UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉTUDE DE LA NOTION DE PROPORTIONNALITÉ CHEZ DES ÉLÈVES DU SECONDAIRE DE LA PREMIÈRE NATION CRIE

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN ÉDUCATION

PAR

MOHAMED EL-ASSADI

NOVEMBRE 2008

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier la directrice de projet, Madame Jacinthe Giroux, ainsi que le codirecteur, Monsieur Gustavo Barallobres, professeurs des sciences de l'éducation à l'Université du Québec à Montréal (UQÀM) pour leur temps et leurs efforts.

Je voudrais remercier Madame Sophie René de Cotret de l'Université de Montréal pour les modifications qu'elle a proposées à mon travail comme correctrice. En plus, j'éprouve une grande gratitude pour ses critiques constructives et judicieuses.

Également, je remercie les enseignantes de la langue crie à l'école Willie J. Happyjack Memorial School à Waswanipi. En plus, je voudrais souligner la bonne collaboration des élèves de 2^e secondaire de cette école ainsi que le soutien de leurs parents dans l'élaboration des séances de l'expérimentation.

Je remercie aussi les personnes âgées, cries, pour l'aide qu'elles m'ont apportée tout au long de ce travail.

Finalement, je remercie ma famille et mes amis pour leur soutien et leurs encouragements jusqu'à la fin de mes études. Je suis reconnaissant de leur appui dans ma recherche. Merci !

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Cette recherche a pour objectif l'étude du raisonnement proportionnel chez des élèves cris de 2e secondaire confrontés à des situations de proportionnalité. Notre recherche de type exploratoire livre d'abord, dans la problématique, un portrait de plusieurs aspects des mathématiques dans la culture crie et de l'enseignement de cette discipline à la Commission scolaire crie qui gère l'éducation pour la Première Nation crie, depuis sa fondation en 1978. Le cadre théorique, pour sa part, expose les principaux résultats de recherches en didactique des mathématiques portant sur le raisonnement proportionnel.

L'expérimentation est effectuée auprès de 12 élèves de 2e secondaire d'une classe française de l'école Willie J. Happyjack Memorial School à Waswanipi, une des neuf communautés cries situées dans le Grand Nord québécois. Au cours de cette expérimentation, sont présentés 13 problèmes de proportionnalité à 5 équipes de 2 ou 3 élèves chacune. Trois variables didactiques ont été retenues pour l'élaboration de ces problèmes : le facteur de présentation (texte, tableau, dessin); le type de rapport entre les données (entier, fractionnaire) ainsi que le nombre de données différentes (4 ou 6 données).

L'analyse des productions des élèves est conduite de manière à dégager, pour chacun des problèmes, les calculs numérique et relationnel engagés par chacune des équipes. Sur la base de l'analyse des productions verbales et écrites des élèves, des hypothèses sont formulées quant à l'influence des 3 variables didactiques contrôlées *a priori*, sur les stratégies déployées pour traiter des problèmes portant sur des thèmes proportionnels.

Les résultats de cette étude confortent en grande partie les écrits recensés dans le cadre théorique. En effet, les résultats rendent compte de la variété des calculs relationnels ainsi que de la diversité des calculs numériques (additifs et multiplicatifs) mis en œuvre par les élèves pour résoudre les problèmes soumis. De plus, ces résultats permettent de préciser les limites de notre recherche tout en élaborant des hypothèses de travail pour des études ultérieures.

Mots-clés : enseignement secondaire, mathématique, proportionnalité, culture crie

INTRODUCTION

L'enseignement usuel de l'arithmétique débute par l'apprentissage des nombres entiers et de leur manipulation dans les opérations arithmétiques d'addition et de soustraction. Viennent en second lieu les opérations de multiplication et de division enseignées, bien souvent, en tant qu'additions et soustractions itératives. L'introduction de la fraction (plus généralement, les nombres rationnels) marque une rupture avec les savoirs acquis sur les nombres naturels et leurs opérations. Les études en didactique des mathématiques ont bien documenté les obstacles (épistémologique ou didactique) auxquels sont confrontés les élèves lors de l'apprentissage des fractions et ont révélé, par le fait même, le défi qui se pose à l'enseignement des nombres rationnels. Ainsi, les élèves transposent les propriétés des nombres entiers aux nombres rationnels. Cette transposition les conduit souvent vers des raisonnements additifs inadéquats plutôt qu'à des raisonnements multiplicatifs.

Notre intérêt de recherche, considérant notre expérience d'enseignement au secondaire auprès des élèves de culture crie, porte plus spécifiquement sur l'interprétation de la fraction de type *rapport* et sur la notion de proportionnalité qui en découle. Le thème de la proportionnalité est choisi en raison de son lien direct avec le système du troc utilisé dans la culture crie. D'autre part, les liens interdisciplinaires (en science physique, chimie, biologie, économie, etc.) et intradisciplinaires (la probabilité, les statistiques, l'homothétie, etc.), qui s'étendent aux deux cycles du secondaire trouvent leurs origines dans la notion de proportionnalité, ce qui donne à cette notion un statut tout à fait particulier. En effet, la maîtrise des situations de proportionnalité est incontournable pour la réussite des études à l'ordre secondaire. Notre recherche vise donc l'étude des raisonnements engagés par des élèves cris du secondaire alors qu'ils sont confrontés à des situations de proportionnalité.

Permettez que je termine mon introduction par cette citation :

« *Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.* » (Leopold Kronecker, 1823-1891).

Dieu créa les nombres entiers, le reste est l'œuvre de l'Homme.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

Le projet de recherche présenté origine de notre souci, en tant qu'enseignant des mathématiques auprès d'une population de la Première Nation crie, de prendre en compte les difficultés de nos élèves dans l'apprentissage des mathématiques. Nous avons remarqué que l'enseignement et l'apprentissage de cette discipline présentent un défi important chez les Cris. Malgré le fait que nous disposons de peu de données statistiques pour brosser en détail l'état de la question, nos propres observations au cours de nos sept années dans ce milieu, ainsi que celles de nos collègues, suggèrent que l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au secondaire en milieu cri possèdent des caractéristiques particulières. Compte tenu de l'ampleur du sujet et de sa diversité, nous avons choisi de focaliser notre recherche sur les connaissances des élèves du secondaire, d'un thème mathématique particulièrement sensible de la scolarité obligatoire, celui de la proportionnalité.

Rappelons qu'au Québec, en l'an 2000, « *Chez les jeunes âgés de 18 ans et qui ne sont plus aux études, le taux de sans-diplôme est de 39 % chez les garçons et de 24,5 % chez les filles, alors qu'il était respectivement de 36 % et de 23 % en 1995*[1] ». Le taux de décrochage scolaire chez les Cris est encore plus élevé, comme nous le verrons dans une section ultérieure. Les difficultés éprouvées par des élèves cris dans l'apprentissage des mathématiques pourraient contribuer à augmenter le taux de décrochage scolaire. Nous croyons ainsi pertinent d'orienter notre projet de recherche vers une investigation des connaissances mathématiques d'élèves cris du secondaire.

---

[1] Université de Montréal – Forum – Édition du 1er octobre 2001, volume 36, numéro 6
http://www.iforum.umontreal.ca/Forum/ArchivesForum/2001-2002/011001/516.htm
(Page consultée le 29 octobre 2005)

1.1 Portrait succinct de la nation crie et de la Commission scolaire crie

Notre investigation se réalisera à la Commission scolaire crie (CSC) située dans le Grand Nord québécois. Nous croyons utile, pour développer notre problématique, de dresser un portrait historique succinct de cette commission scolaire, portrait qu'il faut inscrire dans celui de cette nation. Les Cris font partie des Premières Nations d'origine algonquine. En plus du Québec, ils sont présents au Manitoba, en Alberta, en Ontario et en Saskatchewan. C'est la nation aborigène la plus populeuse à la fois au Québec et au Canada. Sa population au Québec en 2006 dépasse 14 500 habitants. Des études linguistiques démontrent que, parmi les 50 langues autochtones, le cri est la plus susceptible de survivre, suivie par l'inuktitut (la langue des Inuits) et l'ojibwa[2]. La survie de la langue crie est intimement liée à la survie de la culture crie, puisque la langue est le principal véhicule de la culture.

La majorité des Cris au Québec vivent dans neuf communautés : Waskaganish, Eastmain, Wemindji, Oujé-Bougoumou, Mistissini, Nemaska, Chisasibi, Whapmagoostui et Waswanipi. Cependant, les Cris *Washaw Sibi* ont déposé une demande au gouvernement du Québec ainsi qu'au ministère fédéral des Affaires indiennes et du Nord canadien pour la création d'une dixième réserve, à 115 kilomètres au nord d'Amos, en Abitibi.

La Commission scolaire crie a été fondée en 1978 et découle du traité de la Convention de la Baie-James et du Nord québécois (CBJNQ) signé en 1975. Cette commission scolaire à statut particulier gère l'éducation pour la nation crie qui habite des réserves (des communautés) au nord du 49^{e} parallèle dans la grande région de la Baie-James.

---

[2] S.O.S. Langues autochtones – Vers une loi des Premières Nations?
2^{e} Conférence sur les langues autochtones
Le Devoir, lundi 25 octobre 2004, p. A2

Chacune des communautés offre des services scolaires répartis comme suit : école maternelle, primaire et secondaire relevant de la CSC. Cependant, ces écoles, durant le cursus du primaire, ne donnent l'enseignement des trois premières années qu'uniquement dans la langue vernaculaire des élèves, soit le cri. Comme la CSC est une commission scolaire à statut particulier, les Cris ne sont pas soumis à la *Charte de la langue française*. Pour cette raison, à partir de la quatrième année du primaire, les parents peuvent choisir entre l'anglais ou le français comme langue d'enseignement pour leurs enfants. Les élèves continuent toutefois de suivre des cours de langue et de culture cries jusqu'en cinquième secondaire.

1.2 La scolarisation au secondaire chez les Cris

Les tableaux 1.1 à 1.9 (en annexe) présentent l'effectif scolaire du secteur des jeunes cris dans leurs communautés respectives. Ils témoignent de la baisse importante de clientèle des écoliers cris entre le début et la fin du secondaire. Le décrochage, tendance lourde mondialement, est ici jumelé à un taux élevé d'absentéisme et à un piètre niveau de motivation scolaire. Après avoir abandonné l'école, un adolescent cri se trouve très souvent assujetti au chômage et à la pauvreté.

Ces problèmes pourraient s'aggraver dans les années à venir, compte tenu de l'augmentation remarquable de la population active Crie. Par exemple, entre les années scolaires 1997-1998 et 2005-2006, dans la communauté de Waswanipi, le taux des élèves admis en première secondaire et qui n'atteignent pas le niveau du cinquième secondaire varie entre 32 % et 73 %. À Waskaganish, ce taux varie entre 25 % et 68 %, tandis que cette variation, à Mistissini, se situe entre 31 % et 95 % et qu'à Wemindji, elle se situe entre 28 % et 69 %. Chisasibi est la réserve dont le taux d'abandon est le plus élevé : entre 84 % et 92 %. Les statistiques mentionnées ci-haut, tirées et compilées des tableaux 1.1 à 1.9 fournis par la CSC, sur la fréquentation scolaire, sont plus représentatives des communautés ayant une population dépassant 1000 habitants. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas inclus les réserves suivantes dans nos statistiques:

Oujé-Bougoumou (606 habitants), Eastmain (650 habitants), Nemaska (642 habitants) et Whapmagoostui (812 habitants) [Statistique Canada 2006].

Malheureusement, peu d'études portent sur l'ensemble de la problématique scolaire chez les Cris. Cependant, nous pouvons observer que les étudiants cris sont peu scolarisés en sciences et en mathématiques. Par exemple, les adultes cris qui se rendent jusqu'au niveau universitaire s'inscrivent généralement aux programmes où les mathématiques ne sont pas une condition d'admission. Ils s'inscrivent, en règle générale, aux programmes reliés aux sciences humaines (études autochtones, sociologie, géographie, histoire, etc.). Cette tendance fut remarquée par madame Corinne Mount Pleasant-Jetté, fondatrice du programme d'accès au génie pour les autochtones à l'Université Concordia :

> « *Il est en effet presque impossible aux élèves qui n'ont pas acquis les notions de base au primaire et au secondaire de poursuivre des études supérieures en sciences et mathématiques [...] et le nombre d'Autochtones oeuvrant dans les domaines de la science, de la technologie, du génie, des mathématiques,* [...] *est extrêmement faible.*[3] »

Notre expérience à la Commission scolaire crie permet de justifier les bien-fondés de l'opinion de madame Pleasant-Jetté. En effet, à l'école Willie J. Happyjack Memorial School située à Waswanipi, les mathématiques 416/426/436 (de 4^{e} secondaire) sont enseignées aux élèves de 5^{e} secondaire au lieu des mathématiques 514/526/536 (de 5^{e} secondaire). Les décrocheurs cris qui retournent aux études, à l'éducation des adultes, peuvent d'ailleurs obtenir leur Diplôme d'études secondaires (DES) sans suivre de cours de mathématiques, puisqu'ils sont optionnels.

---

[3]Pourquoi les étudiants autochtones boudent les sciences
Affaires universitaires, novembre 2001
http://www.affairesuniversitaires.ca/Francais/issues/2001/nov/f_art_02.pdf
(Page consultée le 7 octobre 2005)

La situation changera à partir du 1er juillet 2010[4] puisque l'obtention d'un DES exigera six unités obligatoires en mathématiques de la 4e secondaire. Ainsi, les étudiants cris devront être préparés pour respecter ces nouveaux règlements et leur compétence devra être ajustée en conséquence.

De plus, les diplômés des réserves sont obligés de réussir le programme *Préparation au collège* avant d'être admis aux études collégiales, afin d'obtenir les préalables requis en plusieurs matières dont, entre autres, les mathématiques. Comme enseignant de cette discipline, nous avons également constaté que la majorité des candidats potentiels, aux programmes de formation professionnelle, échouent à la partie mathématique *Résolution de problèmes* du T.D.G. (Test du développement général) en raison de leurs faibles connaissances en mathématiques, ce qui compromet leur admission à de tels programmes. Conséquemment, ils se sentent obligés de retourner à l'éducation des adultes pour suivre des cours de mathématiques.

Ces quelques données sur la scolarisation au secondaire montrent que la scolarisation en mathématiques y laisse beaucoup à désirer, bien qu'elle s'avère de plus en plus essentielle à la poursuite d'études supérieures ou de la formation professionnelle.

---

[4] Direction de la sanction des études. Ministère de l'Éducation, du loisir et du sport – 22 mai 2007. Info/Sanction numéro 526

1.3 La culture mathématique chez les Cris

Certaines études auprès des populations autochtones ont comme principal objectif d'identifier ou d'interpréter, sur le plan mathématique, des objets propres à leur culture. Cela conduit à des études de type ethnomathématique qui permettent de repérer des éléments mathématiques dans les cultures autochtones. Elles ne nous informent donc pas sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques qui sont aux programmes dans les milieux autochtones contemporains. Nous n'avons recensé aucune étude portant sur ce thème en milieu cri. Nous ne disposons pas non plus d'études sur le type de rapport de la culture crie avec les mathématiques dites « scolaires ». Pour mieux connaître la culture des élèves, nous avons effectué une recherche exploratoire afin de situer quelques notions mathématiques de base dans cette culture.

1.3.1 La numération chez les Cris

Nos investigations à Waswanipi, auprès des personnes âgées et des enseignantes de la culture crie, nous ont permis de recueillir de manière informelle et traditionnelle, dans la mesure où c'est oralement que nous avons obtenu ces informations, des informations quant au système numérique en usage. Nous avons également consulté un ancien dictionnaire de la langue crie (Lacombe, 1874)[5], un dictionnaire plus récent (Vaillancourt, 1992) ainsi qu'un manuel de conversation crie (2002) pour avoir une idée sur la numération dans la culture crie. Notons que les Cris des neuf communautés parlent deux dialectes : le dialecte du Sud parlé dans les réserves Waswanipi, Nemaska, Mistissini, Waskaganish, Eastmain et Oujé-Bougoumou et le dialecte du Nord parlé dans les réserves Wemindji, Chisasibi et Whapmagoostui. Quand il s'agit des nombres, les différences entre les deux dialectes ne sont pas très significatives.

[5] En 1873, le père Albert Lacombe (1827-1916), un prêtre canadien-français, a fait son premier voyage en Europe, dans le but de publier à Paris une grammaire et un dictionnaire de la langue des Cris.

Voici les nombres de 1 à 10 exprimés dans le dialecte du Sud : 1 *peyakw*, 2 *niishu*, 3 *nishtu*, 4 *neu*, 5 *niyaain*, 6 *nikutwaashch*, 7 *niishwaashch*, 8 *niyaanaaneu*, 9 *peyakushteu*, 10 *mitaahtu*. Selon un aîné de Waswanipi *peyakw* signifie 1 et *ushteu* veut dire *en souffrance ou en attente*. Au sens littéral : il reste un doigt à compter. Les Cris du Québec utilisent *peyakushteu* pour désigner le nombre 9 tandis que les Cris de l'Alberta, Ontario, Manitoba et Saskatchewan utilisent *keka mitátat*. *Keka* signifie *presque* ou *au point de* (Trumbull, 1875, p. 28) et *keka mitátat* veut dire littéralement presque 10. Le nombre 10 (*mitátat*) signifie : *rien de plus à compter, complété, tout parti, il ne reste rien*. Littéralement*:* *les doigts ont tous été comptés* (Trumbull, 1875, p. 29). La façon dont les nombres 9 et 10 sont nommés dans la langue crie nous donne une indication évidente que les Cris utilisent la base 10 contrairement aux Inuits qui utilisent la base 20.

1.3.2 Les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 dans la langue crie

Voici la représentation des nombres de 1 à 10 selon les ouvrages consultés:

	Dictionnaire Lacombe (1874)	Dictionnaire Vaillancourt (1992)	Manuel de conversation crie (2002)		
			Dialecte du Nord	Dialecte du Sud	Caractères syllabiques
1	peyak	páyok	paayikw	peyakw	ᐯᔭᒄ
2	níjo	nísh	niishu	niishu	ᓃᔓ
3	nisto	níshtó	nishtu	nishtu	ᓂᔥᑐ
4	newo	náw	naau	neu	ᓀᐤ
5	niyánan	niyáyo	niyaayu	niyaain	ᓂᔮᐃᓐ
6	nikotwásik	kotwás	(ni)kutwaashch	nikutwaashch	ᓂᑯᑤᔥᒡ
7	tepakup	níjwás	niishwaashch	niishwaashch	ᓃᔣᔥᒡ
8	ayenánew	yánánáw	(ni)yaanaanaau	niyaanaaneu	ᓂᔮᓈᓀᐤ
9	keka mitátat	páyokostáw	paayikushtaau	peyakushteu	ᐯᔭᑯᔥᑌᐤ
10	mitátat	mítáht	mitaahtu	mitaahtu	ᒥᑖᐦᑐ

Selon Trumbull (1875, p. 10-11), *péyak* signifie *petit* : l'auriculaire (petit doigt) est compté comme 1 puisque lorsque l'on compte sur les doigts, il est associé au nombre 1. Dans la langue crie, le mot *petit* est *apisissiw* (Lacombe, 1874, p. 220) ou *apishishshou* (Vaillancourt, 1992, p. 308), ce qui n'a rien à voir avec le nombre 1: *péyak* (voir le tableau qui suit). Il est probable que les nombres 1 et 2 existaient avant le comptage sur les doigts. Notons que le document de Trumbull repose en partie sur le dictionnaire Lacombe.

	Dictionnaire Lacombe	Dictionnaire Vaillancourt	Dialecte du Sud
Petit	Apisissiw (p. 220)	Apishishshou (p. 308)	Apishiish
Petit doigt	Iskwetchitchânis (p. 111)	Iskwatihchish (p. 124)	Uchishkwetihchiish
1	Peyak (p. 267)	Páyok (p. 441)	Peyakw

Toujours selon Trumbull, le nombre 3 fait référence au 3^e^ doigt, le doigt majeur. Il signifie *au centre* ou *au milieu* (Trumbull, 1875, p. 12, 21, 36). Le tableau ci-dessous ne montre aucun rapport entre le doigt majeur et le nombre 3. Cependant, le mot qui signifie *réunion* est *nisto winanoch* (Vaillancourt, 1992, p. 367) et l'expression *nísto wikamouk* veut dire *lieu de rencontre ou de réunion* (Vaillancourt, 1992, p. 63). Ici, on se demande si le mot *nisto* (3) fait référence à la pluralité dans la langue crie parce que le lieu de rencontre est l'endroit où se réunissent plus de 3 personnes ou plusieurs personnes?! Cela demeure une interrogation qui mérite réflexion.

	Dictionnaire Lacombe	Dictionnaire Vaillancourt	Dialecte du Sud
Doigt majeur	Tâwitchitchân (p. 111)	Kachinoch mitihchish (p. 124)	Utashtuutihchii
3	Nisto (p. 266)	Níshtó (p. 436)	Nishtu

Le nombre 4 (*newo ou náw*) fait référence au 4^e^ doigt (l'index), et le mot qui désigne ce même nombre trouve ses racines dans le mot qui signifie *l'index* (Trumbull, 1875, p. 13, 23). Selon le dialecte du Sud, le mot qui désigne l'index est *atuhiikan* et *mitihchii* désigne la main. Selon le dictionnaire Vaillancourt, « *le suffixe verbal -náw indique que l'action exprimée par le verbe est faite avec la main* » (Vaillancourt, 1992, p. 243). Par contre, *main* et *doigt* se référaient autrefois au même mot (voir le tableau suivant).

	Dictionnaire Lacombe	Dictionnaire Vaillancourt	Dialecte du Sud
Doigt	Yeyekitchitchán ou mitchitchiy (ce qui veut aussi dire la main (p. 111)	Yíkichíchán (n.i.) ou mítíhchísh (n.m) (p. 124)	Iyikahchaanh ou iyichihchaan
Main	Mitchitchiy (p. 184)	Mitihchi (p. 243)	Mitihchii
Doigt index	Itwahiganitchitchiy (p. 111)	Atohichaw-mitihchish (p. 124)	Atuhiikan
4	Newo (p. 233)	Náw (p. 340)	Neu

Le nombre 5 *niyânan* signifie *parti ou dépensé tous les doigts d'une main* (Trumbull, 1875, p. 24) et le mot *niyân* veut dire *va* (impératif) (Lacombe, 1874, p. 17 et Trumbull, 1875, p. 24). Les Ojibwa, comme les Cris, sont d'origine algonquine. Dans leur langue, le nombre 5 se prononce *nanan* avec la même signification : *parti ou dépensé tous les doigts d'une main* (Closs, 1986, p. 6). Parfois, les aînés de Waswanipi disent, quand ils demandent 5 lièvres: Donne-moi *peyakw* (1) *mitihchii* (main), littéralement: Donne-moi l'équivalent du nombre des doigts dans la main.

Dans la langue crie, *nikut* signifie *quelqu'un*. Dans la langue algonquine, *n'qut* ou *nikot* signifient *premier* et *awas* veut dire *plus loin, awasâ-yik* ou *wassik* signifient *de l'autre côté* (Trumbull, 1875, p. 10, 25, 27). En plus, le mot *waach* veut dire *surplus* (Vaillancourt, 1992, p. 410) et *ka nikanit* (Vaillancourt, 1992, p. 324) ou *nikan* (Lacombe, 1874, p. 228) désignent le mot *premier*. Ici, le nombre 6 pourrait signifier littéralement le premier surplus (doigt) de la main gauche après avoir compté tous les doigts de la main droite ou le premier doigt à compter sur l'autre main.

Le nombre 7 est *tepakup* (Lacombe, 1874, p. 249 et Trumbull, 1875, p. 18, 26) en langue crie, ce qui est utilisé par plusieurs communautés cries au Canada. Dans la province de Québec, les Cris utilisent le 7 qui trouve ses racines dans l'ancienne langue algonquine (*niishwaashch*). En plus, *niish* ou *níj* signifient 2 et l'affixe *waashch* porte la même signification que dans le nombre 6. Chez la Première Nation *Standing Buffalo Dakota* de la Saskatchewan, la valeur spirituelle est basée sur sept vertus : humilité, bienveillance et compassion, honnêteté et vérité, respect, sagesse, générosité et prière. Chez les Ojibwa, des autochtones d'origine algonquine comme les Cris, la valeur spirituelle est basée sur sept vertus : amour, respect, courage, honnêteté, sagesse, humilité et vérité[6]. En plus, les Cris se déplacent dans les bois à la poursuite du gibier. Leurs déplacements se divisent en sept périodes : les voyages d'automne; la chasse d'automne; le camp d'hiver; la trappe du début de l'hiver; la chasse de fin d'hiver; la trappe du printemps et le voyage du printemps.

Le nombre 8 (*ayenánew*) signifie que le nombre 4 est doublé ou répété (Trumbull, 1875, p. 26, 33).

1.3.3 Le zéro dans la langue crie

Les Cris qui vivent à l'extérieur du Québec désignent le nombre zéro par le mot *mwac ke'kwa'n*, ce qui veut dire *rien*. Au Québec, on dit *kaa waa wi ye sh te ch* ᑳ·ᐋ·ᐃᔦᔥᑌᒡ pour signifier le nombre zéro et *kaa waa wi ye yaa ch* ᑳ·ᐋ·ᐃᔦᔮᒡ pour le mot cercle (presque le même terme). Peut-être que le zéro est ainsi nommé parce que son symbole ressemble à un cercle.

---

[6] The Seven Teachings of the Ojibwe
http://www.geocities.com/redroadcollective/Sevenvalues.html
(Page consultée le 7 juillet 2007)

1.3.4 Les fractions chez les Cris

Puisque notre travail porte sur le raisonnement proportionnel, qui est lui-même lié au rapport entre les nombres et donc aux fractions, nous nous sommes également intéressé aux fractions dans la culture crie. Selon ce que nous avons appris des aînés de Waswanipi, la seule fraction qui porte un nom dans la langue crie est *ápihtó* (Vaillancourt, 1992, p. 109) ou *aapihtuu* (dialecte du Sud), ce qui signifie *un demi* (½). Les termes des dictionnaires cri-anglais et cri-français désignant d'autres fractions que ½ ne seraient que les inventions des *Blancs* (le terme *Blanc* signifie tout ce qui n'est pas aborigène). En consultant une aînée, nous avons mentionné que le mot cri signifiant ⅓ est inscrit dans le dictionnaire de Vaillancourt (1992, p. 424). On dit *páyok nishto óhchi*. Elle nous a répondu que *páyok* signifie 1, que *nishto* équivaut au nombre 3 et que *óhchi* veut dire *de*. De ce fait, l'on pourrait faire une traduction littérale de l'expression « 1 de 3 », ce qui ne correspond pas, cependant, à une expression courante en langue crie. La même interprétation a été confirmée par une professeure crie de l'Université des Premières nations du Canada. On peut supposer que cette expression a été créée pour des besoins de communications entre Cris et Blancs.

Il n'existe dans la langue crie aucun mot faisant référence à la notion de fraction. Les Cris utilisent pourtant le mot *mátishigen* (littéralement: un morceau) (Vaillancourt, 1992, p. 173, 264) comme traduction du mot fraction que l'on peut associer à une interprétation de la fraction en tant que partie d'un tout dans la culture blanche. Par exemple, on dit un *mátishigen* (morceau) de *banik*[7] (pain). Il est probable que le mot *banik* est une déformation du mot anglais *bannock*[8].

---

[7] Banik : pain que les autochtones fabriquent avec de la farine, de la graisse, du sel, du bicarbonate de soude et de l'eau (La nation amérindienne Cri - http://www.frbeiger.com/cris.html)

[8] Bannock ● n. a round, flat loaf, typically unleavened, associated with Scotland and northern England. - ORIGIN OE *bannuc*, of Celtic origin. (Concise Oxford Dictionary, 10th edition, p.106)

Bannock: pain plat et rond normalement sans levure, répandu en Écosse et dans le nord de l'Angleterre. - tiré du mot *bannuc*, d'origine celtique. (Traduction libre)

Chez les Cris, pour désigner la fourrure ou la peau entière d'une mouffette, on dit *peyakw* (1) *shîkâkwiyân* (mouffette). Pour indiquer la moitié de cette fourrure, on dit *ápihtó* (½) *shîkâkwiyân*. Cependant, pour indiquer le tiers de cette fourrure, on dit *peyakw* (1) *mátishigen shîkâkwiyân*, ce qui signifie un morceau de la fourrure. De même, pour indiquer les deux-tiers de cette fourrure, on dit *niishu(2) mátishigen shîkâkwiyân*, ce qui signifie deux morceaux de la fourrure. Alors, lorsqu'on parle d'un tout divisé, la langue crie exprime uniquement le numérateur, soit *peyakw*: 1 ou *niishu*: 2 dans notre exemple. Le dénominateur *nishtu* : 3 reste implicite, car mis à part le ½, il n'existe aucun autre terme qui réfère à d'autres fractions. Un aîné m'a dit que *peyakw shîkâkwiyân* signifie un quart et *nishtu shîkâkwiyân* signifie trois-quarts. Selon lui, cela est lié aux 25 cents et 75 cents : le quart et les trois-quarts d'un dollar. À une certaine époque, la peau ou la fourrure d'une mouffette se vendait 25 cents. Puisque les fractions ¼ et ¾ n'existent pas dans la langue crie, on les nomme *peyakw* (1) *shîkâkwiyân* et *nishtu*(3) *shîkâkwiyân* respectivement.

Plusieurs indices suggèrent que les premiers systèmes de comptage ont succédé à la philosophie du *un, deux, plusieurs* (one, two, many): « *For example, the Brazilian Tupis had, at one time, no names for numbers higher than 3* » (Trumbull, 1875, p. 1).

> « *Par exemple, les Tupis du Brésil ne possédaient, à une certaine époque, aucun nom décrivant une quantité supérieure au nombre 3* » (Traduction libre).

Le nombre 3 pourrait signifier *au delà de* ou *très* (Trumbull, 1875, p. 6-7). Dans ce contexte, le nombre 3 représente la pluralité. En français, le nombre 3 est probablement dérivé du superlatif *très*, qui signifie *au-delà de* ou *beaucoup*.

La transition vers les fractions requiert un niveau élevé de familiarité avec les nombres. Cette transition se caractérise par une différence linguistique marquée dans les noms de fractions autres que ½ (Livio, 2002, p. 15). Dans la plupart des langues, les noms exprimant des fractions unitaires autres que ½ sont dérivés des noms des entiers désignant leurs dénominateurs. Par exemple, le nom *tiers* est dérivé du nombre 3 et *quart* est dérivé du nombre 4, bien que ce ne soit pas le cas de la fraction ½.

Le tableau ci-dessous montre que la fraction ½ n'est peut-être pas dérivée du nombre 2.

Langue	**2**	½
Français	deux	demi
Espagnol	dos	medio, mitad
Portugais	duas	meio
Italien	due	metà
Anglais	two	half
Allemand	zwei	halb
Suédois	två	häfta
Roumain	doi	jumate
Hongrois	kettõ	fél
Hébreu	shtayim	hetsi
Arabe	ithnaine	nisf
Perse	do	nîme
Cri	niishu	aapihtuu

« [...] *the implication may be that while the number ½ was understood relatively early, (because languages initially contained two numbers, 1 and 2) the notion and comprehension of other fractions as reciprocals (namely, "one over") of integer numbers probably developed only after counting passed the "three is a crowd" barrier.* » (Livio, 2002, p. 15-16)

« *Il est probable que la fraction ½ ait été comprise assez tôt, parce qu'à l'origine les langues faisaient état de deux nombres, 1 et 2. La notion et la compréhension des autres fractions comme réciproques des entiers (c.-à-d. "un sur") furent développées probablement après avoir franchi la barrière du nombre 3, qui réfère à la pluralité.* » (Traduction libre)

Le fait que la langue crie ne contienne que la fraction ½ suggère que le premier système de comptage cri n'a sans doute pas dépassé l'unité et la dualité. Ce système de comptage qui plafonne linguistiquement et mathématiquement aux nombres 1 et 2 est répandu parmi plusieurs peuples et nations. Par exemple,

« [...] *les langages de la tribu australienne des Arandas, les Botocoudos du Brésil, les indigènes des îles Murray (non loin de la péninsule australienne du cap York), certaines tribus occidentales du détroit de Torrès, etc. ne comportaient que deux "noms de nombres" proprement dit: un pour l'unité et un autre pour la paire. À partir de 1 et 2, on arrive à exprimer les nombres 3 et 4 en articulant quelque chose comme "deux et un" et "deux et deux". Leur connaissance des nombres abstraits est rudimentaire et se borne à l'unité, la dualité et la pluralité. Les nombres tels que nous les voyons sous l'angle abstrait constituaient bien sûr pour ces indigènes un instrument dont ils ne connaissaient point l'usage, et dont ils ne ressentaient d'ailleurs pas le besoin.* » (Ifrah, 1994, p. 30-31)

1.4 Le choix de la proportionnalité comme thème mathématique pour notre étude

Les comportements scolaires de certains élèves cris évoquent ceux des élèves en difficulté d'apprentissage des mathématiques (Perrin-Glorian, 1993, p. 44) : évitement des situations problèmes complexes, recherche d'algorithmes, peu d'autonomie en résolution de problèmes ou lors d'exercices, etc. Ces élèves cherchent des algorithmes parce que « *les algorithmes sécurisent l'élève et le libèrent de la responsabilité de ses connaissances* » (Boilard, 2000, p. 9). Pour favoriser leur engagement cognitif, il serait utile que l'enseignement de cette discipline tienne compte de la réalité culturelle autochtone. Nous avons donc démarré notre réflexion sur la culture du troc, fort importante chez les autochtones, qui fait appel à la notion de fraction *rapport*.

En 1610, Henry Hudson naviguait à bord du *The Discovery* jusqu' à la baie qui porte désormais son nom, la baie d'Hudson. Pourtant, « *la première rencontre dont l'histoire fasse mention entre Indiens et Européens à la baie James eut lieu au début de l'année 1611* » (Francis, D., Morantz, T., 1984, p. 43). À l'époque, l'intention des colons était d'établir des postes de traite et d'échanger les fourrures de castors, phoques, ours, etc., avec les autochtones contre des biens européens comme des fusils, des couteaux, des bouilloires et autres. Ce système d'échanges a engagé les Cris à quantifier leurs fourrures, car ils devaient désormais comptabiliser l'échange de leurs fourrures contre les cadeaux européens. Cet échange a pris la peau de castor comme outil monétaire parce que « *l'argent ne leur était pas utile, l'unité "plue" était utilisée pour calculer la valeur des biens échangés. Un "plue" désignait une peau de castor d'hiver de qualité supérieure et donc d'une plus grande valeur.* » (Faries, E., Pashagumskum, S., 2002, p. 69). Par exemple, en 1715-1716, aux postes Fort Albany et Eastmain, la valeur de fourrure d'un ours noir vaut 2 *plues,* alors que celles de 4 martres valent 1 *plue.* De même, 2 peaux de chevreuils valent 1 *plue.* (Francis, D., Morantz, T., 1984, p. 48). Lorsqu'un trappeur cri apportait des fourrures au poste –

disons 3 ours noirs, 8 martres et 6 chevreuils – nous supposons que le principe de proportionnalité était appliqué pour calculer le nombre de *plues* que valait la marchandise vendue. En revanche, ce vendeur cri sera en mesure de décider quoi acheter en biens européens, puisque ceux-ci ont des valeurs en *plues*. Prenons comme exemple, une couverture vaut 6 *plues* et un peigne en ivoire vaut 2 *plues* (Francis, D., Morantz, T., 1984, p. 49). Le troc avec les Blancs rendait nécessaire le besoin de maîtriser la proportionnalité. Le tableau ci-dessous illustre l'aspect proportionnel de cet échange.

$\frac{1}{2}\frac{\textit{ours}}{\textit{plues}} = \frac{3}{6}\frac{\textit{ours}}{\textit{plues}}$	$\frac{4}{1}\frac{\textit{martres}}{\textit{plue}} = \frac{8}{2}\frac{\textit{martres}}{\textit{plues}}$	$\frac{2}{1}\frac{\textit{chevreuils}}{\textit{plue}} = \frac{6}{3}\frac{\textit{chevreuils}}{\textit{plues}}$

Maintenant, si nous prenons les chevreuils comme exemple, pour qu'un chasseur cri sache combien de *plues* valent ses biens, il utilise le système de *groupement* ou l'addition répétée. S'il a 6 chevreuils à échanger, il en fera 3 sous-groupes composés chacun de 2 chevreuils ($3 \times 2 = 6$). Le nombre de sous-groupes correspond au nombre de *plues* à gagner.

$$\frac{2\ \text{Chevreuils} + 2\ \text{Chevreuils} + 2\ \text{Chevreuils}}{1\ \text{Plue} + 1\ \text{Plue} + 1\ \text{Plue}} = \frac{3 \times 2\ \text{Chevreuils}}{3 \times 1\ \text{Plue}} = \frac{6\ \text{Chevreuils}}{3\ \text{Plues}}$$

Nous avons basé notre analyse sur le fait que le mot cri pour multiplication est *eiyâhkuyihtûchihtâsunânuwich* ∇ ᐃᔮᐦᑯᔨᐦᑑᒋᐦᑖᓱᓈᓄᐎᒡ ou *eiyihkachihtaasunaanuwich* ∇ ᐃᔨᐦᑲᒋᐦᑖᓱᓈᓄᐎᒡ, ce qui signifie *faire des groupes identiques plusieurs fois*. Cela indique que les Cris ont utilisé la notion de *groupement* pour arriver à leurs calculs « multiplicatifs ». Cette notion a pu servir au contrôle des trocs ou des échanges commerciaux avant l'arrivée des Européens, parce qu'il existe

« [...] *des preuves que les gens de l'est du Canada font des échanges depuis 4000 av. J.-C.* [...] *Les nations algonquiennes du nord échangeaient viande, peaux, fourrures, silice et canots en écorce de bouleau.* [...] *Les Hurons agissaient comme intermédiaires, c'est-à-dire qu'ils étaient au centre du commerce et ils contrôlaient les échanges. Par exemple, si les Cris voulaient du tabac, ils allaient voir les Hurons, qui obtenaient le tabac en faisant un échange avec les Pétuns, reconnus comme étant d'excellents producteurs de tabac. Puis, les Hurons échangeaient le tabac avec les Cris.* » (Faries, E., Pashagumskum, S., 2002, p. 35)

Pourtant, les termes *division* et *multiplication* n'existent pas dans la langue d'origine des Cris : ils ont été créés depuis que les trois premières années du primaire sont enseignées en langue crie, ce qui a donc créé le besoin de concevoir des expressions appropriées pour exprimer les quatre opérations arithmétiques de base.

Grâce à ces échanges avec les Blancs, et sans savoir multiplier ni diviser selon les algorithmes traditionnels des Blancs, les Cris ont démontré des habiletés de calcul et d'estimation de la valeur commerciale des avoirs troqués. Ils ont développé des moyens pour comparer les valeurs des biens échangés avec les commerçants et s'assurer ainsi de ne pas être victimes d'échanges inégaux.

