UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LA TORSION DE REIDEMEISTER ET SES APPLICATIONS EN TOPOLOGIE DE BASSE DIMENSION

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

SARAH ZBIDA

JANVIER 2025

REMERCIEMENTS

La première personne à qui j'aimerais adresser mes remerciements est Steven Boyer, mon directeur de mémoire, qui a éveillé une curiosité insoupçonnée en moi pour la topologie algébrique. Merci de m'avoir encouragée tout au long de ces deux dernières années et de m'avoir incité à sortir de ma zone de confort à de nombreuses reprises.

Merci à ma famille, qui me soutient depuis toujours. Merci de m'encourager à ne jamais m'arrêter.

Merci à Marc-André Brochu, pour tout. Je ne compte pas le nombre de craies que nous avons usées, ni le nombre de kilomètres que nous avons marché à parler de noyau, conoyau, de flèches, de catégories, de dualité, de faisceaux, de cohomologie, de tores, de nœuds, de propriétés universelles (grand sujet), de complexes de chaînes, de catégories abéliennes, de surfaces de Riemann, de la 3-sphère, de fibrés, de sections, d'espaces lenticulaires, de torsion ... J'en oublie certainement. Ta capacité à trouver de nouveaux points de vue et à développer une intuition aussi précise sur certains sujets m'émerveilleront pour toujours.

Merci à Patricia Sorya pour nos nombreux voyages mathématiques qui m'ont, tous, inspiré profondément. Merci également pour toutes ces heures passées à parler de mathématiques lors de notre séminaire étudiant : cela a été pour moi une véritable source d'inspiration et de motivation.

Merci à tous les collègues que j'ai rencontré pendant ces deux dernières années. Merci à mes amies pour leur soutien.

Merci à l'ISM pour le soutien financier qu'il m'a apporté pour participer à une école d'hiver à l'étranger. Je remercie à nouveau mon directeur de mémoire, mais aussi la Faculté des Sciences et la Fondation de l'UQAM pour leur précieux soutien financier.

Et puis, merci à Charlie.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES

RÉSUMÉ

Nous présentons la torsion de Reidemeister, le premier invariant en topologie algébrique permettant de différencier des variétés fermées équivalentes par homotopie, mais qui ne sont pas homéomorphes. Nous passons en revue quelques applications de cet invariant. En particulier, nous exposons la classification des espaces lenticulaires de dimension quelconque à homéomorphismes près. Nous traitons aussi de la caractérisation des nœuds fibrés par la torsion de Reidemeister.

Mots-clés : topologie, topologie algébrique, complexe de chaînes, torsion de Reidemeister, espaces lenticulaires, noeuds fibrés.

ABSTRACT

We present the Reidemeister torsion, the first invariant in algebraic topology that could distinguish between homotopy equivalent but not homeomorphic closed manifolds. We review some applications of this invariant. In particular, we present the classification of any finite dimensional lens spaces, up to homeomorphisms. Finaly, we concerns about fibered knots and how Reidemeister torsion helps to detect them.

Keywords : topology, algebraic topology, chain complex, Reidemeister torsion, lens spaces, fibered knots.

INTRODUCTION

La topologie algébrique est un des domaines des mathématiques qui utilise des outils d'algèbre pour étudier des espaces topologiques. L'objectif principal de la topologie algébrique est de trouver des invariants algébriques qui permettent de classifier les espaces topologiques à homéomorphisme près. Ce sont des quantités algébriques que nous pouvons associer à des espaces topologiques, de sorte que si deux espaces topologiques sont homéomorphes, ils partagent cette même quantité algébrique. Les invariants algébriques sont souvent utilisés pour affirmer que deux espaces topologiques ne sont pas homéomorphes. Les plus connus sont le groupe fondamental, les groupes d'homotopie supérieurs, les groupes d'homologie ou de cohomologie et la caractéristique d'Euler. L'expérience nous a montré que ces invariants ont leurs limites, puisqu'en général, ils ne caractérisent pas totalement les espaces topologiques à homéomorphisme près.

Les n-variétés topologiques sont des espaces topologiques qui admettent localement la structure d'un espace euclidien de dimension n. Les espaces lenticulaires forment une classe spéciale de 3-variétés topologiques fermées et orientables. C'est Walther Franz Anton von Dyck qui les définit pour la première fois, à l'aide des diagrammes de Heegaard, lors d'une conférence donnée à Montréal en 1884. Ce n'est qu'en 1931 que le terme d'espace lenticulaire fait son apparition pour la première fois dans l'article (Threlfall et Seifert, 1931) de William Threlfall et Herbert Seifert.

Auparavent, en 1908 Heinrich Tietze expose son travail sur de tels espaces, en les qualifiant d'espaces "simples" : *«ein in gewisser Hinsicht möglichst einfacher Typus von zweiseitigen geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten»* [1] (Tietze, 1908). Il se pose alors les questions suivantes :

— à quelle condition doivent répondre les espaces lenticulaires pour être homéomorphes ?
— est-ce que les invariants algébriques connus à cette époque suffisent pour classer les espaces lenticulaires à homéomorphisme près ?

1. Peut se traduire par : «d'un certain point de vue, le type le plus simple possible de 3-variété à deux côtés»

À la seconde question, il parvient à conjecturer une réponse négative en réussissant à calculer le groupe fondamental des espaces $L(5,1)$ et $L(5,2)$ et en analysant leur structure. En 1919, James Waddell Alexander réussi à prouver que les espaces lenticulaires ne peuvent pas être classifiés à homéomorphismes près grâce aux invariants connus à cette époque (Alexander, 1919). La classification des espaces lenticulaires devient alors un sujet d'intérêt grandissant auprès de la communauté mathématique et les années 1930 ont été florissantes pour le sujet.

En 1933, Threlfall et Seifert parviennent à trouver une réponse partielle à la première question de Tietze. Ils démontrent que $L(p,q)$ et $L(p,q')$ ne sont pas homéomorphes si $q \cdot q' \not\equiv \pm 1 \mod p$ (Threlfall et Seifert, 1933). Kurt Reidemeister réussira à classifier complètement les espaces lenticulaires en prouvant que la condition suffisante exposée par Threlfall et Seifert est en fait nécessaire (Reidemeister, 1935a). La méthode qu'il a utilisé (Reidemeister, 1935b), connue aujourd'hui sous le nom de torsion de Reidemeister, a été généralisée par Wolfgang Franz (Franz, 1935).

Dans le chapitre 1, nous concentrons notre attention sur les aspects purement algébriques de la torsion. Nous définissons la torsion d'un complexe de chaînes d'espaces vectoriels, avant de la généraliser à des complexes de chaînes d'anneaux. Nous discutons du caractère fonctoriel de la torsion, puis nous étudions des méthodes pour la calculer facilement.

Le chapitre 2 propose une approche topologique de la torsion de Reidemeister. Nous exposons des résultats classiques de topologie algébrique afin que tout lecteur, toute lectrice détenant peu de connaissances dans ce domaine puisse être en mesure de comprendre le reste de notre discussion. Nous présentons également la méthode à suivre pour calculer la torsion de Reidemeister d'un CW-complexe, c'est-à-dire d'un espace topologique admettant une structure particulière.

Une généralisation des espaces lenticulaires de dimension 3 à des espaces lenticulaires de dimension impaire existe et est présentée au chapitre 3. Dans ce chapitre, nous exposons la définition de tels espaces et nous donnons la classification des espaces lenticulaires à homéomorphisme près. Nous traitons également la classification des espaces lenticulaires à équivalence par homotopie près. Nous

discutons des espaces lenticulaires infinis en guise d'ouverture.

Dans le chapitre 4, nous esquissons une introduction brève à la théorie des nœuds pour être en mesure de discuter du résultat, datant de 2003, de Hiroshi Goda, Teruaki Kitano et Takayuki Morifuji sur l'application de la torsion de Reidemeister à la détection de nœuds fibrés.

CHAPITRE 1
THÉORIE ALGÉBRIQUE DES TORSIONS

Dans ce chapitre, nous allons étudier la théorie purement algébrique des torsions et nous allons voir comment elles généralisent le concept de déterminant défini pour des isomorphismes d'espaces vectoriels.

1.1 Torsion d'un complexe de chaînes d'espaces vectoriels

1.1.1 Complexes de chaînes acycliques

Nous travaillons avec un corps $\mathbb{K}$, V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et nous choisissons de travailler avec deux bases distinctes $v = (v_1, \ldots, v_n)$ et $w = (w_1, \ldots, w_n)$ de V. Nous pouvons alors facilement décider de passer de la base v à la base w, ou inversement, à l'aide de matrices de changement de base, aussi appelées matrices de passage. Si nous notons $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ une telle matrice, nous avons la relation suivante :

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} w_j \qquad i = 1, \ldots, n.$$

La matrice de passage A est une matrice de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et est non-dégénérée, c'est-à-dire que tous ses mineurs principaux sont non nuls. Pour des raisons qui émergeront par elles-mêmes dans la suite de notre travail, nous introduisons la notation suivante pour désigner le déterminant de la matrice de changement de base avec laquelle nous travaillons :

$$[v/w] = \det(A) \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

Définition 1.1 Soient v et w deux bases distinctes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension finie. Nous disons que v et w sont *équivalentes* si $[v/w] = 1$. Dans ce cas, nous noterons que $v \sim w$.

Lemme 1.2 *Cette relation est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Pour passer d'une base v à elle-même, la matrice de passage en question ne sera rien d'autre que la matrice identité, de déterminant égal à 1. Ainsi, la relation est réflexive. Si la matrice de passage de la base v à w, notée A_v^w, est de déterminant égal à 1, autrement dit si $[v/w] = \det(A_v^w) = 1$, alors la matrice de passage de la base w à la base v, notée A_w^v sera elle aussi de déterminant $1 : [w/v] = \det(A_w^v) = \det((A_v^w)^{-1}) = \frac{1}{\det(A_v^w)} = 1$. Ainsi, la relation est symétrique. Enfin, si u est une autre base pour V, alors d'après les propriétés des matrices de passage, nous avons que $A_v^u = A_v^w.A_w^u$. D'après les propriétés du déterminant, il est clair que $[v/u] = [v/w].[w/u]$. Ainsi, la relation est transitive. □

Définition 1.3 Soient $C_0, C_1, \ldots, C_m$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $\partial_i : C_{i+1} \to C_i$ des morphismes linéaires. La suite d'espaces vectoriels et de morphismes suivante est un *complexe de chaînes* si $\operatorname{Im} \partial_i \subset \operatorname{Ker} \partial_{i-1}$, pour tout $i = 1, \ldots, m$:

$$C = (0 \longrightarrow C_m \xrightarrow{\partial_{m-1}} C_{m-1} \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_1 \xrightarrow{\partial_0} C_0 \longrightarrow 0) \ .$$

Remarque 1.4 *Demander que la condition* $\operatorname{Im} \partial_i \subset \operatorname{Ker} \partial_{i-1}$*, pour tout* $i = 1, \ldots, m$ *, soit vérifiée, est équivalent à demander que* $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$ *pour tout* i*.*

Définition 1.5 L'espace vectoriel $H_i(C) = \operatorname{Ker} \partial_{i-1} \big/ \operatorname{Im} \partial_i$ est le *i-ième groupe d'homologie* de C.

Définition 1.6 Un complexe de chaînes est *acyclique* si $H_i(C) = 0$ pour tout i.

Définition 1.7 Un complexe de chaînes est *marqué* si une base c_i est donnée pour C_i et ce pour tout i.

Exemple 1.8 *Si f est l'application représentée par la matrice suivante* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *et g est l'application représentée par la matrice* $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$*, alors le complexe de chaînes suivant est acyclique :*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^1 \longrightarrow 0 \ .$$

La théorie des torsions nous permet d'extraire de l'information des complexes de chaînes acycliques, c'est-à-dire lorsque l'homologie n'est pas en mesure de nous fournir de l'information pertinente. Nous verrons plus tard que l'élaboration de complexes de chaînes acycliques n'est pas toujours évidente et qu'elle requiert parfois un peu de travail.

Soit $C = (0 \longrightarrow C_m \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0)$ un complexe de chaînes acyclique sur $\mathbb{K}$. Nous posons $B_i = \mathrm{Im}(\partial_i : C_{i+1} \to C_i) \subset C_i$. La suite d'espaces vectoriels ci-dessous est alors exacte et $\dim(C_i) = \dim(B_i) + \dim(B_{i-1})$:

$$0 \longrightarrow B_i \hookrightarrow C_i \xrightarrow{\partial_{i-1}} B_{i-1} \longrightarrow 0 \ .$$

Nous choisissons b_i une base de l'espace vectoriel B_i, pour $i = -1, \ldots m$. Par convention, nous admettons que $B_{-1} = B_m = 0$ et que b_{-1} et b_m sont des ensembles vides. Comme le morphisme $\partial_{i-1} : C_i \to B_{i-1}$ est surjectif, nous pouvons relever chaque élément de la base b_{i-1} à un élément $\tilde{b}_{i-1}$ de C_i. Ainsi, nous pouvons construire une base de C_i en concaténant les éléments de la façon suivante :

$$b_i b_{i-1} = (b_1, \ldots, b_{\dim(B_i)}, \tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_{\dim(B_{i-1})}).$$

Définition 1.9 Soit C un complexe de chaînes de longueur m, marqué des bases c_i et acyclique. La torsion de C est donnée par :

$$\tau(C) = \prod_{i=0}^{m} [b_i b_{i-1}/c_i]^{(-1)^{i+1}} \in \mathbb{K}^*.$$

Lemme 1.10 *La torsion d'un complexe de chaînes marqué ne dépend pas du choix des bases b_i.*

Démonstration. Soit $i \in \{0, \ldots, m-1\}$. Pour montrer le résultat, il suffit de montrer que deux termes successifs du produit ne dépendent pas du choix des b_i. Soit b_i' une autre base de B_i. En reprenant les notations utilisées précédemment pour les matrices de passage, nous avons le fait suivant :

$$A^{c_i}_{b_i' b_{i-1}} = A^{b_i b_{i-1}}_{b_i' b_{i-1}} . A^{c_i}_{b_i b_{i-1}}.$$

Ceci exprime seulement l'idée que nous pouvons passer par une base intermédiaire. Alors, d'après les propriétés du déterminant, nous avons l'égalité suivante :

$$[b'_i b_{i-1}/c_i] = [b'_i b_{i-1}/b_i b_{i-1}] \cdot [b_i b_{i-1}/c_i].$$

Nous pouvons simplifier encore un peu cette expression, puisque la matrice de changement de base de $b'_i b_{i-1}$ à $b_i b_{i-1}$ ressemble à ceci :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{b'_i}^{b_i} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Id} \end{array}\right]$$

Ainsi $[b'_i b_{i-1}/b_i b_{i-1}] = [b'_i/b_i]$. En conséquence, nous avons l'égalité suivante :

$$[b'_i b_{i-1}/c_i] = [b'_i/b_i] \cdot [b_i b_{i-1}/c_i].$$

En reprenant les mêmes idées, nous avons que :

$$\begin{aligned}[b_{i+1} b'_i/c_{i+1}] &= [b_{i+1} b'_i/b_{i+1} b_i] \cdot [b_{i+1} b_i/c_{i+1}] \\ &= [b'_i/b_i] \cdot [b_{i+1} b_i/c_{i+1}]\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, nous avons le résultat qu'il fallait démontrer :

$$\begin{aligned}[b'_i b_{i-1}/c_i]^{(-1)^{i+1}} \cdot [b_{i+1} b'_i/c_{i+1}]^{(-1)^{i+2}} &= [b'_i/b_i]^{(-1)^{i+1}+(-1)^{i+2}} \cdot [b_i b_{i-1}/c_i]^{(-1)^{i+1}} \cdot [b_{i+1} b_i/c_{i+1}]^{(-1)^{i+2}} \\ &= [b_i b_{i-1}/c_i]^{(-1)^{i+1}} \cdot [b_{i+1} b_i/c_{i+1}]^{(-1)^{i+2}}\end{aligned}.$$

□

Remarque 1.11 *Ainsi définie, la torsion d'un complexe de chaînes marqué et acyclique dépend du choix des bases c_i de C_i. Un calcul rapide permet de s'en convaincre :*

$$\tau(C') = \tau(C) \prod_{i=0}^{m} [c_i/c'_i]^{(-1)^{i+1}}.$$

Exemple 1.12 *Considérons le complexe de chaînes suivant :*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \xhookrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \longrightarrow 0 \ ,$$

où f est l'application qui envoie tout vecteur (x, y) sur lui-même. f est clairement une bijection et la torsion de ce complexe de chaînes est simplement $\tau(C) = \det(A)^{-1} = 1$, où A est la matrice de l'application f.

Définition 1.13 Soient C, C', C'' des complexes de chaînes. La suite courte de complexe de chaînes suivante $0 \longrightarrow C' \longrightarrow C \longrightarrow C'' \longrightarrow 0$ est *exacte* si pour chaque i, nous avons la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow C'_i \xhookrightarrow{\alpha_i} C_i \xrightarrow{\beta_i} C''_i \longrightarrow 0 \ ,$$

et pour chaque i, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C'_i & \xrightarrow{\alpha_i} & C_i & \xrightarrow{\beta_i} & C''_i & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \partial'_{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \partial''_{i-1}} & & \\ 0 & \longrightarrow & C'_{i-1} & \xrightarrow[\alpha_{i-1}]{} & C_{i-1} & \xrightarrow[\beta_{i-1}]{} & C''_{i-1} & \longrightarrow & 0 \end{array} \ .$$

Théorème 1.14 *Soient C, C' et C'' des complexes de chaînes acycliques tels que la suite courte suivante soit exacte $C' \longrightarrow C \longrightarrow C''$. Supposons que les groupes de chaînes C'_i, C_i et C''_i admettent respectivement comme bases c'_i, c_i et c''_i telles que $c_i \sim c'_i c''_i$. Alors $\tau(C) = \pm\tau(C')\tau(C'')$*

Démonstration. Posons $B_i = \mathrm{Im}(\partial_i : C_{i+1} \to C_i)$, $B'_i = \mathrm{Im}(\partial'_i : C'_{i+1} \to C'_i)$ et $B''_i = \mathrm{Im}(\partial''_i : C''_{i+1} \to C''_i)$. Clairement, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C'_i & \xrightarrow{\alpha_i} & C_i & \xrightarrow{\beta_i} & C''_i & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B'_i & \xrightarrow{\alpha_i} & B_i & \xrightarrow{\beta_i} & B''_i & \longrightarrow & 0 \end{array} \ .$$

La suite horizontale du haut est exacte par hypothèse et les flèches verticales sont injectives. Ces deux faits, combinés avec le fait que nos complexes sont supposés acycliques, nous permettent d'affirmer que la suite du bas est elle aussi exacte. Ainsi, en choisissant une base b'_i de B'_i, une base b''_i de B''_i et en les combinant en une base $b_i = b'_i b''_i$ de B_i, nous avons :

$$\begin{aligned}
\tau(C) &= \prod_i [b_i b_{i-1}/c_i]^{(-1)^{i+1}} \\
&= \prod_i [b'_i b''_i b'_{i-1} b''_{i-1}/c_i]^{(-1)^{i+1}} \\
&= \pm \prod_i [b'_i b'_{i-1} b''_i b''_{i-1}/c'_i c''_i]^{(-1)^{i+1}} \\
&= \pm \prod_i \left([b'_i b'_{i-1}/c'_i]^{(-1)^{i+1}} \cdot [b''_i b''_{i-1}/c''_i]^{(-1)^{i+1}}\right) \\
&= \pm \tau(C')\tau(C'').
\end{aligned}$$

□

1.1.2 Complexe de chaînes avec homologie non triviale

Il est possible de généraliser la définition de torsion d'un complexe de chaînes d'espaces vectoriels de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, à des complexes de chaînes qui ne sont pas nécessairement acycliques.

Supposons que $C = (0 \longrightarrow C_m \longrightarrow ... \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0)$ soit un complexe de chaînes d'espaces vectoriels de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Supposons également que pour tout indice i, nous choisissons une base de l'espace $H_i(C) = \operatorname{Ker} \partial_{i-1} \big/ \operatorname{Im} \partial_i$. Posons $B_i = \operatorname{Im} \partial_i \subset C_i$ et $Z_i = Ker\partial_{i-1}$. Clairement nous avons les inclusions et les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
0 \subset B_i \subset Z_i \subset C_i, \\
H_i(C) = Z_i \big/ B_i, \\
B_{i-1} = C_i \big/ Z_i.
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons les deux suites exactes courtes suivantes :

$$0 \longrightarrow Z_i \hookrightarrow C_i \twoheadrightarrow B_{i-1} \longrightarrow 0 \ ,$$

$$0 \longrightarrow B_i \hookrightarrow Z_i \twoheadrightarrow H_i(C) \longrightarrow 0 \ .$$

Nous lisons alors clairement que $\dim C_i = \dim H_i(C) + \dim B_i + \dim B_{i-1}$ (nous utiliserons cette

égalité dans la remarque suivante). Nous obtenons aussi qu'il existe des sections pour chaque i :

$$s_i : B_{i-1} \to C_i$$
$$l_i : H_i(C) \to Z_i$$

Toute section étant un monomorphisme, nous pouvons ainsi reconstruire une base pour C_i, à partir des bases de B_i, B_{i-1} et $H_i(C)$, respectivement notées par b_i, b_{i-1} et h_i. Une telle base, que l'on notera c_i' peut se construire comme suit :

$$c_i' = b_i \oplus l_i(h_i) \oplus s_i(b_{i-1}).$$

Définition 1.15 Soit C un complexe de chaînes marqué de longueur m. Soit c_i' une base de C_i construite comme ci-dessus. La torsion du complexe C est donnée par :

$$\tau(C) = \prod_{i=0}^{m} [c_i'/c_i]^{(-1)^{i+1}}.$$

La torsion d'un tel complexe de chaînes marqué dépend de la nouvelle base c_i' : la dépendance provient du choix de base réalisé pour chacun des $H_i(C)$.

Remarque 1.16 *La multiplicativité de la torsion énoncée au théorème 1.14 peut être comparée avec l'additivité de la caractéristique d'Euler,*

$$\chi(C) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dim C_i :$$

si on a une suite exacte courte de complexes de chaînes $0 \longrightarrow C' \hookrightarrow C \twoheadrightarrow C'' \longrightarrow 0$ *, nous avons que* $\chi(C) = \chi(C') + \chi(C'')$*, car toute suite exacte induite de complexes de chaînes est exacte.*

Remarque 1.17 *En notant que*

$$\chi(C) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dim C_i = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dim H_i(C),$$

nous avons que la caractéristique d'Euler d'un complexe de chaînes acyclique est triviale. Ainsi, la caractéristique d'Euler ne nous donne pas d'informations supplémentaires sur notre complexe de chaînes.

1.2 Généralisation de la torsion de complexes de chaînes sur un anneau

La torsion d'un complexe de chaînes marqué et acyclique définie dans la section précédente ne peut pas directement se généraliser à des complexes de chaînes sur un anneau A. En effet, l'anneau n'étant pas supposé commutatif, nous n'avons pas la garantie d'avoir accès à la notion de déterminant. Pour pallier ceci, nous allons généraliser la définition de torsion en utilisant des matrices de taille infinie.

Dans la suite, nous travaillerons avec un anneau A tel que A soit unitaire avec unité $1 \neq 0$ et tel que pour tout entier $r \neq s \in \mathbb{N}$, A^r et A^s ne sont pas isomorphes en tant que A-modules, où $A^r \cong \bigoplus_{i=1}^{r} A$.

Définition 1.18 Soit $n \in \mathbb{N}$. Le *groupe général linéaire d'ordre* n consiste en les éléments inversibles de $\mathcal{M}(n, A)$, l'espace des matrices de taille $n \times n$ à coefficient dans A, un anneau. Il est noté $GL(n, A)$.

Remarque 1.19 *Dans un anneau commutatif, $GL(n, A)$ est simplement le groupe constitué des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans A, de déterminant égal à un élément inversible de A.*

Définition 1.20 Le *groupe général infini linéaire* est $GL(A) = \bigcup_{n \geq 0} GL(n, A)$.

Remarque 1.21 *La structure de groupe est donnée par la multiplication matricielle : remarquons que si deux matrices sont de tailles différentes, il suffit de rajouter assez de lignes et de colonnes de 0 pour pouvoir les multiplier ensemble. L'élément neutre de $GL(A)$ est une classe d'équivalence représentée par la matrice identité de $GL(1, A)$.*

Remarque 1.22 *Chaque matrice $M \in GL(n, A)$ peut être identifiée avec une matrice de $GL(n + 1, A)$:*

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nous avons ainsi une suite d'inclusions $GL(1, A) \subset GL(2, A) \subset \ldots$

Exemple 1.23 *$GL(A)$ est en fait la limite inductive des suites d'inclusions $GL(n, A) \to GL(n + 1, A)$. La torsion d'un complexe de chaînes acyclique sur un anneau unitaire sera un élément de $K_1(A)$ qui est défini comme l'abélianisé du groupe $GL(A)$. Une définition du concept de limite inductive peut être trouvée dans (Riehl, 2016, p.75) ou encore dans (MacLane, 1978, p.62).*

Définition 1.24 Le *groupe de Whitehead sur un anneau A* est défini par

$$K_1(A) = {}^{GL(A)}\Big/[GL(A), GL(A)]\,.$$

Remarque 1.25 *Le groupe K_1 défini ci-dessus a été introduit pour la première fois par Hyman Bass.*

Les travaux de J.H.C. Whitehead ont permis de montrer que le groupe dérivé $[GL(A), GL(A)]$ est en fait le groupe $E(A)$ généré par les matrices élémentaires à coefficients dans A. Ce résultat est connu sous le nom du lemme de Whitehead. Le groupe $K_1(A) = {}^{GL(A)}\Big/_{E(A)}$ a été d'abord étudié par Whitehead dans son article "Simple homotopy types" (Whitehead, 1950).

