UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

RÔLE DES EXPLICATIONS MATHÉMATIQUES DANS LE DÉVELOPPEMENT DE COMPRÉHENSIONS MATHÉMATIQUES CHEZ LA PERSONNE QUI EXPLIQUE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAITRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

ANTOINE LACHANCE

DÉCEMBRE 2024

REMERCIEMENTS

C’est avec beaucoup d’émotion que j’écris ces dernières lignes en repensant à tous celles et ceux qui ont marqué mon parcours et mon processus de recherche. Grâce à vous; à votre temps, votre patience et vos conseils, j’ai pu cheminer autant sur le plan de la recherche que sur le plan personnel. À chacun d’entre vous, j’adresse un éternel merci.

Je tiens à exprimer une reconnaissance particulière à Jérôme, mon directeur de recherche. Tu m’as légué des sensibilités importantes au travers desquelles j’ai pu me réaliser comme chercheur en devenir. Au-delà d’avoir été un guide, tu as cru en moi; en mes idées et en mon potentiel. Tu m’as fait entrer dans le monde de la recherche en partageant avec moi des moments de réflexions profondes autant sur les sites de recherche qu’à l’occasion de nos marches au centre-ville. Tu m’as offert des opportunités et tu m’as soutenu dans mon cheminement. Pour tout cela, et bien plus encore, je te remercie.

Je tiens également à remercier les nombreux membres du Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématique. En particulier, je remercie Jean-Christophe, Charline et Jérémy, qui m’ont écouté à mille et une reprises, parfois pour expliquer mon projet dans l’espoir de mieux le comprendre, mais souvent pour m’emballer dans autre chose. Votre oreille aura été précieuse. Je remercie également Geneviève, Fiorella et Charlotte, qui auront été une source incessante d’encouragements. Sachez que vous avez été des modèles desquels prendre exemple. Finalement, je souhaite souligner l’apport de tous les membres de la communauté qui, de près ou de loin, ont participé à cette réalisation; aux professeurs qui l’ont bienveillamment questionné et aux étudiants qui s’y sont intéressés. Merci.

Pour terminer, je tiens à offrir des remerciements à mes proches, dont la présence et le support ont immanquablement participé à cette réalisation. Je remercie mes parents, qui incarnent ce chaleureux foyer si nécessaire dans les moments difficiles. Sachez que votre héritage contribue activement au développement de la personne que je deviens et est une source de fierté pour moi. Je remercie mon frère Xavier, qui peut-être sans le savoir, est une source d’inspiration continuelle. Je remercie mes nombreux amis qui m’écoutent et me permettent de décrocher, avec une pensée spéciale pour mon ami Claudéric, qui, toujours présent, est autant une source de fous rires et de complicité que de discussions profondes.

Je vous remercie tous une dernière fois. Sachez que ce mémoire a pris forme à travers vos généreuses contributions et c’est avec immense gratitude que je le partage avec vous.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

La notion d'explications constitue un thème d'intérêt pour la communauté de recherche en didactique des mathématiques. Parmi les différentes manières d'investiguer la démarche d'explications, cette recherche se centre sur le phénomène d'explication chez la personne qui explique. Elle se penche sur les effets que l'action d'expliquer peut avoir pour la personne qui donne des explications, précisément sur le développement de ses compréhensions mathématiques individuelles. Il est possible d'aborder cet angle sur les explications grâce à une perspective, appelée dialectique, soulignant l'interaction entre les explications et les compréhensions. Inspirée du développement des mathématiques disciplinaires, et de sa relation avec la communication, cette dialectique conçoit les explications et les compréhensions mathématiques comme étant prises ensemble et se déployant l'une à travers l'autre. Cette recherche étudie cette dialectique explications-compréhensions pour mieux comprendre son fonctionnement et donner un sens au rôle des explications dans le développement des compréhensions mathématiques chez la personne qui explique.

Pour ce faire, les notions d'explications et de compréhensions font d'abord l'objet d'un travail de conceptualisation. Celui-ci dépeint un portrait dynamique de leur fonctionnement. Mises ensemble, ces conceptualisations offrent un premier pas vers la mise en route d'une dialectique entre explications et compréhensions. Par la suite, une étude théorique portant sur le déploiement de cette dialectique explications-compréhensions est menée à travers différents travaux de recherche en didactique des mathématiques. Il en résulte deux perspectives sur la dialectique articulées sur le développement des compréhensions et donnant un sens aux rôles que peuvent avoir les explications dans celui-ci. La perspective du zigzag, tirée des travaux de Lakatos (1976), présente une analogie avec l'avancement des mathématiques disciplinaires qui permet de concevoir le développement de compréhensions mathématiques émergeant en « zigzag » entre compréhensions stimulé par les réalisations qui émergent dans les explications. La perspective du bricolage, tirée des travaux de Papert (1972, 1990, 1993) et de Lévi-Strauss (1962), offre une analogie avec le développement des compréhensions mathématiques dans un contexte de programmation qui permet de concevoir l'évolution des compréhensions mathématiques comme se faisant en « bricolant une explication ». Articulées ensemble, ces perspectives présentent un regard plus global sur comment les explications se déploient de manière dialectique avec les compréhensions et sur ce qui en émerge.

Ces ancrages conceptuels donnent des outils pour aborder empiriquement la question de recherche. À partir leur opérationnalisation, les analyses de quatre cas suggestifs sont offertes. Ces cas suggestifs sont des évènements d'explications de différentes natures. Cette diversité permet de varier les angles avec lesquels la dialectique explications-compréhensions est étudiée dans cette recherche. Le premier cas d'analyse porte sur une anecdote personnelle relative à la comparaison de fractions. Le deuxième cas d'analyse aborde des extraits de verbatims tirés d'une recherche en didactique des mathématiques sur des graphiques illustrant des relations de proportions inverses. Les troisième et quatrième cas analysés représentent des données provenant d'une collecte en salle de classe sur la notion de périmètre. Les analyses conduites sur ces cas mettent en lumière six dimensions concernant le déploiement de la dialectique explications-compréhensions, qui permettent une compréhension élargie de son fonctionnement. Ils représentent les résultats majeurs de cette recherche. Ainsi, en plus d'étudier théoriquement une manière de comprendre l'interaction explications-compréhensions en mathématiques, soit la perspective dialectique, cette recherche permet d'approfondir en identifiant des mécanismes précis qui s'y mettent en route lors d'une explication.

Mots clés : Didactique des mathématiques, Explications mathématiques, Compréhensions mathématiques, Dialectique explications-compréhensions, Zigzag mathématique, Bricolage mathématique, Lakatos, Papert

ABSTRACT

The concept of explanations is a topic of interest for the research community in mathematics education. Among the various ways to investigate explanations, this research focuses on the person doing the explaining. Examining the effects that the act of explaining can have on the person providing explanations, this research studies the development of individual mathematical understandings in particular. This angle on explanations can be approached through a perspective named dialectic underlining the interaction between explanations and understandings. Inspired by the development of disciplinary mathematics and its relationship with communication, this dialectic views explanations and understandings as intertwined and unfolding through one another. This research studies the explanations-understandings dialectic to better understand how it functions and to give meaning to the role of explanations for the development of mathematical understandings for the person explaining.

To this end, the notions of explanations and understandings are first conceptualized, depicting a dynamic picture of how they work. Combined together, these conceptualizations offer a first step towards an understanding of the initiation of the explanations-understandings dialectic. Subsequently, a theoretical study of the deployment of this dialectic is conducted through various research base in mathematics education. The result is two perspectives on the dialectic, articulated around the development of understandings and giving meaning to the roles that explanations can have in this process. The zig-zag perspective drawn from the work of Lakatos (1976) presents an analogy with the development of disciplinary mathematics, allowing to conceive the development of mathematical understandings as emerging in a "zig-zag" between understandings stimulated by the realizations that emerge throughout the explanations. The *bricolage* perspective drawn from the work of Papert (1972, 1990, 1993) and Lévi-Strauss (1962) offers an analogy with the development of mathematical understandings in a programming context, allowing us to conceive the development of mathematical understandings as unfolding through "tinkering with an explanation". Combined, these perspectives provide an overall view on how explanations are unfolding in a dialectical way with the understandings and what emerges from this.

These conceptual groundings provide the tools to address empirically the research question. From their operationalization, the analysis of four suggestive cases are offered. These suggestive cases are explanatory events of different natures. This diversity allows multiple angles from which the explanations-understandings dialectic is studied. The first analysis case focuses on a personal anecdote pertaining to comparing fractions. The second analysis case examines excerpts from verbatim data from a mathematics education study on inverse proportions graphs. The third and fourth analysis cases are related to data collected in the classroom on the concept of the perimeter. The analyses conducted for these cases highlight six dimensions regarding the deployment of the explanations-understandings dialectic, leading to a broader understanding of its functioning. These represent the major findings of this research. Thus, beyond studying theoretically a way to understand the interactions between explanations and understandings, which is the explanations-understandings dialectic, this research enables deepening by identifying specific mechanisms that set it in motion in the act of explaining.

Keywords : Mathematical education, Mathematical explanations, Mathematical understandings, Explanations-understandings dialectic, Mathematical zig-zag, Mathematical *bricolage*, Lakatos, Papert

INTRODUCTION

En didactique des mathématiques, faire des mathématiques mène immanquablement à devoir les expliquer. Il est reconnu que l'action d'expliquer peut faire cheminer les compréhensions de la personne qui explique (voir par exemple Bednarz, 1991). Cette recherche s'inscrit dans cette lignée et s'intéresse aux apports de l'action d'expliquer pour le développement des compréhensions mathématiques *chez la personne qui explique*. En particulier, elle élabore sur une manière de concevoir les interactions entre les explications et les compréhensions d'une personne, par la perspective dialectique explications-compréhensions, et cherche à examiner le fonctionnement de cette perspective dans l'action d'expliquer. La perspective dialectique conçoit les explications et les compréhensions d'une personne qui explique comme deux phénomènes qui, bien que différents, sont mutuellement pris ensemble et se développent grâce et à travers le déploiement de l'autre. Cette manière de concevoir l'interaction entre les notions d'explications et de compréhensions est fondamentale à la lecture de ce mémoire.

Au premier chapitre, le questionnement aux fondements de cette recherche est clarifié ainsi qu'illustré au moyen d'anecdotes personnelles. Ensuite, une exploration de travaux de recherche en didactique des mathématiques sur le lien entre la communication et le développement des mathématiques permet de faire avancer ce questionnement, notamment à travers le tracé d'un parallèle entre la discipline mathématique et le développement des compréhensions chez l'individu. La perspective dialectique explications-compréhensions émerge de ce parallèle. En retour, cette dialectique génère de nouveaux questionnements relatifs à son fonctionnement qui sont explorés sur le plan théorique dans les deux chapitres qui suivent.

Au second chapitre, un premier ancrage conceptuel pour la recherche est proposé. À partir d'un maillage entre les dictionnaires usuels et différents travaux de recherches en didactique des mathématiques, les notions de compréhensions et d'explications sont individuellement étudiées afin de mieux comprendre leur fonctionnement et d'ancrer conceptuellement leur interaction. Ceci offre une interprétation dynamique de chaque notion selon deux sens, soit les sens « processus » et « résultat », qui permettent ensuite d'asseoir la perspective dialectique explications-compréhensions sur le plan conceptuel. Ce premier pas sur la dialectique explications-compréhensions est élaboré à partir des sens mis en lumière pour les notions de compréhensions et d'explications et de comment chaque notion se relie à l'autre.

