

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉNUMÉRATION DE FAMILLES DE POLYOMINOS INSCRITS DANS UN
RECTANGLE DE LARGEUR FIXÉE ET DE HAUTEUR VARIABLE

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
YAO IHÉBAMI AKAKPO

NOVEMBRE 2023

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.04-2020). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur et mon co-directeur de mémoire, respectivement les professeurs Alexandre Blondin Massé, du département d'informatique de l'UQAM et Alain Goupil du département d'informatique et mathématiques, de l'UQTR qui se sont investis ardemment dans le déroulement de mon projet de recherche. Au travers des interactions continues qui nous ont liés tout au long de nos travaux, ils m'ont mis dans les meilleures conditions de travail du début jusqu'au bout.

J'envoie mes sincères remerciements à toute l'équipe du LACIM pour le travail qu'ils font et continuent de faire pour l'avancée de la recherche dans les différents domaines qui y sont représentés.

Je rends un grand hommage à tous mes enseignants de l'UQAM, ils se sont beaucoup investis dans ma formation. Ils ont su me donner une formation d'une qualité exceptionnelle avec des programmes très innovants et constamment actualisés.

Je remercie sincèrement madame Isabella Couture, secrétaire de direction et du programme d'études en mathématiques, pour toutes ses prestations au sein du département et, surtout, la rapidité avec laquelle elle nous fait parvenir la mise à jour des informations.

J'adresse mes remerciements aux corps professoral et administratif de l'UQAM, à tous les membres de l'ASEQ et à tous mes collègues de parcours avec qui on a passé des moments de peine, d'enthousiasme et de bonheur.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX	v
LISTE DES FIGURES	vi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I PRÉLIMINAIRES	5
1.1 Généralités sur les polyominos	5
1.1.1 Quelques définitions et exemples	5
1.1.2 Quelques classes de polyominos	7
1.2 Polyomino inscrit dans un rectangle	9
1.3 Théorie des langages, des automates et des transducteurs	11
1.3.1 Monoïde et semi-anneau	12
1.3.2 Alphabet, mot, langage	12
1.3.3 Automate	13
1.3.4 Transducteur	16
1.4 Automates $\mathcal{A}_B$ des polynominos contenus dans un rectangle de largeur B	19
1.5 Partition non croisée	20
CHAPITRE II AUTOMATE DÉCRIVANT LES POLYOMINOS INSCRITS DANS UN RECTANGLE	21
2.1 Généralités	22
2.1.1 État	22
2.1.2 L'alphabet et les transitions d'états	38
2.2 Automate $\mathcal{A}_2$	68
2.3 Automate $\mathcal{A}_3$	71
2.4 Validation des valeurs dans les matrices de transfert $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$	76
2.4.1 Validation des valeurs de la matrice $\mathcal{M}_2$	76

2.4.2	Validation des valeurs de la matrice $\mathcal{M}_3$	80
2.5	Séries génératrices	82
2.5.1	Série génératrice des polyominos inscrits dans un rectangle de type 2	82
2.5.2	Série génératrice des polyominos inscrits dans un rectangle de type 3	84
CHAPITRE III AUTOMATE DÉCRIVANT LES FORÊTS DE POLYOMINOS INSCRITES DANS UN RECTANGLE		86
3.1	Généralités sur l'automate $\mathcal{A}_{FB}$	86
3.1.1	État	86
3.1.2	Transition entre les états	89
3.2	Automate A_{F3}	94
3.2.1	États	94
3.2.2	Matrice de transitions	96
3.3	Calcul du nombre de forêts de polyominos inscrites dans un rectangle de base 3 et de hauteur $h = n + 1$ pour quelques valeurs de n	96
3.4	Séries génératrices de l'automate $\mathcal{A}_{F3}$	98
CHAPITRE IV ASPECTS ALGORITHMIQUES DES FORMULES PORTANT SUR LES AUTOMATES A_B ET A_{FB}		102
4.1	Calcul du périmètre d'un état	102
4.2	Nombre de périmètre échangé lors d'une transition d'un état à un autre	103
4.3	Nombre de feuilles d'un état	104
4.3.1	Nombre de feuilles d'un état initial	104
4.3.2	Nombre de feuilles d'un état interne	107
4.4	Nombre de feuilles échangées lors d'une transition	109
4.5	Décomposition en composantes connexes	111
4.6	Composante connexe	114
CONCLUSION ET PERSPECTIVES		117

LISTE DES TABLEAUX

Tableau		Page
2.2	Les états de $\mathcal{A}_3$	71
2.3	Les transitions possibles de $\mathcal{A}_3$	75
2.4	Nombres de polyominos inscrits dans quelques rectangles de type 2.	79
2.5	Nombres de polyominos inscrits dans quelques rectangles de type 3.	82
3.1	Nombres de forêts de polyominos inscrites dans quelques rectangles de type 3.	96

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Une cellule.	6
1.2 Deux polyominos et une forêt de polyominos.	6
1.3 Exemple de polyomino inscrit dans le rectangle 4×3	7
1.4 Exemples de polyominos colonne et ligne.	7
1.5 Ces polyominos de la gauche vers la droite sont verticalement convexe, horizontalement convexe et convexe.	8
1.6 Polyomino parallélogramme.	8
1.7 Polyomino serpent.	9
1.8 Exemples de deux polyominos inscrits et un polyomino non inscrit.	9
1.9 Forêt de polyominos inscrite dans le rectangle 4×5	10
1.10 Exemples de polyominos d'indice 0 et d'indice 1.	10
1.11 Exemple d'automate fini élémentaire non déterministe.	14
1.12 Exemple d'automate fini élémentaire déterministe.	15
1.13 Les lignes possibles d'un rectangle de type 2.	19
2.1 Décomposition de (P) en une suite de lignes.	21
2.2 Représentation de trois lignes d'un rectangle de type 5 par des nombres binaires	22
2.3 Les composantes connexes d'une ligne.	22
2.4 Différence entre les lignes ayant les mêmes composantes connexes.	23
2.5 Exemples de composantes connexes par le haut.	24
2.6 Forêt de polyominos inscrite dans le rectangle 15×2	25

2.7	Polyomino inscrit dans le rectangle 8×2	26
2.8	Calcul des valeurs <i>deg</i> à la ligne du bas.	27
2.9	Polyomino inscrit dans le rectangle 3×4	27
2.10	Ligne d'un rectangle de type 10.	29
2.11	Polyominos inscrits dans le rectangle de type 7 de hauteur 6. . . .	29
2.12	Forêts de polyominos lignes de longueurs 11 et 10 ayant respecti- vement 6 et 5 composantes connexes.	33
2.13	Lignes de deux états de $\mathcal{A}_3$ de longueurs différentes.	40
2.14	Les trois décalages pour passer de e à e'	40
2.15	Passage impossible de la deuxième ligne à la troisième ligne. . . .	42
2.16	Transition impossible de l'état du haut à celui du bas.	42
2.17	Les lignes des états e_1, e_2, e_3 et e_4	45
2.18	Transition de e_1 à e_3	45
2.19	Transition de e_1 à e_4	45
2.20	Transition de e_2 à e_3	46
2.21	Transition de e_3 à e_4	46
2.22	Périmètre du rectangle résultant de deux cases consécutives. . . .	47
2.23	La feuille résultante de la transition de e à e' est la cellule à droite de la ligne du haut.	49
2.24	Ligne d'un état de $\mathcal{A}_{12}$	51
2.25	La ligne de l'état e et la ligne précédente.	55
2.26	Polyomino inscrit dans le rectangle 7×5	57
2.27	Les deux transitions permises.	58
2.28	Transitions entre deux états de $\mathcal{A}_5$	59
2.29	Polyomino inscrit dans le rectangle 3×3	63

2.30	Polyomino, de hauteur 4, inscrit dans le rectangle de largeur 3 et de hauteur 4.	65
2.31	Deux polyominos inscrits générés par $\mathcal{A}_7$	67
2.32	États de l'automate générateur des polyominos inscrits dans un rectangle de largeur 2.	68
2.33	Automate $\mathcal{A}_2$	70
2.34	Polyomino inscrit dans le rectangle 2×1	76
2.35	Polyomino inscrit dans le rectangle 3×1	80
3.1	Deux exemples de forêts de polyominos inscrites dans un rectangle B	87
3.2	Exemple de forêt de polyominos non inscrite contenue dans un rectangle du type 8×7 dont la première ligne est dépourvue de cellules.	88
3.3	Forêt de polyominos inscrite dans un rectangle du type R_{15} de hauteur 8.	92
3.4	Forêts de polyominos inscrites dans le rectangle 3×1	96
3.5	Forêts de polyominos inscrites dans le rectangle 3×2 partant de l'état $(100, 000, \{\{0\}\})$	97
3.6	Forêts de polyominos inscrites dans le rectangle 3×2 partant de l'état $(010, 000, \{\{0\}\})$	97
3.7	Forêts de polyominos inscrites dans le rectangle 3×2 partant de l'état $(001, 000, \{\{0\}\})$	97
3.8	Forêts de polyominos inscrites dans le rectangle 3×2 partant de l'état $(110, 110, \{\{0\}\})$	97
3.9	Forêts de polyominos inscrites dans le rectangle 3×2 partant de l'état $(101, 000, \{\{0\}, \{1\}\})$	97
3.10	Forêts de polyominos inscrites dans le rectangle 3×2 partant de l'état $(011, 011, \{\{0\}\})$	98
3.11	Forêts de polyominos inscrites dans le rectangle 3×2 partant de l'état $(111, 121, \{\{0\}, \{1\}\})$	98

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'énumération des polyominos et forêts de polyominos inscrits dans un rectangle de largeur et de hauteur quelconques selon des paramètres tels que l'aire, le périmètre, le nombre de feuilles et le nombre de composantes connexes.

Plus précisément, soit B un entier naturel non nul et R_B la famille des rectangles de largeur B et de hauteur entière. Nous construisons des automates $\mathcal{A}_B$ et $\mathcal{A}_{FB}$ dont les chemins sont en bijection respectivement avec les polyominos et les forêts de polyominos contenus dans les rectangles de R_B . Nous construisons les matrices de transition relatives à chacun des automates et les théorèmes garantissant l'inscriptibilité d'un polyomino dans un rectangle de R_B . Nous énumérons tous les polyominos et les forêts de polyominos inscrits dans ces types de rectangles.

Pour arriver à nos fins, nous établissons plusieurs formules fondamentales et exactes relevant de la combinatoire, notamment les formules permettant les déterminations d'aire, de périmètre, du nombre de feuilles et du nombre de composantes connexes échangés lors d'une transition d'un état à un autre. Nous présentons de façon détaillée les cas $B = 2$ et $B = 3$ notamment la génération des matrices de transfert ainsi que les fonctions génératrices associées.

ABSTRACT

In this thesis we are interested in the enumeration of polyominoes and forests of polyominoes inscribed in a rectangle of any width and height according to parameters such as the area, the perimeter, the number of leaves and the number of connected components.

More precisely, let B be a non-zero natural number and R_B the family of rectangles of width B and integer height. We build automata $\mathcal{A}_B$ and $\mathcal{A}_{FB}$ whose paths are in bijection respectively with the polyominoes and the forests of polyominoes inscribed in the rectangles of R_B . We construct the transition matrix with respect to each of the automata from which and from the theorems guaranteeing the polyomino is inscribed in a rectangle of R_B . We enumerate all the polyominoes and the forests of polyominoes inscribed in these types of rectangles.

To achieve our goals, we establish several formulas related to combinatorics in particular, the formulas allowing the determination of area, perimeter, the number of leaves and the number of connected components exchanged during a transition of one state to another. We present in detail the cases $B = 2$ and $B = 3$ in particular we generate transition matrix and associated generating functions.

INTRODUCTION

L'étude des polyominos a une longue histoire, remontant au début du 20^e siècle, mais ils ont été popularisés grâce à Golomb (1966, 1989), puis par Martin Gardner dans ses chroniques parus dans *Scientific American* intitulés « Mathematical Games » Gardner (1977) et, enfin, par David Klarner dans l'article Klarner et Rivest (1973). Ils constituent désormais un sujet populaire en mathématiques récréatives et ont également suscité l'intérêt des mathématiciens, des physiciens, des biologistes et des informaticiens.

L'un des problèmes fondamentaux considérés concernant les polyominos est la détermination de leur nombre en fonction de leur aire. Bien qu'il y ait eu, ces dernières années, quelques progrès dans des ouvrages portant sur l'énumération des polyominos, notamment dans Delest et Dulucq (1993), une formule facilement calculable reste en suspens. L'énumération des polyominos dépend de certains paramètres qui les caractérisent parmi lesquels on peut citer entre autres leur aire et leur périmètre. Pour le moment, il n'y a pas de formule générale permettant d'énumérer des polyominos selon les statistiques considérées, la méthode abordée dans Klarner et Rivest (1973) en est un exemple. En revanche, plusieurs méthodes d'énumération de certaines familles de polyominos ont été développées ces dernières décennies. Une grande partie de ces nouvelles avancées portent sur la convexité et l'orientation des polyominos.

Delest et Viennot (1984) ont prouvé que les polyominos convexes de périmètre $2n + 8$ sont au nombre de $(2n + 11)4^n - 4(2n + 1)\{n^{2n}\}$, un résultat confirmé quatre ans plus tard par Chang et Lin (1988) à travers les séries génératrices dépendantes

de la hauteur et de la largeur de ces derniers. Avec la physique statistique, la notion de polyomino dirigé a été introduite : un polyomino dirigé est un polyomino dont une des cellules, appelée source, est fixée et chacune des autres cellules est atteinte par un chemin dans deux directions partant de la source. Derrida *et al.* (1982) ont énuméré certains polyominos dirigés en fonction de leur aire dont des résultats similaires peuvent être consultés dans un article de Hakim et Nadal (1983). Gouyou-Beauchamps et Viennot (1988) ont énuméré les polyominos sur la base de leur aire et leur périmètre, et Viennot en a fait la synthèse (Viennot (1985)). Delest et Dulucq (1993) ont de leur côté énuméré les polyominos verticalement convexes et dirigés sur la base de leur aire et de leur périmètre tandis que les polyominos dirigés diagonalement convexes ont été étudiés par Privman et Svrakic (1988) sur la base de leur aire. Bien que l'utilisation des séries génératrices suivant les dimensions des polyominos ait contribué à l'énumération des polyominos convexes, il est à noter que, pour le moment, ces résultats restent partiels et le plus souvent asymptotiques et dépendants d'une certaine sous-classe de polyominos. Notamment on ne sait toujours pas énumérer les polyominos convexes suivant l'aire. Klarner et Rivest (1973) en ont trouvé une estimation asymptotique alors que Bousquet-Mélou (1993) établit un système de q équations dont une des composantes de la solution est la série génératrice des polyominos convexes, comptés suivant la hauteur, la largeur et l'aire.

Goupil et ses coauteurs ont étudié des polyominos inscrits dans des rectangles de dimensions données (Goupil *et al.* (2010)). Ils ont entre autres énuméré les polyominos inscrits d'aire minimale et ensuite les polyominos inscrits d'aire minimale plus un et plus deux. Parmi les travaux notables, nous avons l'article Goupil *et al.* (2013) dans lequel, en considérant certaines statistiques données, les auteurs ont construit des formules exactes et des fonctions génératrices énumérant les polyominos non nécessairement convexes et inscrits dans un rectangle. Des princi-

pales fonctions génératrices, ils ont déduit les fonctions génératrices et les formules exactes des polyominos d'indices un et deux avec des formules plus générales que celles déjà établies sans la contrainte de convexité.

Depuis la fin du 19^e siècle, les polyominos apparaissent régulièrement dans les puzzles et les jeux, dont le jeu Tétris. Ils sont utilisés dans les pavages de surfaces et interviennent en modélisation dans les domaines de la biologie, de la physique statistique et de la chimie. En effet, les polyominos modélisent l'écoulement d'un fluide dans les problèmes de percolation tout en évaluant la probabilité que le fluide passe au travers d'un certain matériau (Rousseau (2014)). Du point de vue chimique, les molécules et les polymères peuvent être représentés par des polyominos ou par des polycubes (Bousquet-Mélou et Rechnitzer (2003)).

Plusieurs avancées ont été faites ces dernières décennies par rapport à ce sujet. La plupart des études se limitent à la fixation d'au moins un des paramètres tels que la hauteur ou la largeur du rectangle dans lequel ces polyominos sont inscrits. La question qui s'y dégage est donc celle-ci : n'est-il pas possible d'énumérer des polyominos inscrits dans un rectangle de dimensions quelconques en tenant compte des paramètres d'aire, de périmètre, du nombre de feuilles et du nombre de composantes connexes ? Une partie des réponses à cette question se trouve dans ce mémoire.

Le premier chapitre est consacré aux rappels des termes techniques qui sont utilisés tout au long de ce travail, notamment les généralités sur les polyominos, les séries génératrices, la théorie des langages et des automates et les partitions non croisées.

Dans le chapitre 2, nous construisons l'automate nous permettant de générer et d'énumérer les polyominos inscrits dans un rectangle de dimensions quelconques. Dans ce même chapitre, nous présentons en détails les automates pour le cas des rectangles de largeur 2 et 3.

Dans le troisième chapitre nous construisons, tout comme dans le deuxième chapitre, l'automate permettant de générer et d'énumérer les forêts de polyominos inscrites dans un rectangle de dimensions quelconques.

Au chapitre 4, nous présentons les principaux algorithmes permettant l'implémentation des formules obtenues aux chapitres précédents.

CHAPITRE I

PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre rappelle quelques concepts fondamentaux qui sont utiles dans la suite de ce mémoire. Il s'agit donc de la terminologie et des résultats déjà connus dans la littérature sur lesquels se base l'essentiel de nos travaux.

Nous évoquons dans un premier temps quelques généralités sur les polyominos. Ensuite, nous rappelons quelques notions sur la théorie des langages et des automates. Puis nous terminons avec la notion de partition non croisée.

1.1 Généralités sur les polyominos

Dans cette section, nous passons en revue quelques définitions et propriétés sur les polyominos.

1.1.1 Quelques définitions et exemples

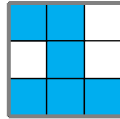
Une *cellule* est un carré dont les côtés mesurent l'unité (figure 1.1). Deux cellules sont dites *adjacentes* si et seulement si elles ont un côté en commun. Un *polyomino* est un ensemble connexe de cellules (figure 1.2a).

Une *forêt* de polyominos est une collection de polyominos disjoints (figure 1.2b). Chaque polyomino d'une forêt de polyominos est une *composante connexe* de cette

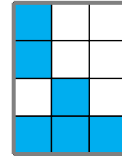


Figure 1.1: Une cellule.

dernière. Deux cellules appartenant à une même composante connexe sont dites *connectées*.



(a) Des polyominos.



(b) Une forêt de deux polyominos inscrite dans un rectangle de largeur 3 et de hauteur 4.

Figure 1.2: Deux polyominos et une forêt de polyominos.

Un *pas* ou un *déplacement unitaire* entre deux cellules connexes est le segment (vertical ou horizontal) de longueur unité ayant pour extrémités les centres de ces cellules. Son orientation dépend ainsi de la position de l'une des cellules par rapport à l'autre (en tenant compte des quatre points cardinaux).

Un *chemin* dans un polyomino est une suite de pas connectés deux à deux aux extrémités.

Le *degré* d'une cellule d'un polyomino est le nombre de cellules qui lui sont adjacentes et chacune de ses cellules de degré 1 est appelée *feuille*.

Dans un polyomino, nous définissons le *périmètre* d'une cellule comme étant la différence entre le nombre 4 et son degré.

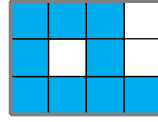


Figure 1.3: Exemple de polyomino inscrit dans le rectangle 4×3 .

L'*aire* d'un polyomino est le nombre de cellules qui le constituent et son *périmètre* est la somme des périmètres de toutes les cellules qui le composent.

Exemple 1.1.1. *Considérons le polyomino de la figure 1.3. À part la cellule de droite de la ligne en bas et celle qui lui est adjacente (à gauche) dont les périmètres sont respectivement 3 et 1, les sept autres cellules ont chacune 2 comme périmètre. Le périmètre total de ce polyomino est alors $2 \times 7 + 3 + 1 = 18$. Son aire est 9 et il a une feuille.*

1.1.2 Quelques classes de polyominos

Un polyomino *colonne* est un polyomino dont les cellules sont empilées verticalement l'une au-dessus de l'autre sur une seule colonne formant ainsi un ensemble connexe.

Un polyomino *ligne* est un polyomino obtenu d'un polyomino colonne par une rotation de 90° .



(a) Polyomino colonne



(b) Polyomino ligne.

Figure 1.4: Exemples de polyominos colonne et ligne.

Un polyomino est dit *verticalement convexe* si chacune de ses colonnes est un

ensemble connexe de cellules.

Il est dit *horizontalement convexe* si chacune de ses lignes est un ensemble connexe de cellules.

Il est dit *convexe* s'il est à la fois horizontalement et verticalement convexe.

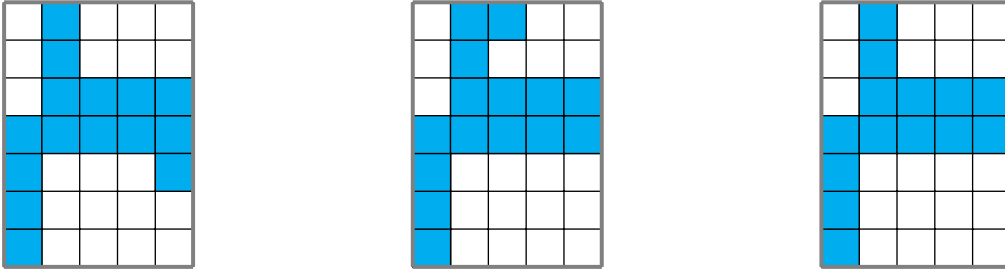


Figure 1.5: Ces polyominos de la gauche vers la droite sont verticalement convexe, horizontalement convexe et convexe.

Exemple 1.1.2. *Les polyominos de la figure 1.5 sont de la gauche vers la droite verticalement convexe, horizontalement convexe et convexe.*

Le polyomino *parallélogramme* est un polyomino convexe dont la suite des niveaux des cellules les plus basses (respectivement les plus hautes) de ses colonnes croît de la gauche vers la droite (figure 1.6).

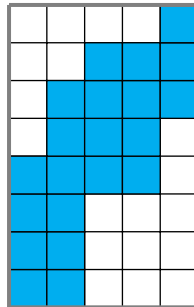


Figure 1.6: Polyomino parallélogramme.

Un polyomino *serpent* est un polyomino qui a au moins deux cellules et dont deux cellules sont de degré 1 et les autres de degré 2 (figure 1.7).

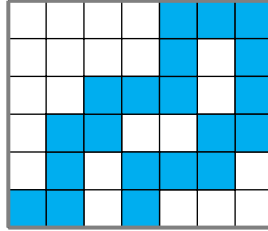


Figure 1.7: Polyomino serpent.

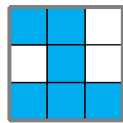
1.2 Polyomino inscrit dans un rectangle

Un polyomino est dit *contenu* dans un rectangle si aucune de ses cellules n'est en dehors de ce dernier. Dans ce cas on dit que ce rectangle le *contient*.

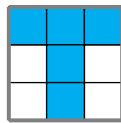
Ainsi tout polyomino est dit *inscrit* dans le plus petit rectangle qui le contient (figure 1.8a).

Une forêt de polyominos est dite *inscrite* dans un rectangle $B \times H$, où $B, H \in \mathbb{N} - \{0\}$, si ce dernier est le plus petit rectangle qui la contient (figure 1.9).

Le rectangle dans lequel est inscrit un polyomino ou une forêt de polyominos est dit rectangle *circonscrit* à ce polyomino ou à cette forêt de polyominos.



(a) Polyominos inscrits dans le rectangle 3×3 .



(b) Polyomino non inscrit dans le rectangle 3×3 .

Figure 1.8: Exemples de deux polyominos inscrits et un polyomino non inscrit.

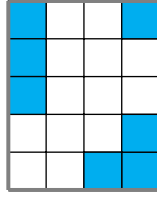


Figure 1.9: Forêt de polyominos inscrite dans le rectangle 4×5 .

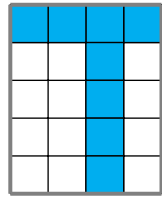
Exemple 1.2.1. *Les polyominos de la figure 1.8a sont inscrits dans le rectangle 3×3 (carré de côté 3) alors que le polyomino de la figure 1.8b est non inscrit dans le carré 3×3 dans lequel il est contenu, car il ne touche pas le bord gauche.*

La *hauteur* et la *largeur* d'un polyomino sont respectivement la hauteur et la largeur du rectangle qui lui est circonscrit.

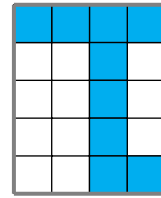
Un polyomino d'aire minimale, ou d'indice 0, est un polyomino inscrit dans un rectangle $B \times H$ et d'aire $B + H - 1$.

Un polyomino d'aire minimale plus r , ou d'indice r , est un polyomino inscrit dans un rectangle $B \times H$ et d'aire $B + H + r - 1$.

Exemple 1.2.2. *Le polyomino de la figure 1.10a et celui de la figure 1.10b sont respectivement d'indice 0 et d'indice 1.*



(a) Polyomino d'indice 0.



(b) Polyomino d'indice 1.

Figure 1.10: Exemples de polyominos d'indice 0 et d'indice 1.

L'étude des polyominos d'indice $r = 0, 1, 2$ a fait l'objet de quelques articles de

Goupil *et al.* Dans un premier temps, cette famille de polyominoes, inscrits dans un rectangle de taille donnée, a été introduite dans la publication Goupil *et al.* (2010) où plusieurs formules exactes ainsi que les fonctions génératrices ont été établies puis utilisées pour énumérer les polyominoes arbres inscrits dans un rectangle d'aire minimale plus un. On retrouve des résultats similaires en dimensions 3, cas des polycubes, dans Goupil et Cloutier (2011). Ensuite, des formules préétablies dans Goupil *et al.* (2010) sont déduites les fonctions génératrices et les formules exactes des polyominoes d'indice 1 et 2, faisant ainsi l'objet de l'article Goupil *et al.* (2013).

À partir des résultats sur la série génératrice du nombre de polyominoes convexes inscrits dans un rectangle de taille $B \times H$, Chang et Lin (1988), Gessel (1999) donnent une formule permettant de calculer ce nombre.

Tout comme dans les publications de Goupil précitées, l'énumération des polyominoes inscrits est détaillée par plusieurs auteurs dont Bousquet-Mélou (1993).

Dans la plupart des travaux portant sur les polyominoes inscrits, l'objectif principal est le dénombrement des polyominoes en fonction de certains paramètres tels que le périmètre, l'aire et le nombre de feuilles. Dans ce mémoire, nous nous proposons de dénombrer les polyominoes inscrits dans un rectangle $B \times H$, H variable, en fonction de la hauteur du rectangle, de l'aire et du périmètre de chaque polyomino et chaque forêt de polyominoes inscrits.

1.3 Théorie des langages, des automates et des transducteurs

La théorie des langages, des automates et des transducteurs est l'un des outils fondamentaux dont nous avons besoins dans la suite de nos travaux. Les automates nous facilitent particulièrement l'énumération de tous les polyominoes inscrits, dans un rectangle donné, sans omission.

1.3.1 Monoïde et semi-anneau

Définition 1.3.1. (i) Soit G un ensemble muni d'une loi interne, notée $\star$, associative et admettant un élément neutre e . Alors le couple $(G, \star)$ est un monoïde. Il est dit commutatif lorsque pour tout $g, h \in G$, $g \star h = h \star g$.

(ii) Soit $(G, \star, \perp)$ un triplet dont G un ensemble avec $\star$ et $\perp$ des lois associatives. On suppose qu'il existe deux éléments e et 1 de G tels que $(G, \star)$ soit un monoïde commutatif d'élément neutre e et $(G, \perp)$ un monoïde d'élément neutre 1 . Alors $(G, \star, \perp)$ est appelé semi-anneau. Plus généralement dans un semi-anneau $(G, \star, \perp)$, la loi $\star$ est l'addition $(+)$ d'élément neutre 0 et $\perp$ est la multiplication $(\times)$ d'élément neutre 1 .

1.3.2 Alphabet, mot, langage

Un *alphabet* Σ est un ensemble fini de symboles.

Un *mot* w sur un alphabet Σ est une suite finie de symboles de Σ .

La longueur d'un mot w , notée $|w|$ est le nombre de symboles le constituant. Par convention pour tout alphabet Σ , il existe un mot de longueur 0 noté ε et appelé *mot vide*.

L'ensemble de tous les mots sur l'alphabet Σ est noté Σ^* .

Σ^* muni de la concaténation est un monoïde libre.

Un langage sur un alphabet Σ est un ensemble fini ou infini de mots sur Σ . C'est un sous-ensemble de Σ^* .

Exemple 1.3.1. $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$, $\Sigma_2 = \{\lambda, \mu, \nu, \omega\}$ sont deux exemples d'alphabets. $w_1 = abbca$ et $w_2 = \mu\nu\lambda\nu\nu$ sont des mots respectivement sur Σ_1 et sur Σ_2 de longueur 5.

1.3.3 Automate

Un automate fini *élémentaire* est la donnée d'un quintuplet

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, F, R)$$

où Q est un ensemble fini non vide d'éléments appelés *états* de $\mathcal{A}$, Σ est un *alphabet* fini appelé alphabet de l'automate $\mathcal{A}$, I et F sont des sous-ensembles non vides de Q dont les éléments sont respectivement les états *initiaux* et les états *finaux* de $\mathcal{A}$, puis R est un sous-ensemble de $Q \times \Sigma \times Q$ appelé ensemble des *transitions*. Pour un tel automate, si $(p, w, q) \in R$ on a $|w| = 1$.

On désigne par δ la relation sur Q dont le graphe est R c'est-à-dire pour $p, q \in Q$, $p\delta q$ si et seulement s'il existe $w \in \Sigma$ tel que $(p, w, q) \in R$. On note par D_δ l'ensemble $\{(p, w) \in Q \times \Sigma : \exists q \in Q, (p, w, q) \in R\}$. On note que δ définit une relation qui n'est pas nécessairement une fonction entre D_δ et Q , car on peut avoir $(p, w, q_1), (p, w, q_2) \in R$ avec $q_1 \neq q_2$.