Exemple 1.26 *Comme le groupe $GL(n, \mathbb{Z})$ est généré par les matrices élémentaires de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (d'après l'algorithme de la forme normale de Smith), il coïncide, d'après le lemme de Whitehead, avec son groupe $E(\mathbb{Z})$. Ainsi, $K_1(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$.*

Dans la suite, nous considérons un complexe de chaînes C de longueur finie m, acyclique sur un anneau unitaire A, de sorte que chaque groupe de chaînes soit un A-module libre de rang fini. Nous supposons de plus que chaque module $B_i = Im\partial_i$ est libre. Nous choisissons des bases ordonnées b_i pour chacun de ces modules B_i, et de la même façon que dans la section précédente, nous les concaténons pour obtenir une base $b_i b_{i-1}$ de C_i. Pour c_i une base de C_i, nous notons par $(b_i b_{i-1}/c_i)$ la matrice de transition de la base c_i à la base $b_i b_{i-1}$.

Proposition 1.27 *Les matrices $(b_i b_{i-1}/c_i)$ ainsi définies sont des matrices carrées .*

Démonstration. L'anneau A vérifiant la propriété que A^r n'est pas isomorphe à A^s pour tout entier $r \neq s \in \mathbb{N}$ nous assure que les bases c_i et $b_i b_{i-1}$ ont même cardinalité. □

Définition 1.28 La torsion d'un complexe C est donnée par

$$\tau(C) = p\left(\prod_{i=0}^{m}(b_i b_{i-1}/c_i)^{(-1)^{i+1}}\right) \in K_1(A),$$

où $p : GL(A) \to K_1(A)$ est la projection canonique.

Lemme 1.29 *La torsion ainsi définie ne dépend pas du choix des* b_i.

Démonstration. La preuve est la même que pour le lemme 1.10 en l'appliquant à $\hat{\tau}(C) = \prod_{i=0}^{m}(b_i b_{i-1}/c_i)^{(-1)^{i+1}}$, élément de $GL(A)$ □

Définition 1.30 Un A-module M est dit *libre sous stabilisation* s'il existe un module libre de rang fini N tel que $M \oplus N$ soit libre.

Lemme 1.31 *Les modules* B_i *sont libres sous stabilisation.*

Démonstration. Nous allons prouver ce lemme par induction. D'abord, $B_0 = C_0$ est libre par hypothèse. Supposons que B_{i-1} soit libre sous stabilisation, alors par définition il existe un module libre de rang fini N_{i-1} tel que $B_{i-1} \oplus N_{i-1}$ soit libre. La suite courte suivante est donc exacte :

$$0 \longrightarrow B_i \longrightarrow C_i \oplus N_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}\oplus id} B_{i-1} \oplus N_{i-1} \longrightarrow 0 \ .$$

Le module $B_{i-1} \oplus N_{i-1}$ étant libre, il existe une section $s_{i-1} : B_{i-1} \oplus N_{i-1} \to C_i \oplus N_{i-1}$. Posons $N_i = s_{i-1}(B_{i-1} \oplus N_{i-1})$ et ainsi $C_i \oplus N_{i-1} = B_i \oplus N_i$. □

Si F est un A-module libre, nous noterons par $C(F, i)$ le complexe de chaînes acyclique suivant

$$(\ \text{------}\ 0 \longrightarrow F \xrightarrow{id} F \longrightarrow 0\ \text{------}\ )$$

dont les groupes (modules) de chaînes F_j sont triviaux pour $j \neq i, i+1$.

Soit C un complexe de chaînes acyclique de longueur m sur un anneau, comme ci-dessus. Pour chaque entier $i = 0, 1, \ldots, m-1$ nous pouvons construire (par le lemme ci-dessus) un A-module libre F_i tel que $B_i \oplus F_i$ soit libre.

Définition 1.32 La torsion du complexe de chaînes acyclique de A-modules libres $C \oplus \bigoplus_i C(F_i, i)$ est donnée par

$$\tau(C) = \tau\left(C \oplus \bigoplus_{i=0}^{m-1} C(F_i, i)\right) \in K_1(A)$$

.

Lemme 1.33 *La torsion ainsi définie ne dépend pas du choix des F_i.*

Démonstration. Si nous trouvons une autre famille de A-modules libres F_i' tels que $B_i \oplus F_i'$ soit libre, nous avons :

$$\begin{aligned}
\tau\left(C \oplus \bigoplus_i C(F_i', i)\right) &= \tau\left(C \oplus \bigoplus_i C(F_i', i) \oplus \bigoplus_i C(F_i, i)\right) \\
&= \tau\left(C \oplus \bigoplus_i C(F_i, i) \oplus \bigoplus_i C(F_i', i)\right) \\
&= \tau\left(C \oplus \bigoplus_i C(F_i, i)\right)
\end{aligned}$$

□

Lemme 1.34 *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Alors l'application $\det : K_1(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ est un isomorphisme de groupes abéliens.*

Démonstration. Soit $M \in GL(n, \mathbb{K})$ telle que $\det(M) = 1$. Puisque M est une matrice carrée à coefficient dans un corps, de déterminant égal à 1, nous savons que M peut s'écrire comme un produit de matrices élémentaires. Les matrices élémentaires étant des commutateurs, nous avons donc que $M \in [GL(n, \mathbb{K}), GL(n, \mathbb{K})]$. Ceci prouve l'injectivité du morphisme. La surjectivité provient du fait que tout corps est ici supposé commutatif. □

Théorème 1.35 *Soit $0 \longrightarrow C' \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C'' \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de complexes de chaînes acycliques de rang fini sur A. Supposons que C_i', C_i, C_i'' soit marqués des bases c_i', c_i, c_i'' respectivement, telles que l'image de $(c_i/c_i'c_i'') \in K_1(A)$ soit égale à $1 = [1]$ pour tout i. Alors*

$$\tau(C) = \pm\tau(C')\tau(C'') \in K_1(A).$$

Démonstration. C'est une généralisation du théorème 1.14. Une preuve peut être trouvée dans l'ouvrage (Turaev, 2001, p.15). □

1.3 Fonctorialité

Définition 1.36 Soit $\varphi : A \to A'$ un morphisme d'anneaux unitaires. Soit K un A-module. Le *produit tensoriel* $A' \otimes_\varphi K$ est le A'-module généré par

$$\{\lambda' \otimes k \mid \lambda' \in A', k \in K\}$$

assujetti aux relations suivantes, pour $r \in A$, $\lambda' \in A'$, $k \in K$:

$$\lambda' \otimes rk = \lambda'\varphi(r) \otimes k$$

et aux relations de bilinéarité usuelles, où $\lambda'_i \in A'$, $k_i \in K$ et $r_i, l_i \in A$:

$$(r_1\lambda'_1 + r_2\lambda'_2) \otimes k = \varphi(r_1)(\lambda'_1 \otimes k) + \varphi(r_2)(\lambda'_2 \otimes k),$$

$$\lambda'_1 \otimes (l_1k_1 + l_2k_2) = \varphi(l_1)(\lambda'_1 \otimes k_1) + \varphi(l_2)(\lambda'_1 \otimes k_2).$$

Remarque 1.37 *Le produit entre éléments de l'anneau A et A' est bien défini puisque nous pouvons voir A' comme un A-module, à l'aide de l'application φ : $r\lambda' = \varphi(r)\lambda'$, pour $r \in A$ et $\lambda' \in A'$.*

Lemme 1.38 *Soit C un complexe de chaînes sur un anneau unitaire A, dont chaque groupe de chaînes admet une base. Alors le complexe $C' = A' \otimes_\varphi C$ est un complexe de chaînes sur A' et chacun des groupes de chaînes admet également une base.*

Démonstration. Les groupes de chaînes C'_i étant libres, ils admettent chacun une base. Ainsi, $A' \otimes_\varphi C_i = A' \otimes_\varphi A^r = (A')^r$ est également libre et admet une base, où r est le rang de C_i. Les groupes de chaînes C'_i sont ainsi libres et le complexe C' peut ainsi être marqué. □

Lemme 1.39 *Le morphisme φ induit un morphisme de groupe $\varphi_* : K_1(A) \to K_1(A')$*

Démonstration. Si M_i désigne la matrice associée au morphisme de bord $\partial_i : C_{i+1} \to C_i$, alors $M_i^\varphi = (\varphi(M_i))$ est la matrice associée au morphisme de bord $\partial'_i : C'_{i+1} \to C'_i$. Le morphisme φ

induit un morphisme de groupe $GL(A) \to GL(A')$ en envoyant les entrées $a_{i,j}$ d'une matrice sur $\varphi(a_{i,j})$. En réalisant le quotient de chacun des groupes $GL(A)$ et $GL(A')$ par leurs sous-groupes des commutateurs respectifs, nous obtenons un morphisme induit $\varphi_* : K_1(A) \to K_1(A')$. □

Proposition 1.40 *Si C est marqué et acyclique, alors C' est également marqué et acyclique et $\tau(C') = \varphi_*(\tau(C))$.*

Démonstration. Il est facile de voir que C' est acyclique en utilisant des propriétés de base du calcul homologique. La torsion de C' est également facilement calculable, étant donné que tout élément de C_i sera envoyé sur son image par φ. □

1.4 Calcul homologique de la torsion

1.4.1 Idéaux déterminantiels

Pour pouvoir calculer la torsion d'un complexe de chaînes acyclique, nous aurons ici besoin de la notion d'idéaux déterminantiels. De tels idéaux sont utilisés pour construire les idéaux de Fitting, nommés en l'honneur du mathématicien Hans Fitting, qui mesurent l'obstruction à générer un module à partir d'un nombre d'éléments donnés. Dans cette section, nous travaillerons avec A, un anneau commutatif unitaire et M un A-module finiment généré.

Définition 1.41 Une *présentation d'un A-module M* est une suite exacte de A-modules :

$$\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} A \longrightarrow \bigoplus_{j\in\mathcal{J}} A \longrightarrow M \longrightarrow 0 \ .$$

Si $\mathcal{J}$ est fini, alors M est un module finiment généré. Si $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont finis, alors la présentation est dite finie. Un module est dit finiment présenté s'il admet une présentation finie.

Remarque 1.42 *Dans notre cas, nous travaillerons avec un ensemble d'indices $\mathcal{J}$ fini. Les vecteurs de la base de $\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} A$ déterminent un système de générateurs du module M. Aussi, $\mathcal{I}$ reste potentiellement infini. Chaque vecteur de la base de $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} A$ correspond aux relations entre les générateurs.*

Définition 1.43 Soit $n = \mathrm{card}(\mathcal{I}) \in \mathbb{N}$ et $m = \mathrm{card}(\mathcal{J})$. La matrice de taille $m \times n$ du morphisme de M-module $A^m \to A^n$ est appelée la *matrice de présentation de* M.

Exemple 1.44 *Supposons que M soit le A-module généré par deux générateurs x_1 et x_2 et soumis aux relations suivantes :*

$$r_{1,1}x_1 + r_{1,2}x_2 = 0,$$
$$r_{2,1}x_1 + r_{2,2}x_2 = 0.$$

La matrice de présentation du module M sera alors

$$\begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ r_{2,1} & r_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Remarque 1.45 *Le nombre de lignes de la matrice de présentation du module M correspond aux générateurs de M tandis que le nombre de colonnes correspond aux relations entre les générateurs.*

Définition 1.46 Soit N la matrice de présentation de taille $m \times n$ d'un A-module finiment généré M. Nous supposons que $m \geq n$. Les idéaux déterminantiels, notés $E_k(M)$, sont définis par :

$$E_k(M) = \begin{cases} A & \text{si } n \leq k \\ D_k & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } n - k > m. \end{cases}$$

où D_k est l'idéal engendré par les $(n-k) \times (n-k)$ sous-déterminants de la matrice N.

Remarque 1.47 *L'hypothèse $m \geq n$ n'est pas très contraignante : si $m < n$, il suffit d'ajouter $n - m$ lignes constituées seulement de 0 à la matrice N. Ceci n'aura aucune incidence sur le calcul des sous-déterminants de la matrice de présentation du module en question.*

Exemple 1.48 *En reprenant la matrice de l'exemple précédent, nous trouvons les idéaux détermi-*

nantiels suivants :

$$E_0(M) = \langle r_{1,1}r_{2,2} - r_{1,2}r_{2,1}\rangle$$
$$E_1(M) = \langle r_{i,j} \mid i = 1, 2, j = 1, 2\rangle$$
$$E_2(M) = A \text{ , pour } k \geq 2.$$

Lemme 1.49 *Les idéaux déterminantiels $E_k(M)$ ne dépendent pas du choix de la matrice de présentation du $A-$module M.*

Démonstration. Soit M un A-module finiment généré. Soient T et S deux matrices de présentation de M. Nous notons par $t_1, \ldots, t_n$ ainsi que $s_1, \ldots, s_{n'}$ les générateurs de M correspondant respectivement à ces deux matrices. Comme nos bases sont ordonnées, nous pouvons décider de les concaténer en ajoutant, sans perte de généralité, s_1 à l'ensemble de générateurs $t_1, \ldots, t_n$. Nous pouvons alors considérer une nouvelle matrice de présentation pour le module M de taille $(n+1) \times (m+1)$

$$T' = \begin{bmatrix} * & 1 \\ T & 0 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice T' est obtenue à partir de la matrice T en ajoutant une relation $s_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i t_i$, pour $\lambda_i \in A$.

L'argument peut se répéter jusqu'à ce que la matrice T soit remplacée par une matrice de présentation qui correspond aux générateurs $t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_{n'}$. Nous aurions également pu réitérer le même argument, mais en partant des générateurs $s_1, \ldots, s_{n'}$ et en ajoutant un à un, les générateurs $t_1, \ldots, t_n$. Ainsi, nous aurions obtenu que $E_k(M)$ ne dépende pas du choix des générateurs.

Supposons alors que $n = n'$ et que $t_i = s_i$ pour tout i. Chaque colonne de S est ainsi une combinaison linaire des colonnes de T. L'idéal engendré par les $(n-k) \times (n-k)$ sous-déterminants de T est ainsi égal à l'idéal engendré par les $(n-k) \times (n-k)$ sous-déterminants de S, par la formule de Laplace. □

Proposition 1.50 *Soit M un A-module finiment généré. Les idéaux déterminantiels $E_k(M)$ forment une chaînes croissante d'idéaux $E_0(M) \subset E_1(M) \subset \ldots$*

Démonstration. D'après la formule de Laplace, le calcul du déterminant d'une matrice est simplement une combinaison linéaire de ses sous-déterminants. Par définition des idéaux déterminantiels, le résultat est immédiat. □

1.4.2 Un peu d'algèbre : plus grand commun diviseur d'un idéal et ordre d'un module

Définition 1.51 Un anneau commutatif A avec unité est un anneau *sans diviseur de zéro* si pour chaque $a, b \in A \setminus \{0\}$ nous avons $ab \neq 0$.

Définition 1.52 Un élément $a \in A \setminus \{0\}$ est *premier* si $a = bc$ implique que b ou c est inversible dans A.

Définition 1.53 Un anneau A est *factoriel* si chaque $a \in A \setminus \{0\}$ s'écrit de façon unique comme un produit d'éléments premiers de A.

Exemple 1.54 *L'anneau des polynômes en n indéterminées $K[X_1, \ldots, X_n]$ est un anneau factoriel, où K est un corps.*

Définition 1.55 Soit E un sous-ensemble d'un anneau factoriel A. Le *plus grand commun diviseur* de E, noté $\mathrm{pgcd}(E) \in A$, est un générateur du plus petit idéal principal contenant E.

Remarque 1.56 *Si E est le sous-ensemble d'un anneau A qui ne contient que l'élément nul, alors* $\mathrm{pgcd}(E) = 0$. *Au contraire, si $E = A$, alors* $\mathrm{pgcd}(E) = 1$.

Proposition 1.57 *Soient I et J deux idéaux d'un anneau factoriel A et soit $a \in A$. Alors les égalités suivantes sont vérifiées, à multiplication par un élément inversible de A près,*

$$\mathrm{pgcd}(IJ) = \mathrm{pgcd}(I)\,\mathrm{pgcd}(J)$$
$$\mathrm{pgcd}(aI) = a\,\mathrm{pgcd}(I).$$

Démonstration. Soient I et J deux idéaux d'un anneau factoriel A. Rappelons que l'idéal IJ est l'idéal généré additivement par les éléments ab pour $a \in I$ et $b \in J$. Pour prouver les égalités ci-dessus, nous pouvons nous restreindre au cas où $\mathrm{pgcd}(I) = \mathrm{pgcd}(J) = 1$ en divisant chaque idéal par son plus grand commun diviseur. Si $a \in A$ est premier, alors il existe des éléments $x \in I$, et $y \in J$ qui ne sont pas divisibles par a. Alors $xy \in IJ$ n'est pas divisible par a non plus. Ceci implique que $\mathrm{pgcd}(IJ) = 1 = \mathrm{pgcd}(I)\,\mathrm{pgcd}(J)$. □

Dans la suite, nous travaillerons avec A un anneau non trivial commutatif et intègre, et M un A-module finiment généré et représenté par une matrice de taille $m \times n$ où $m \geq n$.

Notation 1.58 *Nous noterons* $\Delta_k(M) = \mathrm{pgcd}(E_k(M)) \in A$.

Lemme 1.59 $\Delta_{k+1}(M) \mid \Delta_k(M)$ *pour* $k = 0, 1, \ldots$

Démonstration. Ceci est une conséquence immédiate du fait que nous avons les inclusions suivantes $E_0(M) \subset E_1(M) \subset \ldots$, d'après la proposition 1.50. □

Définition 1.60 L'*ordre* du module M est défini comme étant $\Delta_0(M)$. Nous le noterons par $\mathrm{ord}\, M$.

Notation 1.61 *Si A est un anneau non trivial commutatif et intègre, nous noterons $\tilde{A}$ son corps des fractions.*

Définition 1.62 Le *rang* d'un module M est défini comme étant la dimension de l'espace vectoriel $\tilde{A} \otimes_A M$.

Définition 1.63 Le *sous-module de torsion* de M est $\mathrm{Tors}\, M = \{x \in M \mid ax = 0,\ a \in A \setminus \{0\}\}$.

Théorème 1.64 *Soit A un anneau non trivial commutatif et intègre. Soit $\tilde{A}$ le corps des fractions de A. Soit M un A-module finiment généré et soit N la matrice de présentation du module M, de taille*

$m \times n$ où $m \geq n$. Les équivalences suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
\operatorname{ord} M = \Delta_0(M) \neq 0 &\iff E_0(M) \neq 0 \\
&\iff \textit{Au moins un des } (n \times n) \textit{ sous-déterminants de la matrice } N \textit{ n'est pas nul} \\
&\iff \tilde{A} \otimes_A M = 0 \\
&\iff \operatorname{rang} M = 0 \\
&\iff M = \operatorname{Tors} M.
\end{aligned}$$

Démonstration. Supposons que $\Delta_0(M) \neq 0$. Par définition, nous avons donc que $\operatorname{pgcd}(E_0(M)) \neq 0$ et alors d'après la remarque 1.56, $E_0(M) \neq 0$. Comme l'idéal déterminantiel $E_0(M)$ est généré par les $(n \times n)$ sous-déterminants de la matrice de présentation du module M, il est clair qu'au moins un de ces sous-déterminants est non trivial. Alors la matrice N est de rang n et d'après l'égalité suivante $n - \dim(\tilde{A} \otimes_A M) = \operatorname{rang} N$, nous avons clairement que $\dim(\tilde{A} \otimes_A M) = 0$. Nous avons alors gratuitement que $\operatorname{rang} M = 0$. Par définition du sous-module de torsion de M, nous avons que

$$\operatorname{Tors} M = \operatorname{Ker}(M \to \tilde{A} \otimes_A M = 0)$$

et alors il est clair que $M = \operatorname{Tors} M$.

Réciproquement, supposons que $M = \operatorname{Tors} M$. Alors comme $\tilde{A} \otimes_A M \cong \tilde{A} \otimes_A (M/\operatorname{Tors} M)$, il vient directement que $\tilde{A} \otimes_A M = 0$. Par définition, ceci revient à dire que $\operatorname{rang} M = 0$. L'égalité suivante $n - \dim(\tilde{A} \otimes_A M) = \operatorname{rang} N$ nous donne alors que N est de rang maximal, c'est-à-dire égal à n. Par définition du rang d'une matrice, N admet alors un $(n \times n)$ sous-déterminant non nul et il est clair que $E_0(M) \neq 0$ et donc que $\Delta_0(E_0(M)) \neq 0$. □

1.4.3 Calcul de la torsion

Définition 1.65 Un anneau A est *noethérien* si tous ses idéaux sont finiment générés.

Exemple 1.66 *Le théorème de la base de Hilbert affirme que si A est un anneau commutatif noethérien, alors l'anneau des polynômes à n indéterminées $A[X_1, \ldots, X_n]$ est noethérien. Une preuve de ce théorème peut être étudiée dans (Lang, 1965, p.186-187)*

Pour alléger un peu les hypothèses, nous considérons maintenant tout anneau A comme étant non trivial et unitaire. Les propriétés supplémentaires sont ajoutées au besoin dans les hypothèses.

Pour prouver le prochain lemme, nous allons avoir besoin des deux théorèmes suivants. Ces théorèmes, ainsi que leurs preuves, sont exposés dans (Blanchfield, 1957, p.350, p.353).

Théorème 1.67 *Soit M un A-module finiment généré, où A est un anneau commutatif, intègre et noethérien. Soit P un sous-module de M. Alors $\Delta_k(P)$ divise $\Delta_k(M)$ pour tout $k \geq 0$.*

Théorème 1.68 *Soit M un A-module finiment généré, où A est un anneau commutatif, intègre et noethérien. Soit P un sous-module de M. Alors $\Delta_{k+l}(M)$ divise $\Delta_k(P) \cdot \Delta_l(M/P)$ pour tout $k, l \geq 0$.*

Lemme 1.69 *Soit M un module finiment généré sur un anneau A commutatif, intègre et noethérien. Alors*

$$\Delta_k(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < \operatorname{rang} M \\ \Delta_{k-\operatorname{rang} M}(\operatorname{Tors} M) & \text{si } k \geq \operatorname{rang} M. \end{cases}$$

Démonstration. Supposons que $k < \operatorname{rang} M$ et notons N la matrice de présentation de M, supposée de taille $m \times n$ où $m \geq n$. Alors

$$n - k > n - \operatorname{rang} M = n - \dim(\tilde{A} \otimes_A M) = \operatorname{rang} N.$$

Rappelons que le rang d'une matrice A est le plus grand des ordres des sous-déterminants non nuls de A. D'après l'inégalité ci-dessus, nous en déduisons que tous les sous-déterminants de taille $(n-k) \times (n-k)$ de la matrice N s'annulent. D'après la définition des idéaux déterminantiels 17, tous les $E_k(M)$ sont donc triviaux. Ainsi, $\Delta_k(M) = 0$ pour $k < \operatorname{rang} M$. Supposons que $k \geq \operatorname{rang} M$. La preuve exposée ici s'appuie sur les théorèmes 1.67 et 1.68 et s'inspire de la preuve du lemme exposé dans (Blanchfield, 1957, p.353). Notons que le module $M/\operatorname{Tors} M$ est sans torsion, alors $\Delta_{\operatorname{rang} M}(M/\operatorname{Tors} M) = A$. Par le théorème 1.68, nous avons que $\Delta_k(M)$ divise $\Delta_{k-\operatorname{rang} M}(\operatorname{Tors} M) \cdot \Delta_{\operatorname{rang} M}(M/\operatorname{Tors} M) = \Delta_{k-\operatorname{rang} M}(\operatorname{Tors} M)$ pour $k \geq \operatorname{rang} M$. De

plus par le théorème 1.67, nous avons que $\Delta_k(M')$ divise $\Delta'_k(M)$, où M' est le module généré par $\mathrm{Tors}\, M$ et par un sous-module de M généré par $\mathrm{rang}\, M$ éléments linéairement indépendants. Alors $\Delta_k(M) = \Delta_{k-\mathrm{rang}\, M}(\mathrm{Tors}\, M)$. □

Lemme 1.70 *Soit A un anneau commutatif, intègre et noethérien et soit*

$$C = \ (C_m \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_0)$$

un complexe de chaînes dont les groupes de chaînes C_i sont des A-modules libres de rang fini. Soit M_i la matrice du morphisme $\partial_i : C_{i+1} \to C_i$. Posons $K_i = \mathrm{rang}\, M_i$. Soit I_i l'idéal généré par les K_i-mineurs de M_i. Alors

$$\mathrm{ord}\, \mathrm{Tors}(H_i(C)) = \mathrm{pgcd}(I_i), \text{ pour } i = 0, \ldots, m.$$

Démonstration. Une preuve de ce lemme peut être étudiée dans (Turaev, 2001, p.21). □

Théorème 1.71 *(Turaev, 1986) Soit A un anneau commutatif, intègre et noethérien. Soit*

$$C = \ (C_m \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_0)$$

un complexe de chaînes dont les groupes de chaînes C_i sont des A-modules libres de rang fini. Supposons que $\mathrm{rang}\, H_i(C) = 0$ pour tout i. Soit $\tilde{A}$ le corps des fractions de A. Alors le complexe de chaînes $\tilde{C} = \tilde{A} \otimes_A C$ est acyclique et

$$\tau(\tilde{C}) = \prod_{i=0}^{m} (\mathrm{ord}\, H_i(C))^{(-1)^{i+1}}.$$

Démonstration. La preuve complète de ce théorème peut être étudiée dans (Turaev, 2001, p.20-22) mais nous donnons ici les premières idées. Il faut d'abord prouver que le complexe de chaînes $\tilde{C}$ est acyclique. Soit $x \in Ker(\tilde{\partial}_i : \tilde{C}_{i+1} \to \tilde{C}_i)$. Il existe un élément $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $ax \in C_{i+1}$. Nous avons que $\partial_i(ax) = a\partial_i(x) = 0$, car x est un élément du noyau. Le rang de chaque groupe d'homologie étant trivial, nous avons que $H_i(C) = \mathrm{Tors}\, H_i(C)$: il existe donc un élément $a' \in$

$A \setminus \{0\}$ tel que la classe d'homologie du cycle $a'ax$ soit triviale. Ainsi, il existe un élément $y \in C_{i+2}$ tel que $\partial_{i+1}(y) = a'ax$. Notre anneau A étant supposé intègre, $a'a \neq 0$ et ainsi $x = \partial_{i+1}((a'a)^{-1}y)$. Le complexe de chaînes $\tilde{C}$ est ainsi acyclique et il fait alors sens de calculer sa torsion. Le calcul est explicité dans (Turaev, 2001, p.20-22). □

CHAPITRE 2
THÉORIE TOPOLOGIQUE DES TORSIONS

À partir d'un espace topologique ayant de bonnes propriétés, nous pouvons construire un complexe de chaînes agréable pour lequel nous pouvons calculer sa torsion de Reidemeister. En 1935, Kurt Reidemeister introduit pour la première fois cet outil révolutionnaire.