Au troisième chapitre, un second ancrage conceptuel est présenté. Il s'agit d'une analyse théorique du déploiement de la dialectique explications-compréhensions faite selon deux perspectives complémentaires sur l'avancement des compréhensions mathématiques, soit la perspective du zigzag tirée des travaux de

Lakatos (1976) et de la perspective du bricolage tirée des travaux de Papert (1972, 1990, 1993) et Lévi-Strauss (1962). Ces deux perspectives offrent des analogies avec différents contextes, qui permettent d'enrichir le sens à donner au fonctionnement de la dialectique explications-compréhensions. Ces perspectives offrent un regard approfondi sur le développement des compréhensions et sur le rôle que peuvent avoir les explications en dialectique avec celui-ci, représentant un pas de plus dans la conceptualisation de la dialectique explications-compréhensions. La question de recherche est finalement présentée en termes d'un enrichissement de l'exploration théorique menée aux Chapitres 2 et 3. Cela s'actualise par la question de recherche suivante : *De quelles façons la perspective dialectique explications-compréhensions se traduit-elle dans l'action? De quelles manières les mécanismes du zigzag et du bricolage sont-ils impliqués?*

Au quatrième chapitre, les orientations méthodologiques de cette recherche sont présentées, soit la posture interprétative/qualitative de Savoie-Zajc (2018) ainsi que l'étude de cas suggestif (Tremblay 1968). Ce chapitre expose également les données qui font l'objet des analyses de la recherche, soit quatre évènements d'explications conçus comme cas à l'étude. Finalement, le processus d'analyse et les deux grilles d'analyse utilisées pour analyser les données et aborder la question de recherche sont présentés.

Au cinquième chapitre, les analyses effectuées sur les cas d'évènements d'explications sont offertes. Un sens est donné aux évolutions dialectiques survenant dans les explications à travers deux niveaux d'analyse. En premier lieu, une description des avancements dialectiques est faite grâce aux grilles d'analyses. Ces dernières permettent de retracer pourquoi et comment chaque évolution dialectique est mise en route. En deuxième lieu, une interprétation est faite à partir de la perspective dialectique, qui offre un sens supplémentaire à la description de premier niveau. Ensemble, ces deux niveaux d'analyses permettent de dégager une compréhension de chaque évolution engendrée dans une démarche explicative.

Au sixième chapitre, des éléments de réponses aux questions de recherche sont présentés. Ceux-ci sont dégagés des analyses et se regroupent en six dimensions. Les deux premières dimensions appuient des éléments théoriques soulevés dans les ancrages conceptuels sur la dialectique explications-compréhensions. Les quatre dimensions suivantes font avancer la compréhension du fonctionnement de cette dialectique explications-compréhensions. Finalement, ce travail de recherche se conclu par la proposition de prolongements possibles entrevus pour explorer des pistes de recherche complémentaires.

CHAPITRE 1
PROBLÉMATIQUE

1.1 Introduction

Pendant mon cheminement à la formation initiale en enseignement des mathématiques au secondaire, j'ai été amené à remarquer qu'en expliquant ce que je comprenais de différentes notions mathématiques à des camarades étudiants, j'avais souvent l'impression d'en comprendre davantage sur ces notions. Bizzarement, l'action d'expliquer semblait faire avancer mes compréhensions mathématiques, en les rendant plus profondes, précises et applicables à d'autres situations. Les enseignements reçus, à l'image d'une étincelle, arrivaient à initier des réflexions sur différents concepts mathématiques, mais ces concepts pouvaient avoir du mal à réellement s'ancrer en moi si je n'avais pas ensuite à en parler à quelqu'un.

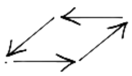
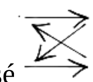
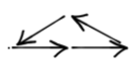
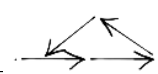
Ces explications semblaient autant me permettre d'enrichir mes compréhensions mathématiques que de me faire prendre conscience des limites qu'elles avaient. En effet, pour faire comprendre une idée mathématique à quelqu'un d'autre, je devais souvent produire des explications ratissant plus large que celles qui auraient été suffisantes pour moi. Ceci me demandait notamment de reformuler mes idées mathématiques, de faire appel à des éléments conceptuels supplémentaires et de creuser des aspects qui les soutenaient, mais étaient demeurés implicites jusqu'à ce moment. Cet exercice pouvait résulter en un développement de nouvelles compréhensions mathématiques plus complètes, puisque les liens supplémentaires que j'avais articulés initiaient l'émergence de nouvelles idées, qui alimentaient en retour de nouvelles compréhensions chez moi. Autrement dit, en mathématiques, l'action d'expliquer me permettait de réexaminer la validité de mes compréhensions sur les mathématiques. De plus, parfois, alors que j'expliquais des compréhensions sur certains concepts mathématiques que je pensais initialement valides, ces dernières s'avéraient incohérentes ou insuffisantes. Au moment même où je tentais de les expliquer à quelqu'un, je pouvais alors non seulement prendre conscience de mes erreurs, mais également retravailler mes propres compréhensions. Ceci faisait en sorte que j'étais porté à vouloir parfaire mes explications, encore et encore, jusqu'à ce que je sois en mesure d'en dégager un certain sens et de produire des explications qui témoignaient de compréhensions satisfaisantes à mes yeux. Ces nouvelles compréhensions, parce qu'elles étaient davantage cohérentes à mon sens, venaient remplacer les anciennes compréhensions, qui étaient maintenant jugées erronées.

Prendre le temps d'expliquer mes compréhensions mathématiques s'est avéré d'une efficacité déconcertante pour moi durant mon parcours universitaire. J'en suis même arrivé à me mettre volontairement et le plus souvent possible en position d'avoir à expliquer mes compréhensions, et ce, même si parfois j'étais loin de maitriser les concepts à l'étude. Je ne comprenais pas toujours tout d'un sujet, mais j'étais constamment le premier à vouloir en parler. Je savais qu'en mathématiques, expliquer ce que je comprenais me permettait de le comprendre encore plus. Ces expériences et observations personnelles ont instigué chez moi un intérêt pour les pratiques d'explication et leurs retombées sur le développement des compréhensions mathématiques *pour la personne qui explique*. C'est ce thème qui guide mon travail de maitrise et que j'explore dans ce qui suit.

1.2 Anecdotes personnelles

Afin de clarifier l'intérêt de cette recherche, deux évènements d'explications sont ici présentés. Tirés directement de mon vécu personnel, ils illustrent le sens donné au sentiment mentionné ci-dessus d'avoir développé mes compréhensions mathématiques à travers des démarches d'explication. De plus, ils permettent d'amorcer des réflexions sur les rôles que peuvent avoir les explications dans le développement des compréhensions mathématiques d'une personne qui explique.

La première anecdote porte sur une discussion entretenue avec mon ami Sylvain, qui n'était pas particulièrement intéressé aux mathématiques. Nous voulions comparer les fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$. Sylvain ne pensait pas qu'il était possible de déterminer quelle fraction était la plus grande sans passer par la division des numérateurs de chaque fraction par leurs dénominateurs en utilisant une calculatrice. Ayant travaillé, dans le cadre d'un cours de didactique des mathématiques, la notion de comparaison de fractions spécifiquement à travers la comparaison de $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$, j'avais une explication différente en tête. Elle consistait à se rapporter aux dénominateurs communs. Cependant, Sylvain ne s'est pas montré particulièrement ouvert à la suivre, puisqu'elle était mathématiquement assez complexe. Après tout, cette intervention avait été développée dans une optique d'enseigner formellement la comparaison de fractions au secondaire, et non pas de discuter informellement. Cela m'a incité à vouloir développer une nouvelle manière d'expliquer, qui allait être davantage adaptée à la situation informelle, tout en comparant les fractions sans utiliser de calculatrice. Après une courte réflexion, j'ai eu l'idée de rapporter les fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ à la fraction $\frac{1}{2}$. Je lui ai expliqué que comme $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ et $\frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$, il était possible de comparer les surplus à $\frac{1}{2}$ entre eux, c'est-à-dire $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{12}$, pour déterminer la fraction la plus grande. Comme $\frac{1}{8} > \frac{1}{12}$, alors $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$. Cette explication a davantage convaincu Sylvain, qui la trouvait beaucoup plus simple. Emballé par cette idée de se rapporter à la moitié pour comparer, j'ai été poussé à la généraliser vers d'autres fractions, ce que j'ai fait en expliquant pas à pas ce qui s'en dégageait. À trois reprises, j'ai découvert comment étendre mon idée vers d'autres cas plus généraux en expliquant ce que je réalisais dans les explications précédentes. Notamment, j'ai expliqué comment appliquer cette idée pour comparer d'autres fractions dont les numérateurs étaient égaux à exactement un de plus que la moitié de leurs dénominateurs, puis à une valeur constante de plus que la moitié de leurs dénominateurs, et finalement, à une valeur constante de moins que la moitié de leur dénominateur.

La seconde anecdote porte sur des explications données à des collègues étudiants universitaires. Dans le cadre d'un devoir pour un cours de mathématiques universitaire, je devais faire une preuve en utilisant l'hypothèse suivante : « Dans le plan, la somme de quatre vecteurs non nuls de même norme est égale à zéro uniquement en présence de deux paires de vecteurs de sens opposés ». Entre deux cours, j'ai été amené à expliquer à mes camarades ce que je comprenais de cette hypothèse. À l'aide de dessins, j'ai expliqué que deux types d'arrangements respectant les prémisses semblaient possibles, soit l'arrangement en losange  et l'arrangement en allers-retours . En expliquant ces deux arrangements, j'ai entrevu une exception qui semblait m'empêcher d'avancer dans la rédaction de la preuve. Il s'agissait d'arranger les vecteurs sous la forme d'un quadrilatère croisé , menant à avoir une paire de vecteurs de même sens, accompagnée de deux autres vecteurs de sens différents. Ceci falsifiait l'hypothèse initiale. Sentant que je venais de désinformer mes camarades étudiants, j'ai expliqué cette alternative. Cependant, mes interlocuteurs semblaient incertains de cet arrangement en quadrilatère croisé. Ceci m'a incité à vouloir réexpliquer l'exception d'une autre façon. J'ai eu l'idée d'expliquer un réarrangement des vecteurs sous forme du triangle isocèle, dont la base est constituée des deux vecteurs de même sens et les autres côtés sont les deux autres vecteurs . En expliquant cette idée, j'ai rapidement réalisé qu'elle était en fin de compte erronée, en raison du principe d'inégalité triangulaire. Cela m'a incité à faire marche arrière et à expliquer en quoi l'inégalité triangulaire permettait de réfuter l'existence de l'alternative initialement proposée du quadrilatère croisé. Tenter de créer un triangle avec ces vecteurs donnerait plutôt , signifiant que la somme de ces vecteurs est différente de zéro. Expliquer cela m'a fait réaliser qu'un autre principe pouvait réfuter mon hypothèse, soit celui de projection orthogonale. Ceci m'a permis d'offrir une nouvelle explication ancrée dans cette seconde notion mathématique de projection orthogonale. Après coup, ces explications m'ont amené à me questionner sur l'alternative que j'avais initialement imaginée et sur comment elle pourrait être rendue vraie. J'ai alors compris, et expliqué que si les deux vecteurs de sens différents avaient une norme égale, mais plus grande que l'autre paire de vecteurs, soit ceux de même sens, un polygone croisé similaire à celui que j'avais initialement imaginé pouvait exister. À l'aide d'un compas et d'une règle, je m'en suis convaincu.