Remarque 1.3.1. *On étend naturellement δ à*

$$D_\delta^* = \{(p, w) \in Q \times \Sigma^* : \exists q \in Q, (p, w, q) \in R \subset Q \times \Sigma^* \times Q\}$$

en posant :

$$\begin{aligned} \delta(q, \varepsilon) &= q, \\ \delta(q, aw) &= \delta(\delta(q, a), w), \quad \text{avec } a \in \Sigma \text{ et } w \in \Sigma^*. \end{aligned}$$

Ainsi on a la définition généralisée d'un automate fini en considérant R comme étant un sous-ensemble de $Q \times \Sigma^ \times Q$. Les transitions dans ce cas sont des mots.*

Un tel automate n'est plus élémentaire lorsqu'au moins une de ses transitions est de longueur supérieure ou égale à 2.

Exemple 1.3.2. L'illustration de la figure 1.11 représente un automate fini élémentaire pour lequel $I = \{q_0, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, r_1, r_2\}$, $F = \{q_1, q_5, r_1\}$ et

$$R = \{(q_0, a, q_1), (q_0, b, r_1), (q_1, a, q_1), (q_1, b, q_2), (q_2, a, q_1), (q_2, b, q_2), (r_1, b, r_1), (r_1, a, r_2), (r_2, b, r_1), (r_2, a, r_2), (q_0, b, q_3), (q_0, a, q_4), (q_4, a, q_4), (q_4, b, r_1), (q_5, a, r_2), (q_5, a, q_4), (q_3, b, q_2), (q_2, b, r_2)\}.$$

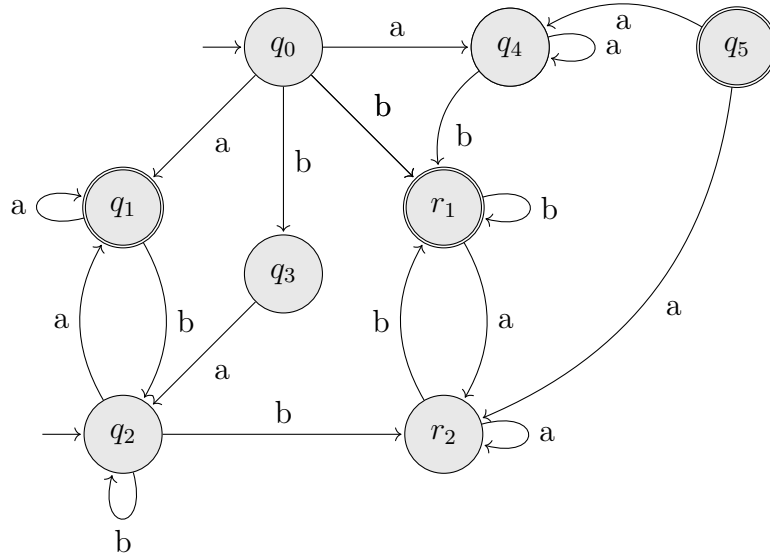


Figure 1.11: Exemple d'automate fini élémentaire non déterministe.

Définition 1.3.2. L'automate $\mathcal{A}$ est dit déterministe si I est réduit à un seul élément (c'est-à-dire un seul état initial q_0) et pour tous $p, q, q' \in Q$ et $a \in \Sigma$, si $(p, a, q), (p, a, q') \in R$, alors $q = q'$ ce qui signifie que δ est une fonction.

Ainsi, si $\mathcal{A}$ est un automate fini déterministe, il existe une fonction $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ telle que pour $(p, a, q) \in R$, $\delta(p, a) = q$. On écrit alors $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$.

Exemple 1.3.3.

Dans l'automate de la figure 1.12, on a $I = \{q_0\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, r_1, r_2\}$,

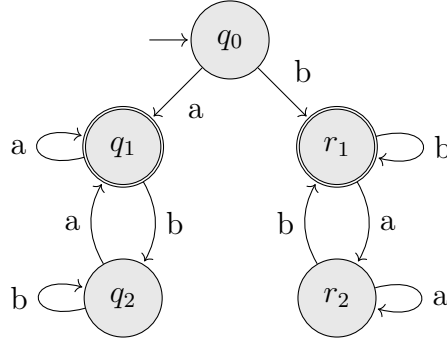


Figure 1.12: Exemple d'automate fini élémentaire déterministe.

$F = \{q_1, r_1\}$ et

$$R = \{(q_0, a, q_1), (q_0, b, r_1), (q_1, a, q_1), (q_1, b, q_2), (q_2, a, q_1), (q_2, b, q_2), (r_1, b, r_1)$$

$$(r_1, a, r_2), (r_2, b, r_1), (r_2, a, r_2)\}.$$

C'est un automate déterministe.

Un mot $w = w_1 w_2 \dots w_n$, $w_i \in \Sigma$, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, est dit reconnu ou accepté par un automate fini $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, F, R)$, s'il existe $q_0 \in I$, $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $m_1, m_2, \dots, m_l \in \Sigma$, $q_1, q_2, \dots, q_l \in Q$ tels que

$$(q_0, m_1, q_1), (q_1, m_2, q_2), \dots, (q_{l-1}, m_l, q_l) \in R, \quad (1.1)$$

$$w = m_1 m_2 \dots m_l \text{ et } q_l \in F.$$

Le langage accepté par l'automate fini $\mathcal{A}$ est l'ensemble de tous les mots de Σ^*

acceptés par $\mathcal{A}$.

Particulièrement, le langage accepté par un automate fini déterministe

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta) \text{ est } \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* : \delta(q_0, w) \in F\}.$$

Lemme 1.3.1. *Tout langage accepté par un automate fini non déterministe est accepté par un automate fini non déterministe élémentaire défini sur le même alphabet Σ .*

La démonstration du lemme 1.3.1 peut être consultée dans Rabin et Scott (1959).

Proposition 1.3.1. *Tout langage accepté par un un automate fini non déterministe est accepté par un automate fini déterministe.*

On retrouve la preuve de cette proposition dans Hopcroft *et al.* (1979) et Rabin et Scott (1959).

Les aspects abordés dans cette sous-section sont largement détaillés dans Hopcroft *et al.* (1979), Sipser (1996) et Rabin et Scott (1959).

1.3.4 Transducteur

Pour mieux expliquer l'aspect calculatoire des transitions des automates que nous utilisons, dans la suite, il est impératif d'introduire la théorie de transducteur.

Définition 1.3.3. *Soit E_1 et E_2 deux sous-ensembles de Σ (ou de Σ^*). $E_1 + E_2$ est la réunion des deux ensembles (c'est-à-dire $E_1 + E_2 = E_1 \cup E_2$, en particulier si $a, b \in \Sigma^*$, $\{a\} + \{b\} = \{a\} \cup \{b\}$)*

Le produit $E_1 E_2$ est le produit cartésien des ensembles E_1 et E_2 (c'est-à-dire $E_1 E_2 = \{m_1 m_2 : m_1 \in E_1, m_2 \in E_2\}$).

Définition 1.3.4. Soit Σ un alphabet fini. Les expressions rationnelles sur Σ sont définies de manière inductive par :

- (i) $\emptyset$ et ε sont des expressions rationnelles ;
- (ii) tout élément a de Σ est une expression rationnelle ;
- (ii) si E_1 et E_2 sont deux expressions rationnelles de Σ alors $E_1 + E_2$, $E_1 E_2$, E_1^* et E_2^* sont des expressions rationnelles de Σ .

L'ensemble des expressions rationnelles de Σ est un sous-ensemble de Σ^* , noté $\text{Rat}\Sigma^*$.

Remarque 1.3.2. Soit E est une expression rationnelle sur Σ , alors $\underbrace{E + E + \dots + E}_{n \text{ termes}} = nE$ est une expression rationnelle appelée expression rationnelle sur Σ à multiplicité n . En particulier Σ^* et $\underbrace{\Sigma^* + \Sigma^* + \dots + \Sigma^*}_{n \text{ termes}} = n\Sigma^*$ sont des expression rationnelles.

L'ensemble des expressions rationnelles sur Σ à multiplicité dans $\mathbb{N}$ est noté $\mathbb{N}\text{Rat}\Sigma^*$.

$\mathbb{N}\text{Rat}\Sigma^*$ muni respectivement des opérations d'union et de concaténation est un semi-anneau.

$$M = \{a^n b^n : n \geq 0\}, N = \{a^n b^p : n \neq p\}$$

sont des exemples d'expressions non rationnelles car si nous prenons par exemple $a_1, a_2 \in M$, avec $a_1 = a^{n_1} b^{n_1}$ et $a_2 = a^{n_2} b^{n_2}$, alors

$$a_1 a_2 = a^{n_1} b^{n_1} a^{n_2} b^{n_2} \notin M.$$

Définition 1.3.5. On désigne par transducteur fini $\mathcal{T}$ la donnée d'un 6-uplet $(Q, \Sigma_1, \Sigma_2, I, F, R)$, où Q est l'ensemble fini des états du transducteur ; Σ_1, Σ_2 deux alphabets appelés alphabets de $\mathcal{T}$; I et F deux sous-ensembles de Q respectivement

l'ensemble des états initiaux et l'ensemble des états finaux de $\mathcal{T}$; R sous-ensemble de $Q \times (\Sigma_1 \cup \{\varepsilon\}) \times (\Sigma_2 \cup \{\varepsilon\}) \times Q$ est la table de transition, avec ε le mot vide.

Soit $(q, a_1, a_2, p) \in R$ alors il existe une transition étiquetée (a_1, a_2) de l'état q vers l'état p .

Un transducteur fini peut être considéré sous deux formes selon ses applications.

- (i) Il peut être vu comme un automate qui génère des paires de mots dans le langage $\Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$. Dans ce cas toute transition possible d'un état q à un état p est pondérée par un couple de la forme (a_1, a_2) où $a_1 \in \Sigma_1$ et $a_2 \in \Sigma_2$.
- (ii) Dans d'autres cas il est plutôt vu comme un automate qui lit un mot de Σ_1^* et génère des mots appartenant au langage Σ_2^* . Dans ce cas le poids d'une transition possible d'un état q à un état p est de la forme $a_1|a_2$ où $a_1 \in \Sigma_1$ et $a_2 \in \Sigma_2$. Σ_1 et Σ_2 sont respectivement appelés l'alphabet d'entrée et l'alphabet de sortie.

Définition 1.3.6. *Un transducteur est dit séquentiel s'il est déterministe par rapport à son alphabet d'entrée.*

Définition 1.3.7. *Un transducteur pondéré est défini par un 7-uplet*

$$\mathcal{T} = (Q, \Sigma_1, \Sigma_2, \mathbb{N}, I, F, R),$$

avec Q l'ensemble fini des états de $\mathcal{T}$; Σ_1 et Σ_2 ses alphabets ; I et F sont des sous-ensembles de $\mathbb{N}^Q$ respectivement les ensembles des vecteurs initiaux et finaux de $\mathcal{T}$ et R un sous-ensemble de $Q \times (\Sigma_1 \cup \{\varepsilon\}) \times (\Sigma_2 \cup \{\varepsilon\}) \times \mathbb{N} \times Q$.

Comme tout transducteur fini non pondéré, les transducteurs pondérés peuvent être considérés aussi de deux façons.

- (i) Ils peuvent être considérés comme des $\mathbb{N}$ -automates lisant leur entrée sur

deux bandes et produisant une valeur dans $\mathbb{N}$. Dans ce cas, si $(q, a_1, a_2, k, p) \in R$ alors le poids de la transition de q à p est noté $(a_1, a_2)|k$.

- (ii) D'autre part, un transducteur pondéré peut être considéré comme un automate sur une bande produisant un poids dans le semi-anneau $\mathbb{N}Rat\Sigma^*$.

Les notions sur les expressions rationnelles ainsi que sur les transducteurs sont détaillées dans Eilenberg (1976).

1.4 Automates $\mathcal{A}_B$ des polyominos contenus dans un rectangle de largeur B
 Dans cette section, nous proposons une famille d'automates spécifiques, notée $(\mathcal{A}_B)_{B \geq 1}$, décrivant tous les polyominos pouvant être contenus dans un rectangle, de largeur B donnée. L'étude de ces automates est détaillée dans les prochains chapitres. Les rectangles considérés sont de dimensions $B \times H$, dont B et H représentent respectivement la largeur et la hauteur. Dans la suite, dès que l'usage de la hauteur n'est pas nécessaire, nous utilisons le terme *rectangle de type B* pour désigner un rectangle de largeur B . Lorsqu'une case du rectangle est occupée par une cellule, on la colorie en bleu.

Étant donnée une ligne vide (dont toutes les cases sont sans cellules) d'un rectangle de type B , il y a 2^B façons d'occuper ses cases ou non (voir la figure 1.13 pour le cas $B = 2$). On dit alors qu'un rectangle de type B a $2^B - 1$ lignes possibles de longueur B (sans compter la ligne vide). À partir des lignes possibles d'un tel rectangle, nous construisons les états de l'automate $\mathcal{A}_B$. L'alphabet et les transitions entre les états de l'automate $\mathcal{A}_B$ contiennent les variables utilisées pour compter l'aire, le périmètre, la hauteur et le nombre de feuilles d'un polyomino contenu dans un rectangle de type B .



Figure 1.13: Les lignes possibles d'un rectangle de type 2.

1.5 Partition non croisée

Nous rappelons, dans cette section, la définition d'une partition non croisée ainsi qu'un résultat fondamental sur cette notion. Les partitions non croisées sont, par la suite, utiles dans la construction et l'énumération des états des automates $\mathcal{A}_B$.

Définition 1.5.1. *Soit E un ensemble non vide. Une partition de E est un ensemble de parties non vides de E deux à deux disjointes et dont la réunion est E .*

Définition 1.5.2. *Soit n, k deux entiers naturels et $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ une partition de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. $\mathcal{P}$ est dite non croisée si étant données P_i et $P_j \in \mathcal{P}$ telles que $i \neq j$, pour $a, b \in P_i$ et $c, d \in P_j$ on ne peut pas avoir $a < c < b < d$.*

Exemple 1.5.1. *Soit $n = 5$,*

$$\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}, \quad \{\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}\}$$

sont deux partitions non croisées de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ par contre $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}\}$ en est une partition croisée.

Théorème 1.5.1. *Le nombre de partitions non croisées de $\{1, 2, \dots, n\}$ est égal au nombre de Catalan*

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}. \quad (1.2)$$

Les détails de la preuve de ce théorème peuvent être consultés dans (Kreweras, 1972).

CHAPITRE II

AUTOMATE DÉCRIVANT LES POLYOMINOS INSCRITS DANS UN RECTANGLE

Dans ce chapitre nous allons mettre en place une structure permettant la génération et l'énumération de familles de polyominos inscrits dans un rectangle.

En considérant un polyomino inscrit dans un rectangle donné, ce dernier peut être décomposé comme une suite de lignes du haut vers le bas comme l'illustre la figure 2.1. Ainsi chaque ligne représente un état dans la construction dudit polyomino.



Figure 2.1: Décomposition de (P) en une suite de lignes.

En se servant de la théorie des automates et des transducteurs, nous proposons de construire l'automate générateur de quelques familles de polyominos inscrits dans des rectangles d'une largeur B fixée, et d'une hauteur H variable. Les automates que nous construisons peuvent être plutôt vus comme des transducteurs pondérés dont les poids (coefficients de pondération ou multiplicités) sont pris dans $\mathbb{N}$ (des $\mathbb{N}$ -automates) mais nous choisissons d'utiliser le terme automate puisque c'est principalement le langage reconnu qui nous intéresse.

Dans un premier temps, nous présentons quelques généralités sur ces automates. Ensuite, nous focalisons sur les cas $B = 2$ et $B = 3$.

2.1 Généralités

2.1.1 État

On considère une famille de rectangles de largeur B . Pour commencer, nous représentons chaque ligne d'un rectangle de B par un nombre binaire (figure 2.2). Chaque case occupée par une cellule sera marquée 1 et 0 si les cellules sont vides.

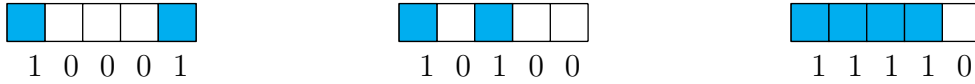


Figure 2.2: Représentation de trois lignes d'un rectangle de type 5 par des nombres binaires .

Sur chaque ligne (non vide) il y a au moins une cellule et les cellules se répartissent en sous-ensembles connexes, séparés l'un de l'autre par des cases vides. Pour une ligne donnée, chacun de ses sous-ensembles connexes maximaux est appelé *composante connexe* de cette dernière. Deux composantes connexes disjointes sur une ligne peuvent être connectées par le haut. Pour mieux distinguer ces composantes connexes l'une de l'autre, on propose de les numéroté de la gauche vers la droite en commençant par 0.

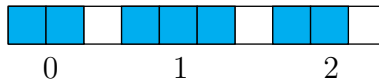


Figure 2.3: Les composantes connexes d'une ligne.

Exemple 2.1.1. *La ligne de la figure 2.3 a 3 composantes dont la première numérotée 0 a deux cellules, la deuxième numérotée 1 a 3 cellules et la dernière numérotée 2 a 2 cellules.*

Définition 2.1.1. Une ligne d'un rectangle de type B est une liste de B éléments de $\{0, 1\}$ différente de la B liste constituée uniquement de 0. C'est tout élément de $\{0, 1\}^B$ ($\{0, 1\}^B = \underbrace{\{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}}_{B \text{ facteurs}}$) sauf l'élément $\underbrace{00\dots 0}_B$.

L'ensemble des lignes d'un rectangle de type B est alors l'ensemble des B listes d'éléments de $\{0, 1\}$ privé de la B liste constituée uniquement de 0.

Dans la suite de ce travail on suppose que la position de chaque case est repérée par un repère ligne d'origine 1 c'est-à-dire que la première case est à gauche de la ligne tandis que la dernière est à la position B .

Bien que du point de vue de la forme certaines lignes de rectangle puissent se ressembler, il peut arriver qu'elles ne traduisent pas les mêmes réalités. Comme

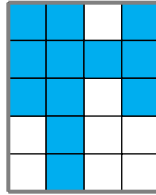


Figure 2.4: Différence entre les lignes ayant les mêmes composantes connexes.

par exemple le cas de la figure 2.4, la première et la troisième ligne ont la même distribution mais leurs composantes connexes ne sont pas liées par le haut de la même façon. Puisqu'on a convenu que la génération des polyominos se fait du haut vers le bas, si nous revenons sur la figure 2.4 on peut dire que les deux composantes connexes de la ligne 1 n'ont aucune interaction entre elles par le haut. Par contre, celles de la troisième ligne sont connectées par le haut via la ligne 2.

Ainsi pour distinguer ces cas, nous introduisons la notion de *composante connexe par le haut*.

Définition 2.1.2. Soit L une ligne d'un rectangle de largeur B . On dit que deux

de ses composantes connexes sont connectées ou connexes par le haut s'il existe un chemin dans le polyomino permettant de passer d'une composante connexe à l'autre par le biais des cellules des lignes en haut de L .

Les composantes connexes de L qui sont connectées par le haut forment alors un ensemble de composantes connexes que nous désignons par composante connexe par le haut de L .

Notation 2.1.1. Soit L une ligne d'un rectangle de type B et $k_1, k_2, \dots, k_n, k_i, n \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, n$ des composantes connexes de L . Si $k_1, k_2, \dots, k_n$ sont connectées entre elles par le haut, la composante connexe par le haut résultante est notée

$$\{k_1, k_2, \dots, k_n\}.$$

Définition 2.1.3. Une composante connexe par le haut d'une ligne L est dite de cardinalité n si elle est formée de n composantes connexes de L .

Remarque 2.1.1. Avec la définition 2.1.3, une composante connexe non connectée par le haut à aucune autre composante connexe est aussi considérée comme une composante connexe par le haut de cardinalité 1.

Exemple 2.1.2. On considère la deuxième ligne de la figure 2.5 dont les composantes connexes par le haut sont $\{0, 1\}$ de cardinalité 2 et $\{2\}$ de cardinalité 1.

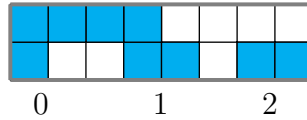


Figure 2.5: Exemples de composantes connexes par le haut.

Définition 2.1.4. Soit

$$E_n = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$$

l'ensemble des composantes connexes d'une ligne L d'un rectangle de type B . On note que l'indice i de chaque élément k_i de E_n est le rang qu'occupe la composante connexe k_i sur la ligne L (de la gauche vers la droite).

On désigne par E_{mc} , l'ensemble composé de toutes les partitions non croisées de E_n . Tout élément de E_{mc} est appelé partition non croisée de composantes connexes de L . C'est aussi une collection de composantes connexes par le haut de la ligne L .



Figure 2.6: Forêt de polyominos inscrite dans le rectangle 15×2 .

Exemple 2.1.3. Les ensembles $\{\{0\}, \{1\}\}$ et $\{\{0, 1\}, \{2, 3, 4\}\}$ sont respectivement des partitions non croisées de composantes connexes de la ligne du haut et de celle du bas de la forêt de polyominos de la figure 2.6.

Remarque 2.1.2. Les éléments de E_n sont ordonnés selon le rang qu'ils occupent sur la ligne L . Il y a donc une bijection entre ces derniers et leur rang. Ainsi E_n est isomorphe à $\{1, 2, \dots, n\}$. Le nombre de façons de constituer des ensembles de composantes connexes par le haut de E_n est égal au nombre de partitions non croisées de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Définition 2.1.5. On considère deux lignes L et L' , d'un rectangle de type B , de partitions non croisées de composantes connexes respectives cp_h et cp'_h . On dit que cp_h et cp'_h s'intersectent s'il existe au moins une composante connexe de cp_h et une autre de cp'_h qui se connectent. Au cas contraire on dit que cp_h et cp'_h ont une intersection vide.

Pour alléger l'écriture, une ligne L d'un rectangle de type B est notée sous la forme $L = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_B \in \{0, 1\}^B$. De même le produit de deux binaires α_i, α_j est

aussi noté $\alpha_i \alpha_j$.

Avant d'aborder la définition suivante, nous introduisons une notation utile, deg (appelée degré par le haut). deg est la correspondance entre la position de chaque case de la ligne $L = \alpha_{i_1} \alpha_{i_1+1} \dots \alpha_{i_1+\mathcal{L}-1}$, de longueur $\mathcal{L}$, vue comme la ligne la plus basse d'un rectangle de type B et un élément de l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$. Elle est calculée comme suit :

- si $\alpha_i = 0$ alors la case correspondante n'a pas de cellule et $deg(i) = 0$;
- si $\alpha_i = 1$ alors $deg(i)$ est le degré de la cellule située dans cette case,

où $1 \leq i_1 \leq B$ et $1 \leq \mathcal{L} \leq B$. D'une manière plus explicite et calculatoire, si nous désignons par L' la ligne qui précède L et par $L_\beta = \beta_{i_1} \beta_{i_1+1} \dots \beta_{i_1+\mathcal{L}}$ (avec $\beta_{i_1} = \beta_{i_1+1} = \dots = \beta_{i_1+\mathcal{L}-1} = 0$ si L est la ligne d'un état initial) la partie de L' qui coïncide avec L alors

$$deg(i_1) = \alpha_{i_1}(\beta_{i_1} + \alpha_{i_1+1}),$$

$$deg(i_1 + \mathcal{L} - 1) = \alpha_{i_1+\mathcal{L}-1}(\beta_{i_1+\mathcal{L}-1} + \alpha_{i_1+\mathcal{L}-2})$$

$$et\ pour\ i_1 < i < i_1 + \mathcal{L} - 1, \ deg(i) = \alpha_i(\alpha_{i-1} + \beta_i + \alpha_{i+1}).$$

Notons que dans la figure 2.7, on a $i_1 = 3$, $\mathcal{L} = 5$, $L = 10111$, $L' = 11111011$ et



Figure 2.7: Polyomino inscrit dans le rectangle 8×2 .

$$L_\beta = 11101.$$

Exemple 2.1.4. Considérons la deuxième ligne à partir du haut de la figure 2.8.

$$deg(1) = (1)(0+0) = 0, \quad deg(2) = (0)(1+1+1) = 0, \quad deg(3) = (1)(0+1+0) = 1, \\ deg(4) = (0)(1+0+1) = 0 \quad et \quad deg(5) = (1)(0+0) = 0.$$



Figure 2.8: Calcul des valeurs deg à la ligne du bas.

Définition 2.1.6. *Un état de longueur B de l'automate $\mathcal{A}_B$ (des polyominos contenus dans un rectangle de type B) est une ligne L de ce rectangle, dont une case au moins est occupée par une cellule, affectée d'une partition non croisée de composantes connexes de L et d'un mot $m_1m_2\dots m_B$ de longueur B , $m_i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $i = 1, 2, \dots, B$.*

Notation 2.1.2. *Soit $L = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_B$ une ligne d'un rectangle de type B , $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\mathcal{P}_{ed}$ une partition non croisée de composantes connexes de L et $m_1m_2\dots m_B$ le mot de l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ tel que $deg(i) = m_i$. Nous notons l'état e de $\mathcal{A}_B$ de longueur B , généré par L et $\mathcal{P}_{ed}$, par*

$$e = (\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_B, m_1m_2\dots m_B, \mathcal{P}_{ed}).$$

On note par $\mathcal{E}_B$ l'ensemble de tous les états de longueur B de l'automate $\mathcal{A}_B$.

Exemple 2.1.5. *Les triplets $(100, 000, \{\{0\}\})$, $(100, 100, \{\{0\}\})$, $(111, 221, \{\{0\}\})$, $(101, 101, \{\{0, 1\}\})$ sont des états de longueur 3 de $\mathcal{A}_3$. Les états dans cet exemple correspondent respectivement du haut vers le bas aux lignes du rectangle de la figure 2.9.*



Figure 2.9: Polyomino inscrit dans le rectangle 3×4 .

Nous définissons dans $\mathcal{E}_B$ une relation $\mathcal{R}_B$. Étant donné $e, e' \in \mathcal{E}_B$,

$$e\mathcal{R}_Be' \text{ si et seulement si } e \text{ et } e' \text{ ont la même ligne} \quad (2.1)$$

$$\text{et la même partition non croisée de composantes connexes}$$

Proposition 2.1.1. $\mathcal{R}_B$ est une relation d'équivalence.

Preuve. En effet,

- $\mathcal{R}_B$ est réflexive car tout état $e = (\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_B, m_1m_2\dots m_B, \mathcal{P}_{ed})$ de $\mathcal{E}_B$ est en relation avec lui même.
- Soit $e = (\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_B, m_1m_2\dots m_B, \mathcal{P}_{ed})$ et $e' = (\alpha'_1\alpha'_2\dots\alpha'_B, m'_1m'_2\dots m'_B, \mathcal{P}'_{ed})$ tels que $e\mathcal{R}_Be'$. On a $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_B = \alpha'_1\alpha'_2\dots\alpha'_B$ et $\mathcal{P}_{ed} = \mathcal{P}'_{ed}$ donc $e'\mathcal{R}_Be$. $\mathcal{R}_B$ est alors symétrique.
- Soit $e = (\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_B, m_1m_2\dots m_B, \mathcal{P}_{ed})$ et $e' = (\alpha'_1\alpha'_2\dots\alpha'_B, m'_1m'_2\dots m'_B, \mathcal{P}'_{ed})$ et $e'' = (\alpha''_1\alpha''_2\dots\alpha''_B, m''_1m''_2\dots m''_B, \mathcal{P}''_{ed})$ tels que $e\mathcal{R}_Be'$ et $e'\mathcal{R}_Be''$. On a alors $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_B = \alpha'_1\alpha'_2\dots\alpha'_B, \mathcal{P}_{ed} = \mathcal{P}'_{ed}$ d'une part et $\alpha'_1\alpha'_2\dots\alpha'_B = \alpha''_1\alpha''_2\dots\alpha''_B, \mathcal{P}'_{ed} = \mathcal{P}''_{ed}$ d'autre part. On en déduit que $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_B = \alpha''_1\alpha''_2\dots\alpha''_B, \mathcal{P}_{ed} = \mathcal{P}''_{ed}$, d'où $e\mathcal{R}_Be''$. Ce qui confirme la transitivité de $\mathcal{R}_B$.

Le quotient $\frac{\mathcal{E}_B}{\mathcal{R}_B}$ est noté $\mathbb{E}_B$.

Définition 2.1.7. Un élément de $\mathbb{E}_B$ est appelé classe d'états ou état fondamental de longueur B de $\mathcal{A}_B$.

Remarque 2.1.3. Les mots de l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$, utilisés dans la définition des états de l'automate $\mathcal{A}_B$, facilitent le calcul du nombre de feuilles des polyomino inscrits dans un rectangle de type B . Ainsi si l'on ne tenait compte que des paramètres aire et périmètre, un état de $\mathcal{A}_B$ serait un couple de ligne et d'une partition non croisée de composantes connexes. C'est ce qui justifie, d'ailleurs, le terme état fondamental utilisé pour désigner une classe d'états de $\mathcal{A}_B$. Dans ce cas seul $\mathbb{E}_B$ et $\mathcal{E}_B$ serait pertinent.

Remarque 2.1.4. Soit L une ligne possible, de longueur B , d'un rectangle de type B , pouvant être la première ligne ou une ligne précédée par d'autres. L génère autant d'états fondamentaux de longueur B que de partitions non croisées de composantes connexes.



Figure 2.10: Ligne d'un rectangle de type 10.

Exemple 2.1.6. La ligne de la figure 2.10, 1101111101, génère 5 partitions non croisées de composantes connexes notamment

$$\{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}, \{\{0, 1\}, \{2\}\}, \{\{0\}, \{1, 2\}\}, \{\{0, 2\}, \{1\}\} \text{ et } \{\{0, 1, 2\}\}.$$

Pour obtenir l'état fondamental correspondant à chaque partition non croisée de composantes connexes, il suffit de former le couple composé de la ligne et de cette dernière comme par exemple $(1101111101, \{\{0, 2\}, \{1\}\})$.