« *Les Indiens n'étaient pas des consommateurs naïfs lorsqu'il s'agissait d'échanger leur fourrures contre les marchandises des Blancs. Bien au contraire, ils ne se gênaient pas pour se plaindre lorsque la marchandise était de qualité inférieure ou le prix trop élevé.* » (Francis, D., Morantz, T., 1984, p. 97)

Selon Peter Denny,

« *Division is the most interesting of the arithmetic operations to study in these hunting cultures because it appears to be absent until trading introduces it.* » (Denny, 1986, p. 158)

> « *La division est l'opération arithmétique la plus intéressante à étudier chez les chasseurs, car elle semble inexistante jusqu'au début du commerce avec les Européens.* » (Traduction libre)

Il est fort possible que Denny fasse référence à la division euclidienne qui relève de la culture mathématique blanche.

Rappelons que la culture crie valorise le partage plus que la partition (la division), car la survie de ce peuple est centrée sur la mise en commun. De surcroît, chez les Cris, certaines choses sont culturellement indivisibles. Par exemple, quand les Français divisèrent la terre en seigneuries, les Cris n'ont pas saisi la logique *blanche*, car pour eux, la terre est la mère nourricière de ses enfants formant un tout indivisible.

1.5 L'objet de l'ethnomathématique

L'ethnomathématique est un domaine qui s'est développé à l'intérieur de l'histoire des mathématiques. Il juge les mathématiques comme un phénomène d'interaction culturelle. Il est vraisemblable qu'à une certaine époque, toutes les cultures partageaient le même bagage mathématique présenté, appliqué et interprété de façons différentes. Oswald Spengler (1956)[9] « *was one of the first to seriously ask whether the mathematics which developed through various cultural eras was the same mathematics.* »

> « *Oswald Spengler (1956) est un des premiers [chercheurs] à poser de façon significative la question : les mathématiques développées au cours des âges et à travers de différentes cultures, représentent-elles en soi les mêmes mathématiques?* » (Traduction libre)

---

[9] Ethnomathematics and Philosophy
http://www-leibniz.imag.fr/Didatech/Seminaires2003/Barton/Didaktik.pdf
(Page consultée le 16 juin 2005)

Bishop (1991), dans son ouvrage *Mathematical Enculturation,* a l'air d'appuyer l'opinion de Spengler en mettant en évidence six activités mathématiques universelles. Selon lui, toutes les cultures se servent des mêmes notions mathématiques quand elles comptent, localisent, mesurent, dessinent, expliquent, et jouent. Voici une illustration élaborée à cet égard :

***Compter* (Counting)**

La capacité de compter est une activité universelle liée au langage. L'être humain a appris à compter sans savoir lire ni écrire. Dans son ouvrage *Histoire comparée des numérations écrites*, (G. Guittel, 1975)[10] précise que « [...] *la numération écrite n'a été inventée que pour conserver le souvenir de ce qui appartenait initialement au geste et à la parole.* » Le concept de compter est lié au commerce, aux propriétés, aux quantités discrètes, etc. On compte quand on désire spécifier la quantité d'un objet dans un ensemble. Par exemple, les enfants comptent leurs bonbons, leurs jouets, etc. Avant le contact européen, dans le cas des Cris chasseurs, pêcheurs et trappeurs, le comptage est restreint aux petits chiffres, leur capacité de compter étant conditionnée par leur environnement, ce dernier étant relié à de petites prises destinées à la cellule familiale.

***Localiser* (Locating)**

Cette activité met l'accent sur le codage topographique et cartographique des traits environnementaux particuliers. On localise quelque chose quand on précise son emplacement dans l'espace par rapport à un point de repère. Les Cris voyagent de longues distances dans les bois sans se perdre, comme s'ils avaient une boussole éternelle dans leur tête. Ils *ne perdent pas le nord* parce qu'ils localisent facilement les quatre points cardinaux. En plus, ils utilisent leurs propres idées géométriques comme une clé de survie afin de localiser les coordonnées des sujets et des objets.

---

10 Quel est l'intérêt pédagogique d'une prise en compte de la variation culturelle dans le domaine des mathématiques
http://www.ac-nancy-metz.fr/cefisem/docprimo/Questions/math.htm
(Page consultée le 6 juin 2005)

***Mesurer* (Measuring)**

La mesure porte sur la comparaison et sur les qualités quantitatives qui représentent des attributs importants pour l'objet mesuré. On s'engage dans le concept de mesure quand on veut calculer la largeur, la longueur, la hauteur, le poids ou n'importe quel aspect quantifiable d'un objet. Si les phénomènes en question sont à comparer, la mesure est associée aux quantificateurs comparatifs comme plus grand que, plus petit que, le plus vite, etc. Il est fort possible que, dans toutes les cultures, l'être humain se servait de ses mains, ses pieds et ses bras comme le premier outil de mesure des longueurs. L'inexactitude de ce genre de mesure n'est guère inquiétante. Par exemple, la coudée (distance du coude au bout du majeur) est différente d'une personne à l'autre. Chez les Cris, comme dans toute autre culture, ils utilisent les mains, les doigts et les pieds comme unités de mesure et se servent de la largeur du pouce pour mesurer des distances relativement courtes.

***Conceptualiser et dessiner* (Designing)**

C'est une activité qui fait référence aux différents objets fabriqués par toutes les cultures pour des besoins domestiques ou artistiques. En dessinant, on est en train de construire des objets à base de bois, des métaux, etc., pour assurer notre survie ou comme décoration. Chez les Cris, les gants, les mitaines, les tipis, les décorations de perles sur une robe ou une chemise sont des exemples d'artisanat aborigène.

***Expliquer et démontrer* (Explaining)**

Cette activité réfère à l'application de logique. C'est la réponse à la question complexe *pourquoi*? Par exemple, dans une histoire ou une légende racontée par un aîné cri, on remarque une séquence logique qui construit des liens cohérents entre les idées et les événements. Une de ces légendes connues est le *Récit cri de la création.* À titre d'exemple, mentionnons également la légende d'*Arc-en-ciel.* Quand on présente nos idées chronologiquement, que l'on en fasse l'analyse logique ou encore la synthèse pour justifier notre opinion, on utilise spontanément, selon une certaine perspective ethnomathématique, des notions mathématiques.

***Jouer* (Playing)**

Jouer dans ce contexte consiste à appliquer des procédures sociales et des règles qui définissent notre performance en jouant. Les jeux de hasard sont basés sur la probabilité tandis que le jeu d'échecs requiert beaucoup de planification, de concentration mentale et de logique. L'élément commun entre tous les jeux est la présence de règles. Les Cris, comme toute autre nation, possèdent leurs propres jeux soumis à des règles. Il existe un jeu nommé *Jeu de cercle* joué par les enfants cris.

L'ethnomathématique se situe au confluent des mathématiques et de l'anthropologie culturelle. Le Brésilien Ubiratan D'Ambrosio, qui a donné le nom à ce concept, l'a construit à partir de trois mots grecs:

« ***ETHNO** : groupes culturellement identifiables (sociétés nationales ou tribales, groupes de travail, enfants de classe d'âge, catégories socioprofessionnelles) avec leurs idéologies, leurs langages, leurs pratiques quotidiennes et leurs manières spécifiques de raisonner et d'inférer.*

***MATHEMA** : expliquer, comprendre, et gérer la réalité en particulier par le chiffrage, le calcul, la mesure, la classification, la mise en ordre d'inférences et la modélisation de phénomènes existants de l'environnement.*

***TIQUE** : art ou technique.*

C'est en avril 1996 que l'on admettra une définition de l'Ethnomathématique pour le dictionnaire d'une éducation multiculturelle (*).

Définition : L'Ethnomathématique est l'étude des pratiques mathématiques de groupes culturels spécifiques gérant leurs problèmes familiers et leurs activités, par exemple, la manière dont les basketteurs professionnels estiment les angles et les distances diffère radicalement de celle qu'utilisent les routiers. Les deux sont des groupes culturels identifiables qui utilisent des mathématiques dans leur travail quotidien. Ils ont leur propre langage et des moyens propres d'obtenir ces estimations.

(*) Gloria Gilmer, ISGEm Newletter N° 7[11] ».

---

[11] Laboratoire de recherche en ethnomathématique
http://www.ucocody.ci/irma/ethomath.php
(Page consultée le 4 février 2006)

À partir de cette définition, nous constatons que cette discipline a comme mandat d'exposer le contexte culturel des mathématiques que recèlent les divers groupes ethniques. Elle vise à chercher les mathématiques dans différentes dimensions (histoire, géographie, traditions, artisanats, etc.) qui distinguent une culture. De plus, les ethnomathématiciens préconisent que la matière mathématique enseignée à l'école soit culturellement centrée afin de rencontrer la culture quotidienne de l'apprenant. Leur hypothèse repose sur le fait qu'on « *ne peut comprendre que par la prise en compte de l'environnement culturel auquel on appartient*[12] » et que « *les mathématiques sont un produit culturel* » (Bishop, 1991). Ils suggèrent l'idée qu'il est plus aisé d'apprendre une notion ou un concept proche de sa culture et de ses pratiques quotidiennes. Selon D'Ambrosio, « *learned matheracy* eliminates the so-called *spontaneous matheracy*[13] », ce qui veut dire que les mathématiques académiques de l'école éliminent les mathématiques spontanées de tous les jours. Cette disposition bloquerait le processus d'apprentissage et pourrait favoriser le décrochage scolaire. Toujours selon D'Ambrosio, l'école présenterait les mathématiques comme un ensemble des techniques qui ignorent la spécificité culturelle de l'apprenant ainsi que le contexte culturel de l'éducation. Puisque l'aspect culturel influe sur l'apprentissage de cette matière, il importerait que l'on identifie les paramètres déterminants de la culture en question afin d'établir un enseignement mathématique culturellement pertinent.

[12] Perspectives interculturelles sur l'apprentissage des mathématiques
http://www.leibniz.imag.fr/LesCahiers/
(Page consultée le 1 juin 2005)

[13] How to Connect School Mathematics with Students' Out-of-School Knowledge
http://www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdm013a3.pdf
(Page consultée le 4 janvier 2006)

Nous constatons que le discours des ethnomathématiciens est centré sur le recours à des notions provenant des arrière-plans culturels et de milieu de vie de l'élève. De ce fait, son intérêt et sa motivation augmenteraient parce qu'il serait alors en mesure de reconnaître les termes appartenant à sa culture et d'analyser les données, à condition que ces dernières fassent partie de son expérience personnelle. Malheureusement, ce discours ne tient pas compte de la représentation des problèmes ou des approches didactiques pour rendre culturellement signifiant l'apprentissage des mathématiques autant d'un point de vue culturel que d'un point de vue mathématique. Il ne suffit pas d'avoir des contextes qui font référence à des éléments de la culture crie pour que les relations mathématiques soient établies et que le problème soit résolu. Autrement dit, l'ethnomathématique ne semble pas s'intéresser suffisamment au "comment" extraire les relations pertinentes propres à la structure mathématique du problème pour le résoudre.

1.6 Objectif de recherche

L'approche actuelle des recherches concernant le domaine de l'ethnomathématique ne semble pas aborder suffisamment les questions pédagogiques et didactiques liées à l'enseignement de la discipline. Dans ce contexte, nous remarquons que les études se résument bien souvent à exposer les différentes pratiques mathématiques spontanées supportées par divers arrière-plans culturels et ethniques, et ce, partout dans le monde. Par exemple, le ISGEm[14] présente sur son site Internet des aperçus de l'histoire des mathématiques, à la portée de la compréhension de tous, en présentant des illustrations de décorations géométriques de formes multiples appliquées sur des objets faits à la main, et ceci, pour expliquer les productions artisanales des aborigènes d'Amérique du Nord, d'Afrique, d'Australie, etc. À cet égard, la première publication du *Journal of Mathematics and Culture* parue en mai 2006 et parrainée par *The North American Study Group for Ethnomathematics* (NASGEm) n'est qu'une revue dont la mission est d'illustrer le rapport entre mathématiques et culture sans associer la logique du savoir-faire maîtrisée par des cultures aborigènes à l'enseignement des notions mathématiques dans le but de développer une ou des stratégies pédagogiques appropriées à l'introduction de ces concepts mathématiques.

Nous plaçant dans une perspective didactique centrée sur l'analyse mathématique des notions à enseigner et à apprendre plutôt que dans une perspective ethnomathématique, notre recherche exploratoire vise à étudier les raisonnements mis en œuvre par des élèves cris de 2e secondaire dans le traitement de situations de proportionnalité. Le thème de la proportionnalité est choisi, considérant d'une part son importance pour la réussite des études secondaires et, d'autre part, son lien avec le système du troc utilisé dans la culture crie.

[14] International Study Group on Ethnomathematics
http://www.rpi.edu/~eglash/isgem.dir/isgem.2.htm
(Page consultée le 4 juillet 2006)

CHAPITRE II

CADRE THÉORIQUE

Les nombres rationnels sont nécessaires à la résolution d'une ou de plusieurs classes particulières de situations-problèmes. Rappelons que l'impossibilité de trouver une solution dans N ou Z a conduit à faire une extension de l'ensemble des nombres entiers Z à l'ensemble des nombres rationnels Q afin de pouvoir résoudre une équation du premier degré à une seule inconnue telle que $5x - 1 = 2$ (Jarry, 1968, p. 50). La figure ci-dessous est une représentation des ensembles des nombres naturels (N), entiers (Z), rationnels (Q), irrationnels (Q′) et complexes (C). L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres qui sont rationnels ou irrationnels.

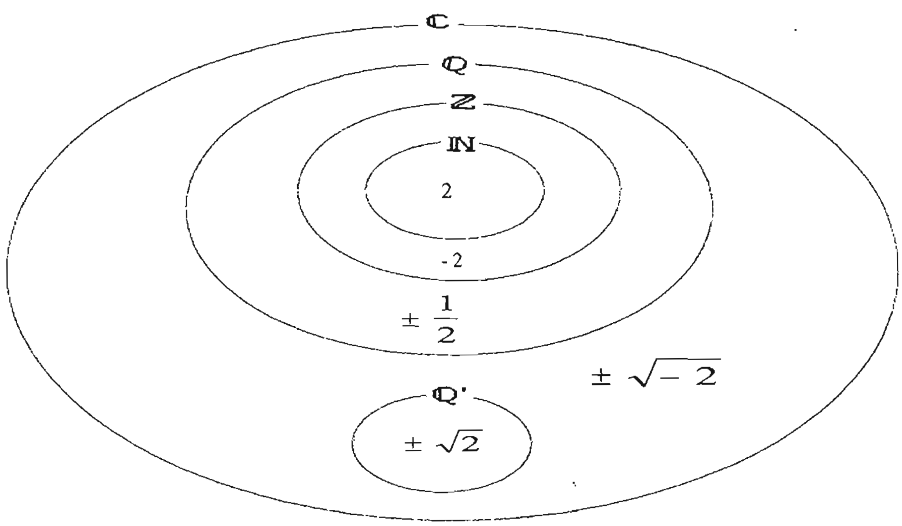


Figure 2.1 Les ensembles N, Z, Q, Q′, C

En mathématiques, plusieurs liens intradisciplinaires trouvent leurs racines dans la notion de fraction, particulièrement dans la notion de proportionnalité ou la fraction *rapport* (voir section 2.1.5), telle que la probabilité, les statistiques, l'homothétie, la trigonométrie et le calcul de la pente d'une fonction linéaire tracée sur un plan cartésien. À part les mathématiques, des liens interdisciplinaires font référence à la fraction *rapport* dans la résolution de problèmes en science physique, chimie, biologie, économie, etc.

La fraction comme nombre rationnel peut avoir plusieurs représentations. Des écritures comme ½, 50 %, 0,5, 1:2, 1÷2, $\frac{1}{2}$ désignent toutes un même nombre rationnel que l'on exprime communément par *un demi*. Les Hindous (Brahmagupta, c. 628 et Bhaskara, c. 1150) écrivaient les fractions en plaçant le dénominateur au-dessous du numérateur sans les séparer par un trait horizontal. Par la suite, Al-Hassar (c. 1200), un mathématicien arabe, a modifié la notation hindoue de la fraction en introduisant le trait horizontal pour séparer ses composantes. Alors, la fraction *un demi* s'exprime sous la forme $\frac{1}{2}$. Le trait oblique utilisé pour séparer le numérateur du dénominateur a été proposé par le mathématicien anglais Augustus de Morgan (1806-1871) parce que le trait horizontal occasionnait des inconvénients typographiques[1]. Cependant, la théorie de couples élaborée par Weierstrass au XIXe siècle a proposé une représentation comme (1,2) (Desjardins et Hétu, 1974, p. 16) pour désigner *un demi*, par exemple. Rappelons que le fait qu'« *un nombre rationnel est une classe de fractions équivalentes* » (MEQ, 1980, p. 2) et qu'« *une fraction se caractérise essentiellement par la relation d'équivalence* » (Desjardins et Hétu, 1974, p. 20) conduit à reconnaître un nombre infini de représentations d'un même nombre rationnel : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = etc.$

Après avoir consulté plusieurs ouvrages de références et dictionnaires, nous constatons qu'il est difficile de trouver une définition standardisée de la notion de fraction. Toutefois, nous retenons deux définitions : celle proposée par l'Association mathématique du Québec (AMQ), et représentons le nombre rationnel sous « *la forme fractionnaire a/b, dans laquelle a et b sont des entiers naturels et b ≠0* » (AMQ, 1970, p.1), et celle du ministère de l'Éducation du Québec (MEQ) selon laquelle « *Une fraction est un rapport entre deux quantités. Pris dans un sens général, le terme "fraction" peut désigner toutes les représentations possibles d'un nombre rationnel.* » (MEQ, 1980, p. 2)

[1] Earliest Uses of Symbols for Fractions
http://members.aol.com/jeff570/fractions.html
(Page consultée le 3 janvier 2006)

Plusieurs interprétations de la fraction sont possibles; elles varient selon le contexte dans lequel elle est utilisée. Nous les présentons dans la section qui suit.

2.1 Les diverses interprétations de la notion de fraction

Selon une étude phare de Kieren (1988), les fractions ou les nombres rationnels peuvent avoir cinq significations ou interprétations, présentées dans la figure suivante et résumées dans le texte qui suit. Ces interprétations sont : 1) partie-tout; 2) quotient; 3) opérateur; 4) mesure; 5) rapport.

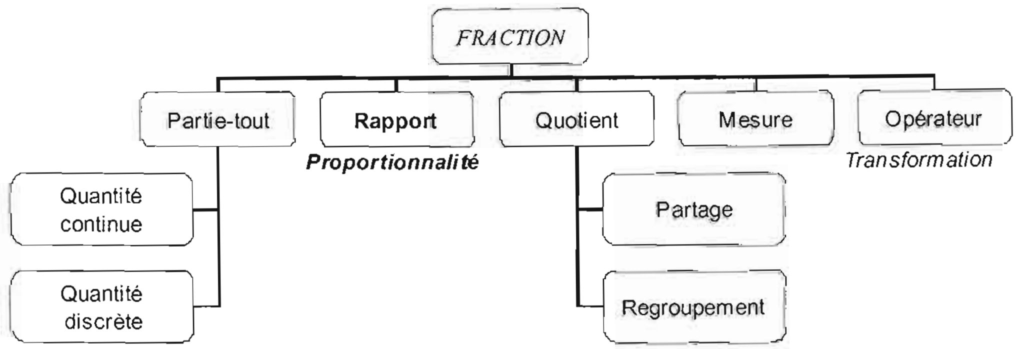


Figure 2.2 Les diverses interprétations de la notion de fraction

2.1.1 L'interprétation *partie-tout* de la fraction

Selon l'interprétation de la fraction *partie-tout*, la fraction est utilisée pour quantifier une relation entre un tout et un nombre désigné de parties. Ainsi, on reconnaît qu'un tout a été partagé en ***b*** parties égales et que l'on a réuni ***a*** de ces parties (Blouin, 1993, p. 14). Selon cette interprétation, le numérateur de la fraction doit être inférieur ou égal au dénominateur. Deux types de touts sont distingués : un tout d'une quantité continue et un tout d'une quantité discrète. La quantité est dite discrète ou discontinue s'il s'agit d'une collection. Si nous avons une collection de 7 billes et que 4 d'entre elles sont bleues, nous pouvons dire que 4/7 des billes sont bleues. Cependant, si nous disposons de 7 tasses de punch d'agrumes composé de 4 tasses de jus d'orange et de 3 tasses de jus de pamplemousse, nous pouvons dire que 4/7 de ce punch est composé de jus d'orange.

Cette interprétation est souvent considérée comme celle sur laquelle les autres interprétations viennent se greffer (Behr et coll., 1983). La maîtrise de cette interprétation nécessite de considérer que la partition doit être exhaustive (épuisement du *tout*) et égale pour que la fraction puisse correctement exprimer la comparaison entre une partie et son tout de référence. Une interprétation correcte permet donc de partir d'une partie du tout pour construire son tout de référence.

L'équivalence des fractions est souvent introduite dans l'enseignement, à partir du sens *partie-tout*. Prendre 2/5 d'un gâteau ou prendre 4/10 de ce même gâteau correspond à prendre la même quantité de gâteau. On dira alors que ce sont deux quantités identiques et donc deux fractions équivalentes. La relation d'équivalence prend alors appui sur la relation d'égalité entre les quantités. Cependant, cette représentation est limitative (Desjardins et Hétu, 1974). Prendre 2/5 d'un petit gâteau et prendre 4/10 d'un gros gâteau, c'est prendre deux morceaux de quantités différentes. Toutefois, les fractions qu'exprime chacun de ces morceaux par rapport à leur tout de référence sont équivalentes. Cette distinction oblige à considérer la fraction comme une relation entre une partie et son tout plutôt que comme une simple quantité prélevée sur un tout.

2.1.2 L'interprétation *quotient* de la fraction

L'interprétation *quotient* réfère à la fraction a/b en tant que résultat de la division de ***a*** par ***b***. Dans le contexte d'une fraction *quotient* a/b, nous parlons de ***a*** objets partagés également en ***b*** sous-collections. La valeur de ***a*** peut être plus grande, égale ou plus petite que ***b***. La fraction *quotient* prend deux sens : partage et regroupement (Kibindigiri, 1995, p. 15). Dans le cas de partage, le numérateur et le dénominateur réfèrent à différentes unités quantitatives et la fraction *quotient* est un taux. Prenons l'exemple suivant:

Il y a quatre biscuits et six élèves. Pour que le partage soit égal, chaque élève aura le 2/3 d'un biscuit.

Les rôles que jouent le dividende (4) et le diviseur (6) dans la division $4 \div 6$ doivent être saisis pour une interprétation adéquate de la fraction en tant que quotient. Le dividende correspond au nombre à partager et le diviseur au nombre de parts à considérer dans le partage.

Par contre, quand la fraction *quotient* prend le sens de regroupement, le dénominateur réfère à un taux. Examinons la situation suivante avec des nombres entiers et une situation de même structure avec des nombres rationnels.

> *Le pêcheur a pêché 15 poissons. S'il mange 3 poissons par jour, il en mangera pendant 5 jours.*

Le nombre de sous-collections de 3 poissons qu'on peut créer avec 15 poissons correspond au nombre de jours qu'il faut pour consommer la collection totale de poissons, soit 5 jours. Autrement dit, 3 doit être répété 5 fois pour obtenir 15.

> *Le cuisinier a fait une pizza qu'il découpe et répartit également et entièrement entre un certain nombre de convives. Si chaque convive reçoit 3/15 de pizza, combien de convives y a-t-il ?*

L'unité de départ, la pizza, a été partagée en 5 parties égales puisque 3/15 doit être répété 5 fois pour obtenir l'unité. Ce type de problème est cependant très peu présenté aux élèves.

2.1.3 L'interprétation *opérateur* de la fraction

L'interprétation *opérateur* permet d'appliquer une fraction a/b à une quantité de départ pour obtenir une autre quantité plus grande ou plus petite. C'est un processus de transformation multiplicative. Selon cette interprétation, la fraction a/b ne porte pas le sens de ***a*** parties sur ***b*** parties, mais plutôt de deux opérations multiplicatives consécutives : la multiplication par le numérateur et la division par le dénominateur. Dans un contexte géométrique, le résultat de cette application linéaire sert à agrandir ($a > b$) ou à réduire ($a < b$) une figure par des homothéties.

« *Assigner à la fraction le sens "opérateur" permet également de concevoir la multiplication de fractions comme une composition de fonctions. Cette conception pose toutefois problème pour l'addition de fractions. Lorsqu'on additionne des fractions "opérateurs", on doit absolument référer à une quantité pour opérer. Ainsi, pour additionner 4/5 et 2/3, une collection de 15 objets (ou de n×15 objets) est requise; "4/5 de 15 = 12; 2/3 de 15 = 10; (4/5 + 2/3) de 15 = 22; donc, 4/5 + 2/3 = 22/15".* » (Blouin, 1993, p. 17)

2.1.4 L'interprétation *mesure* de la fraction

La fraction *mesure* définit une fraction comme l'itération d'une fraction unitaire 1/b. Dans cette perspective, la fraction unitaire 1/b joue le rôle d'un opérateur multiplicatif qui sert à produire des longueurs. Par exemple, ¾ serait ¼ + ¼ + ¼ (3×¼). Selon cette interprétation, l'unité de mesure 1/b ne fait pas référence à un tout divisé en ***b*** parties égales, mais elle représente une mesure standardisée à partir de laquelle nous pouvons calculer des longueurs. Ainsi, la fraction ¾ ne représente pas 3 parties retenues d'un tout divisé en 4 parties égales, mais « *exprime une relation multiplicative entre deux mesures quelconques ou entre deux mesures de même nature. Selon cette relation, la fraction unité se note 1/4 car elle est contenue 4 fois dans un entier, elle représente le quart de un.* » (Blouin, 1993, p. 18)

2.1.5 L'interprétation *rapport* de la fraction

La fraction *rapport* a/b est une relation entre deux ensembles ou deux quantités. Par exemple, quand un pêcheur pêche 6 dorés et 16 truites, et qu'un autre pêche 12 dorés et 32 truites, nous dirions que le rapport entre les dorés et les truites des deux pêcheurs est le même; ainsi, pour ces deux pêcheurs, le nombre de dorés pêchés est proportionnel à celui de truites.

6 : 16 = 12 : 32 = 3 : 8

Nous remarquons que le rapport entre dorés et truites est 3:8 et que la fraction *rapport* 3/8 est une comparaison entre deux quantités.

> « *Lorsqu'on interprète la fraction 3/8, selon son sens "partie-tout", nous considérons 3 parties sur 8 parties égales au total ou 3 objets bleus sur 8 objets au total; les 3 objets appartiennent à la collection totale. En revanche, lorsque la fraction 3/8 indique un rapport, le 3 peut signifier 3 objets bleus pour 8 objets rouges, donc 11 objets au total.* » (Blouin, 1993, p. 15)

2.2 La proportionnalité dans le champ conceptuel des structures multiplicatives

Notre étude est centrée sur l'interprétation *rapport* des fractions et son prolongement dans le contexte de la proportionnalité. Dans cette section, une analyse didactique de ces notions est développée.

2.2.1 La structure des problèmes de type *rapport*

La fraction de type *rapport* s'inscrit dans le champ conceptuel de la fraction et est ainsi rattachée aux problèmes de structures multiplicatives. Le champ conceptuel des structures multiplicatives consiste en « *l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs multiplications ou divisions et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations : proportion simple et proportion multiple, fonction linéaire et n-linéaire, rapport scalaire, quotient et produit de dimensions, fraction, rapport, nombre rationnel, multiple et diviseur, etc.* » (Vergnaud, 1991, p. 56). Vergnaud analyse la différence entre structures additives et structures multiplicatives :

> « *Il n'est pas superflu, par contre, de remarquer que l'analyse des structures multiplicatives est profondément différente de celle des structures additives. Les relations de base les plus simples ne sont pas ternaires mais quaternaires, parce que les problèmes les plus simples, de multiplication et de division, impliquent la proportion simple de deux variables l'une par rapport à l'autre.* » (Vergnaud, 1991, p. 153)

Cette analyse conduit à identifier quatre classes de problèmes élémentaires, schématisées comme suit :

1. La multiplication

Exemple de problème : il y a ***a*** berlingots de jus par paquet. Combien y a-t-il de berlingots dans ***b*** paquets?

1	a
b	?

2. La division-partition (partage)

Exemple de problème : nous avons ***c*** berlingots de jus. S'il y a ***b*** paquets de berlingots, combien y a-t-il de berlingots par paquet?

1	?
b	c

3. La division-quotition (regroupement)

Exemple de problème : nous avons ***c*** berlingots de jus en tout. S'il y a ***a*** berlingots par paquet, combien de paquets de berlingots avons-nous?

1	a
?	c

4. La quatrième proportionnelle

Exemple de problème : si dans ***a*** paquets de berlingots de jus, il y a ***b*** berlingots, combien y a-t-il de berlingots dans ***c*** paquets?

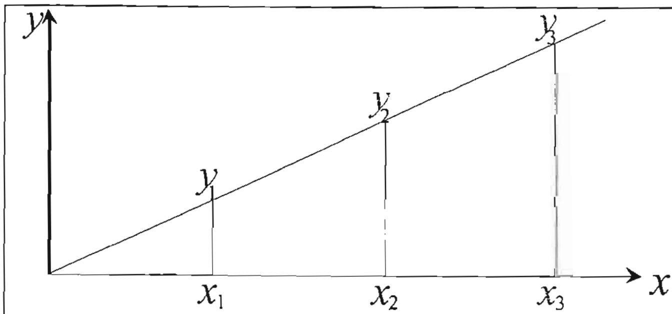
a	b
c	?

> « *Ces problèmes présentent des difficultés très inégales selon les valeurs numériques (difficulté de la multiplication et de la division par un décimal, surtout par un décimal plus petit que 1).* » (Vergnaud, 1991, p. 154)

Considérant que deux rapports égaux correspondent à la proportionnalité, la prise en compte de ces distinctions est fondamentale pour l'analyse de l'interprétation *rapport* des fractions. Cependant, notre projet va tenir compte de la quatrième classe, soit la *quatrième proportionnelle*. Nous visons à mieux saisir comment la fraction peut intervenir dans la résolution des problèmes de proportionnalité.

2.2.2 La fraction *rapport* : l'entier comme opérateur multiplicatif

Vergnaud (1981) propose deux types d'analyse pour les problèmes de type *proportion* : une analyse verticale basée sur l'opérateur multiplicatif scalaire 'n_1' et 'n_2' (rapport interne) et une autre horizontale basée sur l'opérateur multiplicatif fonction 'm' (rapport externe). Dans le cas d'un opérateur scalaire, le rapport entre des variables de même mesure est recherché. Par ailleurs, avec l'opérateur fonction, nous établissons le lien entre des variables de mesures différentes. Ce type d'opérateur mène à la dérivation d'une règle générale, $y = mx$, à appliquer pour résoudre des problèmes partageant le même opérateur fonction.



$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = m$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = n_1$$

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{y_3}{y_2} = n_2$$

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} \times \frac{x_2}{x_1} = n_1 \times n_2$$

$$\frac{y_3}{y_1} = \frac{y_3}{y_2} \times \frac{y_2}{y_1} = n_1 \times n_2$$

Figure 2.3 Fonction linéaire dans une proportionnalité

Voyons un exemple proposé par Vergnaud (1981, p. 164).

J'ai 3 paquets de yaourts. Il y a 4 yaourts dans chaque paquet. Combien ai-je de yaourts?

Paquets	Yaourts
1 →	4
3 →	x

$$
\begin{tikzcd}
\underline{\text{Paquets}} & & \underline{\text{Yaourts}} \\
1 \arrow[rr, "f", "\times 4"'] \arrow[d, "\times 3"', "s"] & & 4 \arrow[d, "s"', "\times 3"] \\
3 \arrow[rr, "f", "\times 4"'] & & x
\end{tikzcd}
$$

Légende :
s : opérateur scalaire → 3 fois plus de paquets
f : opérateur fonction → fois 4 yaourts/paquet

Dans cet exemple, la notion de fraction n'est pas introduite. Nous pouvons calculer la valeur numérique de l'inconnue $\boldsymbol{x}$ sans avoir recours à la notion de fraction, étant donné que les deux opérateurs multiplicatifs sont des entiers. Avec l'opérateur scalaire, nous cherchons le rapport entre des quantités de même nature. On peut appliquer un opérateur scalaire « ×3 » qui fait le lien entre 1 paquet et 3 paquets pour trouver la quantité de yaourts associée à 3 paquets, soit $4 \times 3 = 12 = x$. Avec l'opérateur fonction, (taux : 4 yaourts/paquet), obtenu par une analyse horizontale, nous établissons le lien entre deux quantités hétérogènes de mesures différentes (paquets et yaourts). Ce problème peut donc être résolu en multipliant l'opérateur fonction 4 par 3 (le nombre de paquets) : $3 \times 4 = 12 = x$. Aussi, l'opérateur fonction mène à la dérivation d'une règle générale (y = 4p; y : nombre de yaourts, p : nombre de paquets) pour résoudre cette classe de problèmes.

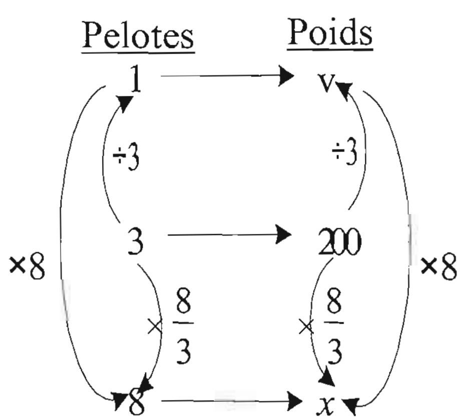
Nous pouvons conclure que l'isomorphisme de mesures fait appel à deux opérations : multiplication et division. La multiplication (3 paquets × 4 yaourts/paquet) crée une troisième mesure, soit paquets-yaourts, mais la division (÷ 1 paquet) l'a éliminée pour obtenir une solution sur le nombre de yaourts.

2.2.3 La fraction *rapport* : la fraction comme opérateur multiplicatif

Les problèmes de proportionnalité qui impliquent des entiers ou des naturels comme données numériques peuvent exiger, dans la solution, le recours aux nombres rationnels. Vergnaud (1981) fait l'analyse de l'exemple suivant :
Trois pelotes de laine pèsent 200 grammes. Il en faut 8 pour faire un pull. Quel est le poids du pull?

Pelotes	Poids
3 →	*200*
8 →	x

Dans cet exemple, l'opérateur scalaire est $\frac{8}{3}$ et l'opérateur fonction est $\frac{200}{3}$, où la règle de trois n'est ni irréductible ni dégénérée (dénominateur = 1), ce qui rend le problème beaucoup plus complexe que le problème précédent. L'analyse de type vertical passe par la valeur unitaire d'une pelote et l'application de l'opérateur scalaire $\frac{8}{3}$ comme deux opérateurs successifs (division par 3, puis multiplication par 8). La division par 3 est nécessaire pour calculer le poids unitaire d'une seule pelote et la multiplication par 8 permet de trouver le poids du pull. Cette procédure est l'équivalent de multiplier par la fraction 8/3. Dans ce cas, l'interprétation de la fraction en tant qu'*opérateur* est sollicitée; 8/3 est une fraction qui opère sur une quantité initiale (200 grammes) pour obtenir une quantité finale (1600/3 grammes ou 533 ⅓ grammes).



L'analyse de type horizontal est centrée sur l'opérateur fonction selon lequel le poids y des pelotes est une fonction de leur nombre x. L'opérateur fonction 200/3 permet de passer d'une mesure à une autre de nature différente, soit de passer de 3 pelotes à 200 grammes. Le même opérateur fonction permet de passer de 8 pelotes à l'inconnue notée "?".

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\text{Pelotes}} & & \underline{\text{Poids}} \\
3 & \xrightarrow{\times 200/3} & 200 \\
8 & \longrightarrow & ? \\
x & \longrightarrow & y
\end{array}$$

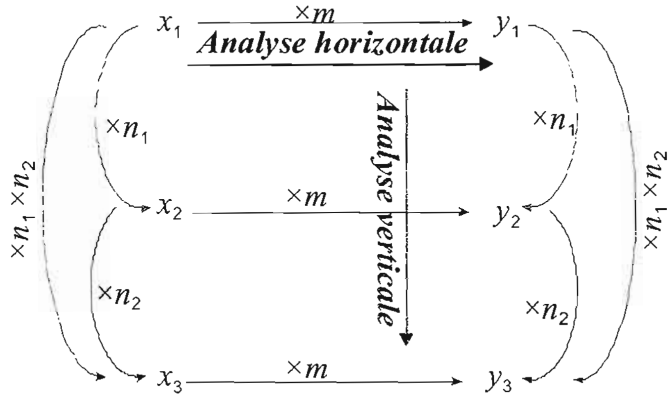
La relation linéaire entre la variable indépendante (nombre de pelotes) et la variable dépendante (poids en grammes) est $y = (200/3)\ x$. Pour trouver l'inconnue (?), il faut appliquer l'opérateur fonction à 8 pelotes comme suit :

$$? \text{ grammes} = 8 \text{ pelotes} \times \frac{200}{3} \text{ grammes / pelote}$$

Multiplier par un opérateur fonction (200/3), c'est multiplier par un taux. Selon Vergnaud,

> « [...] *l'analyse* [...] *en termes de fonction est* [...] *beaucoup plus délicate car elle implique non seulement la notion de rapport numérique mais également celle de quotient de dimension (ici grammes/pelote).* » (Vergnaud, 1981, p. 171)

La figure ci-après résume le fonctionnement des opérateurs scalaires et fonctions.



$y_1 = mx_1 = f(x_1)$ $\quad f(x_i + x_j) = f(x_i) + f(x_j)$

$y_2 = mx_2 = f(x_2)$ $\quad f(mx) = mf(x)$

$y_3 = mx_3 = f(x_3)$ $\quad f(mx + m'x') = mf(x) + m'f(x')$

Figure 2.4 Analyses horizontales et verticales

2.3 Études didactiques sur la proportionnalité

Quelques études didactiques ont été effectuées sur la notion de proportionnalité (rapports égaux). Pour les fins de notre travail, nous en retenons quatre qui nous permettent de saisir les principaux enjeux didactiques de la proportionnalité : 1) l'étude de Desjardins et Hétu; 2) l'étude de Jean Julo; 3) l'étude de Sophie René de Cotret; 4) l'étude d'Izabella Oliveira.

2.3.1 L'étude de Desjardins et Hétu (1974)

L'étude de Desjardins et Hétu (1974) aborde des questions essentielles sur la didactique de la fraction. Cet ouvrage s'intéresse à l'activité mathématique de l'élève, par l'étude des connaissances spécifiées par leur objet (le contenu mathématique) et non par celles des structures opératoires, et à l'expérience didactique. Les auteurs présentent une analyse des états successifs de la fraction chez l'élève dans l'enseignement traditionnel de la fraction. Dans la suite de cette analyse, ils proposent quelques avenues didactiques.