Ces deux anecdotes personnelles illustrent pour moi deux situations dans lesquelles ma démarche explicative a eu un ou plusieurs rôles dans le développement de mes compréhensions mathématiques. Notamment, dans l'anecdote de la comparaison de fractions, l'action d'expliquer m'a mené à élaborer une nouvelle compréhension, soit celle sur l'idée de moitié. En plus de cela, pas à pas en expliquant, j'ai pu creuser ma compréhension de cette idée de moitié, notamment sur le fait qu'elle pouvait être appliquée à d'autres types de fractions. Dans l'ensemble, tout ceci m'a fait sentir que mes compréhensions de l'objet mathématique « fraction » s'en sont retrouvées approfondies. Dans l'anecdote sur l'hypothèse des vecteurs, l'action d'expliquer m'a permis de réaliser qu'une de mes compréhensions était mathématiquement fausse. Cette nouvelle compréhension a émergé de l'action d'expliquer, celle sur l'alternative à l'hypothèse initiale qui peut être représentée par le quadrilatère croisé. Pour bien faire comprendre cette alternative à mes camarades, j'ai dû faire appel à une autre manière de la comprendre, soit par une organisation des vecteurs en triangle. C'est en expliquant cet arrangement que j'ai réalisé qu'il s'avérait erroné, en raison de l'inégalité triangulaire. Cet arrangement triangulaire a fait l'objet de nouvelles explications réfutant l'alternative, ce qui a, en retour, fait émerger une seconde manière de le faire, celle de la projection orthogonale. En fin de compte, ces explications m'ont amené à expliquer comment faire pour rendre l'arrangement en quadrilatère croisé valide. Ceci a généré une autre compréhension mathématique, qui rectifie l'alternative à l'hypothèse des vecteurs en la modifiant. De façon générale, cet évènement semble avoir eu un effet global sur mes compréhensions, m'amenant à mieux comprendre ces aspects des vecteurs.

Ces anecdotes représentent des évènements qui soulèvent des rôles possibles que peuvent avoir les explications dans le développement de compréhensions mathématiques chez la personne qui explique. Au-delà des retombées de l'action d'expliquer sur les compréhensions mathématiques, de quelles façons les explications génèrent-elles des avancements de compréhensions mathématiques? Pourquoi et comment le phénomène de développement de compréhensions se met-il en route dans les explications? Pour aborder ces questionnements, cette recherche s'intéresse à l'interaction entre les explications et les compréhensions, particulièrement à travers le lien entre la communication et les mathématiques disciplinaires.

1.3 Composante communicationnelle des compréhensions mathématiques

En didactique des mathématiques, il est reconnu que l'action d'expliquer peut faire cheminer les compréhensions mathématiques de la personne qui explique. Par exemple, Bednarz (1991) avance que :

> Les explications et les réfutations que requiert ce travail [d'explication] sont susceptibles de contribuer, par les argumentations qu'elles obligent à mettre en place, à l'émergence et au développement de conceptions et stratégies nouvelles. (Bednarz, 1991, p. 55)

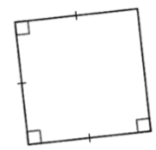
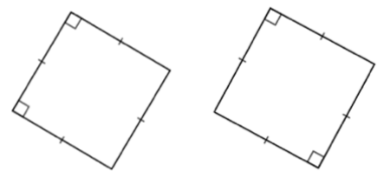
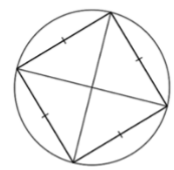
Au-delà de l'accepter, cette situation invite à vouloir creuser le phénomène pour mieux comprendre son fonctionnement. Existe-t-il des liens entre la pratique mathématique de formulation d'explications et le développement de compréhensions mathématiques qui permettent d'en éclaircir ce fonctionnement? Comment cette interaction se produit-elle? Qu'est-ce qui se met en route? Pour approfondir cela, les liens entre la communication mathématique et les mathématiques disciplinaires exigent d'être étudiés davantage.

Une première piste porte sur la place qu'occupe la communication en mathématiques. À ce sujet, Bednarz affirme que les pratiques mathématiques peuvent être vues comme étant nées d'une intention d'être communiquées. En retraçant historiquement la naissance de la numération, elle propose une conception des mathématiques comme étant enracinées dans la communication. Elle affirme :

> […] les systèmes de notations utilisées au cours de l'histoire ont été élaborés pour expliciter, rendre compte de collections et les traiter, et leur évolution apparaît intimement reliée à des besoins de plus en plus exigeants de communication et de traitement sur des collections. […] Cette analyse épistémologique de l'évolution des systèmes d'écriture des nombres nous renvoie donc d'une part à une origine et à une élaboration *sociale* de ces signifiants, en référence à des besoins de communication d'informations sur des collections. […] (Bednarz, 1991, p. 56, italiques dans l'original)

Plus encore, Bednarz laisse entendre que la communication fait partie des mathématiques en elles-mêmes. En plus, en mathématiques, les pratiques, les notions, les raisonnements, etc., peuvent eux aussi être vus comme ayant une composante communicationnelle, voire une structure discursive. Ainsi, d'une part, l'action de faire des mathématiques, par exemple en élaborant une preuve mathématique ou en faisant la résolution d'un problème mathématique, illustre ce rapprochement entre les pratiques mathématiques et le discours. Faire des mathématiques se voit comme se rapportant à l'acte d'élaborer un argumentaire servant autant à se convaincre soi-même de la validité des idées mathématiques proposées qu'à en convaincre autrui. D'autre part, cette composante communicationnelle semble se concevoir comme faisant également partie de tout ce qui est mathématique, y compris les notions mathématiques elles-mêmes. En effet, par leur nature abstraite, les objets mathématiques semblent être dotés d'une composante communicationnelle, qui, souvent sous la forme de définition, de modélisation, de représentation, de symbolisme, etc., permet de les observer, d'interagir avec eux et d'en discuter. À titre d'exemple, sur le plan des définitions, en géométrie, un « carré » est un objet mathématique qui possède plusieurs définitions minimales dans un plan. Ces définitions peuvent être données en mots, sous forme de symbolisme ou à travers des modélisations visuelles. En voici quelques-unes, en rafales, dans le Tableau 1.1.

Tableau 1.1 – Exemples de définitions minimales de l'objet mathématique « carré »

Définition en mots	**Modélisation visuelle**
Quadrilatère qui possède au moins trois côtés isométriques et au moins trois angles droits	
Quadrilatère qui possède quatre côtés isométriques et au moins deux angles droits	
Quadrilatère qui possède quatre côtés isométriques et dont les diagonales sont superposées à des diamètres du cercle circonscrit	

Ces exemples de définitions et de modélisations imagées illustrent en quoi la communication est fondamentale à l’existence de l’objet mathématique « carré » : l’existence du carré provient de ses définitions, qu’elles soient sous forme de mots, de symboles ou de modèles. De plus, pour faire des mathématiques avec le carré, ou avec tout autre objet mathématique d’ailleurs, il semble inévitable de référer à une ou plusieurs de ses définitions, puisqu’elles comprennent son essence même. Ces exemples illustrent la composante communicationnelle des mathématiques. La définition en mots, si fondamentale à l’existence du carré, relève de la communication parce que l’utilisation de mots relève du langage, qui est une forme de communication. Il en va de même pour la définition modélisée, qui est, elle aussi, du domaine de la communication, parce que le symbolisme utilisé est conventionné et représente de la communication.

En somme, la communication semble être fondamentalement encastrée autant au cœur des mathématiques que dans les pratiques mathématiques elles-mêmes. Ceci signifie que les mathématiques sont à voir autant comme demandant de la communication que comme en générant, notamment pour être explorées et utilisées. Dans le cadre de ce mémoire, cette composante communicationnelle des mathématiques invite à se questionner sur comment elle se traduirait sur le plan individuel des compréhensions mathématiques d’une personne qui explique. À l’image des mathématiques, ces compréhensions individuelles sont-elles à leur tour composées de communication? Est-il possible de concevoir les compréhensions mathématiques d’une personne comme étant explorées et utilisées à travers des processus de communication? Pour aborder ces questions, il faut en connaître davantage sur le fonctionnement même des mathématiques. Au-delà d’une composante communicationnelle, la communication de mathématiques peut-elle jouer un rôle dans leur avancement? Si oui, comment? Ces aspects sont abordés dans ce qui suit, en explorant l'interaction entre les avancements de la « forme » mathématique et ceux des « contenus » mathématiques.

1.4 Apports de la communication pour les compréhensions mathématiques

Les travaux de Byers et Erlwanger (1984) permettent d'aborder la contribution de la communication pour l'avancement des mathématiques. Ils conçoivent les mathématiques comme étant dotées de deux composantes. D'une part, il y aurait le contenu. Composé des idées mathématiques, des objets mathématiques, des problèmes, etc., le contenu représente ici la substance des mathématiques. Très abstrait, le contenu ne pourrait pas être exploré significativement sans la mise en place de moyens qui permettent d'en faire une interprétation et une utilisation. C'est pourquoi, d'autre part, il y aurait la forme. Composée de symbolisme et de méthodologies, la forme est l'outil permettant d'accéder aux mathématiques. Ils disent :

> To a first approximation, the content of mathematics consists of ideas embodied in its methods and results; mathematical form includes symbolic notation and chains of logical argument. […] Indeed, there exists a reciprocal relationship between content and form which makes it an oversimplification to say that "content" refers to the substance of mathematics and "form" to its appearance. (Byers et Erlwanger, 1984, p. 260)

Pour Byers et Erlwanger, une maitrise des deux composantes, contenu et forme, semble fondamentale au développement des mathématiques. Toutefois, ils ne s'arrêtent pas à la distinction de ces deux composantes, mais étudient plutôt comment elles s'articulent entre elles dans la naissance des mathématiques et y repèrent une dualité, voire une boucle d'interaction mutuelle qui représente plus que la coexistence de ces deux éléments implicite à la notion de dualité. Ils soulignent que le contenu nécessite l'usage d'une certaine forme et que la forme permet de pousser le contenu à son tour. Pour eux, le contenu mathématique n'aurait pas pu être découvert dans son ensemble si ce n'était pas aussi des avancements faits sur le plan de la forme en mathématiques. Continuellement, les avancées de contenu sont à voir comme demandant le développement de formes de plus en plus sophistiquées. En retour, Byers et Erlwanger invitent à voir ces développements dans la forme comme permettant (et possiblement inspirant) des avancées de contenu. Ils réfèrent d'ailleurs aux travaux de Struik (1987) pour enrichir et exemplifier ce propos. Ce dernier affirme :

> New results often become possible only because of a new mode of writing. The introduction of Hindu-Arabic numerals is one example; Leibniz' notation for the calculus is another one. An adequate notation reflects reality better than a poor one, and as such appears endowed with a life of it's own which in turn creates new life (Struik, 1987, p. 88)

La forme mathématique jouerait ainsi un grand rôle dans le développement de contenus mathématiques, et vice-versa. Cependant, combinés aux travaux de Bednarz (1991) sur la composante communicationnelle, les travaux de Byers et Erlwanger mènent à concevoir l'interaction entre forme et contenu comme allant au-delà de la boucle d'interaction mutuelle, pour l'inscrire dans une *dialectique*. La notion de dialectique entre deux phénomènes est ici comprise selon son sens courant, c'est-à-dire comme deux phénomènes pris ensemble, dont le déploiement de l'un implique la mise en route de l'autre, dont l'un est impossible sans l'autre. Cela signifierait que la forme et le contenu sont à voir comme faisant mutuellement partie intégrante l'un de l'autre, l'un se déployant à travers l'autre. En effet, référer au contenu mathématique demande de mobiliser de la forme mathématique et, en retour, mobiliser de la forme mathématique se fait à travers un contenu mathématique. Il s'agit d'une dialectique dépassant la boucle d'interaction mutuelle puisque l'existence même des contenus mathématiques et des formes mathématiques relève de l'existence de l'autre. Et le développement de l'un semble réellement impossible sans celui de l'autre. Ceci est d'un grand intérêt pour mieux comprendre le rôle de la communication dans l'avancement des mathématiques. La forme mathématique peut être vue comme représentant un moyen de communication. Struik discute de la forme en termes d'écriture et de notation, et Byers et Erlwanger l'étendent au symbolisme. L'écriture, la notation et le symbolisme sont des processus de communication qui peuvent être vus comme étant inscrits dans une dialectique avec le contenu mathématique. À ce moment, les avancées dans la manière de communiquer les contenus permettraient de pousser les notions mathématiques plus loin.