Remarque 2.1.5. Règle sur le choix de la longueur d'un état

Il peut arriver dans certains cas qu'un polyomino inscrit, à une étape donnée, évolue uniquement suivant une bande de largeur B' , $B' < B$, sans déborder jusqu'à la base du rectangle (voir figure 2.11).



Figure 2.11: Polyominos inscrits dans le rectangle de type 7 de hauteur 6.

Dans ce cas, la partie du polyomino inscrite dans cette bande peut être vue comme

un polyomino inscrit dans un rectangle de largeur B' . Ainsi pour décrire cette partie du polyomino, on impose l'utilisation d'un état de longueur égale à la longueur d'une telle bande. De plus au fur et à mesure que la longueur de la bande diminue, on réajuste la longueur d'état par rapport à la nouvelle bande.

Ainsi, les états de l'automate $\mathcal{A}_{B'}$ sont aussi des états de l'automate $\mathcal{A}_B$.

Remarque 2.1.6. Les cases des lignes de tout état e de $\mathcal{A}_B$ sont toujours étiquetées dans un repère universel, celui correspondant aux états de longueur B . Ainsi, si nous avons un état de longueur $B' \leq B$, si sa première case est située à la position i_1 , $i_1 \geq 1$, alors la dernière sera donc à la position $B' + i_1 - 1$.

Définition 2.1.8. Soit $\mathbf{E}_B$ l'ensemble de tous les états de $\mathcal{A}_B$. Alors

$$\mathbf{E}_B = \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_{B-1} \cup \dots \cup \mathcal{E}_1.$$

En notant par $\mathfrak{E}_B$ l'ensemble de tous les états fondamentaux de $\mathcal{A}_B$, on a

$$\mathfrak{E}_B = \mathbf{E}_B \cup \mathbf{E}_{B-1} \cup \dots \cup \mathbf{E}_1.$$

Exemple 2.1.7. Nous considérons le cas $B = 3$.

Les lignes possibles d'un rectangle de type 3 sont $L_1 = 100$, $L_2 = 010$, $L_3 = 001$, $L_4 = 110$, $L_5 = 101$, $L_6 = 011$ et $L_7 = 111$. Chacune des lignes précédentes a une seule composante connexe sauf la ligne L_5 qui en a deux. Les partitions non croisées de composantes connexes de L_5 sont donc $\{\{0\}, \{1\}\}$ et $\{\{0, 1\}\}$.

On a

$$\mathbf{E}_3 = \{(100, \{\{0\}\}), (010, \{\{0\}\}), (001, \{\{0\}\}), (110, \{\{0\}\}), (101, \{\{0\}, \{1\}\}),$$

$$(101, \{\{0, 1\}\}), (011, \{\{0\}\}), (111, \{\{0\}\}).$$

De même

$$\mathbb{E}_2 = \{(10, \{\{0\}\}), (01, \{\{0\}\}), (11, \{\{0\}\})\}.$$

Et

$$\mathbb{E}_1 = \{(1, \{\{0\}\})\}.$$

On obtient

$$\mathfrak{E}_3 = \mathbb{E}_3 \cup \mathbb{E}_2 \cup \mathbb{E}_1.$$

Remarque 2.1.7. *Pour éviter de refaire certains calculs, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous confondons les termes état et état fondamental. Lorsque nécessaire nous préciserons s'il s'agit d'une classe d'états. Un état est donc souvent représenté sous forme de sa classe à chaque fois que les opérations associées ne nécessitent pas d'autres informations à part celles données par sa classe.*

Par la définition d'un état de l'automate $\mathcal{A}_B$, si l'on devait parler d'état initial de cet automate cela reviendrait à parler d'un de ses états dont la ligne est l'une des premières lignes possibles d'un rectangle de type B . Or aucune composante connexe d'une première ligne d'un tel rectangle n'est connectée à une autre par le haut. De plus si l'on prenait un état de longueur $\mathcal{L}$ inférieure à B comme initial alors tous les polyominos commençant par cet état ne seraient étendus que dans la bande de largeur $\mathcal{L}$ et non B . Dans ce cas, l'automate $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ serait l'automate idéal pour décrire ces polyominos. On a alors la définition suivante.

Définition 2.1.9. *Soit $e = (\alpha_1\alpha_2...\alpha_B, m_1m_2...m_B, \mathcal{P}_{ed})$ un état de $\mathcal{A}_B$ de longueur B .*

Si $B = 1$, $\alpha_1 = 1$ et $m_1 = 0$ alors e est le seul état initial de $\mathcal{A}_1$.

Si $B \geq 2$ e est dit état initial de $\mathcal{A}_B$ si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- (i) toutes ses composantes connexes par le haut sont de cardinalité 1 (c'est-à-dire qu'aucune composante connexe de la ligne de e n'est connectée à une autre),
- (ii) $m_1 = \alpha_1\alpha_2$, $m_B = \alpha_{B-1}\alpha_B$ et pour $2 \leq i \leq B-1$, $m_i = \alpha_i(\alpha_{i-1} + \alpha_{i+1})$.

Pour définir les états finaux de l'automate $\mathcal{A}_B$ nous nous basons sur la connexité des cellules des lignes précédentes jusqu'à la dernière ligne et aussi nous cherchons à garantir l'inscriptibilité de tous polyominos dont la dernière ligne est une ligne d'un de ces états. Pour des raisons de connexité, la partition non croisée de composantes connexes qui est associées à un état final doit être de cardinalité 1.

Définition 2.1.10. Soit $e = (\alpha_{i_1}\alpha_{i_1+1}\dots\alpha_{\mathcal{L}+i_1-1}, m_{i_1}m_{i_1+1}\dots m_{\mathcal{L}+i_1-1}, \mathcal{P}_{ed})$ un état de longueur $\mathcal{L}$ de $\mathcal{A}_B$.

Si $\mathcal{L} = 1$, e est un état final de $\mathcal{A}_B$ si $\alpha_{i_1} = 1$ et $m_{i_1} = 1$.

Si $\mathcal{L} \geq 2$, e est dit état final de $\mathcal{A}_B$ si et seulement s'il vérifie les conditions ci-dessous :

- (i) $\mathcal{P}_{ed}$ est constituée d'une seule composante connexe par le haut (c'est-à-dire que toutes les composantes connexes de la ligne de e forment un ensemble connexe),
- (ii) $\alpha_{i_1} = \alpha_{\mathcal{L}+i_1-1} = 1$.

Les définitions 2.1.9 et 2.1.10 peuvent être vues aussi comme des propositions mais nous choisissons d'utiliser le terme définition parce que c'est notre première fois d'aborder, dans ce mémoire, les informations qui s'y trouvent.

Lemme 2.1.1. Le nombre maximum de composantes connexes sur une ligne d'un

rectangle de type B est

$$\left\lfloor \frac{B+1}{2} \right\rfloor.$$

Preuve. Le nombre maximal de composantes connexes qu'on peut avoir sur une ligne d'un rectangle de type B est le nombre maximal de ses composantes connexes à une seule cellule. Il s'agit dans ce cas d'une alternance de cases occupées et non occupées comme le cas de la figure 2.12. Ce nombre correspond au nombre de cases vides $(\frac{B}{2})$ si B est pair (c'est-à-dire la moitié des cases sur cette ligne) et au nombre de cases vides plus 1 $(\frac{B+1}{2})$ si B est impair (car il y a des cellules aux deux extrémités de la ligne). Dans les deux cas, ce nombre est exactement

$$\left\lfloor \frac{B+1}{2} \right\rfloor.$$



Figure 2.12: Forêts de polyominos lignes de longueurs 11 et 10 ayant respectivement 6 et 5 composantes connexes.

Exemple 2.1.8. Une ligne d'un rectangle de type 3 ou de type 4 possède au moins une composante connexe et au plus 2 composantes connexes. Une ligne d'un rectangle de type 5 ou de type 6 possède au moins une composante connexe et au plus 3 composantes connexes.

Définition 2.1.11. Soit e un état de $\mathcal{A}_B$ de ligne L .

L'aire et le périmètre de e sont respectivement l'aire et le périmètre de la forêt de polyominos ligne décrite par la ligne L .

Toute case i de la ligne L de e telle que $\deg(i) = 1$ est une feuille de e .

Proposition 2.1.2. Soit e un état d'aire a , de périmètre p et de ligne L .

Le nombre n_c de composantes connexes sur la ligne L est

$$n_c = \frac{p - 2a}{2}. \quad (2.2)$$

Preuve. La formule 2.2 s'explique d'une part par le fait qu'une cellule a pour aire et périmètre respectivement 1 et 4. Ainsi, la ligne L n'a que a cellules. D'autre part, le périmètre d'une composante connexe se calcule comme étant la somme des côtés nord et sud de chaque cellule à laquelle s'ajoute le côté est de la première cellule de la composante connexe et le côté ouest de sa dernière cellule. c'est-à-dire que si une composante connexe c_1 possède a_{c_1} cellules alors son périmètre p_{c_1} est

$$p_{c_1} = 2(a_{c_1} + 1).$$

Si la ligne possède n composantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ alors on a

$$\begin{aligned} p &= p_{c_1} + p_{c_2} + \dots + p_{c_n} \\ &= 2(a_{c_1} + 1) + 2(a_{c_2} + 1) + \dots + 2(a_{c_n} + 1) \\ &= 2(a_{c_1} + a_{c_2} + \dots + a_{c_n}) + 2n_c \\ &= 2a + 2n_c. \end{aligned}$$

Et on a enfin

$$n_c = \frac{p - 2a}{2}.$$

Exemple 2.1.9. L'état représenté par la deuxième ligne de la figure 2.6 possède 9 cellules regroupées en 5 composantes connexes et de périmètre 28. Nous avons effectivement $5 = \frac{10}{2} = \frac{28-18}{2}$.

On a donc la proposition suivante.

Proposition 2.1.3. *Soit B un entier naturel non nul. Chaque rectangle de type B a au total $2^B - 1$ lignes possibles de longueur B et chaque ligne L_i de ce dernier ayant n_i composantes connexes, $1 \leq i \leq 2^B - 1$, génère au total C_{n_i} états fondamentaux, où*

$$C_{n_i} = \frac{(2n_i)!}{n_i!(n_i + 1)!}, \quad (2.3)$$

De plus le nombre total, N_B , d'états fondamentaux de longueur B de $\mathcal{A}_B$ est

$$N_B = \sum_{i=1}^{2^B-1} C_{n_i}. \quad (2.4)$$

En notant par $\mathcal{N}_B$ le nombre total d'états fondamentaux de $\mathcal{A}_B$, on a

$$\mathcal{N}_B = N_B + N_{B-1} + \dots + N_2 + N_1 \text{ i.e. } \mathcal{N}_B = N_B + \mathcal{N}_{B-1}. \quad (2.5)$$

Preuve. *Comme toute ligne de longueur B d'un rectangle de type B est un élément de $\{0, 1\}^B$, sauf la ligne dépourvue de cellule, on a effectivement au total $2^B - 1$ lignes.*

Par ailleurs, le nombre d'états fondamentaux générés par L_i est le nombre de partitions non croisées de composantes connexes générées par ladite ligne et, d'après le théorème 1.5.1, et la définition d'une partition non croisée de composantes connexes, ce nombre correspond donc au nombre de Catalan C_{n_i} relatif à l'ensemble $\{1, 2, \dots, n_i\}$ qui est égal à

$$\frac{(2n_i)!}{n_i!(n_i + 1)!}.$$

Ainsi, pour les $2^B - 1$ lignes possibles, le nombre N_B d'états fondamentaux de

longueur B est égal à

$$\sum_{i=1}^{2^B-1} C_{n_i}.$$

Étant donné que tous les états de longueurs inférieures à B sont aussi des états de $\mathcal{A}_B$, on a $\mathcal{N}_B = N_B + N_{B-1} + \dots + N_2 + N_1$.

Exemple 2.1.10. Nous calculons manuellement le nombre d'états fondamentaux de $\mathcal{A}_B$ pour $B = 2, 3, 4$ et 5 , une application des formules données dans les propositions précédentes.

(i) $\mathcal{N}_2 = N_2 + N_1$. N_1 vaut 1. Chaque ligne d'un rectangle de type 2 ne peut qu'avoir qu'une seule composante. Ainsi, $N_2 = 2^2 - 1 = 3$. On conclut donc que $\mathcal{N}_2 = 4$.

(ii) $\mathcal{N}_3 = N_3 + \mathcal{N}_2$. 6 lignes des rectangles de type 3, notamment

$$100, 010, 001, 110, 011, 111,$$

n'ont qu'une seule composante. Par contre une seule ligne, 101, a deux composantes connexes. On a pour cette ligne

$$C_2 = \frac{4!}{2!3!} = \frac{24}{12} = 2.$$

Ainsi, cette ligne génère deux états. On a donc $N_3 = 1+1+1+1+1+1+2 = 8$. Ce qui nous donne $\mathcal{N}_3 = 8 + 4 = 12$.

(iii) $\mathcal{N}_4 = N_4 + \mathcal{N}_3$. D'après le Lemme 2.1.1 sur une ligne d'un rectangle de type 4 on a une ou deux composantes connexes. Cinq lignes ont deux composantes connexes, notamment les lignes

$$1001, 0101, 1010, 1101 \text{ et } 1011$$

dont chacune génère deux états.

$$N_4 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20.$$

On a alors

$$\mathcal{N}_4 = 20 + 12 = 32.$$

(iv) $\mathcal{N}_5 = N_5 + \mathcal{N}_4$. Le lemme 2.1.1 nous permet d'affirmer qu'une ligne d'un rectangle de type 5 ne peut qu'avoir qu'une, deux ou trois composantes connexes. Nous avons quinze lignes à deux composantes connexes qui sont les lignes

$$10001, 10100, 10010, 01010, 01001, 00101, 10111, 11101, 11001, \\ 11010, 01101, 10011, 10110, 01011 \text{ et } 11011$$

qui génère chacune deux états. La seule ligne à trois composantes est la ligne 10101 qui génère C_3 états avec

$$C_3 = \frac{6!}{3!4!} = 5.$$

On déduit

$$N_5 = 1 \times 15 + 2 \times 15 + 5 = 50$$

$$\mathcal{N}_5 = 50 + 32 = 82.$$

Sur la base des formules établies dans cette section, nous écrivons un programme qui calcule le nombre d'états fondamentaux pour B quelconques. Nous listons

ainsi la suite $(\mathcal{N}_B)$ de nombres d'états fondamentaux pour $1 \leq B \leq 15$:

1, 4, 12, 32, 82, 208, 7, 530, 1364, 3551, 9348 24858, 66692, 179902, 484128, 1285405.

Les termes $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3, \mathcal{N}_4, \mathcal{N}_5, \mathcal{N}_6$ de cette suite sont respectivement égaux aux termes a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 et a_9 de la suite, (a_B) , numéro A135248 de *OEIS*. C'est-à-dire $\mathcal{N}_B = a_{B+3}$ pour $1 \leq B \leq 6$. Mais à partir de $B = 7$ nous n'avons plus l'égalité $\mathcal{N}_B = a_{B+3}$.

2.1.2 L'alphabet et les transitions d'états

Dans cette sous-section, nous définissons l'alphabet associé à l'automate $\mathcal{A}_B$ puis introduisons la notion de transition d'un état à l'autre. Pour un polyomino donné, $P_{B,H}$ inscrit dans un rectangle de largeur B et de hauteur H , nous nous intéressons à son aire, son périmètre, sa hauteur et son nombre de feuilles. Les variables w, x, y et z sont utilisées pour compter respectivement l'aire, le périmètre, la hauteur et le nombre de feuilles de $P_{B,H}$.

Ainsi nous désignons par

$$\Sigma = \{w, x, y, z, z^{-1}\}$$

l'alphabet de l'automate $\mathcal{A}_B$. Nous associons à Σ^* l'application suivante :

$$\begin{aligned} F_L : \mathbb{N}Rat\Sigma^* &\longrightarrow \mathbb{M}_L \\ m &\longmapsto \lambda w^a x^p y^h z^f \text{ et si } m_1, m_2 \in \mathbb{N}Rat\Sigma^*, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$F_L(m_1 + m_2) = F_L(m_1) + F_L(m_2) \quad (2.7)$$

où $\mathbb{M}_L$ désigne l'ensemble des monômes de Laurent à quatre variables (w, x, y, z) . Dans l'expression $\lambda w^a x^p y^h z^f$, λ est la multiplicité du mot qui a a symboles w , p symboles x , h symboles y et f le nombre du symbole z moins celui du symbole

z^{-1} dans le mot m .

Exemple 2.1.11. Soit $m = 2wxwyzwz^{-1}wz^{-1}$ alors $F_L(m) = 2w^4xyz^{-1}$.

Par la suite, tout mot m est représenté par son image par F_L .

Définition 2.1.12. Une transition élémentaire $t_{i,j}$ d'un état e_i à un état e_j est donnée par un monôme de Laurent

$$t_{i,j} = \lambda w^a x^p y z^f,$$

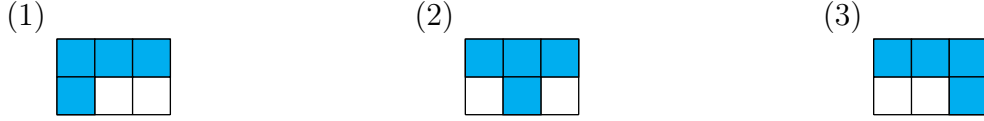
où a, p sont des entiers naturels et f est un entier relatif désignant respectivement les contributions d'aire, du périmètre, de hauteur et du gain ou de la perte de feuilles lors du passage de la ligne de e_i à la ligne de e_j et $\lambda \in \{0, 1\}$.

Il peut y avoir plusieurs façons de connecter l'état e_j à l'état e_i (chacune d'elles est appelée *décalage* de e_j par rapport à e_i et noté $d_{i,j}$) comme le suggère l'exemple 2.1.12. Chaque décalage $d_{i,j}$ correspond à une transition élémentaire $t_{i,j}$. Lorsqu'un décalage est possible (ou admissible) $\lambda = 1$ et 0 sinon. Dans le cas où $\lambda = 0$ on dit aussi que la transition élémentaire, $t_{i,j}$ associée à $d_{i,j}$ est impossible.

Soit n un entier naturel correspondant au nombre de décalages de e_j par rapport à e_i . Les n transitions élémentaires de e_i à e_j correspondantes sont notées

$${}^1t_{i,j}, {}^2t_{i,j}, \dots, {}^nt_{i,j}.$$

Exemple 2.1.12. Soient deux états fondamentaux $e = (111, \{\{0\}\})$ et $e' = (1, \{\{0\}\})$ de $\mathcal{A}_3$ de lignes respectives L et L' (figure 2.13). Le passage de e à e' correspond à l'un des scénarios présentés dans la figure 2.14 et les transitions élémentaires sont respectivement ${}^1t = wx^2y$, ${}^2t = wx^2yz$ et ${}^3t = wx^2y$.

Figure 2.13: Lignes de deux états de $\mathcal{A}_3$ de longueurs différentes.Figure 2.14: Les trois décalages pour passer de e à e' .

Définition 2.1.13. Une transition de e_i à un e_j est

$$T_{i,j} = {}^1t_{i,j} + {}^2t_{i,j} + \dots + {}^n t_{i,j}$$

où n désigne le nombre décalages selon lesquels e_j peut être connecté à e_i .

Remarque 2.1.8.

Notons que le terme élémentaire utilisé pour désigner les transitions ayant la forme d'un monôme de Laurent n'a pas de rapport avec la notion d'automate élémentaire. Ce terme est utilisé pour mettre en évidence la différence entre les transitions qui sont sous forme de monômes et celles qui sont des polynômes. Pour tout $B \geq 1$, l'automate $\mathcal{A}_B$ est non élémentaire car au moins une de ses transitions est un monôme de Laurent non nul (donc de longueur supérieure à 1).

Nous rappelons qu'un polynôme de Laurent est une généralisation de la notion de polynôme où l'on autorise les puissances de l'indéterminée à être négatives.

$T_{i,j}$ peut se mettre sous la forme

$$T_{i,j} = \sum_{k=1}^{n_{t_i}} \mu_{ik} w^{a_k} x^{p_k} y z^{f_k} \quad (2.8)$$

où n_{t_i} (entier positif ou nul) est le nombre total d'expressions de la forme $\lambda_k w^{a_k} x^{p_k} y z^{f_k}$,

deux à deux distinctes avec $\lambda_k = 1$, et μ_{ik} un entier positif correspondant aux nombre de décalages dont la transition élémentaire est $w^{a_k} x^{p_k} y z^{f_k}$.

Compte tenu de la définition d'un polyomino et des états de $\mathcal{A}_B$, il y a des transitions qui sont impossibles ou de poids zéro (aucun décalage n'est admissible). Dans notre contexte, si une transition entre deux états n'est pas possible, on attribue la valeur 0 à cette dernière (une conséquence directe de la définition de la transition élémentaire entre états).

Proposition 2.1.4. *(Perte de la connexité) Soit e et e' deux états de $\mathcal{A}_B$ de lignes associées L et L' respectivement. S'il existe une partition non croisée de composantes connexes de e d'intersection vide avec L' , alors la transition de e à e' est impossible (voir la définition 2.1.5).*

Preuve. Si cette transition était possible, cela mettrait en cause la connexité du polyomino, une propriété nécessaire liée à la notion de polyomino. En effet si on suppose qu'il existe une composante connexe par le haut cp_h de la partition non croisée de composantes connexes de la ligne L qui ne se connecte à aucune composante connexe de la ligne courante, L' , alors il n'existe pas de chemin partant d'un point de cp_h à un autre point de la figure résultante de la superposition de la ligne L' et des lignes précédentes.

Exemple 2.1.13. Soit

$$e = (1010111, \{\{0, 1\}, \{2\}\}) \text{ et } e' = (0001111, \{\{0\}\})$$

deux états fondamentaux de $\mathcal{A}_7$. La transition de e à e' est impossible. Comme c'est le cas dans la figure 2.15. L'état e est illustré par la ligne 2 et e' illustré par la ligne 3.

Proposition 2.1.5. Soit e et e' deux états de $\mathcal{A}_B$. La transition de e à e' ne devrait

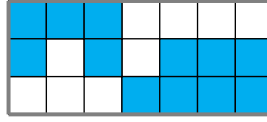


Figure 2.15: Passage impossible de la deuxième ligne à la troisième ligne.

pas modifier la structure de la partition non croisée de composantes connexes associée à e' . Si tel était le cas, alors cette transition serait impossible.

Preuve. *Cette proposition résulte de la définition d'une composante connexe par le haut et du fait que la liaison entre les composantes connexes d'une composante connexe par le haut d'une ligne dépend inévitablement de la ligne qui la précède.*

Exemple 2.1.14. *Soit*

$$e = (1110000, \{\{0\}\}) \quad \text{et} \quad e' = (1010001, \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\})$$

deux états fondamentaux de $\mathcal{A}_7$. La transition de e à e' est impossible. Elle serait possible si nous avions

$$e' = (1010001, \{\{0, 1\}, \{2\}\}) \quad (\text{voir figure 2.16}).$$



Figure 2.16: Transition impossible de l'état du haut à celui du bas.

Proposition 2.1.6. *Si e est un état de longueur inférieure à e' , alors la transition de e à e' est impossible.*

Preuve. *La proposition 2.1.6 s'explique par le fait que l'usage d'un état de longueur $\mathcal{L} < B$ n'est possible que si le reste du polyomino évolue dans une bande de*

largeur $\mathcal{L}$ sans la déborder jusqu'à la base du rectangle (voir la figure 2.11). Ainsi lorsqu'on passe à un état de longueur $\mathcal{L}$, on ne peut qu'utiliser seulement des états de longueurs inférieures ou égales à $\mathcal{L}$ pour décrire le reste du polyomino.

Proposition 2.1.7. *Soit e et e' deux états de $\mathcal{A}_B$. La transition de e à e' ne devrait pas modifier le mot de l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ associé à e' . Si tel est le cas, cette transition est impossible.*

Preuve. Cette proposition résulte de la définition du mot de l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ associé à un état e étant donné que ce mot dépend de la ligne qui précède la ligne de e .

Exemple 2.1.15. *On considère l'état $e = (10, 00, \{\{0\}\})$ de $\mathcal{A}_2$. La transition de e à e est impossible. Elle serait possible si le mot associé à e était 10.*

Proposition 2.1.8. *Soit e et e' deux états non vides de $\mathcal{A}_B$ de longueurs respectives $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$, avec $\mathcal{L}' < \mathcal{L}$, et de lignes*

$$L = \alpha_{i_1} \alpha_{i_1+1} \dots \alpha_{i_1+\mathcal{L}-1} \text{ et } L' = \alpha'_{i'_1} \alpha'_{i'_1+1} \dots \alpha'_{i'_1+\mathcal{L}'-1}$$

telles que $i_1 \leq i'_1 \leq i'_1 + \mathcal{L}' - 1 \leq i_1 + \mathcal{L} - 1$.

- (i) *Si $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_1+\mathcal{L}-1} = 0$, alors la transition de e à e' est impossible.*
- (ii) *Si $\alpha_{i_1} = 1$, $\alpha_{i_1+\mathcal{L}-1} = 0$ et $i'_1 + \mathcal{L}' - 1 < i_1 + \mathcal{L} - 1$ alors la transition de e à e' est impossible.*
- (iii) *Si $\alpha_{i_1} = 0$, $\alpha_{i_1+\mathcal{L}-1} = 1$ et $i_1 < i'_1$ alors la transition de e à e' est impossible.*

Preuve. En effet, cette proposition est, en quelques sorte, une convention imposée dans la construction de l'automate $\mathcal{A}_B$ afin de garantir l'inscriptibilité de tout polyomino partant d'un état initial à un état final de ce dernier. Ainsi si on passe d'un état de longueur plus grande vers un état de longueur plus petite, il faut

s'assurer que le côté gauche ou droit du rectangle dans lequel évolue le polyomino est atteint. Pour décrire un polyomino contenu dans un rectangle de type B , nous suivons son évolution ligne par ligne du haut vers le bas. Tout d'abord la ligne du haut représente un état initial, donc de longueur B (dans ce cas $i_1 = 1$ et $i_1 + \mathcal{L} - 1 = B$). Tant que les cellules des lignes suivantes peuvent s'étaler de la position 1 à la position B , les états que représentent ces lignes sont toujours considérés de longueur B . Si à partir d'une ligne L' la partie inférieure du polyomino évolue dans une bande de largeur $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}' < B$, s'étalant d'une position $i'_1 \geq 1$ à la position $i'_1 + \mathcal{L}' - 1$ (c'est-à-dire que L' est la ligne à partir de laquelle les cellules inférieures du polyomino sont comprises dans la bande délimitée par $i'_1 \geq 1$ et $i'_1 + \mathcal{L}' - 1$), alors la ligne $L = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_B$ qui précède L' doit vérifier certaines conditions pour que cette transition soit possible.

- Si $\alpha_1 = \alpha_B = 0$ alors cela signifie que l'état e dont la ligne est L n'était pas de longueur B car étant donné que la ligne L n'a pas de cellules aux deux extrémités, c'est à partir d'elle que la partie inférieure du polyomino évolue dans une bande de longueur strictement inférieure à B (au plus $B - 2$). Ce qui est contradictoire. On conclut dans ce cas qu'une telle transition n'est pas possible.
- si $\alpha_1 = 1$, $\alpha_B = 0$ et que $i'_1 + \mathcal{L}' - 1 < B$ alors cela signifie qu'à partir de la ligne L , la partie inférieure du polyomino évolue dans une bande limitée par 1 et $i'_1 + \mathcal{L}' - 1$. Dans ce cas l'état e n'est pas de longueur B . Ce qui est contradictoire. On conclut alors qu'une telle transition est impossible (elle reste possible à condition que la longueur de l'état e soit conforme à la règle imposée dans la remarque 2.1.5).
- On a le même scénario si $\alpha_1 = 0$, $\alpha_B = 1$ et $1 < i'_1$.

On mène les mêmes raisonnements dans le cas où $\mathcal{L} < B$.

Exemple 2.1.16. Considérons les états fondamentaux e_1 , e_2 , e_3 et e_4 de lignes

L_1 , L_2 , L_3 et L_4 respectivement représentées dans la figure 2.17 et de partitions non croisées de composantes connexes respectives

$$\{\{0,1\}\}, \quad \{\{0\}\}, \quad \{\{0\}\}, \quad \{\{0,1\}\}.$$



Figure 2.17: Les lignes des états e_1 , e_2 , e_3 et e_4 .

— La transition de e_1 à e_3 est possible avec trois décalages. Cette transition est ullistrée à la figure 2.18



Figure 2.18: Transition de e_1 à e_3 .

— La transition de e_1 à e_4 est possible d'une seule façon (voir figure 2.19).

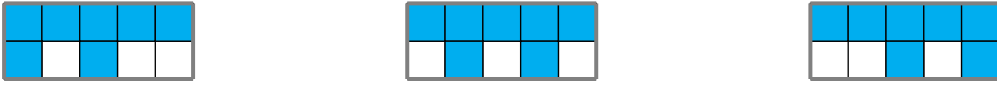


Figure 2.19: Transition de e_1 à e_4 .

— La transition de e_2 à e_3 n'est possible qu'avec un seul décalage, celui de droite, le seul qui satisfait la proposition 2.1.8.

Figure 2.20: Transition de e_2 à e_3 .

— La transition de e_3 à e_4 est possible avec trois décalages comme le montre la figure 2.21.

Figure 2.21: Transition de e_3 à e_4 .

Pour les transitions possibles, nous mettons à présent en place certaines méthodes de calcul d'aire, de périmètre et du nombre de feuilles qui s'ajoutent lors d'une transition. En ce qui concerne la hauteur elle est toujours augmentée de 1 d'une transition d'un état à l'autre.

Proposition 2.1.9. *Soit e un état dont la ligne $L = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_B$ avec $\alpha_i \in \{0,1\}$ pour $i = 1, 2, \dots, B$. On désigne par a , p respectivement l'aire et le périmètre de e .*

(i)

$$a = \sum_{i=1}^B \alpha_i. \quad (2.9)$$

(ii)

$$p = 2 \left(\sum_{i=1}^{B-1} (2\alpha_i - \alpha_i\alpha_{i+1}) \right) + 4\alpha_B. \quad (2.10)$$

Preuve. Le point (i) de la proposition 2.1.9 s'explique par le fait que l'aire d'un état est le nombre de cellules que contient la ligne de ce dernier.