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques concepts de base en topologie, puis nous étudierons la torsion de Reidemeister ainsi que quelques-unes de ses propriétés remarquables.

2.1 Concepts fondamentaux

Cette section s'appuie fortement sur une des ressources les plus connues et les plus complètes dans l'étude de la topologie algébrique : Algebraic Topology par Allen Hatcher.

2.1.1 Groupe fondamental

Le groupe fondamental d'un espace topologique a été introduit en 1895 par Henri Poincaré dans son fameux article "Analysis Situs" (Poincaré, 1895). C'est un des premiers invariants topologiques : un invariant topologique est une propriété qui ne change pas sous homéomorphisme. Les invariants topologiques sont surtout utilisés pour prouver que deux espaces topologiques ne sont pas homéomorphes.

Définition 2.1 Soit X un espace topologique. Un *chemin* dans X est une application continue $f : [0,1] \to X$. Si f est telle que $f(0) = f(1)$, f est un *lacet*. L'inverse f^{-1} d'un lacet est le chemin $f^{-1}(t) = f(1-t)$.

Définition 2.2 Une *homotopie de chemins* dans X est une famille $f_t : [0,1] \to X$, pour $0 \leq t \leq 1$ telle que :

— les extrémités $f_t(0) = x_0$ et $f_t(1) = x_1$ sont indépendantes de t,

— l'application $F : [0,1] \times [0,1]$ définie par $F(s,t) = f_t(s)$ est continue.

Lorsqu'il existe une homotopie de chemins entre f et g, nous disons que f et g sont homotopes et on note $f \simeq g$.

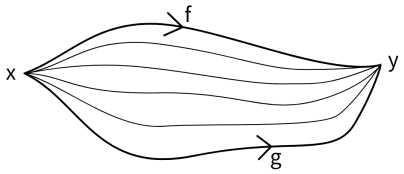


FIGURE 2.1 Les chemins f et g sont homotopes

Définition 2.3 L'ensemble de toutes les classes d'homotopie de lacets $f : [0,1] \to X$ basés en un point x_0 est noté par $\pi_1(X, x_0)$.

Proposition 2.4 *$\pi_1(X, x_0)$ est un groupe dont le produit est donné est par $[f][g] = [f \cdot g]$ où $\cdot$ désigne la concaténation de chemin suivante :*

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s), 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s-1), \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Démonstration. Une preuve peut être étudiée dans l'ouvrage (Hatcher, 2001, p.27). □

Proposition 2.5 *Si X est connexe par arcs, alors le groupe $\pi_1(X, x_0)$ est indépendant du choix de x_0, à isomorphisme près. Dans ce cas, on le note $\pi_1(X)$.*

Démonstration. Cette preuve se retrouve dans (Hatcher, 2001, p.28). Soient x_0 et x_1 deux points distincts de notre espace topologique X, supposé connexe par arcs. Comme X est connexe par arcs, il existe une application continue $h : I \to X$ qui relie x_0 à x_1. Nous notons par h^{-1} le chemin inverse de h. Ainsi à chaque lacet f basé en x_1, nous pouvons construire le lacet $h \cdot f \cdot h^{-1}$ basé en x_0. L'application $\gamma_h : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ qui a $[f]$ associe $[h \cdot f \cdot h^{-1}]$ est un isomorphisme d'inverse $\gamma_{h^{-1}}$. □

Définition 2.6 Un espace topologique X est *simplement connexe* si X est connexe par arcs et $\pi_1(X) = 1$.

Exemple 2.7 *$\pi_1(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathcal{S}^n) \cong 0$ pour $n \geq 2$. La preuve de ces faits peut être étudiée dans (Hatcher, 2001, p.29 et p.35)*

Définition 2.8 Soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques telle que $f(x_0) = y_0$. Alors f induit un morphisme $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ défini par la composition de lacet $h : I \to X$ basé en x_0 avec f. Autrement dit $f_*[h] = [fh]$.

2.1.2 Revêtements

2.1.2.1 Théorie de base des revêtements

Définition 2.9 Un *revêtement* d'un espace topologique X est la donnée d'un espace $\tilde{X}$ et d'une application $\rho : \tilde{X} \to X$ telle que chaque point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel que l'image réciproque $\rho^{-1}(U)$ est la réunion disjointe d'une collection d'ouvert $\{U_\alpha\}_\alpha$ telle que $\rho \restriction_{U_\alpha}$ soit un homéomorphisme sur U pour tout α.

Exemple 2.10 *L'exemple classique est le revêtement du cercle $\mathcal{S}^1$ par la droite réelle $\mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R} &\to \mathcal{S}^1 \\ x &\mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)). \end{aligned}$$

Définition 2.11 Le *nombre de feuillets* au-dessus de l'ouvert U correspond à la cardinalité de $\rho^{-1}(x)$ pour $x \in U$.

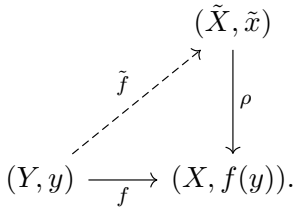
Proposition 2.12 *Soient X et $\tilde{X}$ deux espaces topologiques connexes par arcs. Le nombre de feuilles du revêtement $\rho : (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \to (X, x_0)$ est égal à l'indice du sous-groupe $\rho_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ de $\pi_1(X, x_0)$.*

Démonstration. Une preuve de ce fait peut être étudiée dans l'ouvrage (Hatcher, 2001, p.61). □

Définition 2.13 *Soit X un espace topologique. X est localement connexe par arcs s'il admet une base de voisinage connexes par arcs. Autrement dit, X est localement connexe par arcs si pour tout point $x \in X$ et pour tout voisinage V de x, il existe un voisinage connexe par arcs $U \subset V$ qui contient x.*

Exemple 2.14 *L'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$, muni de la topologie induite par la métrique usuelle, est localement connexe par arcs, pour $n \in \mathbb{N}$.*

Lemme 2.15 *Soit $\rho : \tilde{X} \to X$ un revêtement, soit Y un espace connexe et localement connexe par arcs et soit $f : Y \to X$ une application continue. Soit $y \in Y$ et $\tilde{x} \in \rho^{-1}(f(\tilde{y}))$. Si $f_*\pi_1(Y, y) \subset \rho_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$, alors il existe une unique application continue $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ telle que $\tilde{f}(y) = \tilde{x}$ et $\rho \circ \tilde{f} = f$:*



Démonstration. Une preuve peut être étudiée dans l'ouvrage (Massey, 1967, p. 156). □

Corollaire 2.16 *Si $\rho : \tilde{X} \to X$ est un revêtement où $\tilde{X}$ est connexe et X est simplement connexe et localement connexe par arcs, alors ρ est un homéomorphisme.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 2.15 à $Y = X$ en prenant $f = id : X \to X$. □

Définition 2.17 Un *isomorphisme de revêtements* $\rho_1 : \tilde{X_1} \to X$ et $\rho_2 : \tilde{X_2} \to X$ est un homéomorphisme $f : \tilde{X_1} \to \tilde{X_2}$ tel que $\rho_1 = \rho_2 \circ f$.

Corollaire 2.18 *Soit X un espace connexe et localement connexe par arcs. Supposons que $\rho_1 : \pi_1(\tilde{X_1}, \tilde{x_1}) \to \pi_1(X, x)$ et $\rho_2 : \pi_1(\tilde{X_2}, \tilde{x_2}) \to \pi_1(X, x)$ soient des revêtements de X où $\tilde{X_1}$ et $\tilde{X_2}$ sont connexes et $(\rho_1)_*(\tilde{X_1}, \tilde{x_1}) = (\rho_2)_*(\tilde{X_2}, \tilde{x_2}) \subset \pi_1(X, x)$. Alors les deux revêtements sont isomorphes.*

Démonstration. Comme X est localement connexe par arcs, $\tilde{X_1}$ et $\tilde{X_2}$ le sont également. Le lemme 2.15 implique qu'il existe des applications $f : (\tilde{X_1}, \tilde{x_1}) \to (\tilde{X_2}, \tilde{x_2})$ et $g : (\tilde{X_2}, \tilde{x_2}) \to (\tilde{X_1}, \tilde{x_1})$ telles que $\rho_2 \circ f = \rho_1$ et $\rho_1 \circ f = \rho_2$. Le lemme nous donne également l'unicité : $g \circ f = id_{\tilde{X_1}}$ et $f \circ g = id_{\tilde{X_2}}$, et alors f et g sont des homéomorphismes inverses l'un de l'autre. □

Définition 2.19 Un revêtement simplement connexe d'un espace topologique X est appelé un *revêtement universel*. Il est unique à isomorphisme près.

Définition 2.20 X est *semi-localement simplement connexe* si chaque point $x \in X$ admet un voisinage U tel que le morphisme $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ soit trivial.

Théorème 2.21 *Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs. Alors X admet un revêtement universel si et seulement si X est semi-localement simplement connexe.*

Démonstration. Une preuve peut être étudiée dans l'ouvrage (Massey, 1967, p.160) ou encore dans l'ouvrage (Kosniowski, 1980, p.171-172). □

2.1.2.2 Action de groupe

Définition 2.22 Soit X un espace topologique et G un groupe. Une *action* de G sur X est une application telle que :

- $1x = 1$ pour $x \in X$,
- $g(hx) = (gh)x$ pour tout $x \in X$ et $g, h \in G$,
- l'application $x \mapsto gx$ est un homéomorphisme pour tout $g \in G$.

Définition 2.23 Soit X un espace topologique et G un groupe agissant sur X. L'*orbite* d'un élément $x \in X$ est l'ensemble $\mathcal{O}(x) = \{gx \mid g \in G\}$.

Définition 2.24 Soit X un espace topologique et G un groupe qui agit sur X. Alors l'action de G est *proprement discontinue* si pour chaque $x \in X$ il existe un voisinage ouvert $U_x \subset X$ de x tel que $gU \cap U = \emptyset$ pour chaque $g \in G \setminus \{1\}$.

Définition 2.25 Une action est dite *libre* si pour $x \in X$, $gx = x \implies g = 1_G$.

Lemme 2.26 *Toute action libre d'un groupe fini G sur X un espace de Hausdorff est proprement discontinue.*

Démonstration. Soit $x_0 \in X$, $g \in G \setminus \{1\}$. Comme G est un groupe fini, l'orbite de x_0, $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ est également un ensemble fini. X étant un espace de Hausdorff, il existe un voisinage ouvert V_i pour chaque x_i tel que $V_i \cap V_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$. Pour chaque élément $g \in G \setminus \{1\}$,

si $gx_0 = x_i$ pour un $i \in \{1, \ldots, n\}$, nous pouvons trouver un voisinage U_g autour de x_0 tel que $gU_g \subset V_i$. Alors en posant $U = V_0 \cap \bigcap_{g \in G} U_g$, U est bien ouvert, car G est supposé fini et nous avons que $gU \subset V_i$, où $gx_0 = x_i$. Ainsi $gU \cap U = \emptyset$. □

Lemme 2.27 *Soient p et q deux entiers premiers entre eux et soit ξ une racine p-ième primitive de l'unité fixée. L'action sur $\mathcal{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ générée par l'application*

$$(z_1, z_2) \mapsto (\xi z_1, \xi^q z_2)$$

est une $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-action proprement discontinue sur $\mathcal{S}^3$.

Démonstration. D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que cette action est libre, car $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un groupe fini et $\mathcal{S}^3$ est un espace de Hausdorff. Supposons que $\xi^k \dot{(} z_1, z_2) = (\xi^k z_1, \xi^{kq} z_2) = (z_1, z_2)$. Alors nous avons $\xi^k z_1 = z_1$ et $\xi^{kq} z_2 = z_2$. Si $z_1 \neq 0$, ces égalités nous donnent que $\xi^k = 1$. Si $z_1 = 0$, alors comme $(z_1, z_2) \in \mathcal{S}^3$, nous avons $z_2 \neq 0$. Alors $\xi^{kq} z_2 = z_2$ nous donne que $\xi^{kq} = 1$ mais les entiers p et q sont supposés premiers entre eux, alors $\xi^k = 1$. L'action est donc libre, et par le lemme précédent, elle est aussi proprement discontinue. □

Définition 2.28 L'espace quotient X/G est l'ensemble des orbites sous l'action de G, muni de la topologie quotient. Un sous-ensemble $U \subset X/G$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans X, où $\pi : X \to X/G$ est la projection.

Théorème 2.29 *Soit X un espace topologique simplement connexe et G un groupe, avec une action proprement discontinue de G sur X. Alors l'application $X \to X/G$ est un revêtement universel et le groupe fondamental de X/G est isomorphe à G.*

Démonstration. Une preuve peut être étudiée dans l'ouvrage (Hatcher, 2001, p.71). □

Corollaire 2.30 *Soit $\rho : \tilde{X} \to X$ un revêtement universel d'un espace X connexe et localement connexe par arcs. Alors le groupe $\pi_1(X)$ agit sur X, son action est proprement discontinue et $\tilde{X}/\pi_1(X)$ est homéomorphe à X.*

Exemple 2.31 *L'espace quotient $\mathcal{S}^3/\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est celle énoncée dans le lemme 2.27, est appelé un espace lenticulaire de paramètre p et q et se note $L(p,q)$. Nous l'étudierons plus en détail dans le chapitre 3 et étudierons en particulier leur classification à homéomorphisme près.*

2.1.2.3 Revêtement abélien maximal et revêtement abélien libre

Soit X un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semi-localement connexe. Soit $\rho : \tilde{X} \to X$ le revêtement universel de X. Comme $\pi_1 = \pi_1(X)$ agit de façon proprement discontinue (au sens de 2.24) sur $\tilde{X}$, le sous-groupe $[\pi_1, \pi_1]$ agit de la même façon sur $\tilde{X}$. Posons $\hat{X} = \tilde{X}/[\pi_1, \pi_1]$.

Définition 2.32 Le revêtement universel $\rho : \tilde{X} \to X$ induit un revêtement $\hat{\rho} : \hat{X} \to X$, appelé le *revêtement abélien maximal* de X.

Remarque 2.33 *Le groupe $H = H_1(X;\mathbb{Z})$ agit de façon proprement discontinue sur $\hat{X}$ et $X = \hat{X}/H$. Un tel revêtement est qualifié d'abélien, car $H_1(X;\mathbb{Z})$ est l'abélianisé du groupe fondamental de X.*

Soit $G = H/\operatorname{Tors} H$ où $H = \pi_1/[\pi_1, \pi_1] = H_1(X;\mathbb{Z})$. Posons $\overline{X} = \hat{X}/_{\operatorname{Tors} H}$, où $\operatorname{Tors} H$ est le sous-groupe de H qui contient tous les éléments d'ordre fini.

Définition 2.34 Le revêtement abélien maximal $\hat{\rho}$ induit un revêtement $\overline{\rho} : \overline{X} \to X$, appelé le *revêtement abélien libre* de X.

Remarque 2.35 *Le groupe G agit de façon proprement discontinue sur $\overline{X}$ et $X = \overline{X}/G$.*

Remarque 2.36 *Nous obtenons ainsi une tour de revêtement $\tilde{X} \longrightarrow \hat{X} \longrightarrow \overline{X} \longrightarrow X$ où $X = \tilde{X}/\pi_1 = \hat{X}/H = \overline{X}/G$*

Exemple 2.37 *Pour $X = \mathcal{S}^1$, $\overline{X} = \hat{X} = \tilde{X} = \mathbb{R}$.*

Exemple 2.38 *Pour $X = L(p,q)$, $\overline{X} = L(p,q)$ et $\hat{X} = \tilde{X} = \mathcal{S}^3$. Nous définissons un tel espace $L(p,q)$ à l'exemple 2.31. Nous irons plus dans le détail dans le chapitre 3.*

2.1.3 Variété et compacité

Cette sous-section se veut très brève, mais nous aurons besoin de ces résultats pour justifier des propriétés intéressantes de certaines variétés. Dans toute la suite de notre discussion, nous travaillerons, sauf mention contraire, avec des variétés topologiques.

Définition 2.39 Une *n-variété topologique* est un espace topologique de Hausdorff, localement homéomorphe à un espace Euclidien de dimension n.

Définition 2.40 Un espace topologique X est *compact* si tout recouvrement de X par des ouverts admet un sous-recouvrement fini.

Définition 2.41 Une n-variété topologique est *compacte* si elle est compacte en tant qu'espace topologique.

Exemple 2.42 *Toute n-sphère $\mathcal{S}^n$ est une variété topologique compacte de dimension n.*

Définition 2.43 Soit X un espace topologique et G un groupe. Nous disons que X est un *G-espace* si G agit sur X et si la fonction $\alpha_g : X \to X$ qui à x associe gx est continue pour tout $g \in G$.

Lemme 2.44 *Supposons que X soit un G-espace. La fonction $\alpha_g : X \to X$ qui à x associe gx est un homéomorphisme pour tout $g \in G$.*

Démonstration. Ce lemme est en fait un exercice dans (Kosniowski, 1980, p.37). Comme X est un G-espace, α_g est une application continue pour tout $g \in G$, en particulier $\alpha_{g^{-1}}$ est continue également. De plus, en remarquant que $\alpha_g \alpha_{g^{-1}} = 1_X = \alpha_{g^{-1}} \alpha_g$, le résultat est démontré. □

Théorème 2.45 *Supposons que X soit un G-espace. Alors la projection canonique $\pi : X \to X/G$ est une application ouverte.*

Démonstration. La preuve suivante s'inspire fortement de ce qui est montré dans (Kosniowski, 1980, p.38). Soit U un ouvert de X. Alors :

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(U)) &= \{x \in X \mid \pi(x) \in \pi(U)\} \\ &= \{x \in X \mid x = gy, \text{ pour } y \in U \text{ et } g \in G\} \\ &= \{x \in X \mid x \in gU, \text{ pour un } g \in G\} \\ &= \bigcup_{g \in G} gU.\end{aligned}$$

Comme l'action de tout élément de G est un homéomorphisme d'après le lemme précédent, nous avons que $\pi^{-1}(\pi(U))$ est ouvert, et donc que $\pi(U)$ est ouvert dans X/G. □

Théorème 2.46 *Supposons que X soit un G-espace, où G est un groupe fini. Alors la projection canonique $\pi : X \to X/G$ est une application fermée.*

Démonstration. Soit V un fermé de X. Par un raisonnement similaire à la preuve du théorème précédent, nous avons l'égalité suivante.

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{g \in G} gV.$$

Comme G est supposé fini et que l'action α_g est un homéomorphisme pour tout $g \in G$, $\pi^{-1}(\pi(V))$ est donc un fermé, et alors $\pi(V)$ est fermé dans X/G. □

Théorème 2.47 *Soit X un espace topologique, $\sim$ une relation d'équivalence sur X et soit $\pi : X \to X/\sim$ la projection. Si X est compact et de Hausdorff et si π est une application fermée, alors $X/\sim$, muni de la topologie quotient, est également compact et de Hausdorff.*

Démonstration. La preuve de ce théorème peut être étudiée dans l'ouvrage (Kosniowski, 1980, p.54). □

Théorème 2.48 *Si G est un groupe fini agissant de façon libre sur un G-espace X, où X est une n-variété compacte, alors X/G est une n-variété compacte.*

Démonstration. Ce théorème est en fait un exercice dans (Kosniowski, 1980, p.77). D'après les théorèmes précédents, $\pi : X \to X/G$ est ici une application fermée et alors X/G est un espace topologique compact et de Hausdorff. Il reste à prouver que X/G est localement homéomorphe à un espace Euclidien de dimension n. Comme G est fini et que l'action de G sur X est supposée libre, le lemme 2.26 nous assure que l'action est proprement discontinue. Soit $x \in X$. L'action étant proprement discontinue, il existe un voisinage $U_x \subset X$ de x tel que $gU_x \cap U_x = \emptyset$ et ce pour tout élément $g \in G \setminus \{1\}$. X étant par hypothèse une n-variété, $U_x \cong \mathbb{R}^n$ et comme α_g est un homéomorphisme de X sur lui-même, nous avons que $U_x \cong \pi(U_x)$ et le résultat est démontré. □

Exemple 2.49 *Un espace lenticulaire $L(p, q)$ tel que défini à l'exemple 2.31 est ainsi une 3-variété compacte.*

2.1.4 CW-complexe

La notion de CW-complexe est certainement une des notions les plus importantes en topologie algébrique. Les lettres C et W décrivent succinctement la structure de tels espaces. Pour reprendre les mots de J. H. C. Whitehead (Whitehead, 1949), un CW-complexe est l'abréviation pour *closure finite complexes with weak topology*.

Définition 2.50 Soient $X \subset X'$ deux espaces topologiques. Nous disons que X' est obtenu à partir de X en attachant des k-cellules s'il existe des applications $f_i^k : \mathbb{D}^k \to X'$ telles que l'application $\coprod_i f_i^k : \coprod_i \mathrm{Int}(\mathbb{D}^k) \to X' \setminus X$ soit un homéomorphisme.

Ici les $e_i^k = f_i^k(\mathrm{Int}(\mathbb{D}^k)) = f_i^k(\{x \in \mathbb{D}^k \mid |x| < 1\})$ sont appelées les k-cellules ouvertes, bien qu'elles ne soient pas nécessairement ouvertes pour la topologie définie sur X. Les applications f_i^k sont appelées les applications d'attachement des k-cellules e_i^k.

Définition 2.51 Une *structure de CW-complexe* sur un espace topologique X est la donnée d'une séquence croissante de sous-espaces fermés $X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \ldots X_n = X$ tels que :

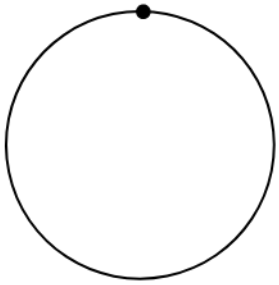


FIGURE 2.2 Une structure de CW-complexe sur $\mathcal{S}^1$

— X^0 est un espace discret et non vide,

— pour $k \geq 1$, X^k est obtenu à partir de X^{k-1} en attachant des k-cellules ouvertes.

Le sous-ensemble X^k est appelé le k-squelette de X. Un CW-complexe est fini s'il est formé d'un nombre fini de cellules. Un CW-complexe est fini si et seulement si l'espace topologique sous-jacent est compact.

Définition 2.52 Un *sous-complexe d'un CW-complexe* X est un sous-espace $A \subset X$ qui s'écrit comme une réunion de cellules de X, telle que la fermeture de chaque cellule dans A soit contenue dans A.

Proposition 2.53 *Un sous-espace compact d'un CW-complexe est contenu dans un sous-complexe fini.*

Démonstration. Une preuve peut être étudiée dans (Hatcher, 2001, p.520). □

Exemple 2.54 *Toute sphère $\mathcal{S}^n$ admet une structure de CW-complexe : elle est la donnée d'une 0-celulle à laquelle est attachée une n-celulle.*

Exemple 2.55 *La courbe sinusoïdale du topologue $T = \{(x, \sin x) \mid x \in]0, \pi[\} \cup \{(0, 0)\}$ n'admet pas de structure de CW-complexe. Il est en effet connu que la courbe du topologue est connexe, mais pas connexe par arcs. Supposons maintenant que T soit homéomorphe à un CW-complexe X. Alors, les propriétés de connexité étant des invariants topologiques, X devrait être connexe également. Or tout CW-complexe connexe est aussi connexe par arcs : X serait alors également connexe par arcs. Mais T ne l'est pas. D'où une contradiction.*

Théorème 2.56 *Soient X et Y deux espaces topologiques admettant une structure de CW-complexe. Alors l'espace $X \times Y$ peut être muni d'une structure de CW-complexe avec l'application caractéristique sur $X \times Y$ donnée par $f_i \times g_i$, où f_i et g_i sont respectivement les applications caractéristiques pour X et Y.*

Démonstration. Une preuve peut être étudiée dans l'ouvrage (Hatcher, 2001, p.524). □

Proposition 2.57 *Soit X un CW-complexe. Alors X est localement contractile.*

Démonstration. Une preuve peut être étudiée dans l'ouvrage (Hatcher, 2001, p.522). □

Remarque 2.58 *Cette proposition nous assure que tout CW-complexe est en fait localement connexe par arcs. Elle nous assure également que tout CW-complexe est semi-localement simplement connexe, car tout espace contractile est simplement connexe. Ceci va nous aider à justifier que tout CW-complexe connexe admet un revêtement universel.*

Proposition 2.59 *Soit X un CW-complexe. Alors, X est connexe si et seulement si X est connexe par arcs.*

Démonstration. Tout espace topologique connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs. Tout espace topologique connexe par arcs est connexe. D'où l'équivalence. □

Théorème 2.60 *Soit X un CW-complexe connexe. Alors X admet un revêtement universel.*

Démonstration. D'après le théorème 2.21, un espace topologique admet un revêtement universel s'il est connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. D'après les propositions précédentes, tout CW-complexe connexe est aussi localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. □

Lemme 2.61 *La structure de CW-complexe d'un espace X induit une structure de CW-complexe sur son revêtement universel $\tilde{X}$. Le groupe $Aut(\rho) = \pi_1(X)$ agit de façon libre et transitive sur l'ensemble des cellules de $\tilde{X}$.*

Démonstration. Une preuve peut être étudiée dans l'ouvrage (Fritsch et Piccinini, 1990, p.18-19). L'idée principale est d'utiliser les propriétés de relèvement pour définir des cellules dans $\tilde{X}$. □

2.1.5 Complexe de chaînes cellulaires

Pour un CW-complexe donné, nous pouvons construire un complexe de chaînes cellulaire associé. Ce complexe de chaînes cellulaire sera utilisé pour calculer la torsion de Reidemeister. Avant de donner la description d'un tel complexe, nous rappelons la notion de degré pour un certain type d'applications.