Les mathématiques disciplinaires peuvent ainsi être vues comme demandant des avancées de communication, qui en retour permettent de les amener encore plus loin. En plus, elles prendraient forme à travers des produits de communication qui permettraient de les utiliser. En d'autres mots, il est possible de voir forme et contenu comme s'inscrivant dans une dialectique. Cette dialectique offre une piste pour s'intéresser à l'interaction entre les explications et les compréhensions mathématiques, non plus au niveau des mathématiques elles-mêmes comme discipline, mais comme celles de l'individu qui explique. Les explications mathématiques pouvant être vues comme une certaine « forme » de mathématiques, elles s'inscriraient alors dans une relation dialectique avec le « contenu » mathématique de la personne qui explique, c'est-à-dire ses propres compréhensions mathématiques. À ce sujet, Sierpinska (1990) aborde explicitement le lien entre explications et compréhensions à l'aide d'une telle dialectique. À travers une refonte du modèle de Ricœur sur l'interprétation de textes littéraires, elle propose de concevoir les explications mathématiques comme un processus de conjectures et de validation de ces conjectures dans lequel les compréhensions mathématiques avanceraient. Elle y reconnaît d'ailleurs une similitude avec la perspective de Lakatos (1976) sur le développement des mathématiques disciplinaires.

> Let us keep, then, from Ricoeur's model just the general idea of the dialectic between understanding and explaining, starting with a guess and developing through consecutive validations and modifications of the guess. Presented in this way, Ricoeur's model strikes us with its similarity to the Lakatosian model of development of mathematics through a chain of proof and refutations. (Sierpinska, 1990, p. 26)

Par exemple, il est possible de reconnaître une dialectique dans l'anecdote sur la comparaison de fractions, dans laquelle l'idée de la moitié, un moyen que j'ai mobilisé pour expliquer la comparaison de $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$, est devenue une nouvelle compréhension mathématique pour moi, soit une nouvelle manière de comparer ces fractions. En plus, cette nouvelle compréhension a révélé pour moi des potentiels mathématiques à travers les explications formulées, s'actualisant alors en de nouvelles compréhensions. Ceci semble illustrer comment explications et compréhensions feraient partie intégrante de l'autre en se déployant ensemble, mutuellement à travers l'autre, c'est-à-dire comment elles seraient inscrites dans une relation dialectique explications-compréhensions. Ce simple exemple mène à vouloir creuser davantage sur cette dialectique et son fonctionnement. Comment cette dialectique se déploie-t-elle dans l'action d'expliquer? Comment fonctionne-t-elle? Au-delà d'affirmer sa présence, quels mécanismes se mettent en route à travers cette dialectique pour faire avancer les compréhensions mathématiques de la personne qui explique? Ces questions exigent en retour de réfléchir au développement de compréhensions mathématiques et à leur évolution dans la discipline. Suivant la piste de Sierpinska, les travaux de Lakatos offrent un point de départ pour étudier cela. C'est le thème abordé dans la section suivante, grâce à la lecture qu'en fait Lampert (1990).

1.5 Développement des compréhensions mathématiques dans l'action d'expliquer

Lampert (1990) offre une piste pour s'intéresser à la question de comment les compréhensions mathématiques d'une personne se développent. Elle trace des parallèles avec le développement de mathématiques dans la discipline décrit dans les travaux de Lakatos (1976) qui, à l'aide d'un exemple historique, retracent la construction des mathématiques disciplinaires. Elle constate que Lakatos conçoit les mathématiques comme se développant à travers un processus continuel de zigzag entre les conjectures et les réfutations de différents mathématiciens :

> Lakatos's argument […] is that mathematics develops as a process of "conscious guessing" about relationships among quantities and shapes, with proof following a "zig-zag" path starting from conjectures and moving to the examination of premises through the use of counterexamples or "refutations" (Lampert, 1990, p. 30).

Loin d'être développées linéairement, comme elles peuvent être parfois présentées dans les livres ou à l'école, les mathématiques comme discipline peuvent être vues comme émergeant à partir des conjectures des mathématiciens. Faire des mathématiques est ici conçu comme l'action d'émettre des conjectures et, à partir des résultats mathématiques qui constituent la discipline, les éplucher en développant des preuves et des réfutations. En retour, ces preuves et réfutations peuvent en arriver à remettre en question ces conjectures ou les résultats mêmes qui ont été utilisés. À travers les époques, en faisant des mathématiques, les mathématiciens se sont intéressés aux conjectures et aux résultats de leurs prédécesseurs d'un nouvel œil, à la lumière de leurs compréhensions différentes et de leurs moyens mathématiques souvent plus sophistiqués, rappelant ici la dialectique forme-contenu. Ils sont amenés à remettre en question les anciennes conjectures et résultats et à en formuler de nouveaux, et ce à partir de ces mêmes anciennes conjectures et résultats. Loin de les concevoir comme étant dispensables, superflus ou stériles, la vision de Lakatos présentée par Lampert mène plutôt à concevoir ces anciennes conjectures et résultats comme étant fondamentaux dans la genèse des mathématiques. Ceux-ci peuvent être conçus comme des savoirs mathématiques en développement, qui agissent comme points de départ pour générer de nouveaux questionnements et pour susciter des créations mathématiques neuves qui mèneront vers ces nouvelles conjectures, possiblement plus sophistiquées.

Cette vision reflète aussi l'importance de la communication dans le développement des mathématiques. Les preuves et les réfutations, les exemples et les contre-exemples, soit les processus qui permettent de développer le champ des mathématiques, peuvent être vus comme des processus de communication provenant des mathématiques et desquels émergent les mathématiques. Par exemple, l'action de faire une preuve peut être vue comme consistant à s'engager dans un dialogue mathématique avec la communauté dont l'objectif est d'établir un consensus sur la validité d'une proposition à l'aide d'un langage et de manières de faire partagés. Il en est de même pour les réfutations, les exemples et les contre-exemples.

Cette entrée invite à tracer un parallèle entre le développement des mathématiques dans la discipline et le développement des compréhensions mathématiques individuelles. À ce moment, le développement individuel de compréhensions s'en retrouverait vu comme un zigzag entre les conjectures, exemples et contre-exemples de la personne, c'est-à-dire ses propres compréhensions mathématiques, qui est généré par leur utilisation. Lampert le propose elle-même dans ses travaux. Elle remarque que ce zigzag prend forme à travers des réalisations qui apparaissent dans l'action d'élaborer une preuve. Elle affirme que l'action de faire une preuve permet de remarquer les défectuosités mathématiques relatives aux compréhensions puisque cela demande de leur donner un sens logique :

> The need for revisions does not become obvious, however, until one engages in the process of proof and discovers the shortcomings of one's assumptions. The insufficiencies of the original assumptions come to be recognized as one tries to pursue the logical consequences rather than before the fact […] (Lampert, 1990, p. 30)

De manière analogue au cas des mathématiques disciplinaires, les anciennes compréhensions jouent ainsi le rôle fondamental d'ancrage pour le développement de nouvelles compréhensions. En étant utilisées pour faire des mathématiques, les compréhensions individuelles peuvent être amenées plus loin, elles peuvent générer de nouvelles compréhensions ou encore faire l'objet de remises en question.

De concevoir le développement de compréhensions mathématiques individuelles comme étant analogue au zigzag du développement de mathématiques disciplinaires offre une piste sur le rôle des explications dans le développement des compréhensions de la personne qui explique. En effet, l'action d'expliquer se rapproche conceptuellement de l'action de faire une preuve, car les deux demandent d'organiser des concepts de manière cohérente et de clarifier des relations entre les idées. Cela signifierait qu'en expliquant quelque chose, la personne qui explique peut faire la découverte de certaines insuffisances relatives à l'idée expliquée. C'est ce qui semble se produire dans l'anecdote de l'hypothèse sur les vecteurs présentée ci-haut. Il semble possible d'y déceler un zigzag entre des conjectures (la possibilité d'avoir une autre sorte d'arrangement de vecteurs conservant les contraintes données), des exemples (la possibilité spécifique d'avoir un polygone croisé) et des contre-exemples (le réarrangement du polygone croisé en forme de triangle qui réfute le propos). Dans cette anecdote, les explications mettent en lumière une défectuosité dans mes compréhensions mathématiques, manifestement de la même manière que Lampert en discute pour l'action de faire une preuve dans la discipline. Cette vision en zigzag avance également sur l'idée d'une perspective dialectique entre les explications et les compréhensions, ainsi que sur son influence pour le développement des compréhensions chez la personne qui explique. Comme pour l'action de faire une preuve, ou plus largement, celle de faire des mathématiques, l'action d'expliquer peut être vue comme un processus de communication qui utilise les compréhensions mathématiques de la personne qui explique et qui génère des réalisations sur elles, leur permettant alors de zigzaguer à travers l'action de les expliquer.

1.6 Questions de recherche

L'intérêt de cette recherche est de mieux comprendre les rôles que peut avoir la démarche mathématique d'explications sur le développement de compréhensions mathématiques chez la personne qui explique. En ce sens, cet intérêt pourrait être résumé par la question de recherche suivante :

De quelles façons les explications mathématiques participent-elles au développement de compréhensions mathématiques chez la personne qui explique ?

Pour étudier cette question, plusieurs travaux permettent de cadrer la place de la communication vis-à-vis les mathématiques et leur avancement. Ces travaux agissent comme des références pour aborder le développement de compréhensions individuelles à travers l'action d'expliquer, offrant des pistes permettant de mieux comprendre l'influence des explications sur les compréhensions mathématiques de la personne qui explique et les façons dont leur développement se met en route. Notamment, les travaux de Bednarz (1991) invitent à concevoir les mathématiques comme étant composées de communication. Grâce à eux, il est possible de tracer un parallèle avec les compréhensions mathématiques individuelles et de leur reconnaître une composante communicationnelle. Bednarz invite à concevoir l'utilisation de compréhensions mathématiques individuelles comme mobilisant et générant de la communication. En retour, cette composante communicationnelle pousse à vouloir creuser davantage le fonctionnement même des compréhensions mathématiques individuelles, spécialement à l'égard des processus de communication (par exemple, des explications). Les travaux de Byers et Erlwanger (1984) offrent une perspective dialectique entre la forme mathématique et le contenu mathématique, dans laquelle les deux se déploient conjointement et à travers l'autre. En concevant les explications comme une forme de mathématiques et les compréhensions individuelles comme le contenu mathématique d'une personne, ces travaux rendent possible un parallèle pour les compréhensions individuelles. À ce moment, les explications et les compréhensions d'une personne seraient à voir comme étant inscrites dans une relation dialectique qui fait écho à la dialectique explications-compréhensions soulevée par Sierpinska (1990). Les avancées d'explications et de compréhensions seraient alors vues comme se déployant conjointement l'une à travers l'autre, signifiant alors que le développement de nouvelles explications pourrait contribuer de façon dialectique à faire avancer les compréhensions mathématiques de la personne qui explique. Un besoin d'approfondir cette perspective dialectique explications-compréhensions émerge, afin de mieux comprendre le fonctionnement de ce dispositif et les mécanismes qui se mettent en route et qui pourraient éclaircir les rôles des explications dans le développement de compréhensions mathématiques individuelles. Les travaux de Lampert (1990) interprètent ceux de Lakatos (1976) et proposent de concevoir le développement des mathématiques sous forme de zigzag, qui s'appuie sur des réalisations qui émergent lorsque la communauté fait des mathématiques. En retour, ces travaux mènent à concevoir les compréhensions mathématiques individuelles comme se développant aussi en zigzag qui s'appuie sur ces mêmes compréhensions. Les compréhensions mathématiques se développeraient à travers les réalisations émergeant de leur utilisation. En concevant l'action d'expliquer comme une activité mathématique, soit une utilisation des compréhensions mathématiques de la personne qui explique, cette dernière en deviendrait génératrice de réalisations. En étant abordées, ces réalisations pourraient faire avancer les compréhensions mathématiques mobilisées pour expliquer. Cette perspective exige d'être investiguée davantage pour approfondir la nature de ces réalisations et la mise en route de leur émergence et incidence dans le déploiement d'une explication. En plus, ces trois entrées méritent d'être étudiées de manière conjointe, puisque les liens entre elles semblent prometteurs pour aborder les façons dont les explications participent au développement de compréhensions mathématiques individuelles chez la personne qui explique. La question de recherche qui guide ce travail de recherche en devient donc la suivante :

De quelles façons la perspective dialectique explications-compréhensions fonctionne-t-elle dans l'action? Quels mécanismes sont mis à contribution lors du déploiement de cette dialectique?