L'analyse montre que l'élève

> « *construit au départ une fraction-quantité dans laquelle est immédiatement inséré un symbolisme qui représente l'équivalence des relations. Or, l'équivalence des relations n'est pas contenue dans cette fraction-quantité; plus tard, quand la fraction-relation devient possible grâce au développement du sujet, on ne note dans la stratégie traditionnelle aucun souci d'en tenir compte* [...] » (Desjardins et Hétu, 1974, p. 38).

Toujours selon ces auteurs,

> « *Le progrès réalisé entre le niveau de la fraction-quantité et le niveau de la fraction-relation réside dans la possibilité qu'acquiert l'enfant de ne plus comparer seulement des quantités déterminées par les partages, mais bien la possibilité de comparer les relations que chaque fraction entretient avec son entier.* » (Desjardins et Hétu, 1974, p. 71)

Pour mieux comprendre la distinction entre la fraction-quantité et la fraction-relation, nous rapportons le problème de Picasso, présenté aux élèves de 4e et 5e années, ainsi que l'analyse des conduites relevées par Desjardins et Hétu (1974) :

> « *Picasso désire effectuer un mélange de bleu et de jaune de façon à obtenir de la peinture verte. Le matin, il mélange 2 petits pots de bleu à 3 petits pots de jaune. L'après-midi, il doit mélanger le "même vert" mais en plus grande quantité. Combien doit-il mettre de jaune et de bleu?* »

Les étudiants qui arrivaient à la bonne réponse ont correctement utilisé soit le rapport multiplicatif (n fois), soit l'addition répétée :

Rapport multiplicatif	Addition répétée
$\frac{2b}{3j}=\frac{2b}{3j}\times\frac{n}{n}=\frac{2nb}{3nj}$	$\frac{2b}{3j}=\frac{2b+2b+.....+2b}{3j+3j+.....+3j}=\frac{2nb}{3nj}$

Le tableau ci-dessous présente les réponses des élèves à la situation-problème :

Niveau	Nombre d'élèves	Rapport additif erroné	Rapport multiplicatif	Autres réponses
4e année	50	74 %	12 %	14 %
5e année	40	19 %	70 %	11 %

Les observations montrent que l'enfant se penche d'abord sur des raisonnements additifs avant de s'appuyer sur des raisonnements multiplicatifs. Cette « *difficulté éprouvée par de nombreux enfants résulte du conflit que provoque l'action d'ajouter du liquide (comportement additif)* » (Desjardins et Hétu, 1974, p. 84). En plus, « *Il se peut* [...] *que la préférence pour les solutions additives ne soit qu'un faux décalage par suite d'habitudes acquises en raison d'un enseignement qui propose toujours l'addition avant la multiplication et qui réduit souvent celle-ci à une simple addition répétée* » (Desjardins et Hétu, 1974, p. 90). Nous remarquons que le comportement additif vise à maintenir une différence constante entre les rapports (3 - 2 = 1) qui n'est pas fonction des quantités de peinture utilisées. Les auteurs considèrent plusieurs hypothèses pour expliquer l'écart important entre les résultats obtenus en 4e année et en 5e année. La grande majorité des élèves de 4e année (74 %) recourt à des stratégies additives, alors que la très grande majorité des élèves de 5e année (70 %) recourt à des stratégies multiplicatives. Ces auteurs en concluent que la manipulation des liquides, effectuée en 4e année mais non en 5e année, a favorisé les comportements additifs : « *L'utilisation d'un matériel numérique plutôt que des quantités physiques, comme les liquides, occasionne la disparition presque complète des solutions additives* » (Desjardins et Hétu, 1974, p. 90). Enfin, Desjardins et Hétu recommandent de concevoir des situations faisant appel à la proportionnalité pour contrer et faire obstacle aux procédés additifs et qui favorisent des comportements multiplicatifs.

2.3.2 Des études psychologiques et didactiques sur la proportionnalité (1982)

Jean Julo (1982) analyse deux hypothèses classiques concernant l'apprentissage de la proportionnalité et en propose une troisième. La première hypothèse postule que la difficulté provient du fait que les élèves n'ont pas « assimilé » le modèle enseigné en mathématiques (la proportionnalité sous son aspect « fonction linéaire ») et que l'origine de cette non-assimilation est à chercher au plan de la présentation pédagogique du modèle. La deuxième hypothèse concerne plutôt des contraintes psychogénétiques au plan de l'acquisition de la proportionnalité. Cette deuxième hypothèse appuie l'étude de Piaget (1955) selon laquelle c'est l'existence des contraintes psychogénétiques, c'est-à-dire des limites liées à la maturation (au développement intellectuel) qui entravent, chez l'enfant, l'acquisition de la notion de proportionnalité (Julo, 1982, p. 19). La nouvelle hypothèse formulée par l'auteur suppose que le modèle enseigné en mathématiques est « assimilé » par les élèves sans que ces derniers l'utilisent pour résoudre les problèmes de proportionnalité qui leur sont proposés. Pour l'auteur, si on ne considère pas que l'assimilation (ou la compréhension) d'une connaissance et son utilisation dans une situation-problème sont les deux aspects d'une même réalité psychologique, on court le risque de revenir à une conception non opératoire de la connaissance, une conception selon laquelle la connaissance existerait indépendamment de l'activité du sujet.

Pour l'auteur,

« L'inefficacité de l'enseignement de la proportionnalité trouve son origine [...] *dans le fait que cet enseignement se donne principalement pour objectif de fournir à l'élève des procédures de résolution « générales » alors que l'élève n'a peut-être pas "besoin" de telles procédures* [...] *l'enseignement ne prend pas en compte le fonctionnement cognitif de l'élève en situation de résolution de problèmes (et, en particulier, la manière dont l'élève analyse la situation qui lui est proposée). »* (Julo, 1982, p. 41).

Selon l'auteur, le modèle (dans ce cas particulier, le modèle de proportionnalité) joue un rôle déterminant dans la résolution du problème, et s'il n'est pas utilisé dans certains cas, c'est parce qu'il n'est pas évoqué par la situation proposée et, donc, pas « reconnu » :

> « *L'utilisation de connaissances ayant fait l'objet d'un enseignement suppose la mise en œuvre d'un processus qui joue un rôle "médiateur" entre les conditions qui ont déterminé l'acquisition de ces connaissances et les conditions nouvelles que constitue la situation problème proposée. L'analyse de ce processus de re-connaissance représente donc une étape essentielle pour comprendre la manière dont l'élève va utiliser dans une situation donnée les connaissances qui lui ont été transmises et une question importante à ce niveau est celle du rôle des caractéristiques de la situation dans un tel processus de re-connaissance.* » (Julo, 1982, p. 50)

La proximité plus ou moins grande entre le contexte de la situation d'apprentissage et celui de la situation de rappel pourrait jouer un rôle déterminant au niveau des processus qui contrôlent la récupération des connaissances acquises, puis l'actualisation de ces connaissances dans une situation spécifique. En plus de l'accès aux connaissances, l'utilisation du modèle enseigné suppose la mise en œuvre de ces connaissances dans une situation donnée, la possibilité de redéfinir les connaissances en fonction des contenus particuliers présentés.

Dans le contexte du cadre théorique que nous venons de résumer, Julo élabore un questionnaire de problèmes de proportionnalité. La population étudiée est composée d'élèves de 6^{e} année (élèves de 12 ans).

Voici les résultats les plus importants de l'étude :

1- Il a été observé un effet « massif » lié à la nature du coefficient de proportionnalité : un taux de réussite de 80 % pour le coefficient entier et de 36 % pour le coefficient décimal (sur un problème standard de proportionnalité) (Julo, 1982, p. 140).

2- Aucun des facteurs de présentation du problème (contexte) n'a un rôle décisif sur la résolution de problèmes de proportionnalité (les contextes présentés : eau sucrée; crêpes et agrandissement).

3- L'analyse des procédures mises en œuvre par les élèves a été réalisée par rapport aux propriétés de la linéarité utilisées et les divers modes de représentation utilisés pour « traduire » la relation de proportionnalité définie par l'énoncé du problème.

Les élèves recourent le plus souvent à la procédure sur la propriété de l'opérateur fonction (identification et utilisation de la constante multiplicative). Lorsque la constante de proportionnalité est une fraction (par exemple 4/3), les élèves utilisent plus les propriétés multiplicatives et additives que l'opérateur fonction.

4- Par rapport aux modes de représentation (texte, colonnes, lignes), les élèves qui réussissent à résoudre le problème proposé font un peu plus souvent un tableau que ceux qui échouent, mais la différence observée ne permet pas de penser que la construction d'un tel tableau est une condition « suffisante » pour résoudre le problème. « *C'est en effet pour la modalité texte que ce recours à un tableau est le plus fréquent.* » (Julo, 1982, p. 223)

5- L'effet de l'enseignement réalisé se traduit, au niveau global, par une augmentation sensible de taux de réussite, et ceci, bien que le gain soit nul pour certaines modalités de problèmes. Cet effet se traduit également par une augmentation très sensible du recours à un mode de transcription du problème (soit dans un tableau, soit à partir d'un texte résumé qui identifie les valeurs numériques et leurs relations). Il n'y a pas d'effet notable pour le cas dont le coefficient est 4/3 : l'utilisation de la propriété multiplicative ne paraît pas liée à l'effet de l'enseignement.

L'auteur affirme que ce dernier résultat va à l'encontre de l'hypothèse avancée par Vergnaud à propos de l'effet négatif de l'enseignement par rapport aux procédures que les élèves seraient capables de mettre en œuvre.

Dans une perspective didactique, Comin (2002) réalise une étude des conceptions des élèves et de maîtres sur la proportionnalité. Nous retiendrons seulement les aspects qui concernent les élèves. L'étude réalisée auprès des élèves de 2^{e} (élèves de 16 ans) montre que le taux d'élèves qui établissent un lien entre proportionnalité et application linéaire varie entre 40 % et 57 %. Près d'un élève sur deux n'établit aucun rapport entre ces deux concepts. Voici les trois principales techniques utilisées : produit en croix (34 %), rapport externe (27,5 %) et rapport interne (11 %).

La diversité de techniques utilisées par les élèves semblerait favoriser la réussite : les techniques ne sont pas concurrentes et elles varient d'un exercice à un autre, et ce, pour le même élève.

En rejoignant les résultats de Julo, l'analyse réalisée par l'auteur montre que la connaissance de la technique de la linéarité assure la réussite aux exercices prototypiques, mais ne suffit pas pour les autres exercices. Cela tend à montrer que ce que l'enseignement de l'algèbre fait gagner en généralité n'améliore pas l'extension de son champ d'utilisation (Comin, 2002, p. 143).

2.3.3 L'étude de René de Cotret (1991)

La thèse de Sophie René de Cotret (1991) s'intitule : *Étude de l'influence des variables « indice de proportionnalité du thème » et « nombre de couples de données » sur la reconnaissance, le traitement et la compréhension de problèmes de proportionnalité chez des élèves de 13-14 ans.*
Cette étude comprend deux expérimentations :

(1) une expérimentation sur l'*indice de proportionnalité du thème*

Dans cette expérimentation, René de Cotret a constaté que certains thèmes étaient plus facilement perçus comme proportionnels. Autrement dit, certains problèmes contenaient des thèmes qui avaient des *indices de proportionnalité* plus relevés et plus prononcés que d'autres. Ces problèmes sont beaucoup plus réussis que d'autres par des élèves du premier cycle du secondaire. Par exemple, dans des problèmes ayant la Vitesse, le Prix, le Pain, etc., comme thème, l'aspect proportionnel est spontanément reconnu, et il s'avère plus explicite et abordable, ce qui favoriserait l'accès au raisonnement proportionnel. Cela signifie que la capacité d'un élève à reconnaître et à résoudre une situation proportionnelle pourrait être fonction du thème de la situation en question.

La première expérimentation comporte 9 problèmes à deux couples de données et porte sur 5 thèmes : Vitesse (un problème), Mazout (deux problèmes), Pain (deux problèmes), Prix (deux problèmes), Confitures (un problème) et un seul problème sur un thème non proportionnel, soit l'âge. Des rapports fractionnaires sont attribués à tous les problèmes de proportionnalité, sauf à celui de la Confiture. Les rapports scalaire et fonction de ce dernier sont des entiers. Une solution détaillée additive fautive est associée à chaque problème et « *la tâche des élèves était d'accepter ou de rejeter une solution fausse et d'expliquer pourquoi ils acceptaient ou rejetaient cette solution* » (René de Cotret, 2006, p. 113). Par contre, « [...] *le rejet de la solution additive ne signifie pas nécessairement que l'élève considère le thème comme proportionnel* » (René de Cotret, 2006, p. 114).

Les sujets de l'expérimentation travaillent en binômes afin de favoriser les échanges verbaux et ainsi encourager la discussion entre les dyades. Les participants à cette expérimentation comportent 8 binômes du niveau secondaire I et 7 binômes du niveau secondaire II.

L'expérimentation de René de Cotret a mis en lumière les arguments proportionnels des élèves qui renvoient à la reconnaissance de la proportionnalité des thèmes (l'indice de la proportionnalité). Suite à cette observation, les thèmes sont classés dans un ordre décroissant selon l'intensité de cette reconnaissance : Vitesse, Prix, Pain, Mazout. Selon ce classement, nous apercevons que le thème de Mazout est le moins proportionnel aux yeux des élèves. « *Cela s'explique peut-être par le fait que les élèves ne sont familiers ni avec le mazout ni avec la consommation d'un système de chauffage et ils ont ainsi de la difficulté à se représenter la situation.* » (René de Cotret, 2006, p. 132)

De plus, l'étude de René de Cotret démontre qu'il existe « *une coïncidence entre la fréquence de réussite et l'indice de proportionnalité pour les problèmes de Prix, de Pain et de Mazout* ». Par contre, le thème de Vitesse « [...] *est considéré comme l'un des plus proportionnels par les élèves, et* [...] *l'un des moins bien réussis* ». Peut-être que les arguments proportionnels apportés par les élèves par rapport au thème de Vitesse sont des « *arguments "qualitatifs" ou "non-opératoires"* » (René de Cotret, 2006, p. 134). En conclusion, « *la reconnaissance de la proportionnalité et la capacité de résoudre d'autres problèmes de proportionnalité ne suffisent pas nécessairement à la réussite* » (René de Cotret, 2006, p. 136).

Le problème d'âge qui réfère à un modèle additif non proportionnel a évoqué « *une mention explicite de la proportionnalité des autres thèmes* » (René de Cotret, 2006, p.138) et « *semble avoir permis à certains élèves de préciser leur conception de proportionnalité en permettant une comparaison des modèles proportionnel et additif* » (René de Cotret, 2006, p. 140). Pour le problème de la Confiture, « *les rapports entiers qui lui étaient attribués peuvent aussi favoriser la reconnaissance de* *la proportionnalité* » (René de Cotret, 2006, p. 141) et « *presque tous les binômes ont rejeté la solution additive pour des raisons liées à la proportionnalité de la recette* » (René de Cotret, 2006, p. 138). La plupart des élèves ont apporté « *des arguments proportionnels principalement liés au double. Ils expliquaient qu'il y a deux fois plus de fruits que de sucre ou, que si on double les fruits, alors il faut doubler le sucre* » (René de Cotret, 2006, p. 139).

(2) une expérimentation sur le *nombre de couples de données*

La première expérimentation nous a fait conclure que la reconnaissance de la proportionnalité ne mène pas toujours à un traitement proportionnel et n'est pas nécessairement garante de la réussite des élèves vis-à-vis des problèmes donnés. Cette conclusion a invité l'expérimentatrice à élaborer une seconde expérimentation dans le but de « *voir dans quelle mesure l'ajout d'un couple de données pouvait préciser la proportionnalité du problème, tout en favorisant un traitement proportionnel*[2] ». En effet, l'introduction d'un troisième couple jouerait le rôle d'un catalyseur permettant d'expliciter et d'éveiller la présence d'une perception proportionnelle ainsi que de suggérer un traitement proportionnel.

La seconde expérimentation comporte 12 problèmes étalés sur 6 thèmes, présentés comme suit : Vitesse, Mazout, Brioche, Prix, Confitures et Robinets. Chaque thème est associé à un problème à 2 couples et à un autre à 3 couples. Remarquons que le thème du Pain est remplacé par un autre de même texture, soit la Brioche. Le thème d'âge a été éliminé et le thème des Robinets a été ajouté. Un seul élève a été choisi par chaque binôme pour participer au travail individuel de la seconde expérimentation.

---

[2] CAT.INIST
CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE (CNRS)
http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=160541
(Page consultée le 1 octobre 2007)

Voici les résultats les plus saillants tirés de la seconde expérimentation :

- L'ajout d'un troisième couple de données a poussé les élèves à invalider leur raisonnement additif fautif et à penser autrement, pour la plupart du temps, vers des démarches certes proportionnelles. À vrai dire, les problèmes à 3 couples ont exposé les procédures de résolution de l'élève à une phase de validation pour lui permettre de vérifier la pertinence de sa démarche. Cette disposition a augmenté le taux de réussite aux problèmes.

- « *Les élèves optaient souvent pour un traitement homogène (traitement entre grandeurs de même nature) pour solutionner les problèmes à deux couples. Par contre, avec le "troisième couple", nous avons observé une forte hausse des traitements hétérogènes (traitement entre grandeurs de nature différente* » (René de Cotret, 2006, p. 2). De plus, « *Certaines recherches (Groupe de Formation : proportionnalité, IREM de Montpellier 85-86; Morin, 1983-84, 1986a et 1986b; Vergnaud, Rouchier, Ricco, Marthe, Metregiste et Giacobbe, 1979) semblent démontrer que la procédure privilégiée par les élèves, dans la résolution de problèmes de proportionnalité, est la procédure scalaire* » (René de Cotret, 2006, p. 17), mais le troisième couple « *favorisait le passage de procédure de type scalaire vers des procédures de type fonction* » (René de Cotret, 2006, p. 176).

- « *Le troisième couple a engendré spontanément un processus de modélisation chez les élèves* » (René de Cotret, 2006, p. 2). Les élèves se sont concentrés vers « *la recherche des régularités [ou des invariants dans les problèmes] qui peut s'apparenter à la recherche d'un modèle permettant d'établir une relation satisfaisante entre les données* » (René de Cotret, 2006, p. 143). En plus, le processus de modélisation permet « *d'inférer un modèle à partir du contexte* » (René de Cotret, 2006, p. 67), étant donné qu'un « *contexte est principalement composé du thème et de valeurs numériques attribuées aux variables de ce thème* » (René de Cotret, 2006, p. 63). Dans cette optique, « *le thème est défini par une relation de dépendance entre deux variables* » (René de Cotret, 2006, p. 62).

- « *Le troisième couple a entraîné la correction de la procédure fonction inverse* » (René de Cotret, 2006, p. 164). En effet, l'ajout d'un couple supplémentaire a permis aux élèves de mieux définir la relation entre les variables et de mettre en évidence le sens du coefficient fonction. « *En d'autres termes, avec un troisième couple, [l'élève] voit mieux comment le coefficient permet de passer d'une variable à l'autre ou d'une suite de nombres à l'autre* » (René de Cotret, 2006, p. 165).

- Le troisième couple a démontré qu'une « *meilleure appréhension de la proportionnalité semble passer par une combinaison de procédures scalaires et fonction* » (René de Cotret, 2006, p. 185). Autrement dit, le troisième couple a mis en évidence « *les relations unissant les traitements de types scalaire et fonction* » (René de Cotret, 2006, p. 208).

2.3.4 L'étude d'Oliveira (2000)[3]

L'étude d'Oliveira (2000) vise à rendre compte des stratégies utilisées par des élèves de 2^{e} secondaire (13-14 ans) pour résoudre des problèmes de proportion, et ce, avant que ces élèves aient bénéficié d'enseignement sur la proportionnalité. Dans cette étude, trente-trois élèves ont répondu individuellement à 10 problèmes simples (dont les énoncés se rapprochent des énoncés usuels), dont 8 problèmes portent sur la résolution de situations proportionnelles et 2 problèmes portent sur l'identification de situations non proportionnelles.

L'analyse des stratégies développées par les élèves dans la résolution de problèmes de proportion directe sollicitant, selon l'auteure, un raisonnement quantitatif (problèmes qui impliquent un rapport entre les données numériques qui

---

[3]Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec (GDM 2005) http://www.math.uqam.ca/Actes-GDM-05.pdf
Raisonnement mathématique et formation citoyenne, UQÀM 3 et 4 mai 2005
http://www.er.uqam.ca/nobel/r13764/gdm2005/communications.html
(Page consultée le 12 septembre 2006)

n'est pas un entier), montre la variété des stratégies mises en œuvre par les élèves : procédures scalaire, linéaire (composition de deux opérateurs), fonctionnelle, retour à l'unité, recours à une grandeur intermédiaire. La mise en relation entre les caractéristiques des problèmes et les stratégies des élèves permet de mettre en évidence l'impact de certaines variables didactiques : 1) les nombres; 2) le nombre de couples; 3) le « sens de la proportion ». Les nombres ont un impact sur les procédures utilisées. En effet, le type de rapports que les grandeurs entretiennent entre elles oriente la stratégie élaborée. Ceci indique d'une part comment les élèves disposent d'un assez vaste répertoire de stratégies. D'autre part, l'impact de la variable « nombre » sur les stratégies montre la difficulté rencontrée par les élèves dans le passage des structures additives aux structures multiplicatives. Le nombre de couples de données influence également les stratégies. Lorsqu'il y a trois couples, des élèves construisent un tableau dans lequel ils recherchent une régularité de type additif correct et ils perdent de vue le sens de la situation. Une troisième variable identifiée par l'auteure est le « sens », pourrions-nous dire, de la proportion. Lorsque la proportion est inverse, alors une stratégie, absente lors de la résolution de problèmes de proportion directe, est observée soit le recours à une grandeur intermédiaire.

L'analyse des stratégies développées par les élèves dans les problèmes qui sollicitent, selon l'auteure, un raisonnement qualitatif (présentation à l'aide d'un support visuel, tel que des dessins) montre que les élèves ont recours à des stratégies quantitatives, c'est-à-dire des stratégies qui font appel à l'établissement d'un rapport entre les quantités représentées par les dessins (nombre de verres de jus et nombre de verres d'eau). Les résultats obtenus conduisent l'auteure à interroger l'impact du support visuel dans la résolution de problèmes, soutenant qu'il peut faire apparaître des difficultés chez les élèves.

Dans les conclusions de l'étude, Oliveira souligne qu'avant même que les élèves aient reçu un enseignement formel sur la résolution de problèmes de proportionnalité, ils sont capables de résoudre certains problèmes, même ceux présentant des structures mathématiques plus complexes comme, par exemple, les problèmes de proportion inverse.

En terminant, dans l'étude d'Oliveira, nous constatons que certaines variables didactiques entraînent des obstacles à l'apprentissage, et ce, pour certains types de situations-problèmes. Pour un enseignement efficace de cette notion, il serait important d'évaluer davantage, d'explorer et d'analyser le contexte et la nature des dites situations-problèmes qui engendrent des connaissances obstacles chez les apprenants.

2.4 Objectif spécifique

Les études que nous venons de recenser seront mises à contribution dans l'opérationnalisation de notre recherche. Ainsi, nous tiendrons compte, dans notre démarche méthodologique, des études présentées dans le cadre théorique principalement celle de Julo (1982). Dans cette perspective, nous allons exploiter les éléments suivants en tant que variables didactiques dans la composition des problèmes à soumettre aux élèves: présentation du problème (texte, tableau, dessin); rapports entre les données (entier, fractionnaire) et le nombre de données (4 données, 6 données) pour élaborer les situations-problèmes faisant l'objet de notre expérimentation.

L'objectif spécifique de notre recherche est d'analyser comment, le jeu sur certaines variables didactiques, définies et contrôlées *a priori* (facteur de présentation, types de rapports, nombre de données), affecte le raisonnement engagé par des élèves cris de 2^{e} secondaire alors qu'ils sont confrontés à des problèmes de proportionnalité.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

Ce chapitre présente la démarche expérimentale pour l'étude du raisonnement proportionnel mis en œuvre par des élèves cris de 2^{e} secondaire confrontés à des situations de proportionnalité. Nous traitons d'abord de la sélection des élèves qui participent à l'expérimentation, des caractéristiques de l'expérimentation et plus particulièrement des variables sur lesquelles sont élaborés les problèmes de proportionnalité que nous soumettons aux élèves. Dans cette perspective, nous présentons une analyse *a priori* de 13 problèmes. Cette analyse est essentielle pour préparer l'analyse des productions qui seront recueillies. Des précisions sur la méthode d'analyse qui sera utilisée sont également fournies. Nous précisons enfin quelques aspects déontologiques de la recherche.

3.1 Sélection des sujets

La proportionnalité est un thème mathématique particulièrement sensible à l'ordre secondaire puisqu'en l'absence des savoirs qui permettent de contrôler les situations de proportionnalité, la réussite scolaire en mathématiques au secondaire est compromise. En effet, le raisonnement proportionnel est requis pour plusieurs notions couvertes par le programme, notamment l'homothétie, la probabilité, la trigonométrie, etc. Le chapitre précédent montre également que les situations d'enseignement qui font appel à l'interprétation *rapport* de la fraction à l'ordre primaire est une première introduction des élèves aux problèmes de proportionnalité. Dès ce moment, la difficulté liée au passage des procédures additives aux procédures multiplicatives se manifeste. Cette difficulté se prolonge, comme les études le montrent, au début du secondaire alors que les problèmes de « quatrième proportionnelle » sont introduits officiellement. Le premier cycle du secondaire semble donc une période charnière pour l'appropriation des stratégies de résolution de problèmes de proportionnalité. Rappelons que sans l'acquisition de savoirs liés à la proportionnalité, et en l'absence d'un contrôle sur les situations de proportionnalité, la poursuite et la réussite des études secondaires peuvent être compromises.

Enfin, la problématique montre que le premier cycle du secondaire est également une période sensible au regard de la persévérance scolaire dans la population crie. C'est vers la fin de cette période que le taux d'abandon est le plus élevé. Dans le cadre de notre recherche, nous ciblons donc les élèves cris de 2^{e} secondaire comme sujets de notre expérimentation.

L'expérimentation est effectuée auprès d'un groupe de 12 élèves de 2^{e} secondaire, (âgés entre 13 et 17 ans) d'une classe française de l'école Willie J. Happyjack Memorial School à Waswanipi. La grande tranche d'âge indique qu'il y a des élèves doubleurs dans ce groupe. Dans cette communauté, nous travaillons pour la CSC depuis avril 2000. Nous sommes donc familier avec le milieu dans lequel l'expérimentation aura lieu. Le choix du nombre de sujets est effectué en tenant compte du temps nécessaire pour la passation des problèmes et de l'obtention du consentement des parents.

3.2 Caractéristiques de l'expérimentation

De manière à recueillir le plus de données possible (d'observables) sur les stratégies que peuvent mettre en œuvre les élèves dans la résolution d'un problème de proportionnalité, nous mettons en place un contexte de travail qui vise à favoriser la mise en relation des données (le calcul relationnel) plutôt que le calcul numérique, les verbalisations et la prise de décision.

Les élèves sont regroupés en dyades ou triades. Ils ont à traiter 13 problèmes de type « quatrième proportionnelle ». La consigne est d'évaluer des copies d'un élève fictif qui a résolu des problèmes de proportionnalité. Les élèves doivent se prononcer sur la justesse de la réponse et la corriger, s'il y a lieu. Nous supposons que la recherche d'une décision commune obligera les élèves à s'engager dans la résolution du problème et à justifier verbalement leur décision, nous offrant ainsi des accès aux raisonnements et aux procédures qui ont guidé leur décision. Nous prévoyons trois séquences de travail de 50 minutes pour réaliser notre expérimentation. Cette dernière se déroule aux heures régulières de classe. Enfin, nous recueillons l'ensemble des traces écrites des élèves et prenons des notes manuscrites sur les verbalisations des élèves au moment de la réalisation.

Nous avons donné aux élèves les consignes suivantes :

— Nous avons 12 problèmes à vous soumettre. Ces problèmes ont été déjà résolus par un élève de 2^e secondaire. Cet élève a inscrit les réponses respectives aux problèmes donnés sur ses copies. Maintenant, vous devez vérifier chaque réponse, indiquer si elle est vraie ou fausse et la corriger s'il y a lieu. Que la réponse soit vraie ou fausse, dans les deux cas, vous devez inscrire les étapes qui mènent à la solution de chacun des problèmes ainsi que démontrer votre démarche.

3.3 Variables didactiques retenues pour l'élaboration des problèmes

Sur la base des études recensées dans le contexte théorique, en particulier celle de Julo (1982), nous avons identifié trois éléments qui semblent influencer la stratégie de résolution de problèmes de proportionnalité. Nous reprenons ces éléments sous la forme de variables didactiques et nous générons ainsi, par un jeu sur les valeurs de ces variables, 13 problèmes différents. Ces trois variables sont :

1) Le facteur de présentation du problème

Nous agissons sur cette variable de manière à présenter les données numériques du problème selon le facteur d'un texte, d'un tableau ou d'un dessin. Ces trois facteurs différents devraient engager les élèves sur des interprétations variées. Il est cependant difficile de prévoir comment cette variable va influencer les stratégies des élèves. Selon les résultats de Julo, les élèves qui recourent à un tableau (en le construisant) réussissent plus souvent la résolution que ceux qui n'y recourent pas. Il est donc utile de se questionner : est-ce qu'une présentation des données numériques inscrites dans une structure de type tableau va favoriser une mise en relation correcte des données ? Est-ce que la présentation des données faisant appel au dessin (représentation picturale des données) facilite cette mise en relation? Étant donné que le français n'est pas la langue maternelle des élèves autochtones, il est possible que ces deux facteurs soient facilitants au regard d'un facteur de type texte.

2) Le type de rapport entre les données

Les nombres constituent une variable didactique très importante parce qu'ils influencent fortement autant le calcul relationnel que le calcul numérique. Ainsi, si le rapport interne (opérateur scalaire) ou le rapport externe (opérateur fonction) entre les données est entier, la résolution est plus aisée que lorsque ces rapports sont fractionnaires. Nous agissons donc sur cette variable de manière à élaborer des problèmes dont les deux rapports (interne et externe) sont entiers, ou dont les deux rapports sont fractionnaires, ou encore dont l'un des deux rapports est fractionnaire.

3) Le nombre de données différentes (4 ou 6 données)

Le recours au nombre de données différentes peut également avoir un impact sur les stratégies des élèves. Les problèmes classiques de « quatrième proportionnelle » présentent quatre données, soit deux données numériques pour chacune des deux grandeurs différentes (ex. : kg prix). L'étude de René de Cotret (1991) stipule que l'introduction d'un troisième couple amènerait les élèves à invalider leur démarche additive du problème (3 couples de données numériques correspondant à 2 grandeurs) et à la reconnaissance d'un modèle approprié de résolution. Cela veut dire que la possibilité de traiter plus de quatre données, étant donné un même opérateur fonction, favoriserait la mise en œuvre d'une procédure multiplicative (René de Cotret, 1991).

Cependant, il est plus fréquent, dans la vie quotidienne, de rencontrer des situations de proportionnalité qui font appel à plusieurs données et à plusieurs grandeurs de natures différentes (par exemple, dans une recette : farine, œufs et lait).

Dans notre expérimentation, les problèmes à 3 couples (6 données) se distingueront selon qu'ils comportent soit :

- deux données numériques pour chacune des trois grandeurs retenues où trois rapports de type fonction peuvent être dégagés, étant donné un seul opérateur de type scalaire (par exemple, deux données numériques pour chacun des trois ingrédients d'une recette : farine, œufs et lait). Ici, le contexte suggère l'ajout d'une grandeur;

- trois données numériques pour chacune des deux grandeurs différentes, auquel cas un seul opérateur de type fonction s'applique, mais avec trois opérateurs de type scalaire (par exemple : 3 quantités différentes de pizzas associées à 3 données sur le nombre de convives). Nous sommes ici devant un contexte qui exige l'ajout d'un couple de données.

Considérant les trois variables didactiques et les différentes valeurs que chacune peut prendre, nous arrivons à la production de 12 problèmes différents [3 (facteurs) × 2 (type de rapport) × 2 (4 ou 6 données)]. Les trois variables sont ainsi exploitées afin de créer des problèmes différents qui devraient modifier les stratégies de résolution. Parmi ces 12 problèmes, 4 problèmes sont résolus correctement et 8 problèmes comportent une erreur chacun. Les élèves doivent se prononcer sur la justesse de la réponse présentée et la corriger, s'il y a lieu, comme nous l'avons déjà précisé. Un problème supplémentaire, à 6 données et 2 grandeurs, sans réponse fournie (Problème 13), a été ajouté pour tester davantage l'influence d'un troisième couple de données.

3.4 Analyse *a priori* des problèmes

Dans cette section, chacun des 13 problèmes est présenté. Chaque problème est analysé au regard des procédures justes ou erronées (voir en annexe les tableaux 3.2, 3.3 et 3.4). Nous faisons l'hypothèse que le fait de devoir juger de la justesse d'une réponse et de la corriger, s'il y a lieu, va engager les élèves dans des procédures de résolution, d'où la nécessité de procéder à une analyse *a priori*. Cette analyse *a priori* permet également de justifier les réponses aux problèmes sur lesquels les élèves sont appelés à se prononcer. Les réponses fausses relèvent pour la plupart d'un traitement additif. Nous ne précisons que les grandes catégories de procédures qui reposent soit sur un raisonnement additif, soit sur un raisonnement multiplicatif. Lorsqu'un opérateur fractionnaire relie des données, nous n'avons pas précisé comment les élèves peuvent procéder à la décomposition de cet opérateur en deux opérateurs entiers (par exemple : $\times$ 4/3 peut être décomposé par $\div$ 3 et $\times$ 4, à appliquer successivement). Nous nous sommes limité à un seul exemple lors de l'analyse *a priori* du problème 12.

Problème 1 (mauvaise réponse)

Valeur des variables: Facteur de type texte, Rapports entiers, 4 données.

> *Pour faire son mélange préféré de jus de raisin et de pommes, Jean doit mettre 6 verres de jus de raisin et 24 verres de jus de pommes. Il veut faire une très grande quantité de cette recette et met ainsi 18 verres de jus de raisin. Combien de verres de jus de pommes doit-il mettre?*
>
> | *Réponse de l'élève : 36 verres de jus de pommes* |
> |---|

Dans ce problème, le mélange de 6 verres de jus de raisin avec 24 verres de jus de pommes représente la recette de base. Se servant de celle-ci, Jean utilise 18 verres de jus de raisin pour préparer une quantité plus grande de mélange. En utilisant un raisonnement additif erroné, il utiliserait 36 verres de jus de pommes. Dans ce contexte, une procédure additive fausse se justifie soit par une analyse de type scalaire (verticale) soit par une analyse de type fonction (horizontale) comme le décrit la figure ci-dessous.

$$
\begin{tikzcd}
6 \arrow[r, "+18"] \arrow[d, bend right, "+12"'] & 24 \arrow[d, bend left, "+12"] \\
18 \arrow[r, "+18"] & 36
\end{tikzcd}
$$

6 + 18 = 24

18 + 18 = 36

6 + 12 = 18

24 + 12 = 36 (réponse erronée)

L'élève qui recourt à un raisonnement multiplicatif peut faire appel autant à l'opérateur scalaire (×3) qu'à l'opérateur fonction (× 4 verres de jus de pommes / 1 verre de jus de raisin), tous les deux étant des entiers.

$$
\begin{tikzcd}
6 \arrow[r, "\times 4"] \arrow[d, bend right, "\times 3"'] & 24 \arrow[d, bend left, "\times 3"] \\
18 \arrow[r, "\times 4"] & 72
\end{tikzcd}
$$

Problème 2 (bonne réponse)

Valeur des variables : Facteur de type tableau, Rapports entiers, 4 données.

Pour préparer son jus d'orange, Jean mélange des verres de jus concentré avec des verres d'eau selon les quantités présentées dans le tableau. Complète le tableau pour obtenir une plus grande quantité.

	Jus concentré	*Eau*
Le mélange habituel	*6*	*3*
Le mélange en grande quantité	*18*	*?* *Réponse de l'élève : 9 verres d'eau*

Dans le deuxième problème, le tableau rend plus explicite sans doute la structure des données et devrait, en principe, orienter les élèves vers le raisonnement multiplicatif. En outre, ce problème devrait favoriser la reconnaissance de la proportionnalité par le choix des nombres impliqués dans les deux rapports.

Selon une analyse de type fonction (horizontale), 6 verres de jus concentré est le double de 3 verres d'eau comme 18 verres de jus concentré est le double de 9 verres d'eau, ce qui confirme l'exactitude de la réponse.

$$6 \xrightarrow{\div 2} 3$$

$$18 \xrightarrow{\div 2} 9$$

De plus, selon une analyse de type scalaire (verticale) 6 est 3 fois moins que 18, tout comme 3 l'est à 9. Les deux types d'analyse orientent vers le raisonnement multiplicatif.

Une procédure additive correcte, mais qui relève d'un raisonnement multiplicatif par le contrôle du nombre d'éléments à itérer est également possible. L'analyse verticale permet une addition répétée (de trois termes) pour chacun des ingrédients de la recette de base et, ainsi, un contrôle sur la justesse de la réponse.

$6 + 6 + 6 = 18$ et $3 + 3 + 3 = 9$

$$\begin{tikzcd} 6 \arrow[d, bend right, "\times 3"'] & 3 \arrow[d, bend left, "\times 3"] \\ 18 & 9 \end{tikzcd}$$

Un raisonnement additif erroné serait de type:

$6 - 3 = 3$

$18 - 3 = 15$ (réponse erronée)

$6 + 12 = 18$

$3 + 12 = 15$ (réponse erronée)

$$\begin{tikzcd} 6 \arrow[r, "-3"] \arrow[d, bend right, "+12"'] & 3 \arrow[d, bend left, "+12"] \\ 18 \arrow[r, "-3"] & 15 \end{tikzcd}$$

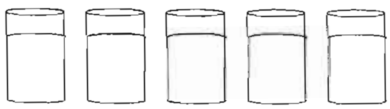
<u>Problème 3</u> (mauvaise réponse)

Valeurs des variables : Facteur de type dessin, Rapports entiers, 4 données.