Pour le point (ii), nous rappelons que la longueur du côté d'une case occupée par une cellule est la longueur unité. Le périmètre d'une case i est $4\alpha_i$ qui vaut 4 si $\alpha_i = 1$ ou 0 sinon. Si deux cases i et $i + 1$ partagent un côté commun ce côté devient interne au rectangle formé par ces deux dernières si aucune d'elles n'est vide. Cela correspond dans ce cas à une perte de deux côtés (un par case). Et le périmètre du rectangle issu des deux cases est $6 = 4(1 + 1) - 2 = 4(\alpha_i + \alpha_{i+1}) - 2$ si les deux sont occupées. Et pour généraliser tous les cas possibles, c'est-à-dire $\alpha_i, \alpha_{i+1} \in \{0, 1\}$, ce périmètre correspond à $4(\alpha_i + \alpha_{i+1}) - 2\alpha_i\alpha_{i+1}$ où le terme $\alpha_i\alpha_{i+1}$ est nul dès qu'une des cases est vide (figure 2.22). De même le périmètre



Figure 2.22: Périmètre du rectangle résultant de deux cases consécutives.

correspondant à trois cases i , $i + 1$ et $i + 2$ consécutives est dans ce cas

$$\begin{aligned}
 4(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \alpha_{i+2}) - 2\alpha_i\alpha_{i+1} - 2\alpha_{i+1}\alpha_{i+2} &= 2\alpha_i + 2[(\alpha_i + \alpha_{i+1}) - \alpha_i\alpha_{i+1} + \\
 &\quad (\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2}) - \alpha_{i+1}\alpha_{i+2}] + \\
 &\quad 2\alpha_{i+2}
 \end{aligned}$$

En parcourant toute la ligne L , on a

$$\begin{aligned}
 p &= 2\alpha_1 + 2[(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1\alpha_2 + \dots + (\alpha_{B-1} + \alpha_B) - \alpha_{B-1}\alpha_B] + 2\alpha_B \\
 &= 2[(2\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2) + (2\alpha_2 - \alpha_2\alpha_3) + \dots + (2\alpha_{B-1} - \alpha_{B-1}\alpha_B) + 2\alpha_B] \\
 &= 2 \left[\sum_{i=1}^{B-1} (2\alpha_i - \alpha_i\alpha_{i+1}) \right] + 4\alpha_B.
 \end{aligned}$$

Proposition 2.1.10. Soit e_1 et e_2 deux états de $\mathcal{A}_B$ de lignes respectives $L_1 = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{B_1}$ et $L_2 = \beta_{i_1}\beta_{i_1+1}\dots\beta_{B_2+i_1-1}$, $B_2 \leq B_1 \leq B$.

La transition de e_1 à e_2 fait augmenter l'aire de

$$a = \sum_{i=i_1}^{B_2+i_1-1} \beta_i \quad (2.11)$$

et le périmètre de

$$p = 2 \left(\sum_{i=i_1}^{B_2+i_1-2} \beta_i (2 - \alpha_i - \beta_{i+1}) \right) + 2\beta_{B_2+i_1-1} (2 - \alpha_{B_2+i_1-1}). \quad (2.12)$$

Preuve. La formule 2.11 s'explique par le fait que la transition de l'état e_1 à l'état e_2 est un ajout des cellules de e_2 aux cellules existantes. Ce nombre de cellules correspond à l'aire de e_2 qui est $a = \sum_{i=i_1}^{B_2+i_1-1} \beta_i$.

La formule 2.12 se base sur le fait que lorsqu'une cellule de e_1 et une autre de e_2 se connectent, les deux côtés horizontaux par lesquels elles se touchent ne doivent pas être comptés dans le calcul de l'augmentation du périmètre. Ainsi, la contribution en périmètre pour cette transition est le périmètre de e_2 auquel on retranche la somme des côtés horizontaux par lesquels les cases non vides se touchent. On a alors

$$\begin{aligned} p &= \left(\sum_{i=i_1}^{B+i_1-2} 2(2\beta_i - \beta_i\beta_{i+1}) + 4\beta_{B+i_1-1} \right) - \left(2 \sum_{i=i_1}^{B+i_1-2} (\beta_i\alpha_i) + 2\beta_{B_2+i_1-1}\alpha_{B_2+i_1-1} \right) \\ &= 2 \left(\sum_{i=i_1}^{B+i_1-2} (2\beta_i - \beta_i\beta_{i+1}) - \beta_i\alpha_i \right) + 4\beta_{B+i_1-1} - 2\beta_{B_2+i_1-1}\alpha_{B_2+i_1-1} \\ &= 2 \left(\sum_{i=i_1}^{B_2+i_1-2} \beta_i (2 - \alpha_i - \beta_{i+1}) \right) + 2\beta_{B_2+i_1-1} (2 - \alpha_{B_2+i_1-1}). \end{aligned}$$

Nous nous intéressons à présent au nombre de feuilles et surtout à la manière dont il augmente ou diminue lors d'une transition d'un état à un autre.

Une feuille d'un polyomino est par définition une de ses cellules de degré 1. Comme nous pouvons le constater, il peut arriver que lors d'une transition, le polyomino gagne ou perde des feuilles comme le cas dans la figure 2.23. Dans cette figure nous avons, du haut vers le bas, deux classes d'états

$$e = (1101101, \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}) \text{ et } e' = (1111111, \{\{0\}\})$$

où e a 4 feuilles et e' n'a aucune feuille et le polyomino résultant a une seule feuille. Ce qui signifie que le passage de e à e' s'est fait avec une perte de 3 feuilles.



Figure 2.23: La feuille résultante de la transition de e à e' est la cellule à droite de la ligne du haut.

Ainsi, pour tenir compte des pertes et des gains de feuilles lors d'une transition, l'exposant f de z , dans l'expression $w^a x^p y z^f$ est un entier relatif, c'est-à-dire qu'il peut être positif ou négatif. Le nombre total de feuilles du polyomino est égal au nombre de feuilles de l'état initial auquel s'ajoute la somme algébrique des exposants de z pour toutes les transitions. Cette somme est toujours positive ou nulle puisqu'un polyomino peut ne pas avoir de feuilles ou a au moins une feuille.

Proposition 2.1.11. *Soit e un état de $\mathcal{A}_B$, de ligne $L = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_B$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, B$ de périmètre p , d'aire a et ayant n composantes connexes. On suppose que e n'a aucune composante connexe par le haut de cardinalité supérieure à 1. Nous désignons par n_{c_0} le nombre de cellules de degré 0 de e . Alors si $B = 1$ alors $n_{c_0} = 1$ c'est-à-dire l'unique cellule de L , si $B = 2$*

$$n_{c_0} = (\alpha_1(1 - \alpha_1 \alpha_2) + \alpha_B(1 - \alpha_{B-1} \alpha_B)),$$

Si $B \geq 3$ alors

$$n_{c_0} = \left(\alpha_1(1 - \alpha_1\alpha_2) + \sum_{i=2}^{B-1} \alpha_i(1 - \max\{\alpha_{i-1}\alpha_i, \alpha_i\alpha_{i+1}\}) + \alpha_B(1 - \alpha_{B-1}\alpha_B) \right).$$

Le nombre de feuilles n_f de e est $n_f = 0$ si $B = 1$ et

$$\begin{aligned} n_f &= 2(n - n_{c_0}) \\ &= p - 2a - 2n_{c_0} \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^{B-1} (2\alpha_i - \alpha_i\alpha_{i+1}) \right) + 4\alpha_B - 2 \sum_{i=1}^B \alpha_i - 2n_{c_0} \text{ sinon.} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Preuve. En effet, considérons une case i de L , $1 \leq i \leq B$. On sait que si $\alpha_i = 1$ par définition cette case contient une cellule.

— Si i est la première case et le terme $\chi_i = \alpha_i(1 - \alpha_i\alpha_{i+1}) = 1$ alors la cellule de la case i est une cellule de degré 0 de e car

$$\begin{aligned} \alpha_i(1 - \alpha_i\alpha_{i+1}) = 1 &\Leftrightarrow \alpha_i = 1 \text{ et } 1 - \alpha_i\alpha_{i+1} = 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha_i = 1 \text{ et } \alpha_i\alpha_{i+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha_i = 1 \text{ et } \alpha_{i+1} = 0. \end{aligned}$$

— Si i est la dernière case et le terme $\chi_i = \alpha_i(1 - \alpha_{i-1}\alpha_i) = 1$ alors la cellule de la case i est une cellule de degré 0 de e car

$$\begin{aligned} \alpha_i(1 - \alpha_{i-1}\alpha_i) = 1 &\Leftrightarrow \alpha_i = 1 \text{ et } 1 - \alpha_{i-1}\alpha_i = 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha_i = 1 \text{ et } \alpha_i\alpha_{i-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha_i = 1 \text{ et } \alpha_{i-1} = 0. \end{aligned}$$

- Si $B \geq 3$ et i une case intermédiaire alors la cellule de la case i est de degré 0 si et seulement si $\chi_i = \alpha_i(1 - \max\{\alpha_{i-1}\alpha_i, \alpha_i\alpha_{i+1}\}) = 1$ car

$$\begin{aligned}
\alpha_i(1 - \max\{\alpha_{i-1}\alpha_i, \alpha_i\alpha_{i+1}\}) = 1 &\Leftrightarrow \alpha_i = 1 \text{ et } 1 - \max\{\alpha_{i-1}\alpha_i, \alpha_i\alpha_{i+1}\} = 1 \\
&\Leftrightarrow \alpha_i = 1 \text{ et } \max\{\alpha_{i-1}\alpha_i, \alpha_i\alpha_{i+1}\} = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha_i = 1 \text{ et } \alpha_{i-1}\alpha_i = 0 \text{ et } \alpha_i\alpha_{i+1} = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha_i = 1 \text{ et } \alpha_{i-1} = 0 \text{ et } \alpha_{i+1} = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi $\chi_i = 1$ seulement si la case i est occupée par une cellule de degré 0 et 0 sinon alors $\sum_{i=1}^B \chi_i$ est le nombre total des cellules de degré 0 de L car les termes nuls ne changent rien dans la sommation. Notons que si $B = 1$ alors $n_{c_0} = 1$ c'est-à-dire l'unique cellule de L . D'une part, les n_{c_0} cellules de degré 0 de L sont ses composantes connexes à une seule cellule. D'autre part, les seules feuilles de e sont les cellules extrêmes de ses composantes connexes composées d'au moins deux cellules. Les composantes connexes d'au moins deux cellules sont donc au nombre de $n - n_{c_0}$. Et comme chacune d'entre elles a deux extrémités alors e a $2(n - n_{c_0})$ feuilles.

Exemple 2.1.17. Soit e un état dont la ligne L est donnée par la figure 2.24 L'aire a de e est 7 et son périmètre est $p = 24$. e possède $\frac{p-2a}{2} = \frac{24-14}{2} = \frac{10}{2} = 5$



Figure 2.24: Ligne d'un état de $\mathcal{A}_{12}$.

composantes. Le nombre n_{c_0} de cellules de degré 0 de e est

$$\begin{aligned}
n_{c_0} &= 1(1 - (1)(1)) + 1(1 - \max\{(1)(1), (1)(0)\}) + 0(1 - \max\{(1)(0), (0)(1)\}) + \\
&\quad 1(1 - \max\{(0)(1), (1)(0)\}) + 0(1 - \max\{(1)(0), (0)(1)\}) + \\
&\quad 1(1 - \max\{(0)(1), (1)(1)\}) + 1(1 - \max\{(1)(1), (1)(0)\}) + \\
&\quad 0(1 - \max\{(1)(0), (0)(1)\}) + 1(1 - \max\{(0)(1), (1)(0)\}) + \\
&\quad 0(1 - \max\{(1)(0), (0)(0)\}) + 0(1 - \max\{(0)(0), (0)(1)\}) + 1(1 - (0)(1)) \\
&= 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

e a ainsi $n_f = 2(5 - 3) = 4$ feuilles.

Soit e un état de $\mathcal{A}_B$ de ligne $L = \alpha_{i_1}\alpha_{i_1+1}\dots\alpha_{B_1+i_1-1}$, de ligne précédente $L' = \beta_{i'_1}\beta_{i'_1+1}\dots\beta_{B'_1+i'_1-1}$ de longueur B'_1 , $B_1 \leq B'_1 \leq B$ et $1 \leq i'_1 \leq i_1$ et de mot $m_{i_1}m_{i_1+1}\dots m_{B_1+i_1-1}$. Pour calculer le nombre de feuilles de e , nous calculons tout d'abord son nombre de feuilles n_{f_1} comme si c'était un état initial puis nous retranchons le nombre $n_{1 \rightarrow 2}$ de cellules dont le nombre m_i correspondant est passé de 1 à 2, puis nous ajoutons le nombre $n_{0 \rightarrow 1}$ de cellules dont le m_i est passé de 0 à 1.

Proposition 2.1.12.

$$n_{1 \rightarrow 2} = \sum_{i=i_1}^{B_1+i_1-1} \alpha_i \beta_i \min\{1, m_i, |1 - m_i|, |3 - m_i|\}, \quad (2.14)$$

$$n_{0 \rightarrow 1} = \sum_{i=i_1}^{B_1+i_1-1} \alpha_i \beta_i \min\{1, m_i, |2 - m_i|, |3 - m_i|\} \quad (2.15)$$

et le nombre de feuilles n_f de e est

$$n_f = n_{f_1} - n_{1 \rightarrow 2} + n_{0 \rightarrow 1}.$$

Preuve. Par définition, une feuille d'un état est une cellule de degré 1. Si e est un état initial, son nombre de feuille s'obtient par la formule établie dans la proposition précédente. S'il est un état intermédiaire, la lettre m_i de l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ associée à la case i de sa ligne dépend des 3 cases qui l'entourent (gauche, droite et celle de haut) ce qui n'est pas le cas dans la proposition 2.1.11 (seulement que les cases de gauche et de droite). En tenant compte de la ligne précédente, nous voyons que la valeur $\deg(i)$ peut augmenter de 1 ou non. Ainsi si $\deg(i)$ vaut 1 selon la proposition 2.1.11 alors qu'en réalité il y a une cellule au dessus de la cellule de la case i , il est impératif donc de la retrancher de la liste des feuilles de e . L'entier $n_{1 \rightarrow 2}$ désigne le nombre total de telles cellules.

De même, si $\deg(i)$ vaut 0 selon la proposition 2.1.11, alors qu'en réalité il y a une cellule au dessus de la cellule de la case i , il est nécessaire de l'ajouter à la liste des feuilles de e . L'entier $n_{0 \rightarrow 1}$ désigne le nombre total de telles cellules.

Dans la formule 2.14, le terme $\alpha_i \beta_i \min\{1, m_i, |1 - m_i|, |3 - m_i|\}$ s'explique comme suit. $\min\{1, m_i, |1 - m_i|, |3 - m_i|\} = 1$ seulement que si $m_i = 2$. Ainsi toutes les cellules qui ne sont pas concernées ne seront pas prises en compte dans la sommation 2.14. De plus, le coefficient $\alpha_i \beta_i$ permet d'une part avec α_i d'éviter la case i si cette dernière est en réalité dépourvue de cellule ($\alpha_i = 0$) et d'autre part, avec β_i (cas $\beta_i = 0$) d'éviter de compter à nouveau la cellule de la case i dont $\deg(i)$ vaut 2 selon la proposition 2.1.11 et dont la valeur ne change pas selon la nouvelle considération de e (en tant qu'état intermédiaire).

La formule 2.15 s'explique de la même manière que la formule 2.14 à la seule différence que m_i passe éventuellement de 0 à 1 ou qu'il vaut constamment 1.

Exemple 2.1.18. *Considérons l'état*

$$e = ((110101101001, 210102100001, \{\{0\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}))$$

dont la ligne est la deuxième ligne de la figure 2.25. L'aire de e est $a = 7$ et son périmètre est $p = 24$ avec $\frac{p-2a}{2} = \frac{24-14}{2} = 5$ composantes. Si e était un état initial, le nombre n_{c_0} de ces composantes à une seule cellule serait

$$\begin{aligned} n_{c_0} &= 1(1 - (1)(1)) + 1(1 - \max(1, 0)) + 0(1 - \max(0, 0)) + 1(1 - \max(0, 0)) \\ &\quad + 0(1 - \max(0, 0)) + 1(1 - \max(0, 1)) + 1(1 - \max(1, 0)) \\ &\quad + 0(1 - \max(0, 0)) + 1(1 - \max(0, 0)) + 0(1 - \max(0, 0)) \\ &\quad + 0(1 - \max(0, 0)) + 1(1 - 0) \\ &= 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Le nombre de feuilles de e serait donc $n_{f_1} = 2(5 - 3) = 4$. Le nombre $n_{1 \rightarrow 2}$ correspondant est

$$\begin{aligned} n_{1 \rightarrow 2} &= (1) \min\{1, 2, 1, 1\} + (0) \min\{1, 1, 0, 2\} + (0) \min\{1, 0, 1, 3\} + \\ &\quad (1) \min\{1, 1, 0, 2\} + (0) \min\{1, 0, 1, 3\} + (1) \min\{1, 2, 1, 1\} + \\ &\quad (0) \min\{1, 1, 0, 2\} + (0) \min\{1, 0, 1, 3\} + (0) \min\{1, 0, 1, 3\} + \\ &\quad (0) \min\{1, 0, 1, 3\} + (0) \min\{1, 0, 1, 3\} + (1) \min\{1, 1, 0, 2\} \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ &= 2. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
n_{0 \rightarrow 1} &= (1) \min\{1, 2, 0, 1\} + (0) \min\{1, 1, 1, 2\} + (0) \min\{1, 0, 2, 3\} + \\
&\quad (1) \min\{1, 1, 1, 2\} + (0) \min\{1, 0, 2, 3\} + (1) \min\{1, 2, 0, 1\} + \\
&\quad (0) \min\{1, 1, 1, 2\} + (0) \min\{1, 0, 2, 3\} + (0) \min\{1, 0, 2, 3\} + \\
&\quad (0) \min\{1, 0, 2, 3\} + (0) \min\{1, 0, 2, 3\} + (1) \min\{1, 1, 1, 2\} \\
&= 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Finalement, le nombre de feuilles de e est

$$\begin{aligned}
n_f &= n_{f_1} - n_{1 \rightarrow 2} + n_{0 \rightarrow 1} \\
&= 4 - 2 + 2 \\
&= 4.
\end{aligned}$$



Figure 2.25: La ligne de l'état e et la ligne précédente.

Proposition 2.1.13. Soit e et e' deux états de lignes respectives

$$L = \alpha_{i_1} \alpha_{i_1+1} \dots \alpha_{B_1+i_1-1} \text{ et } L' = \beta_{i'_1} \beta_{i'_1+1} \dots \beta_{B'_1+i'_1-1},$$

de longueurs respectives B_1 et B'_1 telles que $B_1 \leq B'_1 \leq B$ et $1 \leq i'_1 \leq i_1$. On suppose que la transition de e' à e est possible et que les mots correspondants sont respectivement $m_{i_1} m_{i_1+1} \dots m_{B_1+i_1-1}$ et $m'_{i'_1} m'_{i'_1+1} \dots m'_{B'_1+i'_1-1}$. On désigne par n_f et

n_f , les nombres de feuilles respectivement de e et e' . Alors la variations du nombre de feuilles de cette transition est donnée par

$$f = n_f - \sum_{i=i_1}^{B_1+i_1-1} \alpha_i \beta_i \min\{1, m'_i + \alpha_i \beta_i, |1 - m'_i - \alpha_i \beta_i|, |3 - m'_i - \alpha_i \beta_i|, |4 - m'_i - \alpha_i \beta_i|\} + \sum_{i=i_1}^{B_1+i_1-1} \alpha_i \beta_i \min\{1, m'_i + \alpha_i \beta_i, |2 - m'_i - \alpha_i \beta_i|, |3 - m'_i - \alpha_i \beta_i|, |4 - m'_i - \alpha_i \beta_i|\}. \quad (2.16)$$

Preuve. Cette proposition se justifie presque de la même manière que la précédente. La seule différence est qu'ici on prend en considération les cellules de la ligne précédente qui étaient des feuilles de l'état e' et qui ont vu leur degré passer à 2 avec la transition de e' à e de même que les cellules de degré 0 de e' dont le degré passe à 1. Il est donc capital de repérer de telles cellules afin de les ajouter à la liste ou les enlever de la liste des feuilles issues de cette transition. On note que f est un entier relatif puisque si e a moins de feuilles, si on y ajoute le nombre de cellules de degré 0 de e' qui deviennent feuilles suite à cette transition et que le nombre total obtenu est inférieur au nombre de feuilles de e' qui deviennent des cellules de degré 2 la valeur de f serait dans ce cas négative.

Dans la sommation

$$\sum_{i=i_1}^{B_1+i_1-1} \alpha_i \beta_i \min\{1, m'_i + \alpha_i \beta_i, |1 - m'_i - \alpha_i \beta_i|, |3 - m'_i - \alpha_i \beta_i|, |4 - m'_i - \alpha_i \beta_i|\},$$

la valeur $m'_i + \alpha_i \beta_i$ représente le nouveau degré de la cellule de la case i de e' . $\alpha_i \beta_i = 1$ que si les case i de e' et celle de e contiennent simultanément des cellules. Ainsi $\min\{1, m'_i + \alpha_i \beta_i, |1 - m'_i - \alpha_i \beta_i|, |3 - m'_i - \alpha_i \beta_i|, |4 - m'_i - \alpha_i \beta_i|\} = 1$ que si $m'_i + \alpha_i \beta_i = 2$. Cela permet ainsi d'éviter les cellules non concernées. De même comme cela a été dit dans la preuve précédente, le coefficient $\alpha_i \beta_i$ qui apparaît

dans cette formule est présent pour éviter les cases vides ainsi que les cellules de degré 1 de e' inchangés après la transition.

Il en est de même pour l'expression

$$\sum_{i=i_1}^{B_1+i_1-1} \alpha_i \beta_i \min\{1, m'_i + \alpha_i \beta_i, |2 - m'_i - \alpha_i \beta_i|, |3 - m'_i - \alpha_i \beta_i|, |4 - m'_i - \alpha_i \beta_i|\}$$

qui permet de compter les cellules de e' qui sont devenues des feuilles après la transition.

On note qu'ici il se peut que $m'_i + \alpha_i$ passe à 4 puisqu'une cellule de e' peut être entourée aux quatre côtés par des cellules surtout si e' est précédé par un autre état.

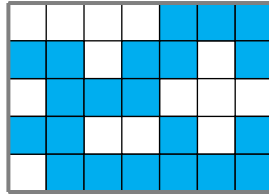


Figure 2.26: Polyomino inscrit dans le rectangle 7×5 .

Exemple 2.1.19. *Considérons les états e et e'*

$$e' = (1101101, 1101201, \{\{0\}, \{1, 2\}\}) \text{ et } e = (0111000, 0222000, \{\{0\}\})$$

respectivement deuxième et troisième lignes de la figure 2.26. e' a $n_{f'} = 4$ feuilles et e a $n_f = 0$ feuille. La variation f du nombre de feuilles de la transition de e' à

e est donc

$$\begin{aligned}
 f &= 0 - ((0) \min\{1, 1, 0, 2, 3\} + (1) \min\{1, 2, 1, 1, 2\} + (0) \min\{1, 0, 1, 3, 4\} + \\
 &\quad (1) \min\{1, 2, 1, 2\} + (0) \min\{1, 2, 1, 1, 2\} + (0) \min\{1, 0, 1, 3, 4\} + \\
 &\quad (0) \min\{1, 1, 0, 2, 3\}) + ((0) \min\{1, 1, 1, 2, 3\} + (1) \min\{1, 2, 0, 1, 2\} + \\
 &\quad (0) \min\{1, 0, 2, 3, 4\} + (1) \min\{1, 2, 0, 1, 2\} + (0) \min\{1, 2, 0, 1, 2\} + \\
 &\quad (0) \min\{1, 0, 2, 3, 4\} + (0) \min\{1, 1, 1, 2, 3\}) \\
 &= 0 - 2 = -2.
 \end{aligned}$$

Soit e_1 et e_2 deux états de $\mathcal{A}_B$ de longueur respectives B_1 et B_2 , $B_2 \leq B_1 \leq B$. Le passage de e_1 à e_2 signifie que le reste du polyomino évolue dans un rectangle de largeur inférieure ou égale à B_2 . L'état e_2 peut être connecté à e_1 d'au plus $B_1 - B_2 + 1$ façons. Les seules connections possibles sont celles qui ne modifient pas la structure de la partition non croisée de composantes connexes de e_2 et qui rendent la transition possible.

Exemple 2.1.20. Dans la figure 2.27, nous avons les états

$$e_1 = (1111, \{\{0\}\}) \text{ et } e_2 = (101, \{\{0, 1\}\}).$$

Il y a 2 façons de connecter e_1 à e_2 sans modifier sa partition non croisée de composantes connexes. Par contre dans la figure 2.28, nous avons les états



Figure 2.27: Les deux transitions permises.

$$e_1 = (11101, \{\{0\}, \{1\}\}) \text{ et } e_2 = (101, \{\{0, 1\}\}).$$

Il n'y a qu'une seule façon de connecter e_2 à e_1 sans changer sa partition non croisée de composantes connexes .



Transition permise



Transitions interdites

Figure 2.28: Transitions entre deux états de $\mathcal{A}_5$.

Une fois les transitions calculées, nous les insérons dans une matrice $\mathcal{M}_B$ appelée *matrice de transition* de l'automate des polyominos inscrits dans le rectangle B . Une composante $a_{i,j}$ de $\mathcal{M}_B$ correspond à la transition de l'état e_i à l'état e_j .

Dans la suite, lorsqu'il y a $n-1$ transitions successives, $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ et qu'aucune précision n'est donnée sur les états, on utilise généralement la notation e_i , $1 \leq i \leq n$, pour signifier que l'état e_i correspond à l'état vers lequel s'est faite la $(i-1)^{\text{ème}}$ transition. Ainsi il peut exister $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$ et $e_i = e_j$. Nous utilisons aussi, dans le même contexte, le terme n états $e_1, e_2, \dots, e_n$ alors qu'en réalité le nombre d'états mis en jeu peut ne pas atteindre n .

Dans d'autres cadres plus précis, nous utilisons aussi cette notation pour distinguer un état d'un autre état (pour nommer par exemple les états). Dans ce cas si $i \neq j$ on a $e_i \neq e_j$.

Définition 2.1.14. Soit $e_1, e_2, \dots, e_n$, n états de $\mathcal{A}_B$, $n \geq 2$, non forcément distincts deux à deux, tels que les transitions, $T_{i,i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$, soient possibles. Une suite de transitions élémentaires, $t_{1,2}, \dots, t_{(n-1),n}$ est une succession de transitions élémentaires $t_{1,2}, t_{2,3}, \dots, t_{(n-1),n}$. C'est en quelque sorte un des chemins suivis de l'état e_1 à e_n .

On a de même une suite de décalages correspondante, de e_{l+1} par rapport à e_l , l décrivant $\{1, 2, \dots, n-1\}$, notée $d_{1,2}, \dots, d_{n-1,n}$.

Remarque 2.1.9. *Une suite de transitions élémentaires a le même sens qu'un mot généré par l'automate $\mathcal{A}_B$. Nous utilisons plutôt ce terme compte tenu de l'aspect calculatoire des transitions.*

Une suite de transitions élémentaires est caractérisée par un état de départ, un état d'arrivée, sa longueur et l'ordre de succession des états qui la constituent. La longueur d'une suite de transitions élémentaires est le nombre d'états qui la constituent moins un.

Une transition élémentaire $t_{i,j}$ entre deux états e_i et e_j est une suite de transitions de longueur 1.

Pour n états $e_1, e_2, \dots, e_n$ de $\mathcal{A}_B$, $n \geq 2$, la suite de transitions élémentaires $t_{1,2,\dots,n}$ s'écrit sous la forme

$$t_{1,2,\dots,n} = \lambda w^a x^p y^{n-1} z^f \text{ avec } \lambda \in \{0, 1\}$$

.

On a la proposition suivante.

Proposition 2.1.14. *Pour tout entier $n \geq 3$*

$$t_{1,2,\dots,n} = t_{1,2} \times t_{2,3} \times \dots \times t_{(n-1),n}.$$

Preuve. *On procède par récurrence sur $n \geq 3$.*

Pour $n = 3$, on pose

$$t_{1,2} = w^{a_1} x^{p_1} y z^{f_1} \text{ et } t_{2,3} = w^{a_2} x^{p_2} y z^{f_2}.$$

Au passage de e_1 à e_2 se faisant avec une augmentation de a_1 cellules, une aug-

mentation de hauteur de $h = 1$, un ajout de p_1 périmètres puis un échange de $|f_1|$ feuilles s'ajoutent a_2 cellules, p_2 périmètres, une hauteur $h = 1$ et un échange de $|f_2|$ feuilles. La suite de transitions élémentaires correspondante est $t_{1,2,3}$ obtenue avec $a_1 + a_2$ cellules, une hauteur de 2, un périmètre $p_1 + p_2$ puis un échange de $|f_1 + f_2|$ feuilles. D'où

$$\begin{aligned} t_{1,2,3} &= w^{a_1+a_2} x^{p_1+p_2} y^2 z^{f_1+f_2} \\ &= t_{1,2} \times t_{2,3} \end{aligned}$$

On considère à présent les transitions élémentaires $t_{1,2}, t_{2,3}, \dots, t_{n-1,n}, t_{n,n+1}$ tout en supposant que $t_{1,2,\dots,n} = t_{1,2} \times t_{2,3} \times \dots \times t_{(n-1),n}$. On pose

$$t_{1,2,\dots,n} = w^{a_1} x^{p_1} y^{n-1} z^{f_1} \text{ et } t_{n,n+1} = w^{a_2} x^{p_2} y z^{f_2}$$

Au passage de e_1 à e_n qui se fait avec une augmentation de a_1 cellules, une augmentation de hauteur de $h = n - 1$, un ajout de p_1 périmètres puis un échange de $|f_1|$ feuilles s'ajoutent a_2 cellules, p_2 périmètres, une hauteur $h = 1$ et un échange de $|f_2|$ feuilles. La suite de transitions élémentaires correspondante est $t_{1,\dots,n,n+1}$ obtenue avec $a_1 + a_2$ cellules, une hauteur qui vaut n , un périmètre $p_1 + p_2$ puis un échange de $|f_1 + f_2|$ feuilles. Ainsi

$$\begin{aligned} t_{1,\dots,n,n+1} &= w^{a_1+a_2} x^{p_1+p_2} y^n z^{f_1+f_2} \\ &= t_{1,\dots,n} \times t_{n,n+1} \\ &= (t_{1,2} \times t_{2,3} \times \dots \times t_{(n-1),n}) \times t_{n,n+1} \\ &= t_{1,2} \times t_{2,3} \times \dots \times t_{(n-1),n} \times t_{n,n+1} \end{aligned}$$

En conclusion on a $t_{1,\dots,n} = t_{1,2} \times t_{2,3} \times \dots \times t_{(n-1),n}$ pour tout $n \geq 3$.