Définition 2.62 Soit $n \geq 1$. Pour une application $f : \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$, l'application induite $f_* : \tilde{H}_n(\mathcal{S}^n) \to \tilde{H}_n(\mathcal{S}^n)$ est un morphisme du groupe infini cyclique sur lui-même et ainsi doit être de la forme $f_*(\alpha) = d\alpha$ pour un certain entier d dépendant de f. Cet entier est appelé le *degré* de f et est noté $\deg f$.

Soit X un CW-complexe. Nous notons par $\{e_i^k\}_i$ l'ensemble des k-cellules du complexe. Nous définissons les groupes de chaînes cellulaires $C_k(X) = \bigoplus_i \mathbb{Z}e_i^k$ pour $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Le k-ième groupe de chaînes est ainsi le groupe abélien libre engendré par les k-cellules orientées de X.

Prenons une k-cellule e_i^k ainsi que son application d'attachement correspondante f_i^k. Nous restreignons l'application $f_i^k : \mathbb{D}^k \to X^k$ au bord du disque pour avoir une application $\mathcal{S}^{k-1} \to X^{k-1}$. L'espace X^{k-1}/X^{k-2} sera homéomorphe à un bouquet de $(k-1)$ sphères $\bigvee_j \mathcal{S}_j^{k-1}$ numérotées par les $(k-1)$-cellules $\{e_k^{k-1}\}$ de X (le bord de chaque $(k-1)$-cellule est identifié à un seul point).

La dernière étape consiste à définir une application pour chaque j qui écrase toutes sauf une sphère à un point. Nous avons ainsi la composition d'applications suivante :

$$f_{i,j}^k : \ \mathcal{S}^{k-1} = \partial \mathbb{D}^k \longrightarrow X^{k-1} \longrightarrow X^{k-1}/X^{k-2} = \bigvee_j \mathcal{S}_j^{k-1} \longrightarrow \mathcal{S}_j^{k-1}.$$

Les cellules orientées e_i^k et e_i^{k-1} induisent des orientations sur $\mathcal{S}^{k-1}$ et $\mathcal{S}_j^{k-1}$.

Ainsi, les morphismes de bord $\partial : C_k(X) \to C_{k-1}(X)$, pour $k \geq 2$, sont donnés par :

$$\partial e_i^k = \sum_j (\deg f_{i,j}^k) e_j^{k-1}.$$

Lemme 2.63 *Pour une k-cellule fixée e_i^k, seul un nombre fini d'applications $f_{i,j}^k$ admettent un degré non nul.*

Démonstration. Prenons un recouvrement de $\bigvee_j \mathcal{S}^{k-1}$ par des ouverts, prenons $U_j = \mathcal{S}_k^{k-1} \setminus \{x\}$ et $V \subset \bigvee_j \mathcal{S}^{k-1}$ un voisinage ouvert autour de x. L'union de ces ouverts est bien un recouvrement de $\bigvee_j \mathcal{S}^{k-1}$. Soit $g_i^k : \mathcal{S}^{k-1} \to \bigvee_j \mathcal{S}^{k-1}$ la composition des deux premières applications dans la suite de composition ci-dessus. L'image $g_i^k(\mathcal{S}^{k-1})$ est un sous-ensemble compact de $\bigvee_j \mathcal{S}^{k-1}$: il est donc contenu dans l'union de V et d'un nombre fini d'ouverts U_j. Ainsi, pour toutes sauf un nombre fini d'indices j, l'image de l'application $f_{i,j}^k$ est $\{x\}$ et ainsi son degré est nul. □

Remarque 2.64 *Pour $k = 1$, cette définition du morphisme de bord ne convient pas, puisque le degré d'une application $\mathcal{S}^0 \to \mathcal{S}^0$ n'est pas défini. Pour contourner ce problème, nous définissions tout simplement le morphisme de bord $\partial e_i^1 : C_1(X) \to C_0(X)$ de la façon standard : le bord d'une 1-cellule orientée est égal à la différence des points d'extrémité, en respectant l'orientation. Aussi, le bord d'une 0-cellule est défini comme étant 0.*

Nous avons ainsi construit le complexe de chaînes cellulaire associé à un CW-complexe :

$$C(X) = (\dots \longrightarrow C_k(X) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}(X) \longrightarrow \dots).$$

et ses groupes d'homologie $H_*(C(X))$ sont donnés par l'homologie singulière de X à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (Turaev, 2001, p.30). Les groupes d'homologie ne dépendent ni du choix d'orientation des cellules de X, ni de la CW-structure de X.

Définition 2.65 Si X admet une structure de CW-complexe finie, alors la *caractéristique d'Euler* de X est donnée par

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k \ \mathrm{rang}_{\mathbb{Z}} \ C_k(X) = \sum_k (-1)^k \ \dim \ H_k(X; \mathbb{Z}).$$

.

Remarque 2.66 *La définition ci-dessus pourrait en fait être une proposition : il faudrait prouver que la caractéristique d'Euler d'un CW-complexe fini donne le même résultat si nous calculons la somme alternée sur les rangs des groupes de chaînes ou sur la dimension des groupes d'homologie. Ce résultat provient du fait que tout complexe de chaînes nous donne les deux suites exactes suivantes, où Z_i est le noyau du morphisme de bord ∂_{i-1} et B_i est l'image du morphisme de bord ∂_i :*

$$0 \longrightarrow Z_i \hookrightarrow C_i \twoheadrightarrow B_{i-1} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow B_i \hookrightarrow Z_i \twoheadrightarrow H_i = {}^{Z_i}\big/_{B_i} \longrightarrow 0.$$

Les deux suites nous donnent alors l'égalité suivante :

$$\mathrm{rang}\, C_i = \mathrm{rang}\, B_i + \mathrm{rang}\, H_i + \mathrm{rang}\, B_{i-1}.$$

La caractéristique d'Euler étant une somme alternée, nous avons bien notre résultat.

Proposition 2.67 *Soit X un CW-complexe fini admettant un revêtement $\rho : Y \to X$ à n-feuilles. Alors $\chi(Y) = n \cdot \chi(X)$.*

Démonstration. D'après les résultats que nous avons montrés précédemment, Y admet une structure de CW-complexe et comme ρ est un revêtement à n-feuilles, il correspond n k-cellules relevées $\tilde{e}^k$ pour chaque k-cellules e^k de X. Ainsi, le nombre de k-cellules dans Y est exactement égal à n fois le nombre de k-cellules dans X. Par définition de la caractéristique d'Euler, il est alors clair que le résultat est démontré. □

2.2 Torsion de Reidemeister

La torsion de Reidemeister a été introduite par Kurt Reidemeister en 1935 dans son article *"Homotopieringe und Linsenräume"*. Dans ses travaux, Reidemeister a défini cette nouvelle notion de torsion pour des 3-variétés et l'a utilisé pour classifier les espaces lenticulaires de dimension 3 à homéomorphisme près. C'est une grande avancée dans le domaine de la topologie, car c'est la première fois que la communauté mathématique trouve un invariant qui est capable de distinguer des variétés fermées équivalentes par homotopie mais non homéomorphes.

Les travaux de Wolfgang Franz (1935) et Georges de De Rham (1936) ont permis de généraliser la torsion de Reidemeister à des variétés de dimensions arbitraires.

2.2.1 Torsion de Reidemeister d'un CW-complexe

Pour définir la notion de torsion de Reidemeister d'un CW-complexe, nous aurons besoin de construire un complexe de chaînes cellulaire marqué et acyclique afin de pouvoir utiliser la théorie définie dans le premier chapitre.

Soit X un CW-complexe fini et soit $\rho : \tilde{X} \to X$ son revêtement universel. La structure de CW-complexe de X induit une structure de CW-complexe sur $\tilde{X}$, d'après le lemme 2.61. Nous pouvons choisir une orientation pour chaque cellule de X et $\tilde{X}$ de sorte que la restriction du revêtement ρ à chaque cellule préserve l'orientation. Soit $x \in X$ et notons par $\pi = \pi_1(X, x)$. Supposons que π soit fini. L'action du groupe fondamental sur $\tilde{X}$ induit une action de π sur les groupes de chaînes $C_k(\tilde{X})$: cette action peut être prolongée linéairement en une action de $\mathbb{Z}[\pi]$, l'algèbre d'un groupe fini. Cette algèbre est libre, en tant que groupe additif et abélien, et admet π comme base. La multiplication est celle induite par celle de π.

Les groupes de chaînes $C_k(\tilde{X})$ peuvent ainsi être vus comme des $\mathbb{Z}[\pi]$-modules. Si nous notons par

$\{e_i^k\}$ l'ensemble des k-cellules orientées de X, nous pouvons choisir pour chaque e_i^k une k-cellule $\tilde{e}_i^k$ dans $\tilde{X}$. Ainsi l'ensemble $\{\tilde{e}_i^k\}$ forme une base pour les groupes de chaînes $C_k(\tilde{X})$ et nous pouvons écrire :

$$C_k(\tilde{X}) = \bigoplus_i \mathbb{Z}[\pi]\tilde{e}_i^k.$$

Nous avons ainsi que nos groupes de chaînes sont des $\mathbb{Z}[\pi]$-modules libres qui admettent chacun une base. Cependant, le complexe de chaînes ainsi construit n'a presque aucune chance d'être acyclique. Nous allons avoir besoin de modifier un peu ce complexe de chaînes pour le rendre acyclique.

Soit A un anneau unitaire avec unité tel que pour tout entier $r \neq s \in \mathbb{N}$, A^r et A^s ne sont pas isomorphes en tant que A-modules. Soit $\varphi : \mathbb{Z}[\pi] \to A$ un morphisme d'anneaux. Nous construisons, à partir du complexe de chaînes cellulaire de $\tilde{X}$, le complexe de chaînes suivant

$$C^\varphi(X) = A \otimes_\varphi C(\tilde{X}),$$

où les groupes de chaînes sont donnés par

$$C_k^\varphi(X) = \bigoplus_i A\tilde{e}_i^k$$

et la matrice des morphismes de bord

$$\partial : C_k^\varphi(X) \to C_{k-1}^\varphi(X)$$

est obtenue en appliquant le morphisme φ à chacune des entrées de la matrice des morphismes de bord $\partial : C_k(\tilde{X}) \to C_{k-1}(\tilde{X})$.

Ainsi, nous avons construit un nouveau complexe de chaînes dont les groupes de chaînes sont libres et admettent une base. Nous pouvons ainsi calculer l'homologie de ce complexe $C^\varphi(X)$: nous noterons par $H_*^\varphi(X)$ ses groupes d'homologie.

Définition 2.68 Soit X un CW-complexe fini connexe et $\tilde{X}$ son revêtement universel. Soit A un anneau unitaire, tel que pour tout entier $r \neq s$, A^r et A^s ne sont pas isomorphes en tant que A-modules. Soit $\varphi : \mathbb{Z}[\pi] \to A$ un morphisme d'anneaux. Supposons que le complexe de chaînes

$C^\varphi(X) = A \otimes_\varphi C_k(\tilde{X})$ soit tel que $H_*^\varphi(C^\varphi(X)) = H_*^\varphi(X) = 0$. Alors la *torsion de Reidemeister du CW-complexe* X est donnée par

$$\tau_\varphi(X, \tilde{e}) = \tau(C^\varphi(X)) \in K_1(A),$$

où $\tilde{e}$ est la base de $C^\varphi(X)$ déterminée par la base $\{\tilde{e}_i^k\}$ de $\tilde{X}$.

Proposition 2.69 *La quantité $\tau_\varphi(X, \tilde{e})$ ne dépend pas du choix de $\tilde{e}$, à multiplication par $\pm\varphi(\pi)$ près.*

Démonstration. En définissant la torsion de Reidemeister pour un CW-complexe fini, nous avons réalisé deux choix. Nous avons choisi des relèvements pour chaque k-cellule de X et nous avons choisi de les ordonner d'une certaine façon pour qu'ils forment une base. Changer l'ordre de ses éléments de la base ne fera rien d'autre que d'introduire un facteur 1 ou -1 dans le calcul de la torsion (dépendant du signe de la permutation). Si $\tilde{e}_j^k$ est un relèvement de e_j^k, et $\overline{e}_j^k$ en est un autre, alors comme π agit de façon transitive sur $\tilde{X}$, nous savons qu'il existe $g \in \pi$ tel que $g\overline{e}_j^k = \tilde{e}_j^k$. Ainsi dans $C^\varphi(X)$ nous avons que $\varphi(g)\overline{e}_j^k = \tilde{e}_j^k$, et la torsion est multipliée par $\varphi(g)$. □

Au vu de la proposition précédente, nous pouvons alléger les notations pour la suite et noter par $\tau_\varphi(X)$ la torsion de Reidemeister du CW-complexe fini X.

Théorème 2.70 *La torsion $\tau_\varphi(X) \in K_1(A)/\pm\varphi(\pi)$ est invariante sous homéomorphismes de CW-complexes.*

Démonstration. Ce théorème est dû au mathématicien T.A. Chapman. Une preuve peut être étudiée dans l'article (Chapman, 1974, p.2, théorème 1). En fait, Chapman montre que la torsion de Whitehead est invariante sous homéomorphismes de CW-complexes. Nous n'avons pas parlé de la torsion de Whitehead dans ce mémoire, mais elle généralise la torsion de Reidemeister. □

Toutes ces définitions peuvent nous faire douter de l'incidence que possède réellement l'application φ sur l'acyclicité de notre complexe de chaînes C^φ. Pour nous en convaincre et pour illustrer nos propos, nous allons calculer explicitement la torsion de Reidemeister pour des variétés très simples qui admettent une structure de CW-complexe finie.

Lemme 2.71 (Torsion du cercle) *Soit T un générateur de $\pi = \pi_1(\mathcal{S}^1)$. Soit A un anneau unitaire tel que pour tout entier $r \neq s$, A^r et A^s ne sont pas isomorphes en tant que A-modules. Soit $\varphi : \mathbb{Z}[\pi] \to A$ un morphisme d'anneaux. Posons $t = \varphi(T) \in A^*$. Alors $H_*^{\varphi}(\mathcal{S}^1) = 0$ si et seulement si $t - 1 \in A^*$, auquel cas $\tau_{\varphi}(\mathcal{S}^1)$ sera l'image de $(t-1)^{-1}$ dans $K_1(A)/\{\pm t^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.*

Remarque 2.72 *Si nous travaillons dans un corps $\mathbb{F}$, alors $H_*^{\varphi}(\mathcal{S}^1) = 0$ si et seulement si $t \neq 1$.*

Démonstration. Nous choisissons une structure de CW-complexe très simple pour $\mathcal{S}^1$ qui consiste en une 0-cellule e^0 et d'une 1-cellule e^1, orientée dans le sens trigonométrique. Soit $\rho : \mathbb{R} \to \mathcal{S}^1$ le revêtement universel de $\mathcal{S}^1$ donné par $x \mapsto \exp 2\pi i x$. Soit T le lacet parcourant une fois le cercle dans le sens trigonométrique. T agit sur $\mathbb{R}$ en envoyant chaque réel x sur son translaté $x + 1$. Nous choisissions ensuite des relèvements $\tilde{e}^0$ et $\tilde{e}^1$ de e^0 et e^1.

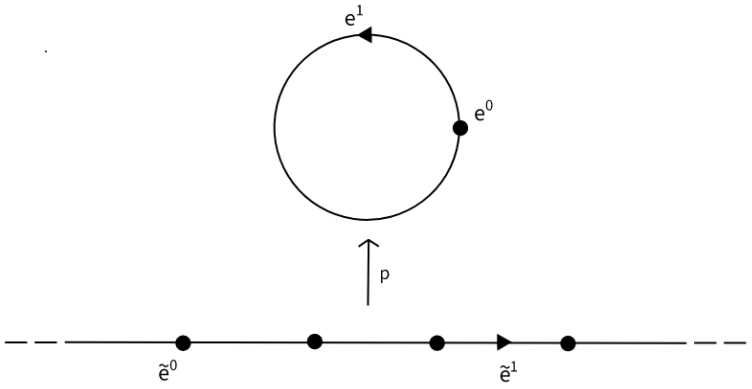


FIGURE 2.3 Revêtement universel du cercle

Nous avons ainsi le complexe de chaînes suivant :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\pi]\tilde{e}^1 \longrightarrow \mathbb{Z}[\pi]\tilde{e}^0 \longrightarrow 0$$

où le morphisme de bord est donné par : $\partial\tilde{e}^1 = T^{m+1}\tilde{e}^0 - T^m\tilde{e}^0$ pour $m \in \mathbb{Z}$. Le coefficient m dépend du choix que nous faisons pour le relèvement de notre 1-cellule. Dans la figure ci-dessus, $m = 2$. Le morphisme de bord induit dans le complexe de chaînes $C^{\varphi}(\mathcal{S}^1)$ est le suivant :

$$\begin{aligned} \partial : A\tilde{e}^1 &\to A\tilde{e}^0 \\ \tilde{e}^1 &\mapsto t^m(t-1)\tilde{e}^0. \end{aligned}$$

Nous voyons ainsi que le complexe de chaînes $C^{\varphi}(\mathcal{S}^1)$ est acyclique si et seulement si ∂ est un isomorphisme, autrement dit, si et seulement si $t^m(t-1)$ est inversible dans l'anneau A. Ceci revient à demander à ce que $t-1$ soit inversible dans A. Sous cette condition, la torsion est donc bien égale à l'image de $(t-1)^{-1}$ dans $K_1(A)/\{\pm t^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. □

Lemme 2.73 *(Torsion du tore) Soit $T = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$ le 2-tore. Soit $\mathbb{F}$ un corps et soit $\varphi : \mathbb{Z}[H_1(T)] \to \mathbb{F}$ un morphisme d'anneaux. Si $\varphi(H_1(T)) \neq 1$, alors $H_*^{\varphi}(T) = 0$ et*

$$\tau_{\varphi}(T) = 1 \in \mathbb{F}^*/\pm\varphi(H_1(T)).$$

Démonstration. Nous choisissons une structure de CW-complexe très simple pour $\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$ qui consiste en une 0-cellule e^0, deux 1-cellules e_1^1 et e_2^1 et une 2-cellule e^2. Nous attribuons une orientation à chacune de ces cellules, de la façon suivante :

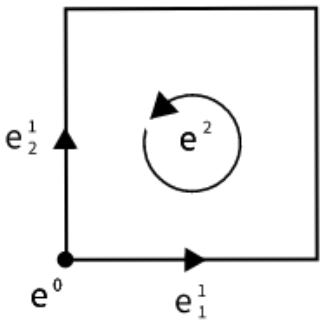


FIGURE 2.4 Orientation choisie des cellules dans la décomposition du tore

Nous notons par a et b les générateurs de $\pi_1(T)$ représentés par e_1^1 et e_2^1 respectivement. Soient h_1 et h_2 les générateurs de $H_1(T)$, représentés par e_1 et e_2 respectivement. En choisissant des bases adaptées, nous obtenons que les morphismes de bord dans le complexe $C^{\varphi}(T)$, ∂_0 et ∂_1 sont respectivement donnés par

$$\begin{bmatrix} \varphi(h_1) - 1 \\ \varphi(h_2) - 1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 - \varphi(h_2) & \varphi(h_1) - 1 \end{bmatrix}.$$

Par hypothèse, $\varphi(h_1) \neq 1$ ou $\varphi(h_2) \neq 1$. Le complexe de chaînes $C^{\varphi}(T)$ est alors clairement acyclique. Supposons que $\varphi(h_1) \neq 1$, alors on a :

$$\begin{aligned}\tau(C^{\varphi}(T)) &= [\partial_0 e^1_1/e^0]^{-1}[\partial_1 e^2, e^1_1/e^1_1, e^1_2][e^2/e^2]^{-1} \\ &= (\varphi(h_1)-1)^{-1}\begin{vmatrix} 1-\varphi(h_2) & \varphi(h_1)-1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -1.\end{aligned}$$

Par symétrie, nous obtenons le même résultat si $\varphi(h_2) \neq 1$. □

2.2.2 Torsion de Reidemeister d'une CW-paire

La notion de torsion de Reidemeister d'un CW-complexe peut se généraliser à une CW-paire (X, Y), où une CW-paire est définie de la façon suivante :

Définition 2.74 Soit X un CW-complexe fini connexe et soit Y un sous-complexe de X. La paire (X, Y) est appelée une *CW-paire*.

Définition 2.75 Soit $C(X)$ et $C(Y)$ les complexes de chaînes cellulaires associés à X et Y respectivement. Le complexe $C(X, Y) = C(X)/C(Y)$ est le *complexe de chaînes cellulaire de la paire* (X, Y) : ses groupes de chaînes sont donnés par $C_k(X, Y) = C_k(X)/C_k(Y)$, pour tout k.

Remarque 2.76 *Le complexe de chaînes cellulaire d'une CW-paire est bien défini, $C(Y)$ étant un sous-complexe de $C(X)$. Les groupes de chaînes du complexe $C(X, Y)$ sont des groupes abéliens générés par les k-cellules ouvertes orientées de X qui ne sont pas dans Y.*

X étant un CW-complexe connexe, nous notons $\rho : \tilde{X} \to X$ son revêtement universel. Il est alors sensé de considérer $\rho^{-1}(Y)$ en tant que sous-complexe de $\tilde{X}$. Les cellules obtenues par le relèvement héritent de l'orientation fixée préalablement sur X.

Définition 2.77 Soit (X, Y) une CW-paire et soit $\rho : \tilde{X} \to X$ le revêtement universel de X. Soit A un anneau unitaire tel que pour tout entier $r \neq s$, A^r et A^s ne sont pas isomorphes en tant que

A-modules et soit $\pi = \pi_1(X)$. Soit $\varphi : \mathbb{Z}[\pi] \to A$ un morphisme d'anneaux. Supposons que le complexe de chaînes $C^\varphi(X,Y) = A \otimes_\varphi C(\tilde{X}, \rho^{-1}(Y))$ soit tel que $H_*^\varphi(X,Y) = H_*^\varphi(C^\varphi(X,Y)) = 0$. Alors la *torsion de Reidemeister de la CW-paire* (X,Y) est donnée par

$$\tau_\varphi(X,Y) = \tau(C^\varphi(X,Y)) \in K_1(A)/\pm\varphi(\pi).$$

CHAPITRE 3
LES ESPACES LENTICULAIRES

Les espaces lenticulaires de dimension trois, notés $L(p,q)$ ont été introduits par Heinrich Tietze en 1908 (Tietze, 1908). Il faudra cependant attendre les années 1930 pour que le terme d'espace lenticulaire fasse son apparition pour la première fois. Cette dénomination est attribuée à Seifert et Threlfall (Threlfall et Seifert, 1931). C'est un des premiers exemples d'espace topologique pour lequel le groupe fondamental n'est pas un invariant assez fort.

3.1 Définition

Il existe plusieurs façons de modéliser un espace lenticulaire. La définition que nous avons déjà rencontrée à l'exemple 2.31 est la suivante :

Définition 3.1 Soient p et q deux entiers premiers entre eux et soit ξ une racine p-ième primitive de l'unité fixée. Le groupe cyclique $\{\xi \in \mathbb{C} \mid \xi^p = 1\}$ agit sur $\mathcal{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ de la façon suivante :

$$\xi \cdot (z,w) \mapsto (\xi z, \xi^q w).$$

L'espace résultant du quotient de $\mathcal{S}^3$ par cette action est l'*espace lenticulaire de paramètres p et q*, noté $L(p,q)$.

Remarque 3.2 *L'application $(z,w) \mapsto (\xi z, \xi^q w)$ est un automorphisme de $\mathcal{S}^3$.*

Exemple 3.3 *Cette définition nous permet de voir facilement que $L(2,1) \cong \mathbb{RP}^3$. Dans ce cas, l'action consiste en effet à identifier les points antipodaux de $\mathcal{S}^3$.*

Comme dit précédemment, il existe d'autres façons de modéliser un espace lenticulaire et toutes ces définitions sont équivalentes entre elles. Nous présentons ici quelques descriptions alternatives, énoncées dans (Rolfsen, 1980, p.233-239) :

— Considérons la boule unité $\mathbb{B}^3 \subset \mathbb{R}^3$. Prenons un point de l'hémisphère nord de $\partial\mathbb{B}^3$ et identifions-le avec son image par la rotation d'angle $2\pi q/p$ dans le sens antihoraire, suivie d'une réflexion par rapport au plan xy. Cette construction nous donne un espace lenticulaire $L(p, q)$.

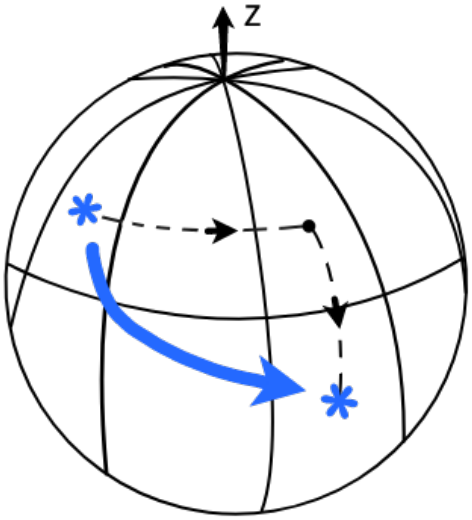


FIGURE 3.1 Construction de l'espace lenticulaire $L(p, q)$

— Considérons deux tores solides notés T_1 et T_2, avec m_i et l_i, respectivement le méridien et la longitude de T_i, pour $i = 1, 2$. L'espace lenticulaire $L(p, q)$ est obtenu à partir de T_1 et T_2 en identifiant leur bord de telle manière à ce que $m_2 = pl_1 + qm_1$ et $l_2 = \overline{q}l_1 + rm_1$ où p et q sont des entiers premiers entre eux et $q\overline{q} - pr = 1$.