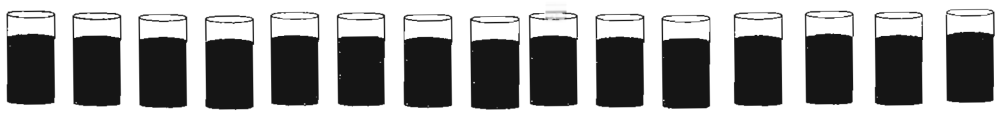
> *Trouve le bon nombre de verres de jus d'orange pour le mélange II afin que ce dernier goûte la même chose que le mélange I.*

Mélange I

Verres de jus d'ananas

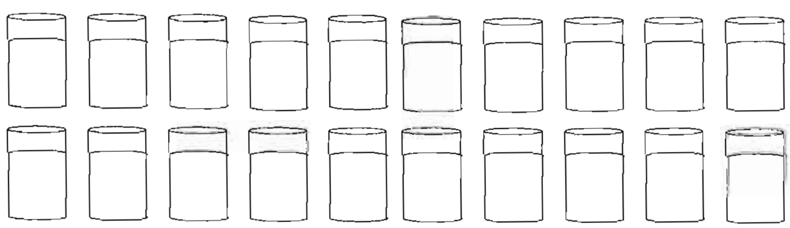


Verres de jus d'orange



Mélange II

Verres de jus d'ananas



Verres de jus d'orange

Réponse de l'élève : 30 verres de jus d'orange

Le dessin, dans ce problème, pourrait favoriser la compréhension du contexte et donc du rapport entre les quantités impliquées. Cependant, le fait de dénombrer des verres de jus peut également avoir un effet contraire et favoriser l'émergence de procédures additives, davantage associées au dénombrement que ne le sont les procédures multiplicatives. Deux grandes procédures de résolution sont possibles :

- Raisonnement additif (vertical ou horizontal) fautif qui conduit à la réponse 30 verres de jus d'orange.

$$\begin{tikzcd} 5 \arrow[r, "+10"] \arrow[d, "+15"'] & 15 \arrow[d, "+15"] \\ 20 \arrow[r, "+10"] & 30 \end{tikzcd}$$

- Raisonnement multiplicatif correct, selon une analyse verticale ou horizontale, qui permet de corriger la réponse.

$$\begin{tikzcd} 5 \arrow[r, "\times 3"] \arrow[d, "\times 4"'] & 15 \arrow[d, "\times 4"] \\ 20 \arrow[r, "\times 3"] & 60 \end{tikzcd}$$

<u>Problème 4</u> (bonne réponse)

Valeur des variables : Facteur de type texte, Rapport interne n, Rapport externe a/b, 4 données.

Dans une librairie, 3 stylos coûtent 5 \$. Jean trouve que c'est une aubaine et décide d'en acheter 6, mais il n'a que 10 \$ dans sa poche. Est-ce qu'il a assez d'argent pour acheter les 6 stylos? Justifie ta réponse.

Réponse de l'élève : Oui, car il en a 2 fois plus.

Dans le cas d'une procédure qui s'appuie sur un raisonnement additif, l'élève peut considérer que la différence entre 5 et 3 est 2 et additionner 2 en effectuant une analyse horizontale additive fautive et considérer que la réponse, 8 (6 + 2), est juste. En plus, l'élève peut obtenir la mauvaise réponse 8 en effectuant une analyse verticale additive erronée (3 + 3 = 6 et 5 + 3 = 8).

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, "+2"] \arrow[d, "+3"'] & 5 \arrow[d, "+3"] \\ 6 \arrow[r, "+2"] & 8 \end{tikzcd}$$

Dans le cas d'une procédure qui s'appuie sur un raisonnement multiplicatif, l'élève peut considérer que si 6 est le double de 3, alors 10 (la bonne réponse) est le double de 5.

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, "\times 5/3"] \arrow[d, bend right, "\times 2"'] & 5 \arrow[d, bend left, "\times 2"] \\ 6 \arrow[r, "\times 5/3"] & 10 \end{tikzcd}$$

Ici, nous constatons que le rapport interne (×2) de proportionnalité est plus aisé à dégager que le rapport externe (×5/3), et ce, pour deux raisons:

a) Il est entier et favorise ainsi la mise en relation des données. Lorsqu'un des deux calculs (relationnel et numérique) est relativement familier pour les élèves, l'articulation entre le calcul numérique et le calcul relationnel est favorisée et la résolution est plus assurée.

b) Dans le cas des problèmes à 2 couples (4 données), les élèves se penchent plus aisément, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, sur le rapport interne (l'opérateur scalaire) plutôt que sur le rapport externe (l'opérateur fonction), parce que ce dernier donne lieu à une analyse dimensionnelle ($/stylo) plus complexe à manier et à articuler au calcul numérique (Vergnaud, 1981). Autrement dit, l'opérateur scalaire permet de relier les quantités homogènes d'un point de vue strictement numérique sans traiter les dimensions qui y sont associées. Cela facilite évidemment la résolution.

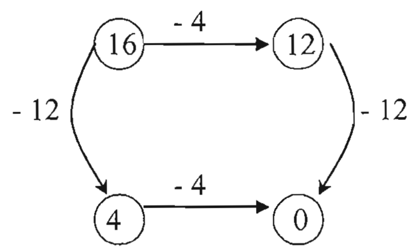
<u>Problème 5</u> (mauvaise réponse)

Valeur des variables : Facteur de type tableau, Rapport interne n, Rapport externe a/b, 4 données.

Dans une épicerie, le prix des oranges est affiché dans un tableau. Mais le commis n'a rien inscrit pour le prix de 4 oranges. Complète le tableau.

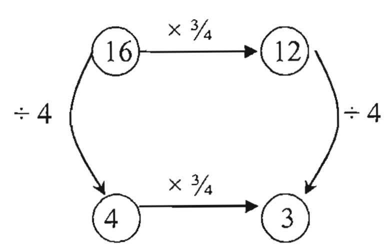
Oranges	*Prix*
16	*12 $*
4	*?* *Réponse de l'élève : 0 $*

Voici les analyses verticale et horizontale qui s'appuient sur un raisonnement additif erroné.



Dans ce problème, une procédure additive conduit à une réponse farfelue, soit qu'il en coûte 0 $, c'est-à-dire, *rien* pour l'achat de 4 oranges. Le fait qu'on puisse se procurer 4 oranges gratuitement peut susciter le doute quant à l'adéquation de la réponse. Il est possible que chez certains élèves, l'étude de la solution ici présentée soit une occasion de rejeter le modèle additif au profit de l'élaboration d'un modèle multiplicatif.

Les analyses à la fois verticale et horizontale qui s'appuient sur un raisonnement correct s'expriment dans le schéma suivant :

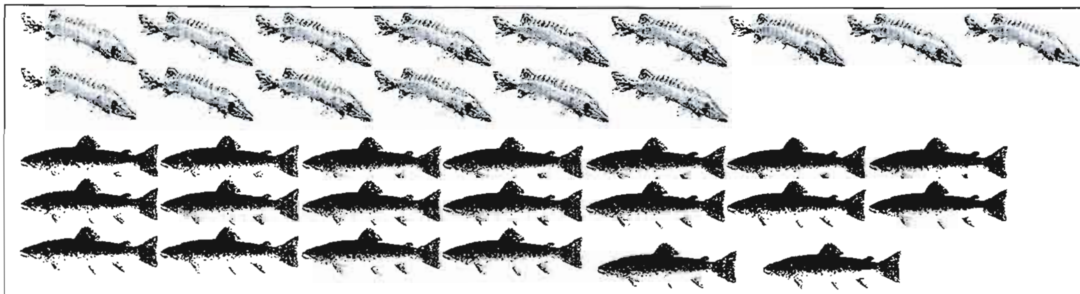


Les élèves auront tendance à privilégier l'opérateur scalaire parce qu'il est entier.

<u>Problème 6</u> (mauvaise réponse)

Valeurs des variables : Facteur de type dessin, Rapport interne n, Rapport externe a/b, 4 données.

> *Le dessin montre le rapport entre le nombre de brochets et de truites dans une région du Québec. Pour chaque pêche de 3 brochets, combien de truites peut-on s'attendre à pêcher?*



Réponse de l'élève : 8 truites

Le contexte de ce problème ne fait pas nécessairement appel à un modèle proportionnel. Cependant, la question « combien de truites peut-on s'attendre à pêcher? » reste ouverte sur un rapport possible entre truites et brochets lors d'une partie de pêche.

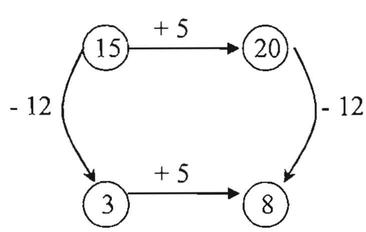
Des procédures additives inadéquates pourraient mettre en jeu des calculs suivants :

$15 + 5 = 20$

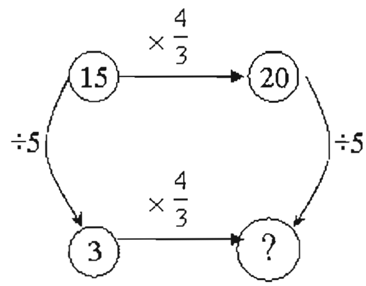
$3 + 5 = 8$

$20 - 12 = 8$

$15 - 12 = 3$



Il est également possible que l'élève procède de manière additive dans une analyse verticale (scalaire) sans interroger l'opérateur qui relie les données de natures différentes (fonction). Dans ce problème, la proportionnalité sera conservée par l'application de l'opérateur scalaire non dimensionné (20 truites ÷ 5 = 4 truites) ou encore en multipliant 3 brochets par l'opérateur fonction $\times \frac{4}{3}$ truites/brochet pour obtenir le résultat recherché, soit 4 truites.



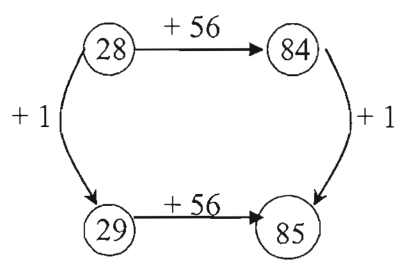
<u>Problème 7</u> (mauvaise réponse)

Valeur des variables : Facteur de type texte, Rapport interne a/b, Rapport externe n, 4 données.

Jeannette a fait 28 heures de gardiennage et a gagné 84 $. Si elle avait travaillé 29 heures, combien aurait-elle gagné?

Réponse de l'élève : 85 $

Encore une fois, le choix des nombres invite les élèves à recourir à une procédure additive erronée (28 + 1 = 29 et 84 + 1 = 85). De même 28 + 56 = 84 et 29 + 56 = 85.



Il est probable qu'une procédure multiplicative s'appuiera sur l'opérateur de type fonction puisqu'il est entier (× 3 $/heure), alors que l'opérateur scalaire est fractionnaire (×29/28). De plus, le rapport dimensionné (l'opérateur fonction) dollars/heure est sans doute familier aux élèves puisqu'il correspond au taux horaire sur lequel se calcule un salaire.

28 $ × 3 $/heure = 84 $

29 $ × 3 $/heure = 87 $

$$\begin{tikzcd} 28 \arrow[r, "\times 3"] \arrow[d, bend right, "\times \frac{29}{28}"'] & 84 \arrow[d, bend left, "\times \frac{29}{28}"] \\ 29 \arrow[r, "\times 3"] & 87 \end{tikzcd}$$

En plus, le produit en croix et la règle de trois pourraient être des stratégies de résolution.

$$\frac{28}{29} = \frac{84}{?}$$

$$? = \frac{29 \times 84}{28}$$

De tels problèmes sont propices à l'emploi de la technique de la règle de trois ou encore du produit en croix qui lui est parent. Ces techniques sont efficaces et très utiles dans des cas comme celui-ci, où le rapport fractionnaire est difficile à dégager sur le plan numérique et complexifie le calcul. Si un de nos sujets emploie une telle technique dans le cas spécifique de ce problème, nous pourrons supposer que l'élève dispose d'un répertoire relativement vaste de méthodes pour contrôler les situations de proportionnalité. Par ailleurs, un élève qui n'emploierait que le produit en croix ou la règle de trois pour tous les problèmes, c'est-à-dire tant dans les problèmes dont les rapports sont entiers que dans les problèmes où les rapports sont fractionnaires, ne manifesterait pas autant de souplesse dans l'application d'un procédé de calcul adapté aux caractéristiques numériques du problème que l'élève précédent.

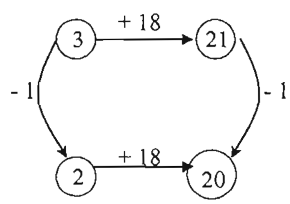
<u>Problème 8</u> (bonne réponse)

Valeurs des variables : Facteur de type tableau, Rapport interne a/b, Rapport externe n, 4 données.

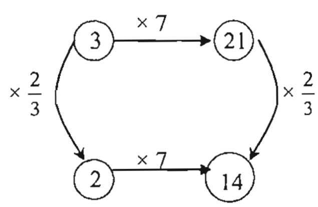
Inscris le salaire qui convient dans le tableau suivant.

Heures	*Salaire*
3	*21 $*
2	*?* *Réponse de l'élève : 14 $*

La réponse fournie pour ce problème est juste. Les analyses de types fonction et scalaire (respectivement horizontale et verticale) qui s'appuient sur un raisonnement additif erroné s'expriment dans le schéma suivant :



Une procédure multiplicative consiste soit à appliquer l'opérateur fonction ×7 $/heure ou à appliquer l'opérateur scalaire : ×2/3.



Une autre possibilité menant à la réponse juste implique le retour à l'unité (le taux horaire) et la multiplication de ce taux par le nombre d'heures de manière à obtenir le nombre recherché, soit le salaire pour deux heures. Dans le cas de ce problème, il est probable que ce raisonnement ait lieu puisque les données numériques s'y prêtent. Nous pouvons effectivement assez bien identifier 21 et 14 comme deux multiples de 7. Le nombre 7 correspond alors au taux horaire.

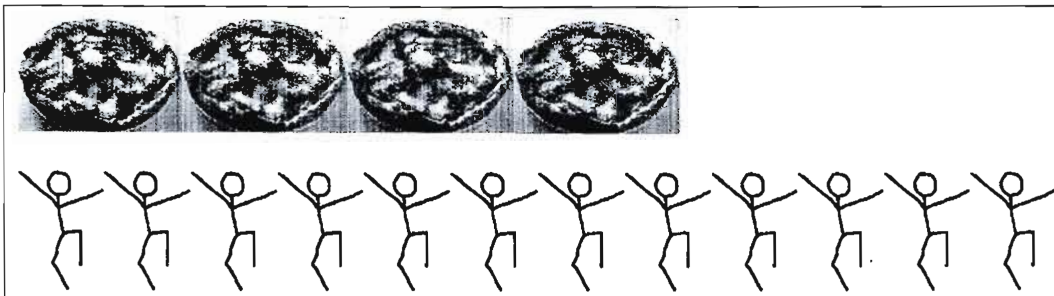
21 $ ÷ 3 heures = 7 $/heure

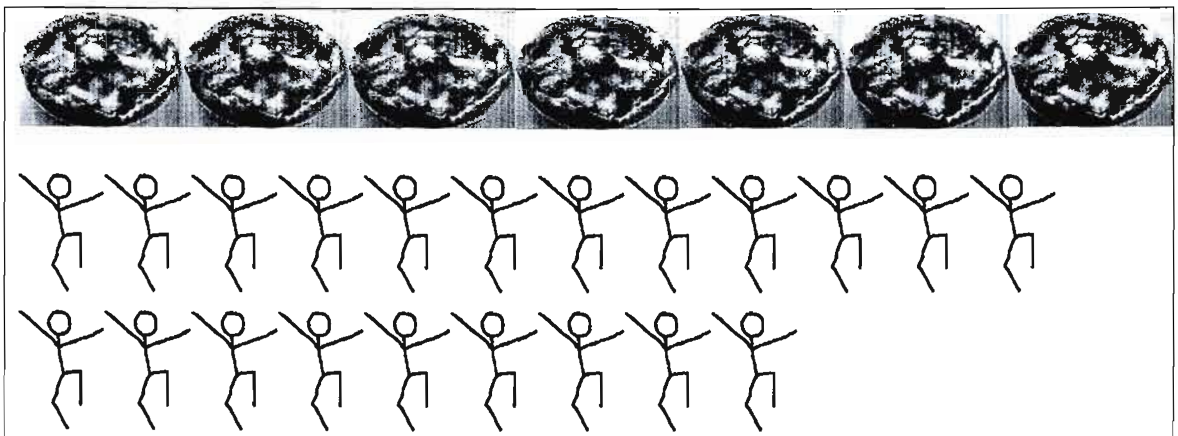
7 $/heure × 2 heures = 14 $

Problème 9 (mauvaise réponse)

Valeurs des variables : Facteur de type dessin, Rapport interne a/b, Rapport externe n, 6 données.

Voici trois affiches de publicité d'une pizzeria qui présentent le nombre de pizzas pour 3 groupes de clients. Chaque client reçoit la même quantité de pizza. Complète la troisième affiche.





Réponse de l'élève : 13 personnes

Des procédures additives erronées pourraient reposer sur l'une des fausses relations suivantes :

$$\begin{tikzcd}
4 \arrow[r, "+8"] \arrow[d, "+3"'] \arrow[dd, bend right=60, "+1"'] & 12 \arrow[d, "+9"] \arrow[dd, bend left=60, "+1"] \\
7 \arrow[r, "+14"] \arrow[d, "-2"'] & 21 \arrow[d, "-8"] \\
5 \arrow[r, "+8"] & 13
\end{tikzcd}$$

Ici, il est probable que l'élève cherche à établir un modèle additif fautif pour résoudre ce problème. La disposition des nombres pourrait l'aider à construire un tel modèle par le biais d'une analyse verticale, élaborée comme suit :

4 + **1** = 5

12 + **1** = 13 (mauvaise réponse)

Cependant, cette régularité qui mène à la mauvaise réponse est impossible à justifier par les autres analyses verticales.

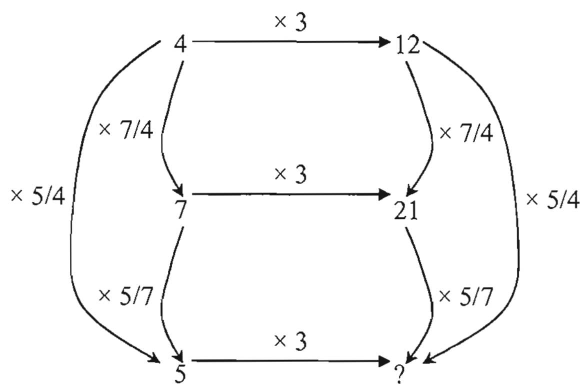
Si l'élève procède par des analyses horizontales additives, il ne sera pas en mesure d'établir une régularité pour justifier la mauvaise réponse de l'élève fictif. Il pourrait procéder comme suit :

4 + **8** = 12 et donc

5 + **8** = 13.

Mais cette régularité ne tient pas compte des données du 2^{e} couple (7 + 14 = 21). S'il en tient compte, il peut douter de la validité de son analyse horizontale et établir un nouveau raisonnement.

Des procédures multiplicatives correctes pourraient engager soit l'application de l'opérateur fonction (×3 personnes/pizza) à 5, soit l'application de l'opérateur scalaire (×5/7) à 21, pour calculer le nombre de personnes recherché. L'application de l'opérateur scalaire ×7/4 ne mène pas à la réponse recherchée, mais elle montre le rapport proportionnel entre les 4 premières données. Nous pouvons aussi passer de 4 pizzas à 5 pizzas par l'opérateur scalaire ×5/4 et l'appliquer à 12 personnes pour obtenir la réponse recherchée, soit 15 personnes. Il est à noter que, dans ce problème, nous n'avons qu'un seul rapport externe (×3 personnes/pizza), trois rapports internes (×7/4, ×5/7 et ×5/4) et deux grandeurs (pizzas et personnes).



Il y a également une possibilité de recourir à des techniques de produit en croix ou encore de retour à l'unité. Pour le retour à l'unité, la procédure qui consisterait à associer 4 pizzas pour 12 personnes ou encore 7 pizzas pour 21 personnes renvoie à l'association d'une pizza pour 3 personnes. Les données numériques favorisent cette réduction. La relation multiplicative qui permet de passer de 4 à 12 est 3 (12 ÷ 4 = 3), comme l'est le passage de 7 à 21(21 ÷ 7 = 3). Les tables de multiplication permettent l'identification du rapport (×3) assez facilement. L'élève peut alors multiplier 5 pizzas par 3 personnes/pizza pour identifier 15 personnes (3 personnes/pizza × 5 pizzas = 15 personnes).

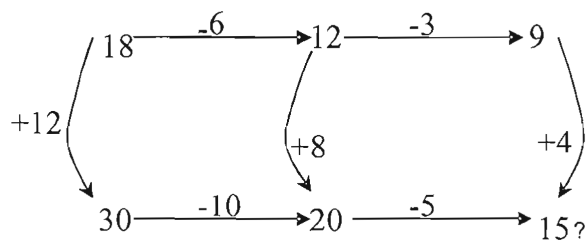
<u>Problème 10</u> (bonne réponse)

Valeur des variables : Facteur de type texte, Rapport interne a/b, Rapport externe a/b, a/b et n, 6 données.

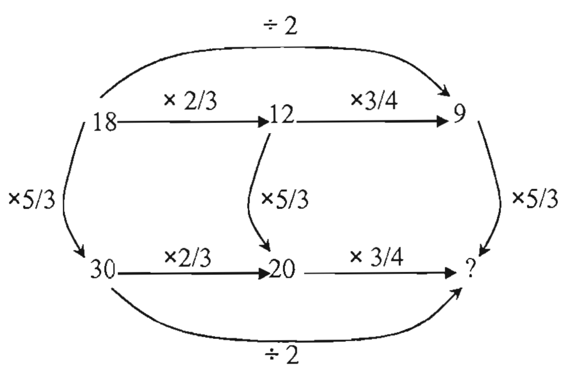
Pour une recette, nous avons 18 kilos de fruits, 12 kilos de farine et 9 kilos de sucre. Avec 30 kilos de fruits et 20 kilos de farine, combien de sucre doit-on mettre pour avoir le même résultat?

Réponse de l'élève : 15 kilos

Dans cette activité, l'analyse de type scalaire (verticale) conduit l'élève à établir une régularité par la suite 12, 8 et 4 et à arriver à une mauvaise réponse 13 (9 + 4). De l'autre côté, l'analyse de type fonction (horizontale) ne favorise pas un raisonnement additif erroné, car nous n'arrivons pas à construire une régularité (fausse) liant les données.



Notons que dans ce problème, nous avons un seul rapport interne (opérateur scalaire : 5/3), trois rapports externes (opérateurs de type fonction : 2/3, 3/4 et 2) et 3 grandeurs (fruits, farine, sucre).



Les démarches appropriées qui pourraient être employées sont les suivantes :

- Analyse de type fonction (horizontale) qui mène à la réponse recherchée.
  Diviser 9 kilos de sucre par 12 kilos de farine pour dégager la valeur de rapport externe, soit ¾ : (3 kilos de sucre / 4 kilos de farine), ce qui revient à multiplier 20 kilos de farine par ¾ et obtenir 15 kilos de sucre.

- Analyse de type fonction (horizontale) qui mène à la réponse recherchée.
  Le passage de 18 kilos de fruits à 9 kilos de sucre nécessite la division par 2 (÷ 2 kilos de fruits / 1 kilo de sucre) ou la multiplication par ½ (× 1 kilo de sucre / 2 kilos de fruits). Ce même rapport externe s'applique alors à 30 kilos de fruits pour obtenir 15 kilos de sucre.

- Analyse de type fonction (horizontale) qui montre une compréhension de la proportionnalité de la situation.
  Diviser 12 kilos de farine par 18 kilos de fruits pour dégager le rapport externe, soit 2/3 (2 kilos de farine / 3 kilos de fruits),. ce qui revient à multiplier 30 kilos de fruits par 2/3 et obtenir 20 kilos de farine.

- Analyse de type scalaire (verticale) qui montre une compréhension de la proportionnalité de la situation et mène à la bonne réponse.
  Le passage de 18 kilos de fruits à 30 kilos de fruits, tout comme le passage de 12 kilos de farine à 20 kilos de farine, nécessite l'opérateur scalaire × 5/3. Cet opérateur peut donc être appliqué à 9 kilos de sucre pour identifier la quantité de sucre recherchée, soit 15 kilos (9 × 5/3 = 15). De plus, une procédure linéaire qui fait appel à l'addition et à la multiplication peut aussi être mise en œuvre. Il s'agit par exemple de considérer que 20 est 1 fois 12 plus 2/3 de fois 12, ce qui revient à décomposer l'opérateur scalaire 5/3 en 1 + 2/3.

  $$30 = 18 + \frac{2}{3}(18)$$

  $$20 = 12 + \frac{2}{3}(12)$$

  $$? = 9 + \frac{2}{3}(9)$$

Problème 11 (mauvaise réponse)

Valeur des variables : Facteur de type tableau, Rapports a/b, 6 données.

Pour faire du punch, on mélange les trois jus tel qu'indiqué dans le tableau suivant. Complète ce tableau pour conserver le même goût.

Jus de canneberge	*Jus d'orange*	*Jus de pamplemousse*
20	*16*	*24*
15	*12*	*?* *Réponse de l'élève : 21*

Ici, la procédure additive fautive pourrait être employée par un élève qui cherche à établir une suite arithmétique par le biais d'une analyse verticale pour arriver à la mauvaise réponse 21 en raisonnant comme suit :

20 – **5** = 15

16 – **4** = 12

24 – **3** = 21

Également, l'élève peut construire une régularité additive erronée par une analyse horizontale :

20 – 16 = **4**

15 – 12 = **3**

La différence entre 3 et 4 est 1.

16 + **8** = 24

12 + **9** = 21

Et la différence entre **8** et **9** est 1.

$$\begin{tikzcd}
20 \arrow[r, "-4"] \arrow[d, bend right, "-5"'] & 16 \arrow[r, "+8"] \arrow[d, bend right, "-4"] & 24 \arrow[d, bend left, "-3"] \\
15 \arrow[r, "-3"] & 12 \arrow[r, "+9"] & 21
\end{tikzcd}$$

Notons que dans ce problème, nous avons un et un seul rapport interne (×3/4), trois rapports externes (×4/5, ×3/2 et ×6/5) et 3 grandeurs (canneberge, orange, pamplemousse).

Des solutions correctes :

- <u>Analyse de type fonction (horizontale)</u> qui mène à la réponse recherchée.
  Le passage de 16 verres de jus d'orange à 24 verres de jus de pamplemousse permet de dégager le rapport externe (×3 verres de jus de pamplemousse / 2 verres de jus d'orange). Nous pouvons donc appliquer ce même opérateur à 12 verres de jus d'orange et obtenir ainsi 18 verres de jus de pamplemousse.

- <u>Analyse de type fonction (horizontale)</u> qui mène à la réponse recherchée.
  Le passage de 20 verres de jus de canneberge à 24 verres de jus de pamplemousse permet de dégager le rapport externe (× 6 verres de jus de pamplemousse / 5 verres de jus de canneberge). Cet opérateur peut être appliqué à 15 verres de jus de canneberge pour identifier 18 verres de jus de pamplemousse. En plus, une procédure linéaire à la fois additive et multiplicative pourrait conduire à la bonne réponse :

  $$24 = 20 + \frac{1}{5}(20)$$

  $$? = 15 + \frac{1}{5}(15)$$

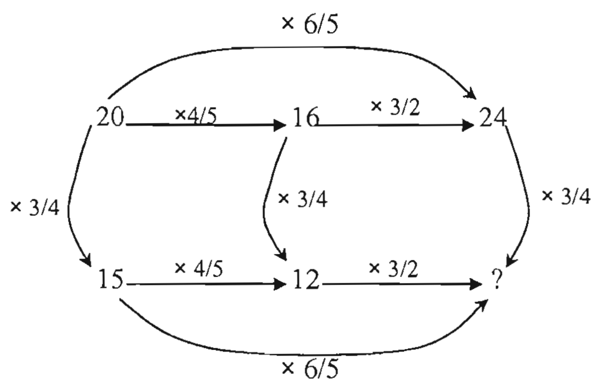
  Cette procédure revient à décomposer le rapport externe 6/5 en 1 + 1/5.

- <u>Analyse de type fonction (horizontale)</u> qui montre une compréhension de la proportionnalité de la situation.
  Diviser 16 verres de jus d'orange par 20 verres de jus de canneberge pour dégager le rapport externe 4/5 (× 4 verres de jus d'orange / 5 verres de jus de canneberge), ce qui revient à multiplier 15 verres de jus de canneberge par 4/5 et obtenir 12 verres de jus d'orange.

- <u>Analyse de type scalaire (verticale)</u> qui montre une compréhension de la proportionnalité de la situation et mène à la bonne réponse.

Diviser 15 verres de jus de canneberge par 20 verres de jus de canneberge ou bien 12 verres de jus d'orange par 16 verres de jus d'orange donne la valeur de rapport interne (× ¾).

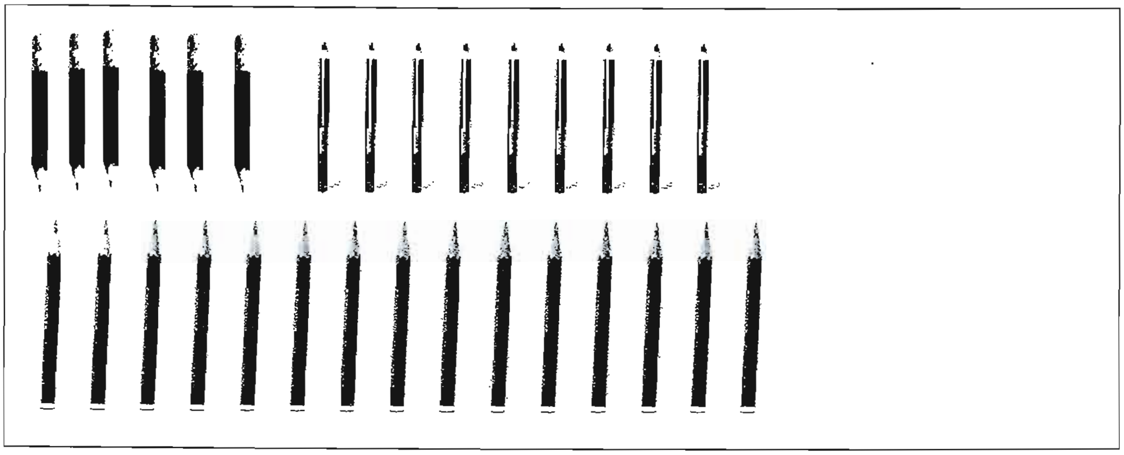
Sachant que 15 est le ¾ de 20 et 12 est le ¾ de 16, alors le nombre de verres de jus de pamplemousse à chercher devrait être le ¾ de 24, soit 18 (24 × ¾ = 18).



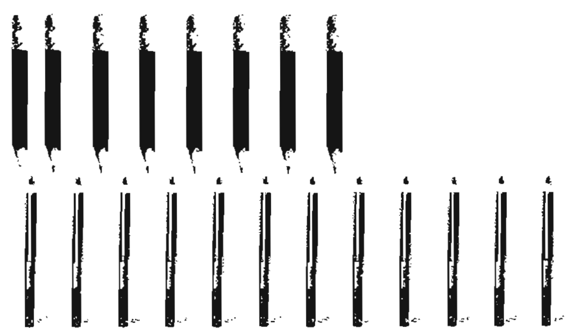
<u>Problème 12</u> (mauvaise réponse)

Valeurs des variables : Facteur de type dessin, Rapports a/b, 6 données.

Voici une boîte de crayons en début d'année.



On a commencé à préparer une autre boîte, complète avec des crayons bleus pour conserver les mêmes rapports entre les crayons de couleur.



Réponse de l'élève : L'élève dessine 18 crayons bleus.

Dans ce problème, nous avons un seul rapport interne (×4/3), trois rapports externes (×3/2, ×5/3, ×5/2) et 3 grandeurs (crayons rouges, crayons noirs, crayons bleus). La procédure additive sur laquelle repose l'erreur présentée aux élèves est celle d'ajouter 6 au 12 crayons noirs pour obtenir le nombre de crayons bleus recherché (6 + 12 = 18), ceci pour respecter la différence entre 9 crayons noirs et 15 crayons bleus (15 – 9 = 6), ou bien d'ajouter 3 au 15 crayons bleus pour obtenir le nombre de crayons bleus recherché (3 + 15 = 18), tout en respectant la différence entre 9 et 12 crayons noirs (12 – 9 = 3).

$$
\begin{tikzcd}
6 \arrow[r, "+3"] \arrow[d, bend right, "+2"'] & 9 \arrow[r, "+6"] \arrow[d, bend right, "+3"'] & 15 \arrow[d, bend left, "+3"] \\
8 \arrow[r, "+4"] & 12 \arrow[r, "+6"] & +18
\end{tikzcd}
$$

Des solutions valables :

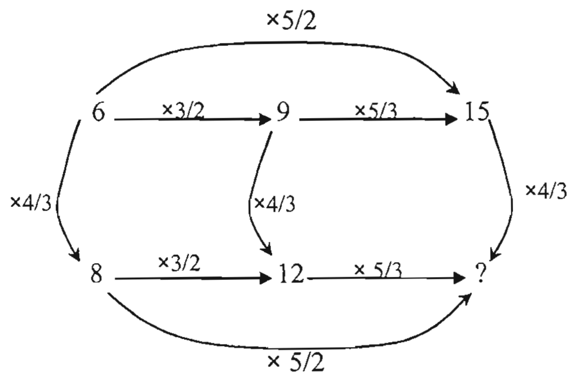
- <u>Analyse de type fonction (horizontale)</u> qui mène à la réponse recherchée.
  Diviser 15 crayons bleus par 9 crayons noirs pour calculer la valeur numérique 5/3 de l'opérateur fonction : (5 crayons bleus / 3 crayons noirs), ce qui revient à multiplier 12 crayons noirs par 5/3 pour obtenir 20 crayons bleus.

- <u>Analyse de type fonction (horizontale)</u> qui mène à la réponse recherchée.
  Nous pouvons également dégager le rapport externe (×5 crayons bleus / 2 crayons rouges) considérant le passage de 6 crayons rouges à 15 crayons bleus (15/6 = 5/2). Cet opérateur appliqué à 8 crayons rouges permet de trouver la quantité recherchée, soit 20 crayons bleus.

- <u>Analyse de type fonction (horizontale)</u> qui montre une compréhension de la proportionnalité de la situation.
  Diviser 9 crayons noirs par 6 crayons rouges dégage la valeur de l'opérateur fonction ou le rapport externe : (3 crayons noirs / 2 crayons rouges), ce qui revient à multiplier 8 crayons rouges par 3 crayons noirs / 2 crayons rouges pour obtenir 12 crayons noirs.

- <u>Analyse de type scalaire (verticale)</u> qui montre une compréhension de la proportionnalité de la situation et mène à la bonne réponse.
  Diviser 8 crayons rouges par 6 crayons rouges ou bien 12 crayons noirs par 9 crayons noirs donne la valeur de l'unique opérateur scalaire, soit ×4/3. Donc, 15 doit être multiplié par le même rapport, c'est-à-dire

$15 \times \dfrac{4}{3} = 20$ crayons bleus.

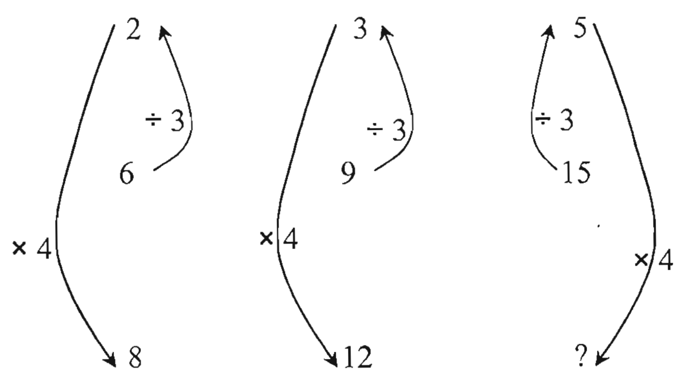


- Somme de deux fractions appartenant à la même classe d'équivalence

$$\boxed{\begin{array}{l} (a,b) \equiv (c,d) \Rightarrow (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \\ et \\ (a,b) \equiv (c,d) \equiv (a+c, b+d) \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d} \\ et \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d} \end{array}}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{6+9}{8+12} = \frac{15}{20(réponse)}$$

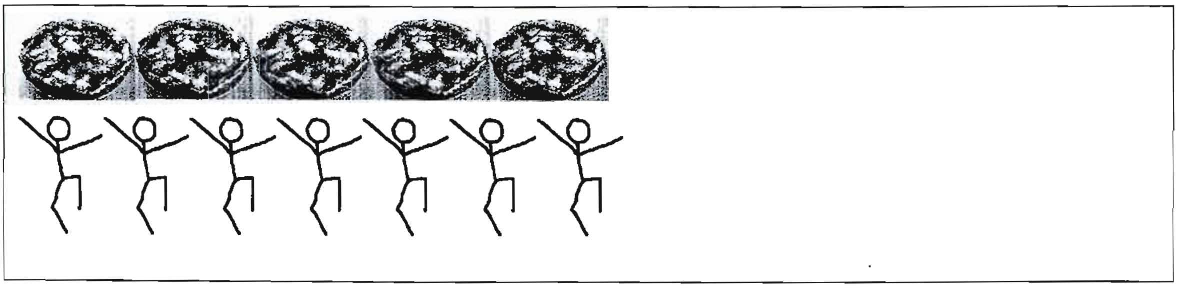
- Couple intermédiaire; décomposition des opérateurs fractionnaires en deux opérateurs entiers.

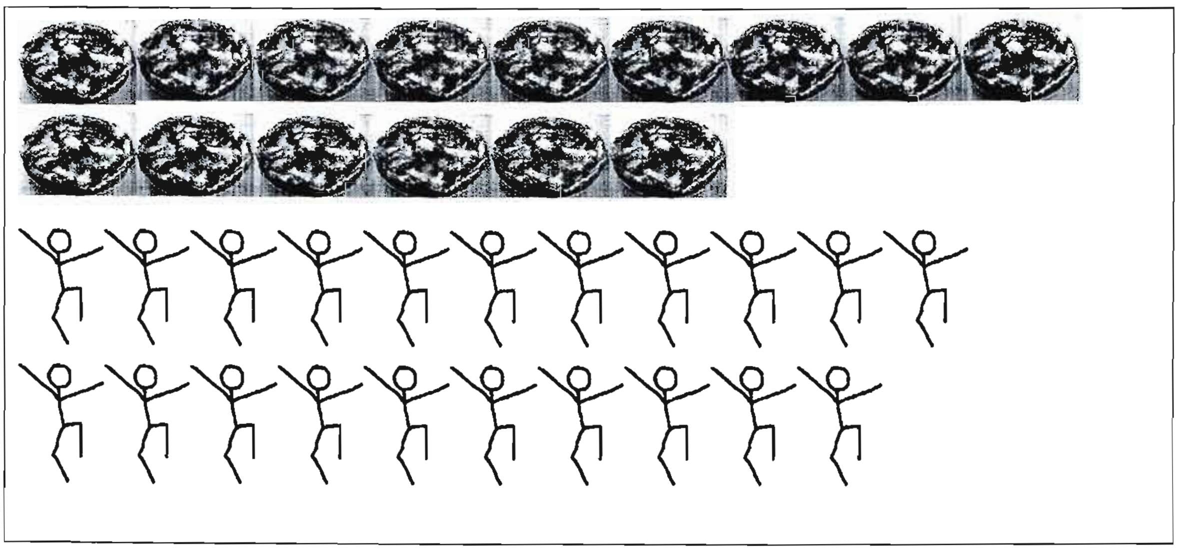


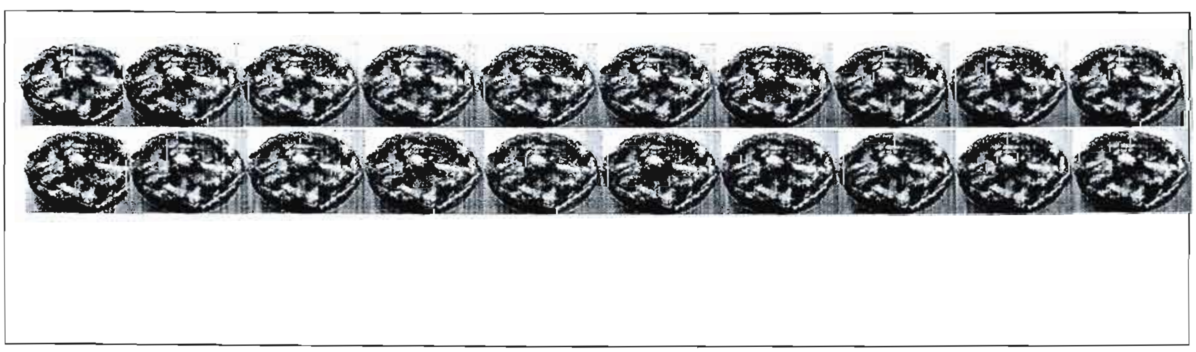
Problème 13 (sans réponse)

Valeurs des variables : Facteur de type dessin, Rapport interne a/b, n et n, Rapport externe a/b, 6 données.