Définition 2.1.15. Pour n états $e_1, e_2, \dots, e_n$ de $\mathcal{A}_B$, $n \geq 2$, non forcément distincts deux à deux, tels que les transitions, $T_{i,i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$, soient possibles. Une suite de transitions de longueur $n-1$, notée $T_{1,2,\dots,n}$, est une succession des transitions $T_{1,2}, T_{2,3}, \dots, T_{n-1,n}$. C'est la somme de toutes les suites de transitions élémentaires résultantes des transitions élémentaires de $T_{1,2}, T_{2,3}, \dots, T_{n-1,n}$ respectivement.

Par définition et surtout grâce à la proposition 2.1.14 on a

$$T_{1,2,\dots,n} = T_{1,2} \times T_{2,3} \times \dots \times T_{(n-1),n} \text{ pour } n \geq 3.$$

Remarque 2.1.10. Si $T_{1,2,\dots,m}$ est une suite de transitions de longueur m de e_1 à e_m alors le polyomino résultant est une succession du haut vers le bas des lignes $L_1, L_2, \dots, L_m$ de $e_1, e_2, \dots, e_m$ respectivement.

Étant donnés deux états e_1 et e_2 , il est possible d'avoir plus d'un chemin (suite de transitions) partant de e_1 à e_2 .

Si $T_1, T_2, \dots, T_k$ sont des suites de transitions de longueur n ($n, k \in \mathbb{N}$), de l'état e_1 à l'état e_2 alors on note par

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_k \tag{2.17}$$

l'ensemble de toutes les suites de transitions de longueur n de e_1 à e_2 .

Exemple 2.1.21. Dans le rectangle 3×3 (carré de côté 3) considérons la figure 2.29 ci-dessous. Le polyomino de cette figure résulte de la suite de transitions $T_{2,1,3}$ où

$$e_1 = (100, \{\{0\}\}), \quad e_2 = (110, \{\{0\}\}) \text{ et } e_3 = (111, \{\{0\}\}).$$

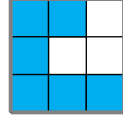


Figure 2.29: Polyomino inscrit dans le rectangle 3×3 .

Cette suite est bien définie, car les transitions $T_{2,1}$ et $T_{1,3}$ sont possibles.

Proposition 2.1.15. *Soit H un entier naturel non nul. Alors chaque entrée, non nulle, $a_{i,j}$ de la matrice $\mathcal{M}_B^H$ représente l'ensemble de toutes les suites de transitions de longueur H de l'état e_i à l'état e_j .*

Preuve. *Faisons un raisonnement par récurrence suivant les valeurs $H \geq 1$. On considère la matrice de transition $\mathcal{M}_B = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, supposée de taille n .*

Pour $H = 1$ chaque entrée $m_{i,j}$ de $\mathcal{M}_B^1$ correspond à la transition $T_{i,j}$ qui est une suite de transitions de longueur 1. De même pour $H = 2$, chaque entrée $a_{i,j}$ de $\mathcal{M}_B^2$ est sous la forme

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \sum_{k=1}^n m_{i,k} m_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n T_{i,k} T_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n T_{i,k,j}. \end{aligned}$$

Elle représente donc l'ensemble des suites de transitions de longueur 2 de e_i à e_j .

On suppose que pour H quelconque chaque entrée $a_{i,j}$ de $\mathcal{M}_B^H$ est sous la forme $a_{i,j} = \sum_{l=1}^{n_H} T_{i,l_2,l_3,\dots,l_H,j}$ où n_H est le nombre de suites de transitions de longueur H

de e_i à e_j . Chaque entrée $c_{i,j}$ de $\mathcal{M}_B^{H+1}$ est donnée par

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} m_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{n_H} T_{i,l_2,l_3,\dots,l_H,k} T_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{n_H} T_{i,l_2,l_3,\dots,l_H,k,j}. \end{aligned}$$

$c_{i,j}$ est donc l'ensemble des suites de transitions de longueur $H+1$ de e_i à e_j .

Ainsi pour tout $H \geq 1$, chaque entrée $a_{i,j}$ de la matrice $\mathcal{M}_B^H$ représente l'ensemble de toutes les suites de transitions de longueur H de l'état e_i à l'état e_j .

Remarque 2.1.11. Si on note r_B l'ensemble de toutes les transitions possibles entre les états de $\mathcal{A}_B$ (dont la forme matricielle est $\mathcal{M}_B$) alors le langage généré par l'automate $\mathcal{A}_B$ est

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}_B) = r_B^*$$

qui correspond à l'ensemble des entrées dans les puissances matricielles de $\mathcal{M}_B$.

La proposition 2.1.15 nous donne donc les moyens d'énumérer tous les polyominos pouvant être inscrits dans un rectangle de type B de hauteur H .

Lemme 2.1.2. Tout polyomino résultant de H états de l'automate $\mathcal{A}_B$ est de hauteur H .

Preuve. Cela s'explique par le fait que la ligne de chacun de ces états a au moins une cellule et aussi par les règles de transitions garantissant la connexité de l'ensemble, des cellules, résultant de la superposition des H lignes. Donc toutes les H lignes de ce dernier contiennent chacune, du haut vers le bas, au moins une cellule adjacente à au moins une cellule de la ligne précédente (si elle existe).

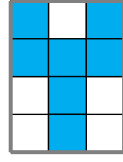


Figure 2.30: Polyomino, de hauteur 4, inscrit dans le rectangle de largeur 3 et de hauteur 4.

Par la suite, pour savoir si un polyomino est inscrit dans un rectangle de type B ou non, nous tenons compte de la suite de transitions dont il résulte.

Proposition 2.1.16. *Dans l'automate $\mathcal{A}_B$, tout polyomino résultant d'une suite de transitions à H états partant d'un état initial à un état final est inscrit dans le rectangle $B \times H$.*

Preuve. Cette proposition résulte de la proposition 2.1.8 et du lemme 2.1.2. Ainsi pour passer d'un état de longueur B à un état de longueur plus petite, on est assuré d'après la proposition 2.1.8 que les côtés est et ouest du rectangle $B \times H$ sont atteints par le polyomino et le lemme nous assure que ce polyomino a une hauteur H .

Proposition 2.1.17. *Pour tout polyomino $P_{B,H}$ inscrit dans un rectangle $B \times H$, il existe une unique suite de transitions qui le génère. Réciproquement, toute suite de transitions de H états de $\mathcal{A}_B$ partant d'un état initial à un état final correspond à un unique polyomino inscrit dans le rectangle $B \times H$.*

Preuve. $P_{B,H}$ résulte d'une suite de transitions entre états de $\mathcal{A}_B$. On considère deux états e et e' de $\mathcal{A}_B$ tels que la transition de e à e' fasse partie de la suite de transitions qui génère $P_{B,H}$. Supposons qu'il existe un autre état e'' différent de e' de telle sorte que si l'on remplace la transition de e à e' par la transition de e à e'' le polyomino $P_{B,H}$ reste inchangé.

— Si e' et e'' ont même longueur alors ils ont forcément la même ligne c'est-à-dire que la ligne de e' et celle de e'' ont la même distribution de composantes

connexes, ce qui changerait la nature de $P_{B,H}$ si ce n'était pas le cas. De plus le décalage de e'' par rapport à e est le même que celui de e' par rapport à e puisque si ces décalages étaient différents, le polyomino résultant ne serait pas le même que $P_{B,H}$. Ainsi e' et e'' ont pour ces raisons une même partition non croisée de composantes connexes et le même mot de l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ et ne sont pas donc différents.

- Si e' et e'' ont des longueurs différentes, dans ce cas on suppose que la longueur de e' est strictement supérieure à celle de e'' . Étant donné que $P_{B,H}$ est un polyomino inscrit dans le rectangle $B \times H$ alors toutes les transitions qui le génèrent sont conformes (voir la remarque 2.1.5). Or si c'était possible de passer de l'état e à l'état e'' le reste du polyomino évoluerait dans un rectangle de largeur inférieure ou égale à celle de e'' donc strictement plus petite que celle de e' . Il ne serait pas alors conforme de passer de l'état e à l'état e' . Cela contredit la transition de e à e' et par suite le fait que $P_{B,H}$ soit inscrit dans le rectangle $B \times H$.

On conclut donc que la suite de transitions qui génère $P_{H,B}$ est unique.

Réciproquement par définition, une suite de transition correspond à un unique polyomino.

On propose de traiter l'exercice suivant en guise d'exemple illustrant la proposition 2.1.17.

Exemple 2.1.22. *Considérons les polyominos suivant : Pour chacun d'entre eux énumérer les états et la suite de transitions correspondants.*

- *En tenant compte des règles de transitions, les états ayant contribué à la*



Figure 2.31: Deux polyominos inscrits générés par $\mathcal{A}_7$.

réalisation de $P_{7,4}$ sont les suivants :

$$\begin{aligned} e_1 &= (0111110, 0122210, \{\{0\}\}) & e_2 &= (1111011, 1332021, \{\{0, 1\}\}) \\ e_3 &= (01, 01, \{\{0\}\}), & e_4 &= (11, 12, \{\{0\}\}). \end{aligned}$$

La transition de e_2 à e_3 est obtenue avec le décalage qui commence à la position $i_1 = 3$. Aucune autre suite de transitions avec les états différents de ces quatre états n'est possible. En effet, si on imaginait e_3 comme étant un état de longueur plus grande alors sa transition avec e_4 serait impossible d'après la proposition 2.1.8.

— Les états ayant permis la génération de $P_{7,7}$ sont les suivants :

$$\begin{aligned} e_5 &= (0111111, 0122221, \{\{0\}\}), & e_6 &= (011101, 023201, \{\{0, 1\}\}), \\ e_7 &= (0001, 0001, \{\{0\}\}), & e_8 &= (0111, 0121, \{\{0\}\}), & e_4 \text{ et} \\ e_9 &= (1, 1, \{\{0\}\}). \end{aligned}$$

Le polyomino $P_{7,7}$ est obtenu selon l'ordre $e_5e_6e_7e_8e_4e_9e_9$. C'est l'unique façon d'obtenir $P_{7,7}$. En effet, si on considérait un état de longueur 7 (respectivement de longueur plus petite que 6) à la place de e_6 , alors on ne pourrait plus passer aux états de longueurs plus petites que 7 d'après la

proposition 2.1.8 et ce ne serait donc pas la bonne façon d'obtenir $P_{7,7}$, car on n'aboutirait pas à un état final (respectivement $P_{7,7}$ ne serait pas inscrit dans le carré 7×7). Il en est de même pour les autres transitions en substituant les états énumérés par d'autres.

Nous donnons dès à présent quelques exemples d'automates $\mathcal{A}_B$ pour certaines valeurs de B .

2.2 Automate $\mathcal{A}_2$

Les différents états de $\mathcal{A}_2$ sont

$$\begin{aligned} e_1 &= (10, 00, \{\{0\}\}), & e_2 &= (10, 10, \{\{0\}\}), & e_3 &= (01, 00, \{\{0\}\}), \\ e_4 &= (01, 01, \{\{0\}\}), & e_5 &= (11, 11, \{\{0\}\}), & e_6 &= (11, 21, \{\{0\}\}), \\ e_7 &= (11, 12, \{\{0\}\}), & e_8 &= (11, 22, \{\{0\}\}), & e_9 &= ((1, 1, \{\{0\}\}), \\ e_{10} &= (1, 0, \{\{0\}\}). \end{aligned}$$

dont les lignes sont illustrées dans la figure 2.32.



Figure 2.32: États de l'automate générateur des polyominos inscrits dans un rectangle de largeur 2.

Les états initiaux sont e_1 , e_3 et e_5 . Les états finaux sont e_6 , e_7 , e_8 et e_9 . En tenant compte des propositions 2.1.4, 2.1.6, 2.1.7 et 2.1.8, les transitions réalisables de $\mathcal{A}_2$ sont

$T_{1,2} = wx^2yz^2$	$T_{1,6} = w^2x^4yz^2$	$T_{2,2} = wx^2y$
$T_{2,6} = w^2x^4y$	$T_{3,4} = wx^2yz^2$	$T_{3,7} = w^2x^4yz^2$

$T_{4,4} = wx^2y$	$T_{4,7} = w^2x^4y$	$T_{5,2} = wx^2y$
$T_{5,4} = wx^2y$	$T_{5,8} = w^2x^2yz^{-2}$	$T_{5,9} = 2wx^2y$
$T_{6,2} = wx^2yz$	$T_{6,4} = wx^2y$	$T_{6,8} = w^2x^2yz^{-1}$
$T_{6,9} = wx^2yz + wx^2y$	$T_{7,2} = wx^2y$	$T_{7,4} = wx^2yz$
$T_{7,8} = w^2x^2yz^{-1}$	$T_{7,9} = wx^2y + wx^2yz$	$T_{8,2} = wx^2yz$
$T_{8,4} = wx^2yz$	$T_{8,8} = w^2x^2y$	$T_{8,9} = 2wx^2yz$
$T_{9,9} = wx^2y$	$T_{10,9} = wx^2yz^2$	

Nous déduisons alors la matrice de transfert $\mathcal{M}_2$ suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & wx^2yz^2 & 0 & 0 & 0 & w^2x^4yz^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & wx^2y & 0 & 0 & 0 & w^2x^4y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & wx^2yz^2 & 0 & 0 & w^2x^4yz^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & wx^2y & 0 & 0 & w^2x^4y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & wx^2y & 0 & wx^2y & 0 & 0 & 0 & w^2x^2yz^{-2} & 2wx^2y & 0 \\ 0 & wx^2yz & 0 & wx^2y & 0 & 0 & 0 & w^2x^2yz^{-1} & wx^2yz + wx^2y & 0 \\ 0 & wx^2y & 0 & wx^2yz & 0 & 0 & 0 & w^2x^2yz^{-1} & wx^2y + wx^2yz & 0 \\ 0 & wx^2yz & 0 & wx^2yz & 0 & 0 & 0 & w^2x^2y & 2wx^2yz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & wx^2y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & wx^2yz^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'automate $\mathcal{A}_2$ est donné par la figure 2.33

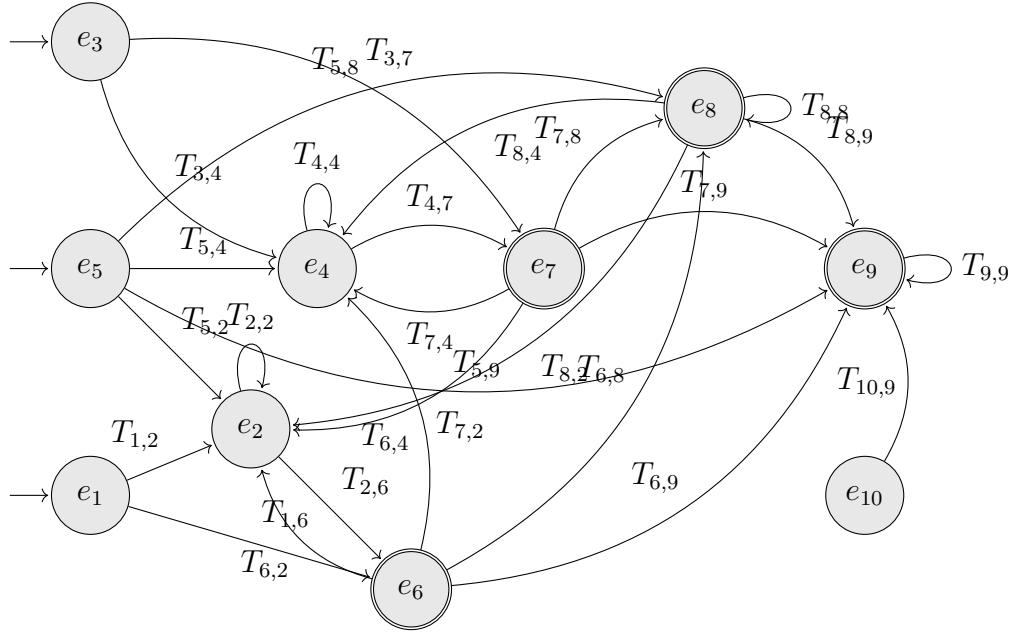
Les transitions impossibles et les raisons pour lesquelles elles le sont

Compte tenu de la proposition 2.1.4 (perte de la connexité)

$e_1 \rightarrow e_3, e_2 \rightarrow e_3, e_3 \rightarrow e_1, e_3 \rightarrow e_2, e_1 \rightarrow e_4, e_2 \rightarrow e_4, e_4 \rightarrow e_1$ et $e_4 \rightarrow e_2$.

Compte tenu de la proposition 2.1.7

$e_1 \rightarrow e_1, e_2 \rightarrow e_1, e_5 \rightarrow e_1, e_6 \rightarrow e_1, e_7 \rightarrow e_1, e_8 \rightarrow e_1, e_3 \rightarrow e_3, e_4 \rightarrow e_3, e_5 \rightarrow e_3,$

Figure 2.33: Automate $\mathcal{A}_2$.

$e_6 \rightarrow e_3$, $e_7 \rightarrow e_3$, $e_8 \rightarrow e_3$, $e_1 \rightarrow e_5$, $e_2 \rightarrow e_5$, $e_3 \rightarrow e_5$, $e_4 \rightarrow e_5$, $e_5 \rightarrow e_5$, $e_6 \rightarrow e_5$,
 $e_7 \rightarrow e_5$, $e_8 \rightarrow e_5$, $e_3 \rightarrow e_6$, $e_4 \rightarrow e_6$, $e_5 \rightarrow e_6$, $e_6 \rightarrow e_6$, $e_7 \rightarrow e_6$, $e_8 \rightarrow e_6$, $e_1 \rightarrow e_7$,
 $e_2 \rightarrow e_7$, $e_5 \rightarrow e_7$, $e_6 \rightarrow e_7$, $e_7 \rightarrow e_7$, $e_8 \rightarrow e_7$, $e_1 \rightarrow e_8$, $e_2 \rightarrow e_8$, $e_3 \rightarrow e_8$, $e_4 \rightarrow e_8$,
 $e_9 \rightarrow e_{10}$ et $e_2 \rightarrow e_{10}$.

Compte tenu de la proposition 2.1.8

$e_1 \rightarrow e_9$, $e_2 \rightarrow e_9$, $e_3 \rightarrow e_9$ et $e_4 \rightarrow e_9$.

Compte tenu des propositions 2.1.8 et 2.1.7

$e_1 \rightarrow e_{10}$, $e_2 \rightarrow e_{10}$, $e_3 \rightarrow e_{10}$ et $e_4 \rightarrow e_{10}$.

Compte tenu des propositions 2.1.6 et 2.1.7

$e_9 \rightarrow e_1$, $e_9 \rightarrow e_2$, $e_9 \rightarrow e_3$, $e_9 \rightarrow e_4$, $e_9 \rightarrow e_5$, $e_9 \rightarrow e_6$, $e_9 \rightarrow e_7$, $e_9 \rightarrow e_8$, $e_{10} \rightarrow e_1$,
 $e_{10} \rightarrow e_2$, $e_{10} \rightarrow e_3$, $e_{10} \rightarrow e_4$, $e_{10} \rightarrow e_5$, $e_{10} \rightarrow e_6$, $e_{10} \rightarrow e_7$ et $e_{10} \rightarrow e_8$.

2.3 Automate $\mathcal{A}_3$

$\mathcal{A}_3$ a 12 classes d'états qui sont présentées ci-dessous.

$$\begin{aligned} cl_1 &= (100, \{\{0\}\}), & cl_2 &= (010, \{\{0\}\}), & cl_3 &= (001, \{\{0\}\}), \\ cl_4 &= (110, \{\{0\}\}), & cl_5 &= (101, \{\{0, 1\}\}), & cl_6 &= (101, \{\{0\}, \{1\}\}), \\ cl_7 &= (011, \{\{0\}\}), & cl_8 &= (111, \{\{0\}\}), & cl_9 &= (10, \{\{0\}\}), \\ cl_{10} &= (01, \{\{0\}\}), & cl_{11} &= (11, \{\{0\}\}) \text{ et } & cl_{12} &= (1, \{\{0\}\}). \end{aligned}$$

On a donc les états suivants

$e_1 = (100, 000, \{\{0\}\})$	$e_2 = (100, 100, \{\{0\}\})$	$e_3 = (010, 000, \{\{0\}\})$
$e_4 = (010, 010, \{\{0\}\})$	$e_5 = (001, 000, \{\{0\}\})$	$e_6 = (001, 001, \{\{0\}\})$
$e_7 = (110, 110, \{\{0\}\})$	$e_8 = (110, 210, \{\{0\}\})$	$e_9 = (110, 120, \{\{0\}\})$
$e_{10} = (110, 220, \{\{0\}\})$	$e_{11} = (101, 000, \{\{0\}, \{1\}\})$	$e_{12} = (101, 101, \{\{0\}, \{1\}\})$
$e_{13} = (101, 100, \{\{0\}, \{1\}\})$	$e_{14} = (101, 001, \{\{0\}, \{1\}\})$	$e_{15} = (101, 101, \{\{0, 1\}\})$
$e_{16} = (011, 011, \{\{0\}\})$	$e_{17} = (011, 021, \{\{0\}\})$	$e_{18} = (011, 012, \{\{0\}\})$
$e_{19} = (011, 022, \{\{0\}\})$	$e_{20} = (111, 121, \{\{0\}\})$	$e_{21} = (111, 221, \{\{0\}\})$
$e_{22} = (111, 122, \{\{0\}\})$	$e_{23} = (111, 222, \{\{0\}\})$	$e_{24} = (111, 131, \{\{0\}\})$
$e_{25} = (111, 231, \{\{0\}\})$	$e_{26} = (111, 132, \{\{0\}\})$	$e_{27} = (111, 232, \{\{0\}\})$
$e_{28} = (10, 00, \{\{0\}\})$	$e_{29} = (10, 10, \{\{0\}\})$	$e_{30} = (01, 00, \{\{0\}\})$
$e_{31} = (01, 01, \{\{0\}\})$	$e_{32} = (11, 11, \{\{0\}\})$	$e_{33} = (11, 21, \{\{0\}\})$
$e_{34} = (11, 12, \{\{0\}\})$	$e_{35} = (11, 22, \{\{0\}\})$	$e_{36} = (1, 0, \{\{0\}\})$
$e_{37} = (1, 1, \{\{0\}\})$		

Tableau 2.2: Les états de $\mathcal{A}_3$.

Les transitions possibles sont les suivantes :

$T_{1,2} = yz^2wx^2$	$T_{1,8} = yz^2w^2x^4$
$T_{1,13} = yz^2w^2x^6$	$T_{1,21} = yz^2w^3x^6$

$T_{2,2} = ywx^2$	$T_{2,8} = yw^2x^4$
$T_{2,13} = yw^2x^6$	$T_{2,21} = yw^3x^6$
$T_{3,4} = yz^2wx^2$	$T_{3,9} = yz^2w^2x^4$
$T_{3,17} = yz^2w^2x^4$	$T_{3,24} = yz^3w^3x^6$
$T_{4,4} = ywx^2$	$T_{4,9} = yw^2x^4$
$T_{4,17} = yw^2x^4$	$T_{4,24} = yzw^3x^6$
$T_{5,6} = yz^2wx^2$	$T_{5,14} = yz^2w^2x^6$
$T_{5,18} = yz^2w^2x^4$	$T_{5,22} = yz^2w^3x^6$
$T_{6,6} = ywx^2$	$T_{6,14} = yw^2x^6$
$T_{6,18} = yw^2x^4$	$T_{6,22} = yw^3x^6$
$T_{7,2} = ywx^2$	$T_{7,4} = ywx^2$
$T_{7,10} = yz^{-2}w^2x^2$	$T_{7,13} = yw^2x^6$
$T_{7,17} = yw^2x^4$	$T_{7,25} = yz^{-1}w^3x^4$
$T_{7,29} = ywx^2$	$T_{7,33} = yw^2x^4$
$T_{8,2} = yzwx^2$	$T_{8,4} = ywx^2$
$T_{8,10} = yz^{-1}w^2x^2$	$T_{8,13} = yzw^2x^6$
$T_{8,17} = yw^2x^4$	$T_{8,25} = yw^3x^4$
$T_{8,29} = ywx^2$	$T_{8,33} = yw^2x^4$
$T_{9,2} = ywx^2$	$T_{9,4} = yzwx^2$
$T_{9,10} = yz^{-1}w^2x^2$	$T_{9,13} = yw^2x^6$
$T_{9,17} = yzw^2x^4$	$T_{9,25} = yw^3x^4$
$T_{9,29} = yzwx^2$	$T_{9,33} = yzw^2x^4$
$T_{10,2} = yzwx^2$	$T_{10,4} = yzwx^2$
$T_{10,10} = yw^2x^2$	$T_{10,13} = yzw^2x^6$
$T_{10,17} = yzw^2x^4$	$T_{10,25} = yzw^3x^4$
$T_{10,29} = yzwx^2$	$T_{10,33} = yzw^2x^4$
$T_{11,12} = yz^4w^2x^4$	$T_{11,23} = yz^2w^3x^4$
$T_{12,12} = yw^2x^4$	$T_{12,23} = yz^{-2}w^3x^4$
$T_{13,12} = yz^2w^2x^4$	$T_{13,23} = yzw^3x^4$

$T_{14,12} = yz^2w^2x^4$	$T_{14,23} = yw^3x^4$
$T_{15,2} = ywx^2$	$T_{15,6} = ywx^2$
$T_{15,8} = yw^2x^4$	$T_{15,15} = yw^2x^4$
$T_{15,18} = yw^2x^4$	$T_{15,23} = yz^{-2}w^3x^4$
$T_{15,29} = ywx^2$	$T_{15,31} = ywx^2$
$T_{15,33} = yw^2x^4$	$T_{15,34} = yw^2x^4$
$T_{15,37} = 2ywx^2$	$T_{16,4} = ywx^2$
$T_{16,6} = ywx^2$	$T_{16,9} = yw^2x^4$
$T_{16,14} = yw^2x^6$	$T_{16,19} = yz^{-2}w^2x^2$
$T_{16,26} = yz^{-1}w^3x^4$	$T_{16,31} = ywx^2$
$T_{16,34} = yw^2x^4$	$T_{17,4} = yzwx^2$
$T_{17,6} = ywx^2$	$T_{17,9} = yzw^2x^4$
$T_{17,14} = yw^2x^6$	$T_{17,19} = yz^{-1}w^2x^2$
$T_{17,26} = yw^3x^4$	$T_{17,31} = yzwx^2$
$T_{17,34} = yzw^2x^4$	$T_{18,4} = ywx^2$
$T_{18,6} = yzwx^2$	$T_{18,9} = yw^2x^4$
$T_{18,14} = yzw^2x^6$	$T_{18,19} = yz^{-1}w^2x^2$
$T_{18,26} = yw^3x^4$	$T_{18,31} = ywx^2$
$T_{18,34} = yw^2x^4$	$T_{19,4} = yzwx^2$
$T_{19,6} = yzwx^2$	$T_{19,9} = yzw^2x^4$
$T_{19,14} = yzw^2x^6$	$T_{19,19} = yw^2x^2$
$T_{19,26} = yzw^3x^4$	$T_{19,31} = yzwx^2$
$T_{19,34} = yzw^2x^4$	$T_{20,2} = ywx^2$
$T_{20,4} = yzwx^2$	$T_{20,6} = ywx^2$
$T_{20,10} = yz^{-1}w^2x^2$	$T_{20,15} = yw^2x^4$
$T_{20,19} = yz^{-1}w^2x^2$	$T_{20,27} = yz^{-2}w^3x^2$
$T_{20,29} = yzwx^2 + ywx^2$	$T_{20,31} = yzwx^2 + ywx^2$
$T_{20,35} = 2yz^{-1}w^2x^2$	$T_{20,37} = 2yw^2x^2 + yz^{-1}w^2x^2$
$T_{21,2} = yzwx^2$	$T_{21,4} = yzwx^2$

$T_{21,6} = ywx^2$	$T_{21,10} = yw^2x^2$
$T_{21,15} = yzw^2x^4$	$T_{21,19} = yz^{-1}w^2x^2$
$T_{21,27} = yz^{-1}w^3x^2$	$T_{21,31} = yzwx^2 + ywx^2$
$T_{21,29} = 2yzwx^2$	$T_{21,35} = yw^2x^2 + yz^{-1}w^2x^2$
$T_{21,37} = 2yzwx^2 + ywx^2$	$T_{22,2} = ywx^2$
$T_{22,4} = yzwx^2$	$T_{22,6} = yzwx^2$
$T_{22,10} = yz^{-1}w^2x^2$	$T_{22,15} = yzw^2x^4$
$T_{22,19} = yw^2x^2$	$T_{22,27} = yz^{-1}w^3x^2$
$T_{22,29} = yzwx^2 + ywx^2$	$T_{22,31} = 2yzwx^2$
$T_{22,35} = yw^2x^2 + yz^{-1}w^2x^2$	$T_{22,37} = 2yzwx^2 + ywx^2$
$T_{23,2} = yzwx^2$	$T_{23,4} = yzwx^2$
$T_{23,6} = yzwx^2$	$T_{23,10} = yw^2x^2$
$T_{23,15} = yz^2w^2x^4$	$T_{23,19} = yw^2x^2$
$T_{23,27} = yw^3x^2$	$T_{23,29} = 2yzwx^2$
$T_{23,31} = 2yzwx^2$	$T_{23,35} = 2yw^2x^2$
$T_{23,37} = 3yzwx^2$	$T_{24,2} = ywx^2$
$T_{24,4} = yzwx^2$	$T_{24,6} = ywx^2$
$T_{24,10} = yz^{-1}w^2x^2$	$T_{24,15} = yw^2x^4$
$T_{24,19} = yz^{-1}w^2x^2$	$T_{24,27} = yz^{-2}w^3x^2$
$T_{24,29} = yzwx^2 + ywx^2$	$T_{24,31} = yzwx^2 + ywx^2$
$T_{24,35} = 2yz^{-1}w^2x^2$	$T_{24,37} = yzwx^2 + 2ywx^2$
$T_{25,2} = yzwx^2$	$T_{25,4} = yzwx^2$
$T_{25,6} = ywx^2$	$T_{25,10} = yw^2x^2$
$T_{25,15} = yzw^2x^4$	$T_{25,19} = yz^{-1}w^2x^2$
$T_{25,27} = yz^{-1}w^3x^2$	$T_{25,29} = 2yzwx^2$
$T_{25,31} = yzwx^2 + ywx^2$	$T_{25,35} = yw^2x^2 + yz^{-1}w^2x^2$
$T_{25,37} = 2yzwx^2 + ywx^2$	$T_{26,2} = ywx^2$
$T_{26,4} = yzwx^2$	$T_{26,6} = yzwx^2$
$T_{26,10} = yz^{-1}w^2x^2$	$T_{26,15} = yzw^2x^4$

$T_{26,19} = yw^2x^2$	$T_{26,27} = yz^{-1}w^3x^2$
$T_{26,29} = yzwx^2 + ywx^2$	$T_{26,31} = 2yzwx^2$
$T_{26,35} = yw^2x^2 + yz^{-1}w^2x^2$	$T_{26,37} = 2yzwx^2 + ywx^2$
$T_{27,2} = yzwx^2$	$T_{27,4} = yzwx^2$
$T_{27,6} = yzwx^2$	$T_{27,10} = yw^2x^2$
$T_{27,15} = yz^2w^2x^4$	$T_{27,19} = yw^2x^2$
$T_{27,27} = yw^3x^2$	$T_{27,29} = 2yzwx^2$
$T_{27,31} = 2yzwx^2$	$T_{27,35} = 2yw^2x^2$
$T_{27,37} = 3yzwx^2$	$T_{28,29} = yz^2wx^2$
$T_{28,33} = yz^2w^2x^4$	$T_{29,29} = ywx^2$
$T_{29,33} = yw^2x^4$	$T_{30,31} = yz^2wx^2$
$T_{30,34} = yz^2w^2x^4$	$T_{31,31} = ywx^2$
$T_{31,34} = yw^2x^4$	$T_{32,29} = ywx^2$
$T_{32,31} = ywx^2$	$T_{32,35} = yz^{-2}w^2x^2$
$T_{32,37} = 2ywx^2$	$T_{33,29} = yzwx^2$
$T_{33,31} = ywx^2$	$T_{33,35} = yz^{-1}w^2x^2$
$T_{33,37} = yzwx^2 + ywx^2$	$T_{34,29} = ywx^2$
$T_{34,31} = yzwx^2$	$T_{34,35} = yz^{-1}w^2x^2$
$T_{34,37} = yzwx^2 + ywx^2$	$T_{35,29} = yzwx^2$
$T_{35,31} = yzwx^2$	$T_{35,35} = yw^2x^2$
$T_{35,37} = 2yzwx^2$	$T_{36,37} = yz^2wx^2$
$T_{37,37} = ywx^2$	

Tableau 2.3: Les transitions possibles de $\mathcal{A}_3$.