La définition 3.1 peut être généralisée pour définir des espaces lenticulaires de dimension supérieure à 3. C'est avec cette définition que nous allons travailler dans ce chapitre.

Définition 3.4 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $p \geq 2$ et $q_1, \ldots, q_n$ des entiers tels que q_i et p soient premiers entre eux, pour tout $1 \leq i \leq n$. Soit ξ une racine p-ième primitive de l'unité fixée. Le groupe cyclique $\{\xi \in \mathbb{C} \mid \xi^p = 1\}$ agit sur $\mathcal{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ de la façon suivante

$$\xi \cdot (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\xi^{q_1} z_1, \ldots, \xi^{q_n} z_n).$$

. L'espace résultant du quotient de $\mathcal{S}^{2n-1}$ par cette action est l'espace lenticulaire de paramètres $p, q_1, \ldots, q_n$, noté $L(p; q_1, \ldots, q_n)$.

Exemple 3.5 *L'espace* $L(2; 1, 1, \ldots, 1)$ *est l'espace projectif réel* $\mathbb{RP}^{2n-1}$.

Remarque 3.6 *Lorsque nous travaillons en dimension* 3*, c'est-à-dire lorsque* $n = 2$*, nous avons la convention suivante* $L(p, q) = L(p; 1, q)$*. La figure suivante, issue de (Threlfall et Seifert, 1931, p.58) met en avant la forme lenticulaire de tels espaces.*

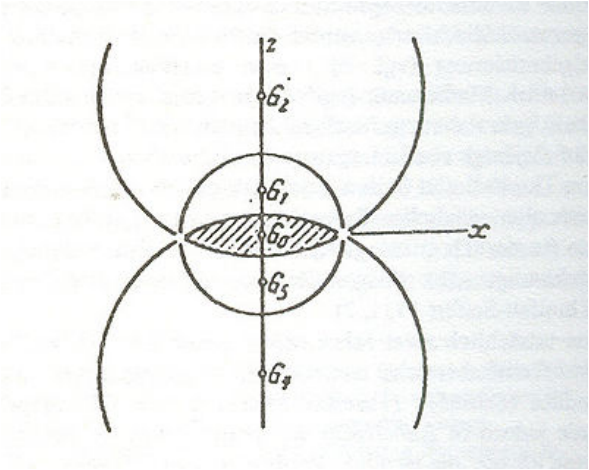


FIGURE 3.2 Forme lenticulaire d'un espace (Threlfall et Seifert, 1931, p.58)

3.2 Propriétés

Dans la suite de notre discussion, nous considérons des espaces lenticulaires donnés par la définition 3.4. Pour établir quelques-unes des propriétés les plus remarquables de tels espaces, nous allons principalement utiliser les bonnes propriétés que possède l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{S}^{2n-1}$ décrite précédemment.

Lemme 3.7 *Soient $p \geq 2$ et $q_1, \ldots, q_n$ des entiers tels que q_i et p soient premiers entre eux, pour tout $1 \leq i \leq n$. Soit $\xi = e^{2i\pi/p}$ un générateur des racines p-ième primitives de l'unité. Alors l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$*

$$\xi \cdot (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\xi^{q_1} z_1, \ldots, \xi^{q_n} z_n)$$

est proprement discontinue sur $\mathcal{S}^{2n-1}$.

Démonstration. D'après le lemme 2.26, il suffit de montrer que cette action est libre, ce qui est directement impliqué par le fait que tous les q_i sont supposés être premiers avec p, et ce pour tout i. Ainsi, aucun élément autre que le trivial de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ne fixe un point sur $\mathcal{S}^{2n-1}$. □

Les théorèmes 2.29, **??** et 2.48 que nous avons énoncés au chapitre 2 nous permettent d'établir les propriétés connues suivantes :

Propriétés 3.8 *Soit $L(p; q_1, \ldots, q_n)$ un espace lenticulaire. $\mathcal{S}^{2n-1}$ est le revêtement universel de $L(p; q_1, \ldots, q_n)$.*

Propriétés 3.9 *$L(p; q_1, \ldots, q_n)$ est une $(2n-1)$-variété compacte.*

Propriétés 3.10 *$\pi_1(L(p; q_1, \ldots, q_n)) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

Remarque 3.11 *Nous remarquons que le groupe fondamental d'un espace lenticulaire ne détecte pas les paramètres $q_1, \ldots, q_n$. Cet invariant topologique n'est donc pas assez fort pour différencier de tels espaces deux à deux : par exemple, $L(2;1)$ et $L(2;5)$ ont le même groupe fondamental. Le groupe fondamental n'est pas assez puissant et ne capture pas assez d'information sur de tels espaces. À ce point-ci de la discussion, il serait logique de se demander si les groupes d'homologie nous donnent un peu plus d'informations.*

3.3 Groupes d'homologie

Pour calculer les groupes d'homologie d'un espace lenticulaire de dimension quelconque, nous allons utiliser le fait que $\mathcal{S}^{2n-1}$ en est le revêtement universel. Nous allons également utiliser une CW-structure de $\mathcal{S}^{2n-1}$ spéciale qui va nous permettre de travailler facilement par la suite.

3.3.0.1 CW-structure induite du revêtement universel

Posons $\xi = e^{2\pi i/p} \in \mathcal{S}^1$ et $I_j = [\xi^j, \xi^{j+1}] \subset \mathcal{S}^1$, avec $j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. L'union des intervalles I_j forme une CW-décomposition pour $\mathcal{S}^1$, le cercle unité.

Pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, posons :

$$
\begin{aligned}
E_j^{2i-2} &= \{(z_1,\dots,z_n) \in \mathcal{S}^{2n-1} \mid z_{i+1} = \cdots = z_n = 0, z_i \in \xi^j \cdot [0,1] \subset \mathbb{C}\} \\
&= \{(z_1,\dots,z_n) \in \mathcal{S}^{2n-1} \mid \sum_{k=1}^{i-1} |z_k|^2 = 1 - |z_i|^2, z_i \in \xi^j \cdot [0,1] \subset \mathbb{C}\} \\
E_j^{2i-1} &= \{(z_1,\dots,z_n) \in \mathcal{S}^{2n-1} \mid z_{i+1} = \cdots = z_n = 0, z_i \in I_j \cdot [0,1] \subset \mathbb{C}\} \\
&= \{(z_1,\dots,z_n) \in \mathcal{S}^{2n-1} \mid \sum_{k=1}^{i-1} |z_k|^2 = 1 - |z_i|^2, z_i \in I_j \cdot [0,1] \subset \mathbb{C}\}.
\end{aligned}
$$

Lemme 3.12 *Les sous-ensembles E_j^k définis ci-dessus sont des boules fermées de dimension k.*

Démonstration. Pour $t \in [0,1[$, l'équation $\sum_{k=1}^{i-1} |z_k|^2 = 1 - t^2$ détermine une $(2i-3)$-sphère. Ainsi, E_j^{2i-2} est le cône au-dessus de $\mathcal{S}^{2i-3}$, c'est-à-dire une boule fermée de dimension $2i-2$. Pour chaque $t \in I_j$, le sous-ensemble de E_j^{2i-1} déterminé par $z_i \in t \cdot [0,1]$ est une boule. L'ensemble de ces boules partagent le même bord et n'admettent aucun autre point en commun. Ainsi, E_j^{2i-1} est une boule fermée de dimension $2i-1$. □

Remarque 3.13 *L'ensemble des boules fermées*

$$\{E_j^{2i-2}, E_j^{2i-1}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}}$$

forme une CW-décomposition de $\mathcal{S}^{2n-1}$, où le k-squelette est donné par $X^k = X^{k-1} \bigcup_j E_j^k$ pour $k \geq 1$ et $X^0 = \bigcup_j E_j^0$.

Remarque 3.14 *Les bords de ces cellules sont donnés par les expressions suivantes :*

$$
\begin{aligned}
\partial E_j^{2i-2} &= E_0^{2i-3} \cup E_1^{2i-3} \cup \cdots \cup E_{p-1}^{2i-3}, \\
\partial E_j^{2i-1} &= E_j^{2i-2} \cup E_{j+1}^{2i-2},
\end{aligned}
$$

où $E_j^{-1} = \emptyset$.

Définition 3.15 Pour $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$, nous définissons $e_j^k = \mathrm{Int}(E_j^k)$ comme l'ensemble des k-cellules ouvertes de $\mathcal{S}^{2n-1}$.

Lemme 3.16 *Les k-cellules ouvertes $e_j^k = \mathrm{Int}(E_j^k)$ sont disjointes et recouvrent $\mathcal{S}^{2n-1}$.*

Démonstration. Par définition des ensembles E_j^k, le résultat est clair. □

Nous allons ensuite orienter ces k-cellules par induction sur k. Nous choisissons d'orienter positivement les 0-cellules $e_j^0 = (\xi^j, 0, \ldots, 0)$. Supposons que les cellules e_j^k soient orientées, pour $k \leq 2i-3$. Nous orientons e_j^{2i-2} de sorte que

$$\partial e_j^{2i-2} = e_0^{2i-3} + e_1^{2i-3} + \cdots + e_{p-1}^{2i-3},$$

et nous orientons e_j^{2i-1} de sorte que

$$\partial e_j^{2i-1} = e_{j+1}^{2i-2} - e_j^{2i-2}.$$

L'orientation que nous avons choisi pour nos k-cellules va nous permettre plus tard, de travailler avec le complexe de chaînes associé à $\mathcal{S}^{2n-1}$. Avant de construire un tel complexe, remarquons la façon dont l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agit sur ces k-cellules.

Lemme 3.17 *Soit p un entier et $q_1, \ldots, q_n$ des entiers tels que q_i et p soient premiers entre eux, et ce pour tout i. Le générateur canonique des racines p-ième de l'unité $\xi = e^{2\pi i/p}$ agit sur $\mathcal{S}^{2n-1}$ de la façon suivante : $\xi \cdot (z_1, \ldots, z_n) = (\xi^{q_1} z_1, \ldots, \xi^{q_n} z_n)$. Alors ξ permute les k-cellules e_j^k en préservant leur orientation, autrement dit :*

$$\xi \cdot (e_j^k) = e_{j+q_i}^k.$$

Démonstration. Étudions l'action de ξ sur les sous-ensembles E_j^k définis ci-dessus.

$$\begin{aligned}
\xi \cdot (E_j^{2i-2}) &= \{(\xi^{q_1} z_1, \dots, \xi^{q_n} z_n) \in \mathcal{S}^{2n-1} \mid \sum_{k=1}^{i-1} |z_k|^2 = 1 - |z_i|^2, z_i \in \xi^j \cdot [0,1] \subset \mathbb{C}\} \\
&= \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{S}^{2n-1} \mid \sum_{k=1}^{i-1} |\xi^{q_k} z_k|^2 = 1 - |\xi^{q_i} z_i|^2, \xi^{q_1} z_i \in \xi^j \cdot [0,1] \subset \mathbb{C}\} \\
&= \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{S}^{2n-1} \mid \sum_{k=1}^{i-1} |z_k|^2 = 1 - |z_i|^2, z_i \in \xi^{j+q_i} \cdot [0,1] \subset \mathbb{C}\} \\
&= E_{j+q_i}^{2i-2}.
\end{aligned}$$

De la même façon, nous pouvons montrer que :

$$\xi \cdot (E_j^{2i-1}) = E_{j+q_i}^{2i-1}.$$

Ceci implique que $\xi \cdot (e_j^k) = e_{j+q_i}^k$. □

À l'aide des calculs que nous avons faits précédemment et du lemme ci-dessus, nous avons que les morphismes de bord du complexe de chaîne cellulaire associé à $\mathcal{S}^{2n-1}$

$$C(\mathcal{S}^{2n-1}) = (\dots \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]e_0^k \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]e_0^{k-1} \longrightarrow \dots)$$

sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\partial e_0^{2i-2} &= e_0^{2i-3} + \xi e_0^{2i-3} + \dots + \xi^{p-1} e_0^{2i-3} = \left(\sum_{j=0}^{p} \xi^j \right) e_0^{2i-3}, \\
\partial e_0^{2i-1} &= \xi^{r_i} e_0^{2i-2} - e_0^{2i-2} = (\xi^{r_i} - 1) e_0^{2i-2}.
\end{aligned}$$

Dans les prochaines sections, nous utiliserons ce complexe de chaînes pour calculer la torsion d'un espace lenticulaire.

3.3.1 Calcul

La CW-structure de $\mathcal{S}^{2n-1}$ nous permet de calculer facilement les groupes d'homologie de tout espace lenticulaire.

Définition 3.18 Soit X un espace topologique et G un groupe. X est un *G-espace* s'il est muni d'actions continues $G \times X \to X$ telles que $1_G \cdot x = x$ et $g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$ pour tout $g \in G$ et $x \in X$.

Définition 3.19 Soient X et Y deux G-espace. Une fonction $f : X \to Y$ est dite *G-équivariante* si $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ pour tout $g \in G$ et tout $x \in X$.

Remarque 3.20 *La condition pour qu'une fonction soit dite équivariante peut s'exprimer sous la forme du diagramme commutatif suivant.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g\cdot} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[g\cdot]{} & Y \end{array}$$

Définition 3.21 Une *G-orbite* est la classe suivant H notée G/H, où H est un sous-groupe de G. Par convention, nous noterons G/H l'ensemble des classes à gauche suivant H de tous les éléments de G et nous noterons $H \backslash G$ l'ensemble des classes à droite.

Définition 3.22 Une *G-cellule* est le produit d'une cellule avec G/H, autrement dit elle s'écrit comme le produit $G/H \times D^n$ où D^n est un n-disque.

Définition 3.23 *(May et Cole, 1996, p.16)* Un CW-complexe X est dit *G-équivariant* s'il s'écrit comme l'union de G-sous-espaces X^n tel que :

— X^0 soit une union disjointe de G-orbites G/H et,

— X^{n+1} est obtenu à partir de X^n en attachant des G-cellules $G/H \times D^{n+1}$ via les applications d'attachement G-équivariante $G/H \times \mathcal{S}^n \to X^n$.

Remarque 3.24 *Autrement dit, un G-espace admettant une structure de CW-complexe compatible avec l'action du groupe G est un CW-complexe G-équivariant.*

Lemme 3.25 *La structure de CW-complexe décrite précédemment sur $\mathcal{S}^{2n-1}$ est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-équivariante.*

Démonstration. Au vu de la description des cellules de $\mathcal{S}^{2n-1}$, le résultat est clair. □

Théorème 3.26 *Soit $L = L(p; q_1, \ldots, q_n)$ un espace lenticulaire. Si $L' = (p'; q'_1, \ldots, q'_n)$ est un autre espace lenticulaire tel que $\pi_1(L) = \pi_1(L')$ alors L et L' partagent les mêmes groupes d'homologie.*

Démonstration. La CW-structure étudiée précédemment sur $\mathcal{S}^{2n-1}$ est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-équivariante. Ainsi, la projection $\pi : \mathcal{S}^{2n-1} \to L$ induit une CW-structure sur L : chaque k-squelette contient une cellule, pour $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$. Ces cellules sont simplement les ensembles $e^k = \pi(e^k_j)$, où $j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$. Ainsi, chaque cellule e^k de L hérite de l'orientation induite par celle de e^k_0. Alors

$$\begin{aligned}
\partial e^{2i-2} &= \partial\pi(e_0^{2i-2}) \\
&= \pi\partial(e_0^{2i-2}) \\
&= \pi(e_0^{2i-3} + \cdots + \xi^{p-1} e_0^{2i-3}) \\
&= p e^{2i-3}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\partial e^{2i-1} &= \pi\partial(e_0^{2i-1}) \\
&= \pi(\xi^{r_i} e_0^{2i-2} - e_0^{2i-2}) = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, le complexe de chaînes associé à L s'écrit de la façon suivante, où chaque groupe de chaînes $C_l = \mathbb{Z}e^k$ pour $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$:

$$C(L) = (0 \longrightarrow C_{2n-1} \xrightarrow{0} C_{2n-2} \xrightarrow{p} C_{2n-3} \xrightarrow{0} \ldots \xrightarrow{p} C_1 \xrightarrow{0} C_0 \longrightarrow 0).$$

Ainsi, les groupes d'homologie sont les suivants :

$$H_i(L;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, 2n-1, \\ 0, & i \text{ est pair et } i \neq 0, \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, & i \text{ est impair et } 1 \leq i \leq 2i-3. \end{cases}$$

□

Remarque 3.27 *Une fois de plus, nous remarquons que les groupes d'homologie d'un espace lenticulaire de dimension impaire quelconque ne détectent pas les paramètres $q_1, \ldots, q_n$. Les groupes d'homologie ne dépendent que du paramètre p. Ainsi, un outil plus fort est nécessaire pour différencier de tels espaces.*

3.4 Torsion de Reidemeister d'un espace lenticulaire

La décomposition d'un espace lenticulaire de dimension impaire en CW-complexe décrite dans la démonstration précédente va nous permettre de prouver le théorème suivant.

Théorème 3.28 *Soit $L = L(p; q_1, \ldots, q_n)$, $p \geq 3$ un espace lenticulaire. Soit $T \in \pi_1(L)$ un générateur distingué et soient $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ satisfaisant $r_i q_i = 1 \mod p$. Soit $\mathbb{F}$ un corps et soit $\varphi : \mathbb{Z}[\pi_1(L)] \to \mathbb{F}$ un morphisme d'anneau. Posons $t = \varphi(T) \in \mathbb{F}^*$. Si $t \neq 1$, alors $H_*^{\varphi}(L) = 0$ et*

$$\tau_{\varphi}(L) = \prod_{i=1}^{n} (t^{r_i} - 1)^{-1} \in \mathbb{F}^* / \pm \{t^j\}_{j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}.$$

Démonstration. En travaillant avec le complexe de chaînes suivant

$$C(\mathcal{S}^{2n-1}) = \ (\ldots \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]e_0^k \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]e_0^{k-1} \longrightarrow \ldots),$$

dont les morphismes de bord ont été décrits précédemment, nous pouvons calculer la torsion des espaces lenticulaires.

Par hypothèse, nous avons que $t = \varphi(T) \neq 1 \in \mathbb{F}^*$. Comme $t^p = \varphi(T^p) = \varphi(1) = 1$, nous avons que

$$\sum_{j=0}^{p-1} t^j = \frac{t^p - 1}{t - 1} = 0$$

et alors tout morphisme de bord partant d'un groupe de chaînes indexé par un nombre pair est trivial dans le complexe de chaînes $C(\mathcal{S}^{2n-1})$.

Ainsi, le complexe de chaînes $C^{\varphi}(L) = \mathbb{F} \otimes_{\varphi} C(\mathcal{S}^{2n-1})$ est acyclique et il est alors sensé de considérer la torsion de ce complexe.

Le lemme 1.38 et la proposition 1.40 nous permettent d'établir que $\tau(C^{\varphi}(L)) = \varphi_*(\tau(C(\mathcal{S}^{2n-1})))$. Ici, notons que $\varphi_* : K_1(\mathbb{Z}[\pi_1(L)]) \to K_1(\mathbb{F})$ serait l'application induite par φ. En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans le calcul de la torsion du cercle 2.71 et en utilisant la multiplicativité de la torsion, nous avons l'égalité suivante et le résultat est démontré :

$$\tau_{\varphi}(L) = \tau(C^{\varphi}(L)) = \prod_{i=1}^{n} (t^{r_i} - 1)^{-1} \in \mathbb{F}^* / \pm \{t^j\}_{j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}.$$

□

Rappelons que la torsion de Reidemeister est un invariant topologique :

Théorème 3.29 *Soient X et Y des CW-complexes. Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme et soit φ un morphisme d'anneaux $\varphi : \mathbb{Z}[\pi_1(Y)] \to \mathbb{F}$. Posons $\psi = \varphi \circ f_* : \mathbb{Z}[\pi_1(X)] \to \mathbb{F}$, alors nous avons $\tau_{\psi}(X) = \tau_{\varphi}(Y)$.*

Démonstration. Une preuve de ce théorème peut être étudiée dans l'ouvrage (Chapman, 1974). □

3.5 Classification des espaces lenticulaires à homéomorphisme près

La preuve de la classification des espaces lenticulaires à homéomorphisme près ne demande pas seulement d'utiliser la torsion de Reidemeister, mais demande également un résultat de théorie des nombres.

Avant de commencer à établir ces résultats, remarquons que des transformations très simples réalisées sur les paramètres $q_1, \ldots, q_n$ d'un espace lenticulaire sont induites par des homotopies simples qui préservent le générateur distingué de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

— Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Posons

$$\varphi_\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \, , (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)})$$

La restriction de φ_σ à $\mathcal{S}^{2n-1}$ induit un difféomorphisme entre $L(p; q_1, \ldots, q_n)$ et $L(p; q_{\sigma(1)}, \ldots, q_{\sigma(n)})$.

— Étant donné que $\xi^p = 1$, puisque ξ est une racine p-ième primitive de l'unité, il est clair que $L(p; q_1, \ldots, q_n) = L(p; q_1, \ldots, q_i + p, \ldots, q_n)$.

— Si $c_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est l'application qui envoie $(z_1, \ldots, z_n)$ sur $(z_1, \ldots, \overline{z_i}, \ldots, z_n)$, la restriction de c_i à $\mathcal{S}^{2n-1}$ induit un difféomorphisme entre $L(p; q_1, \ldots, q_n)$ et $L(p; q_1, \ldots, -q_i, \ldots, q_n)$, puisque $\overline{\xi_i^q z_i} = \xi^{-q_i} \overline{z_i}$.

Tous ces difféomorphismes préservent le générateur distingué de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et sont des homotopies simples. Ainsi, tout espace lenticulaire sera équivalent par simple homotopie à un espace lenticulaire $L(p; q_1, \ldots, q_n)$ où $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_n \leq p/2$. C'est donc avec ce type d'espace lenticulaire que nous allons travailler.

Le lemme suivant est crucial pour établir la classification des espaces lenticulaires à homéomorphisme près. Une preuve en français peut être étudiée dans l'ouvrage (De Rham *et al.*, 1967, p.11,12), mais nous l'exposons dans les pages suivantes. Le lemme est connu sous le nom de "lemme d'indépendance de Franz" (Franz, 1935). Avant d'esquisser la preuve, il est nécessaire d'établir quelques résultats. Les trois prochaines sous-sections se consacrent à exposer les outils et les concepts dont nous aurons besoin pour comprendre et articuler la preuve du lemme d'indépendance de Franz. La preuve du lemme est exposer à la page 63.

Lemme 3.30 (Lemme d'indépendance de Franz) *Soit $S = \{j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mid j$ et p sont premiers entre eux$\}$. Supposons que $\{a_j\}_{j \in S}$ soit un ensemble d'entiers qui satisfait les propriétés suivantes :*

— $\sum_{j \in S} a_j = 0$,

— $a_j = a_{-j}$,

— $\prod_{j \in S} (\xi^j - 1)^{a_j} = 1$ *pour chaque ξ racine p-ième de l'unité, $\xi \neq 1$.*

Alors $a_j = 0$ pour tout $j \in S$.

3.5.1 Caractères $(\mathrm{mod}\ m)$

Définition 3.31 *Une fonction arithmétique f est une application définie sur l'ensemble des entiers strictement positifs et à valeurs dans l'ensemble des nombres complexes.*

Définition 3.32 *(De Rham* et al.*, 1967, p.1) Une fonction arithmétique χ est un caractère $(\mathrm{mod}\ m)$ si elle vérifie les propriétés suivantes :*

- $\chi(a) = \chi(b)$, *si* $a \equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$,
- $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$, *pour tous entiers* a *et* b,
- $\chi(a) = 0$ *si* $\mathrm{pgcd}(a, m) > 1$, $\chi(a) \neq 0$ *si* $\mathrm{pgcd}(a, m) = 1$.

Exemple 3.33 *La fonction ϕ d'Euler est un des exemples les plus connus de fonction arithmétique. Elle est définie par :* $\phi(n) = \#\{1 \leq a \leq n : \mathrm{pgcd}(a, n) = 1\}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.34 *(De Rham* et al.*, 1967, p.2) Il existe $\phi(m)$ caractère $(\mathrm{mod}\ m)$ qui forment un groupe abélien multiplicatif. Il est est isomorphe au groupe multiplicatif $R(m)$ des classes résiduelles $(\mathrm{mod}\ m)$ premières à m. L'unité du groupe formé, appelé le caractère principal, est noté χ_0 et correspond au caractère $(\mathrm{mod}\ m)$ tel que $\chi_0(a) = 1$ si $\mathrm{pgcd}(a, m) = 1$.*

Proposition 3.35 *(De Rham* et al.*, 1967, p.2) Nous avons les relations suivantes :*

$$\sum_{n\ (\mathrm{mod}\ m)} \chi(n) = \begin{cases} \phi(m), & \text{si } \chi = \chi_0 \\ 0, & \text{si } \chi \neq \chi_0 \end{cases},$$

$$\sum_{\chi} \chi(n) = \begin{cases} \phi(m), & \text{si } n \equiv 1 \pmod m \\ 0, & \text{si } n \not\equiv n \pmod m. \end{cases}$$

Démonstration. Si $\chi = \chi_0$, alors la première somme est trivialement égale à $\phi(m)$, puisque tous les termes sont égaux à 1. Supposons que $\chi \neq \chi_0$. Pour un élément $k\ (\mathrm{mod}\ m)$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{n\ (\mathrm{mod}\ m)} \chi(n) &= \sum_{n\ (\mathrm{mod}\ m)} \chi(nk) \\ &= \chi(k) \sum_{n\ (\mathrm{mod}\ m)} \chi(n), \end{aligned}$$

et alors :

$$(1-\chi(k)) \sum_{n \pmod m} \chi(n) = 0.$$

Par hypothèse, χ n'est pas le caractère identité et alors le facteur $(1-\chi(k))$ n'est pas trivial, pour au moins un élément $k \pmod m$. Alors, la somme $\sum_{n \pmod m} \chi(n) = 0$. La preuve pour la deuxième somme est similaire à celle présentée ci-dessus. □

Proposition 3.36 *(De Rham* et al.*, 1967, p.2) Si les $\phi(m)$ notés a_n, associés à un système complet de restes $\pmod m$ premiers à m parcourus pas n, satisfont à*

$$\sum_n a_n \chi(n) = 0$$

pour tous caractères $\chi \pmod m$, alors ces nombres sont nuls.