Voici trois affiches de publicité d'une pizzeria qui présentent le nombre de pizzas pour 3 groupes de clients. Chaque client reçoit la même quantité de pizza. Complète la troisième affiche.

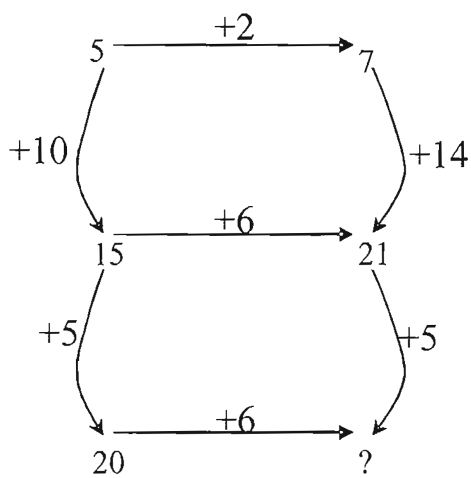






Au départ, nous avons planifié, en principe, 12 problèmes comme objet de notre expérimentation. Ce dernier problème a été intégré ultérieurement pour tester davantage l'ajout d'un troisième couple sur les stratégies de résolution. Contrairement aux problèmes 1 à 12, cette situation-problème a été donnée aux élèves sans fournir une réponse. Ici, nous avons un seul rapport externe (opérateur fonction : ÷ 5/7), trois rapports internes (opérateur scalaire : ×3, ×4, ×4/3) et 2 grandeurs (pizzas, personnes).

La figure ci-après démontre que la procédure additive horizontale qui pourrait induire les élèves en erreur est celle d'ajouter 6 au 20 pizzas pour obtenir le nombre de personnes recherché (20 + 6 = 26), ceci pour respecter la différence entre 15 pizzas et 21 personnes (21 – 5 = 6), ou bien d'ajouter 5 au 21 personnes pour obtenir le nombre de personnes recherché (21 + 5 = 26), tout en respectant la différence entre 15 et 20 pizzas (20 – 15 = 5).



Les procédures qui conduisent à la bonne réponse sont les suivantes :

- Analyse de type scalaire (verticale) qui mène à la réponse recherchée.
  Le passage de 15 pizzas à 20 pizzas dégage l'opérateur scalaire $\times 4/3$, ce qui revient à multiplier cet opérateur par 21 personnes et obtenir le résultat escompté, soit 28 personnes.

  $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$

  $21 \times \frac{4}{3} = 28$ personnes

  En plus, une procédure linéaire à la fois additive et multiplicative pourrait conduire à la bonne réponse :

  $20 = 15 + \frac{1}{3}\ (15)$

  $? = 21 + \frac{1}{3}\ (21)$

  Cette procédure revient à décomposer le rapport interne 4/3 en 1 + 1/3.

- Analyse de type scalaire (verticale) qui mène à la réponse recherchée.
  Le passage de 5 pizzas à 20 pizzas dégage l'opérateur scalaire $\times 4$, ce qui revient à multiplier cet opérateur par 7 personnes et obtenir la bonne réponse, soit 28 personnes.

  $5 \times 4 = 20$ pizzas

  $7 \times 4 = 28$ personnes

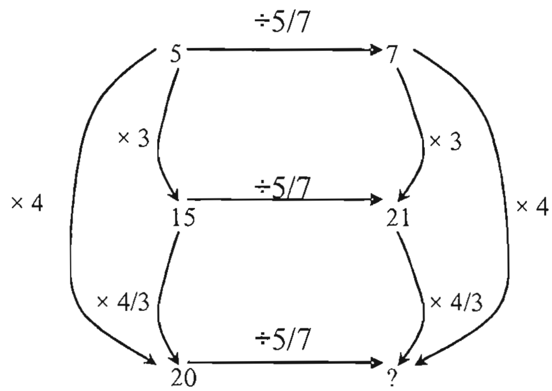
- Analyse verticale additive correcte qui mène à la réponse recherchée.
  Une autre piste de solution est le recours à la somme de deux fractions appartenant à la même classe d'équivalence pour obtenir la bonne réponse :

  $5 + 15 = 20$

  $7 + 21 = 28$

- <u>Analyse de type fonction (horizontale)</u> qui montre une compréhension de la proportionnalité de la situation et mène à la bonne réponse.

Le passage de 5 pizzas à 7 personnes, tout comme le passage de 15 pizzas à 21 personnes, nécessite l'opérateur fonction :. ÷ 5 pizzas / 7 personnes. Ce même opérateur fonction s'applique alors à 20 pizzas pour obtenir la valeur recherchée, soit 28 personnes ($20 \div \frac{5}{7} = 28$).



Notons que l'application de l'opérateur scalaire ×3 ne mène pas à la réponse recherchée, mais elle montre le rapport proportionnel entre les 4 premières données.

5 pizzas × 3 = 15 pizzas

7 personnes × 3 = 21 personnes.

3.5 Bilan

Somme toute, nous supposons, sur la base des études recensées dans le contexte théorique, que les élèves adopteront les conduites suivantes :

- si les deux rapports (interne et externe) sont des entiers, il est probable que le traitement se fera par l'opérateur interne pour éviter de traiter les dimensions associées au rapport externe (Vergnaud, 1981);

- si un des rapports est entier et l'autre fractionnaire, il est fort possible que le rapport entier prévale dans toute démarche de résolution. Autrement dit, les élèves tentent d'éviter le rapport fractionnaire (ex. : $\times 29/28$) pour traiter le rapport entier (ex. : $\times 4$);

- quand les deux rapports sont fractionnaires, nous prévoyons le recours à une variété de solutions fausses et justes, ce qui ouvre la porte pour une étude approfondie et diversifiée de la nature de raisonnement des élèves. Néanmoins, dans ce cas, la difficulté serait contournée soit :
  - → par le retour à l'unité;
  - → en créant un *couple intermédiaire* (décomposer l'opérateur fractionnaire en deux opérateurs entiers);
  - → en utilisant le produit en croix ou la règle de trois;
  - → par le recours à une procédure linéaire à la fois additive et multiplicative pour décomposer l'opérateur fractionnaire.

Dans le tableau qui suit, figure la liste des stratégies adéquates de résolution qui pourraient être employées par les élèves lors des séances de l'expérimentation.

Raisonnement multiplicatif Analyse horizontale Rapport externe: × b/a	$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\times b/a"] & b \\ c \arrow[r, "\times b/a"] & ? \end{tikzcd}$
Raisonnement multiplicatif Analyse verticale Rapport interne : × c/a	$\begin{tikzcd} a \arrow[d, bend right, "\times c/a"'] & b \arrow[d, bend left, "\times c/a"] \\ c & ? \end{tikzcd}$
Raisonnement additif correct Analyse horizontale b = a + a + a +… n fois = na ? = c + c + c +…. n fois = nc	$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\times n"] & b \\ c \arrow[r, "\times n"] & ? \end{tikzcd}$
Raisonnement additif correct Analyse verticale c = a + a + a +… n fois = na ? = b + b + b +…. n fois = nb	$\begin{tikzcd} a \arrow[d, bend right, "\times n"'] & b \arrow[d, bend left, "\times n"] \\ c & ? \end{tikzcd}$
Raisonnement additif-multiplicatif Analyse horizontale b = a + ma ? = c + mc	$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "+ma"] & b \\ c \arrow[r, "+mc"] & ? \end{tikzcd}$
Raisonnement additif-multiplicatif Analyse verticale c = a + ma ? = b + mb	$\begin{tikzcd} a \arrow[d, bend right, "+ma"'] & b \arrow[d, bend left, "+mb"] \\ c & ? \end{tikzcd}$
Raisonnement multiplicatif Couple intermédiaire	$\begin{tikzcd} a/k \arrow[dd, bend right, "\times n"'] & b/k \arrow[dd, bend right, "\times n"'] \\ a \arrow[u, bend right, "\div k"'] & b \arrow[u, bend right, "\div k"'] \\ c & ? \end{tikzcd}$

Raisonnement multiplicatif Produit en croix $?\times a = b\times c$ $\frac{?\times \cancel{a}}{\cancel{a}} = \frac{b\times c}{a}$ $? = \frac{b\times c}{a}$	$\frac{a}{b} \qquad \frac{c}{?}$
Raisonnement multiplicatif Retour à l'unité $Taux = \frac{b}{a}$ $? = \frac{b}{a}\times c$	a b c ?
Raisonnement multiplicatif Règle de trois $? = \frac{b\times c}{a}$	a b c ?

Tableau 3.1 Liste des stratégies envisagées par les élèves

3. 6 Méthode d'analyse anticipée

Notons qu'il n'y a pas eu d'enregistrement audio des séances de l'expérimentation et que l'analyse des productions verbales (prise de notes au cours de l'expérimentation par l'expérimentateur) et écrites des élèves s'appuiera sur l'analyse *a priori*. Notre analyse se fondera donc sur une transcription des échanges verbaux entre les élèves et sur leurs traces écrites. Pour chaque élève, nous tenterons de préciser, pour chacun des problèmes, les stratégies utilisées, les difficultés rencontrées et les raisonnements mis en œuvre. Autrement dit, nous visons à mieux comprendre l'activité mathématique engagée par les élèves cris dans la résolution de problèmes de proportionnalité. Rappelons que de nombreux chercheurs recourent à l'analyse de protocoles pour l'étude des stratégies engagées par un solutionneur (Brun et Conne, 1990, Gagnon, 1995, Ste-Marie, 1996).

L'analyse mettra en évidence les raisonnements d'élèves cris de 2^{e} secondaire, tentant compte des caractéristiques des problèmes. Elle devrait ainsi permettre de préciser quelle (s) variable (s), contrôlée (s) *a priori* dans l'élaboration des problèmes, influence (nt) les raisonnements mis en œuvre par ces élèves alors qu'ils sont confrontés à des situations de proportionnalité. Nous pourrons également ordonner les problèmes selon la difficulté qu'ils ont posée à l'ensemble des élèves.

3.7 Aspects déontologiques

L'autorisation de l'établissement scolaire où se déroule l'expérimentation est obtenue auprès de la direction de l'école par entente verbale. Le consentement des parents ou tuteurs des élèves concernés est acquis avant le début de notre expérimentation par une lettre bilingue. La lettre fournit les informations suivantes : les buts de la recherche; la nature des problèmes soumis aux élèves; le respect du programme scolaire et les moyens utilisés pour recueillir les données. Ils sont également informés du soin apporté pour conserver l'anonymat de leurs enfants au moment du traitement et de la diffusion des données. Les élèves participants ont travaillé en cinq équipes, mais l'une d'elles n'a répondu qu'au problème 13.

CHAPITRE IV

ANALYSE DE L'EXPÉRIMENTATION

Ce chapitre a pour but d'analyser les conduites et les raisonnements mis en œuvre par quatre équipes comptant chacune deux ou trois élèves cris, inscrits en 2^{e} secondaire alors qu'ils sont confrontés à des problèmes de proportionnalité. L'analyse est conduite de manière à dégager, pour chacun des problèmes, les stratégies utilisées par chacune des équipes alors qu'elles doivent se prononcer sur la validité d'une solution proposée et, le cas échéant, corriger cette solution. Nous examinerons ensuite comment varient les stratégies de chacune des équipes selon les valeurs des variables didactiques des problèmes.

La consigne demandait deux réponses aux élèves. D'abord, il fallait juger si la réponse d'un élève fictif était juste ou non et, ensuite, corriger cette réponse s'il y avait lieu. Les élèves ont cependant utilisé des stratégies pour résoudre les problèmes. S'ils n'arrivaient pas à une solution qui leur paraissait satisfaisante, ils élaboraient d'autres procédures afin d'obtenir la réponse de l'élève fictif. Dans le cas où les élèves reproduisaient cette même réponse, il n'a pas été facile de bien la cerner afin de savoir s'ils la jugeaient juste ou fausse. Ainsi, nous nous concentrons, dans l'analyse qui suit, non pas sur le jugement des élèves à la réponse fournie, mais plutôt sur les stratégies de résolution qu'ils ont utilisées.

4.1 Problème 1

Pour faire son mélange préféré de jus de raisin et de pommes, Jean doit mettre 6 verres de jus de raisin et 24 verres de jus de pommes. Il veut faire une très grande quantité de cette recette et met ainsi 18 verres de jus de raisin. Combien de verres de jus de pommes doit-il mettre?

Réponse de l'élève : 36 verres de jus de pommes

Type de facteur : texte

Rapport interne : n

Rapport externe : n

Données : 4

Réponse fournie : 36 (mauvaise réponse)

4.1.1. Équipe 1 : 3 élèves

Jugement de l'équipe : faux

L'équipe 1 a d'abord procédé au calcul suivant : « *24 ÷ 6 = 4* ». Ce calcul numérique évoque une mise en relation des données selon un opérateur fonction : 24 verres de jus de pommes / 6 verres de jus de raisin = 4 verres de jus de pommes / 1 verre de jus de raisin. Ce calcul numérique peut également servir à dégager l'opérateur fonction « ×4 » par lequel on peut multiplier la troisième donnée (18) pour obtenir la donnée recherchée. Les élèves ne semblent pas avoir associé ce résultat numérique à celui du rapport à l'unité. Nous émettons l'hypothèse que le calcul numérique n'a pas été entièrement contrôlé par un calcul relationnel adéquat permettant de trouver la solution attendue.

L'équipe a ensuite procédé au calcul additif suivant : « *24 + 12 = 36* ». Ce calcul permet d'identifier l'origine de la fausse réponse fournie : 36. En plus, ce calcul engage, dans une relation additive, les données des deux grandeurs différentes. Étant donné que c'est le seul problème à 4 données où les élèves de cette équipe ont utilisé un calcul additif, il est possible qu'ils aient cru que les réponses fournies étaient toutes bonnes et qu'il s'agissait de démontrer la justesse des résultats de l'élève fictif. Autrement dit, l'expérimentation chez cette équipe aurait été amorcée par un malentendu des consignes, sinon elle aurait raisonné adéquatement.

4.1.2 Équipe 2 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Les élèves ont d'abord dessiné 6 verres (pour 6 verres de jus de raisin) sans poursuivre par d'autres représentations dessinées. Ils ont ensuite inscrit le nombre 4 sur leur copie. L'expérimentateur leur a demandé de justifier cette réponse. Les élèves ont répondu que « *24 divisé par 6 = 4* ».

Cette justification verbale indique bien que les élèves ont mis en rapport le nombre de verres de jus de pommes et celui du jus de raisin sans exercer un contrôle sur le résultat de cette mise en relation. Ainsi, le nombre 4 ne semble pas correspondre, pour les élèves, au rapport à l'unité, c'est-à-dire au nombre de verres de jus de pommes pour un verre de jus de raisin. Le fait que ce nombre ne soit pas interprété en tant que rapport à l'unité ne permet pas aux élèves d'appliquer l'opérateur fonction, c'est-à-dire de multiplier par 4 le nombre de verres de jus de raisin (18) pour obtenir le résultat recherché, soit 72 verres de jus de pommes. Il est donc possible que le calcul numérique n'ait pas été contrôlé par un calcul relationnel adéquat mettant en rapport les grandeurs différentes.

4.1.3 Équipe 3 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Cette équipe a inscrit, sur sa copie, « 4 » comme réponse numérique au problème 1. La réponse « 4 » est justifiée par les élèves de cette manière : « *24 ÷ 6 = 4* ». L'analyse précédente s'applique pour l'équipe 3. Il est possible que cette équipe n'ait pas considéré le résultat de la division comme un rapport à l'unité. Nous ne disposons pas de données suffisamment précises pour étudier plus avant cette hypothèse.

4.1.4 Équipe 4 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

L'équipe 4 a inscrit « *6 ÷ 24* » sur sa copie. Sous cette écriture, les élèves ont additionné 4 et 18 par un calcul en colonne, et obtenu ainsi 22. L'écriture « *6 ÷ 24* » inscrit les données selon l'ordre dans lequel elles sont introduites dans l'énoncé de problème. Il est fort possible que les élèves, malgré cette écriture, aient effectué 24 ÷ 6 pour obtenir 4. Ce nombre correspond, comme nous l'avons vu, au rapport à l'unité (4 verres de jus de pommes / 1 verre de jus de raisin). Ce dernier, pour obtenir la solution recherchée, doit amplifier la troisième quantité (18 verres de jus de raisin). Contrairement aux équipes précédentes, cette équipe a tenté d'intégrer, dans la solution mise en œuvre, la troisième donnée afin d'identifier la quatrième. Ici, l'ajout du 4 au 18 porte à croire que la signification du 4, en terme de calcul relationnel, n'est pas adéquate.

4.1. 5 Conclusion pour le problème 1

Toutes les équipes ont fait un calcul qui met en relation les deux données de grandeurs différentes. Cependant, l'opérateur fonction entier « ×4 » n'a pas été explicitement dégagé, bien que les élèves aient effectué la division de 24 par 6 et obtenu 4. Ce nombre ne semble pas être interprété en tant qu'opérateur multiplicatif (×4) par lequel on peut mettre en rapport 6 et 24, et qui peut, par conséquent, être appliqué à 18. Il est plutôt interprété à titre de résultat de la division, et de ce fait, comme une mesure plutôt qu'un opérateur fonction.

La présentation du problème, sous forme d'énoncé écrit, fait en sorte que les deux premières données inscrites sont « *6 verres de jus de raisin et 24 verres de jus de pommes* ». Les connaissances des élèves sur les faits multiplicatifs ont sans doute favorisé la division entre ces deux nombres, 24 et 6 étant aisément reliés à 4 par la division. Ce calcul conduit à identifier le rapport à l'unité : 4 verres de jus de pommes pour 1 verre de jus de raisin. Pour les trois premières équipes, il est possible que « 4 » n'ait pas été associé à ce rapport à défaut d'un contrôle par un calcul relationnel adéquat de type « fonction ». Un tel calcul aurait pu conduire à une autre opération pour contrôler la proportionnalité de l'ensemble des données : 4 verres de jus de pommes / 1 verre de jus de raisin × 18 verres de jus de raisin = 72 verres de jus de pommes.

L'équipe 4, quant à elle, a intégré dans sa solution la troisième donnée (18), mais par le biais d'une procédure additive plutôt que multiplicative.

En somme, dans ce problème, l'interprétation « rapport » ou taux (mise en relation des données de grandeurs différentes) a été prédominante sans qu'un contrôle suffisant du calcul relationnel ait été exercé pour maintenir les rapports égaux. L'interprétation « rapport » pourrait être ici considérée comme une première appréhension de l'interprétation « opérateur fonction ».

4.2 Problème 2

Pour préparer son jus d'orange, Jean mélange des verres de jus concentré avec des verres d'eau selon les quantités présentées dans le tableau. Complète le tableau pour obtenir une plus grande quantité.

	Jus concentré	*Eau*
Le mélange habituel	*6*	*3*
Le mélange en grande quantité	*18*	*?* *Réponse de l'élève : 9 verres d'eau*

Type de facteur : tableau

Rapport interne : n

Rapport externe : n

Données : 4

Réponse fournie : 9 (bonne réponse)

4.2.1 Équipe 1 : 3 élèves

Jugement de l'équipe : correct

Cette équipe a procédé à l'analyse verticale et a dégagé l'opérateur scalaire « ×3 » qui met en relation 6 et 18. En d'autres mots, elle a aisément mis en relation les données numériques de même grandeur, soit le jus concentré. Par la suite, l'équipe a laissé les traces suivantes : « *3 × 3 = 9* », c'est-à-dire, les élèves ont procédé au calcul multiplicatif en appliquant l'opérateur scalaire « ×3 » au nombre de verres d'eau dans le mélange habituel (3) pour obtenir 9. Ici, il semble que le calcul numérique soit contrôlé par un calcul relationnel qui assure le maintien des relations proportionnelles. C'est ce que suggèrent les commentaires des élèves. En effet, invités à justifier leur accord avec la réponse fournie, les élèves ont précisé que si la quantité de jus concentré dans le second mélange était 3 fois plus grande que celle du premier mélange (18 = 3 fois 6), alors la quantité d'eau du second mélange devait être 3 fois plus grande que celle du premier mélange et qu'il fallait donc multiplier par 3 (3 fois 3 = 9).

4.2.2 Équipe 2 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Les élèves ont inscrit la bonne réponse « 9 » sur leur copie, puis l'ont effacée. Ensuite, l'équipe a inscrit « 1 » sans aucune justification. Cette réponse suggère qu'ils ont d'abord rapidement trouvé la solution au problème. Pourtant, nous n'avons aucun indice pour interpréter le rejet de cette solution et sa substitution par le nombre « 1 ». Les élèves n'ayant, en effet, formulé aucun commentaire malgré les incitations de l'expérimentateur.

4.2.3 Équipe 3 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : correct

L'analyse pour l'équipe 1 s'applique également aux stratégies mises en place par cette équipe. Son interprétation est semblable à celle de l'équipe 1 puisque les élèves ont manipulé de la même manière les données du problème. Ils ont d'abord centré leur attention sur la relation entre les quantités de jus concentré des deux mélanges, ce qui leur a ensuite permis de dégager l'opérateur scalaire « ×3 ». Enfin, ils ont appliqué cet opérateur multiplicatif à la quantité d'eau du premier mélange pour trouver la quantité d'eau recherchée « *3 × 3 = 9* ».

4.2.4 Équipe 4 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : correct

L'équipe 4 a aisément dégagé l'opérateur fonction « ×2 » reliant le jus concentré et l'eau pour le premier mélange. Les élèves ont laissé les traces suivantes sur leur copie :

« *3 × 2 = 6*
9 × 2 = 18 »

En accord avec la solution proposée, leurs commentaires se résument ainsi : si la quantité de jus est le double de celle d'eau dans le premier mélange, alors la quantité de jus dans le second mélange doit être doublée.

4.2.5 Conclusion pour le problème 2

L'équipe 1 et l'équipe 3 ont facilement dégagé l'opérateur scalaire « ×3 », sans doute en raison de leurs connaissances des faits multiplicatifs, alors que l'équipe 4 a facilement identifié l'opérateur fonction « ×2 ». Il y a lieu de croire que l'équipe 4 a également, dans un premier temps, bien identifié l'opérateur scalaire. Les données numériques du problème favorisent en effet l'identification de la relation soit scalaire, soit fonction. Les relations « ×3 » et « ×2 » font appel aux tables de multiplication déjà bien assimilées par les élèves de cet âge. L'articulation entre calcul numérique et calcul relationnel est cependant nécessaire pour que le raisonnement multiplicatif soit envisagé.

4.3 Problème 3

Trouve le bon nombre de verres de jus d'orange pour le mélange II afin que ce dernier goûte la même chose que le mélange I.

Mélange I
Verres de jus d'ananas

5 verres de jus d'ananas sont dessinés

Verres de jus d'orange
15 verres de jus d'orange sont dessinés

Mélange II

Verres de jus d'ananas

20 verres de jus d'ananas sont dessinés

Verres de jus d'orange

Réponse de l'élève :
30 verres de jus d'orange

Type de facteur : dessin
Rapport interne : n
Rapport externe : n
Données : 4
Réponse fournie : 30 (mauvaise réponse)

4.3.1 Équipe 1 : 3 élèves

Jugement de l'équipe : correct

L'équipe 1 a d'abord dénombré les verres de jus dans les deux mélanges (5, 15, 20). Suite au dénombrement, les élèves ont focalisé leur attention sur les données du premier mélange. Ils ont ainsi réussi à mettre en relation les données de grandeurs différentes selon un rapport numérique (×3). Les élèves ont inscrit sur leur copie « 5 × 3 = 15 », ce qui correspond au calcul relationnel suivant : 5 verres de jus d'ananas × 3 verres de jus d'orange / 1 verre de jus d'ananas = 15 verres de jus d'orange. Cependant, il est difficile de juger le contrôle que cette équipe a exercé sur le quotient des dimensions.

Les élèves ont appliqué l'opérateur fonction (×3) à 20 verres de jus d'ananas pour trouver la donnée manquante dans le second mélange, soit le nombre de verres de jus d'orange. Enfin, ils ont dessiné 60 verres de jus d'orange, ce qui reflète la bonne réponse et suggère un calcul relationnel pertinent. L'équipe 1 a justifié, auprès de l'expérimentateur, sa stratégie de résolution par le fait que, le nombre de verres de jus d'orange étant le triple de celui des verres de jus d'ananas dans le premier mélange, il doit également l'être dans le second mélange.

4.3.2 Équipe 2 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Après avoir dénombré les verres de jus dans les deux mélanges (5, 15, 20), cette équipe a employé un raisonnement additif erroné et l'a appliqué sur les deux données du premier mélange. Les élèves ont procédé comme suit :

Mélange I : la différence entre le nombre de verres de jus d'ananas (5) et le nombre de verres de jus d'orange (15) est **10** (15 – 5).

La différence entre le nombre de verres de jus d'ananas (20) au mélange II et le nombre de verres de jus d'orange (15) au mélange I est **5** (20 – 15). Par la suite, ils ont inscrit sur leur copie **5** + **10** = 15 en faisant l'addition par un calcul en colonne.

Selon notre interprétation, cette conduite pourrait être due au fait que l'entrée dans le problème par le dénombrement des objets des trois collections a favorisé une procédure additive. Suite au dénombrement, ils ont identifié les mesures suivantes : 5, 15 et 20. Ces mesures sont fortement liées dans une structure additive : 20 – 15 = 5. Il est possible que les données numériques aient ainsi orienté les élèves dans la recherche d'une relation additive entre les données sans que cette recherche soit associée à la situation de proportionnalité.

4.3.3 Équipe 3 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Comme les équipes 1 et 2, cette équipe a commencé par le dénombrement des verres de jus des deux mélanges. Les élèves ont par la suite procédé à un calcul additif qui les a conduits à accepter la fausse réponse proposée. Ils ont utilisé le raisonnement additif erroné (analyse horizontale fautive) suivant:

<u>Dans le mélange I :</u>

5 verres de jus d'ananas + 10 = 15 verres de jus d'orange

<u>Dans le mélange II :</u>

Ayant 20 verres de jus d'ananas, nous devons donc additionner 10 pour trouver le nombre de verres de jus d'orange. Ils ont inscrit sur leur copie « *5 + 10 = 15* » et « *20 + 10 = 30* ».

Nous faisons l'hypothèse que, selon cette équipe, la différence entre le nombre de verres de jus d'orange et le nombre de verres de jus d'ananas doit être conservée pour chacun des mélanges. Il est également possible que les élèves aient recherché le moyen par lequel on obtient la réponse fournie (30). Le fait de parvenir à ce résultat pourrait alors être considéré comme une solution au problème soumis.

4.3.4 Équipe 4 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

L'équipe 4 a dénombré les verres de jus d'orange et d'ananas dans les deux mélanges (5, 15, 20). Les élèves ont ensuite dessiné 10 verres de jus d'orange dans l'espace prévu à cette fin. L'expérimentateur leur a demandé de détailler leur démarche par écrit et comment ils ont obtenu la réponse « 10 ». Ils ont inscrit sur leur copie la phrase suivante : *« numbers have to be in order 5, 10, 15, 20 ».* L'expérimentateur leur a demandé à nouveau de justifier leur interprétation de la réponse « 10 ». À ce point, un des élèves a inscrit sur la copie « *5 + 5 + 5 + 5 = 20* » et a poursuivi verbalement :

« *5 verres de jus d'ananas*

5 + 5 = 10

5 + 5 + 5 = 15 verres de jus d'orange

5 + 5 + 5 +5 = 20 verres de jus d'ananas et la seule valeur qui manque est 10, alors la réponse est 10. »

Vraisemblablement, ces élèves ont traité ce problème comme celui d'une suite arithmétique dont l'écart est de 5 et non comme une situation de proportionnalité.

4.3.5 Conclusion pour le problème 3

Toutes les équipes ont démarré le processus de résolution par le dénombrement des verres de jus dans les deux mélanges. Cependant, l'opérateur scalaire entier « ×4 » n'a pas été exploité par toutes les équipes. Quant à l'opérateur fonction entier « ×3 verres de jus d'orange / 1 verre de jus d'ananas », nous constatons qu'il a été dégagé uniquement par l'équipe 1 et que c'est la seule équipe qui a abouti à la bonne réponse. Les élèves de cette équipe ont mis en rapport les deux grandeurs différentes (analyse horizontale) dans le premier mélange pour trouver l'opérateur fonction. Par la suite, ils ont appliqué adéquatement cet opérateur pour obtenir la donnée recherchée, soit le nombre de verres de jus d'orange pour le second mélange.

L'équipe 2 s'est mise à chercher les différences entre toutes les trois données numériques dans les deux mélanges tandis que l'équipe 3 a cherché à maintenir un écart constant entre le nombre de verres de jus d'ananas et d'orange pour chaque mélange, afin de justifier, enfin, la mauvaise réponse fournie. Les élèves de l'équipe 4 étaient, la plupart du temps, à la recherche d'une suite de nombres (progression arithmétique), ce qui a rendu la résolution semblable à un jeu de nombres.

4.4 Problème 4

Dans une librairie, 3 stylos coûtent 5 \$. Jean trouve que c'est une aubaine et décide d'en acheter 6, mais il n'a que 10 \$ dans sa poche. Est-ce qu'il a assez d'argent pour acheter les 6 stylos? Justifie ta réponse.

Réponse de l'élève : Oui, car il en a 2 fois plus.

Type de facteur : texte

Rapport interne : n

Rapport externe : a/b

Données : 4

Réponse fournie : Oui, car il en a 2 fois plus (bonne réponse)

4.4.1 Équipe 1 : 3 élèves

Jugement de l'équipe : correct

Cette équipe a approuvé, et sans aucune réserve, le raisonnement proposé par l'élève fictif. La réponse inscrite par l'équipe est « *Oui, il a assez d'argent pour les 6 stylos* ». L'expérimentateur a demandé aux élèves d'expliciter leur réponse davantage. Un des élèves a répondu : « *6 est le double de 3 et 10 est le double de 5, alors c'est la bonne réponse* ».

L'équipe a donc dégagé facilement l'opérateur scalaire « ×2 » qui fait appel à une opération arithmétique accessible aux élèves de cet âge. La nature de l'opérateur scalaire de ce problème a ainsi facilité sa résolution et incité les élèves à effectuer un calcul relationnel adéquat.

4.4.2 Équipe 2 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : correct

Le raisonnement de cette équipe est semblable à celui de l'équipe précédente. Le choix de nombres (3, 5, 6 et 10) a orienté les élèves vers un calcul relationnel entre les données de même grandeur, étant donné que $6 = 2 \times 3$ et $10 = 2 \times 5$. Ils ont écrit

« 10 $ » comme réponse sur leur copie. Leur échange verbal se résume au raisonnement suivant : si le nombre de stylos est doublé, alors il faut doubler le prix.

4.4.3 Équipe 3 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Cette équipe a laissé les traces suivantes sur sa copie : « *5 × 6 = 35* ». Au-delà de l'erreur de calcul (5 × 6 = 30 et non 35), il est intéressant de noter que les élèves ont identifié 5 $ comme le prix unitaire d'un stylo. Par la suite, ils ont calculé le prix de 6 stylos en multipliant 5 $/stylo par 6 stylos.

4.4.4 Équipe 4 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : correct

L'équipe 4 est arrivée à justifier adéquatement la réponse proposée par l'élève fictif. Son raisonnement est proche de celui de l'équipe 1 et de l'équipe 2. Les élèves ont bien compris le contexte du problème. L'expérimentateur leur a demandé de donner la solution par écrit. Les élèves ont alors écrit ce qui suit, ce qui témoigne d'une bonne compréhension des relations entre les données du problème.

« *he got 10$*
he want 6 pens
but for three is 5$
and for six is 10$
and he have enough »

4.4.5 Conclusion pour le problème 4

L'analyse verticale a été dominante puisque l'opérateur scalaire « ×2 » était facilement perçu et a conduit trois des quatre équipes à la résolution du problème. L'opérateur fonction « ×5 $/3 stylos » n'a été exploité par aucune des équipes participantes. Le fait que l'opérateur scalaire « ×2 » soit un entier, a incité les élèves à s'engager dans une analyse verticale plutôt qu'horizontale, car cette dernière implique un nombre fractionnaire dans le calcul relationnel. L'échec de l'équipe 3 relève d'un glissement du taux entre le nombre de stylos et le coût. Les élèves ont interprété ce taux comme un rapport unitaire (5 \$ / 1 stylo).

4.5 Problème 5

Dans une épicerie, le prix des oranges est affiché dans un tableau. Mais le commis n'a rien inscrit pour le prix de 4 oranges. Complète le tableau.

Oranges	*Prix*
16	*12 \$*
4	*?* *Réponse de l'élève: 0 \$*

Type de facteur : tableau

Rapport interne : n

Rapport externe : a/b

Données : 4

Réponse fournie : 0 \$ (mauvaise réponse)

4.5.1 Équipe 1 : 3 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Cette équipe a rejeté d'emblée la réponse de l'élève fictif. Elle a ensuite utilisé la calculatrice pour diviser le prix (12 \$) par le nombre d'oranges (16); ce qui revient à identifier le prix unitaire pour une orange. Ces élèves ont inscrit le résultat « 75 ¢ » comme réponse finale. Pour vérifier leur calcul, ils ont utilisé la calculatrice de nouveau et entré les données numériques comme suit : 0.75 × 16 ce qui donne 12 (prix de 16 oranges). Puis, ils ont inscrit sur leur copie « *75 ¢ × 16 = 12.00* ».

La calculatrice a affiché la réponse « 0.75 », ce qui correspond à l'opérateur fonction (0,75 \$ / 1 orange). Les élèves ont été en mesure de convertir la valeur de cet opérateur en cents mais n'ont pas interprété cette valeur en terme d'opérateur multiplicatif utile à la résolution du problème. En effet, ils ont accepté « 75 ¢ » comme étant le prix de 4 oranges. L'entrée par l'opérateur fonction aurait ici nécessité un deuxième calcul (4 oranges × 75 ¢ / 1 orange). Il est possible que le fait d'avoir trouvé un nombre ait constitué pour les élèves l'indice de la fin de la résolution.

Lorsque l'expérimentateur leur a demandé de justifier leur réponse, ils ont répondu : « *12 ÷ 16 = 75 ¢ et 16 – 12 = 4 oranges, alors 4 oranges valent 75 ¢* ». Cet argument, qui implique un calcul additif inadéquat, est fort intrigant. Il est possible qu'il ait été construit *a posteriori* pour répondre à la demande de l'expérimentateur, et valider ainsi leur solution (75 ¢ pour 4 oranges).

4.5.2 Équipe 2 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : correct

Tout comme l'équipe 1, cette équipe a rejeté la réponse de l'élève fictif. Utilisant la calculatrice, les élèves ont procédé au calcul adéquat pour identifier le prix unitaire des oranges et interpréter ce dernier comme opérateur fonction (0,75 $/1 orange). En d'autres mots, leur calcul numérique est contrôlé par un calcul relationnel qui réfère à la notion de proportionnalité. Après avoir dessiné 16 oranges sur leur copie, ils ont laissé les traces suivantes :

« *12 ÷ 16 = 0.75*

0.75 × 4 = 3 calculetor Answer »

4.5.3 Équipe 3 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : correct

Tout comme les équipes précédentes, la réponse « 0 » a été rejetée d'emblée. Les élèves ont procédé à un calcul numérique en divisant les données de la première colonne (16 ÷ 4) et ainsi identifié l'opérateur scalaire (÷4). Sur leur copie, à côté des nombres 16 et 12, ils ont inscrit « ÷4 » et la réponse « 3 » a été inscrite dans la case destinée à cette fin. L'équipe a donné à l'expérimentateur son interprétation comme suit : si on divise le nombre d'oranges dans la première rangée par 4, on obtient le nombre d'oranges dans la deuxième rangée. Donc, on fait la même chose pour le prix, c.-à-d. qu'on divise le prix 12 par 4 pour obtenir la réponse 3 $.

4.5.4 Équipe 4 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : correct

À l'image des autres équipes, la réponse « 0 » a été rejetée. Les élèves ont inscrit sur leur copie « *12$ / 4 = 3$* ». L'expérimentateur leur a demandé de clarifier leur démarche. Ils ont répondu qu'il est impossible que les 4 oranges soient gratuites, et qu'ils avaient donc opté pour 12 $ qu'ils ont divisé par 4. Cette équipe semble donc avoir opéré à partir de l'opérateur scalaire pour réussir ce problème.

4.5.5 Conclusion pour le problème 5

Toutes les équipes ont rejeté sans hésitation la réponse « 0 » dès le départ. Selon tous les élèves, la gratuité de 4 oranges ne faisait aucun sens.

Bien que les données numériques facilitent le recours à un opérateur scalaire, le contexte semble avoir fait contrepoids pour favoriser le recours à l'opérateur fonction pour deux équipes (les équipes 1 et 2). Le contexte d'achat met en évidence un taux sans doute familier aux élèves : prix/objet. Ainsi, deux équipes ont procédé à un calcul dont le résultat correspond au prix d'une orange. Dans un des cas (l'équipe 1), ce prix a été identifié au prix recherché, soit celui des 4 oranges. Les équipes 3 et 4 ont effectué un calcul qui repose sur l'opérateur scalaire et ont bien résolu le problème. L'opérateur scalaire permettait de trouver l'inconnue par une seule opération, soit la division par un entier (÷4) à partir d'une relation multiplicative sans doute connue des élèves: $16 \div 4 = \mathbf{4}$ ou $4 \times \mathbf{4} = 16$. Le traitement de type fonction exigeait, quant à lui, deux opérations successives dont le résultat à la première est un rationnel inférieur à 1 (0,75). Il n'est pas sans intérêt de relever le fait que les deux équipes qui ont engagé un traitement de type fonction aient utilisé une calculatrice; le quotient de 12 ÷ 16 ne faisant pas partie de leur répertoire des faits multiplicatifs (tables de multiplication et de division des entiers). On voit ici comment les élèves ont contourné la difficulté du calcul numérique pour traiter le taux prix/orange.