CHAPITRE 2
ANCRAGE CONCEPTUEL : COMPRÉHENSIONS ET EXPLICATIONS

Cette recherche s’intéresse à explorer le phénomène d’explications mathématiques sous l’angle de la dialectique explications-compréhensions et à investiguer les façons dont cette dialectique participe au développement de compréhensions mathématiques chez la personne qui explique. Avoir un intérêt pour le phénomène d’explications mathématiques, relatif au développement des compréhensions mathématiques et à la façon avec laquelle les explications et les compréhensions interagissent dialectiquement, nécessite de clarifier et d’ancrer ces composantes sur un plan théorique. Ceci est fait de manière initiale en prenant appui sur des définitions tirées de différents dictionnaires usuels de langues, et ensuite en référant à différents travaux en didactique des mathématiques. Cet ancrage permet d’asseoir les premiers pas d’une conceptualisation pour chacune des composantes de la question de recherche, soit la notion de compréhensions mathématiques et celle d’explications mathématiques. En plus cet ancrage permet d’avancer sur la relation dialectique unissant ces deux phénomènes.

2.1 Conceptualisation de la notion de compréhensions

Les définitions courantes sur la notion de compréhensions amènent à en faire une décomposition selon deux sens distincts : les compréhensions dites « processus » et les compréhensions dites « résultat ». Ces deux sens servent d’ancrage initial pour la conceptualisation de cette notion. La notion de compréhensions mathématiques est d’ailleurs développée selon ces deux sens en didactique des mathématiques (voir les travaux de Sierpinska, 1990, et de Skemp, 1976). Ces deux sens sont d’abord développés dans les sous-sections suivantes et leur interaction est ensuite abordée sous l’angle d’une interaction mutuelle.

2.1.1 Compréhensions-processus

Une première façon de concevoir la notion de compréhensions est sous l’angle d’un processus, soit d’une action en plein déploiement. Conçue de cette manière, une compréhension en devient le processus de s’approprier des idées par le raisonnement. Il s’agit à ce moment d’une action, soit celle de comprendre. Le dictionnaire Larousse (2022) définit la compréhension de la manière suivante :

> Action de comprendre le sens, le fonctionnement, la nature, etc., de quelque chose

Selon ce même dictionnaire, comprendre est aussi défini des manières suivantes :

> Se représenter quelqu'un, quelque chose d'une certaine manière, s'en faire une certaine idée
>
> Saisir par l'esprit, l'intelligence ou le raisonnement quelque chose, le sens des paroles, des actes de quelqu'un

De son côté, le dictionnaire Robert (2022) définit le verbe comprendre similairement :

> Avoir une idée de ; saisir le sens de

Présentée ainsi, une compréhension est une action de se représenter une notion d'une certaine manière dans l'objectif d'en saisir le sens. Cela reprend les idées de Raynal et Reunier (2014), selon qui une compréhension se décrit comme un processus donnant un sens à une notion dans l'objectif de pouvoir la mobiliser dans la résolution de différents problèmes. C'est de cette façon que, pour eux, une compréhension s'actualise par la construction d'une représentation adéquate de la notion, d'une manière de la concevoir. Ces auteurs définissent comprendre, comme verbe, de la manière suivante :

> Donner à une situation un sens qui permette d'agir pour résoudre, si possible de façon pertinente, le problème posé par ladite situation. […] [L]'activité de compréhension se traduit par la construction d'une représentation adéquate. (Raynal et Reunier, 2014, pp. 80-81)

Dans le même ordre d'idée, la notion de compréhensions s'est présentée historiquement comme l'action de prendre les idées par l'intelligence, de les agripper, de mettre la main sur elles. Le Robert dictionnaire historique de la langue française (Rey, 2011) donne la précision suivante :

> Le sens physique de « saisir, prendre, envahir » a fait du mot un doublet sémantique de *prendre* jusqu'à la fin du XVI^{e} siècle, quelque fois employé avec la valeur très violente de « empoigner, happer » (Rey, 2011, p. 827, italiques dans l'original)

Sous cet angle, une compréhension se ramène au processus de prendre une idée par l'intelligence, de s'en emparer et de se l'approprier. En tant que processus vivant, dynamique et en constante évolution, ce développement d'idées est mis en route par l'individu qui est *en train* de comprendre. C'est à travers le processus de compréhension que la personne en vient à s'approprier une notion, c'est-à-dire à développer une manière de la concevoir, donc une manière de la comprendre.

Dans un contexte mathématique, une compréhension en devient le processus de s'approprier une notion spécifiquement mathématique. C'est l'action de développer une manière de concevoir un concept mathématique, ce qui peut être réinvesti, suivant Raynal et Reunier, dans la résolution d'un problème. Cette idée est renforcie par Bessis (2022), un mathématicien qui s'intéresse à comment une personne en vient à comprendre une définition mathématique formelle. Il affirme que l'action de comprendre correspond à la fabrication d'images mentales qui permettent de rendre la définition plus accessible :

> L'enjeu de la compréhension mathématique est précisément ceci : trouver le moyen de fabriquer soi-même de nouvelles images mentales sur la base de définitions formelles, pour rendre ces définitions intuitives, pour « sentir » de quoi elles parlent. (Bessis, 2022, p. 111)

En didactique des mathématiques, Sierpinska (1990) propose de concevoir la notion de compréhensions en termes d'actions aspirant à saisir le sens mathématique des notions. Pour elle, la notion de compréhensions peut être résumée dans l'action d'interagir avec les idées mathématiques et de leur chercher des significations. Vue ainsi, cette action de compréhension est mobilisée dans le processus d'interpréter une notion à l'aide de conjectures de plus en plus élaborées et des questions qui en émergent :

> I propose, then, to regard understanding as an act, but an act involved in a process of interpretation, this interpretation being a developing dialectic between more and more elaborate guesses and validations of these guesses. (Sierpinska, 1990, p. 26)

À titre d'exemple, voici une phrase souvent lue ou entendue en enseignement des mathématiques : *La manipulation de blocs multibases peut éclaircir la compréhension relative aux systèmes de numération*. Ici, la « compréhension » peut référer au processus mis en marche par l'individu qui est en train de comprendre. Interprétée sous l'angle des compréhensions comme processus, cette phrase en vient à dire que de manipuler des blocs multibases peut faciliter le processus d'appropriation de la notion de système de numérations, de saisir son sens et d'en construire une manière de comprendre. Par exemple, en fractionnant une colonne-dizaine en dix blocs-unités, la personne est amenée à traiter le sens de la dizaine (un paquet de dix unités) et à vivre le passage de la dizaine vers les unités, tout comme celui des unités vers la dizaine. Par conséquent, la personne est amenée à comprendre en temps réel en construisant une manière de concevoir les notions d'unités et de dizaines et comment celles-ci interagissent entre elles, manière qui serait ici illustrée par les blocs multibases et par l'interactivité de ceux-ci. La personne est amenée à saisir en quoi une dizaine correspond à dix unités. Elle s'engage dans un certain processus, soit un processus de compréhension.

Ceci représente un premier sens pouvant être donné à la notion de compréhensions, soit celui d'un processus personnel vécu par l'individu qui s'approprie une idée. Conçue comme un processus, une compréhension est une action, celle d'intégrer une idée, prise dans son déploiement. Elle se traduit par le développement en temps réel d'une manière de comprendre.

2.1.2 Compréhensions-résultats

Une deuxième façon de concevoir les compréhensions est sous l'angle de résultats, soit ce qui est issu de l'achèvement du processus de comprendre. En effet, il est possible de concevoir qu'une compréhension-processus résulte en une production, qui pourrait aussi être appelée une compréhension. Dans un contexte mathématique, une compréhension-résultat en devient la manière de concevoir un concept spécifiquement mathématique qui émerge du processus de comprendre. Telle que présentée à la section précédente, sous l'angle d'un processus mathématique, l'activité de compréhension peut être conçue comme l'action de donner un sens à une notion mathématique afin d'être en mesure de la mobiliser dans d'autres situations. Envisagé de cette manière, le *sens* ultimement donné à la notion mathématique est un résultat qui découle de ce processus. Une fois la compréhension-processus achevée, il reste un sens dont la personne peut faire usage[1]. Dans la même lignée, Raynal et Reunier (2014) conçoivent les compréhensions-processus comme construisant des représentations adéquates, Bessis (2022) les conçoit en mathématiques comme fabriquant des images mentales qui permettent de sentir de quoi parlent les définitions mathématiques formelles et Sierpinska (1990) les conçoit en didactique des mathématiques comme des actions interprétant des notions mathématiques. Présentées ainsi, les *représentations* construites, les *images mentales* fabriquées et les *interprétations* élaborées se voient à titre de compréhension-résultat. Une compréhension-résultat est alors ici une manière de concevoir une notion mathématique qui émerge du processus de se l'approprier. Ces idées reprennent celles de Skemp (1978) en didactique des mathématiques, qui conçoit les compréhensions comme des manières de connaitre (*ways of knowing*) dépeignant des processus de compréhension achevés.

Conçue ainsi, une compréhension comme résultat est conceptuellement plus définitive, puisqu'elle témoigne de ce qui peut être retenu de compréhensions-processus menées à terme. Il s'agit du développement d'idées relativement stable d'un individu qui a compris quelque chose. Soulignons tout de même qu'une compréhension comme résultat d'une compréhension-processus est constamment à la merci de nouvelles actions de comprendre et est donc incitée à évoluer. Cependant, telle l'image d'une bande vidéo arrêtée en plein déroulement, il est conceptuellement envisageable d'isoler une ou plusieurs compréhensions-résultats dans le processus de comprendre. En ce sens, une compréhension-résultat augmentée de raisonnements supplémentaires peut être considérée comme étant une compréhension transformée, une nouvelle compréhension, c'est-à-dire une autre compréhension-résultat.

Dans la même phrase utilisée précédemment, c'est-à-dire *la manipulation de blocs multibases peut éclaircir la compréhension relative aux systèmes de numération*, la « compréhension » peut également référer à la manière de comprendre *résultant* de l'action de comprendre. Considérée comme compréhension-résultat, la compréhension est ici un état, une chose, un résultat obtenu par la personne. À ce moment, le sens de cette phrase est que la manipulation de blocs multibases peut bonifier une compréhension préexistante de

[1] Il est à noter qu'une compréhension vue comme un résultat ne signifie pas que celle-ci est nécessairement adéquate, cohérente ou valide mathématiquement parlant. Elle peut être partielle ou erronée, mais il s'agit tout de même une compréhension-résultat.

quelqu'un. Par exemple, en illustrant de manière concrète les notions d'unités et de dizaines et leur interaction, la compréhension-résultat initiale de cette notion peut être amenée à évoluer et à s'améliorer. La personne s'en retrouve à comprendre plus profondément le sens des systèmes de numération. Éclaircir une compréhension-résultat signifie la rendre plus accessible, voire plus cohérente.