Démonstration. Soit n_0 un entier positif quelconque qui détermine une valeur de n et soit n_1 un entier tel que $n_0 n_1 \equiv 1 \pmod m$. Alors d'après la proposition précédente, nous avons les égalités suivantes :

$$0 = \sum_\chi \chi(n_1) \sum_n a_n \chi(n) = \sum_n a_n \sum_\chi \chi(n n_1) = a_{n_0} \phi(m)$$

D'où $a_{n_0} = 0$. □

Définition 3.37 *Nous appelons le conducteur du caractère $\chi \pmod m$ le plus petit entier $f > 0$ tel que $\chi(a) = 1$, pour tout entier a satisfaisant à $\mathrm{pgcd}(a, m) = 1$ et $a \equiv 1 \pmod f$. Si $f = m$, nous disons que le conducteur est propre.*

Proposition 3.38 *Si f est un diviseur de m, tout système complet de restes $\pmod m$ premiers à m est la réunion de $\frac{\phi(m)}{\phi(f)}$ systèmes complets de de restes $\pmod f$ premiers à f.*

Démonstration. La preuve peut être étudiée dans (De Rham *et al.*, 1967, p.3). □

Proposition 3.39 *À tout caractère $\chi \pmod m$ de conducteur f est associé un caractère propre χ' $\pmod f$, tel que $\chi = \chi_0 \chi'$, χ_0 étant le caractère principal $\pmod m$.*

Démonstration. Nous définissons $\chi'(a)$ pour $\mathrm{pgcd}(a, f) = 1$, en choisissant x de telle manière à ce que $\mathrm{pgcd}(x, m) = 1$ et $x \equiv a \pmod f$ et en posant $\chi'(a) = \chi(x)$. Montrons que cette fonction est bien définie et ne dépend pas du choix de x. Supposons que $\mathrm{pgcd}(x, m) = \mathrm{pgcd}(y, m) = 1$ et que $x \equiv y \pmod f$, alors nous avons $y \equiv xx' \pmod m$ où $x' \equiv 1 \pmod f$. Donc $\chi(x') = 1$ et $\chi(x) = \chi(y)$. □

3.5.2 Sommes de Gauss

Définition 3.40 *Nous appelons sommes de Gauss toute expression de la forme*

$$G(x, \xi) = \sum_{l \pmod m} \chi(l)\xi^l,$$

où χ est un caractère $\pmod m$ et ξ une racine m-ième de l'unité.

Proposition 3.41 *Si χ est un caractère propre $\pmod m$ et ξ est une racine primitive m-ième de l'unité, nous avons $G(\chi, \xi^k) = \overline{\chi}(k)G(\chi, \xi)$ pour tout entier k et $|G(\chi, \xi)| = \sqrt{m}$.*

Démonstration. La preuve de cette proposition peut être étudiée dans (De Rham *et al.*, 1967, p.4). □

Proposition 3.42 *Si χ est un caractère $\pmod m$ de conducteur f et ξ une racine f-ième de l'unité, nous avons*

$$G(\chi, \xi^k) = \frac{\phi(f)}{\phi(m)} G(\chi', \xi^k),$$

où χ' est le caractère propre $\pmod f$ associé à χ et $G(\chi, \xi^k) = \overline{\chi'}(k)G(\chi, \xi)$ pour tout entier k et $|G(\chi, \xi^k)| = \frac{\phi(m)}{\phi(f)}\sqrt{(}f)$.

Démonstration. La preuve de cette proposition peut être étudiée dans (De Rham *et al.*, 1967, p.5). C'est une conséquence de résultats énoncés précédemment. □

3.5.3 Séries de Dirichlet

Définition 3.43 *Nous appelons série de Dirichlet une série de la forme suivante, où* (a_n) *est une suite de nombres complexes :*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Notation 3.44 *Dans notre situation, nous noterons par* $L(s, \chi)$ *la série définie par :*

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Proposition 3.45 *Si* χ *est un caractère* $\pmod m$ *distinct du caractère principal, nous avons* $L(1, \chi') \neq 0$.

Démonstration. La preuve peut être étudiée dans (De Rham *et al.*, 1967, p.8,9). □

3.5.4 Preuve du lemme d'indépendance de Franz

Nous pouvons maintenant esquisser la preuve du lemme d'indépendance de Franz 3.30 exposé à la page 59.

Démonstration. D'après la proposition 3.36, il suffit de montrer que $\sum_n a_n \chi(n) = 0$ pour tout caractère $\chi \pmod m$. Remarquons que si $\chi = \chi_0$, alors $\sum_n a_n = 0$ est établi et le résultat suit. Remarquons également que si $\chi(-1) = -1$, alors $a_{-n} = a_n$ est également établi et le résultat suit également. Pour la suite, nous supposons que $\chi \neq \chi_0$ et $\chi(-1) = 1$. Montrons alors que de la troisième hypothèse, nous pouvons déduire le résultat.
De la troisième égalité, nous déduisons :

$$\log 1 = \sum_n a_n log(1 - \xi^n) = -\sum_{k=1}^{\infty} a_n \frac{\xi^{kn}}{k}.$$

Comme $a_n = a_{-n}$ pour tout indice n, la dernière somme est réelle et vaut donc 0. En remplaçant ξ par ξ^l, nous avons :

$$\sum_n a_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^{kjn}}{k} = 0.$$

Nous multiplions par $\overline{\chi}(j) = \overline{\chi}(nj)\chi(n)$ et sommons :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{j,n} a_n \chi(n)\overline{\chi}(nj)\xi^{knj} = 0.$$

Or, nous avons que $\sum_j \overline{\chi}(nj)\xi^{knj} = \sum_j \overline{\chi}(j)\xi^{kj} = G(\overline{\chi}, \xi^k)$. D'après la proposition **??**, si le conducteur de χ est f et si ξ est une racine primitive f-ième de l'unité, nous avons pour tout entier k :

$$G(\overline{\chi}, \xi^k) = \chi'(k)G(\overline{\chi}, \xi),$$

le caractère χ' étant le caractère propre $\pmod m$ de χ. Alors nous pouvons réécrire :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{j,n} a_n \chi(n)\overline{\chi}(nj)\xi^{knj} = \sum_n a_n \chi(n) \cdot G(\overline{\chi}, \xi) \cdot L(1, \chi') = 0.$$

D'après la proposition 3.41, le terme $G(\overline{\chi}, \xi) \neq 0$. D'après la proposition 3.45, le terme $L(1, \chi') \neq 0$. Alors nous avons que $\sum_n a_n \chi(n) = 0$, ce qu'il fallait démontrer. □

3.5.5 Classification

Théorème 3.46 *Soient $L = L(p; q_1, \ldots, q_n)$ et $L' = L(p; q'_1, \ldots, q'_n)$ deux espaces lenticulaires. Ces espaces sont homéomorphes si et seulement s'il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que*

$$q_i \equiv \pm k q'_{\sigma(i)} \mod p.$$

Démonstration. Soit $\xi = e^{2i\pi/p}$ une p-ième racine primitive de l'unité et soit $T \in \pi_1(L)$ un générateur distingué. Soit $\varphi_\xi : \mathbb{Z}[\pi_1(L)] \to \mathbb{C}$ un morphisme d'anneau tel que $\varphi_\xi(T) = \xi$. D'après le théorème 3.28, la torsion de L est donnée par l'expression suivante :

$$\tau_{\varphi_\xi}(L) = \prod_{i=1}^{n} (\xi^{r_i} - 1)^{-1} \in \mathbb{C}^* / \pm \{\xi^j\}_{j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}},$$

où $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont tels que $r_i q_i \equiv 1 \mod p$, pour tout $i = 1, \ldots, n$. De la même façon, nous pouvons définir $\varphi'_\xi : \mathbb{Z}[\pi_1(L')] \to \mathbb{C}$ un morphisme d'anneaux tel que $\varphi'_\xi(T') = \xi$, où $T' \in \pi_1(L')$ est un générateur distingué. La torsion de L' nous donne alors une suite $r'_1, \ldots, r'_n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tels que $r'_i q'_i \equiv 1 \mod p$.

Supposons qu'il existe $f : L \to L'$ un homéomorphisme qui préserve les générateurs distingués T et T'. Alors d'après le résultat 3.29, il vient que $\tau_{\varphi_\xi}(L) = \tau_{\varphi'_\xi}(L')$. Alors nous avons l'égalité suivante :

$$\prod_{i=1}^{n} (\xi^{r_i} - 1) = \pm \xi^d \prod_{i=1}^{n} (\xi^{r'_i} - 1),$$

où $d \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. À partir d'ici, l'idée est d'utiliser la théorie des nombres pour arriver au résultat. Les deux termes ont le même module, ce qui peut se traduire sous la forme de l'égalité :

$$\prod_{i=1}^{n} (\xi^{r_i} - 1)(\xi^{-r_i} - 1) = \prod_{i=1}^{n} (\xi^{r'_i} - 1)(\xi^{-r'_i} - 1).$$

Le but maintenant est de montrer que les suites d'exposants vérifient

$$(r_1, -r_1, \ldots, r_n, -r_n) \equiv (r'_1, -r'_1, \ldots, r'_n, -r'_n) \mod p.$$

Posons $S = \{j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mid j \text{ et } p \text{ sont premiers entre eux}\}$. Pour $j \in S$, nous notons m_j le nombre de termes égaux à j dans la séquence $(r_1, -r_1, \ldots, r_n, -r_n)$. De façon analogue, nous notons m'_j le nombre de termes égaux à j dans la séquence $(r'_1, -r'_1, \ldots, r'_n, -r'_n)$. Il est clair que $m_{-j} = m_j$, $m'_{-j} = m'_j$ et que $\sum_{j \in S} m_j = 2n = \sum_{j \in S} m'_j$. Posons $a_j = m_j - m'_j$. L'ensemble $\{a_j\}_{j \in S}$ vérifie les hypothèses du lemme de Franz :

— clairement, $\sum_{j \in S} a_j = 0$,

— par un argument de symétrie, $a_j = a_{-j}$,

— et enfin,

$$\begin{aligned} \prod_{j \in S} (\xi^j - 1)^{a_j} &= \prod_{j \in S} (\xi^j - 1)^{m_j} (\xi^j - 1)^{-m'_j} \\ &= \prod_{j \in S} (\xi^{r_i} - 1)(\xi^{-r_i} - 1)(\xi^{r'_i} - 1)^{-1}(\xi^{-r'_i} - 1)^{-1} = 1 \end{aligned}$$

Alors d'après le lemme de Franz, tous les termes $a_j = 0$ pour tout $j \in S$ et alors $m_j = m'_j$. Quitte à ordonner les termes r_i à l'aide d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, nous avons alors que $r'_{\sigma(i)} \equiv \pm r_i \mod p$ pour $i = 1, \ldots, n$. Par définition des r_i et r'_i, il vient alors que $q'_{\sigma(i)} \equiv \pm q_i \mod p$. □

Pour prouver la réciproque du théorème ci-dessus, nous allons avoir besoin de la notion d'homotopie simple. C'est un raffinement de la notion d'homotopie et la définition formelle peut être trouvée dans (Cohen, 1973).

Définition 3.47 *Soit X un CW-complexe fini. Nous pouvons construire un nouveau complexe Y à partir de X, en y attachant deux cellules e^n et e^{n-1}, avec une application continue $\varphi : D^n \to Y$ satisfaisant :*

- *$\varphi(D^{n-1}_+) \subseteq X_{n-1}$,*
- *$\varphi(S^{n-2}) \subseteq X_{n-2}$,*
- *la restriction de φ sur l'intérieur du disque D^n est un homéomorphisme sur e^n,*
- *la restriction de φ sur l'intérieur du disque D^{n-1}_- est un homéomorphisme sur e^{n-1}.*

Il y a alors une application d'inclusion évidente $i : X \to Y$, appelée extension élémentaire. De la même façon, il y a une application $r : Y \to X$, appelée contraction élémentaire, qui est l'inverse homotopique de i.

Définition 3.48 *Soient X et Y deux CW-complexes. X et Y sont équivalents par homotopie simple s'ils diffèrent par une suite d'extensions et de contractions.*

La classification des espaces lenticulaires à homéomorphisme près découle directement de leur classification à homotopie simple près. En effet, le théorème suivant, que nous pouvons retrouver dans (Cohen, 1973), nous donne la clé pour compléter notre preuve.

Théorème 3.49 *Soient $L = L(p; q_1, \ldots, q_n)$ et $L' = L(p; q'_1, \ldots, q'_n)$ des espaces lenticulaires. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *il existe $k \in \mathbb{Z}$ tels que $(q_1, \ldots, q_n)$ soit congrus à une permutation de $(kq'_1, \ldots, kq'_n)$ modulo p,*
- *L et L' sont équivalents par homotopie simple,*
- *L et L' sont homéomorphes.*

Démonstration. La preuve de ce théorème peut être étudiée dans (Cohen, 1973, p.100). □

La classification à homéomorphisme près des espaces lenticulaires de dimension quelconque ayant été établie, il en découle un corollaire important :

Corollaire 3.50 *Soient $L(p,q)$ et $L(p,q')$ des espaces lenticulaires. $L(p,q)$ et $L(p,q')$ sont homéomorphes si et seulement si*

$$q \equiv \pm q'^{\pm 1} \mod p$$

Démonstration. Rappelons que par convention, $L(p,q) = L(p;1,q)$. Nous avons alors deux situations possibles. Supposons que $(1,q) \equiv \pm k(1,q') \mod p$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, nous avons :

$$q \equiv \pm kq' \mod p \text{ et } 1 \equiv \pm k \mod p.$$

Alors $q \equiv \pm q' \mod p$.

Supposons que $(1,q) \equiv \pm k(q',1) \mod p$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, nous avons :

$$1 \equiv \pm kq' \mod p. \text{ et } q \equiv \pm k \mod p$$

Alors $qq' \equiv \pm 1 \mod p$, autrement dit $q \equiv \pm q'^{-1} \mod p$. □

Exemple 3.51 *$L(2,3)$ et $L(2,5)$ sont homéomorphes.*

Exemple 3.52 *Si $p = 3,4,6$ et $n \geq 2$, alors tout espace lenticulaire $L(p;q_1,q_2,\ldots,q_n)$ est homéomorphe à $L(p;1,1,\ldots,1)$.*

Contre-exemple 3.53 *Prenons le cas où $p = 5$ et où $n = 2$. Il existe trois classes d'équivalence pour $L(5;q_1,q_2)$: $L(5;1,1)$, $L(5;1,2)$ et $L(5;2,2)$.*

3.6 Classification des espaces lenticulaires à équivalence d'homotopie près

À titre d'ouverture, nous exposons également la classification des espaces lenticulaires à équivalence d'homotopie près.

Théorème 3.54 *Soient $L(p; q_1, \ldots, q_n)$ et $L(p; q'_1, \ldots, q'_n)$ deux espaces lenticulaires. Ces deux espaces sont équivalents par homotopie si et seulement si $q'_1 \ldots q'_n = \pm r^n q_1 \ldots q_n \mod p$ pour un entier r premier avec p.*

Démonstration. La preuve de cette classification est présentée dans l'ouvrage (De Rham *et al.*, 1967, p.96, 101). □

Exemple 3.55 *Les espaces $L(7,1)$ et $L(7,2)$ ont le même type d'homotopie mais ne sont pas homéomorphes.*

Remarque 3.56 *Les conditions pour qu'une telle équivalence par homotopie existe sont bien plus faibles que pour l'existence d'un homéomorphisme.*

3.7 Les espaces lenticulaires infinis

Il existe plusieurs façons de réaliser ce qu'on appelle une sphère de dimension infinie. Une réalisation possible consiste à utiliser la notion de colimite, notion centrale en théorie des catégories. Une définition précise peut être trouvée dans (Riehl, 2016).

Définition 3.57 Soient $\mathcal{S}^0 \subset \mathcal{S}^1 \subset \cdots \subset \mathcal{S}^n$ telle que chaque sphère $\mathcal{S}^k$ soit un sous-complexe de $\mathcal{S}^{k+1}$, pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. La sphère de dimension infinie est la colimite de cette suite d'inclusions.

Remarque 3.58 *Une façon peut-être un peu plus intuitive de penser à cette notion de sphère de dimension infinie est d'y penser comme à l'union de n-sphère, où n tends vers l'infini.*

Lemme 3.59 *$\mathcal{S}^\infty$ est contractile.*

Démonstration. Cette preuve s'appuie fortement sur ce qui est présenté dans l'ouvrage (Hatcher, 2001, p.88). Rappelons qu'un espace topologique est contractile si l'application identité sur cet espace est homotope à une application constante. D'abord, définissons $f_t : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ telle que

$f_t(x_1, x_2, \dots) = (1-t)(x_1, x_2, \dots) + t(0, x_1, x_2, \dots)$. Cette application envoie alors clairement tout vecteur non nul sur un vecteur non nul, et ce pour tout $t \in [0,1]$. Ainsi l'application $f_t/|f_t|$ est une homotopie entre l'application identité sur $\mathcal{S}^\infty$ et l'application $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$. Ensuite, posons $g_t : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ telle que $g_t(x_1, x_2, \dots) = (1-t)(0, x_1, x_2, \dots) + t(1, 0, 0, \dots)$. L'application $g_t/|g_t|$ est une homotopie entre l'application $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$ et une application constante. Ainsi, $\mathcal{S}^\infty$ est contractile. □

Définition 3.60 Soit $\mathcal{S}^\infty$ la sphère de dimension infinie. Soit p un entier et soient $q_1, q_2, \dots$ des entiers tels que q_i et p soient premiers entre eux, et ce pour tout $i = 1, 2, \dots$. Soit ξ une racine p-ième primitive de l'unité fixée. Le groupe cyclique $\{\xi \in \mathbb{C} | \xi^p = 1\}$ agit sur $\mathcal{S}^\infty \subset \mathbb{C}^\infty$ de la façon suivante :

$$\xi \cdot (z_1, z_2, \dots) \mapsto (\xi_1^q z_1, \xi_2^q z_2, \dots)$$

L'espace résultant du quotient de $\mathcal{S}^\infty$ par cette action est l'*espace lenticulaire de dimension infinie* de paramètres $p, q_1, q_2, \dots$.

Contrairement aux espaces lenticulaires de dimension finie, le type d'homotopie d'un espace lenticulaire de dimension infinie ne dépend pas des paramètres $q_1, q_2, \dots$. Pour s'en convaincre, nous aurons besoin d'étudier les espaces d'Eilenberg-MacLane ainsi que quelques unes de leur propriété.

Définition 3.61 Un espace topologique X admettant un seul groupe d'homotopie non trivial $\pi_n(X) \approx G$ est un $K(G, n)$-espace ou encore un *espace d'Eilenberg-MacLane*.

Remarque 3.62 *Pour le cas $n = 1$, c'est-à-dire le cas où $\pi_i(X) = 0$ pour $i > 1$, et si X est un CW-complexe cette définition est équivalente à demander à ce que X soit connexe par arcs et que son revêtement universel soit contractile.*

Lemme 3.63 *Un espace lenticulaire de dimension infinie est un $K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, 1)$-espace.*

Démonstration. D'après le lemme 3.59, le revêtement universel d'un espace lenticulaire de dimension infinie est contractile. Aussi, tout espace lenticulaire de dimension infinie est connexe par arcs, étant l'image continue d'un espace connexe par arcs. Enfin, le groupe fondamental d'un tel espace est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. □

Le théorème suivant nous donne alors que le type d'homotopie d'un espace lenticulaire de dimension infini dépend seulement du paramètre p choisi.

Théorème 3.64 *Le type d'homotopie d'un CW-complexe $K(G, 1)$ est uniquement déterminé par G.*

Démonstration. La preuve de ce théorème peut être étudiée dans (Hatcher, 2001, p.90). □

CHAPITRE 4
LA THÉORIE DES NŒUDS ET LA TORSION DE REIDEMEISTER

Ce chapitre se divise en deux parties : nous commencerons par une introduction brève à la théorie des nœuds et nous terminerons par une revue du travail de Hiroshi Goda, Teruaki Kitano et Takayuki Morifuji sur les nœuds fibrés et la torsion de Reidemeister (Goda *et al.*, 2003). La torsion de Reidemeister entretient un lien fort avec la théorie des nœuds et c'est la dernière application de la torsion que nous présenterons dans ce mémoire. Les deux premières sections s'appuient sur des ouvrages classiques d'introduction à la théorie des nœuds tels que (Crowell et Fox, 1963), (Neuwirth, 1965), (Rolfsen, 1980), (Livingston, 1993) et (Lickorish, 1997). Les autres sections s'appuient notamment sur les notes de cours mises en ligne par Teruaki Kitano dans le cadre de la cinquième édition des Winter Braids qui a eu lieu à Pau en 2015 (Kitano, 2015) ainsi que sur (Goda *et al.*, 2003).

4.1 Préliminaires

Définition 4.1 Un *nœud* K est la donnée d'un plongement du cercle $\mathcal{S}^1$ dans $\mathcal{S}^3$.

Exemple 4.2 *Le nœud trivial* $K = \mathcal{S}^1$.

FIGURE 4.1 Un nœud non trivial

Il existe trois types de nœuds dans $\mathcal{S}^3$: les nœuds toriques, les nœuds satellites et les nœuds hyberboliques. Cette classification est due à William Thurston. Nous donnons les définitions de nœuds satellites et de nœuds hyperboliques à titre d'ouverture, sans aller dans les détails.

Théorème 4.3 *Un nœud $K \subset \mathcal{S}^3$ est soit torique, satellite, ou hyperbolique.*

Un nœud est dit torique s'il peut être plongé sur la surface d'un tore non noué dans $\mathcal{S}^3$. Chaque nœud torique est paramétré par deux entiers premiers entre eux notés p et q, qui modélisent le nombre de fois où le nœud en question tourne autour du méridien et de la longitude du tore. Nous notons $T_{p,q}$ un tel nœud. L'exemple le plus simple de nœud torique est le nœud de trèfle de paramètre $p = 3$ et $q = 2$.

La prochaine classe de nœuds demande de définir quelques notions préalables.

Définition 4.4 *Soit M une variété différentielle et soient N_0 et N_1 deux sous-variétés de M. N_0 et N_1 sont dites transverses lorsque pour tout point $x \in N_0 \cap N_1$, les espaces tangents T_xN_0 et T_xN_1 sont transverses dans l'espace tangent T_xM. Autrement dit, ils sont transverses si*

$$T_xP = T_xN_0 + T_xN_1.$$

Exemple 4.5 *Deux courbes dans un espace tri-dimensionnel peuvent être transverses seulement lorsque leur intersection est vide.*

Définition 4.6 *Soient X et Y deux variétés lisses. Un plongement $f : X \to Y$ est dit propre si :*

- $f(\partial X) = f(X) \cap \partial Y$,
- *f(X) est transverse à ∂Y pour tout point de $f(\partial X)$.*

Définition 4.7 *Une variété linéaire par morceaux (LP) est une variété topologique qui admet une structure linéaire par morceaux. Une telle structure peut être définie par des cartes, où les fonctions de transition sont données par des fonctions linéaires par morceaux.*

Remarque 4.8 *Tous les variétés lisses admettent une structure LP canonique, puisqu'elles sont toutes uniquement triangulables d'après les travaux de J.H.C. Whitehead (Whitehead, 1940).*

Définition 4.9 *Soit S une surface compacte plongée proprement dans une 3-variété LP lisse M. Un disque compressible D est un disque plongée dans M tel que :*

$$D \cap S = \partial D,$$

et leur intersection est transverse. Si la courbe ∂D ne borde pas un disque à l'intérieur de S, alors D est un disque non trivial compressible. Si S admet un disque non trivial compressible, alors S est une surface compressible dans M. Si S n'est ni la 2-sphère, ni une surface compressible, alors S est une surface incompressible.

Définition 4.10 Un nœud $K \subset \mathcal{S}^3$ est *satellite* si le complément de K contient un tore incompressible et non parallèle au bord.

Remarque 4.11 *Une n-variété fermée N plongée dans une $(n+1)$-variété M est parallèle au bord s'il existe une isotopie de N sur une des composantes de bord de M.*

Définition 4.12 *Une variété Riemanienne M est la donnée de (M, g) où M est une variété différentiable et g est une métrique Riemanienne sur M.*

Définition 4.13 *Soit M une variété Riemanienne de tenseur métrique $<,>$ et de tenseur de courbure R. Soient X et Y deux vecteurs linéairement indépendants et tangents au point $p \in M$. La courbure sectionnelle est donnée par :*

$$K_m(X,Y) = \frac{< R(X,Y)Y, X >}{< X, X >< Y, Y > - < X, Y >^2}.$$

Définition 4.14 *Une variété Riemanienne est dite de courbure constante κ si toutes les courbures sectionnelles sont égales à κ.*

Définition 4.15 Un nœud $K \subset \mathcal{S}^3$ est *hyperbolique* si le complément de K est une 3-variété hyperbolique, c'est-à-dire :

— soit $\mathcal{S}^3 \setminus K$ admet une métrique Riemanienne complète de courbure constante négative,

— soit $\mathcal{S}^3 \setminus K = \mathbb{H}^3/\Gamma$, où $\mathbb{H}^3$ est l'espace hyperbolique et Γ est un sous-groupe discret sans torsion des isométries de $\mathbb{H}^3$.

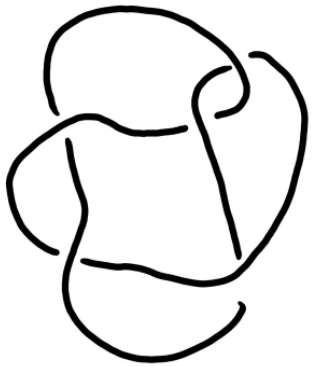


FIGURE 4.2 Un nœud hyperbolique : le miroir du nœud 5_2

Définition 4.16 Soit M une variété et N une sous-variété de M. Soient g et h des plongements de N dans M. Une *isotopie ambiante* est une application continue

$$\begin{aligned} F : M \times [0,1] &\to M \\ (x,t) &\mapsto F(x,t) = F_t(x) \end{aligned}$$

telle que F_0 soit l'application identité, F_t est un homéomorphisme pour tout $t \in [0,1]$ et $F_1 \circ g = h$.