4.6 Problème 6

Le dessin montre le rapport entre le nombre de brochets et de truites dans une région du Québec. Pour chaque pêche de 3 brochets, combien de truites peut-on s'attendre à pêcher?

Sont dessinés 15 brochets

Sont dessinées 20 truites

Sont dessinés 3 brochets

Espace de réponse pour l'élève

Réponse de l'élève : 8 truites

Type de facteur : dessin

Rapport interne : n

Rapport externe : a/b

Données : 4

Réponse fournie : 8 (mauvaise réponse)

4.6.1 Équipe 1 : 3 élèves

Jugement de l'équipe : correct

Après avoir dénombré et écrit le nombre de brochets et de truites dans les deux dessins, les élèves de cette équipe ont tenté de trouver l'opérateur scalaire (5) en cherchant le rapport entre 15 brochets dans le premier dessin et 3 brochets dans le second dessin. Sur leur copie, ils ont inscrit « *15 ÷ 3 = 5* ». On peut considérer que ce calcul numérique a été contrôlé par un calcul relationnel juste, puisqu'il a conduit à une démarche de résolution appropriée. Suite à cette analyse verticale, les élèves ont divisé les 20 truites dans le premier dessin par l'opérateur scalaire (5) afin de chercher le nombre de truites devant correspondre au second dessin. Ils ont inscrit sur leur copie « *20 ÷ 5 = 4* ». Enfin, ils ont dessiné 4 truites. Selon leur échange verbal, il y a un lien entre le nombre de brochets (15) dans le premier dessin et le nombre de brochets (3) dans le second dessin. Pour arriver à 3, il faut diviser 15 par 5, donc il faut diviser 20 truites par 5. Nous pouvons relever que leur raisonnement est multiplicatif, ce qui maintient un rapport constant entre les données de chaque nature.

4.6.2 Équipe 2 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Le jugement de cette équipe est incorrect. Avant tout, les élèves ont dénombré et indiqué les nombres respectifs de brochets et de truites dans les deux dessins. Puis, ils ont eu recours à un raisonnement additif erroné, justifié verbalement comme suit : « *Dans le premier dessin, on ajoute 5 pour obtenir 20 truites (15 + 5 = 20). Dans le second dessin, il y a 3 brochets. On ajoute 5 à 3 et cela donne 8 truites (3 + 5 = 8).* » Enfin, ils ont dessiné 8 truites.

4.6.3 Équipe 3 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : correct

La démarche de cette équipe est comparable à celle de l'équipe 1. Les élèves ont dénombré les truites et les brochets mais sans inscrire les nombres respectifs sur leur copie. Ils ont procédé verbalement comme suit : « *Il y a 15 brochets dans le premier dessin et 3 brochets dans le second dessin et 15 ÷ 5 = 3; il faut donc diviser 20 truites par 5* ». Ils ont inscrit sur leur copie « *15 ÷ 5 = 3* » et « *20 ÷ 5 = 4* ». Notons que leur analyse était verticale, ce qui a conduit à l'identification de l'opérateur scalaire qui est dans ce cas, entier.

4.6.4 Équipe 4 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

La stratégie mise en œuvre par l'équipe 4 est mixte, elle implique à la fois un modèle additif et un modèle multiplicatif. Les élèves ont d'abord identifié une relation entre le nombre de truites et celui de brochets telle qu'illustrée dans le premier dessin. Cette relation est cependant de type additif ayant identifié la différence entre ces deux nombres, soit 5 (20 – 15). Le nombre 5 semble considéré comme un résultat. Ils ont alors cherché un autre moyen d'obtenir ce résultat dans le traitement de la troisième donnée du problème, soit 3 brochets. S'appuyant sans doute sur leurs connaissances des faits multiplicatifs, ils ont dégagé l'opérateur scalaire permettant de relier 15 brochets et 3 brochets. Ils ont ainsi divisé le nombre de brochets du premier dessin (15) par le nombre de brochets du second (3) : 15 ÷ 3 = 5. Les élèves ont conclu que 5 est le nombre de truites recherché. Par la suite, ils ont dessiné 5 truites et laissé les traces suivantes sur leur copie : « *20 – 15 = 5* » et « *15 ÷ 3 = 5* ». Nous pouvons relever dans cette démarche un glissement de sens puisque 5 est d'abord, dans le calcul de la différence, une mesure (5 poissons) puis, dans celui de la division, un opérateur reliant deux mesures et, enfin, dans la réponse fournie, une autre mesure, c'est-à-dire le nombre de truites recherché.

4.6.5 Conclusion pour le problème 6

Toutes les équipes ont dénombré les brochets et les truites dans les deux dessins. Les équipes 1 et 3 sont arrivées à la bonne réponse en utilisant le même raisonnement et en employant l'opérateur scalaire dans leur démarche de résolution. L'équipe 2 a eu recours à un raisonnement additif erroné pour justifier la mauvaise réponse de l'élève fictif. En d'autres mots, cette équipe s'est engagée dans une relation additive (additionner des données de grandeurs différentes). L'équipe 4 a obtenu une réponse fausse différente de celle proposée par l'élève fictif. Cette équipe a engagé deux types de procédures; l'une additive (la différence entre deux mesures) et l'autre multiplicative (l'opérateur scalaire entier). Notons qu'aucune des équipes n'a mis en œuvre l'opérateur fonction fractionnaire (20/15 ou 4/3). L'opérateur scalaire étant un entier facilement identifiable par des connaissances élémentaires sur les faits multiplicatifs, trois des quatre équipes ont effectué un calcul permettant de le dégager. Il n'est cependant pas possible d'affirmer que l'équipe 4 a effectué un calcul relationnel adéquat, c'est-à-dire qui engage la reconnaissance du nombre 5 en tant qu'opérateur scalaire.

4.7 Problème 7

Jeannette a fait 28 heures de gardiennage et a gagné 84 $. Si elle avait travaillé 29 heures, combien aurait-elle gagné?

Réponse de l'élève : 85 $

Type de facteur : texte

Rapport interne : a/b

Rapport externe : n

Données : 4

Réponse fournie : 85 $ (mauvaise réponse)

4.7.1 Équipe 1 : 3 élèves

Jugement de l'équipe : correct

Se servant de la calculatrice, cette équipe a cherché le taux horaire pour dégager l'opérateur fonction (3 $/1 heure). Puis les élèves ont multiplié cet opérateur par 29 heures de gardiennage pour obtenir la bonne réponse 87 $. Ils ont inscrit sur leur copie : « *84 ÷ 28 = 3 $ par heure; 29 × 3 = 87* ». Enfin, les élèves ont fait l'addition en colonne « *87 + 84 = 171 $* ». Ils ont supposé qu'on cherchait le salaire de Jeannette pour le total de 28 heures et 29 heures et interprété la question ainsi : « *Si elle avait travaillé 29 heures de plus, combien aurait-elle gagné ?* ». Il faut cependant remarquer que les élèves ont effectué un calcul relationnel et un calcul numérique tout à fait adéquats pour trouver le salaire correspondant à 29 heures de travail. Nous pouvons remarquer que les élèves n'ont cependant pas utilisé les mesures dans l'écriture de leur solution. Par exemple, ils écrivent : « *84 ÷ 28 = 3 $ par heure* » et non 84 $ ÷ 28 heures = 3 $/heure.

4.7.2 Équipe 2 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : correct

Utilisant la calculatrice, les élèves de cette équipe ont trouvé le taux horaire (l'opérateur fonction) sans laisser de trace de leur démarche sur leur copie. Par la suite, ils ont laissé les traces suivantes : « *28 × 3 = 84* » et « *29 × 3 = 87* ». L'expérimentateur leur a demandé d'expliquer ce qu'ils avaient inscrit sur papier. Un des élèves de l'équipe a répondu : « *Pour chercher le taux horaire, on divise 84 par 28, ce qui donne 3 $ par heure. 28 fois 3 = 84 et 29 fois 3 = 87* ». La situation de proportionnalité est donc bien contrôlée.

4.7.3 Équipe 3 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Cette équipe a mis en relation additive fautive des données de même grandeur. Les élèves ont effectué une analyse verticale erronée pour justifier la réponse fausse (85 $) de l'élève fictif. Selon cette équipe, Jeannette a travaillé une heure de plus (29 – 28), elle doit donc gagner 1 $ de plus. Enfin, les élèves ont inscrit sur leur copie « *84 + 1 = 85$* » et ont accepté 85 $ comme réponse finale.

4.7.4 Équipe 4 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : correct

Les élèves de cette équipe ont utilisé la calculatrice pour calculer le taux horaire et le salaire de Jeannette pour 29 heures. Sur leur copie, ils ont inscrit : « *84 / 28 = 3$/heure* » et « *84 + 3 = 87$* ». En interprétant adéquatement l'opérateur fonction (3 $/1 heure), les élèves ont réussi, par la suite, à obtenir la réponse attendue par le biais d'un raisonnement additif correct. Selon leur entretien verbal, la deuxième fois, Jeannette a travaillé une heure de plus, alors il faut gagner 3 $ de plus (84 $ + 3 $ = 87 $). On peut donc noter la coordination entre un raisonnement multiplicatif et additif correct.

4.7.5 Conclusion pour le problème 7

Les équipes 1, 2 et 4 ont démarré leur démarche par le calcul du taux horaire. Leur raisonnement adéquat s'appuie possiblement sur le contexte relatif à un salaire, et plus précisément le taux horaire, qui leur est sans doute familier. Ils engagent ainsi spontanément une mise en relation des données qui s'appuie sur l'opérateur fonction (taux horaire), ce qui implique un raisonnement multiplicatif adéquat et mène à la bonne réponse. L'équipe 3 a utilisé un raisonnement additif erroné et c'est la seule équipe qui a obtenu la mauvaise réponse. Cette équipe a été très occupée à justifier la réponse de l'élève fictif. Il est à noter que personne n'a utilisé l'opérateur scalaire (× 29/28), car ce dernier est un nombre fractionnaire peu favorisé par les élèves et qui, dans ce contexte, est moins signifiant au regard des données du problème, que l'opérateur fonction.

4.8 Problème 8

Inscris le salaire qui convient dans le tableau suivant.

Heures	*Salaire*
3	*21 $*
2	*?* *Réponse de l'élève : 14 $*

Type de facteur : tableau

Rapport interne : a/b

Rapport externe : n

Données : 4

Réponse fournie : 14 $ (bonne réponse)

Avant d'examiner les réponses des élèves, nous pouvons noter que les informations du tableau proposé aux élèves ne sont pas inscrites correctement. En effet, la nature de la donnée « salaire » est incomplète; on devrait plutôt y inscrire « salaire en dollars » de manière à éviter de jumeler aux données numériques de cette colonne, une « unité de mesure », soit les dollars. Selon cette modification, on devrait interpréter que le nombre 21 correspond au salaire en dollars étant donné 3 heures de travail[1].

4.8.1 Équipe 1 : 3 élèves

Jugement de l'équipe : correct

Cette équipe a identifié correctement le taux horaire, soit 7 $/heure. Ce type de taux est familier aux élèves et le choix de nombres (3 et 21) a sûrement facilité l'identification de l'opérateur fonction qui correspond au taux horaire (×7 $/heure). Selon leur entretien verbal, si on gagne 7 $/heure, le salaire doit être doublé pour 2 heures, c'est-à-dire 14 $. Finalement, ils ont inscrit « *7$ par heure = 14$* » dans l'espace réservé à la réponse.

4.8.2 Équipe 2 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : correct

L'équipe 2 a raisonné de façon semblable à l'équipe précédente; les élèves ont calculé le taux horaire (7 $/heure) et ont, enfin, inscrit la solution :
« $21 \div 3 = 7$ »
« $7 \times 2 = 14$ »
Quand l'expérimentateur leur a demandé de préciser leur démarche, les élèves ont répondu : « *7 $ par heure fois 2 = 14 $.* »

---

[1] Cette remarque s'applique également au problème 5.

4.8.3 Équipe 3 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

C'est la seule équipe qui a inscrit seulement la bonne réponse « 14 » sans donner aucune explication. En plus, l'expérimentateur n'a pas été en mesure d'appréhender la nature de leur raisonnement étant donné le peu d'échange verbal entre les élèves.

4.8.4 Équipe 4 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : correct

Cette équipe a mené un raisonnement correct comme les équipes 1 et 2. Après avoir calculé le taux horaire (7 $/heure) verbalement, les élèves ont cherché le salaire correspondant à 2 heures de travail. Les traces suivantes inscrites sur leur copie justifient ce qui précède :

« *3 × 7 = 21*

2 × 7 = 14

7 dollars per hour he's right. »

Les élèves de cette équipe ont approuvé la réponse (14 $) de l'élève fictif parce que, selon eux, on doit garder le même taux horaire, que l'on travaille 3 heures ou 2 heures.

4.8.5 Conclusion pour le problème 8

Les équipes 1, 2 et 4 ont obtenu, par résolution, la réponse numérique adéquate par le biais d'une stratégie semblable. Ces trois équipes ont bien interprété le taux horaire (opérateur fonction) comme un rapport multiplicatif. Quant aux élèves de l'équipe 3, la bonne réponse était inscrite sur leur copie mais sans aucune justification. Il est à noter que dans les problèmes 7 et 8, il s'agit du même contexte. Ces problèmes ont été traités de la même manière par les élèves qui les ont résolus adéquatement, c'est-à-dire les équipes 1, 2 et 4. Finalement, remarquons que personne n'a employé l'analyse verticale pour résoudre ce problème. Ce choix semble relever autant du fait que l'opérateur scalaire (×2/3) est un nombre fractionnaire alors que l'opérateur fonction est un entier, mais également par le contexte qui donne une signification familière aux élèves de l'opérateur fonction soit un taux horaire.

4.9 Problème 9

Voici trois affiches de publicité d'une pizzeria qui présentent le nombre de pizzas pour 3 groupes de clients. Chaque client reçoit la même quantité de pizza. Complète la troisième affiche.

Sont dessinées sur une première affiche : 4 pizzas et 12 personnes

Sont dessinées sur une deuxième affiche : 7 pizzas et 21 personnes

Sont dessinées sur une troisième affiche : 5 pizzas

Réponse de l'élève : 13 personnes

Type de facteur : dessin

Rapport interne : a/b

Rapport externe : n

Données : 6

Réponse fournie : 13 (mauvaise réponse)

4.9.1 Équipe 1 : 3 élèves

Jugement de l'équipe : correct

Les élèves de cette équipe ont établi un rapport entre le nombre de personnes et le nombre de pizzas pour les deux premières affiches. Ils ont ensuite reconnu qu'il s'agissait du même rapport (×3). À côté de la première et la deuxième affiche, ils ont inscrit en colonne « $4 \times 3 = 12$ » et « $7 \times 3 = 21$ » respectivement. Par la suite, ils ont inscrit « *5 × 3 = 15 person's* » à côté de la troisième affiche. Enfin, ils ont dessiné 15 personnes. L'expérimentateur a demandé aux élèves de justifier la réponse « 15 ». Leur justification de cette réponse se résume comme suit : dans la première et la deuxième affiche, on a multiplié le nombre de pizzas par 3 pour calculer les nombres respectifs de personnes. Dans la troisième affiche, il faut multiplier le nombre de pizzas par 3 comme on l'a fait dans les deux affiches précédentes (5 × 3 = 15).

4.9.2 Équipe 2 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : correct

Pour traiter les données relatives à la première affiche (4 pizzas et 12 personnes), cette équipe a formé des sous-collections de 3 personnes, faisant ainsi quatre sous-collections équipotentes. En traçant une flèche partant de chacune des sous-collections vers une pizza, les élèves ont ainsi établi une correspondance entre une sous-collection de 3 personnes et une pizza. La même procédure a été appliquée sur la deuxième affiche (7 pizzas et 21 personnes) mais sans tracer de flèches. Ils ont donc identifié un rapport équivalent : 3 personnes pour 1 pizza.

Suite à l'établissement de ce rapport unitaire, les élèves ont procédé au calcul des rapports équivalents que nous copions plus bas. Partant du rapport *1 pizza pour 3 personnes*, ils ont établi tous les rapports égaux successifs jusqu'au rapport recherché soit *5 pizzas pour 15 personnes*. Ils ont justifié, pour chacun des rapports, la quantité de personnes par une addition itérative. L'ajout d'une pizza, pour chaque nouveau rapport, exige l'addition de 3 personnes (+3) à la plus récente somme calculée. Les données entre guillemets correspondent à ce que les élèves ont inscrit sur leur copie. Nous les insérons dans une organisation qui permet de retracer leur démarche additive.

« *3 personnes par pizza* »

1 pizza : « 3 » personnes

2 pizzas : « 6 » personnes (3 + 3)

3 pizzas : « 9 » personnes (6 + 3)

4 pizzas : « 12 » personnes (9 + 3)

5 pizzas : « 15 » personnes (12 + 3)

Les nombres « 3 », « 6 », « 9 », « 12 » et « 15 » ont été inscrits respectivement au-dessus de chaque pizza dans la troisième affiche. Enfin, ils ont inscrit « *15 Personnes* » comme réponse finale.

4.9.3 Équipe 3 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Encore une fois, l'expérimentateur a perdu la suite de leur échange verbal. La seule trace que les élèves ont laissée est la réponse adéquate sur le plan numérique et relationnel, soit *15 personnes*. Ils n'ont pas répondu à l'invitation de l'expérimentateur, de commenter leur solution.

4.9.4 Équipe 4 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : correct

L'équipe 4 a mis en place une stratégie semblable à celle de l'équipe 1. Les élèves ont inscrit sur leur copie les écritures qui suivent, témoignant ainsi que la solution a été conduite sur la base de l'opérateur fonction « ×3 ».

« $3 \times 4 = 12$

$3 \times 7 = 21$

$3 \times 5 = 15$ »

4.9.5 Conclusion pour le problème 9

Les équipes 1 et 4 ont mis en œuvre une démarche de résolution adéquate et ont obtenu ainsi la réponse attendue. Elles ont utilisé l'analyse horizontale pour chercher le rapport externe (×3) à deux reprises dans la première et la deuxième affiche. Leur raisonnement est multiplicatif et le choix de 3 couples, comme variable didactique, a soutenu la mobilisation d'un bon raisonnement. L'équipe 2 a abouti à la bonne réponse par le biais d'un raisonnement qui porte sur l'établissement de rapports égaux. Ce raisonnement est justifié par une procédure de calcul additive correcte. Cependant, les élèves de l'équipe 3 ont inscrit la réponse numérique attendue, « 15 », sans aucune justification de leur part. Leur comportement est semblable à celui adopté au problème 8.

4.10 Problème 10

Pour une recette, nous avons 18 kilos de fruits, 12 kilos de farine et 9 kilos de sucre. Avec 30 kilos de fruits et 20 kilos de farine, combien de sucre doit-on mettre pour avoir le même résultat?

Réponse de l'élève : 15 kilos

Type de facteur : texte

Rapport interne : a/b

Rapport externe : a/b, a/b, n

Données : 6

Réponse fournie : 15 kilos (bonne réponse)

4.10.1 Équipe 1 : 3 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Les élèves de cette équipe ont mis en rapport les kilos de fruits et de farine. Ils ont ainsi divisé 18 par 12, en recourant à une calculatrice, et ont obtenu le nombre décimal, 1,5. Cet opérateur est repris comme mesure dans une addition. En effet, à ce nombre, les élèves ont ajouté celui de kilos de sucre (9). La somme de cette addition est alors considérée comme le nombre de kilos de sucre recherché pour la seconde recette. Leurs calculs se résument ainsi :

« *18 ÷ 12 = 1,5*

1,5 + 9 = 10,5

La réponse est 10,5 kilos. »

On peut voir ici l'intention des élèves de s'appuyer sur les trois données de la recette initiale pour réaliser une recette semblable. Ils s'attardent donc aux relations entre les données de la recette initiale afin de les reporter à la seconde recette. Cette démarche est mixte dans la mesure où il y a un raisonnement multiplicatif (la division qui marque la « reconnaissance » d'une structure multiplicative entre les données) et un raisonnement additif.

L'expérimentateur leur a demandé de chercher si le rapport entre les quantités des deux recettes est un nombre invariable, cherchant à les engager dans une comparaison des quantités relatives aux mêmes ingrédients des deux recettes (opérateur scalaire) plutôt qu'aux relations entre les données de la recette initiale. Cette intervention n'a pas permis aux élèves d'effectuer un changement de perspective. Les élèves ont de la difficulté à faire le lien entre les deux recettes parce qu'ils n'ont pas été en mesure de dégager l'unique opérateur scalaire, étant donné que celui-ci est un nombre fractionnaire (×5/3).

4.10.2 Équipe 2 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Au départ, cette équipe s'est concentrée sur une analyse verticale additive en cherchant les différences respectives entre les quantités de chaque ingrédient des deux recettes. Ayant effectué un calcul en colonne, les élèves ont inscrit ce qui suit sur leur copie :

« *30 – 18 =* ***12***

20 – 12 = ***8***

15 – 9 = ***6*** »

Puisque les nombres **6**, **8** et **12** ne les ont pas aidés à dégager une régularité ou un rapport, ils ont changé leur stratégie de résolution en regroupant les données de chaque ingrédient et ont laissé les traces suivantes :

« *Fruits = 18, 30*

Farine = 12, 20

Sucre = 9, ***10*** »

Les élèves ont choisi « **10** » comme réponse finale. Lorsque l'expérimentateur leur a demandé de justifier leur réponse, un des élèves a répondu : « *la réponse est* ***10*** *parce que 30 – 20 = 10 et 20 – 10 = 10 the difference is always 10* ». Cette démarche suppose qu'ils ont investi une analyse horizontale (entre les données d'une même recette) pour chercher une suite numérique (progression arithmétique) qui fait le lien entre les données de la deuxième recette. Cette démarche a été mise en œuvre après avoir échoué à trouver une régularité entre les données des deux recettes.

4.10.3 Équipe 3 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Les élèves de cette équipe ont trouvé le problème difficile à analyser et ont eu peu d'échanges pertinents. L'expérimentateur a participé à l'analyse du problème en leur suggérant des comparaisons entre les données. Suite à cette analyse, ils ont classé les données de la recette de départ en un tableau :

Fruits	Farine	Sucre
18	12	9

Ils ne sont, cependant, pas arrivés à effectuer un calcul relationnel ou un calcul numérique. Le problème n'a donc pas été résolu.

4.10.4 Équipe 4 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Cette équipe a procédé à une première analyse des données en les organisant dans un tableau :

Fruits	Farine	Sucre
18	12	9
30	20	?

Les élèves ont ensuite procédé à la recherche d'une régularité entre les données par le biais d'une analyse verticale. Leur raisonnement, de type additif erroné, est inscrit sur leur copie comme suit :

« *30 – 18 =* ***12***

20 – 12 = ***8***

12 *–* ***8*** *= 4*

4 + 9 = 13 (réponse) »

Ici, nous constatons que les élèves ont cherché l'écart entre les deux quantités de chaque ingrédient. Par la suite, ils ont calculé la différence entre les deux écarts (12 et 8). Enfin, ils ont additionné cette différence à la quantité de sucre dans la première recette pour calculer (amplifier) la quantité de sucre dans la deuxième recette. Nous formulons l'hypothèse selon laquelle le jugement qualitatif des élèves les a incités à rechercher une valeur numérique supérieure à 9 parce que, selon leur analyse, la quantité de sucre dans la deuxième recette devait être plus grande que celle de la première. Ainsi, il est probable que les élèves aient été préoccupés à construire une progression constante (12, 8, **4**), ce qui les a conduits à la justification d'une mauvaise réponse (9 + 4 = 13).

4.10.5 Conclusion pour le problème 10

Aucune des équipes n'a résolu correctement le problème. Leurs calculs sont presque tous de type additif, et personne n'a réussi à mettre en œuvre un calcul relationnel qui reflète la proportionnalité. Le fait que l'opérateur scalaire et deux opérateurs de type fonction soient des nombres fractionnaires a sans doute contribué aux difficultés de résolution.

Seule l'équipe 1 a envisagé un rapport multiplicatif entre des données. Les élèves ont choisi de diviser 18 kilos de fruits par 12 kilos de farine, ce qui leur a permis de dégager le rapport externe (×2/3). Ils ont cependant complété leur résolution par un raisonnement additif. L'équipe 2 a utilisé l'analyse verticale suivie d'une analyse horizontale cherchant une régularité (dans la différence entre les données) entre les données. Quant à l'équipe 3, il est possible que la démarche ait été peu exhaustive en raison de difficultés linguistiques qui ont pu freiner la compréhension du problème. Enfin, l'équipe 4 a proposé une solution additive par le biais d'une analyse verticale additive fautive.

4.11 Problème 11

Pour faire du punch, on mélange les trois jus tel qu'indiqué dans le tableau suivant. Complète ce tableau pour conserver le même goût.

Jus de canneberge	*Jus d'orange*	*Jus de pamplemousse*
20	*16*	*24*
15	*12*	*?* *Réponse de l'élève : 21*

Type de facteur : tableau

Rapport interne : a/b

Rapport externe : a/b

Données : 6

Réponse fournie : 21 (mauvaise réponse)

4.11.1 Équipe 1 : 3 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Le raisonnement de l'équipe 1 est inadéquat. La préoccupation des élèves à valider la réponse fournie les a conduits à chercher le rapport additif entre les quantités de même grandeur pour les trois ingrédients en ayant recours à une analyse additive verticale. Sur leur copie, ils ont inscrit :

« *20 – 5 = 15*

16 – 4 = 12

24 – 3 = 21

Oui c'est réponse est bon. »

Leur échange verbal peut être résumé ainsi : la première fois, on soustrait 5, la deuxième fois, on soustrait 4, la troisième fois, on soustrait 3, et ainsi de suite. On peut déduire que la découverte d'une régularité entre les trois soustractions (-5, -4, -3) a conduit les élèves à accepter la réponse suggérée.

4.11.2 Équipe 2 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

L'interprétation de cette équipe est presque une copie conforme de celle de l'équipe précédente. Le raisonnement des élèves est centré sur des rapports additifs entre les données de même grandeur. Leur analyse verticale est justifiée par une régularité de type additif fautif entre les nombres 5, 4 et 3. Les élèves ont inscrit sur leur copie :

« *20 – 5 = 15*

16 – 4 = 12

24 – 3 = 21 »

Quand l'expérimentateur leur a demandé de justifier leur réponse, un des élèves a répondu : « *On soustrait 5, 4, 3, 2, et ainsi de suite.* »

4.11.3 Équipe 3 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Le raisonnement de l'équipe 3 ne diffère pas de ceux des équipes 1 et 2. Les élèves ont réalisé un calcul relationnel additif erroné et ont interprété les données de la même façon que les deux équipes précédentes. Ils ont inscrit « -5 », « -4 » et « -3 » au-dessus de la première, deuxième et troisième colonne respectivement. Puis, ils ont inscrit « *24 – 3 = 21* » sous la troisième colonne et ont accepté « 21 » comme réponse finale.

4.11.4 Équipe 4 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Les élèves de cette équipe ont employé une stratégie de résolution différente de celle des trois équipes précédentes. Ils ont comparé le nombre de verres de jus d'orange (16) avec le nombre de verres de jus de pamplemousse (24) dans le premier mélange et ont raisonné comme suit :

« *16 verres de jus d'orange + 8 = 24 verres de jus de pamplemousse*
24 verres de jus de pamplemousse – 8 = 16 verres de jus de pamplemousse. »
Sur leur copie, ils ont inscrit « +8 », « -8 » et « 16 » à la droite de 16, 24 et ? respectivement. Enfin, ils retiennent « 16 » comme réponse numérique.

L'expérimentateur a recueilli la rétroaction suivante quand il leur a demandé d'expliquer leurs calculs : « *Dans le premier mélange, si on ajoute 8 à 16 verres de jus d'orange, on obtient 24 verres de jus de pamplemousse, il faut alors soustraire la même quantité (c'est-à-dire 8) pour obtenir le nombre de verres de jus de pamplemousse du second mélange* ». Notons que les élèves n'ont traité aucune donnée relative au jus de canneberge. Toute leur attention était centrée sur les quantités de jus d'orange et de pamplemousse. Ainsi, ils ont établi la différence entre le jus d'orange et le jus de pamplemousse du premier mélange (8). Ensuite, ils ont récupéré cette différence pour l'appliquer au jus de pamplemousse du premier mélange et, conséquemment, obtenir la quantité de jus de pamplemousse du second mélange. Les élèves ont donc effectué un traitement additif entre les données de natures différentes (jus d'orange et de pamplemousse) et reporté ce traitement sur les données de même nature (jus de pamplemousse).

4.11.5 Conclusion pour le problème 11

Les rapports multiplicatifs sont tout à fait absents des raisonnements mis en œuvre par les équipes. Ainsi, les calculs numériques des élèves ne témoignent aucunement d'un calcul relationnel basé sur la proportionnalité. Les équipes 1, 2 et 3 ont porté toute leur attention sur la justification de la mauvaise réponse de l'élève fictif. Elles ont cherché une régularité liant les nombres 5, 4 et 3, ce qui les a conduites à un calcul numérique non pertinent. L'équipe 4 a employé un raisonnement additif erroné. Notons que personne n'a été en mesure de dégager l'opérateur scalaire unique (×25/20 ou ¾) ou même un seul des trois opérateurs de type fonction (×16/20 ou ×4/5), (×24/16 ou ×3/2) et (×24/20 ou ×6/5). Cela nous amène à la conclusion que, dans ce problème, la relation proportionnelle n'a pas été dégagée.

4.12 Problème 12

Voici une boîte de crayons en début d'année.

Sont dessinés 6 crayons rouges, 9 crayons noirs et 15 crayons bleus

On a commencé à préparer une autre boîte, complète avec des crayons bleus pour conserver les mêmes rapports entre les crayons de couleur.

Sont dessinés 8 crayons rouges et 12 crayons noirs

Réponse de l'élève : L'élève dessine 18 crayons bleus.

Type de facteur : dessin

Rapport interne : a/b

Rapport externe : a/b

Données : 6

Réponse fournie : 18 (mauvaise réponse)

4.12.1 Équipe 1 : 3 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Suite à des dénombrements, les élèves ont indiqué le nombre de crayons rouges, noirs et bleus. Par la suite, ils ont procédé à la comparaison des nombres de crayons rouges et des nombres de crayons noirs des deux boîtes. Cette comparaison les a conduits à un raisonnement additif erroné soutenu par l'identification d'une régularité entre les nombres. Selon cette équipe, nous avons 6 crayons rouges, 9 crayons noirs et 15 crayons bleus dans la première boîte. Pour chercher le nombre de crayons dans la deuxième boîte, il faut procéder comme suit :

« *6 crayons rouges (première boîte) +* ***2*** *= 8 crayons rouges (deuxième boîte)*
9 crayons noirs (première boîte) + ***3*** *= 12 crayons noirs (deuxième boîte)*
Si on ajoute ***2*** *la première fois et* ***3*** *la deuxième fois, on doit ajouter 4, la troisième fois. Alors, le nombre de crayons bleus dans la deuxième boîte doit être obtenu ainsi : 15 crayons bleus (première boîte) + 4 = 19 crayons bleus (deuxième boîte)* ». Enfin, les élèves ont dessiné 19 crayons et inscrit « *19 crayons bleus* » sur leur copie.

4.12.2 Équipe 2 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Les élèves ont dénombré les crayons dans les deux boîtes. Par la suite, ils ont procédé à un raisonnement additif fautif. Tout d'abord, ils ont comparé les crayons rouges et ensuite les crayons noirs des deux boîtes. Enfin, ils ont inscrit « *6 + 2 = 8* » et « *9 + 3 = 12* » sur leur copie. À ce stade, les élèves ont cherché un moyen de justifier la réponse de l'élève fictif. Pour ce faire, ils ont ajouté 3 à 15 (crayons bleus dans la première boîte) pour justifier la réponse fournie. Enfin, ils ont dessiné 18 crayons bleus dans l'espace destiné à cette fin et ont inscrit « *15 + 3 = 18* » sur leur copie.

4.12.3 Équipe 3 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Les élèves ont d'abord dénombré les crayons, selon leurs couleurs respectives, de chacune des boîtes et inscrit les quantités sur leur copie. Le calcul relationnel qu'ils ont établi ensuite ressemble à celui de l'équipe 1. Ils ont inscrit sur leur copie :

« *8 – 6 =* ***2***

12 – 9 = ***3***

15 – 11 = ***4*** »

Enfin, ils ont dessiné 11 crayons bleus.

Un des élèves de l'équipe a tenté d'interpréter, à l'expérimentateur, la réponse obtenue (11) en expliquant que les nombres devraient être conformes à une suite numérique (2, 3, 4, 5, ...).

4.12.4 Équipe 4 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : correct

Cette équipe a utilisé un calcul numérique juste. Le raisonnement des élèves est de type additif. Tout d'abord, ils ont focalisé leur attention sur la première boîte et remarqué que la somme du nombre de crayons rouges et noirs est égale au nombre de crayons bleus. Pour exprimer leur découverte, ils ont laissé les traces suivantes sur leur copie :

« *6 + 9 = 15*

15 = 15 »

Par la suite, ils ont appliqué le même raisonnement pour manipuler les données de la deuxième boîte en additionnant le nombre de crayons rouges et noirs afin d'identifier le nombre de crayons bleus recherché. Enfin, ils ont inscrit sur leur copie :
« *8 + 12 = 20*
20 blue pencils »

Quand l'expérimentateur leur a demandé d'expliquer leur démarche, ils ont répondu : « *Dans la première boîte, le rouge + le noir = le bleu et ça devrait être la même chose dans la deuxième boîte* ». Si, en effet, l'addition des rouges et des noirs permet de conserver des rapports égaux, il est difficile de juger de l'adéquation du calcul relationnel qui supporte ce calcul numérique. Étant à la recherche de régularités et de pistes principalement additives permettant de trouver une solution, il est possible que les élèves n'aient pas parfaitement contrôlé un raisonnement proportionnel sur le plan relationnel. Un tel calcul s'appuierait sur la somme de deux fractions appartenant à la même classe d'équivalence.

$$\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{6+9}{8+12}=\frac{15}{20}$$

4.12.5 Conclusion pour le problème 12

Toutes les équipes ont dénombré les crayons des deux boîtes. Les équipes 1, 2 et 3 ont mis en œuvre une analyse verticale additive fautive où le calcul relationnel de type multiplicatif est évité. Les équipes 1 et 3 ont eu recours à un raisonnement additif erroné pour révéler une suite numérique (progression arithmétique). L'équipe 1 a employé l'addition (6 + 2 = 8, 9 + 3 = 12, 15 + 4 = 19) pour valider sa démarche, tandis que l'équipe 3 a utilisé la soustraction (8 – 6 = 2, 12 – 9 = 3, 15 – 11 = 4). L'équipe 2 a tenté un raisonnement additif incorrect pour justifier la réponse fournie. L'équipe 4 est la seule ayant obtenu une réponse juste. Nous ne pouvons, cependant, pas affirmer que la solution de cette équipe ait découlé d'un raisonnement proportionnel adéquat. Il est à noter qu'aucune équipe n'a dégagé l'opérateur scalaire (×8/6 ou ×4/3) ou les opérateurs de type fonction (×9/6 ou ×3/2), (×15/9 ou ×5/3) et (×15/6 ou ×5/2).

4.13 Problème 13

Voici trois affiches de publicité d'une pizzeria qui présentent le nombre de pizzas pour 3 groupes de clients. Chaque client reçoit la même quantité de pizza. Complète la troisième affiche.

Sont dessinées sur une première affiche : 5 pizzas et 7 personnes

Sont dessinées sur une deuxième affiche : 15 pizzas et 21 personnes

Sont dessinées sur une troisième affiche : 20 pizzas

Type de facteur : dessin

Rapport interne : a/b, n, n

Rapport externe : a/b

Données : 6

Réponse fournie : sans réponse

4.13.1 Équipe 1 : 3 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Les élèves de cette équipe ont dénombré correctement le nombre de pizzas et celui de personnes. L'expérimentateur a eu du mal à saisir le contenu de leur échange verbal. Ils ont inscrit la réponse « 42 » après avoir dessiné 42 personnes sur leur copie sans expliquer leur démarche. Ce nombre peut être issu de la multiplication de 2 par 21, le nombre de personnes du deuxième couple de données. Les élèves ont possiblement jugé que le nombre de personnes du troisième couple devait être supérieur à celui du deuxième couple par une appréciation de l'écart entre les nombres de pizzas du deuxième et du troisième couple. Il n'est pas sans intérêt de noter que les élèves n'ont pas procédé additivement. Ne pouvant sans doute identifier la relation multiplicative qui relie ces données entre elles (15 et 20 pizzas), doubler le nombre de personnes du deuxième couple peut apparaître comme un compromis « multiplicatif » qui permet d'éviter une procédure additive erronée. Il ne semble pas que les élèves de cette équipe aient pris en compte les données du premier couple dans leur calcul relationnel.

4.13.2 Équipe 2 : 3 élèves

Jugement de l'équipe : correct

Les élèves ont établi un rapport adéquat entre le calcul numérique et le calcul relationnel. Ici, l'opérateur fonction est un nombre fractionnaire, et la procédure menant à son identification est sans doute complexe. Une suite de calculs relationnels et numériques leur a cependant permis de respecter la proportionnalité entre les données du problème et de chercher la bonne réponse.

Le raisonnement s'appuie sur la division itérative et permet de conserver un rapport constant entre les deux dimensions de ce problème. Leur démarche est informelle, mais elle reflète une réelle compréhension de la structure du problème. Utilisant la calculatrice, ils ont analysé les données de chacune des affiches en calculant le rapport entre les deux grandeurs distinctes (pizzas et personnes). Ils ont inscrit leur résultat numérique à côté de chacune des affiches : « *7 ÷ 5 = 1,4* » et « *21 ÷ 15 = 1,4* » respectivement. Dès qu'ils ont constaté que la valeur du rapport est identique pour les deux couples de données, soit « 1,4 », ils ont orienté leur raisonnement vers la recherche du même rapport (1,4) entre le nombre de personnes (l'inconnue $\boldsymbol{x}$) et le nombre de pizzas (20) dans la troisième affiche. La traduction de leur raisonnement dans une écriture plus formelle correspond à une équation avec une seule inconnue : $x / 20 = 1,4$. Ils ont donc cherché la valeur de x en raisonnant par le biais d'un échange verbal que nous résumons dans ce qui suit.

« *Si 15 pizzas sont partagées entre 21 personnes (la deuxième affiche), alors 20 pizzas (la troisième affiche) devraient être partagées par plus de 21 personnes.* » Suite à ce raisonnement qualitatif, ils ont inscrit « *20 pizzas more than 21 guys* », ce qui peut se traduire que l'inconnue x doit être plus grande que 21. En effet, « *Penser qualitativement, c'est tirer, suite à un jugement, une conclusion sur l'ensemble des données d'une situation-problème, c'est prédire.* [...] *Diriger les élèves vers un raisonnement de type qualitatif peut les amener à évaluer la justesse de leurs réponses à caractère numérique.* » (Gnass, 2000, p. 49)

Se servant de la calculatrice de nouveau, ils ont pris 22 (21+1) comme première valeur possible de x. Par la suite, ils ont effectué puis inscrit les opérations suivantes en notant par écrit leur résultat.