Ce second sens donné à la notion de compréhensions représente la conception d'une notion propre à l'individu. Conçue comme un résultat, une compréhension est le produit de l'action de comprendre, pris au terme de son déploiement. Elle se traduit par une manière de comprendre une notion mathématique, qui est intégrée chez la personne ayant compris.

2.1.3 Interaction entre les deux sens de la notion de compréhensions en mathématiques

Les deux sens présentés pour la notion de compréhensions ne s'inscrivent pas dans une relation unidirectionnelle, soit du passage des compréhensions-processus vers les compréhensions-résultats. L'interaction entre ces deux sens peut être vue comme étant au cœur d'une boucle d'influence mutuelle processus ↔ résultat. En effet, bien que les compréhensions-résultats émergent au cours des compréhensions-processus, il est possible de leur reconnaître un rôle dans le déroulement de ces mêmes processus. Les compréhensions-processus sont alors vues comme étant possiblement alimentées par les compréhensions-résultats, tout en les alimentant en retour. Plus précisément, les compréhensions-processus se voient comme étant mobilisées au travers de compréhensions-résultats préexistantes. Elles donnent naissance à de nouvelles compréhensions-résultats qui sont à leur tour mobilisées dans de futures compréhensions-processus, et ce, dans une boucle d'influence mutuelle continuelle entre processus et résultats. Sierpinska (1990) aborde cette influence mutuelle en précisant que l'interprétation d'une notion s'actualise par le développement de conjectures de plus en plus sophistiquées qui se fait à travers leur validation. Ceci signifie que les compréhensions-résultats se voient comme étant raffinées par les compréhensions-processus qu'elles servent à mettre en route.

Par exemple, lorsqu'une personne s'initie au raisonnement proportionnel, il lui arrive de comprendre une première équivalence entre deux ratios (compréhension-résultat), comme $1:2$ et $2:4$. Comprendre cette première équivalence entre $1:2$ et $2:4$ peut permettre de comprendre (compréhension-processus) une seconde équivalence de ratios (compréhension-résultat), par exemple entre $2:4$ et $3:6$. Ceci peut permettre de repérer (compréhension-processus) des régularités (compréhensions-résultats), entre les différents termes d'un même ratio ou entre les termes analogues de ratios différents et possiblement faire comprendre (compréhension-processus) que ces trois ratios sont équivalents entre eux (compréhension-résultat). Cette réalisation de l'existence d'une telle triple équivalence peut mener par la suite à comprendre (compréhension-processus) qu'il pourrait en exister plusieurs autres suivant la même relation, qui poussée plus loin peut mener à considérer une infinité de ratios équivalents entre eux (compréhension-résultat), comme $4 : 8$, $10 : 20$ ou $45 : 90$, par exemple. En retour, cette réalisation fait changer les façons de développer, de saisir (compréhension-processus) les prochaines équivalences (compréhension-résultat) et, plus généralement, la notion de ratios (compréhension-résultat) en elle-même. Cet exemple illustre comment les compréhensions-résultats peuvent être mobilisées comme étape dans les compréhensions-processus, pour en devenir au fondement des prochaines compréhensions-résultats à venir.

Cette boucle d'influence mutuelle peut se voir continuellement à l'œuvre dans la construction et l'avancement des compréhensions mathématiques. Une à la fois, les compréhensions-résultats émergent au cours des compréhensions-processus, et elles influencent ensuite par le fait même les compréhensions-processus qui s'ensuivent. En ce sens, une nouvelle compréhension-résultat en vient à altérer la manière d'investiguer un contenu mathématique, et donc la manière que la prochaine compréhension-processus se met en marche. Parce qu'elle se déploie de manière plus éclairée, à travers l'ajout de compréhensions-résultats supplémentaires, la compréhension-processus permet de générer de nouvelles compréhensions-résultats, dont certaines étaient potentiellement inapprochables sans ces nouveaux appuis. Poussées jusqu'au bout, ces nouvelles compréhensions-résultats peuvent même en venir à transformer les façons de comprendre, c'est-à-dire les compréhensions-processus elles-mêmes. Les sens processus et résultat de la notion de compréhensions sont alors vus comme interagissant sous la forme d'une boucle continuelle.

2.1.4 Compréhensions conceptuelles en mathématiques

Les travaux de Hiebert et Lefevre (1986) permettent d'ancrer davantage cette influence mutuelle entre les compréhensions-processus et les compréhensions-résultats. Ces auteurs explorent le thème des compréhensions et des connaissances en mathématiques en introduisant, en contrastant et en mettant en relation deux types de connaissances qu'ils considèrent essentiels aux mathématiques : les connaissances procédurales (*procedural knowledge*) et les connaissances conceptuelles (*conceptual knowledge*). Les connaissances procédurales peuvent se résumer comme étant principalement constituées de l'aisance avec la forme des mathématiques (voir Byers et Erlwanger, 1984) et avec l'ensemble des règles et procédures nécessaires à la résolution de problèmes mathématiques, ce qui rejoint la notion de compréhensions instrumentales de Skemp (1976). Les connaissances conceptuelles, quant à elles, sont décrites comme étant imbriquées dans un réseau de connaissances et sont caractérisées autant par les concepts mathématiques en soi que par l'importance des liens entre ces concepts mathématiques, ce qui rejoint également les idées de Skemp sur la notion de compréhensions relationnelles.

> Conceptual knowledge is characterized most clearly as knowledge that is rich in relationships. It can be thought of as a connected web of knowledge, a network in which the linking relationships are as prominent as the discrete pieces of information. Relationships pervade the individual facts and propositions so that all pieces of information are linked to some network. (Hiebert et Lefevre, 1986, pp. 3-4)

Pour Hiebert et Lefevre, les connaissances conceptuelles se développent autant à travers l'action de relier des idées mathématiques déjà connues qu'à travers celle d'accrocher de nouvelles informations mathématiques à des structures mathématiques antérieures. Ils réfèrent eux-mêmes à la notion de compréhension (*understanding*) pour décrire ce processus d'intégrer de nouvelles mathématiques dans un réseau conceptuel préexistant. Ils affirment :

> Regardless of the term used, the heart of the *process* involves assimilating the new material into appropriate knowledge networks or structures. The *result* is that the new material becomes part of an existing network. (Hiebert et Lefevre, 1986, p. 4, italiques ajoutés)

Comme il est possible de le remarquer par la citation précédente, Hiebert et Lefevre discutent eux aussi explicitement de la notion de compréhension autant en termes d'un processus que de son résultat. Pour eux, le processus de compréhension correspond au processus de s'approprier de nouveaux contenus mathématiques grâce au réseau mathématique initial, lui-même à l'origine produit à travers le processus d'appropriation de contenus. Ce processus mène à un résultat qui correspond au nouveau contenu, qui fait maintenant partie intégrante du réseau lui-même. Cela se traduit en une croissance du réseau qui, en retour, participera activement au déroulement du processus subséquent de s'approprier de nouvelles notions mathématiques. Dans ce processus, le réseau conceptuel bouge, et les concepts eux-mêmes sont aussi amenés à évoluer, à se transformer. Ces travaux permettent de concevoir les compréhensions mathématiques comme étant organisées sous forme de réseaux conceptuels, ce qui consolide une vision d'interactivité entre le sens processus et le sens résultat de la notion de compréhensions. Une compréhension-processus permet aux réseaux conceptuels des compréhensions-résultats de croître, que ce soit en intégrant de nouvelles idées mathématiques à ces réseaux ou en créant de nouveaux liens entre des idées mathématiques préexistantes. Quant à elles, les compréhensions-résultats, c'est-à-dire le réseau conceptuel qui est produit, représentent une structure qui éclaire l'action de comprendre, soit les compréhensions-processus. Les compréhensions-résultats, conçues comme des compréhensions dites conceptuelles, sont les outils qui permettent d'aborder de manière plus clairvoyante les nouveaux contenus mathématiques et qui en facilitent l'appropriation et l'établissement de nouveaux liens. Les compréhensions-processus se vivent au travers des structures conceptuelles des compréhensions-résultats.

À ce sujet, la perspective de Lindsay (1984, dans Sierpinska, 1990) expose une manière de concevoir comment les compréhensions-résultats colorent les compréhensions-processus en mathématiques. Elle propose que l'intégration de nouvelles notions dans les structures antérieures se fasse à l'aide d'analogies avec le réseau de compréhensions-résultats antérieures :

> New concepts can be assimilated mainly on the basis of analogies with what is already known. The main problem lies in incorporating the new concept into existing structure. When the relation is established, all the previous experience is automatically included into a fuller interpretation and understanding of new situations (Lindsay, 1984, dans Sierpinska, 1990, p. 25)

En somme, les compréhensions-processus et les compréhensions-résultats sont à voir de manière distincte, tout en étant maillées ensemble dans leur influence mutuelle. Or, cette interaction est aussi à nuancer. En effet, en analysant finement une compréhension-processus ou une compréhension-résultat, il est possible d'y repérer les traces d'une influence mutuelle processus ↔ résultat à un niveau plus fin. Par exemple, dans ce qui peut être vu comme une compréhension-résultat spécifique sur l'équivalence proportionnelle présentée précédemment, soit entre les ratios 1 : 2 et 2 : 4, il est possible de voir une influence mutuelle entre processus et résultat qui mène vers cette compréhension-résultat. Notamment, la compréhension-résultat de chacun des ratios 1 : 2 et 2 : 4 est mobilisée dans une compréhension-processus qui cherche à en faire une comparaison et à établir une équivalence. De plus, la compréhension-résultat 1 : 2 mobilise elle-même une compréhension-résultats sur la notion de ratio qui en retour donne vie à une compréhension-processus pour bâtir une manière de concevoir spécifiquement ce ratio. Il semble possible d'analyser en détail chacune de ces compréhensions-résultats sous-jacentes et chacune des compréhensions-processus pour y repérer les influences processus ↔ résultat. À l'image d'une fractale en mathématiques ou encore d'un hologramme, dans lesquels l'ensemble des parties, soit le tout, est de même nature que les parties elles-mêmes, l'activité de compréhension peut être vue comme étant infiniment morcelable. Cela permet d'illustrer de manière plus fine l'influence mutuelle entre les deux sens de la notion de compréhensions.

La Figure 2.1 qui suit illustre l'influence mutuelle entre compréhensions-processus et compréhensions-résultat en mathématiques. Bien que différentes, les compréhensions-processus et compréhensions-résultats font partie intégrante du fonctionnement de l'autre.

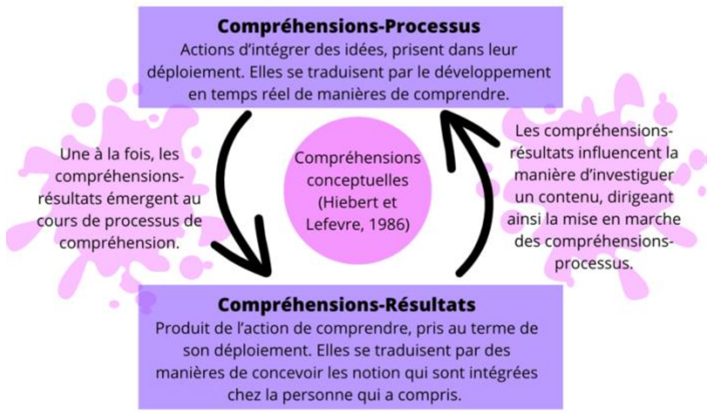


Figure 2.1 – Influence mutuelle des sens de la notion de compréhensions mathématiques

2.2 Conceptualisation de la notion d'explications

De manière similaire à la notion de compréhensions, la notion d'explications est ici conceptualisée dans un premier temps à partir des définitions courantes sur les explications. Bien que fait de manière parallèle, une décomposition selon les mêmes sens s'en dégage, soit les explications dites « processus » et celles dites « résultat ». À nouveau, les définitions usuelles de la notion d'explications offrent un point de départ pour la construction de cette conceptualisation. Cette distinction des sens de la notion d'explications est aussi présente dans les travaux en didactique des mathématiques (voir le travail de Hersant, 2001, qui retrace différents travaux en didactique sur la notion d'explications) [2]. Ces deux sens sont développés dans les sous-sections suivantes et leur interaction est ensuite abordée.