Les états initiaux de $\mathcal{A}_3$ sont $e_1, e_3, e_5, e_7, e_{11}, e_{16}, e_{20}$. Ses états finaux sont $e_{15}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}, e_{25}, e_{26}, e_{27}, e_{33}, e_{34}, e_{35}, e_{37}$.

2.4 Validation des valeurs dans les matrices de transfert $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$

Dans cette section nous vérifions si les entrées des matrices $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$ sont fiables, c'est-à-dire si la somme des coefficients des entrées $a_{i,j}$ de la matrice $\mathcal{M}_2^n$ (ou $\mathcal{M}_3^n$), où n est un entier naturel supérieur ou égal à 0, correspond à la $(n+1)^{ieme}$ valeur de la suite du nombre de polyominos inscrits dans le rectangle de type 2 (ou de type 3) sur *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (Friedman, b,a). Pour cela, nous calculons la matrice M_2^n (respectivement M_3^n) et comparons la somme S_n des coefficients des polynômes correspondants aux entrées $a_{i,j}$ de cette dernière. On note que $a_{i,j}$ est une transition de l'état initial e_i à l'état final e_j .

2.4.1 Validation des valeurs de la matrice $\mathcal{M}_2$

(i) Cas $n = 0$

Dans ce cas particulier, il s'agit de trouver l'unique polyomino inscrit dans le rectangle de base $B = 2$ et de hauteur 1 (voir figure 2.34). La valeur de S_0 vaut particulièrement 1 dans ce cas.



Figure 2.34: Polyomino inscrit dans le rectangle 2×1 .

(ii) Cas $n = 1$

Il suffit, dans ce cas, de faire la somme S_1 des coefficients des polynômes de Laurent des entrées $m_{i,j}$ de la matrice $\mathcal{M}_2$ correspondantes aux transitions des états initiaux aux états finaux. Dans le tableau ci-dessous, nous listons les entrées non nulles correspondantes aux transitions d'états initiaux aux états finaux.

Transition	$m_{i,j}$	Somme coefficients
$e_1 \rightarrow e_6$	$w^2x^4yz^2$	1
$e_3 \rightarrow e_7$	$w^2x^4yz^2$	1
$e_5 \rightarrow e_8$	$w^2x^2yz^{-2}$	1
$e_5 \rightarrow e_9$	$2wx^2y$	2

$S_1 = 1 + 1 + 1 + 2 = 5$. Ce qui signifie qu'on a au total 5 polyominos inscrits dans le carré 2×2 .

(iii) Cas $n = 2$

Nous faisons la somme S_2 des coefficients des polynômes de Laurent des entrées $m_{i,j}$ de la matrice $\mathcal{M}_2^2$ correspondantes aux transitions des états initiaux aux états finaux.

Transition	$m_{i,j}$	Somme coefficients
$e_1 \rightarrow e_6$	$w^3x^6y^2z^2$	1
$e_1 \rightarrow e_8$	$w^4x^6y^2z$	1
$e_1 \rightarrow e_9$	$w^3x^6y^2z^3 + w^3x^6y^2z^2$	2
$e_3 \rightarrow e_7$	$w^3x^6y^2z^2$	1
$e_3 \rightarrow e_8$	$w^4x^6y^2z$	1
$e_3 \rightarrow e_9$	$w^3x^6y^2z^3 + w^3x^6y^2z^2$	2
$e_5 \rightarrow e_6$	$w^3x^6y^2$	1
$e_5 \rightarrow e_7$	$w^3x^6y^2,$	1
$e_5 \rightarrow e_8$	$w^4x^4y^2z^{-2}$	1
$e_5 \rightarrow e_9$	$2w^3x^4y^2z^{-1} + 2w^2x^4y^2$	4

$S_2 = 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 4 = 15$.

(iv) Cas $n = 3$

Nous listons les entrées $m_{i,j}$ non nulles, $i \in \{1, 3, 5\}$ et $j \in \{6, 7, 8, 9\}$. On

a

$$\begin{aligned}
m_{1,6} &= w^4x^8y^3z^2 + w^5x^{10}y^3z^3, m_{1,7} = w^5x^{10}y^3z^2, m_{1,8} = w^5x^8y^3z + w^6x^8y^3z, \\
m_{1,9} &= 2w^5x^8y^3z^2 + 2w^4x^8y^3z^3 + 2w^4x^8y^3z^2, m_{3,6} = w^5x^{10}y^3z^2, m_{3,7} = \\
&w^4x^8y^3z^2 + w^5x^{10}y^3z^3, m_{3,8} = w^5x^8y^3z + w^6x^8y^3z, m_{3,9} = 2w^5x^8y^3z^2 + \\
&2w^4x^8y^3z^3 + 2w^4x^8y^3z^2, m_{5,6} = w^4x^8y^3 + w^5x^8y^3z^{-1}, m_{5,7} = w^4x^8y^3 + \\
&w^5x^8y^3z^{-1}, m_{5,8} = 2w^5x^8y^3z^{-1} + w^6x^6y^3z^{-2}, m_{5,9} = 2w^3x^6y^3 + 2w^4x^6y^3z^{-1} + \\
&2w^4x^8y^3 + 2w^4x^8y^3z + 2w^5x^6y^3z^{-1}.
\end{aligned}$$

$$S_3 = 2 + 1 + 2 + 6 + 1 + 2 + 2 + 6 + 2 + 2 + 3 + 10 = 39.$$

(v) Cas $n = 4$

$$\begin{aligned}
m_{1,6} &= w^7x^{12}y^4z^2 + 2w^6x^{12}y^4z^3 + w^5x^{10}y^4z^2, m_{1,7} = w^7x^{12}y^4z^2 + 2z^2w^6x^{12}y^4, \\
m_{1,8} &= w^7x^{12}y^4z^2 + w^7x^{10}y^4z + w^8x^{10}y^4z + w^7x^{12}y^4z + w^6x^{10}y^4z, m_{1,9} = \\
&2z^2w^7x^{10}y^4 + 2z^3w^6x^{12}y^4 + w^6x^{12}y^4z^2 + 4z^2w^6x^{10}y^4 + 3z^2w^5x^{10}y^4 + w^6x^{12}y^4z^3 + \\
&3w^5x^{10}y^4z^3, m_{3,6} = w^7x^{12}y^4z^2 + 2w^6x^{12}y^4z^2, m_{3,7} = w^7x^{12}y^4z^2 + 2z^3w^6x^{12}y^4 + \\
&z^2w^5x^{10}y^4, m_{3,8} = w^7x^{12}y^4z^2 + w^7x^{10}y^4z + w^8x^{10}y^4z + w^7x^{12}y^4z + w^6x^{10}y^4z, \\
m_{3,9} &= 2w^7x^{10}y^4z^2 + 2w^6x^{12}y^4z^3 + w^6x^{12}y^4z^2 + 4z^2w^6x^{10}y^4 + 3w^5x^{10}y^4z^2 + \\
&w^6x^{12}y^4z^4 + 3w^5x^{10}y^4z^3, m_{5,6} = w^6x^{12}y^4 + w^5x^{10}y^4 + w^7x^{10}y^4z^{-1} + w^6x^{12}y^4z + \\
&w^6x^{10}y^4z^{-1}, m_{5,7} = w^6x^{12}y^4 + w^5x^{10}y^4 + w^7x^{10}y^4z^{-1} + w^6x^{12}y^4z + w^6x^{10}y^4z^{-1}, \\
m_{5,8} &= 2w^7x^{10}y^4z^{-2} + 2w^7x^{10}y^4z^{-1} + w^8x^8y^4z^{-2} + 2w^6x^{10}y^4z^{-1}, m_{5,9} = \\
&2w^6x^8y^4z^{-1} + 4w^5x^{10}y^4z + 2w^4x^8y^4 + 6w^6x^{10}y^4 + 2w^7x^8y^4z^{-1} + 4w^5x^{10}y^4z^{-1} + \\
&2w^5x^8y^4z^{-1} + 2w^6x^{10}y^4z^{-1}.
\end{aligned}$$

$$S_4 = 4 + 3 + 5 + 16 + 3 + 4 + 5 + 16 + 5 + 5 + 7 + 24 = 97.$$

(vi) Cas $n = 5$

Pour ce cas, étant donné que les expressions des entrées $m_{i,j}$ de la matrice $\mathcal{M}_2^5$ sont de très grandes tailles, pour chacune d'elles, nous donnons la somme des coefficients de ses monômes.

Entrées	$m_{1,6}$	$m_{1,7}$	$m_{1,8}$	$m_{1,9}$	$m_{3,6}$	$m_{3,7}$	$m_{3,8}$	$m_{3,9}$	$m_{5,6}$	$m_{5,7}$	$m_{5,8}$	$m_{5,9}$
coef	9	8	12	40	8	9	12	40	12	12	17	58

$$S_5 = 9 + 8 + 12 + 40 + 8 + 9 + 12 + 40 + 12 + 12 + 17 + 58 = 237.$$

Dans le tableau 2.4 nous listons, pour chaque valeur n , $1 \leq n \leq 15$, le nombre polyominos inscrits dans le rectangle de base 2 et de hauteur $H = n + 1$. Pour chaque valeur n , s_1 , s_2 et s_5 désigne respectivement les nombres de polyominos obtenus à partir des états initiaux e_1 , e_3 et e_5 tandis-que S_n est le nombre total de polyominos inscrits dans le rectangle $2 \times (n + 1)$.

n	s_1	s_3	s_5	S_n
1	1	1	2	5
2	4	4	7	15
3	11	11	17	39
4	28	28	41	97
5	69	69	99	237
6	168	168	279	575
7	407	407	577	1391
8	984	984	1393	3361
9	2377	2377	3363	8117
10	5740	5740	8119	19599
11	13859	13859	19601	47319
12	33460	33460	47321	114241
13	80781	80781	114243	275805
14	195024	195024	275807	665855
15	470831	470831	665857	1607519

Tableau 2.4: Nombres de polyominos inscrits dans quelques rectangles de type 2.

À travers les quinze cas présentés ci-dessus, nous avons obtenu les quinze premières

valeurs de la suite numéro A034182 des nombres de polyominos inscrits dans un rectangle de base 2 du site *OEIS*. Sur la base de ces résultats, nous conjecturons que pour toute valeur de $n \geq 5$, la $(n + 1)^{ieme}$ valeur de la suite des nombres de polyominos inscrits dans un rectangle de largeur 2 est la même que celle de *OEIS*.

2.4.2 Validation des valeurs de la matrice $\mathcal{M}_3$

Tout comme la section précédente, nous calculons, en utilisant les puissances de la matrice $\mathcal{M}_3$, les sept premières valeurs de la suite des nombres de polyominos inscrits dans un rectangle de type 3 tout en les comparant à celles de l'*OEIS*. On rappelle que l'automate $\mathcal{A}_3$ a pour états initiaux les états $e_1, e_3, e_5, e_7, e_{11}, e_{16}, e_{20}$ et pour états finaux les états $e_{15}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}, e_{25}, e_{26}, e_{27}, e_{33}, e_{34}, e_{35}, e_{37}$.

Pour chaque état initial e_i de $\mathcal{A}_3$, nous calculons la somme s_i des coefficients de toutes les entrées $m_{i,j}$ de la matrice $\mathcal{M}_3^n$, correspondantes aux suites de transitions de e_i à e_j , $j \in \{15, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 33, 34, 35, 37\}$. On désigne par S_n la somme des s_i , i parcourant l'ensemble des indices des états initiaux de $\mathcal{A}_3$.

- (i) Cas $n = 0$ Dans ce cas particulier, il s'agit de trouver l'unique polyomino inscrit dans le rectangle de type $B = 3$ et de hauteur 1 (voir figure 2.35). La valeur de S_0 vaut particulièrement 1 dans ce cas.



Figure 2.35: Polyomino inscrit dans le rectangle 3×1 .

- (ii) Cas $n = 1$ (matrice $\mathcal{M}_3$)

i	1	3	5	7	11	16	20	S_1
s_i	1	1	1	2	1	1	8	15

- (iii) Cas $n = 2$ (matrice $\mathcal{M}_3^2$)

i	1	3	5	7	11	16	20	S_2
s_i	11	12	12	18	8	17	33	111

(iv) Cas $n = 3$ (matrice $\mathcal{M}_3^3$)

i	1	3	5	7	11	16	20	S_3
s_i	70	77	74	110	41	111	166	749

(v) Cas $n = 4$ (matrice $\mathcal{M}_3^4$)

i	1	3	5	7	11	16	20	S_4
s_i	387	468	387	607	206	607	833	3495

(vi) Cas $n = 5$ (matrice $\mathcal{M}_3^5$)

i	1	3	5	7	11	16	20	S_5
s_i	2033	2515	2033	3177	1039	3177	4215	18189

(vii) Cas $n = 6$ (matrice $\mathcal{M}_3^6$)

i	1	3	5	7	11	16	20	S_6
s_i	10464	13084	10464	16324	5254	16324	21317	93231

Dans le tableau 2.5 nous listons, pour chaque valeur n , $1 \leq n \leq 11$, le nombre polyominos inscrits dans le rectangle de base 3 et de hauteur $H = n + 1$.

n	s_1	s_3	s_5	s_7	s_{11}	s_{16}	s_{20}	S_n
1	1	1	1	2	1	1	8	15
2	11	12	12	18	8	17	33	111
3	70	81	70	111	41	111	165	649
4	387	468	387	607	206	607	833	3495
5	2033	2515	2033	3177	1039	3177	4215	18189
6	10464	13084	10464	16324	5254	16324	21317	93231
7	53359	67049	53359	83174	26571	83174	10779	474479
8	270897	341190	270897	422104	134364	422104	545065	2406621
9	1372430	1730463	1372430	2138101	679429	2138101	2756183	12187137
10	6946143	8762848	6946143	10820447	3435612	10820447	13936969	61668609
11	35139171	44340711	35139171	54736325	17372581	54736325	70473949	311938233

Tableau 2.5: Nombres de polyominos inscrits dans quelques rectangles de type 3.

Les valeurs obtenues à l'issue des calculs correspondent exactement aux onze premières valeurs de la suite numéro A034184 de l'*OEIS*.

2.5 Séries génératrices

L'énumération des polyominos ou forêts de polyominos inscrits dans rectangle de type B , $B \geq 2$, est beaucoup plus aisée dès qu'on connaît la série génératrice F_B liée à leur automate. Pour ce faire, nous allons considérer la matrice $\mathfrak{M}_B$ dont chaque entrée correspond à la somme des coefficients des polynômes de Laurent $m_{i,j}$ de la matrice $\mathcal{M}_B$. Nous calculons ensuite la matrice $M_B = (I_n - x\mathfrak{M}_B)^{-1}$. Nous sommons les entrées de M_B correspondantes aux passages des états initiaux aux états finaux. Pour y arriver, nous écrivons des programmes C++ et python consultables dans Yao (2023b).

2.5.1 Série génératrice des polyominos inscrits dans un rectangle de type 2

$$M_2(1, 6) = \frac{x - 2x^2}{1 - 3x + x^2 + x^3}, \quad M_2(1, 7) = \frac{x^3}{(-1 + x)(-1 + 2x + x^2)},$$

$$M_2(1, 8) = \frac{-x^2}{-1 + 2x + x^2}, \quad M_2(1, 9) = \frac{2x^2}{(-1 + x)(-1 + 2x + x^2)},$$

$$M_2(3, 6) = \frac{-x^3}{-1 + 3x - x^2 - x^3}, \quad M_2(3, 7) = \frac{x - 2x^2}{1 - 3x + x^2 + x^3},$$

$$M_2(3, 8) = \frac{-x^2}{-1 + 2x + x^2}, \quad M_2(3, 9) = \frac{2x^2}{1 - 3x + x^2 + x^3},$$

$$M_2(5, 6) = \frac{-x^2}{-1 + 2x + x^2}, \quad M_2(5, 7) = \frac{-x^2}{-1 + 2x + x^2},$$

$$M_2(5, 8) = \frac{-x + x^2}{-1 + 2x + x^2}, \quad M_2(5, 9) = \frac{-2x}{-1 + 2x + x^2}.$$

$$1 - 3x + x^2 + x^3 = (-1 + x)(x^2 + 2x - 1).$$

$$\begin{aligned} F_2(x) &= M_2(1, 6) + M_2(1, 7) + M_2(1, 8) + M_2(1, 9) + \\ &\quad M_2(3, 6) + M_2(3, 7) + M_2(3, 8) + M_2(3, 9) + \\ &\quad M_2(5, 6) + M_2(5, 7) + M_2(5, 8) + M_2(5, 9) \\ &= \frac{x(5 - x^2)}{x^3 + x^2 - 3x + 1} \end{aligned}$$

Le développement en série de Taylor au voisinage de 0 à l'ordre 20 de $F_2(x)$ nous donne

$$\begin{aligned} F_2(x) &= 5x + 15x^2 + 39x^3 + 97x^4 + 237x^5 + 575x^6 + 1391x^7 + \\ &\quad 3361x^8 + 8117x^9 + 19599x^{10} + 47319x^{11} + 114241x^{12} + \\ &\quad 275805x^{13} + 665855x^{14} + 1607519x^{15} + 3880897x^{16} + \\ &\quad 9369317x^{17} + 22619535x^{18} + 54608391x^{19} + \\ &\quad 131836321x^{20} + O(x^{21}). \end{aligned}$$

Avec cette série, nous confirmons non seulement les 15 premiers termes de la suite du tableau 2.4, mais aussi la concordance des 20 premiers termes de la suite (S_n) des nombres de polyominos inscrits dans un rectangle de type 2 avec celle de la suite numéro A034182 de l'*OEIS*.

2.5.2 Série génératrice des polyominos inscrits dans un rectangle de type 3

En notant par $s_i(x)$ la fonction génératrice des polyominos partant de l'état initial e_i , $i \in \{1, 3, 5, 7, 11, 16, 20\}$, à un état final de l'automate $\mathcal{A}_3$

$$\begin{aligned}
s_1(x) &= \frac{x(-x^6 - x^4 - 5x^2 + 2x + 1)}{(x^8 - 5x^7 - 14x^6 + 15x^5 - 21x^3 + 24x^2 - 9x + 1)} \\
s_3(x) &= \frac{x(-x^7 + 4x^6 + 11x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 2x - 1)}{(x^9 - 6x^8 - 9x^7 + 29x^6 - 15x^5 - 21x^4 + 45x^3 - 33x^2 + 10x - 1)} \\
s_5(x) &= \frac{x(-x^6 - x^4 - 5x^2 + 2x + 1)}{(x^8 - 5x^7 - 14x^6 + 15x^5 - 21x^3 + 24x^2 - 9x + 1)} \\
s_7(x) &= \frac{x(x^6 - 2x^5 - 2x^3 - 3x^2 + 2)}{(x^8 - 5x^7 - 14x^6 + 15x^5 - 21x^3 + 24x^2 - 9x + 1)} \\
S_{11}(x) &= \frac{x(x^4 - x^3 + 4x^2 - x - 1)}{(x^6 - 7x^5 + x^4 + 6x^3 - 11x^2 + 7x - 1)} \\
s_{16}(x) &= \frac{x(x^6 - 2x^5 - 2x^3 - 3x^2 + 2)}{(x^8 - 5x^7 - 14x^6 + 15x^5 - 21x^3 + 24x^2 - 9x + 1)} \\
s_{20}(x) &= \frac{x(-x^5 + 6x^4 + x^3 - 11x^2 + 16x - 7)}{(x^6 - 7x^5 + x^4 + 6x^3 - 11x^2 + 7x - 1)}.
\end{aligned}$$

En sommant les $s_i(x)$, $i \in \{1, 3, 5, 7, 11, 16, 20\}$, nous obtenons $F_3(x)$ définie par

$$F_3(x) = \frac{x(-x^8 + 5x^7 + 10x^6 - 27x^5 + 24x^4 + 7x^3 - 34x^2 + 39x - 15)}{(x^9 - 6x^8 - 9x^7 + 29x^6 - 15x^5 - 21x^4 + 45x^3 - 33x^2 + 10x - 1)}.$$

Le développement en série de Taylor à l'ordre 20 de $F_3(x)$ au voisinage de 0 nous

donne

$$\begin{aligned}
F_3(x) = & 15x + 111x^2 + 649x^3 + 3495x^4 + 18189x^5 + 93231x^6 + \\
& 474479x^7 + 2406621x^8 + 12187137x^9 + 61668609x^{10} + 311938233x^{11} + \\
& 1577602849x^{12} + 7977940187x^{13} + 40342860995x^{14} + 204001993697x^{15} + \\
& 1031568839407x^{16} + 5216271035257x^{17} + 26376744398811x^{18} + \\
& 133377264694375x^{19} + 674438290664861x^{20} + O(x^{21})
\end{aligned}$$

dont les coefficients sont exactement les termes de la suite numéro A034184 de l'*OEIS*.

Au terme de ce chapitre, nous avons mis en place l'automate $\mathcal{A}_B$, générateur des polyominos inscrits dans de rectangles de type B . Cela à été possible grâce aux diverses règles de transitions préétablies conformément à l'aspect géométrique que nous avons abordés dans le chapitre. Nous avons établi plusieurs formules à partir desquelles nous avons établi les transitions entre les états de l'automate $\mathcal{A}_B$. L'automate ainsi construit a été représenté par la matrice de transition $\mathcal{M}_B$ correspondante. Cette dernière élevée à la puissance $H-1$ nous permet d'énumérer tous les polyominos de hauteur H inscrits dans le rectangle $B \times H$ de base B et de hauteur H et grâce à la proposition 2.1.16 on retrouve l'énumération des polyominos inscrits dans ce même rectangle. Dans les deux dernières sections, nous avons validé les matrices de transfert $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$ en montrant que les suites des nombres de polyominos inscrits dans les rectangles $B \times H$, $B = 2$ ou $B = 3$, selon les entrées de chacune de ces matrices, est celles fournies dans l'*OEIS*.

CHAPITRE III

AUTOMATE DÉCRIVANT LES FORÊTS DE POLYOMINOS INSCRITES DANS UN RECTANGLE

Tout comme pour les polyominos, nous montrons dans ce chapitre que toute forêt de polyominos inscrite dans un rectangle du type B se génère par un automate $\mathcal{A}_{FB}$. L'automate $\mathcal{A}_{FB}$ est en quelque sorte une généralisation de l'automate $\mathcal{A}_B$. La différence entre les deux réside dans le nombre d'états et surtout au niveau des transitions possibles. Ce chapitre hérite des notions abordées dans le chapitre précédent.

Dans ce chapitre, en plus des statistiques abordées dans le chapitre précédent, nous allons parler du nombre de composantes connexes.

Pour commencer, nous construisons l'automate $\mathcal{A}_{FB}$. Ensuite nous étudions l'automate $\mathcal{A}_{F3}$.

3.1 Généralités sur l'automate $\mathcal{A}_{FB}$

3.1.1 État

Pour commencer cette partie, nous évoquons quelques exemples de forêts de polyominos inscrites dans un rectangle du type B . On peut remarquer à travers les deux forêts de polyominos inscrites de la figure 3.1 que dans le cas de l'automate

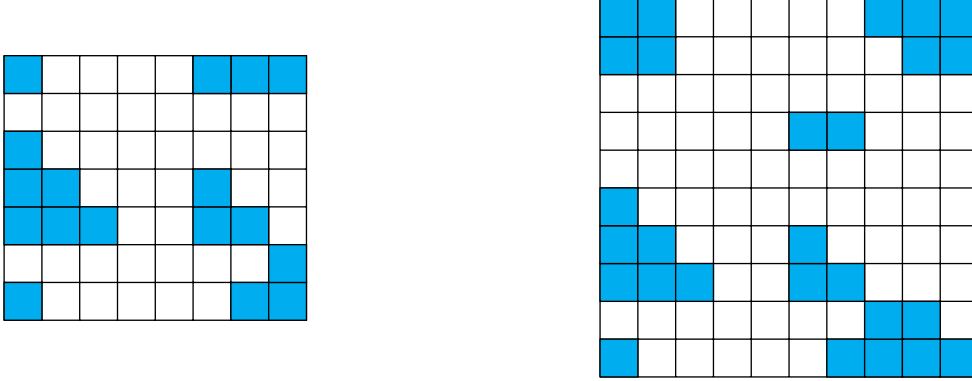


Figure 3.1: Deux exemples de forêts de polyominos inscrites dans un rectangle B .

$\mathcal{A}_{FB}$ le passage d'une ligne donnée de longueur $\mathcal{L}$ à la ligne suivante (si elle existe) de longueur $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}' \leq \mathcal{L}$, est possible même si l'une d'entre elles est dépourvue de cellules. Nous introduisons ainsi la notion d'état vide de l'automate $\mathcal{A}_{FB}$.

Définition 3.1.1. *Un état de longueur $\mathcal{L}$ de l'automate $\mathcal{A}_{FB}$, $1 \leq \mathcal{L} \leq B$, est dit vide si et seulement si sa ligne est dépourvue de cellules. Il se note alors*

$$(\underbrace{00\dots 0}_{\mathcal{L} \text{ termes}}, \underbrace{00\dots 0}_{\mathcal{L} \text{ termes}}, \{\{\}\}).$$

Nous définissons un état de $\mathcal{A}_{FB}$ comme suit.

Définition 3.1.2. *Tout état de longueur $\mathcal{L}$ de l'automate $\mathcal{A}_{FB}$, $1 \leq \mathcal{L} \leq B$, est un état de longueur $\mathcal{L}$ de $\mathcal{A}_B$ ainsi que l'état vide de longueur $\mathcal{L}$.*

Proposition 3.1.1. *Tout état initial de $\mathcal{A}_B$ est un état initial de $\mathcal{A}_{FB}$ et inversement.*

Preuve. Désignons par I_B et I_{FB} les ensembles d'états initiaux respectifs de $\mathcal{A}_B$ et $\mathcal{A}_{FB}$.

La proposition 3.1.1 s'explique d'abord par le fait qu'un état vide de longueur B ne peut pas être un état initial. Si tel était le cas, le côté haut du rectangle de type

B qui contient la forêt de polyominos résultante ne serait pas atteint et donc cette dernière ne serait pas inscrite dans ce rectangle. La figure 3.2 est une illustration de ce contre-exemple. De plus tout état initial de l'automate $\mathcal{A}_{FB}$ ou de $\mathcal{A}_B$ fait allusion à la première ligne d'un rectangle du type B . Or aucune des composantes connexes d'une première ligne d'un tel rectangle n'est connectée à une autre par le haut. Donc les états initiaux de $\mathcal{A}_{FB}$ ont exactement les mêmes propriétés que ceux de $\mathcal{A}_B$. On a alors $I_{FB} \subset I_B$.