Définition 4.17 Deux nœuds K_1 et K_2 sont dits *équivalents* s'il existe une isotopie ambiante entre eux.

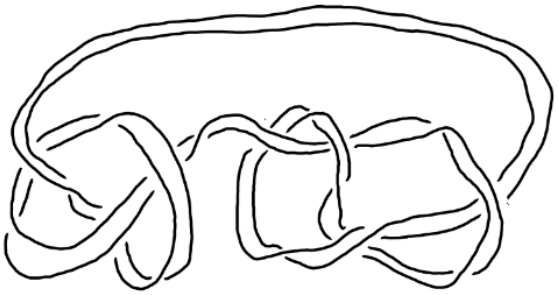


FIGURE 4.3 Un nœud satellite : câble d'une somme connexe de deux nœuds

Remarque 4.18 *Si les nœuds K_1 et K_2 sont orientés, nous demandons de plus que F_1 préserve l'orientation.*

Kurt Reidemeister a introduit les mouvements suivants réalisables sur les diagrammes de nœuds.

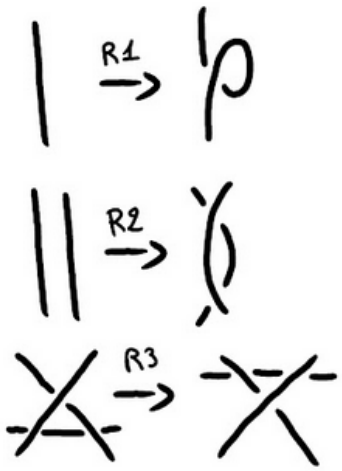


FIGURE 4.4 Mouvements de Reidemeister

Théorème 4.19 *Deux nœuds K_1 et K_2 sont isotopes si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre à l'aide d'une suite finie de mouvements de Reidemeister.*

Démonstration. Cette preuve peut être étudiée dans (Reidemeister, 1927). □

Exemple 4.20 *Ces deux nœuds sont isotopes.*

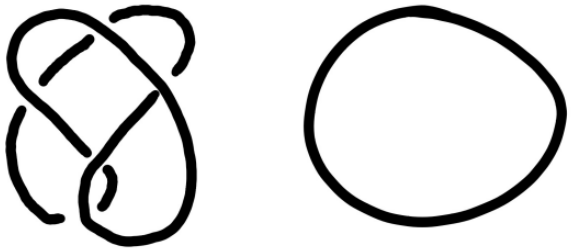


FIGURE 4.5 Deux nœuds isotopes

4.2 Quelques invariants classiques

Un invariant de nœud est une fonction qui assigne à chaque nœud K un objet $f(K)$ qui sera le même pour deux nœuds équivalents. La recherche de nouvel invariant de nœuds ne sert pas exclusivement à distinguer deux nœuds mais est également motivée par le désir de comprendre de façon fondamentale les propriétés des nœuds. Des invariants numériques ont été découverts comme par exemple le nombre de croisements, définis comme étant le nombre minimal de croisements de tout diagramme d'un nœud donné. Par exemple, le nœud trivial admet 0 croisement, le nœud de trèfle en admet 3 et le nœud de huit en admet 4. Le nombre d'enlacement est également un invariant numérique pour les nœuds à plus d'une composante. Nous pouvons rencontrer d'autres types d'invariants comme des invariants polynomiaux. L'exemple le plus important et le plus connu est le polynôme d'Alexander. Bien qu'une infinité de nœud non triviaux admettent un polynôme d'Alexander trivial, cet invariant est puissant et est, d'une certaine façon, relié à la torsion de Reidemeister. C'est ce que nous étudierons dans ce chapitre.

4.2.1 Groupe fondamental

Un des premiers exemples d'invariants de nœuds est le groupe fondamental du complément d'un nœud donné K. Dans cette section, nous considérons que tout nœud est plongé dans $\mathcal{S}^3$.

Définition 4.21 Le *complément* d'un nœud $K \subset \mathcal{S}^3$ est $\mathcal{S}^3 \setminus K$.

Définition 4.22 Le *groupe* d'un nœud K est le groupe fondamental de son complément dans $\mathcal{S}^3$. Il est noté $G(K) = \pi_1(\mathcal{S}^3 \setminus K)$.

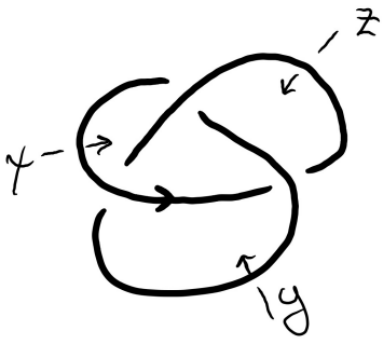


FIGURE 4.6 Méthode de Wirtinger pour le nœud de trèfle

Définition 4.23 Une *présentation de Wirtinger* est une présentation finie d'un groupe G dont les relations sont de la forme $yx_iy^{-1} = x_j$, où y est un mot formé des générateurs $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de G.

Wilhelm Wirtinger s'est rendu compte que le groupe de tout nœud K plongé dans $\mathcal{S}^3$ admet une présentation de ce type. Un algorithme porte son nom, l'algorithme de présentation de Wirtinger, et nous permet de présenter le groupe de tout nœud. Cet algorithme est présenté dans (Rolfsen, 1980) et sa preuve utilise le théorème de Van Kampen. L'idée est de découper chaque nœud en un nombre fini d'arc, puis à étudier les croisements entre ces arcs pour en déduire des relations. Nous utilisons cet algorithme pour donner les exemples suivants :

Exemple 4.24 *Soit K le (seul) nœud a 4 croisements. $G(K) = \langle x, y \mid yxy^{-1}xy = xyx^{-1}yx \rangle$.*

Remarque 4.25 *L'unique nœud admettant 4 croisements est appelé le nœud de huit. Dans les années 1970, William Thurston a démontré que le nœud de huit est hyperbolique.*

Exemple 4.26 *Soit K le nœud de trèfle. Nous avons 3 générateurs et 2 relations $xz = yz$ et $yx = xz$. La seconde relation peut être utilisée pour éliminer le générateur $z = x^{-1}yx$. La première relation devient alors $yx = x^{-1}yxy$ et alors $G(K)$ admet la présentation suivante $\langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$. Le nœud de trèfle étant un nœud torique de paramètre $(3, 2)$, nous avons en fait que $G(K) = \langle x, y \mid x^3 = y^2 \rangle$ selon le lemme suivant :*

Lemme 4.27 *Soit K un nœud torique de paramètres (p, q) où p et q sont des entiers premiers entre eux. Alors le groupe de K admet la présentation suivante $\langle x, y \mid x^p = y^q \rangle$.*

Démonstration. Une preuve peut être étudiée dans (Hatcher, 2001, p.47). L'idée est d'utiliser le théorème de Van Kampen. □

4.2.2 Genre

Nous pouvons associer à tout nœud orienté une surface compacte, connexe et orientable admettant ce nœud pour bord. C'est ce qu'on appelle une surface de Seifert. La visualisation des surfaces de Seifert a été un des sujets de recherche du Professeur Jack van Wijk, qui a développé un logiciel capable de générer de telles surfaces pour un nœud donné.

Définition 4.28 Une *surface de Seifert* est une surface compacte, connexe et orientable dont le bord est un nœud ou un entrelacs donné.

En général, il n'y a pas unicité de la surface de Seifert associée à un nœud donné. Nous utilisons les surfaces de Seifert pour définir le genre d'un nœud.

Définition 4.29 Le *genre* d'un nœud K est le genre minimal de toutes les surfaces de Seifert associées à K.

Exemple 4.30 *Le nœud trivial, étant par définition le bord d'un disque, est de genre* 0*. Nous pouvons montrer que le nœud de trèfle ainsi que le nœud de huit sont de genre* 1*.*

Exemple 4.31 *Des exemples visuels issus du logiciel Seifert View peuvent être vus dans (van Wikj et Cohen, 2006).*

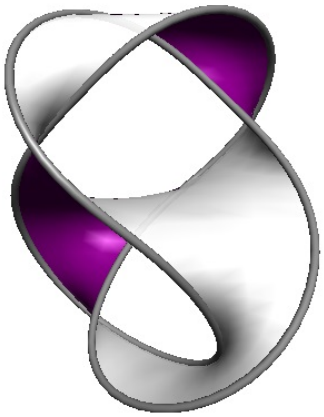


FIGURE 4.7 Visualisation d'une surface de Seifert associée au nœud de huit, image issue du logiciel Seifert View, Jarke J. van Wijk, Technische Universiteit Eindhoven

Théorème 4.32 *Le genre d'un nœud K est un invariant de nœuds.*

Démonstration. Ceci découle du fait que le genre d'une surface est un invariant topologique. □

Remarque 4.33 *À tout nœud ou entrelacs donné, peut être associée une surface de Seifert. Ce résultat d'existence a été prouvé par Herbert Seifert en 1934 (Seifert, 1935) qui a établi un algorithme portant son nom pour construire de telle surface.*

4.3 Calcul différentiel de Fox

Dans cette section, nous noterons $\mathbb{F}$ le groupe libre généré par n éléments $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Soit

$$\begin{aligned} aug : \mathbb{Z}[\mathbb{F}] &\to \mathbb{Z} \\ \sum_{f \in \mathbb{F}} n_f f &\mapsto \sum_{f \in \mathbb{F}} n_f \end{aligned}$$

le morphisme d'augmentation.

Définition 4.34 Un morphisme additif $\mathcal{D} : \mathbb{Z}[\mathbb{F}] \to \mathbb{Z}[\mathbb{F}]$ est une *dérivée* définie sur $\mathbb{Z}[\mathbb{F}]$ si

$$\mathcal{D}(ab) = \mathcal{D}(a)aug(b) + a\mathcal{D}(b), \forall a, b \in \mathbb{Z}[\mathbb{F}]$$

.

Lemme 4.35 *Soit $\mathcal{D}$ une dérivée définie sur $\mathbb{Z}[\mathbb{F}]$. Alors $\mathcal{D}(h) = 0$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$ et $\mathcal{D}(a^{-1}) = -a^{-1}\mathcal{D}(a)$ pour tout $a \in \mathbb{Z}[\mathbb{F}]$.*

Démonstration. $\mathcal{D}(1) = \mathcal{D}(1 \cdot 1) = \mathcal{D}(1) \cdot 1 + 1 \cdot \mathcal{D}(1) = \mathcal{D}(1) + \mathcal{D}(1)$, ainsi $\mathcal{D}(1) = 0$ et alors pour $h \in \mathbb{Z}, \mathcal{D}(h) = h \cdot \mathcal{D}(1) = 0$. Aussi $0 = \mathcal{D}(1) = \mathcal{D}(aa^{-1}) = \mathcal{D}(a^{-1}) + a^{-1}\mathcal{D}(a)$. □

Toute dérivée sur $\mathbb{Z}[\mathbb{F}]$ est ainsi déterminée par les valeurs qu'elle prend sur les générateurs du groupe $\mathbb{F}$. Par définition d'un morphisme dérivé, $\mathcal{D}$ est ainsi définie pour tout produit, et par linéarité, sur l'anneau $\mathbb{Z}[\mathbb{F}]$ complet.

Théorème 4.36 *Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe une unique dérivée $\frac{\partial}{\partial x_j}$ définie sur $\mathbb{Z}[\mathbb{F}]$ qui satisfait*

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{i,j}$$

où $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $\delta_{i,j}$ est le symbole delta de Kronecker.

Démonstration. Une preuve de ce théorème peut être étudiée dans (Crowell et Fox, 1963). □

Définition 4.37 Le *calcul différentiel de Fox* consiste en les applications suivantes, définies pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathbb{Z}[\mathbb{F}] \to \mathbb{Z}[\mathbb{F}]$$

qui satisfont les propriétés suivantes :

— chaque application est une dérivée sur $\mathbb{Z}[\mathbb{F}]$,

— $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{i,j}$, pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,
— pour tout $y, y' \in \mathbb{F}$, $\frac{\partial}{\partial x_j}(yy') = \frac{\partial}{\partial x_j}(y) + y\frac{\partial}{\partial x_j}(y')$.

Remarque 4.38 *Nous appellerons "dérivée de Fox" l'ensemble de ces applications, pour être plus concis.*

Lemme 4.39 *La dérivée de Fox vérifie les égalités suivantes :*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(x_j^k) = \begin{cases} 1 + x_j + \cdots + x_j^{k-1} & \textit{si } k > 0 \\ -(x_j^{-1} + \cdots + x_j^k) & \textit{si } k < 0 \end{cases}$$

$$\forall y \in \mathbb{F}, \frac{\partial}{\partial x_j}(y^k) = \begin{cases} \frac{y^k - 1}{y-1}\frac{\partial}{\partial x_j}(y) & \textit{si } k > 0 \\ -\frac{y^k-1}{y-1}\frac{\partial}{\partial x_j}(y) & \textit{si } k < 0. \end{cases}$$

Démonstration. Ces égalités sont des conséquences quasiment immédiates du fait que $\frac{\partial}{\partial x_j}$ est une dérivée de Fox. □

Proposition 4.40 $\forall y \in \mathbb{Z}[\mathbb{F}]$, $y - 1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(y)(x_j - 1)$.

Démonstration. Nous reprenons l'idée de la preuve qui est présentée dans (Kitano, 2015). Nous faisons une preuve par récurrence sur la longueur du mot $y \in \mathbb{Z}[\mathbb{F}]$. Si y est un mot de longueur nulle, alors $y = 1$ et le résultat est initialisé. Supposons maintenant que l'égalité soit vérifiée pour un mot $y \in \mathbb{F}$ de longueur k. Prenons $y \in \mathbb{F}$ un mot de longueur $k + 1$ et supposons que $y = y_k x_i^{\pm 1}$ où y_k

est un mot de longueur k. Si $y = y_k x_i$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_j}(x_j - 1) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (y_k x_i)}{\partial x_j}(x_j - 1) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j} + y_k \delta_{i,j} \right)(x_j - 1) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x_j - 1) + y_k(x_i - 1) \\
&= y_k - 1 + y_k(x_i - 1), \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= y_k x_i - 1 \\
&= y - 1.
\end{aligned}$$

La preuve est similaire dans le cas où $y = y_k x_i^{-1}$. Le résultat est démontré sur $\mathbb{Z}[\mathbb{F}]$ par les propriétés de linéarité de la dérivée de Fox. □

4.4 Polynôme d'Alexander

Le polynôme d'Alexander a été introduit pour la première fois par James Waddell Alexander II dans (Alexander, 1928) en 1928. C'est un des premiers invariants de nœuds polynomial.
Soit $K \subset \mathcal{S}^3$ un nœud et soit $G(K) = \pi_1(\mathcal{S}^3 \setminus K)$ le groupe de K.

Définition 4.41 Soit G un groupe finiment présenté. La *déficience* de G est la différence maximale entre le nombre de générateurs et le nombre de relations de G, parmi toutes ses présentations finies possibles.

Remarque 4.42 *La déficience d'un groupe G permet de mesurer à quel point la présentation d'un groupe donné doit être complexe.*

Dans un premier temps, nous définissons le polynôme d'Alexander dans le cas où le groupe $G(K)$ est de déficience égale à 1. Nous supposons qu'il admet la présentation suivante $G(K) = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_{n-1} \rangle$.

Nous noterons par $\mathbb{F}$ le groupe libre généré par les générateurs de $G(K)$, soumis à aucune relation. Naturellement, nous avons un épimorphisme qui plonge tout $x_i \in \mathbb{F} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ dans $G(K)$. Ce

morphisme induit alors un morphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[\mathbb{F}] \to \mathbb{Z}[G(K)]$. De la même façon, le morphisme d'abélianisation de $G(K)$

$$\alpha : G(K) \to G(K)/[G(K), G(K)] \cong \mathbb{Z} = \langle t \rangle$$

induit un morphisme d'anneau $\alpha_* : \mathbb{Z}[G(K)] \to \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Définition 4.43 La matrice A de taille $(n-1) \times n$ définie par

$$A = \left(\alpha_* \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right) \in \mathcal{M}((n-1) \times n, \mathbb{Z}[t, t^{-1}]), \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \text{ et } 1 \leq j \leq n$$

est la *matrice d'Alexander* associée à $G(K) = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots r_{n-1} \rangle$.

Remarque 4.44 *La matrice A n'est pas une matrice carrée. Nous noterons alors A_j la matrice obtenue à partir de A dont la j-ième colonne a été retirée.*

Lemme 4.45 *Il existe un entier $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\alpha_*(x_k) \neq 1 \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.*

Démonstration. Supposons que pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha_*(x_k) = 1$. Alors le morphisme d'abélianisation serait trivial, ce qui contredit le fait que α est un épimorphisme. □

Lemme 4.46 *Pour tout $k, l \in \{1, \ldots, n\}$*

$$(\alpha_*(x_l) - 1) \det A_k = \pm(\alpha_*(x_k) - 1) \det A_l.$$

Démonstration. La preuve peut être étudiée dans (Kitano, 2015, p.5). □

Remarque 4.47 *D'après (Kitano, 2015), les deux résultats précédents suffisent pour construire l'invariant suivant pour un nœud donné K dont le groupe admet une présentation de déficience 1 :*

$$\frac{\det A_k}{\alpha_*(x_k) - 1}$$

pour un entier $k \in \{1, \ldots, n\}$ qui vérifie les hypothèses des deux lemmes précédents. Cet invariant est indépendant du choix de présentation qui est fait pour $G(K)$, à multiplication par un élément $\pm t^s$ près, pour $s \in \mathbb{Z}$.

Afin de montrer que cet invariant ne dépend pas du choix de présentation de $G(K)$, à multiplication par $\pm t^s, s \in \mathbb{Z}$, nous le définissons pour un groupe ayant une déficience supérieure à 1, puis nous appliquons les transformations de Tietze. Supposons maintenant que nous travaillons avec un groupe de nœud $G(K)$ qui admet la présentation suivante, pour $1 \leq d \leq n-1$:

$$G(K) = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots r_{n-d} \rangle$$

La matrice d'Alexander associée à $G(K)$ est alors définie de la même façon que pour le cas d'un groupe finiment présenté de déficience 1.

Définition 4.48 La matrice A de taille $(n-d) \times n$ définie par

$$A = \left(\alpha_* \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right) \in \mathcal{M}((n-d) \times n, \mathbb{Z}[t, t^{-1}]), \text{ pour } 1 \leq i \leq n-d \text{ et } 1 \leq j \leq n$$

est la *matrice d'Alexander* associée à $G(K) = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots r_{n-d} \rangle$, où $1 \leq d \leq n-1$.

Remarque 4.49 *De façon similaire à ce que nous avons fait précédemment, nous noterons par A_j la matrice obtenue à partir de A dont la j-ième colonne a été enlevée. Contrairement au cas où le groupe est de déficience égale à 1, la matrice A_j ainsi obtenue est de taille $(n-d) \times (n-1)$ et n'est donc pas une matrice carrée si $d \geq 2$. Nous noterons alors A_j^I la matrice de taille $(n-d) \times (n-d)$ dont les colonnes sont celles de A_k correspondent aux indices $I = (i_1, \ldots, i_{n-d})$, pour $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_{n-d} \leq n$.*

Lemme 4.50 *Pour tout $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tout choix $I = (i_1, \ldots, i_{n-d})$ d'indices tel que $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_{n-d} \leq n$ et $k, l \notin I$*

$$(\alpha_*(x_l) - 1) \det A_k^I = (\alpha_*(x_k) - 1) \det A_l^I.$$

Démonstration. Les arguments utilisés dans la preuve du lemme 4.46 peuvent être réutilisés pour prouver ce résultat. □

Théorème 4.51 *À multiplication par un élément $\pm t^s$, $s \in \mathbb{Z}$ près, le quotient suivant*

$$\frac{Q_k}{\alpha_*(x_k) - 1}$$

où $Q_k = \mathrm{pgcd}(\det A_k^I)$ pour tout ensemble d'indices I, est indépendant du choix de présentation de $G(K) = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_{n-d} \rangle$, pour $1 \leq d \leq n-1$.

Démonstration. Une preuve peut être étudiée dans (Kitano, 2015, p.7). □

Remarque 4.52 *(Kitano, 2015, p.8) Supposons que nous avons un nœud donné K et que $G(K)$ soit muni d'une présentation de Wirtinger (ce qui est toujours possible de trouver, grâce à l'algorithme de Wirtinger). Dans ce cas, nous pouvons ajouter l'hypothèse que $\alpha(x_i) = t$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Dans ce cas, le numérateur du polynôme d'Alexander est lui-même un invariant de $G(K)$ à multiplication par $\pm t^s$ près, $s \in \mathbb{Z}$.*

Définition 4.53 Soit K un nœud. Le *polynôme d'Alexander* de K est $\Delta_K(t) = \det A_k$ et est bien défini à multiplication par $\pm t^s$ près, $s \in \mathbb{Z}$.

Exemple 4.54 *Prenons l'exemple du nœud de huit, $K = 4_1$.*

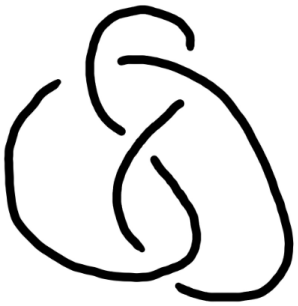


FIGURE 4.8 Diagramme du nœud de huit 4_1

En appliquant l'algorithme de Wirtinger, nous avons que $G(K)$ admet la présentation suivante

$$G(K) = \langle x, y \mid wxw^{-1} = y \rangle$$

où $w = x^{-1}yxy^{-1}$. Tout élément générateur de $G(K)$ étant envoyé sur t par le morphisme d'abélianisation α, nous avons alors

$$\frac{\partial w}{\partial x}(wxw^{-1}y^{-1}) = (1-y)\frac{\partial w}{\partial x} + w \ , \ \alpha_* \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \alpha_*(-x^{-1} + x^{-1}y) = -t^{-1} + 1.$$

Alors, nous avons

$$\alpha_*\left(\frac{\partial w}{\partial x}(wxw^{-1}y^{-1})\right) = (1-t)(-t^{-1}+1)+1$$
$$= -t^{-1}+3-t.$$

Le même type de calcul nous donne que

$$\alpha_*\left(\frac{\partial w}{\partial y}(wxw^{-1}y^{-1})\right) = t^{-1}-3+t.$$

Et ainsi nous avons que la matrice d'Alexander associée à $K = 4_1$ *est* $A = \begin{bmatrix} -t^{-1}+3-t & t^{-1}-3+t \end{bmatrix}$ *et*

$$\frac{\det A_1}{\alpha_*(x_1)-1} = \frac{-1}{t}\frac{(-t^2+3t-1)}{t-1}\ ,\ \frac{\det A_2}{\alpha(x_2)-1} = \frac{1}{t}\frac{(-t^2+3t-1)}{t-1}$$

Le polynôme d'Alexander du nœud de huit est alors $\Delta_K(t) = -t^2+3t-1$ *à multiplication par* t^s *près.*

4.5 Polynôme d'Alexander tordu

Nous travaillerons avec la définition de la généralisation du polynôme d'Alexander de Masaaki Wada (Wada, 1994). Cette définition va nous permettre de faire le lien entre le polynôme d'Alexander tordu d'un nœud $K \subset \mathcal{S}^3$ à la torsion de Reidemeister du complément de K.

4.5.1 Définition et propriétés

Soit $\mathbb{F}$ un corps, $K \subset \mathcal{S}^3$ un nœud et $G(K) = \pi_1(\mathcal{S}^3 \setminus K)$. Nous supposons que $G(K)$ admet la présentation finie suivante, de déficience 1 :

$$G(K) = \langle x_1, \cdots x_n \mid r_1, \cdots r_{n-1} \rangle$$

Soit $\rho : G(K) \to SL(2,\mathbb{F})$ une représentation de $G(K)$. Nous noterons par $\rho_* : \mathbb{Z}[G(K)] \to \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{F})] \cong \mathcal{M}(2,\mathbb{F})$ le morphisme d'anneau induit par ρ. De la même façon, pour le morphisme d'abélianisation $\alpha : G(K) \to \mathbb{Z}$, nous noterons $\alpha_* : \mathbb{Z}[G(K)] \to \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] = \mathbb{Z}\langle t \rangle \cong \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ le morphisme d'anneaux qu'il induit. Nous pouvons alors réaliser le produit tensoriel de ces deux morphismes d'anneaux pour en obtenir un nouveau :

$$\rho_* \otimes \alpha_* : \mathbb{Z}[G(K)] \to \mathcal{M}(2, \mathbb{F}) \otimes \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \cong \mathcal{M}(2, \mathbb{F}[t, t^{-1}]).$$

Enfin nous noterons par ϕ la composition du morphisme $\mathbb{Z}[\langle x_1, \cdots, x_n \rangle] \to \mathbb{Z}[G(K)]$ et de $\rho_* \otimes \alpha_*$

$$\phi : \mathbb{Z}[\langle x_1, \ldots, x_n \rangle] \to \mathcal{M}(2, \mathbb{F}[t, t^{-1}]).$$

Définition 4.55 La matrice A_ρ de taille $(n-1) \times n$ dont chaque composante (i, j) est la matrice suivante

$$\phi\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) \in \mathcal{M}(2, \mathbb{F}[t, t^{-1}])$$

est appelée la *matrice d'Alexander tordue* du groupe d'un nœud donné $G(K) = \langle x_1, \ldots x_n \mid r_1, \cdots r_{n-1} \rangle$ associé à une représentation ρ.