« *22 ÷ 20 = 1,1 (ça ne marche pas)*

23 ÷ 20 = 1,15 (ça ne marche pas)

24 ÷ 20 = 1,2 (ça ne marche pas)

25 ÷ 20 = 1,25 (ça ne marche pas)

26 ÷ 20 = 1,3 (ça ne marche pas)

27 ÷ 20 = 1,35 (ça ne marche pas)

28 ÷ 20 = ***1,4*** *(ça marche – La réponse est 28).* »

Enfin, ils ont dessiné 28 personnes.

4.13.3 Équipe 3 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

L'équipe 3 n'a que dénombré les objets de chacune des trois affiches. Les élèves n'ont mis en œuvre aucun procédé de calcul, ne sachant pas comment considérer les données, ni les mettre en relation. Nous formulons l'hypothèse selon laquelle ils ont relevé la nature multiplicative de la structure du problème, mais le fait que le rapport fonction soit un nombre fractionnaire a nui à la mise en place des calculs relationnels et numériques adéquats.

4.13.4 Équipe 4 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : faux

Les membres de l'équipe ont d'abord discuté entre eux sur les données sur un plan qualitatif. Au cours de leur échange, ils spécifient qu'on ne peut donner une pizza à chaque personne parce que le nombre de personnes dans chaque affiche est supérieur au nombre de pizzas. Enfin, ils ont proposé de donner à chaque personne 75 % d'une pizza. Pour tester leur proposition, ils ont divisé chaque pizza dans la première affiche en quatre pointes égales et ont associé 3 pointes à chaque personne. Suite à cette distribution, ils ont remarqué que si 6 personnes reçoivent 75 % d'une pizza chacune, la septième ne peut en avoir qu'une demie (5 pizzas = ¾ pizza/personne × 6 personnes + ½ pizza/personne × 1 personne). L'inégalité des parts n'a pas freiné leur démarche et ils ont appliqué la même procédure aux 20 pizzas dans la troisième affiche pour obtenir la réponse 27 (20 pizzas = ¾ pizza/personne × 26 personnes + ½ pizza/personne × 1 personne). Finalement, ils ont inscrit « *27 people* » comme réponse finale et ont dessiné 27 personnes.

Cette stratégie est tout à fait intéressante dans la mesure où les élèves ont procédé à une estimation relativement juste du rapport pizzas/personne et qu'ils ont raisonné de manière suffisamment minutieuse pour identifier les parts inégales issues de ce rapport. Il semble, cependant, que pris dans leur propre démarche, ils n'aient plus considéré le « rapport estimé » comme une hypothèse. Ils ont plutôt considéré les parts inégales qui en sont issues comme un résultat qu'ils ont repris dans un calcul numérique relativement sophistiqué pour identifier le nombre recherché. Ils ont, d'une certaine manière, cherché à conserver un « rapport » constant, c'est-à-dire une relation (bien que non multiplicative) semblable entre deux couples de données. Si ces élèves n'ont pas réussi à contrôler, sur le plan numérique, les données du problème, ils ont mis en place un calcul relationnel relativement riche.

4.13.5 Équipe 5 : 2 élèves

Jugement de l'équipe : correct

L'équipe 5 n'a participé qu'à la résolution du problème 13 lors de notre troisième séquence de travail. Cette équipe avait la bonne démarche et a obtenu la bonne réponse. Leur raisonnement est de type additif juste. Les élèves ont remarqué que la somme des nombres de pizzas de la première et deuxième affiche est égale au nombre de pizzas de la troisième affiche (5 pizzas + 15 pizzas = 20 pizzas). Cette reconnaissance les a conduits à additionner de manière comparable le nombre de personnes pour identifier le nombre de personnes recherché. À l'appui de leur raisonnement, ils ont fait l'addition et laissé les traces suivantes sur leur copie :
« *5 + 15 = 20*
7 + 21 = 28 »

Le calcul relationnel établi par ces élèves peut se résumer ainsi : si la somme de pizzas des deux premiers couples est égale au nombre de pizzas du troisième, alors la somme du nombre de personnes des deux premiers couples doit être égale au nombre de personnes du troisième. Cette mise en relation a été facilitée du fait de la nature des données du problème, mais ne confirme pas, sur le plan relationnel, un raisonnement proportionnel. On peut cependant noter que ces élèves ont fait un examen attentif de l'ensemble des données numériques du problème.

4.13.6 Conclusion pour le problème 13

C'est le seul problème soumis aux élèves dans lequel il n'y a pas de réponse d'un élève fictif. Les élèves n'avaient donc pas à se prononcer sur la validité d'un résultat. En plus, les cinq équipes ont participé au traitement de ce problème tandis que les problèmes 1 à 12 étaient circonscrits à la participation de quatre équipes. Notons que toutes les équipes ont correctement dénombré et indiqué le nombre de pizzas et de personnes comme première étape de résolution.

Par le biais d'une analyse horizontale, l'équipe 2 a calculé le nombre de personnes par pizza plutôt que le nombre de pizzas par personne, ce qui est mathématiquement tout à fait correct, mais étonnant du point de vue du contexte en jeu. Autrement dit, les élèves ont identifié un opérateur fonction qui est l'inverse de l'opérateur fonction qui convient au contexte (le nombre décimal 7/5 = 1,4 personne/pizza plutôt que 5/7 pizza/personne).

Il est possible que cet opérateur (1,4) ait été privilégié du fait que les élèves ont souvent tendance à diviser le plus grand nombre par le plus petit, et non l'inverse. Les élèves de cette équipe n'étaient pas en mesure d'appliquer directement l'inverse de l'opérateur fonction (×1,4) sur les données de la troisième affiche (20 pizzas) afin d'obtenir la réponse recherchée (20 × 1,4 = 28 personnes). Si la bonne réponse avait été fournie comme c'était le cas dans les problèmes 2, 4, 8 et 10, peut-être auraient-ils divisé 28 personnes par 20 pizzas pour justifier la bonne réponse de l'élève fictif. Ils se seraient alors rendu compte que le rapport entre les données de chaque affiche est toujours constant, soit 1,4.

La démarche suivie par l'équipe 2, caractérisée par son raisonnement qualitatif, pourrait être mise en valeur afin d'initier les élèves aux notions de base de l'analyse numérique et à l'utilisation de la calculatrice scientifique.

Voici un exemple à l'appui de cette proposition :

```
PROGRAM:TEST
:22→ X
:Lbl A
:X/20→ Y
:If Y ≠1.4
:Then
:X+1→ X
:Goto A
:Else
:Disp "LA REPONSE EST",X
:End
```

Ce programme permet de calculer le nombre de personnes recherché pour partager 20 pizzas. Il s'agit d'une représentation de la démarche itérative de cette équipe en langage de programmation. L'inconnue **X** prend, successivement, les valeurs 22, 23, 24, 25, 26, 27 et 28 où les valeurs respectives de l'inconnue **Y** sont 1.1, 1.15, 1.2, 1.25, 1.3, 1.35 et 1.4.

Notons toutefois que les équipes 1 et 3 ont eu de la difficulté à résoudre le problème. Quant à l'équipe 4, sa réponse numérique est fausse bien que sa démarche et les mises en relation lui aient permis d'approcher de la bonne réponse.

L'équipe 5 avait la bonne réponse; sa solution est basée sur la somme de deux fractions appartenant à la même classe d'équivalence, c.-à-d. $\frac{5}{7}=\frac{15}{21}=\frac{5+15}{7+21}=\frac{20}{28}$. Cependant, nous ne pouvons pas confirmer si la justesse de sa démarche découle d'une appréhension de l'aspect proportionnel du problème.

Finalement, dans la résolution de ce problème, aucun élève n'a effectué une analyse verticale pour dégager les opérateurs de type scalaire (×3), (×20/15 ou ×4/3) et (×4).

4.14 Analyse transversale

Dans cette section, nous présentons une analyse des démarches de résolution mises en œuvre par chacune des équipes à l'ensemble des problèmes. Cette analyse nous permettra d'identifier si les stratégies de résolution varient selon les caractéristiques des problèmes, ainsi que les possibles évolutions de ces stratégies. Celles-ci pourraient, en effet, varier selon les trois variables didactiques choisies (type de présentation, rapports entre les données, nombre de données) ou encore selon le contexte spécifique de chaque problème. Il s'agit donc de dresser un portrait des démarches des élèves et de spécifier, s'il y a lieu, les difficultés rencontrées par chaque équipe en fonction des caractéristiques des problèmes. Notons que notre analyse sera circonscrite aux équipes 1, 2, 3 et 4, étant donné que la cinquième équipe n'a participé qu'au problème 13.

4.14.1 Analyse des conduites de l'équipe 1

Les rapports	Type de présentation	Type de problème	Raisonnement de l'équipe	Contexte	Calcul relationnel
s : n f : n	Texte	**Problème 1** 4 données	X	Jus	Raisonnement additif
	Tableau	**Problème 2*** 4 données	√	Jus	Analyse verticale (opérateur scalaire)
	Dessin	**Problème 3** 4 données	√	Jus	Analyse horizontale (opérateur fonction)
s : n f : a/b	Texte	**Problème 4*** 4 données	√	Prix	Analyse verticale (opérateur scalaire)
	Tableau	**Problème 5** 4 données	X	Prix	Analyse horizontale (opérateur fonction)
	Dessin	**Problème 6** 4 données	√	Poissons	Analyse verticale (opérateur scalaire)
s : a/b f : n	Texte	**Problème 7** 4 données	√	Salaire	Analyse horizontale (opérateur fonction)
	Tableau	**Problème 8*** 4 données	√	Salaire	Analyse horizontale (opérateur fonction)
	Dessin 2 grandeurs	**Problème 9** 6 données	√	Pizzas	Analyse horizontale (opérateur fonction)
s : a/b f : a/b	Texte 3 grandeurs	**Problème 10*** 6 données	X	Recette	Analyse horizontale (opérateur fonction)
	Tableau 3 grandeurs	**Problème 11** 6 données	X	Recette	Analyse verticale additive erronée
	Dessin 3 grandeurs	**Problème 12** 6 données	X	Crayons	Analyse verticale additive erronée
s: a/b,n, n f : a/b	Dessin 2 grandeurs	**Problème 13** 6 données	X	Pizzas	Solution multiplicative inappropriée

Tableau 4.1 Analyse transversale – Équipe 1

Légende:

√	Bon raisonnement	X	Raisonnement erroné	*	Bonne réponse fournie par l'élève fictif

Le contexte des trois premiers problèmes (à 4 données) se rapporte à une recette de jus; tous les rapports sont des nombres entiers. Les élèves ne produisent un raisonnement additif erroné que dans le problème 1 dont la présentation est de type « texte ». Pour les problèmes 2 (présentation de type « tableau ») et 3 (présentation de type « dessin »), ces élèves ont utilisé des raisonnements multiplicatifs de manière efficace.

Les problèmes 4, 5, 7 et 8 impliquent 4 données numériques et se caractérisent par un contexte lié à l'argent soit en terme de prix (problèmes 4 et 5), soit en terme du taux horaire d'un salaire (problèmes 7 et 8). L'opérateur scalaire « ×2 » (facile à identifier) a été utilisé, par cette équipe, dans la résolution du problème 4 (au double de stylos correspond le double du prix). Dans le problème 5 (présentation de type « tableau »), l'opérateur fonction fractionnaire a été dégagé, mais il n'était pas interprété comme opérateur multiplicatif. Par contre, dans les problèmes 7 et 8, les élèves ont employé l'opérateur fonction entier en l'appliquant adéquatement à la troisième donnée. Dans ces derniers cas (c'est-à-dire, les problèmes 7 et 8), la familiarité du contexte des problèmes et le type de rapport externe semblent orienter l'activité des élèves vers la recherche de l'opérateur fonction. Cependant, au problème 7, dont la présentation est de type « texte », les élèves ont effectué une seconde opération superflue (une addition) montrant ainsi un glissement dans l'interprétation de ce qui est recherché.

Le problème 6 comporte 4 données, alors que l'opérateur scalaire est entier et l'opérateur fonction est fractionnaire. La présentation est de type « dessin ». Les élèves ont résolu le problème par une analyse verticale en se servant de l'opérateur scalaire.

Notons que dans le problème 4, dont la présentation est de type « texte », le contexte de prix a poussé les élèves à dégager l'opérateur scalaire entier. Par contre, dans le problème 5, qui porte sur le même contexte que le problème 4, la présentation de type « tableau », a invité les élèves à dégager l'opérateur fonction fractionnaire.

Les problèmes 9 et 13 comportent 6 données à 2 grandeurs (pizzas et personnes) et sont de type « dessin ». Dans le problème 9, tous les opérateurs de type scalaire sont fractionnaires mais l'opérateur fonction est un entier. Le contexte est celui d'un partage de pizzas entre différentes personnes. Les élèves de cette équipe n'ont aucune difficulté à résoudre le problème 9. Ils ont procédé par une analyse horizontale en traitant l'inverse de l'opérateur fonction « nombre de personnes pour une pizza » plutôt que de traiter, comme le contexte le suggère, la quantité de pizzas par personne. Ce traitement permet aux élèves de calculer avec l'inverse de l'opérateur fonction entier (×3 personnes/pizza) plutôt qu'avec l'opérateur fonction fractionnaire (1/3 pizza/personne). Nous constatons que les élèves ont inversé le rôle des variables dépendante et indépendante d'une fonction linéaire.

Quant au problème 13, aucun calcul relationnel n'a été pris en compte et leur solution est tout à fait numérique et inappropriée. La difficulté rencontrée par l'équipe 1 pourrait relever du fait que l'opérateur fonction, dont l'interprétation contextuelle est familière aux élèves, est un nombre fractionnaire difficile à dégager.

Les problèmes de recettes 10 (présentation de type « texte ») et 11 (présentation de type « tableau »), ainsi que le problème 12 (présentation de type « dessin »), font intervenir 6 données à trois grandeurs dont les rapports sont fractionnaires. Dans le problème 10 à trois grandeurs (fruits, farine, sucre), les élèves ont procédé par un raisonnement multiplicatif approprié pour identifier un des opérateurs de type fonction. Cependant, ce résultat est ensuite intégré dans une procédure additive erronée. Il est fort possible que ces élèves aient été conscients de la structure multiplicative du problème, mais qu'ils aient eu de la difficulté à manipuler trois grandeurs.

En ce qui a trait aux problèmes 11 et 12, les élèves ont eu recours à une analyse additive verticale. La découverte d'une *régularité* les a conduits à approuver la mauvaise réponse de l'élève fictif au problème 11 et ne les a pas permis d'utiliser un raisonnement correct au problème 12. Ni l'opérateur scalaire ni l'opérateur fonction n'est un nombre entier, ce qui a rendu la tâche plus difficile aux élèves.

4.14.2 Analyse des conduites de l'équipe 2

Les rapports	Type de présentation	Type de problème	Raisonnement de l'équipe	Contexte	Calcul relationnel
s : n f : n	Texte	**Problème 1** 4 données	X	Jus	Analyse horizontale (opérateur fonction)
	Tableau	**Problème 2*** 4 données	X	Jus	Raisonnement inadéquat
	Dessin	**Problème 3** 4 données	X	Jus	Raisonnement additif
s : n f : a/b	Texte	**Problème 4*** 4 données	√	Prix	Analyse verticale (opérateur scalaire)
	Tableau	**Problème 5** 4 données	√	Prix	Analyse horizontale (opérateur fonction)
	Dessin	**Problème 6** 4 données	X	Poissons	Raisonnement additif
s : a/b f : n	Texte	**Problème 7** 4 données	√	Salaire	Analyse horizontale (opérateur fonction)
	Tableau	**Problème 8*** 4 données	√	Salaire	Analyse horizontale (opérateur fonction)
	Dessin	**Problème 9** 6 données 2 grandeurs	√	Pizzas	Raisonnement additif itératif
s : a/b f : a/b	Texte	**Problème 10*** 6 données 3 grandeurs	X	Recette	Raisonnement additif
	Tableau	**Problème 11** 6 données 3 grandeurs	X	Recette	Analyse verticale additive erronée
	Dessin	**Problème 12** 6 données 3 grandeurs	X	Crayons	Raisonnement additif
s : a/b, n, n f : a/b	Dessin	**Problème 13** 6 données 2 grandeurs	√	Pizzas	Raisonnement multiplicatif itératif

Tableau 4.2 Analyse transversale – Équipe 2

Dans le problème 1 (type de présentation « texte »), les élèves ont calculé sur la base de l'opérateur fonction (×4), sans l'interpréter explicitement en tant que rapport à l'unité. Il est possible que le calcul relationnel inadéquat relève d'un manque de contrôle sur le rapport à l'unité.

Les conduites des élèves au problème 2 ne permettent pas d'interpréter leur démarche inappropriée.

Quant aux problèmes **3** (type de présentation « dessin », 4 données), **6** (type de présentation « dessin », 4 données), **10** (type de présentation « texte », 6 données, 3 grandeurs) et **11** (type de présentation « tableau », 6 données, 3 grandeurs), les élèves ont employé un raisonnement additif erroné fondé sur la recherche de régularités entre les données.

Les problèmes 4, 5, 7 et 8 sont à 4 données et portent sur le contexte de prix soit x \$/1 unité (problèmes 4 et 5) ou bien de salaire soit x \$ /1 heure (problèmes 7 et 8). Tous ces problèmes ont été bien réussis et, pour les problèmes 5, 7 et 8, grâce à un calcul relationnel qui s'appuie sur l'opérateur fonction. Dans le cas du problème 4, les élèves se sont appuyés sur l'analyse verticale. Dans ce dernier cas, l'opérateur scalaire est associé à la présence d'un rapport facilement identifiable « le double de » qui semble avoir amené les élèves à résoudre ce problème différemment.

Les problèmes 9 et 13 comportent 6 données à 2 grandeurs et sont de type « dessin ». Au problème 9, une analyse horizontale informelle, reposant sur un calcul additif itéré conservant un rapport constant entre les deux variables, montre la compréhension de la structure du problème. Un raisonnement, également informel, a permis aux élèves de résoudre correctement le problème 13.

Le problème 12, dont le contexte est celui de crayons et se présente sous forme de « dessin », est un problème à 6 données et à 3 grandeurs dont le rapport scalaire et tous les rapports de type fonction sont fractionnaires. Un raisonnement additif a été utilisé afin de justifier la mauvaise réponse fournie.

4.14.3 Analyse des conduites de l'équipe 3

Les rapports	Type de présentation	Type de problème	Raisonnement de l'équipe	Contexte	Calcul relationnel
s : n f : n	Texte	**Problème 1** 4 données	X	Jus	Analyse horizontale (opérateur fonction)
	Tableau	**Problème 2*** 4 données	√	Jus	Analyse verticale (opérateur scalaire)
	Dessin	**Problème 3** 4 données	X	Jus	Raisonnement additif
s : n f : a/b	Texte	**Problème 4*** 4 données	X	Prix	Raisonnement multiplicatif
	Tableau	**Problème 5** 4 données	√	Prix	Analyse verticale (opérateur scalaire)
	Dessin	**Problème 6** 4 données	√	Poissons	Analyse verticale (opérateur scalaire)
s : a/b f : n	Texte	**Problème 7** 4 données	X	Salaire	Raisonnement additif
	Tableau	**Problème 8*** 4 données	X	Salaire	Bonne réponse inscrite mais sans justification
	Dessin	**Problème 9** 6 données 2 grandeurs	X	Pizzas	Bonne réponse inscrite mais sans justification
s : a/b f : a/b	Texte	**Problème 10*** 6 données 3 grandeurs	X	Recette	Aucun raisonnement et peu de traces à analyser
	Tableau	**Problème 11** 6 données 3 grandeurs	X	Recette	Raisonnement additif
	Dessin	**Problème 12** 6 données 3 grandeurs	X	Crayons	Raisonnement additif
s : a/b, n, n f : a/b	Dessin	**Problème 13** 6 données 2 grandeurs	X	Pizzas	Aucun raisonnement et peu de traces à analyser

Tableau 4.3 Analyse transversale – Équipe 3

Dans les problèmes 1 et 2 (à 4 données), tous les rapports sont des nombres entiers. Au problème 1, l'équipe a dégagé l'opérateur fonction (×4) qui n'a pas été traité en tant qu'opérateur multiplicatif. Toutefois, au problème 2 (présentation de type « tableau »), cette équipe a identifié l'opérateur scalaire et l'a utilisé de manière adéquate.

Aux problèmes 3 (présentation de type « dessin », 4 données) et 7 (présentation de type « texte », 4 données), les élèves ont eu recours à des raisonnements additifs dans le but de justifier la mauvaise réponse de l'élève fictif. Dans le problème 3, ils ont essayé de conserver la différence numérique entre les deux variables en jeu et les élèves semblaient se centrer exclusivement sur des relations numériques. Dans le problème 7, le raisonnement additif est appliqué de manière « verticale »; le contexte familier du salaire les a amenés à relier les données autrement, mais sans réussir.

Au problème 4 (présentation de type « texte », 4 données), les élèves ont modifié des données de manière à traiter un opérateur fonction entier plutôt que fractionnaire en faisant un glissement du taux entre le nombre de stylos et le coût. Le problème 5 (présentation de type « tableau », 4 données) portant aussi sur le prix, a été résolu correctement par le biais d'une analyse verticale. Quant au problème 8, la démarche qui a conduit les élèves à l'inscription de la bonne réponse a été difficile à identifier. Les contextes de prix et de salaire ne semblent pas avoir eu, pour les élèves de cette équipe, d'impact sur la mise en relation des données.

Dans le problème 6 (présentation de type « dessin », 4 données), l'équipe a identifié l'opérateur scalaire entier et l'a bien utilisé pour arriver à la bonne réponse.

Concernant le problème 9, l'équipe n'a mis en œuvre aucun procédé de calcul. Elle n'a fait qu'inscrire la bonne réponse sans aucune justification.

Les élèves de cette équipe ont trouvé les problèmes 10 (présentation de type « texte », 6 données, 3 grandeurs), et 13 (présentation de type « dessin », 6 données, 2 grandeurs), très difficiles à analyser. Il est probable que la difficulté se rapporte au fait que la plupart des opérateurs internes et externes sont fractionnaires. Le peu de traces laissées par l'équipe ne suffit pas pour amorcer une analyse plus détaillée.

Pour les problèmes 11 et 12, l'équipe a choisi le raisonnement additif, à partir de la recherche d'une régularité numérique. En utilisant cette stratégie, elle a approuvé la mauvaise réponse fournie au problème 11 et suggéré une réponse fautive au problème 12, différente de celle proposée par l'élève fictif. Notons que ce sont des problèmes où il n'y a aucun rapport entier.

4.14.4 Analyse des conduites de l'équipe 4

Les rapports	Type de présentation	Type de problème	Raisonnement de l'équipe	Contexte	Calcul relationnel
s : n f : n	Texte	**Problème 1** 4 données	X	Jus	Raisonnement additif
	Tableau	**Problème 2*** 4 données	√	Jus	Analyse horizontale (opérateur fonction)
	Dessin	**Problème 3** 4 données	X	Jus	Raisonnement additif
s : n f : a/b	Texte	**Problème 4*** 4 données	√	Prix	Analyse verticale (opérateur scalaire)
	Tableau	**Problème 5** 4 données	√	Prix	Analyse verticale (opérateur scalaire)
	Dessin	**Problème 6** 4 données	X	Poissons	Raisonnement additif
s : a/b f : n	Texte	**Problème 7** 4 données	√	Salaire	Analyse horizontale (opérateur fonction)
	Tableau	**Problème 8*** 4 données	√	Salaire	Analyse horizontale (opérateur fonction)
	Dessin	**Problème 9** 6 données 2 grandeurs	√	Pizzas	Analyse horizontale (opérateur fonction)
s : a/b f : a/b	Texte	**Problème 10*** 6 données 3 grandeurs	X	Recette	Raisonnement additif
	Tableau	**Problème 11** 6 données 3 grandeurs	X	Recette	Raisonnement additif
	Dessin	**Problème 12** 6 données 3 grandeurs	√	Crayons	Raisonnement additif correct
s : a/b, n, n f : a/b	Dessin	**Problème 13** 6 données 2 grandeurs	X	Pizzas	Calcul relationnel non multiplicatif

Tableau 4.4 Analyse transversale – Équipe 4

Le contexte des trois premiers problèmes (à 4 données) se rapporte à une recette de jus; tous les rapports sont des nombres entiers. Dans le problème 1 (présentation de type « texte »), l'opérateur fonction a été dégagé, mais n'a pas été interprété comme opérateur multiplicatif. Par contre, l'opérateur fonction a été employé adéquatement au problème 2 (présentation de type « tableau »). Au problème 3 (présentation de type « dessin »), les élèves ont utilisé un raisonnement additif erroné basé sur l'identification d'une suite numérique.

Les problèmes 4, 5, 7 et 8 sont à 4 données et portent sur le contexte de prix soit x $/1 unité (problèmes 4 et 5) ou bien de salaire soit x $/1 heure (problèmes 7 et 8). Comme l'équipe 2, cette équipe a bien réussi tous ces problèmes. Le contexte de prix semble avoir orienté cette équipe vers la recherche de l'opérateur scalaire, tandis que le contexte de salaire l'a orientée vers la recherche de l'opérateur fonction.

Le problème 6 comporte 4 données; l'opérateur scalaire est entier et l'opérateur fonction est fractionnaire. Les élèves ont dégagé l'opérateur scalaire suivi par un raisonnement additif erroné.

Les problèmes 9 et 13 comportent 6 données à 2 grandeurs (pizzas et personnes) et sont de type « dessin ». Dans le problème 9, tous les opérateurs de type scalaire sont fractionnaires mais l'opérateur fonction est un nombre entier. Comme l'équipe 1, les élèves de cette équipe ont aisément résolu ce problème. Leur analyse horizontale les a conduits à calculer l'inverse de l'opérateur fonction « nombre de personnes / 1 pizza » au lieu de calculer la quantité de pizzas par personne.

Quant au problème 13, la démarche subtile et informelle des élèves est basée sur un calcul relationnel non multiplicatif, inspirée du principe de partage et dirigée vers un résultat estimé très proche de la bonne réponse.

Les problèmes de recettes 10 (présentation de type « texte ») et 11 (présentation de type « tableau »), font intervenir 6 données à trois grandeurs dont les rapports sont fractionnaires. Au problème 10, le raisonnement additif fautif des élèves s'appuie sur la recherche d'une régularité numérique entre les données. Le raisonnement des élèves au problème 11 est aussi additif fautif. Pour résoudre le problème 12 (présentation de type « dessin », 6 données, 3 grandeurs), les élèves s'appuient sur la recherche d'une régularité numérique correcte basée sur des relations additives (la somme de deux fractions appartenant à la même classe d'équivalence). Le calcul réalisé est juste mais cette démarche ne nous fournit aucune indication quant à la maîtrise, par cette équipe, de l'aspect proportionnel du problème.

			Contexte	Équipe 1	Équipe 2	Équipe 3	Équipe 4	Équipe 5	Total (√)
s : n f : n	Texte	Problème 1	Jus	X	X	X	X		0
	Tableau	Problème 2*	Jus	√	X	√	√		3
	Dessin	Problème 3	Jus	√	X	X	X		1
s : n f : a/b	Texte	Problème 4*	Prix	√	√	X	√		3
	Tableau	Problème 5	Prix	X	√	√	√		3
	Dessin	Problème 6	Poissons	√	X	√	X		2
s : a/b f : n	Texte	Problème 7	Salaire	√	√	X	√		3
	Tableau	Problème 8*	Salaire	√	√	X	√		3
	Dessin	Problème 9	Pizzas	√	√	X	√		3
s : a/b f : a/b	Texte	Problème 10*	Recette	X	X	X	X		0
	Tableau	Problème 11	Recette	X	X	X	X		0
	Dessin	Problème 12	Crayons	X	X	X	√		1
s : a/b, n, n f : a/b	Dessin	Problème 13	Pizzas	X	√	X	X	√	2
		Total (√)		7	6	3	7	1	

√	Bon raisonnement	X	Raisonnement erroné	*	Bonne réponse fournie par l'élève fictif

Tableau 4.5 Résumé de l'expérimentation

CHAPITRE V

INTERPRÉTATIONS DES RÉSULTATS

Dans ce chapitre, nous mettrons en évidence les interprétations des résultats analysés au chapitre précédent, à partir desquelles nous pourrons conclure cette recherche. Les interprétations sont conduites conformément à l'objectif de recherche énoncé dans la problématique et aux concepts qui le sous-tendent dans le cadre théorique. Également, nous investirons les particularités culturelles cries dans les résultats de cette étude.

5.1 Interprétations des résultats de la recherche

Dans le premier chapitre, les résultats de nos investigations sur la culture mathématique crie démontrent que la seule fraction qui porte un nom dans la langue crie est *un demi* (1/2). En plus, nous avons supposé que le principe de proportionnalité était appliqué dès l'échange des marchandises avec les Blancs. En nous appuyant sur cette supposition, nous avons formulé notre objectif de recherche en choisissant d'étudier les raisonnements des élèves cris de 2^{e} secondaire dans le traitement des situations de proportionnalité. Notons que ces élèves sont instruits dans le cadre de programmes d'études québécois. Pour dévoiler les techniques mises en place par les élèves et qui font partie des stratégies de résolution, notre étude s'inscrit dans une perspective didactique plutôt qu'ethnomathématique. Dans cette optique, nous avons présenté aux élèves 13 problèmes portant sur le thème de la proportionnalité, élaborés sur la base des 3 variables didactiques : facteur de la présentation du problème; type de rapports interne et externe; nombre de données. Pour favoriser l'expression des stratégies, les élèves sont placés en dyade ou triade et doivent se prononcer sur une réponse (juste ou erronée) d'un élève fictif, le problème 13 étant la seule situation-problème sans réponse proposée.

Chez certains élèves cris participant à l'expérimentation, nous avons remarqué de mauvaises interprétations liées aux lacunes linguistiques (exemple : équipe 1, problème 7). Les mathématiques ne sont enseignées en français qu'à partir de la 4e année du primaire, puisque ce n'est pas leur langue maternelle. Ces élèves éprouvent souvent de la difficulté à développer et à décrire leur démarche en français et même parfois à verbaliser les étapes conduisant à la résolution des problèmes. Nous avons constaté qu'à plusieurs reprises, les élèves décrivent leur solution en anglais (équipe 4 aux problèmes 4, 8 et 12 et équipe 2 aux problèmes 5 et 10). Toutefois, il nous a fallu traduire certains problèmes, particulièrement les problèmes de type *texte*. Cette observation justifie notre méthodologie qui engage 3 types de présentation différents pour analyser le rôle possible des différents modes de représentation dans les stratégies des élèves.

5.2 Les variables didactiques des problèmes

Dans ce qui suit, nous examinons, d'une part, l'effet de chacune des variables didactiques, et d'autre part, nous concluons sur l'impact de certaines combinaisons de valeurs de ces variables dans le choix des diverses stratégies mises en œuvre par les élèves lors de la résolution des problèmes. Rappelons que l'expérimentation consiste en 4 problèmes de type *texte*, 4 problèmes de type *tableau* et 5 problèmes de type *dessin*.

5.2.1 La variable : présentation du problème (texte, tableau, dessin)

Dans cette section, nous allons voir pour chaque valeur de cette variable, les résultats des élèves et tenter de dégager si leur réussite ou leurs stratégies semblent varier selon la présentation du problème. Le tableau 5.1 ci-dessous illustre généralement le fait que les problèmes présentés sous forme de *tableau* soient mieux réussis que les problèmes présentés sous forme de *texte* ou de *dessin*. Étant donné que notre échantillon n'est pas suffisamment représentatif, nous ne sommes pas en mesure de confirmer cette interprétation.

	Texte	Tableau	Dessin
Équipe 1	2/4	2/4	3/5
Équipe 2	2/4	2/4	2/5
Équipe 3	0/4	2/4	1/5
Équipe 4	2/4	3/4	2/5
Total	6/16 (37,5 %)	9/16 (56,25 %)	8/20 (40 %)

Tableau 5.1 Taux de réussite selon la présentation des problèmes

Toutefois, cette interprétation doit être nuancée. En effet, les tableaux des données déjà réalisés au chapitre précédent et l'analyse transversale suggèrent qu'il n'est pas certain qu'une seule de ces représentations (texte, tableau, dessin) ait une influence exclusive (c.-à-d. indépendamment des autres variables didactiques) sur la réussite des élèves. En réalité, les influences des variables didactiques se chevauchent quand il s'agit de déterminer le bon résultat d'une équipe vis-à-vis d'un problème donné. Autrement dit, on peut s'attendre à ce qu'une combinaison de facteurs puisse avoir un effet sur la bonne démarche des participants.

5.2.1.1 Les problèmes de type *texte* (problèmes 1, 4, 7 et 10)

Au problème 1, les deux opérateurs scalaire et fonction sont des entiers, ce qui devrait faciliter les calculs numériques et relationnels. Ce problème n'a toutefois pas été résolu adéquatement par les élèves. Cependant, le problème 4 a été bien réussi par 3 équipes grâce au choix des nombres (doublement d'une quantité numérique entier). Il est possible que cette réussite soit favorisée par la réponse suggérée, faisant état de la relation multiplicative entre les données : « *Oui, car il en a 2 fois plus* ». La formulation *deux fois plus* suggère explicitement une relation multiplicative plutôt qu'additive.

De plus, la relation multiplicative est plus aisée à établir sur le plan numérique (3 et 6, 5 et 10) qu'au problème 1 (6 et 18, 24 et 72). Quant au problème 7, il semblerait que le contexte de taux horaire, un contexte familier aux élèves, ait permis à 3 équipes sur 4 de répondre adéquatement. Toutes les équipes ont échoué le problème 10. C'est la conséquence de l'impact d'une autre variable, car les rapports interne et externes sont des nombres fractionnaires.

5.2.1.2 Les problèmes de type *tableau* (problèmes 2, 5, 8 et 11)

Les problèmes de type *tableau* à 4 données ont été relativement bien réussis (9 bonnes réponses sur 12). Il est possible que ce type de présentation facilite l'appréhension des relations entre les données parce que les tableaux structurent les données selon les relations qu'elles entretiennent entre elles. Cette structuration aiderait les élèves à établir des rapports multiplicatifs entre les valeurs numériques et faciliterait ainsi leur mise en relation. De plus, ces problèmes de type *tableau* contiennent moins de texte à appréhender que les problèmes de type *texte*. Cette disposition favorise la compréhension, étant donné que le français n'est pas la langue maternelle des écoliers cris. Quant au problème 11, il est probable qu'il n'ait été réussi par aucune équipe parce que tous les opérateurs sont fractionnaires.

5.2.1.3 Les problèmes de type *dessin* (problèmes 3, 6, 9, 12 et 13)

Les résultats indiquent que les élèves réussissent plus facilement ces problèmes lorsqu'un des opérateurs est un entier (problèmes 6 et 9). Cependant, le seul problème réussi (problème 13) qui comporte deux opérateurs (scalaire et fonction) fractionnaires est un problème de type *dessin*. Ce problème a été abordé correctement par l'équipe 2 et l'équipe 5, en mentionnant que l'équipe 4 a proposé une solution conduisant à un résultat numérique très proche de la solution attendue.

En ce qui concerne le problème 3, il n'a été réussi que par l'équipe 1 malgré le fait que les deux opérateurs (scalaire et fonction) soient des entiers. Ici, nous aurions pu nous attendre à un taux de réussite plus élevé, car les deux rapports (externe et interne) sont des entiers facilement saisissables par les élèves. Il est probable que la réponse fausse suggérée ait pu conduire les élèves à engager le raisonnement sur lequel repose cette fausse réponse. On peut également supposer que l'interprétation des élèves au problème 3 peut être liée au fait qu'« ajouter » du jus, d'après le contexte du problème, conduirait l'élève à penser en termes additifs. Le problème 12 de type *dessin* a été réussi par l'équipe 4 par le biais d'un raisonnement additif correct, mais il nous semble difficile de justifier la véritable compréhension de cette équipe en ce qui concerne la nature proportionnelle du problème.

En fin de compte, nous avons remarqué que les élèves cris ont engagé, dans cette expérimentation, des stratégies de résolution variées, associées à des démarches diversifiées, pour traiter les données des problèmes de type *dessin*. Les Cris apprennent par l'exemple en appliquant les notions observées, utilisant ainsi une approche tout à fait empirique. En effet, « *Indian and Inuit children are most successful at processing visual information and have the most difficulty performing well on tasks saturated with verbal content.* » (Kaulbach, 1984)[1]. « *Les enfants Indiens et Inuits réussissent très bien à manipuler des données visuelles, mais ils éprouvent beaucoup de difficultés à réaliser des tâches qui relèvent pleinement d'un contenu verbal.* » (Traduction libre)

---

[1] http://jaie.asu.edu/v27/V27S1nat.htm
Journal of American Indian Education
Vol. 27 Number 1, October 1987

5.2.2 Le type de rapport entre les données

	s : n f : n	s : n f : a/b	s : a/b f : n	s : a/b f : a/b
Équipe 1	2/3	2/3	3/3	0/4
Équipe 2	0/3	2/3	3/3	0/4
Équipe 3	1/3	2/3	0/3	0/4
Équipe 4	1/3	2/3	3/3	1/4
Total	4/12 (33,3 %)	8/12 (66,6 %)	9/12 (75 %)	1/16 (6,25 %)

Tableau 5.2 Taux de réussite selon le rapport entre les données

Selon le tableau ci-haut, on observe un faible taux de réussite quand les deux rapports sont des entiers (problèmes 1, 2 et 3). Cet échec pourrait être causé par le contexte de jus qui renvoie au raisonnement additif fautif. En plus, il est probable que les élèves soient préoccupés à justifier la réponse de l'élève fictif ou à chercher une régularité entre les données. D'ailleurs, il est étonnant, si on se rapporte aux études citées dans le cadre théorique, que les problèmes dont les deux rapports sont entiers ne soient pas les mieux réussis (problèmes 1, 2 et 3). Ce sont les problèmes dont l'un des deux rapports est fractionnaire et l'autre entier (problèmes 4, 5, 6, 7, 8 et 9), qui sont les mieux réussis. La familiarité du contexte (les problèmes relatifs à des taux) semble expliquer ce résultat.

Si les opérateurs scalaire et fonction sont des entiers (problèmes 1, 2 et 3), les élèves qui arrivent à la bonne réponse utilisent un de ces deux opérateurs sans que l'on puisse remarquer une préférence. Nous n'étions donc pas en mesure de justifier le propos de Vergnaud (1981), selon lequel, l'élève se penche sur l'opérateur scalaire plutôt que sur l'opérateur fonction, comme nous l'avons noté aux chapitres II et III. Notre échantillon n'est pas suffisamment représentatif pour tirer une telle conclusion.