2.2.1 Explications-processus

Une première façon de concevoir la notion d'explications est sous l'angle de processus, soit d'actions en plein déploiement. De cette manière, une explication est un processus utilisé pour développer des idées par le langage. L'activité d'explication peut être appuyée par l'écriture, la gestuelle, l'intonation, les représentations, le symbolisme, etc. Il s'agit à ce moment d'une action, soit celle d'expliquer.

Le Larousse (2022) définit les explications des manières suivantes :

Action d'expliquer

[2] En didactique des mathématiques, la plupart des travaux placent généralement les explications dans une perspective d'enseignement ou d'apprentissage et est conceptualisée sous l'angle des retombées de celles-ci pour la personne qui se fait expliquer. Dans ce mémoire, toutefois, la perspective sur les explications est centrée sur le phénomène d'explication pour la personne qui explique et non de ses retombées pour la personne qui les « reçoit ». Les travaux en didactique des mathématiques sont ici considérés et intégrés en ce sens, soit lorsque ceux-ci s'arriment avec l'objet de recherche ciblé dans ce mémoire.

Développement destiné à éclairer, à faire comprendre

Le Robert (2022), quant à lui, définit les explications des manières suivantes :

Développement destiné à éclaircir le sens de quelque chose
Ce qui rend compte d'un fait

De son côté, le Multidictionnaire (2009) définit les explications de la manière suivante :

Commentaire en vue de faire comprendre

Présentées ainsi, les explications sont des actions visant à développer des idées dans l'objectif de faire comprendre un interlocuteur, c'est-à-dire de clarifier ce qui pourrait ne pas être compris. Dans l'action d'expliquer, il y a une intention, celle de *faire comprendre*. Plusieurs travaux en didactique des mathématiques soulèvent l'importance de cette intention. Hersant (2001) cite notamment Sierpinska (1995) et Soury-Levergne (1998) qui abordent les explications comme des moyens de comprendre, mais surtout de faire comprendre. Sierpinska conçoit l'action d'expliquer comme la création de liens entre divers faits mathématiques pour asseoir une proposition dans une nouvelle fondation enrichie et donc plus compréhensible. Cette intention motive et dirige le processus d'explication. C'est pourquoi il est possible de concevoir l'action d'expliquer comme une analyse de la notion à expliquer qui permet de développer les éléments qui pourraient ne pas être compris pour les rendre significatifs[3]. À cet égard, la traduction du mot explication en anglais est éclairante. En effet, explication est un mot qui encapsule deux expressions distinctes, soit *explanation* et *explication*. Le lexical d'Oxford (2022) les définit comme suit :

Explanation : A statement of account that makes something clear
Explication : The process of analyzing and developing an idea or principle in details

Alors que la notion anglophone *explanation* semble davantage orientée par le besoin de faire comprendre un interlocuteur, la notion *explication*, elle, fait un pas de plus et invite à creuser finement les détails d'une idée dans l'objectif d'en déterminer son sens logique. Ces deux définitions sont incluses dans la notion francophone, et dans la perspective sur la notion d'explications mobilisée par ce mémoire. Cela signifie que cette dernière aurait les préoccupations à la fois de faire comprendre quelque chose à quelqu'un qui ne le comprendrait pas et d'établir un fil directeur par l'analyse entre plusieurs principes d'une idée afin de la

[3] Bien que l'intention de faire comprendre soit fondamentale à la notion d'explications ici développée, les mécanismes par lesquels la transmission de compréhensions s'opère d'une personne à une autre ne sont pas abordés dans cette présente recherche. L'angle adopté dans ce mémoire est centré sur la personne qui explique et cherche à élaborer sur les moyens déployés par la personne qui explique pour faire comprendre, et non pas sur si ou sur comment l'interlocuteur a réellement compris les explications.

démêler et de l'éclaircir. En mathématiques, le processus d'explication se ramène ainsi à l'action de raisonner, d'approfondir, de creuser les détails, les fonctionnements et les sens des notions mathématiques à expliquer. Il s'agit d'ouvrir les notions mathématiques, de les morceler et de les organiser afin qu'elles soient compréhensibles. Pour Baraquin et al. (1995), un processus d'explication se vit en dépliant ou en « déroulant » la notion expliquée. Ces auteurs définissent expliquer de la manière suivante :

> Action de développer. Par exemple, expliquer un terme, c'est déployer l'ensemble des déterminations qui constituent sa compréhension. Expliquer un énoncé, un texte, c'est développer toutes les implications logiques. […] Rendre intelligible un phénomène en le rattachant à sa cause, une proposition, en la déduisant des principes qui la fondent. (Baraquin et al., 1995, p. 128)

Les explications se voient comme des actions qui consistent à expliciter des éléments significatifs afin de les rendre accessibles à autrui ou soi-même, de les rendre plus faciles à saisir. Comme le soulignent Baraquin et al., cela passe par le développement des implications logiques et par la déduction de ses principes fondamentaux. Par exemple, pour faire l'explication de l'algorithme de division, il est possible de souligner les rôles de chacun des nombres, d'insister sur la signification mathématique de chacune des procédures ou encore de retracer l'origine de cette méthode.

Le sens processus de la notion d'explications peut être exemplifié à l'aide de la phrase suivante, qui est à même d'être être lue ou entendue en contexte d'enseignement des mathématiques : *Je peux te faire l'explication du théorème de Pythagore.* Ici, « l'explication » peut référer au processus mis en marche par l'individu qui est en train d'expliquer. Il explique. Dans l'optique des explications-processus, le sens de cette phrase en vient à dire que le théorème de Pythagore peut être expliqué afin qu'il en soit plus facile de saisir son sens, son fonctionnement ou sa nature. L'explication réfère à l'action d'expliquer, c'est-à-dire au processus d'éclaircir ce qui pourrait ne pas être compris. Bien que le théorème de Pythagore et ses fonctions puissent être complets, valides et avoir des traces, il n'est pas nécessairement accessible à tout interlocuteur et c'est pourquoi la personne propose ici d'en faire l'explication. En offrant de faire une analyse du théorème de Pythagore, d'en creuser les détails et de faire émerger les éléments logiques significatifs, cette personne souhaite rendre intelligible ladite notion. En d'autres mots, la personne suggère de se lancer dans un processus d'explication avec l'objectif d'éclairer le sens du théorème de Pythagore. Ici, l'explication est bien un processus, pris dans son déploiement.

Ceci représente une première signification donnée à la notion d'explications, soit celle d'une action au cours de laquelle la personne approfondit et organise une idée dans l'objectif de la rendre accessible. Une explication en devient un processus d'analyse en temps réel des idées expliquées, qui se traduit par l'action de développer un discours visant à faire comprendre ces idées.

2.2.2 Explications-résultats

Une seconde manière de concevoir la notion d'explications est comme des résultats, soit comme des discours qui résultent d'explications-processus. En effet, l'action d'expliquer quelque chose génère une trace. Il s'agit d'une explication de ce quelque chose, c'est-à-dire d'un évènement qui a eu lieu. Cet évènement est observable et il est possible d'y faire référence. Tel que présenté dans la section précédente, une explication-processus peut être conçue comme l'action d'analyser un contenu pour éclaircir les éléments qui pourraient ne pas être compris. Envisagée de cette manière, une explication conçue à titre de résultat en devient le résultat de ce processus d'analyse, donc ce qui est expliqué. En ce sens, une explication d'une notion mathématique est une analyse de cette notion qui détaille des éléments pouvant être difficile à saisir.

Hersant (2001) affirme que plusieurs auteurs en didactique des mathématiques (notamment Duval, 1992, 1995, Sierpinska, 1995, Balacheff, 1991, Cauzinille et Mathieu, 1991 et Soury-Levergne, 1998) conçoivent les explications en termes de discours. De la même manière, Balacheff (1982) définit la notion d'explications de la manière suivante : « Nous appellerons explication un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat » (p. 263). Cette définition conçoit une explication comme une chose, un discours, soit le développement successif des idées qui, toujours accompagné d'écritures, de gestuelles, d'intonations, de représentations, de symbolismes, etc., émerge du processus d'explication. Ce discours, c'est l'ensemble des idées qui, organisées successivement, tentent de rendre accessible une idée mathématique. Pour lui, le discours d'explication est orienté par l'intention d'exposer sa propre compréhension à autrui. Cette intention colore les explications en soi, puisque ce sont les éléments significatifs pour la personne qui explique qui sont développés et raffinés.

Dans la phrase qui est utilisée à la section précédente, soit *je peux te faire l'explication du théorème de Pythagore*, « l'explication » peut également référer à un discours qui permet de rendre compréhensible une notion mathématique. Abordé par le sens résultat de la notion d'explications, le sens de cette phrase en vient à dire que le théorème de Pythagore peut être accompagné d'un discours, de choses dites pour le rendre plus intelligible. Ce discours est appelé « une explication ». Il s'agit d'un développement d'idées, qui est issu de l'analyse des éléments à clarifier de la notion. Les explications produites représentent et encapsulent ce développement d'idées. Par exemple, il est possible d'offrir la nature et le fonctionnement du théorème, la réciproque du théorème et sa contraposée, son origine, ses utilités, et bien plus. Les explications sont ici l'ensemble des idées détaillées successivement pour clarifier le théorème de Pythagore.

En somme, il s’agit d’un second sens qui peut être donné à la notion d’explications, soit celui du discours qui cherche à rendre accessible une notion. Conçue comme un résultat, une explication est un évènement généré par l’action d’expliquer une notion mathématique.

2.2.3 Interaction entre les deux sens de la notion d’explications en mathématiques

La notion d’explications peut être entrevue selon deux sens : les explications-processus et les explications-résultats, qui ne sont pas non plus à voir dans une relation unidirectionnelle, mais à nouveau comme étant inscrits dans une boucle d’influence mutuelle processus ↔ résultat. D’une part, les explications-résultats témoignent de processus d’explication menés à terme. D’autre part, une analyse fine du déroulement même des explications-processus fait ressortir un rôle clé joué par les explications-résultats dans ces processus. Les explications-processus sont vues comme étant dirigées par l’intention de faire comprendre, ce qui amène à se demander comment cette intention les dirige. À ce sujet, il est possible de considérer que l’intention de faire comprendre s’actualise à travers une certaine évaluation en temps réel de ce qui est expliqué pour réussir à faire comprendre. Dans un premier temps, cette évaluation peut se faire en amont par la personne qui explique, pour vérifier à l’avance quelles idées ont un plus grand potentiel de porter le sens des notions et comment les organiser pour remplir l’objectif. Dans un second temps, l’évaluation de ce qui est expliqué pour faire comprendre l’autre peut être vue comme se mettant continuellement en route dans le déroulement même des explications-processus, c’est-à-dire à la lumière des explications-résultats formulées et de leurs retombées pour faire comprendre. Vu sous cet angle, en expliquant, la personne est constamment en train d’évaluer la portée des explications-résultats qu’elle a formulées afin de vérifier si l’intention de faire comprendre est atteinte, et, en retour, de moduler et d’adapter ses explications-processus pour atteindre cet objectif, soit d’autoréguler ses explications. Ici, l’évaluation continuelle, et les ajustements qu’elle génère, sont orientés autour de comment la personne qui explique conçoit ses explications, en jugeant si oui ou non elles arrivent à faire comprendre, ce qui peut être influencé par une rétroaction d’un interlocuteur, sans en être forcé. Ainsi, une telle évaluation en temps réel des explications-résultats qui viennent d’être formulées peut être vue comme régulant les explications-processus en cours. Elle influencerait alors la direction des explications-processus qui suivent et, ultimement, la nature des prochaines explications-résultats. Il s’agit d’une influence mutuelle processus ↔ résultat centrée sur l’intention de bien faire comprendre la notion.

