im/pure knowledge system: Symbiosis,(w) holism and synergy in mathematics education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(1), 65-87.
- Maheux, J.F., & Thom J. (2009). L'activité mathématique comme une manière d'être dans le monde: considérations éthiques sur les transactions enseignant-élève. *Actes du CIEAEM*, 61, (pp. 400-413). CIEAEM: Montréal.
- Maheux, JF., Roth, WM. & Thom, J. (2010). Looking at the Observer: Challenges to the Study of Conception and Conceptual Change. In: Roth, WM. (eds) *Re/Structuring Science Education*. Cultural Studie of Science Education, (vol 2, p. 201-219). Springer, Dordrecht.
- Maheux, J. F. & Roth, W. M. (2014). The relationality in/of teacher–student communication. *Mathematics Education Research Journal*, 26(3), 503-529.
- Maturana, H.R. (1987). Everything is said by an observer. In W.I. Thompson (Ed.) *GAIA: A way of knowing* (pp. 65–82). Lindisfarne Press : Hudson, NY.
- Maturana, H.R. & Varela, F. J. (1987). *The tree of knowledge : The biological roots of human understanding*. Shambhala publication. Boston.
- Mégrourèche, C. (2020). *L'erreur en classe de mathématiques: repenser son rôle, explorer son potentiel*. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal.
- Moscovici, S., & Marić, S. (1968). *Essai sur l'histoire humaine de la nature* (Vol. 1977). Paris: Flammarion.
- Powell, A. B., & Frankenstein, M. (Eds.). (1997). *Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in mathematics education*. Suny Press.
- Proulx, J., & Maheux, J.-F. (2012). Épistémologie et didactique des mathématiques : questions anciennes, nouvelles questions. *For the Learning of Mathematics*, 32(2), 41-46.
- Proulx, J., & Savard, A. (2016). Regards sur l'erreur en mathématiques. *Chronique – Fondements et épistémologie de l'activité mathématique*.
- Proulx, J., & Mégrourèche, C. (2021). Retombées collatérales d'un Teaching Experiment: vers une bienveillance didactique. *Revue Canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 21(3), 639-665.
- Ravestein, J., & Sensevy, G. (1993). Statuts de l'erreur dans la relation didactique. *Grand N*, 54, 83-90.
- Robert, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21(1), 57-80.

- Robert, A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Revue Canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528.
- Robert, A., & Rogalski, J. (2005). Un exemple d'analyse de l'activité de l'enseignant en classe. L'exemple d'un dialogue de mathématiques en classe de seconde. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), 269-298.
- Roth, W. M. (2005). *Doing qualitative research: Praxis of method*. Brill : Rotterdam, Netherlands.
- Rouquette, M.L. (1994). Une classe de modèles pour l'analyse des relations entre cognèmes. In C. Guimelli (Ed.), *Structures et transformations des représentations sociales*, (pp.153-170). Neuchâtel: Delachaux et Niestlé, France.
- Savoie-Zajc. L. (2018). La recherche qualitative/interprétative. In T. Karsenti & L. Savoie-Zajc (Eds.), *La recherche en éducation : étapes et approches* (4e éd., p. 191-217). Presse de l'Université de Montréal : Montréal.
- Schon, D. A. (1994). *Le praticien réflexif: à la recherche du savoir caché dans l'agir professionnel*. Les Éditions Logiques, Montréal.
- Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational studies in mathematics*, 46(1), 13-57.
- Steffe, L. P. (2010). Articulation of the reorganization hypothesis. In L.P. Steffe & J. Olive (dir.) *Children's fractional knowledge* (pp. 49-74). Springer, Boston, MA.
- Steffe, L. P. (2007). Radical constructivism: A scientific research program. *Constructivist Foundations*, 2(2-3), 41.
- Steffe, L. P., & Kieren, T. (1994). Radical constructivism and mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 711-733.