Notation 4.56 *Dans la suite, nous noterons par $A_{\rho,k}$ la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenue à partir de A_ρ à laquelle nous avons retiré la k-ième colonne. Ainsi, la matrice obtenue est bien une matrice carrée $A_{\rho,k} \in \mathcal{M}(2(n-1), \mathbb{F}[t, t^{-1}])$.*

Lemme 4.57 *Il existe un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\det(\phi(x_j - 1)) \neq 0$.*

Démonstration. La preuve de ce résultat peut être étudiée dans (Wada, 1994, p.245). □

Lemme 4.58 $(\det A_{\rho,k})(\det \phi(x_j - 1)) = \det(A_{\rho,j})(\det \phi(x_j - 1))$, *pour tout k, j.*

Démonstration. La preuve de ce résultat peut être étudiée dans (Wada, 1994, p.245). □

À partir de ces deux lemmes, nous pouvons définir le polynôme d'Alexander tordu de $G(K)$ associé à une représentation $\rho : G(K) \to SL(2, \mathbb{F})$:

Définition 4.59 Le *polynôme d'Alexander tordu* d'un nœud $K \subset \mathcal{S}^3$ pour une représentation ρ donnée est

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \frac{\det A_{\rho,k}}{\det \phi(x_k - 1)},$$

pour un entier k tel que $\det \phi(x_k - 1) \neq 0$.

Théorème 4.60 *Le polynôme d'Alexander tordu est indépendant du choix de présentation.*

Démonstration. La preuve peut être étudiée dans (Wada, 1994, p.246). □

Exemple 4.61 *Soit K le nœud trivial. Le groupe de K admet la présentation suivante $G(K) = \langle x \rangle$. Nous construisons alors le morphisme d'abélianisation de la façon suivante :*

$$\alpha : x \in G(K) \mapsto t \in \langle t \rangle.$$

Toute représentation, dans ce cas-ci, sera la donnée d'un choix d'une matrice dans $SL(2, \mathbb{F})$ qui sera l'image par $x \in G(K)$. Alors nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta_{K,\rho}(t) &= \frac{1}{\det(t\rho(x) - I)} \\ &= \frac{1}{(\lambda_1 t - 1)(\lambda_2 t - 1)}, \end{aligned}$$

où λ_1, λ_2 sont les valeurs propres de $\rho(x)$ et I est la matrice identité de taille 2×2.

Exemple 4.62 *Wada expose un exemple de calcul du polynôme d'Alexander tordu du nœud de trèfle (Wada, 1994, p.248) pour deux représentations différentes. Une des deux représentations donne un polynôme comme résultat, alors que l'autre donne un quotient de polynômes.*

Une question naturelle émerge alors : à quelle condition est-ce que le polynôme d'Alexander tordu d'un couple $(G(K), \rho)$ donné sera bel et bien un polynôme ?

Wada répond à cette question avec le résultat suivant :

Proposition 4.63 *Soit $\rho : G(K) \to SL(2, \mathbb{F})$ une représentation d'un groupe d'un nœud K donné, telle qu'il existe un élément $\gamma \in [G(K), G(K)]$, tel que $\rho(\gamma)$ n'admette pas 1 comme valeur propre. Alors $\det A_{\rho,k}$ divise $\det \phi(x_j - 1)$.*

Démonstration. La preuve peut être étudiée dans (Wada, 1994). □

Le résultat suivant de Teruaki Kitano et Takayuki Morifuji (Kitano et Morifuji, 2005) nous assure que le polynôme d'Alexander tordu sera bel et bien un polynôme, si nous supposons quelque hypothèse sur la représentation choisie.

Théorème 4.64 *Le polynôme d'Alexander tordu du groupe d'un nœud et de toute représentation non abélienne dans $SL(2, \mathbb{F})$ où $\mathbb{F}$ est un corps est un polynôme.*

Démonstration. La preuve de ce résultat peut être étudiée dans (Kitano et Morifuji, 2005). □

Exemple 4.65 *Prenons l'exemple du groupe du nœud de trèfle, $G(K) = \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$. La représentation qui envoie les générateurs sur*

$$\rho(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } \rho(y) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est non abélienne puisque $\Delta_{k,\rho}(K) = 1 - t^2$.

4.5.2 Torsion de Reidemeister dans un contexte géométrique

Comme nous avons vu au chapitre 1, la torsion de Reidemeister peut être calculée d'une façon totalement algébrique. Dans cette section, nous proposons une définition de la torsion de Reidemeister dans un contexte plus géométrique. Cette version géométrique nous permettra de voir le polynôme d'Alexander tordu d'un nœud comme la torsion de Reidemeister du complément de ce nœud.

Dans cette section, nous noterons par X un CW-complexe fini et $\tilde{X}$ son revêtement universel. $\tilde{X}$ hérite naturellement d'une structure de CW-complexe. Nous rappelons que dans ce cas-ci, le groupe fondamental $\pi_1(X)$ agit sur $\tilde{X}$.

Définition 4.66 Soit G un groupe sur V où V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{F}$. Soit $GL(V)$ le groupe général linéaire sur V. Une application $\rho : G \to GL(V)$ est une *représentation* de G si c'est un morphisme de groupe.

Notation 4.67 *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{F}$ et X un CW-complexe fini. Soit $\rho : \pi_1(X) \to GL(n, \mathbb{F})$ une représentation linéaire de $\pi_1(X)$. Nous notons V_ρ l'espace V muni de la structure de $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$-module induite par ρ.*

Définition 4.68 Soit X un CW-complexe fini et soit $\tilde{X}$ son revêtement universel. Soit V un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{F}$. Soit $\rho : \pi_1(X) \to GL(n, \mathbb{F})$ une représentation linéaire. Nous définissons le complexe de chaînes $C_*(X, V_\rho)$ comme étant le complexe $C_*(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X)]} V_\rho$.

Nous rappelons que la torsion de Reidemeister, qu'elle soit calculée dans un contexte purement algébrique ou géométrique, est seulement définie pour des complexes de chaînes acycliques et marqués.

Définition 4.69 Si le complexe $C_*(X, V_\rho)$ est acyclique, nous disons que ρ est une *représentation acyclique*.

Remarque 4.70 *Nous choisissons une base distinguée pour chacun des $C_i(X, V_\rho)$ de la façon suivante*

$$(\tilde{u}_1 \otimes e_1, \ldots, \tilde{u}_1 \otimes e_n, \ldots, \tilde{u}_d \otimes e_1, \ldots, \tilde{u}_d \otimes e_n)$$

où $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est une base du $\mathbb{F}$-espace vectoriel V, $\{u_j\}_{1 \leq j \leq d}$ sont les i-cellules conférant une base au $C_i(X, \mathbb{Z})$ et $\{\tilde{u}_j\}_{1 \leq j \leq d}$ est le relèvement de chacune de ces cellules dans $C_i(\tilde{X}, \mathbb{Z})$. Ainsi, chaque groupe de chaînes est naturellement marqué d'une base.

Définition 4.71 Soit X un CW-complexe fini et soit V un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{F}$. Soit $\rho : \pi_1(X) \to GL(n, \mathbb{F})$ une représentation acyclique. Alors la torsion de Reidemeister de X est

$$\tau_\rho(X) = \tau(C_*(X, V_\rho)) \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$$

.

Remarque 4.72 *"Il est connu que $\tau_\rho(X)$ est bien définie en tant que PL-invariant, pour une représentation acyclique $\rho : \pi_1(X) \to GL(n, \mathbb{F})$, à multiplication par $\pm d$ où $d \in \mathrm{Im}(\det \circ \rho) \subset \mathbb{F}^*$. Pour une référence, voir (Milnor, 1966) Section 8." [Notre traduction] (Goda* et al.*, 2003)*

4.5.3 Torsion de Reidemeister d'un nœud

Soit $K \subset \mathcal{S}^3$ un nœud et soit $E(K) = \mathcal{S}^3 \setminus K$ le complément de ce nœud. Enfin, nous noterons $G(K) = \pi_1(E(K))$ le groupe de K.

L'idée est la même que celle que nous avons présentée dans la section précédente. Nous attribuons à $E(K)$ une structure de CW-complexe. Nous noterons par $\tilde{E}(K)$ son revêtement universel qui hérite naturellement d'une structure de CW-complexe. $G(K)$ agit de façon libre sur $\tilde{E}(K)$.

Définition 4.73 Le complexe de chaînes $C_*(E(K), \mathbb{F}(t)_\rho)$ associé à $E(K)$ à coefficient dans $\mathbb{F}(t)_\rho$, où $\rho : G(K) \to \mathbb{F}(t)$, est défini de la façon suivante

$$C_*(E(K), \mathbb{F}(t)_\rho) = C_*(\tilde{E}(K), \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[G(K)]} \mathbb{F}(t)_\rho.$$

Remarque 4.74 *Nous choisissons une base distinguée pour chacun des $C_i(E(K), \mathbb{F}(t)_\rho)$ de la façon suivante*

$$(\tilde{u}_1 \otimes 1, \cdots, \tilde{u}_d \otimes 1)$$

où chaque élément de $\{\tilde{u}_i\}_{1 \leq i \leq d}$ est un relèvement des i-cellules $\{u_i\}_{1 \leq i \leq d}$ de $C_i(\tilde{E}(K), \mathbb{Z})$. Nous choisissons 1 comme une base triviale du corps des fractions de $\mathbb{F}$. Ainsi, chaque groupe de chaînes est naturellement marqué d'une base.

Définition 4.75 Soit $E(K)$ le complément d'un nœud $K \subset \mathcal{S}^3$ donné et $G(K)$ le groupe de K. Soit $\rho : G(K) \to \langle t \rangle \subset GL(1, \mathbb{F}(t))$ une représentation acyclique de $G(K)$, où $\mathbb{F}$ est un corps et $\mathbb{F}(t)$ le corps des fractions de $\mathbb{F}$. Alors la *torsion de Reidemeister* de $E(K)$ est donnée par

$$\tau_\rho(E(K)) = \tau_\rho(K) = \tau(C_*(E(K), \mathbb{F}(t)_\rho)) \in \mathbb{F}(t) \setminus \{0\}$$

à multiplication par $\pm t^s$ près, pour $s \in \mathbb{Z}$.

4.5.4 Relation entre le polynôme d'Alexander tordu et la torsion de Reidemeister

En 1996, Teruaki Kitano publie un article nommé *"Twisted Alexander polynomial and Reidemeister torsion"* (Kitano, 1996) dans lequel il montre que le polynôme d'Alexander tordu d'un nœud est exactement la torsion de Reidemeister du complément de ce nœud. Dans cette section, nous noterons par $\mathbb{F}$ un corps et par $\mathbb{F}(t)$ le corps des fractions de $\mathbb{F}$.

Théorème 4.76 *Soit K un nœud et ρ une représentation du groupe de K dans $GL(n, \mathbb{F}(t))$. Soit $\rho \otimes \alpha : G(K) \to GL(n, \mathbb{F}(t))$ la représentation définie par $(\rho \otimes \alpha)(x) = \rho(x)\alpha(x)$, où $\alpha : G(K) \to \langle t \rangle$. Alors*

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \tau_{\rho\otimes\alpha}(E(K))$$

Démonstration. La preuve de ce théorème peut être étudiée dans (Kitano, 1996). □

En guise d'application, l'auteur énonce le théorème suivant :

Théorème 4.77 *Si ρ est équivalente à une représentation de $SO(n)$, alors*

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \Delta_{K,\rho}(t^{-1})$$

à multiplication par $\pm t^{mn}$, pour un $m \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. La preuve de ce théorème peut être étudiée dans (Kitano, 1996). □

4.6 Détection de nœuds fibrés

Définition 4.78 Un nœud $K \subset \mathcal{S}^3$ est *fibré* de genre g si $\mathcal{S}^3 \setminus K$ admet la structure d'un espace fibré au-dessus de $\mathcal{S}^1$:

$$\mathcal{S}^3 \setminus K = \mathcal{S}^1 \times [0,1]/(x,1) \sim (\varphi(x), 0)$$

où S est une surface compacte orientée de genre g et $\varphi : S \to S$ est un difféomorphisme qui préserve l'orientation.

Exemple 4.79 *Le nœud trivial, le nœud de trèfle et le nœud de huit sont fibrés.*

Théorème 4.80 *Un nœud K est fibré de genre g si et seulement si le groupe des commutateurs $[G(K), G(K)]$ est un groupe libre de rang $2g$, où $G(K) = \pi_1(\mathcal{S}^3 \setminus K)$.*

Démonstration. Ce résultat est une conséquence du travail de Lee Neuwirth (Neuwirth, 1963, théorème 1) et John Stallings. (Stallings, 1961). □

Définition 4.81 Soit f un polynôme de Laurent à coefficients dans un anneau commutatif R. Nous disons que f est *unitaire* si le coefficient de son terme de plus haut degré est une unité dans R.

Définition 4.82 Le polynôme d'Alexander tordu $\Delta_{K,\rho}(t)$ est unitaire si son terme de plus haut degré est ± 1.

Théorème 4.83 *(Goda* et al.*, 2003) Soit $K \subset \mathcal{S}^3$ un nœud fibré et $\rho : G(K) \to SL(2n, \mathbb{F})$ une représentation et $\alpha : G(K) \to \mathbb{Z} = \langle t \rangle$ le morphisme d'abélianisation de $G(K)$. Alors la torsion de Reidemeister $\tau_{\rho\otimes\alpha}(K)$ s'exprime comme une fonction rationnelle de polynômes unitaires.*

Démonstration. Nous présentons une version simplifiée de la preuve qui est exposée dans (Goda *et al.*, 2003) et nous n'explicitons pas tous les détails. Soit $K \subset \mathcal{S}^3$ un nœud fibré. Grâce à la structure de fibré du nœud K, nous pouvons travailler avec la présentation suivante pour $G(K) = \pi_1(\mathcal{S}^3 \setminus K)$:

$$G(K) = \{x_1, \ldots, x_{2g}, h \mid r_i = hx_ih^{-1}\varphi_*(x_i)^{-1}, \text{pour } 1 \leq i \leq 2g\},$$

où les éléments de $\{x_1, \ldots, x_{2g}\}$ forment un système générateur du groupe fondamental de la surface S de genre g qui "fibre" K, h correspond au méridien de K et φ_* est un automorphisme induit par l'application de monodromie φ.
Nous choisissons ensuite les images que vont prendre les générateurs de $\pi_1(S)$ par le morphisme d'abélianisation $\alpha : G(K) \to \mathbb{Z} = \langle t \rangle$:

$$\alpha(x_i) = 1, \text{pour tout } 1 \leq i \leq 2g \text{ et } \alpha(h) = t.$$

Cette présentation nous permet de construire un complexe cellulaire 2-dimensionnel Y qui est équivalent par homotopie à $E(K)$, le complément du nœud en question. Cette équivalence par homotopie induit une équivalence par homotopie simple de $E(K)$ vers Y, (Goda *et al.*, 2003, p.5).

La torsion de Reidemeister étant invariante par homotopie simple, nous pouvons directement calculer la torsion de Reidemeister de $\mathcal{S}^3 \setminus K$ pour connaître celle de Y. Nous allons la calculer simplement en utilisant le théorème 4.76. Il faut donc que nous calculions $\det A_j$, où A_j est la matrice d'Alexander de K à laquelle nous avons retiré la j-ième colonne. Il faut également calculer $\det \phi(h-1)$.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la matrice d'Alexander du nœud K. Considérons la matrice de taille $2g \times 2g$ dont chaque composante $A_{i,j}$ est la matrice $n \times n$ suivante

$$\psi\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) \in \mathcal{M}(n, \mathbb{F}[t, t^{-1}]).$$

Alors tout élément de la diagonale de A s'écrit comme ceci

$$\psi\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_i}\right) = \psi\left(h - \frac{\partial \varphi_*(x_i)}{\partial x_i}\right) = t\rho(h) - \tilde{\rho}\left(\frac{\partial \varphi_*(x_i)}{\partial x_i}\right).$$

Ainsi le terme de plus haut degré est $\rho(h) = 1$. Tout autre élément de la matrice, qui n'est pas sur sa diagonale, ne contient aucun terme en la variable t, alors le terme de plus haut degré du déterminant de A est bien 1.

Dans un second temps, nous avons

$$\begin{aligned}\det \phi(h-1) &= \det(t\rho(h) - I) \\ &= (\det \rho(h))t^{2n} - (\operatorname{tr} \rho(h))t^{2n-1} + \cdots + 1 \\ &= t^{2n} + \cdots + 1,\end{aligned}$$

où I est la matrice identité.

Ainsi nous avons que la torsion est donnée par :

$$\tau_{\rho\otimes\alpha}(K) = \frac{\det A}{t^{2n} + \cdots + 1},$$

ρ étant une représentation de $SL(2n, \mathbb{F})$, c'est-à-dire étant une représentation de dimension paire, nous voyons que la torsion de Reidemeister est ici bien définie à multiplication par t^{2nk}, $k \in \mathbb{Z}$, près. □

Exemple 4.84 *Les exemples du nœud de huit et du nœud de Kinoshita-Terasaka sont traités en détail dans (Goda* et al.*, 2003).*

Le théorème suivant date de 2003. En le couplant avec le théorème 4.64, Kitano et Morifuji obtiennent le résultat suivant :

Théorème 4.85 *Soit $\rho : G(K) \to SL(2, \mathbb{F})$ une représentation non abélienne d'un nœud fibré K de genre g. Alors le polynôme d'Alexander tordu $\Delta_{K,\rho}(t)$ est un polynôme unitaire de degré $4g - 2$.*

Démonstration. La preuve suivante s'inspire fortement de ce qui est présenté dans (Kitano et Morifuji, 2005). Soit $K \subset \mathcal{S}^3$ un nœud fibré. Grâce à la structure de fibré de K, nous pouvons travailler avec la présentation suivante pour $G(K) = \pi_1(\mathcal{S}^3 \setminus K)$:

$$G(K) = \{x_1, \ldots, x_{2g}, h \mid r_i = hx_ih^{-1}\varphi_*(x_i)^{-1}, \text{pour } 1 \leq i \leq 2g\}$$

où les éléments de $\{x_1, \ldots, x_{2g}\}$ forment un système générateur du groupe fondamental de la surface S de genre g qui "fibre" K, h correspond au méridien de K et φ_* est un automorphisme induit par l'application de monodromie φ.
Soit $A_{\rho,k}$ la matrice d'Alexander tordue de K. Le degré de $A_{\rho,2g+1}$ est $4g$. Ainsi, comme $\det \phi(h - 1) = t^2 - \mathrm{tr}(\rho(h))t + 1$, il est clair que $\Delta_{K,\rho}(t)$ est de degré $4g - 2$. Le terme de plus haut degré de ce polynôme sera bel et bien 1 grâce au théorème précédent. □

CONCLUSION

Nous avons défini la torsion de Reidemeister dans un cadre d'abord algébrique, puis dans un cadre géométrique. En guise d'exemples, nous avons calculé la torsion de Reidemeister pour des espaces topologiques de base comme le cercle et le 2-tore.

Nous avons vu que la torsion de Reidemeister est un invariant topologique et en guise de première application, nous l'avons utilisé pour esquisser la classification des espaces lenticulaires de dimension impaire et finie à homéomorphisme près. Nous avons exposé la classification de tels espaces à équivalence par homotopie près, tout en remarquant que le type d'homotopie d'un espace lenticulaire de dimension infinie est uniquement déterminé par $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Nous avons brièvement introduit quelques notions de base de théorie des nœuds pour définir le polynôme d'Alexander tordu d'un nœud K comme la torsion de Reidemeister de l'extérieur de ce nœud. Nous avons exposé un résultat de Goda, Morifuji et Kitano qui assure que si un nœud est fibré, alors la torsion de Reidemeister de l'extérieur de ce nœud s'exprime comme une fraction rationnelle de polynômes unitaires. Cependant, nous avons vu que la réciproque n'est pas vérifiée en général en prenant l'exemple du nœud de bretzel $P(5,-3,5)$ (Friedl et Vidussi, 2007).

Comme nous l'avons vu, la torsion de Reidemeister ne garde pas en mémoire une quelconque idée de l'orientation choisie sur une variété topologique. Il existe une torsion plus générale appelée la torsion signée ('sign-refined' en anglais), à laquelle est associée une orientation en homologie. Elle contient donc plus d'informations que la torsion de Reidemeister.

À l'aide de cette torsion raffinée, nous pouvons calculer la torsion de tout CW-complexe fini et connexe associé à une structure d'Euler combinatoire. Cette notion est introduite brièvement dans (Turaev, 2001, p.108) et permet, dans un cadre géométrique, de définir la fonction de torsion notée T d'une 3-variété orientée, fermée et connexe.

Pour la suite, il serait intéressant de s'intéresser au résultat suivant, qui permet de calculer l'invariant de Seiberg-Witten pour les 3-variétés d'une façon combinatoire.

Théorème 4.86 *(Turaev, 1998) Pour toute* 3*-variété* M *orientée, fermée et connexe telle que* $b_1(M) \geq 1$*, nous avons* $SW_M = \pm T_M : Spin^c \to \mathbb{Z}$*.*

Nous n'avons pas discuté de structure $Spin^c$ dans ce mémoire ni d'invariant de Seiberg-Witten, deux notions fondamentales dans l'étude des variétés. Les invariants de Seiberg-Witten sont également définis pour des 4-variétés et peuvent distinguer différentes structures différentielles sur les 4-variétés topologiques.

BIBLIOGRAPHIE

Alexander, J. W. (1919). Note on two three-dimensional manifolds with the same group. *Transactions of the American Mathematical Society*, *20*(4), 339–342.

Alexander, J. W. (1928). Topological invariants of knots and links. *Transactions of the American Mathematical Society*, *30*.

Blanchfield, R. C. (1957). Intersection theory of manifolds with operators with applications to knot theory. *Annals of Mathematics*, *65*(2), 340–356.

Chapman, T. (1974). Topological invariance of whitehead torsion. *American Journal of Mathematics*.

Cohen, M. M. (1973). *A Course in Simple-Homotopy Theory*. Springer-Verlag.

Crowell, R. H. et Fox, R. H. (1963). *Introduction to Knot theory*. Springer-Verlag.

De Rham, G., Maumary, S. et Kervaire, M. (1967). *Torsion et Type Simple d'Homotopie*. Springer Link.

Franz, W. (1935). Über die torsion einer Überdeckung. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, *173*.

Friedl, S. et Vidussi, S. (2007). Twisted alexander polynomials and symplectic structures. Récupéré de `https://arxiv.org/abs/math/0604398`

Fritsch, R. et Piccinini, R. A. (1990). *Cellular structures in topology*. Cambridge University Press.

Goda, H., Kitano, T. et Morifuji, T. (2003). Reidemeister torsion, twisted alexander polynomial and fibered knots. *Commentarii Mathematici Helvetici*.

Hatcher, A. (2001). *Algebraic Topology*. Cambridge University Press.

Kitano, T. (1996). Twisted alexander polynomial and reidemeister torsion. *Pacific Journal of Mathematics*, *174*(2), 431 – 442.

Kitano, T. (2015). Introduction to twisted alexander polynomials and related topics. *Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*, *2*(Course n°4).

Kitano, T. et Morifuji, T. (2005). Divisibility of twisted alexander polynomials and fibered knots. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, *4*(1), 179–186.

Kosniowski, C. (1980). *A First Course in Algebraic Topology*. Cambridge University Press.

Lang, S. (1965). *Algebra*. Springer-Verlag.

Lickorish, W. R. (1997). *An Introduction to Knot Theory*. Springer.

Livingston, C. (1993). *Knot Theory*. Mathematical Association of America.

MacLane, S. (1978). *Categories for the Working Mathematician*. Springer Link.

Massey, W. (1967). *Algebraic Topology : An Introduction*. Harcourt.

May, J. P. et Cole, M. (1996). *Equivariant Homotopy and Cohomology Theory*. American Mathematical Society.

Milnor, J. (1966). Whitehead torsion. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *72*(3), 358 – 426.

Neuwirth, L. (1963). On stallings fibrations. *American Mathematical Society*, *14*, 380–381.

Neuwirth, L. (1965). *Knot groups*. Princeton University Press.

Poincaré, H. (1895). Analysis situs. *Journal de l'École Polytechnique*.

Reidemeister, K. (1927). Elementare begründung der knotentheorie. *Abhandlungen aus dem mathematischen seminar der universität Hamburg*, *5*, 24–32.

Reidemeister, K. (1935a). Homotopieringe und linsenräume. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*.

Reidemeister, K. (1935b). Überdeckungen von komplexen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.

Riehl, E. (2016). *Category Theory in Context*. Dover Publications.

Rolfsen, D. (1980). *Knots and links*. American Mathematical Society.

Seifert, H. (1935). Über das geschlecht von knoten. *Mathematische Annalen*, *110*, 571–592.

Stallings, J. (1961). On fibering certain 3-manifolds. *Topology of 3-manifolds and related topics*, 95–100.

Threlfall, W. et Seifert, H. (1931). Topologische untersuchung der diskontinuitätsbereiche endlicher bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen raumes. *Mathematische Annalen*.

Threlfall, W. et Seifert, H. (1933). Topologische untersuchung der diskontinuitätsbereiche endlicher bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen raumes (schluß). *Mathematische Annalen*.

Tietze, H. (1908). Über die topologischen invarianten mehrdimensionaler mannigfaltigkeiten. *Monatsh. f. Mathematik und Physik*.

Turaev, V. (1986). Reidemeister torsion in knot theory. *The London Mathematical Society*, *41*(1), 119–182.

Turaev, V. (1998). A combinatorial formulation for the seiberg-witten invariants of 3-manifolds. *Mathematical Research Letters*, 583–598.

Turaev, V. (2001). *Introduction to combinatorial torsions*. Birkhäuser Basel.

van Wikj, J. J. et Cohen, A. M. (2006). Visualization of seifert surfaces. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, *12*(4), 485–496.

Wada, M. (1994). Twisted alexander polynomial for finitely presentable groups. *Topology*, *33*(2), 241–256.

Whitehead, J. (1940). On c^1 complexes. *The Annals of Mathematics*.

Whitehead, J. (1950). Simple homotopy types. *American Journal of Mathematics*.

Whitehead, J. H. C. (1949). Combinatorial homotopy. i. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *55*(3), 213–246.