Lorsque l'opérateur scalaire est un entier et l'opérateur fonction est un nombre fractionnaire (problèmes 4, 5 et 6), les élèves qui arrivent à la bonne réponse ont tendance à utiliser l'analyse verticale plutôt que l'analyse horizontale, et donc à exploiter le rapport entier.

Lorsque l'opérateur scalaire est un nombre fractionnaire et l'opérateur fonction est un entier (problèmes 7, 8 et 9), les élèves qui utilisent la bonne démarche appliquent l'opérateur fonction exclusivement pour résoudre ces trois problèmes. Donc, ici aussi le rapport entier est exploité.

Quand les deux opérateurs scalaire et fonction sont des nombres fractionnaires (problèmes 10, 11, 12 et 13), le taux de réussite est extrêmement faible. Le fait que ces problèmes soient à 6 données, pourrait contribuer à augmenter le taux d'échec élevé. Nos résultats montrent cependant que le type de rapport entre les données pourrait être une variable didactique relativement discriminante. Lorsque les deux opérateurs sont fractionnaires, le taux de réussite est le plus bas.

5.2.3 Le nombre de données différentes (4 ou 6 données)

	4 données	6 données 2 grandeurs	6 données 3 grandeurs
Équipe 1	6/8	1/2	0/3
Équipe 2	4/8	2/2	0/3
Équipe 3	3/8	0/2	0/3
Équipe 4	5/8	1/2	1/3
Total	18/32 (56,25 %)	4/8 (50 %)	1/12 (8,33 %)

Tableau 5.3 Taux de réussite selon le nombre de données

Le tableau 5.3 montre que le taux de réussite pour les problèmes à 4 données est le plus élevé, suivi de très près par celui des problèmes à 6 données et 2 grandeurs (problèmes 9 et 13). Par contre, le taux de réussite pour les problèmes à 6 données et 3 grandeurs est très faible (problèmes 10, 11 et 12). Cette interprétation doit cependant être nuancée. En effet, il est possible que le faible rendement des élèves, dans les problèmes à 6 données et 3 grandeurs, soit également le fait des nombres. Effectivement, les deux opérateurs scalaire et fonction dans tous les problèmes à 6 données et 3 grandeurs sont fractionnaires, ce qui ajoute à leur complexité.

Dans les problèmes à 6 données et 2 grandeurs, nous avons constaté que l'ajout d'un troisième couple pousse les élèves à chercher un modèle de type multiplicatif, ce qui est conforme à l'étude de René de Cotret.

> « *L'introduction d'un troisième couple a amené la plupart des élèves à chercher des régularités ou des invariants dans les problèmes.* [...] *La recherche de régularités peut s'apparenter à la recherche d'un modèle permettant d'établir une relation satisfaisante entre les données.* » (René de Cotret, 2006, p. 143)

Cette observation semble adéquate pour l'analyse du problème 9 réussi par les équipes 1, 2 et 4. Également, elle permet d'expliquer ce qui se produit au problème 13, réussi par les équipes 2 et 5.

Les problèmes 10, 11 et 12 n'ont pas été traités adéquatement par les élèves. Ils présentent un taux d'échec très élevé en raison des facteurs suivants :

a) Les rapports fonction et scalaire sont des nombres fractionnaires, ce qui rend plus difficile le raisonnement multiplicatif chez les élèves et nuit à la mise en œuvre des calculs numériques ou relationnels adéquats.

> « *En fait, si les rapports ne sont pas entiers, il semble que le traitement de la proportionnalité soit plus difficile et même parfois abandonné. Par contre, un rapport entier permet de poursuivre plus aisément le raisonnement.* » (René de Cotret, 2006, p. 139)

b) Ce sont des problèmes qui portent sur 3 grandeurs : problème 10 (fruits, farine, sucre); problème 11 (jus de canneberge, jus d'orange, jus de pamplemousse); problème 12 (crayons rouges, crayons noirs, crayons bleus). Selon cet arrangement, l'unique rapport scalaire est associé à 3 rapports de type fonction, ce qui rend le problème *trop peuplé* par des dimensions et des grandeurs difficiles à contrôler et à contenir par les élèves. Conséquemment, l'ajout d'une troisième grandeur aurait rendu ces problèmes plus difficiles à traiter par les élèves.

5.2.4 Interprétation basée sur le contexte

Il est important de préciser que le contexte n'est pas une variable didactique qui a été contrôlée *a priori*. Cependant, lors de l'analyse des données, le contexte semble avoir joué un rôle sur la résolution. Il convient donc d'examiner l'impact que le contexte a pu avoir sur les stratégies mises en œuvre par les élèves.

Indépendamment du fait que l'enseignant du groupe a enseigné longuement le produit en croix et la règle de trois, ces algorithmes n'ont cependant pas été exploités dans la résolution des 13 situations-problèmes. Il est fort possible que les élèves aient manipulé les données de quelques situations-problèmes selon des contextes qui s'avèrent familiers à leur vie quotidienne, sans considérer l'application des règles déjà apprises.

Dans les problèmes ayant le mélange de jus comme contexte (problèmes 1, 2, 3 et 11), la majorité des élèves se penchait sur un raisonnement additif erroné. Ici, nous formulons l'hypothèse selon laquelle leur interprétation est basée sur le fait qu'ajouter du jus est relatif à l'opération arithmétique d'addition. Cette hypothèse fait appel à l'étude de Desjardins et Hétu telle que recensée dans le cadre théorique.

CHAPITRE VI

CONCLUSIONS DE LA RECHERCHE

Notre recherche exploratoire avait pour but d'analyser les stratégies mises en œuvre par des élèves cris de 2e secondaire confrontés à des situations de proportionnalité. Plus spécifiquement, cette étude visait à analyser comment le jeu sur certaines variables didactiques définies et contrôlées *a priori* (facteur de présentation, types de rapports, nombre de données) pourrait avoir un impact sur les connaissances engagées par ces élèves.

Dans ce dernier chapitre, nous essayerons de mettre en perspective les résultats de notre recherche, par rapport aux études recensées au chapitre II ainsi qu'à la méthodologie. Également, nous reprendrons l'objectif de recherche et nous dégagerons les résultats obtenus. Finalement, nous établirons les limites de cette recherche tout en élaborant des hypothèses de travail pour des études ultérieures.

6.1 Les résultats de la recherche au regard du contexte théorique

Selon Julo (1982), les élèves qui recourent à un tableau (en le construisant) réussissent plus souvent la résolution que ceux qui n'y recourent pas. Dans notre cas, les problèmes présentés sous forme de tableau sont légèrement mieux réussis que les problèmes présentés sous forme de texte ou de dessin. Cependant, il faut être prudent dans les interprétations à cause de la diversité de variables qui interviennent dans les situations analysées. D'ailleurs, il est possible que la présentation de problème sous forme de tableau ait joué un rôle facilitateur puisque les données étaient déjà organisées, en lecture horizontale, dans un rapport fonction et, en lecture verticale, dans un rapport scalaire.

Selon Vergnaud (1981), l'élève se penche plutôt sur l'opérateur scalaire que sur l'opérateur fonction afin d'éviter de traiter les dimensions associées au rapport externe. Dans notre expérimentation, ce traitement pourrait être observé dans le cas des problèmes à 4 données où les deux rapports interne et externe sont des nombres entiers. Pour ce type de problèmes, les élèves ont utilisé un de ces deux opérateurs sans que l'on puisse remarquer une préférence.

Dans notre travail, nous remarquons que lorsque les deux opérateurs sont fractionnaires, le traitement d'une situation proportionnelle devient plus complexe et est souvent abandonné. Ces remarques sont conformes aux études de Vergnaud (1981), Julo (1982) et René de Cotret (1991). Dans le cas des problèmes qui se rapportent à 3 grandeurs où les deux rapports sont des nombres fractionnaires, les résultats de notre étude nous font croire que l'ajout d'une troisième grandeur pourrait rendre les problèmes plus difficiles à traiter par l'élève. Notons qu'il n'y a aucune étude citée dans le cadre théorique sur le traitement des problèmes se rapportant à 3 grandeurs.

Concernant les problèmes à 6 données et 2 grandeurs, il semblerait que l'ajout d'un 3^{e} couple invite souvent les élèves à chercher une régularité adéquate entre les données et à invalider une démarche non proportionnelle. Cette conduite est conforme aux études de René de Cotret (1991).

Nous avons remarqué des difficultés chez des élèves à appréhender les problèmes de type texte; notre hypothèse de ce résultat est que le français n'est pas la langue maternelle des élèves cris et que cette langue n'est enseignée qu'à partir de la 4^{e} année du primaire.

L'information contextuelle semblerait « traverser » d'autres variables impliquées et ainsi jouer un rôle dans les stratégies des élèves. Par exemple, les problèmes, dont les deux rapports sont des nombres entiers, étaient le moins réussis, ce qui va à l'encontre des études recensées au cadre théorique. La raison de cette conduite serait le fait du contexte de jus qui a poussé des élèves à penser en termes additifs fautifs conformément aux études de Desjardins et Hétu (1974). Par ailleurs, les problèmes, dont l'un des deux rapports est fractionnaire et l'autre entier, sont parmi les mieux réussis. Il est fort possible que la familiarité avec le contexte du taux (prix, salaire) ait incité les élèves à privilégier un raisonnement multiplicatif adéquat tout en renonçant à la réponse erronée de l'élève fictif. L'interaction entre ces deux types de variables (contexte, nature du rapport) semble délicate.

En règle générale, il est difficile de tirer des conclusions ou de formuler des hypothèses assez solides parce que notre échantillon n'est pas suffisamment représentatif et nous ne sommes pas en mesure de confirmer aucune interprétation d'une manière définitive.

6.2 Les résultats de la recherche au regard de l'objectif spécifique

Le bien-fondé de notre objectif de recherche, tel qu'illustré dans la problématique, trouve ses origines dans notre choix de la proportionnalité comme thème de notre étude. Ce choix est basé sur deux motifs :

1) L'importance de la notion de proportionnalité pour la réussite des études secondaires étant donné qu'en l'absence d'un contrôle sur les situations proportionnelles, la poursuite et la réussite des études secondaires peuvent être mises en péril.

2) Le lien étroit de la proportionnalité avec la culture du troc chez les Cris. Autrement dit, la proportionnalité fait partie de la culture mathématique crie (acquis culturel). Malgré le fait que l'apprentissage de la notion de fraction présente un défi pour plusieurs écoliers cris, ils ont pourtant démontré des compétences dans le traitement des problèmes renvoyant à la notion de proportionnalité. Comme nous l'avons élaboré dans la problématique, la quantification des marchandises troquées, qui fait appel à la notion de proportionnalité, comprenait jadis une partie intégrale de

la culture mathématique des Cris. Dès l'arrivée des Blancs, l'échange de leurs fourrures contre des biens européens les a exposés davantage aux situations qui rendent l'emploi de la fraction *rapport*, une réalité incontournable.

L'analyse des solutions mises en oeuvre par des élèves cris montre qu'ils emploient des raisonnements conformes aux études présentées dans le cadre théorique. Cette tendance démontre l'adhésion de l'enseignement au contenu de programmes d'études québécois. De surcroît, les élèves qui ont participé à l'expérimentation recourent aux solutions informelles qui recouvrent des techniques comme l'addition itérative, la division itérative, le raisonnement qualitatif, le *groupement*, etc. Ces techniques sont utilisées adéquatement par des élèves cris quand les rapports entre les données sont difficiles à dégager. Cela témoigne l'ampleur et la diversité de leurs raisonnements ainsi que leur capacité à mettre en place des calculs relationnels riches.

L'analyse nous montre aussi que le type de rapport entre les données pourrait être une variable didactique relativement discriminante. Lorsque les deux opérateurs sont fractionnaires, le taux de réussite est le plus bas.

Enfin, l'analyse de l'expérimentation nous fait conclure que le faible taux de réussite en mathématiques de certains élèves cris, tel que précisé dans la problématique, ne relève pas d'une difficulté d'apprentissage. Les situations de proportionnalité sollicitent la coordination de connaissances diverses acquises au primaire et au secondaire. Les difficultés identifiées peuvent relever d'un manque de contrôle dans cette articulation et possiblement, de la fragilité des connaissances sollicitées.

6.3 Des pistes pour des recherches ultérieures

À la lumière de l'analyse, l'interprétation et les résultats de l'expérimentation, nous présentons ici les limites de cette recherche tout en élaborant des hypothèses de travail pour des études ultérieures.

a) Dans le cadre d'une recherche ultérieure, le rôle d'un troisième couple appuyé par l'étude de René de Cotret (1991) pourrait être examiné davantage.

b) Une recherche ultérieure doit tenir compte d'un échantillon plus grand que celui utilisé dans notre expérimentation. Pour ce faire, il faudrait solliciter la participation des élèves de deuxième secondaire provenant de plusieurs communautés afin de parvenir à des conclusions encore plus solides et pour mieux vérifier la véracité de notre analyse *a priori*.

c) Dans notre expérimentation, le contexte des trois premiers problèmes à 4 données se rapporte à une recette de jus; tous les rapports sont des nombres entiers. Le contexte de jus a possiblement évoqué un raisonnement additif fautif basé sur le fait qu'ajouter du jus est relatif à l'addition des quantités. Dans le cadre d'une recherche ultérieure, il serait intéressant de varier l'ordre, le contexte et la nature du rapport des problèmes afin d'appeler les élèves à invalider leur démarche additive.

6.4 Commentaire final

La maîtrise de la notion de proportionnalité est une compétence qui a aidé les Cris à vérifier la justesse de leurs échanges avec les Blancs. On pourrait alors supposer qu'il s'agit d'une compétence qui relève d'un acquis culturel. Dans cette perspective, nous avançons l'hypothèse que le concept de fraction pourrait être abordé chez les apprenants cris, par l'enseignement de la proportionnalité puisque cette notion fait partie de leur savoir *a priori* et des acquis relevant de leur propre culture.

Dans un autre ordre d'idées, nous avons remarqué que les élèves qui ont recours aux démarches de résolution informelle ont tendance à utiliser le raisonnement qualitatif (problème 13, équipe 4) ou à former des sous-collections (problème 9, équipe 2), c'est-à-dire *faire des groupes identiques plusieurs fois.* Cette dernière stratégie nous rappelle les traitements proportionnels des Cris. Elle pourrait être interprétée à la lumière des savoir-faire qui découlent possiblement des échanges de leurs biens avec les Blancs, tel que présenté dans la problématique. Cela nous amène à penser à la pertinence d'initier les élèves cris aux raisonnements qualitatifs et à l'utilisation du *groupement* comme stratégie pédagogique pour les introduire à la fraction de type *rapport.*

Enfin, et au-delà des spécificités culturelles, il importe d'étudier le modèle proportionnel, car il permet d'interpréter et d'approximer de manière efficace un très grand nombre de phénomènes naturels, culturels et sociaux.

Tableau 1.1

L'effectif scolaire du secteur des jeunes - **Waswanipi**

	1997-1998	1998-1999	1999-2000	2000-2001	2001-2002	2002-2003	2003-2004	2004-2005	2005-2006
Sec 1	25	24	22	19	30	40	38	38	52
Sec 2	19	28	22	25	19	32	26	31	25
Sec 3	28	17	22	28	27	27	31	29	34
Sec 4	28	28	20	16	16	22	18	21	24
Sec 5	13	19	25	12	13	12	15	11	8
Total	**113**	**116**	**111**	**100**	**105**	**133**	**128**	**130**	**143**

Tableau 1.2

L'effectif scolaire du secteur des jeunes - **Oujé-Bougoumou**

	1997-1998	1998-1999	1999-2000	2000-2001	2001-2002	2002-2003	2003-2004	2004-2005	2005-2006
Sec 1	15	17	9	11	10	13	5	12	16
Sec 2	11	15	10	7	10	12	13	9	9
Sec 3	8	10	3	10	8	13	12	8	10
Sec 4	12	5	9	1	6	6	13	8	10
Sec 5	0	7	3	0	0	7	3	7	8
Total	**46**	**54**	**34**	**29**	**34**	**51**	**46**	**44**	**53**

Tableau 1.3

L'effectif scolaire du secteur des jeunes - **Nemaska**

	1997-1998	1998-1999	1999-2000	2000-2001	2001-2002	2002-2003	2003-2004	2004-2005	2005-2006
Sec 1	15	14	9	14	10	11	15	13	11
Sec 2	22	20	10	8	10	7	8	12	13
Sec 3	26	23	24	11	19	13	8	12	13
Sec 4	11	19	20	17	9	15	15	9	11
Sec 5	5	8	14	13	6	10	12	12	11
Total	**79**	**84**	77	**63**	**54**	**56**	**58**	**58**	**59**

Tableau 1.4

L'effectif scolaire du secteur des jeunes - **Mistissini**

	1997-1998	1998-1999	1999-2000	2000-2001	2001-2002	2002-2003	2003-2004	2004-2005	2005-2006
Sec 1	100	100	88	87	96	42	55	46	47
Sec 2	71	57	62	65	53	73	38	45	43
Sec 3	38	35	24	30	27	41	65	37	49
Sec 4	13	19	12	7	13	41	51	60	37
Sec 5	20	7	12	9	5	9	27	29	66
Total	**242**	**218**	**198**	**198**	**194**	**206**	**236**	**217**	**242**

Tableau 1.5

L'effectif scolaire du secteur des jeunes - **Whapmagoostui**

	1997-1998	1998-1999	1999-2000	2000-2001	2001-2002	2002-2003	2003-2004	2004-2005	2005-2006
Sec 1	17	18	9	25	27	24	28	28	29
Sec 2	15	13	17	12	16	18	13	23	25
Sec 3	15	10	14	19	10	13	15	16	24
Sec 4	6	9	9	5	20	16	17	11	10
Sec 5	9	5	8	8	6	8	8	10	11
Total	**62**	**55**	**57**	**69**	**79**	**79**	**81**	**88**	**99**

Tableau 1.6

L'effectif scolaire du secteur des jeunes - **Eastmain**

	1997-1998	1998-1999	1999-2000	2000-2001	2001-2002	2002-2003	2003-2004	2004-2005	2005-2006
Sec 1	15	17	12	21	17	18	21	28	17
Sec 2	19	9	19	17	19	9	18	18	32
Sec 3	13	10	11	16	19	21	11	14	15
Sec 4	7	11	5	6	8	14	16	16	12
Sec 5	4	5	9	0	3	4	4	4	7
Total	**58**	**52**	**56**	**60**	**66**	**66**	**70**	**80**	**83**

Tableau 1.7

L'effectif scolaire du secteur des jeunes – **Wemindji**

	1997-1998	1998-1999	1999-2000	2000-2001	2001-2002	2002-2003	2003-2004	2004-2005	2005-2006
Sec 1	25	20	41	35	40	25	35	20	29
Sec 2	25	25	17	19	14	24	21	34	29
Sec 3	31	28	26	14	18	22	23	28	33
Sec 4	28	27	25	21	21	18	16	18	12
Sec 5	18	18	16	16	18	12	14	11	13
Total	**127**	**118**	**125**	**105**	**111**	**101**	**109**	**111**	**116**

Tableau 1.8

L'effectif scolaire du secteur des jeunes – **Waskaganish**

	1997-1998	1998-1999	1999-2000	2000-2001	2001-2002	2002-2003	2003-2004	2004-2005	2005-2006
Sec 1	50	52	28	37	41	54	65	56	65
Sec 2	33	36	45	35	33	32	38	48	38
Sec 3	28	43	45	50	47	37	33	53	56
Sec 4	22	18	26	19	32	33	34	31	25
Sec 5	28	17	15	26	16	31	21	16	21
Total	**161**	**166**	**159**	**167**	**169**	**187**	**191**	**204**	**205**

Tableau 1.9

L'effectif scolaire du secteur des jeunes – **Chisasibi**

	1997-1998	1998-1999	1999-2000	2000-2001	2001-2002	2002-2003	2003-2004	2004-2005	2005-2006
Sec 1	123	129	123	111	117	132	113	117	112
Sec 2	74	80	62	91	70	85	104	111	83
Sec 3	23	25	63	69	61	66	55	65	91
Sec 4	17	20	22	22	27	32	27	30	38
Sec 5	9	9	11	11	15	15	19	18	21
Total	**246**	**263**	**281**	**304**	**290**	**330**	**318**	**341**	**345**

Sources:
Commission scolaire crie
203 Main Street, C.P. 1210
Mistissini (Québec) G0W 1C0

Tableau 3.2

Structure des problèmes

				Raisonnements erronés	
Type de présentation	*Données*	*Opérateur scalaire*	*Opérateur fonction*	*Scalaire*	*Fonction*
Problème 1 Texte	6 24 18 **36**	× 3	× 4	12	18
Problème 2* Tableau	6 3 18 **9**	× 3	÷ 2	12	3
Problème 3 Dessin	5 15 20 **30**	× 4	× 3	15	10
Problème 4* Texte	3 5 6 **10**	× 2	× 5/3	3	2
Problème 5 Tableau	16 12 4 **0**	÷ 4	× 3/4	12	4
Problème 6 Dessin	15 20 3 **8**	÷ 5	× 4/3	12	5
Problème 7 Texte	28 84 29 **85**	× 29/28	× 3	1	56
Problème 8* Tableau	3 21 2 **14**	× 2/3	× 7	1	18
Problème 9 Dessin	4 12 7 21 5 **13**	× 7/4 × 5/7 × 5/4	× 3	3, 2 , 1, 8 et 9	8, 14
Problème 10* Texte	18 12 9 30 20 **15**	× 5/3	× 2/3, × ¾ × ½	12, 8 et 4	6, 3, 10 et 5
Problème 11 Tableau	20 16 24 15 12 **21**	× 3/4	× 4/5, × 3/2 × 6/5	5, 4 et 3	4, 8, 3 et 9
Problème 12 Dessin	6 9 15 8 12 **18**	× 4/3	× 3/2, × 5/3 × 5/2	2 3	3, 6, 4

* = Bonne réponse

Tableau 3.3

Variables didactiques

Dessin

Tableau

Texte

		Opérateur Scalaire	
		n	**a/b**
Opérateur fonction	**n**	***n*** ***n***	***a/b*** ***n***
	a/b	***n*** ***a/b***	***a/b*** ***a/b***

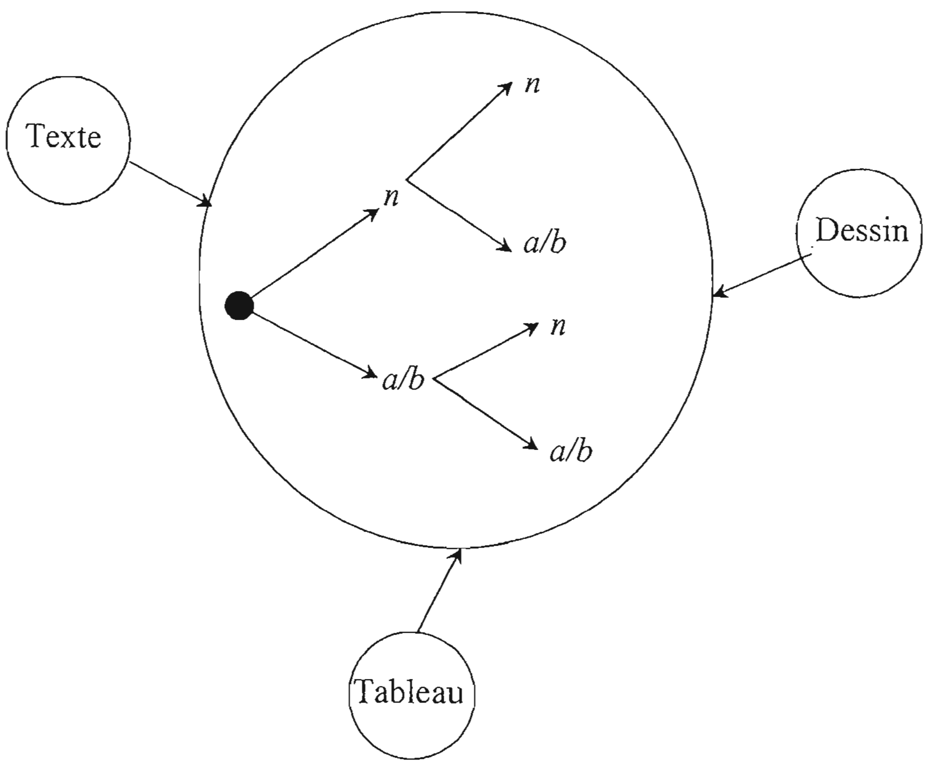


Tableau 3.4

Variables didactiques

Variables didactiques

Type de présentation		Rapport entier (n) Rapport fractionnaire (a/b)		Nombre de données
		Opérateur scalaire	Opérateur fonction	
Texte	Problème 1	*n*	*n*	4
	Problème 4*	*n*	*a/b*	4
	Problème 7	*a/b*	*n*	4
	Problème 10*	*a/b*	*a/b*	6 3 grandeurs
Tableau	Problème 2*	*n*	*n*	4
	Problème 5	*n*	*a/b*	4
	Problème 8*	*a/b*	*n*	4
	Problème 11	*a/b*	*a/b*	6 3 grandeurs
Dessin	Problème 3	*n*	*n*	4
	Problème 6	*n*	*a/b*	4
	Problème 9	*a/b*	*n*	6 2 grandeurs
	Problème 12	*a/b*	*a/b*	6 3 grandeurs

* = Bonne réponse

RÉFÉRENCES

Association mathématique du Québec (1970). *Les systèmes de numération des nombres rationnels.* Document édité par l'Association mathématique du Québec, 46 p.

Barta, Jim et Linda L'Ai (2004). *The Mathematics of Harry Potter.* Teaching Children Mathematics (Journal). Reston,Va : National Council of Teachers of Mathematics. November 2004, Volume 11, Issue 4, p. 210-216.

Behr, M.J., Lesh, R., Post, T. et Silver, E.A. (1983). *Rational number concepts.* In R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes.* New York: Academic Press, p. 91-125.

Benoît, B., Chemla, K. et Ritter, J. (1992). *Histoire de fractions, fractions d'histoire.* Basel : Birkhäuser, 436 p.

Bishop, Alan J. (1991). *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education.* Norwell, Mass.: Kluwer Academic Publishers, 216 p.

Blacksmith, L., Junker, M., Mackenzie, M., Salt, L. et Whiskeychan, A. (2002). *Manuel de conversation crie.* 43 p.

Blouin, P. (1993). *Enseignement de la notion de fraction à des élèves de 1ère secondaire en difficulté d'apprentissage.* Université de Montréal. Thèse de doctorat, 293 p.

Boilard, M. (2000). *Élaboration et analyse de situations numériques en classe de deuxième année en milieu défavorisé.* Université du Québec à Montréal. Mémoire de maîtrise en éducation, 179 p.

Brun, J. et Conne, F. (1990). *Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situation.* Éducation et recherche, 12e année, no 3, p. 261-285.

Cajori, Florian (1993). *A History of Mathematical Notations.* New York: Dover Publications, 818 p.

Chokouhi, G. (1962). *Enquête sur la compréhension de la notion de fraction-rapport.* Université de Genève : Institut des Sciences de l'Éducation, 29 p.

Closs, Michael P. (1986). *Native American Mathematics.* Austin, Tex.: University of Texas Press, 431 p.

Comin, E. (2003). *Des graines et des souris.* Extrait de la thèse *Proportionnalité et fonction linéaire : caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire.* Grand N, no 72, IREM de Grenoble, p. 41-73.

Denny, J. Peter. (1986). *Cultural Ecology of Mathematics: Ojibway and Inuit hunters.* In ed. Michael P. Closs, *Native American Mathematics.* Austin, Tex.: University of Texas Press, p. 129-180.

Desjardins, M. et Hétu, J-C. (1974). *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions.* Montréal : Presses de l'Université du Québec, 147 p.

Faries, E. et Pashagumskum, S. (2002). *Une histoire du Québec et du Canada.* Commission scolaire crie, 284 p.

Francis, D. et Morantz, T. (1983). *Partners in Fur : A History of the Fur Trade in Eastern James Bay 1600-1870.* Kingston and Montreal: McGill-Queen's University Press, 203 p.

Francis, D. et Morantz, T. (1984). *La traite des fourrures dans l'est de la Baie James, 1600-1870.* Sainte-Foy : Presses de l'Université du Québec, 261 p.

Gagnon, R. (1995). *Effets de la structure de connaissances, de la catégorie de problèmes et de l'opérateur sur la résolution de problèmes additifs par les élèves de troisième année du primaire.* Université du Québec à Trois-Rivières. Mémoire de maîtrise inédit, 121 p.

Gnass, I. (2000). *Étude de raisonnement proportionnel chez les élèves en trouble de comportement et d'apprentissage de deuxième secondaire.* Université du Québec à Montréal. Mémoire de maîtrise en éducation, 200 p.

Gullberg, J. (1997). *Mathematics From the Birth of Numbers.* New York : W. W. Norton, 1093 p.

Ifrah, G. (1994). *Histoire universelle des chiffres, tome I.* Paris : R. Laffont, S.A., 567 p.

Jarry, J. M. (1968). *Ensemble des nombres réels, ensemble des nombres complexes, polynômes, fraction rationnelle de polynômes, théorie des équations.* Éditeur : Montréal : Lidec, 228 p.

Julo, J. (1982). *Acquisition de la proportionnalité et résolution de problème.* Rennes : Presses universitaires de Rennes 2, 284 p.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques.* Rennes : Presses universitaires de Rennes 2, 255 p.

Kibindigiri, F. (1995). *Histoire de la fraction : Vers une vision unifiée de fraction-mesure, fraction-division, fraction-rapport.* Université du Québec à Montréal. Mémoire de maîtrise en mathématiques, 109 p.

Kieren, T. E. (1988). *Personal Knowledge of Rational Numbers : Its intuitive and formal development.* In Hiebert J. and Behr M. (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades.* Lawrence Erlbaum, NJ, p. 162-181.

Krikorian, N. (1996). *Compétences d'élèves de fin primaire concernant des aspects des fractions considérés essentiels et sur lesquels l'enseignant de secondaire 1 devrait construire son enseignement des nombres rationnels.* Université du Québec à Montréal. Mémoire de maîtrise en mathématiques, 317 p.

Lacombe, A. Ptre, (1827-1916). *Dictionnaire de la langue des Cris.* Montréal: C.O. Beauchemin & Valois, 1874, 711 p.

Levain, J.-P. (1997). *Faire des maths autrement : Développement cognitif et proportionnalité.* Paris; Montréal : L'Harmattan, 239 p.

Livio, Mario (2002). *The Golden Ratio.* First edition. New York : Broadway Books, 288 p.

McAlpine, L. et Taylor, D.M. (1993). *Instructional preferences of Cree, Inuit and Mohawk teachers.* Journal of American Indian Education. Volume 33, Issue 1, Fall 1993, p. 1-20

Mercier, A. (2002). *Poursuivre son régime : document d'information sur les articles du Régime pédagogique de la formation générale des adultes.* Québec : Ministère de l'Éducation, Direction de la formation générale des adultes. ISBN : 2-550-39227-2

Ministère de l'Éducation. Guide pédagogique, primaire, mathématique, fascicule E, *les fractions*, Québec, 1980, 35 p.

More, Arthur J. (1989). *Native Indian Learning Styles: A Review for Researchers and Teachers*. Journal of American Indian Education (Special Issue), August 1989, Volume 27, Issue 1, p. 15-28

Pallascio, R. (2005). *Les situations-problèmes: un concept central du nouveau programme de mathématique*. Québec: Ministère de l'Éducation. Vie Pédagogique (Québec), numéro 136, septembre-octobre 2005, p. 32-34.

Paulin, J. (2004). *L'enseignement et l'apprentissage de la fraction dans le cadre du nouveau programme de formation de l'école québécoise relatif au domaine d'apprentissage de la mathématique*. Université du Québec à Montréal. Rapport d'activités [maîtrise en éducation], 142 p.

Perrin-Glorian, M.-J. (1993). *Recherches en didactique des mathématiques*. Grenoble : La pensée sauvage. Vol. 13/1.2, p. 5-118

René de Cotret, S. (2006). *L'élève et le modèle proportionnel, une histoire de confitures*. Montréal : Éditions Bande Didactique, coll. « mathèse », 273 p.

Rouche, N. (1998). *Pourquoi ont-ils inventé les fractions*? Paris : Ellipses, 126 p.

Sheryl, L. Stump (2003). *Designing Fraction-Counting Books*. Teaching Children Mathematics (Journal). Reston,Va : National Council of Teachers of Mathematics. May 2003, Volume 9, Issue 9, p. 546-549.

Ste-Marie, A. (1996). *Résolution de problèmes additifs de comparaison de mesures et représentation de la suite numérique chez des élèves de première année primaire*. Université du Québec à Montréal. Mémoire de maîtrise inédit, 134 p.

Trumbull, J. Hammond (1821-1897). *On numerals in American Indian languages, and the Indian mode of counting.* American Philological Association. Éditeur : Hartford, Conn., 1875, 36 p.

Vaillancourt, Louis-Phillipe (1992). *Dictionnaire français-cri. Dialecte québécois.* Presses de l'Université du Québec, 492 p.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Berne : Peter Lang, 218 p.

Vergnaud, G. (1991). *La théorie des champs conceptuels.* Recherche en didactique des mathématiques. Grenoble : La pensée sauvage. Vol. 10, no. 2-3, p. 133-170

Zaslavsky, Claudia (2001). *Developing Number Sense: What Can Other Cultures Tell Us?* Teaching Children Mathematics (Journal). Reston,Va : National Council of Teachers of Mathematics. February 2001, Volume 7, Issue 6, p. 312-319

Zhijun Wu (2001). *Multiplying Fractions.* Teaching Children Mathematics (Journal). Reston, Va : National Council of Teachers of Mathematics. November 2001, Volume 8, Issue 3, p. 174-177.

DOCUMENTS ÉLECTRONIQUES

Auclair, Elie-J. *Le père Albert Lacombe (1827-1916).* Collège Marianopolis. L'Encyclopédie de l'histoire du Québec.
http://www2.marianopolis.edu/quebechistory/encyclopedia/lacombe.htm
(Page consultée le 6 novembre 2005)

Barton, Bill. *Ethnomathematics & Philosophy. A presentation to the First International Conference on Ethnomathematics.* Universidad de Granada, September, 1998
http://www-leibniz.imag.fr/Didatech/Seminaires2003/Barton/Didaktik.pdf
(Page consultée le 16 juin 2005)

Campos, Tânia et Sandra Magina. *Primary school teachers'concepts of fractions and teaching strategies.* Pontificia Universidade Catolica de Sao Paulo
www.icme-organisers.dk/tsg22/campos%20and%20magina.doc
(Page consultée le 27 avril 2005)

Commission scolaire des Affluents. *Coin des enseignants.*
http://www.csaffluents.qc.ca/mijo/WEB/2ecycle/Algonquiens/coindesens.htm#introduction
(Page consultée le 6 novembre 2005)

D'Ambrosio, Ubiratan. (1999). *Ethnomathematics and its First International Congress.*
http://vello.sites.uol.com.br/icem.htm
(Page consultée le 31 mai 2005)

East Cree Language Web
http://www.carleton.ca/ecree/en/
(Page consultée le 6 novembre 2005)

First International Congress on Ethnomathematics. International Study Group on Ethnomathematics. 2nd-5th September 1998. Granada (Spain)
http://www.ugr.es/~oliveras/ICEM1IN.htm
(Page consultée le 10 septembre 2004)

Freiman, V. et Volkov, A (2004). *Fractions and ... Fractions Again?*! A comparative Analysis of the Presentation of Common Fractions in the Textbooks Belonging to Different Didactical Traditions: Paper accepted for ICME-10, Discussion Group 14. Copenhagen, Denmark, 4-11 July 2004
http://www.icme-organisers.dk/dg14/DG14-Viktor.pdf
(Page consultée le 6 septembre 2004)

Goodwill, K. (2005) *Traditional Ways of Knowing and the Curriculum.* Dream Catching 2005 Workshops.
http://www.dream-catching.com/2005/?page=workshops
(Page consultée le 9 février 2005)

Karine, Duval (2000). Dossier professionnel : Concours de recrutement de professeurs des écoles. *L'erreur : un obstacle à analyser.*
http://damien.fradet.free.fr/img_g/memoires/memoire_pe1:pdf
(Page consultée le 8 juin 2007)

NASGEm (North American Study Group on Ethnomathematics) Newsletter. Volume 1, Number 1, February 2003
http://www.ccd.rpi.edu/Eglash/nasgem/March%2013%20Journal%20Inside.pdf
(Page consultée le 4 février 2006)

Orfanos, Stavros. *The need of teaching the limits and the possibilities of the representation systems that offer the surrounding support for comprehending the concept of fraction.* European research in mathematics education
http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG1/TG1_orfanos_cerme3.pdf
(Page consultée le 22 avril 2005)

Patrimoine canadien. *Le Canada en fête*
http://www.pch.gc.ca/special/affiche-poster/jeux-games/06_f.cfm
(Page consultée le 10 février 2005)

Prediger, Suzanne. *Perspectives interculturelles sur l'apprentissage des mathématiques.*
http://www.leibniz.imag.fr/LesCahiers/
(Page consultée le 1 juin 2005)

Pressiat, A. *Quotients, Proportionnalité, Grandeurs*. Maître de conférence à l'IUFM d'Orléans-Tours. Chercheur à l'INRP
http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/reflexionpro/conferences/confpressiat/Quotients.pdf
(Page consultée le 3 décembre 2004)

Quinn, Eilis. (2001). *Ethnomathematics for Native educators*.
http://ctr.concordia.ca/2000-01/Mar_1/15-DreamCatching/index.shtml
(Page consultée le 28 février 2005)

Roberge, Marie. *Arc-en-ciel*. Chroniques : Légende de rêve
http://www.petitmonde.com/iDoc/Chronique.asp?id=29072
(Page consultée le 16 juin 2005)

Rouche, Nicolas. *Le sens de la mesure. Des grandeurs aux nombres rationnels*. Collection Formation, Édition : Dider Hatier, 1992, 312 pages.
http://michel.delord.free.fr/rouche.pdf
(Page consultée le 28 avril 2005)

Schneider, M. *Problèmes, situations-problèmes en mathématiques : un regard pluraliste*. Facultés universitaires de Namur, Sedess de Liège.
http://www.educationjesuite.be/publications/txt_enseignants/pbm_situationpbm.pdf
(Page consultée le 12 novembre 2005)

Secrétariat aux affaires autochtones. Ministère du Conseil exécutif.
http://www.autochtones.gouv.qc.ca/relations_autochtones/profils_nations/cris.htm
(Page consultée le 7 octobre 2005)

Takuya, Baba. *Significance of Ethnomathematical Research : Towards International Cooperation with the Developing Countries*. Hiroshima University, Japan.
http://www.mes3.learning.aau.dk/Papers/Baba.pdf
(Page consultée le 1 juin 2005)

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, Anna O. et Wilson, James W. (1998). *The Teaching Module on Rational Numbers for Prospective Elementary Teachers*. The University of Georgia.
http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Module.html
(Page consultée le 3 décembre 2004)