Inversement, comme $\mathcal{A}_{FB}$ généralise $\mathcal{A}_B$ alors $\mathcal{A}_B$ ne peut pas avoir plus d'état initiaux que $\mathcal{A}_{FB}$, ce qui nous donne $I_B \subset I_{FB}$.

D'où $I_B = I_{FB}$.

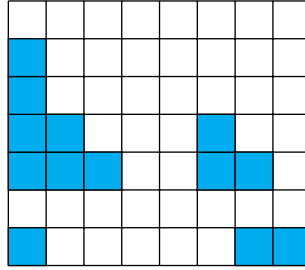


Figure 3.2: Exemple de forêt de polyominos non inscrite contenue dans un rectangle du type 8×7 dont la première ligne est dépourvue de cellules.

Proposition 3.1.2. *Tout état non vide de $\mathcal{A}_{FB}$ est final si et seulement s'il contient des cellules à ses deux extrémités.*

Preuve. En effet si un état vide était un état final de l'automate $\mathcal{A}_{FB}$ toute forêt de polyominos dont la dernière ligne est la ligne d'un tel état ne toucherait pas la base du rectangle dans lequel est contenue cette forêt de polyominos. De plus comme la connexité n'est pas exigée dans le cadre d'une forêt de polyominos, n'importe quel état dont la ligne contient les cellules aux extrémités est un état final. Le fait d'exiger la présence de cellules aux deux extrémités d'une ligne d'un état final

résulte de la remarque 2.1.5. Cette remarque exige que la suite du polyomino ou de la forêt de polyminos évoluant dans une bande rectangulaire de largeur $\mathcal{L}$ soit décrite par un état de longueur $\mathcal{L}$. Ainsi si l'une des extrémités d'un état final de longueur $\mathcal{L}$ est une case sans cellule alors cet état devrait être plutôt de longueur au plus $\mathcal{L} - 1$.

Après avoir pris connaissance des états de $\mathcal{A}_{FB}$, il s'avère indispensable de savoir comment se font les transitions entre ces derniers.

3.1.2 Transition entre les états

Nous avons les propositions suivantes.

Proposition 3.1.3. *Soit e et e' deux états de $\mathcal{A}_{FB}$ de longueurs respectives $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$, avec $\mathcal{L}' < \mathcal{L}$, et de lignes*

$$L = \alpha_{i_1} \alpha_{i_1+1} \dots \alpha_{i_1+\mathcal{L}-1} \text{ et } L' = \alpha'_{i'_1} \alpha'_{i'_1+1} \dots \alpha'_{i'_1+\mathcal{L}'-1}$$

respectivement telles que $i_1 \leq i'_1 \leq i'_1 + \mathcal{L}' - 1 \leq i_1 + \mathcal{L} - 1$.

- (i) Si $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_1+\mathcal{L}-1} = 0$ alors la transition de e à e' est impossible.
- (ii) Si $\alpha_{i_1} = 1$, $\alpha_{i_1+\mathcal{L}-1} = 0$ et si $i'_1 + \mathcal{L}' - 1 < i_1 + \mathcal{L} - 1$ alors la transition de e à e' est impossible.
- (iii) Si $\alpha_{i_1} = 0$, $\alpha_{i_1+\mathcal{L}-1} = 1$ et $i_1 < i'_1$ alors la transition de e à e' est impossible.

Preuve. (voir la preuve de la proposition 2.1.8)

La proposition 3.1.3 est similaire à la proposition 2.1.8. La seule différence entre les deux est que les décalages autorisés ici ne tiennent pas compte de la connexité (voir 2.1.4). Les deux propositions ont ainsi la même démonstration.

Proposition 3.1.4. *Soit e et e' deux états de $\mathcal{A}_{FB}$ tels que les hypothèses de la proposition 3.1.3, entraînant l'impossibilité de la transition de e à e' , ne soient pas satisfaites. La transition de e à e' n'est possible que si la longueur de e est supérieure ou égale à la longueur de e' et si la connexion entre e et e' ne modifie ni la partition non croisée de composantes connexes ni le mot de l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ associés à e' .*

Preuve. *Cette proposition est une conséquence de la construction des états de l'automate $\mathcal{A}_{FB}$ et du fait que la connexité n'est pas exigée dans le cadre d'une forêt de polyominos. Donc à part les conditions des propositions 2.1.7, 3.1.3, 2.1.6 et 2.1.5, les hypothèses de la proposition 2.1.4 n'empêchent pas la possibilité de la transition entre les états de l'automate $\mathcal{A}_{FB}$.*

Exemple 3.1.1. *(Cas d'impossibilité de transition due à la non conformité du mot de l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ associé à un des états)*

On considère trois états e , e' et e'' de longueur 7 de $\mathcal{A}_{F7}$, avec

$$e = (1001111, 0002231, \{\{0\}, \{1\}\}), \quad e' = (0110010, 0110010, \{\{0\}, \{1\}\}) \text{ et} \\ e'' = (1001111, 0001231, \{\{0\}, \{1\}\}).$$

La transition de e à e' est possible mais celle de e' à e est impossible car si cette dernière était possible, il y aurait une contradiction au niveau du mot de l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ associé à e (qui serait 0001231 au lieu de 0002231). Par contre, la transition de e' à e'' est possible.

En s'appuyant sur la proposition 3.1.4 et sur l'exemple 3.1.1, on peut dire que pour deux classes d'états cl et cl' de longueurs respectives $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ avec $1 \leq \mathcal{L}' \leq \mathcal{L} \leq B$, il existe des états e et e' de cl et cl' respectivement tels que la transition de e à e' soit possible. Ce qui n'était pas le cas au niveau des états de l'automate $\mathcal{A}_B$ car

la connexité est impérative.

Définition 3.1.3. *Une transition élémentaire d'un état e_i à un état e_j dans le cadre de l'automate $\mathcal{A}_{FB}$ est donnée par*

$$t_{i,j} = \lambda w^a x^p y z^f \zeta^c,$$

où $\lambda \in \{0, 1\}$, a , p , et f représentent toujours les mêmes paramètres que dans le cas de l'automate $\mathcal{A}_B$ et c le nombre de composantes connexes de la forêt de polyominos. Les variables w, x, y, z et ζ sont des variables formelles.

Remarque 3.1.1. *Les notions de transitions, suites de transitions et tout autre résultat obtenu dans le cadre de l'automate $\mathcal{A}_B$ restent valables pour l'automate $\mathcal{A}_{FB}$. La seule nouveauté ici est le calcul du nombre de composantes connexes.*

Le nombre c de composantes connexes, l'exposant de ζ , est tout comme f une valeur algébrique et représente à chaque transition, la perte ou le gain de composantes connexes.

La valeur de c ne dépend que des classes d'états auxquelles appartiennent les états mis en jeu dans la transition. Cela s'explique d'une part par le fait que la notion de mot de l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ a été introduite, uniquement, pour le calcul de la variation du nombre de feuilles et d'autre part par le fait qu'une composante connexe d'une forêt de polyomino n'est rien d'autre que l'agencement de quelques composantes connexes de cellules, des lignes du haut jusqu'à la base du rectangle contenant cette forêt de polyominos. On n'a donc pas besoin des mots de l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ pour expliquer la valeur de c .

Les composantes connexes par le haut de la partition non croisée de composantes connexes associée à un état de $\mathcal{A}_{FB}$ représentent les composantes connexes de la ligne de cet état vue comme forêt de polyominos ligne.

Soit e et e' deux états de $\mathcal{A}_{FB}$ tels que la transition de e à e' soit possible. On suppose que e' est non vide et a n composantes connexes par le haut, $cp_1, cp_2, \dots, cp_n$.

Chaque multicomposante connexe cp_i de e' , contribue dans le calcul de c à raison d'une valeur c_i , entier relatif, définie comme suit :

- (i) si cp_i n'est liée à aucune composante connexe de e alors $c_i = 1$,
- (ii) Si cp_i est liée à k composantes connexes par le haut de e , $k \in \mathbb{N}$ alors $c_i = -k + 1$.

Et on a

$$c = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i.$$

Si e' est un état vide, alors c est nul.

Exemple 3.1.2. *Considérons la forêt de polyomino de la figure 3.3, inscrite dans le rectangle de R_{15} de hauteur 8. Les états qui décrivent cette figure sont les sui-*

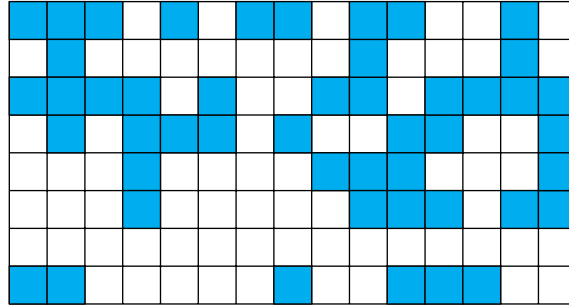


Figure 3.3: Forêt de polyominos inscrite dans un rectangle du type R_{15} de hauteur 8.

vants :

$$e_1 = (111010110110010, 121000110110000, \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\})$$

$$e_2 = (010000000100010, 010000000100010, \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\})$$

$$e_3 = (111101001101111, 132100001201231, \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\})$$

$$e_4 = (010111010011001, 010222000012001, \{\{0, 1\}, \{2\}, \{3, 4\}\})$$

$$e_5 = (000100001110001, 000100001220001, \{\{0\}, \{1, 2\}\})$$

$$e_6 = (000100000111011, 000100000231012, \{\{0\}, \{1, 2\}\})$$

$$e_7 = (000000000000000, 000000000000000, \{\{0\}\})$$

$$e_8 = (110000010011100, 110000000012100, \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\})$$

- e_1 est l'état initial et a cinq composantes connexes par le haut alors la valeur de c correspondante est $c = 5$, le nombre de ses composantes connexes.
- e_2 a trois composantes connexes par le haut $\{0\}, \{1\}$ et $\{2\}$. Chacune d'elles sont connectées à une unique composante connexe de e_1 . La valeur de c résultante est $c = 0$.
- e_3 a quatre composantes connexes par le haut $\{0\}, \{1\}, \{2\}$ et $\{3\}$. À part $\{1\}$ qui n'est connectée à aucune composante connexe de e_2 , toutes les autres sont connectées à une seule composante connexe parmi ses composantes connexes. On en déduit donc que $c = 1$ pour la transition de e_2 à e_3 .
- e_4 a trois composantes connexes par le haut, $\{\{0, 1\}, \{2\}$ et $\{3, 4\}\}$. $\{2\}$ n'est connectée à aucune composante connexe par le haut de e_3 , $\{0, 1\}$ est connectée à deux composantes connexes par le haut de e_3 et $\{3, 4\}$ est connectée à une composante connexe par le haut de e_3 . Dans ce cas on a $c = -1 + 1 + 0 = 0$.
- e_5 a deux composantes connexes par le haut $\{0\}$ et $\{1, 2\}$ chacune connectée à une unique composante connexe par le haut de e_4 . La valeur de c résultante de la transition e_4 à e_5 est $c = 0$.
- e_6 a deux composantes connexes par le haut dont chacune est liée à une seule composante connexe par le haut de e_5 et donc $c = 0$.

- e_7 est vide alors la valeur de c correspondante est $c = 0$.
- la valeur de c correspondante à la transition e_7 à e_8 est le nombre de composantes connexes par le haut de e_8 qui est ici 3.

Le nombre n_c de composantes connexes de cette forêt de polyominos est la somme des valeurs de c issues de toutes les transitions. Ici $n_c = 5+0+1+0+0+0+3 = 9$.

D'après les règles de calcul de c évoquées plus haut, il est donc fondamental de connaître pour une composante connexe par le haut donnée de e' , le nombre de composantes connexes par le haut de e avec lesquelles elle est en contact. Pour ce faire, nous allons considérer chaque composante connexe par le haut de e et de e' comme étant un état de même longueur que e et e' respectivement. Pour savoir si une composante connexe par le haut cp , de ligne $L_{cp} = \alpha_{i_1} \alpha_{i_1+1} \dots \alpha_{\mathcal{L}+i_1}$, de e et cp' , de ligne $L_{cp'} = \alpha'_{i'_1} \alpha'_{i'_1+1} \dots \alpha'_{\mathcal{L}'+i'_1}$, de e' se touchent il faut et il suffit que

$$\sum_{i'_1 \leq i \leq \mathcal{L}'+i'_1} \alpha_i \alpha'_i > 0,$$

avec $i_1 \leq i'_1 \leq \mathcal{L} \leq \mathcal{L}' \leq B$.

3.2 Automate A_{F3}

3.2.1 États

Nous présentons dans cette section l'automate $\mathcal{A}_{F3}$ en guise d'exemple des automates $\mathcal{A}_{FB}$. Le cas $B = 2$ n'a pas été abordé parce qu'une forêt de polyominos inscrite dans un rectangle de largeur 2 n'est pas si pertinente comme exemple de forêt de polyominos.

À part les états vides, les états de A_{F3} sont les mêmes que ceux de A_3 de même

que ses états initiaux. On a donc

$$\begin{aligned}
e_1 &= (100, 000, 0), & e_2 &= (100, 100, \{\{0\}\}), \\
e_3 &= (010, 000, \{\{0\}\}), & e_4 &= (010, 010, \{\{0\}\}), \\
e_5 &= (001, 000, \{\{0\}\}), & e_6 &= (001, 001, \{\{0\}\}), \\
e_7 &= (110, 110, \{\{0\}\}), & e_8 &= (110, 210, \{\{0\}\}), \\
e_9 &= (110, 120, \{\{0\}\}), & e_{10} &= (110, 220, \{\{0\}\}), \\
e_{11} &= (101, 000, \{\{0\}, \{1\}\}), & e_{12} &= (101, 101, \{\{0\}, \{1\}\}), \\
e_{13} &= (101, 100, \{\{0\}, \{1\}\}), & e_{14} &= (101, 001, \{\{0\}, \{1\}\}), \\
e_{15} &= (101, 101, \{\{0, 1\}\}), & e_{16} &= (011, 011, \{\{0\}\}), \\
e_{17} &= (011, 021, \{\{0\}\}), & e_{18} &= (011, 012, \{\{0\}\}), \\
e_{19} &= (011, 022, \{\{0\}\}), & e_{20} &= (111, 121, \{\{0\}\}), \\
e_{21} &= (111, 221, \{\{0\}\}), & e_{22} &= (111, 122, \{\{0\}\}), \\
e_{23} &= (111, 222, \{\{0\}\}), & e_{24} &= (111, 131, \{\{0\}\}), \\
e_{25} &= (111, 231, \{\{0\}\}), & e_{26} &= (111, 132, \{\{0\}\}), \\
e_{27} &= (111, 232, \{\{0\}\}), & e_{28} &= (000, 000, \{\{\}\}), \\
e_{30} &= (10, 10, \{\{0\}\}), & e_{32} &= (01, 01, \{\{0\}\}), \\
e_{34} &= (11, 21, \{\{0\}\}), & e_{35} &= (11, 12, \{\{0\}\}), & e_{36} &= (11, 22, \{\{0\}\}), \\
e_{37} &= (00, 00, \{\{\}\}), & e_{39} &= (1, 1, \{\{0\}\}), & e_{40} &= (0, 0, \{\{\}\}), \\
e_{29} &= (10, 00, \{\{0\}\}), & e_{31} &= (01, 00, \{\{0\}\}), \\
e_{33} &= (11, 11, \{\{0\}\}), & e_{38} &= (1, 0, \{\{0\}\}).
\end{aligned}$$

avec les états initiaux $e_1, e_3, e_5, e_7, e_{11}, e_{16}, e_{20}$. Tous les états non vides ayant des cellules à leurs extrémités sont finaux.

3.2.2 Matrice de transitions

La matrice de transition $\mathcal{M}_{F_3}$ de $\mathcal{A}_{F_3}$ est plus dense que la matrice $\mathcal{M}_3$. Cela s'explique par le fait que plusieurs transitions entre états auparavant impossibles dans le cas des polyominos sont possibles au niveau des forêts de polyominos.

Nous avons utilisé un programme C++ pour calculer la matrice $\mathcal{M}_{F_3}$ et l'intégralité de la matrice $\mathcal{M}_3$ dont les résultats sont présentés en annexe (voir Yao (2023a)). Toujours dans la même annexe, nous avons présenté quelques résultats sur les polyominos inscrits dans le rectangle $R_{3,4}$ en nous servant de la bibliothèque Ginac.

3.3 Calcul du nombre de forêts de polyominos inscrites dans un rectangle de base 3 et de hauteur $h = n + 1$ pour quelques valeurs de n .

Pour chaque état initial e_i de $\mathcal{A}_{F_3}$, nous calculons le nombre s_i de toutes les forêts de polyominos partant de cet état vers un état final. Nous désignons par S_n le nombre total de forêts de polyominos inscrites dans le rectangle $3 \times (n + 1)$. Pour $n = 0$ nous avons les forêts de polyominos de la figure 3.4.



Figure 3.4: Forêts de polyominos inscrites dans le rectangle 3×1 .

Nous présentons le reste des résultats dans le tableau 3.1.

n	s_1	s_3	s_5	s_7	s_{11}	s_{16}	s_{20}	S_n
1	4	2	4	4	7	4	7	32
2	42	34	42	42	52	42	52	306
3	372	340	372	372	408	372	408	2644
4	3112	2984	3112	3112	3248	3112	3248	21928
5	25424	24912	25424	25424	25952	25424	25952	178512
6	205472	203424	205472	205472	207552	205472	207552	1.44042e+06

Tableau 3.1: Nombres de forêts de polyominos inscrites dans quelques rectangles de type 3.

Pour le cas $n = 1$, nous représentons, ci-dessous, les 32 figures correspondantes.

La représentation de ces figures nous permet de valider le terme S_1 de la suite (S_n) des nombres de forêts de polyominos inscrites dans un rectangle de largeur 3 et de hauteur $n + 1$.



Figure 3.5: Forêts de polyominos inscrites dans le rectangle 3×2 partant de l'état $(100, 000, \{\{0\}\})$.



Figure 3.6: Forêts de polyominos inscrites dans le rectangle 3×2 partant de l'état $(010, 000, \{\{0\}\})$.



Figure 3.7: Forêts de polyominos inscrites dans le rectangle 3×2 partant de l'état $(001, 000, \{\{0\}\})$.



Figure 3.8: Forêts de polyominos inscrites dans le rectangle 3×2 partant de l'état $(110, 110, \{\{0\}\})$.

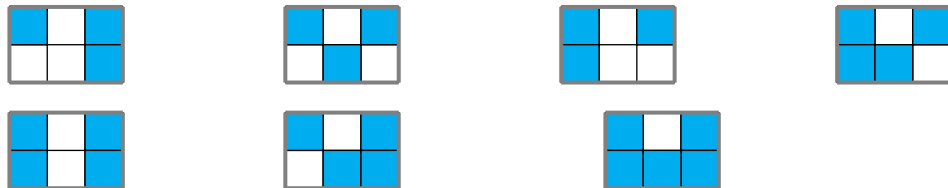


Figure 3.9: Forêts de polyominos inscrites dans le rectangle 3×2 partant de l'état $(101, 000, \{\{0\}, \{1\}\})$.



Figure 3.10: Forêts de polyominos inscrites dans le rectangle 3×2 partant de l'état $(011, 011, \{\{0\}\})$.

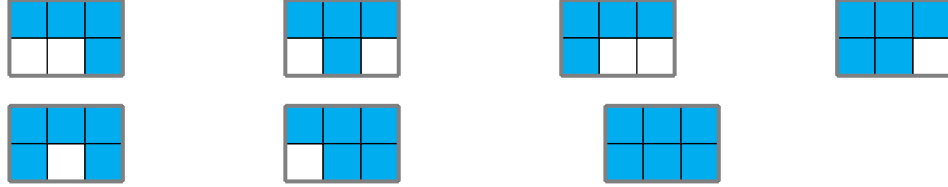


Figure 3.11: Forêts de polyominos inscrites dans le rectangle 3×2 partant de l'état $(111, 121, \{\{0\}, \{1\}\})$.

Les éléments de la figure 3.4 d'une part et ceux de 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 et 3.11 d'autre part confirment que les termes S_0 et S_1 de la suite (S_n) sont respectivement 2 et 32. Pour l'instant il n'y a aucune suite de l'*OEIS* commençant par les termes 2, 32, 2644, pour confirmer l'intégralité de la suite (S_n) néanmoins la section suivante nous donne les moyens de valider la matrice $\mathcal{M}_{F_3}$.

3.4 Séries génératrices de l'automate $\mathcal{A}_{F_3}$

Tout comme dans la dernière section du chapitre précédent nous validons la matrice $\mathcal{M}_{F_3}$ en déterminant sa fonction rationnelle. Le développement de cette dernière en série de Taylor nous permet de découvrir beaucoup de termes de la suite (S_n) .

En notant par $s_i(x)$ la fonction génératrice des forêts de polyominos partant de l'état initial e_i , $i \in \{1, 3, 5, 7, 11, 16, 20\}$, à un état final de l'automate $\mathcal{A}_{F_3}$ nous

avons

$$s_1(x) = \frac{2x(-4x^2 + 7x - 2)}{(64x^3 - 56x^2 + 14x - 1)}$$

$$s_3(x) = \frac{2x(12x^2 - 3x - 1)}{(64x^3 - 56x^2 + 14x - 1)}$$

$$s_5(x) = \frac{2x(-4x^2 + 7x - 2)}{(64x^3 - 56x^2 + 14x - 1)}$$

$$s_7(x) = \frac{2x(-4x^2 + 7x - 2)}{(64x^3 - 56x^2 + 14x - 1)}$$

$$s_{11}(x) = \frac{(-2x^2 - 3x + 1)}{(16x^2 - 10x + 1)}$$

$$s_{16}(x) = \frac{2x(-4x^2 + 7x - 2)}{(64x^3 - 56x^2 + 14x - 1)}$$

$$s_{20}(x) = \frac{(-2x^2 - 3x + 1)}{(16x^2 - 10x + 1)}.$$

En sommant les $s_i(x)$, $i \in \{1, 3, 5, 7, 11, 16, 20\}$, nous obtenons la fonction rationnelle $F_{F3}(x)$ de $\mathcal{A}_{F3}$ définie par

$$F_{F3}(x) = \frac{2(-12x^3 + 15x^2 - 2x - 1)}{(64x^3 - 56x^2 + 14x - 1)}$$

dont la série de Taylor à l'ordre 20 au voisinage de 0 est

$$\begin{aligned}
& 2 + 32x + 306x^2 + 2644x^3 + 21928x^4 + 178512x^5 + \\
& 1440416x^6 + 11572544x^7 + 92777088x^8 + 743003392x^9 + \\
& 5947173376x^{10} + 47589970944x^{11} + 380770101248x^{12} + \\
& 3046362140672x^{13} + 24371702439936x^{14} + 194976840761344x^{15} + \\
& 1559827611025408x^{16} + 12478672427876352x^{17} + \\
& 99829585581572096x^{18} + 798637509286559744x^{19} + \\
& 6389103372827885568x^{20} + O(x^{21}).
\end{aligned}$$

Grâce à l'exactitude de la matrice $\mathcal{M}_{F_3}$, la fonction rationnelle F_{F_3} ainsi que la série de Taylor associée et surtout grâce à plusieurs outils de calculs implémentés au cours de ce travail, nous garantissons l'exactitude de la suite (S_n) . De plus nous prévoyons une soumission de cette suite à l'*OEIS* pour une étude minutieuse afin qu'elle soit rendue publique.

L'automate $\mathcal{A}_{FB}$ tout comme l'automate $\mathcal{A}_B$ présentent un intérêt particulier dans l'énumération des polyominos et forêts de polyominos inscrits dans les rectangles du type B . En considérant le sous-ensemble des forêts de polyominos inscrites à une seule composante connexe, nous retrouvons les résultats dans le cas de l'automate $\mathcal{A}_B$. Nous concluons en disant que $\mathcal{A}_{FB}$ généralise $\mathcal{A}_B$. Comme cela a été le cas dans le chapitre précédent, la proposition 2.1.16 joue un rôle capital sur l'inscriptibilité de toute forêt de polyominos partant d'un état initial à un état final et dont les transitions satisfont aux règles associées à cette proposition.

Le volet abordé dans ce chapitre est une généralisation du chapitre précédent. Nous avons donné les règles de construction de l'automate $\mathcal{A}_{FB}$ nécessaire pour l'énumération de toutes les forêts de polyominos inscrites dans tous les rectangles

de largeur B et de hauteur quelconque en fonction de leur aire, leur périmètre, leur hauteur, leur nombre de feuilles et leur nombre de composantes connexes. Nous avons calculé la fonction génératrice associée à l'automate des forêts de polyominos inscrites dans un rectangle de largeur 3 et de hauteur quelconque.

CHAPITRE IV

ASPECTS ALOGORITHMIQUES DES FORMULES PORTANT SUR LES AUTOMATES A_B ET A_{FB}

Dans ce chapitre nous allons proposer les algorithmes permettant d'implémenter quelques formules-clés établies dans les chapitres II et III.

4.1 Calcul du périmètre d'un état

Pour un état e donné, nous décrivons l'algorithme nommé PERIMETREEtat permettant de calculer son périmètre. Le paramètre P désigne le périmètre en question. La ligne de e est un tableau d'entiers (binaires). Si $n = e.longueur$ c'est-à-dire la longueur de l'état e , alors cet algorithme a une complexité temporelle de $\mathcal{O}(n)$. La stratégie pour calculer P est la suivante :

- Si e est un état de longueur 1, elle est donc soit une cellule ou bien un état vide de longueur 1. Dans ce cas, $P = 4 * e.ligne(0)$. Cette valeur vaut 4 si e est une cellule et 0 s'il est un état vide.
- Si la ligne de e est de longueur 2 alors $P = 4 * e.ligne(0) - 2 * (e.ligne(0) * e.ligne(1)) + 4 * e.ligne(1)$ ce qui équivaut à la somme des périmètres des deux cases (dont chacun peut valoir 0 ou 4), tout en retranchant d'éventuels côtés qui se touchent. Si les deux cases sont toutes deux des cellules alors le terme $2 * (e.ligne(0) * e.ligne(1))$ vaut donc 2 correspondant ainsi au côté

vertical gauche de la cellule de gauche et au côté vertical droit de la cellule de droite qui sont internes au polyomino.

- Si e est de longueur supérieure ou égale à 3, on applique le processus expliqué dans le cas précédent : $e.longueur - 1$ précédentes cases tout en ajoutant le périmètre de la dernière case qui vaut $4 * e.ligne(e.longueur - 1)$.

```

1: fonction PERIMETREEtat( $e$  : etat) : naturel
2:    $P \leftarrow 0$  : naturel
3:   si ( $e.longueur = 1$ ) alors
4:      $P = 4 * e.ligne(0)$ 
5:   sinon
6:     si  $e.longueur = 2$  alors
7:        $P = 4 * e.ligne(0) - 2 * (e.ligne(0) * e.ligne(1)) + 4 * e.ligne(1)$ 
8:     sinon
9:       pour  $i$  allant de 0 à  $e.longueur - 2$  faire
10:         $P = P + 4 * e.ligne(i) - 2 * (e.ligne(i) * e.ligne(i + 1))$ 
11:      fin pour
12:       $P = P + 4 * e.ligne(e.longueur - 1)$ 
13:    fin si
14:  fin si
15:  retourner  $P$ 
16: fin fonction

```

4.2 Nombre de périmètre échangé lors d'une transition d'un état à un autre

La variation du périmètre lors de la transition d'un état e à un état e' , comme le stipule la formule de la proposition 2.1.10, correspond au périmètre de l'état e' auquel on retranche d'éventuel côtés horizontaux qui se touchent.

On considère deux états e et e' de tels que la transition de e à e' soit possible. On sait que $e.\text{longueur} \geq e'.\text{longueur}$. Soit n la longueur de e et n' celle de e' . Nous posons $e.\text{ligne}$ et $e'.\text{ligne}$ comme étant tous deux des tableaux de longueur n . Soit i_1 un entier naturel tel que la ligne de e' soit réellement étendue de i_1 à $i_1 + n' - 1$ en la repérant à la ligne de e (qui s'étend de 1 à n). On désigne par PERIMETRETRANSIT la fonction nous permettant le calcul du périmètre échangé au cours de la transition de e à e' qui prend argument deux états et retourne l'entier P .

```

1: fonction PERIMETRETRANSIT( $e$  : état,  $e'$  : état) :naturel
2:    $P$  : naturel
3:    $P \leftarrow \text{PERIMETREETAT}(e')$ 
4:   pour  $i$  allant de  $i_1$  à  $i_1 + n' - 1$  faire
5:      $P \leftarrow P - 2 * (e.\text{ligne}(i) * e'.\text{ligne}(i))$ 
6:   fin pour
7:   retourner  $P$ 
8: fin fonction

```

Le terme $e.\text{ligne}(i) * e'.\text{ligne}(i)$ qu'on retranche s'explique de la même manière que dans le cas de PERIMETREETAT à la différence qu'ici, les côtés concernés sont horizontaux. Cet algorithme s'exécute en $\mathcal{O}(n)$ au pire cas.

4.3 Nombre de feuilles d'un état

4.3.1 Nombre de feuilles d'un état initial

Le nombre de feuilles d'un état dépend du fait qu'il est un état initial ou un état intermédiaire. Si un état e est initial, cela signifie qu'aucune de ses composantes connexes n'est connectée par le haut. Ce qui permet de conclure que le nombre de ses feuilles n'est rien d'autre que le nombre de ses composantes connexes ayant au

moins 2 cellules multiplié par deux puisque chacune de ces types de composantes connexes a deux cellules de degré 1, qui sont à ses extrémités. Pour calculer ce nombre, il suffit de dénombrer les composantes connexes à une seule cellule de l'état e concerné. Ce calcul est décrit dans la fonction COMPOUNITCEL. Nous utiliserons le paramètre nc_0 pour désigner le nombre de composantes connexes à une seule cellule. Soit n tel que $n = e.longueur$ et Bin le tableau d'entiers binaires mis pour $e.ligne$ i.e. $Bin = e.ligne$.

```

1: fonction COMPOUNITCEL( $e$  : état) : entier
2:    $nc_0$  : entier
3:   si  $n = 1$  alors
4:      $nc_0 \leftarrow Bin(0)$ 
5:   fin si
6:   si  $n = 2$  alors
7:      $nc_0 \leftarrow Bin(0) * (1 - Bin(0) * Bin(1)) + Bin(1) * (1 - Bin(0) * Bin(1))$ 
8:   fin si
9:   si  $e.longueur > 2$  alors
10:     $nc_0 \leftarrow Bin(0) * (1 - Bin(0) * e.Bin(1)) +$ 
11:     $Bin(n - 1) * (1 - Bin(n - 2) * Bin(n - 1))$ 
12:    pour  $i$  allant de 1 à  $n - 1$  faire
13:       $nc_0 \leftarrow nc_0 + Bin(i) * (1 - \max(Bin(i - 1) * Bin(i), Bin(i) * B(i + 1)))$ 
14:    fin pour
15:  fin si
16:  retourner  $nc_0$ 
17: fin fonction

```

La règle de calcul de nc_0 est la suivante :

- Si $n = 1$, alors il a soit une cellule (qui est alors de degré 0) soit il est un état nul et dans ce cas la valeur de nc_0 correspond à l'unique valeur,

$Bin(0)$, du tableau Bin (voir ligne 4).

- Si $n = 2$ alors on a la formule de la ligne 7 qui est constituée de deux termes. Le terme $Bin(0) * (1 - Bin(0) * Bin(1))$ par exemple s'explique comme suit : $Bin(0)$ nous permet de savoir si la case 0 contient de cellules ou non. Ainsi, si cette case ne contient pas de cellule $Bin(0) = 0$ et donc le terme $Bin(0) * (1 - Bin(0) * Bin(1))$ n'influe pas le résultat final. Dans le cas où cette case contient de cellule ($Bin(0) = 1$) alors on s'intéresse au facteur $(1 - Bin(0) * Bin(1))$ qui nous dit, si à droite de la cellule de la case $B(0)$, il y a une cellule ou pas. Dans le cas affirmatif, $Bin(0) = Bin(1) = 1$ et donc $(1 - Bin(0) * Bin(1)) = 0$ de même que le second terme de nc_0 ($1 - Bin(0) * Bin(1)$) est un facteur commun au deux termes) ce qui revient à dire que l'unique composante connexe de e est constituée de deux cellules dont chacune a pour degré 1. Dans le cas contraire c'est-à-dire $1 - Bin(0) * Bin(1) = 1$, ce qui signifie qu'une seule des deux cases de Bin contient une cellule et nc_0 vaut automatiquement 1. Pour le cas $Bin(0) = Bin(1) = 0$ (e est un état vide de longueur 2), nc_0 est nul.
- Si $n > 2$, les lignes 10 et 11 nous donnent les informations aux deux extrémités de la ligne de e . À la ligne 13, $Bin(i) * (1 - \max(Bin(i-1) * Bin(i), Bin(i) * B(i+1)))$ est une généralisation des termes expliqués dans le volet précédent ; c'est le cas où la case $1 < i < n-1$. $Bin(i)$ nous dit toujours si une cellule se trouve dans la i^{eme} case de Bin ou non. Dans le cas contraire, cette expression est nulle et n'intervient pas dans la somme finale. Dans le cas affirmatif, si l'expression $\max(Bin(i-1) * Bin(i), Bin(i) * B(i+1)) = 0$, alors la cellule en question n'a ni cellule à sa gauche ni à sa droite et ainsi $Bin(i) * (1 - \max(Bin(i-1) * Bin(i), Bin(i) * B(i+1))) = 1$, sinon elle a au moins une cellule à l'un de ses côtés et $Bin(i) * (1 - \max(Bin(i-1) * Bin(i), Bin(i) * B(i+1))) = 0$.

Les opérations dans cet algorithme se font aussi en $\mathcal{O}(n)$.

Si n_c est le nombre de composantes connexes, dont la formule est démontrée dans la proposition 2.1.2, le calcul du nombre, n_f , de feuilles de l'état initial e se déduit facilement dès qu'on a la valeur de nc_0 qui n'est rien d'autre que $2 * (n_c - n_{c_0})$. Nous désignons par `NBFEUILLEETATUNIT` la fonction qui permet d'obtenir le nombre de feuilles d'un état pouvant être initial.

4.3.2 Nombre de feuilles d'un état interne

La formule du nombre de feuilles d'un état non initial est établie dans la proposition 2.1.12 du chapitre 2. La procédure consiste à considérer au départ l'état e comme étant initial. Dans ce cas, nous utilisons dans un premier temps la fonction `NBFEUILLEETATUNIT` pour calculer le nombre n_{f_1} de feuilles qu'il aurait pu avoir. Ensuite, nous définissons deux variables $n_{0 \rightarrow 1}$ et $n_{1 \rightarrow 2}$ qui désignent respectivement le nombre de cellules de e (vu initialement comme étant état initial) dont les degrés sont passés chacun de 0 à 1 et le nombre de celles dont les degrés sont passés chacun de 1 à 2 suite à sa transition avec l'état qui le précède. Cette fonction nommée `NBFEUILLEETAT`, prend en argument un état e et retourne l'entier naturel n_f qui est le nombre de feuille de cet état. Dans cette fonction, e est matérialisé par les tableaux *Bin* et *Mot* qui désignent respectivement sa ligne et le tableau dont les cases sont des symboles du mot de de l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ qui lui est associé. On suppose que l'état qui précède e est l'état e' dont la ligne est donnée par le tableau *Bin'*. Tous les tableaux dans cet algorithme sont supposés de taille $e'.longueur$ et on désigne par i_0 , le numéro (repéré par rapport à la numérotation de la ligne de e') à partir duquel commence normalement la ligne de e . On pose $n = e.longueur$.

```

1: fonction NBFEUILLEETAT( $e$  : état) : naturel
2:    $i_0, n_{f_1}, n_f, n_{0 \rightarrow 1}, n_{1 \rightarrow 2}$  : naturel
3:    $n_{f_1} \leftarrow \text{NBFEUILLEETATUNIT}(e)$ 
4:    $n_{0 \rightarrow 1} \leftarrow 0, n_{1 \rightarrow 2} \leftarrow 0$ 

```

```

5:   pour  $i$  allant de  $i_0$  à  $n + i_0 - 1$  faire
6:        $n_{0 \rightarrow 1} = n_{0 \rightarrow 1} + \text{Bin}(i) * \text{Bin}'(i) * \min(1, \text{Mot}(i), |2 - \text{Mot}(i)|, |3 - \text{Mot}(i)|)$ 
7:        $n_{1 \rightarrow 2} = n_{0 \rightarrow 1} + \text{Bin}(i) * \text{Bin}'(i) * \min(1, \text{Mot}(i), |1 - \text{Mot}(i)|, |3 - \text{Mot}(i)|)$ 
8:   fin pour
9:    $n_f \leftarrow n_{f_1} - n_{1 \rightarrow 2} + n_{0 \rightarrow 1}$ 
10:  retourner  $n_f$ 
11: fin fonction

```

Dans le calcul de $n_{0 \rightarrow 1}$ et celui de $n_{1 \rightarrow 2}$, si le produit $\text{Bin}(i) * \text{Bin}'(i) = 0$ cela signifie que la case $\text{Bin}(i)$ ou bien la case $\text{Bin}'(i)$ ne contient aucune cellule ce qui signifie que rien ne change sur le degré de $\text{Bin}(i)$. Si $\text{Bin}(i) * \text{Bin}'(i) = 1$, cela signifie que la cellule de la case $\text{Bin}(i)$ a au-dessus d'elle une cellule (c'est-à-dire que la case $\text{Bin}'(i)$ contient de cellule). Donc son degré n'est pas en fait celui qui lui était attribué en supposant que e est initial. Ainsi

- si son degré était supposé 0 il vaut en réalité 1 il faut donc compter cette cellule parmi les feuilles de e . Comme $\text{Mot}(i) = 1$ alors $\min(1, \text{Mot}(i), |2 - \text{Mot}(i)|, |3 - \text{Mot}(i)|) = 1$ ce qui augmente la valeur de $n_{0 \rightarrow 1}$ de 1.
- De même, si son degré était supposé 1 il vaut en réalité 2 il faut donc retrancher cette cellule parmi les feuilles de e puisqu'elle n'est pas en réalité une feuille de e . Comme $\text{Mot}(i) = 2$ alors $\min(1, \text{Mot}(i), |1 - \text{Mot}(i)|, |3 - \text{Mot}(i)|) = 1$ ce qui augmente la valeur de $n_{1 \rightarrow 2}$ de 1.

Ainsi, $n_{1 \rightarrow 2}$ est d'après tout ce qui précède le nombre de cellules comptées par erreur comme étant les feuilles de e parmi les n_{f_1} feuilles si e était initial. $n_{0 \rightarrow 1}$ est par contre les feuilles de e qui n'ont pas été comptées en supposant e initial.

La complexité de NBFEUILLEETAT est aussi $\mathcal{O}(n)$.

4.4 Nombre de feuilles échangées lors d'une transition

Considérons deux états e et e' d'un automate $\mathcal{A}_B$ (respectivement $\mathcal{A}_{FB}$) tels que la transition de e à e' soit possible. La variation du nombre de feuilles de cette transition est une valeur algébrique donnée dans la proposition 2.1.13. Cette variation du nombre de feuilles dépend de la position i_0 de départ de la ligne de l'état de e' par rapport à la ligne de e . Et pour les deux états e et e' on peut avoir plusieurs possibilités i_0 . La proposition 2.1.13 tient donc compte d'une seule de ces possibilités c'est-à-dire pour une valeur de i_0 fixée. Nous expliquons ici le fonctionnement de l'algorithme qui a permis l'établissement de cette formule. Pour ne pas alourdir les notations, les lignes de e et e' sont respectivement α et α' et les mots de l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ associés seront respectivement m et m' tous considérés comme étant des tableaux de taille $e.\text{longueur}$. Comme précédemment en notant $n = e'.\text{longueur}$, les valeurs α'_i et m'_i sont nulles $0 \leq i < i_0$ et $n + i_0 \leq i \leq e'.\text{longueur} - 1$. Si $n_{f'}$ est le nombre de feuilles de e' , donnée par l'une des fonctions de la section précédente, la variation f du nombre de feuilles est donnée par

$$\begin{aligned}
 f = n_{f'} - & \\
 & \sum_{i=i_0}^{n+i_0-1} \alpha_i \alpha'_i \min\{1, m_i + \alpha_i \alpha'_i, |1 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|, |3 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|, |4 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|\} \\
 & + \\
 & \sum_{i=i_0}^{n+i_0-1} \alpha_i \alpha'_i \min\{1, m_i + \alpha_i \alpha'_i, |2 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|, |3 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|, |4 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|\}.
 \end{aligned}$$

Les termes $\alpha_i \alpha'_i$ ont la même signification que $\text{Bin}(i) * \text{Bin}'(i)$ dans la sous-section précédente. La variation du nombre de feuilles lors de cette transition correspond en fait à un ajout du nombre de feuilles de e' conditionné par le fait que certaines

feuilles de e' voient leur degré augmenter de 1 (donc ne sont plus des feuilles) alors que certaines de ses cellules de degré 0 verront leur degré augmenter de 1 (feuilles). Ces trois situations sont respectivement matérialisées par $n_{f'}$ et les deux sommations dans l'ordre.

Dans les deux dernières sommations, si $\alpha_i \alpha'_i = 1$ alors il y a un changement de degré de la cellule α_i de e .

— Si $m_i = 1$ avant la transition alors

$$\min\{1, m_i + \alpha_i \alpha'_i, |1 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|, |3 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|, |4 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|\} = 1$$

alors que

$$\min\{1, m_i + \alpha_i \alpha'_i, |2 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|, |3 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|, |4 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|\} = 0$$

donc une perte feuille.

— Si $m_i = 0$ avant la transition alors

$$\min\{1, m_i + \alpha_i \alpha'_i, |1 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|, |3 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|, |4 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|\} = 0$$

alors que

$$\min\{1, m_i + \alpha_i \alpha'_i, |2 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|, |3 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|, |4 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|\} = 1$$

donc un gain de feuille.

— pour d'autres valeur de m_i i.e. 2, 3,

$$\min\{1, m_i + \alpha_i \alpha'_i, |1 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|, |3 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|, |4 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|\} = 0$$

et

$$\min\{1, m_i + \alpha_i \alpha'_i, |2 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|, |3 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|, |4 - m_i - \alpha_i \alpha'_i|\} = 0$$

D'où la formule de f . Cet algorithme s'implémente presque de la même façon que NBFEUILLEETAT.

4.5 Décomposition en composantes connexes

Étant donné un état e de longueur B , $1 \leq B$ de $\mathcal{A}_{FB}$, nous proposons un algorithme expliquant la dislocation de ce dernier en ses différentes composantes connexes. La ligne de l'état est considérée comme un tableau de taille B . On suppose que e a n_c composantes connexes et n_{c_h} son nombre de composantes connexes par le haut. Dans un premier temps nous allons proposer une fonction COMPOSANTESETAT en $\mathcal{O}(B^2)$ qui prend en argument un état et renvoie une matrice $2D$ dont les lignes représentent les composantes connexes de l'état passé en argument. Dans cette fonction, on va utiliser un tableau double *Composante* de taille $n_c \times B$ dont les lignes représentent les composante connexes de e dans l'ordre de numérotation. Ensuite la fonction COMPOSANTESCONNECTHAUT qui prend en argument un état et renvoie la matrice $2D$, *Composanteh* de taille n_{c_h} , dont les lignes représentent les composantes connexes par le haut dudit état. Dans la fonction COMPOSANTESCONNECTHAUT on fera appel à COMPOSANTESETAT.

- 1: **fonction** COMPOSANTESETAT(e : etat) : matrice $2D$ de binaires
- 2: *Ligne* : tableau de binaire (ligne de e)
- 3: i, j : naturel
- 4: *Composante* : matrice $2D$ de taille $n_c \times B$
- 5: $i \leftarrow 0, j \leftarrow 0$

```

6:   On initialise Composante à 0
7:   tant que  $i < n_c$  faire
8:       tant que  $(j < B - 2) \wedge (Ligne(j) \neq 0 \vee Ligne(j + 1) \neq 1)$  faire
9:           si  $Ligne(j) \neq 0$  alors
10:                $Composante(i, j) \leftarrow Ligne(j)$ 
11:           fin si
12:            $j \leftarrow j + 1$ 
13:       fin tant que
14:        $i \leftarrow i + 1$ 
15:   fin tant que
16:   si  $Ligne(B - 1) = 1$  alors
17:        $Composante(n_c - 1, B - 1) = Ligne(B - 1)$ 
18:   fin si
19:   retourner Composante
20: fin fonction

```

D'après les parties précédentes, une composante connexe par le haut cp_i à n_i composantes connexes d'un état e est notée sous la forme $\{k_{1_i}, k_{2_i}, \dots, k_{n_i}\}$ où chaque entier k_{j_i} $1 \leq j \leq n_i$ est un entier naturel représentant une des composantes connexes qui la constituent et $k_{1_i} < k_{2_i} < \dots < k_{n_i}$. Nous supposons que l'indice i , $0 \leq i \leq n_{c_h} - 1$, suit l'ordre selon lequel sont listées les composantes connexes par le haut de e . Pour écrire la fonction COMPOSANTESCONNECTHAUT nous considérerons chaque composante connexe cp_i de l'état e comme étant une structure dont les instances sont son *nom* et la *liste* de ses composantes connexes avec $cp_i.nom = i$ et $cp_i.liste = \{k_{1_i}, k_{2_i}, \dots, k_{n_i}\}$. Cet algorithme retourne le tableau *CompHaut* de taille $n_{c_h} \times B$ dont chacune des lignes représente une composante connexe par le haut de e . L'idée dans cette fonction est d'enregistrer sur chaque ligne de *CompHaut* toutes les cellules des composantes connexes de chaque com-

posante connexe par le haut cp_i de l'état e tout en respectant leur position c'est-à-dire pour une position j donnée, $CompHaut(i, j) = 1$ s'il y a de cellule en cette position et $CompHaut(i, j) = 0$ sinon. Si $cp_i.liste = \{k_{1_i}, k_{2_i}, \dots, k_{n_i}\}$

$$CompHaut(i, j) = Comp(k_{1_i}, j) + Comp(k_{2_i}, j) + \dots + Comp(k_{n_i}, j)$$

qui ne dépasse pas 1 car les composantes connexes sont disjointes deux à deux.

```

1: fonction COMPOSANTESCONNECTHAUT( $e$  : etat) : tableau double de bi-
    naires
2:    $Comp \leftarrow$  COMPOSANTESETAT( $e$ )
3:    $CompHaut$  : tableau de taille  $n_{c_h} \times B$  nul au départ
4:   pour  $i$  allant de 0 à  $n_{c_h} - 1$  faire
5:     pour  $j$  allant de 0 à  $B - 1$  faire
6:       pour  $s$  allant de 0 à  $cp_i.liste.longueur - 1$  faire
7:          $CompHaut(i, j) = CompHaut(i, j) + Comp(cp_i.liste(s), j)$ 
8:       fin pour
9:     fin pour
10:  fin pour
11:  retourner  $CompHaut$ 
12: fin fonction

```

Cet algorithme est en $\mathcal{O}(B^2)$ car tout d'abord les lignes 2 et 3 sont en $\mathcal{O}(B^2)$ chacune. Les lignes 5 à 9 sont en $\mathcal{O}(cp_i.liste.longueur \times B)$ or

$$\sum_{0 \leq i \leq n_{c_h} - 1} (cp_i.liste.longueur) = n_c \leq B.$$

Ainsi les lignes allant de 4 à 10 sont en $\mathcal{O}(B^2)$ au pire cas. On déduit que alors que COMPOSANTESCONNECTHAUT est en $\mathcal{O}(B^2)$ au pire cas.

4.6 Composante connexe

Dans la définition 3.1.3 une transition élémentaire d'un état e_i à un état e_j dans le cadre de l'automate $\mathcal{A}_{FB}$ est donnée par

$$t_{ij} = w^a x^p y^h z^f \zeta^c,$$

où a , p , h et f représentent toujours les mêmes paramètres que dans le cas de l'automate $\mathcal{A}_B$ et c le nombre de composantes connexes de la forêt de polyominos.

Nous donnons dans cette section la fonction `COMPCONNEXE` permettant le calcul de c . Cette fonction prend en argument deux états e et e' et retourne c . Nous allons tout d'abord écrire la fonction `ENCONNEXION` qui étant données deux composantes connexes par le haut cp et cp' appartenant respectivement à e et e' nous dit si les deux se touchent. cp et cp' sont vues comme étant des tableaux de binaires de tailles respectives $e.longueur = n$ et $e'.longueur = n'$. On va repérer cp' par rapport à cp avec i'_0 le numéro de la première case de cp' i.e.

$$cp = \alpha_1 \alpha_1 \dots \alpha_n \text{ et } cp' = \alpha'_{i'_0} \alpha'_{i'_0+1} \dots \alpha'_{n'+i'_0-1}.$$

- 1: **fonction** `ENCONNEXION`(cp, cp' : tableau de binaires) : booléen
- 2: $valeur \leftarrow 0$: naturel
- 3: $EstVrai \leftarrow (valeur > 0)$: booléen
- 4: **pour** i allant de i_0 à $n' + i_0 - 1$ **faire**
- 5: $valeur \leftarrow valeur + \alpha_i * \alpha'_i$
- 6: **fin pour**
- 7: **retourner** $EstVrai$
- 8: **fin fonction**

ENCONNEXION est en $\mathcal{O}(B)$ au pire cas.

Dans la fonction COMPCONNEXE, nous fixons chaque composante connexe par le haut cp' de e' et parcourons l'ensemble de composantes connexes par le haut de e en faisant appel à ENCONNEXION pour vérifier si cp' touche certaines parmi elles. Nous notons respectivement par $e.cph$ et $e'.cph$ les tableaux de composantes connexes par le haut de e et e' et de tailles respectives n_{c_h} et $n_{c'_h}$.

```

1: fonction COMPCONNEXE( $e$  : etat,  $e'$  : etat) : entier
2:    $c, tempo$  : entier
3:    $c \leftarrow 0$ 
4:   pour  $i$  allant de 0 à  $(n'_{c_h} - 1)$  faire
5:      $tempo \leftarrow 1$ 
6:     pour  $j$  allant de 0 à  $(n_{c_h} - 1)$  faire
7:       si ENCONNEXION( $e'.cph(i), e.cph(j)$ ) alors
8:          $tempo \leftarrow tempo - 1$ 
9:       fin si
10:    fin pour
11:     $c \leftarrow c + tempo$ 
12:  fin pour
13:  retourner  $c$ 
14: fin fonction

```

L'algorithme COMPCONNEXE est en $\mathcal{O}(B^3)$ au pire cas.

Nous avons à travers ce chapitre non seulement donné des méthodes simples permettant d'appliquer certaines formules fondamentales établies dans les deux chapitres précédents mais aussi donné leur démonstration d'une manière plus concrète. Plusieurs de ces algorithmes ont été implémentés dans les langages C++

et python, dont quelques exemples d'exécutions peuvent être consultés dans l'annexe associé à ce document (voir Yao (2023b,a)).

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

À travers ce travail, nous avons mis en place des notions fondamentales suffisantes pour énumérer les polyominos inscrits dans un rectangle de base B et de hauteur H quelconques. Au cours de nos travaux nous avons non seulement porté nos investigations au-delà de ce qui a été déjà fait dans la littérature en ce qui concerne l'énumération des polyominos inscrits, notamment l'énumération des polyominos sur la base de l'aire, le périmètre, le nombre de feuilles, la hauteur et de nombre de composantes connexes (le cas de forêts de polyominos inscrites), nous n'avons pas tenu compte d'une classe particulière de polyominos comme cela s'est fait jusqu'à présent en littérature. L'objectif ainsi visé par nos recherches est donc plus général.

En nous inspirant de la notion de la théorie de langages et automates, nous avons construit les automates $\mathcal{A}_B$ et $\mathcal{A}_{FB}$ qui permettent respectivement d'énumérer les polyominos et les forêts de polyominos inscrits dans un rectangle du type B en tenant compte des paramètres énumérés ci-dessus. Pour y arriver, étant donné un polyomino inscrit, nous avons su remarquer que la succession des lignes constituant ce polyomino, du haut vers le bas, se présente comme étant des éléments dont l'agencement dans cet ordre de succession nous donne ledit polyomino. Cette conception nous a donc permis de concevoir les états de nos deux automates. C'est ainsi que nous avons défini un état comme étant une suite de cellules ou de cases non occupées couplée d'un mot de l'alphabet $\{0, 1, 2, 3\}$ le tout affecté d'une partition non croisée de composantes connexes, une notion qui a été beaucoup développée surtout dans le second chapitre. Pour des raisons de compatibilité entre les états, relevant de la façon dont les lignes d'un polyomino ou forêt sont

agencées entre elles et particulièrement pour des raisons de connexité dans un polyomino, nous avons défini des règles de transition entre états. Que ce soit un polyomino ou une forêt de polyominos, dans la stratégie utilisée dans ce travail, l'un ou l'autre est caractérisé par les états le constituant et l'ordre de succession de ces derniers. Aussi, une transition entre deux états est vue comme un ensemble constitué d'un gain d'aire, de périmètre et de hauteur et un gain ou une perte de nombre de feuilles et de nombre de composantes connexes (cas des forêts de polyominos). Cet ensemble est ici représenté par un polynôme de Laurent dont le terme général est fonction des paramètres que nous avons considérés. Des formules exactes, permettant le calcul des variations de chacun de ces paramètres ont été établies, notamment les variations d'aires, de périmètres, de nombre de feuilles et de composantes connexes.

Grâce aux transitions entre états, nous avons établi les matrices de transitions relativement aux automates ainsi construits dont les entrées représentent chacune la transition d'un état à l'autre. Cette représentation matricielle des automates nous fournit assez d'informations pour la suite de nos travaux de recherches. Notamment des suites de transitions, on a pu déduire que lorsqu'on élève la matrice de transitions à une puissance $H - 1$, H quelconque, nous obtenons une matrice dont chaque entrée a_{ij} représente tous les chemins de l'état e_i à l'état e_j et fournit le nombre de polyominos de hauteur H ayant un certain nombre d'aire, de périmètre, de feuilles et de composantes connexes. Grâce aux propositions 2.1.8 et 2.1.16 nous distinguons parmi tous les polyominos générés ceux qui sont inscrits dans le rectangle $R_{B,H}$.

Toutes les formules établies dans le cadre de ce mémoire ont été programmées et implémentées dans les langages $C++$ et python. À partir de ces formules ainsi implémentées, nous avons construit les matrices de transitions $\mathcal{M}_{F_3}$ et $\mathcal{M}_3$ respectivement de l'automate des forêts de polyominos et celui des polyominos

contenus dans les rectangles du type B , dont on peut retrouver les résultats dans l'annexe attaché à ce document. Toujours dans l'annexe, nous avons présenté quelques résultats sur les polyominos inscrits dans le rectangle $R_{3,4}$.

Nous avons validé les matrices $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$ et $\mathcal{M}_{F3}$ en déterminant leur séries génératrice. Les coefficients des séries génératrices de $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$ sont les termes des suites respectivement numéros $A034182$ et $A034184$ de l'*OEIS*.

Nous comptons dans la suite de nos travaux

- établir des méthodes de récurrence permettant, pour tout entier naturel strictement positif B donné, de générer tous les états des automates $\mathcal{A}_B$ et $\mathcal{A}_{FB}$;
- établir à partir de la matrice de transitions $\mathcal{A}_B$ ou $\mathcal{A}_{FB}$ une formule qui tenant compte de l'aire, du périmètre, de nombre de feuilles et de composantes connexes, nous donne le nombre de polyominos inscrits dans un rectangle $R_{B,H}$ caractérisés par ces données ;
- et étudier les cas particulier de polyominos notamment les polyominos arbres et serpents.

RÉFÉRENCES

- Bousquet-Mélou, M. (1993). q -Énumération de polyominos convexes*. *Journal of Combinatorial Theory*, 64, 265–288.
- Bousquet-Mélou, M. et Rechnitzer, A. (2003). The site perimeter of bargraphs. *Advances in Applied Mathematics*, 31(1), 86–112.
- Chang, S.-G. et Lin, K.-Y. (1988). Rigorous results for the number of convex polygons on the square and honeycomb lattices. *J. Phys. A :Math.Gen*, 21, 2635–2642.
- Delest, M.-P. et Dulucq, S. (1993). Enumeration of directed column-convex animals with given parimeter and area. *Croatica Chemica Acta*, 66(1), 59–80.
- Delest, M.-P. et Viennot, G.-X. (1984). Algebraic languages and polyominoes enumeration. *Theoret. Comput. Sci*, 34, 169–206.
- Derrida, B., Nadal, J.-P. et Vannimenus, J. (1982). Directed lattices animals in 2 dimensions : Numerical and exact results. *J. Phys.*, 43, 1561.
- Eilenberg, S. (1976). Automata, languages, and machines. *Academic Press*, A.
- Friedman, E. *Not necessarily symmetric $n \times 3$ crossword puzzle grids*. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Récupéré de <https://oeis.org/A034184>
- Friedman, E. *Number of not-necessarily-symmetric $n \times 2$ crossword puzzle grids*. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Récupéré de <https://oeis.org/A034182>

- Gardner, M. (1977). Mathematical games. *Scientific American*, 236(1), 110–121.
- Gessel, I.-M. (1999). On the number of convex polyominoes. *Annales des Sciences Mathématiques du Québec*, 63–66.
- Golomb, G. (1966). Tiling with polyominoes. *Journal of Combinatorial Theory*, 1, 280–296.
- Golomb, G. (1989). Polyominoes which tile rectangles. *Journal of Combinatorial Theory*, 1, 117–124.
- Goupil, A. et Cloutier, H. (2011). Enumeration of minimal 3d polyominoes inscribed in a rectangular prism. *Proceedings of the Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, 423–434.
- Goupil, A., Cloutier, H. et Nouboud, F. (2010). Enumeration of polyominoes inscribed in a rectangle. *Discrete Applied Mathematics*, 158(8), 2014–2023.
- Goupil, A., Cloutier, H. et Pellerin, M.-E. (2013). Generating functions for inscribed polyominoes. *Discrete Applied Mathematics*, 161(1-2), 151–166.
- Gouyou-Beauchamps, D. et Viennot, G.-X. (1988). Equivalence of two-dimensional directed animal problem to one-dimensional path problem. *Adv. in App.Math*, 9, 334–357.
- Hakim, G. et Nadal, J.-P. (1983). Exact results for 2d directed lattice animals on a strip of finite width. *J. Phys. A :Math.Gen*, 16, 213–218.
- Hopcroft, J.-E., Motwani, R. et Ullman, J.-D. (1979). *Introduction to automata theory, languages and computation*. Numéro 2. USA : Addison-Wesley.
- Klarner, D.-A. et Rivest, R.-L. (1973). A procedure for improving the upper bound for the number of n -ominoes. *Canad. J. Math*, 25, 585–602.

- Kreweras, G. (1972). Sur les partitions non croisées d'un cycle. *Discrete Applied Mathematics*, 1(4), 333–350.
- Privman, V. et Svrakic, N.-M. (1988). Exact generating function for fully directed compact lattice animals. *Phys. Rev. Lett.*, 60(12), 1107–1109.
- Rabin, M.-O. et Scott, D. (1959). Finite automata and their decision problems. *IBM J. of Research and Development*, 3, 114–125.
- Rousseau, C. (2014). Passera, passera pas ? *Accromath*, 9(1), 8–13.
- Sipser, M. (1996). *Introduction to the theory of computation* (1st éd.). Massachusetts : PWS Publishing Company.
- Viennot, G.-X. (1985). Problèmes combinatoires posés par la physique statistique. *Séminaire Bourbaki*, 1983/84(626), 225–246.
- Yao, I. A. (2023a). *Annexe*. Github. Récupéré de <https://github.com/Yao1300/UQAM/tree/main/Annexe>
- Yao, I. A. (2023b). *Programmes informatiques*. Github. Récupéré de https://github.com/Yao1300/UQAM/tree/main/code_memoire2