L’influence mutuelle processus ↔ résultat des sens de la notion d’explications mathématiques est illustrée dans la Figure 2.2 ci-dessus. Explications-processus et explications-résultats sont à différencier, mais fonctionnent ensemble en s’appuyant mutuellement les unes sur les autres dans leur déploiement.

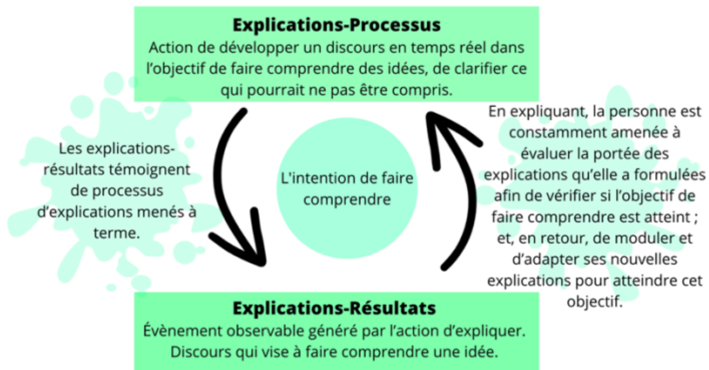


Figure 2.2 – Influence mutuelle des sens de la notion d'explications mathématiques

2.3 Interaction dialectique entre les notions d'explications et de compréhensions en mathématiques

En mathématiques, les explications et les compréhensions sont deux phénomènes qui peuvent être vus de manière distincte, même s'ils s'avèrent potentiellement complémentaires. Comme le souligne Proulx (2021), dans le monde scolaire, les pratiques d'explications mathématiques et celles de compréhensions mathématiques sont conceptuellement rapprochées à un point tel que les explications des élèves sont souvent évaluées en tant que leurs compréhensions mathématiques. Cependant, elles sont aussi à différencier. Proulx invite à concevoir les explications mathématiques comme provenant d'un travail distinct et supplémentaire à celui des compréhensions mathématiques. En lien avec la résolution en contexte de calcul mental de l'opération « 70 – 34 » par une élève, il affirme :

> […] demander à un élève d'expliquer son raisonnement ou d'en laisser des traces implique un travail *supplémentaire* en mathématiques. La résolution de 70 – 34 est une première tâche ; l'explication sur cette façon de résoudre en est une autre. Il est évidemment possible de réussir une et non l'autre : il arrive autant qu'un élève comprenne une notion et ne puisse pas l'expliquer qu'un élève puisse clairement expliquer sa compréhension, mais qu'elle soit erronée. (Proulx, 2021, p. 177, italiques dans l'original)

Les explications et les compréhensions mathématiques restent complémentaires. Cette complémentarité est montrée par le travail de Hersant (2001), qui dénote qu'en didactique des mathématiques les explications sont caractérisés par les liens conceptuels formulés entre les connaissances : « Ils [Balacheff, Cauzinille et Soury-Levergne] considèrent, comme Duval et Sierpinska, que l'explication est un lien entre des connaissances ou à l'intérieur d'un système de connaissances » (p. 118). Cette particularité du discours explicatif est significative puisqu'elle agit comme un pont entre les notions d'explications et de compréhensions, les deux pouvant être caractérisées par les liens entre les notions. Ceci fait un rapprochement important avec la notion de compréhensions conceptuelles au sens de Hiebert et Lefevre (1986), qui porte aussi un intérêt aux liens entre les éléments de compréhension. À ce sujet, Hersant cite Mopondi (1995), qui explicite ce passage de la notion d'explications vers celle de compréhensions :

> Mopondi associe l'explication à une volonté de faire comprendre et plus généralement à la compréhension. Il remarque qu'étymologiquement « comprendre » signifie « établir des liens, prendre ensemble, organiser en réseau des connaissances antérieures. » (p. 120)

Expliquer et comprendre se rapportent tous les deux à établir des liens entre des notions mathématiques. Aborder les explications mathématiques comme tâche différente et complémentaire aux compréhensions mathématiques soulève des questionnements quant à leur interaction. Entre autres, quels sont les impacts possibles de chaque phénomène sur le déroulement de l'autre? D'emblée, les compréhensions mathématiques représentent les objets des explications mathématiques. Tel que souligné dans les sections précédentes, notamment à travers les propos de Baraquin et al. (1995) et de Balacheff (1982), l'action d'expliquer constitue l'acte de mettre en mots une compréhension mathématique dans l'objectif de la faire comprendre à quelqu'un d'autre. Une explication est ainsi à voir comme une tentative de transmettre une compréhension mathématique à une autre personne, par exemple en voulant générer une compréhension similaire chez lui. Les compréhensions mathématiques sont donc au centre de l'activité d'explication mathématique. Que peut-il en être pour le phénomène inverse? Qu'en est-il pour l'effet de l'activité mathématique d'explication sur les compréhensions mathématiques de la personne qui explique? C'est en effet la question au cœur de ce mémoire.

Formuler une explication mathématique peut être vu comme une activité qui travaille les compréhensions mathématiques de la personne qui explique pour les mettre en mots et en faire un discours. En effet, les compréhensions mathématiques d'une personne ne sont pas vues comme étant nécessairement initialement articulées dans l'optique d'être communiquées. Elles peuvent certainement être composées de mots, mais il est possible de reconnaître qu'elles comprennent également des images, des émotions, des mouvements, etc. propres à la personne. L'action d'expliquer en vient à réorganiser, en temps réel ou non, des compréhensions mathématiques dans l'objectif de les rendre explicables, et, par la suite, justement, de les expliquer. L'action de réorganiser une compréhension est alors conçue comme ce « travail supplémentaire » soulevé par Proulx (2021). Au cours de ce processus, la compréhension s'en retrouve transformée par les besoins inhérents de la communication, qui la réorganise, la structure et la façonne. Une manière initialement personnelle de concevoir une notion mathématique, et qui devient un discours communiqué, s'en retrouve transformée. Les explications ont une intention de faire comprendre et, en retour de cette intention, la compréhension évolue, comme en témoigne Balacheff (1991, dans Hersant, 2001) :

> […] l'élaboration d'une explication est un processus dynamique et interactif qui peut nécessiter une évolution des systèmes de connaissances pour permettre un accord entre l'émetteur et le récepteur sur la valeur explicative du discours produit. (p. 112)

Dans la même lignée, Boyer et Martineau (2018) abordent la relation entre la pensée et le langage. Leurs propos reprennent cette conception du rôle des explications mathématiques sur les compréhensions mathématiques. Ils avancent :

> Le langage n'est pas qu'un simple outil servant à nommer le monde : c'est le creuset de la pensée humaine, le milieu même où la pensée se tient. Pour expliquer l'interrelation entre la pensée et le langage, Vygotsky (1934/1997) opposait deux formes de pensée : la pensée intériorisée et la pensée extériorisée. La première est fragmentaire; elle échappe parfois à la pleine conscience. Faite de mots, mais aussi d'émotions, d'images, elle peut être contradictoire, imprécise, déstructurée. Elle ne vise pas la communication et n'est pas soumise à une obligation de cohérence. Dans l'écriture et la parole, la pensée s'extériorise : elle se soumet aux dictats du langage. […] Dans ce processus, elle s'organise et se réorganise, favorisant la création de liens nouveaux et l'émergence d'idées neuves. La pensée, ainsi extériorisée, oblige le scripteur à se poser de nouvelles questions qui le forcent à trouver une réponse, en lui ou dans ses rapports avec l'Autre. (Boyer et Martineau, 2018, pp. 88-89)

Cette perspective s'ancre dans l'idée qu'une personne n'est pas nécessairement en plein contrôle de l'ensemble de ses compréhensions à tout moment. Vue ainsi, dans l'action de les expliquer, la personne peut préciser, affermir ou encore compléter ses compréhensions, parce que ces dernières seraient modelées par le caractère qui se veut cohérent, successif et complet d'une explication. Les règles de cohérence du langage auraient également un rôle à jouer. Par elles, l'action de rendre une compréhension mathématique communicable permettrait, par exemple, de repérer et de raisonner sur des incohérences de la compréhension, de réaliser des éléments implicites au fondement de la compréhension et d'inciter l'émergence de nouvelles pistes de questionnements chez la personne qui explique (soit l'autorégulation mentionnée précédemment). En fin de compte, Boyer et Martineau invitent à concevoir l'action de sculpter une compréhension mathématique par le langage comme offrant un regard plus contrôlé qui peut la faire évoluer.

Comme souligné dans les sections précédentes, les explications mathématiques peuvent aussi être vues comme engageant sur une analyse du contenu mathématique expliqué pour en éclaircir les éléments qui sont fondamentalement à comprendre ou qui pourraient ne pas être compris. Il est possible d'y voir que pour faire comprendre, la personne qui explique est amenée à analyser la compréhension qu'elle souhaite transmettre, à retracer ses déterminants et à exploiter des pistes d'idées et de liens embryonnaires qui n'étaient initialement pas forcément vus comme étant nécessaires à sa compréhension personnelle de la notion mathématique, mais qui pourraient être porteurs pour générer une compréhension chez l'interlocuteur. Ainsi, une explication peut inciter la personne qui explique à former de nouveaux liens entre des éléments de compréhensions, parce qu'elle creuse, morcelle et investigue en profondeur les compréhensions mathématiques qu'elle souhaite expliquer. En expliquant, la personne qui explique peut en venir à renforcer des liens au cœur des concepts mathématiques, voire à s’approprier encore plus le contenu qu’elle explique. Ce faisant, elle fait croitre son propre réseau conceptuel de compréhensions mathématiques.

Les évaluations et les ajustements en temps réel d’une explication mathématique qui se font sur la base des explications antérieures dans l’intention de faire comprendre peuvent également être vus comme étant au cœur de l’évolution des compréhensions mathématiques de la personne qui explique. À ce moment l’action d’adapter et de moduler ses explications serait à voir comme étant des facteurs importants dans le développement des compréhensions mathématiques. En effet, il est possible de comprendre que ce ne sont pas que les explications qui sont amenées à se transformer, mais possiblement aussi et en même temps, les compréhensions. Les éléments ajoutés à une explication dans l’objectif de faire comprendre sont alors à voir comme partie prenante des compréhensions mathématiques. Les nouveaux sens donnés à une notion, les nouvelles manières de concevoir certains éléments clés, la nouvelle importance donnée à certains morceaux de la notion : ce sont tous des éléments qui pourraient intégrer les compréhensions mathématiques à travers une explication. En ce sens, l’action d’entrer dans les détails pour faire comprendre peut s’avérer être une activité porteuse au niveau du développement des compréhensions de la personne qui explique.

En somme, bien que différentes, les compréhensions mathématiques et les explications mathématiques peuvent être conceptualisées comme étant en interaction constante, les deux étant alors vues comme fondamentalement ancrées l’une dans l’autre et se déployant à travers l’autre. Autant les compréhensions mathématiques permettraient les explications mathématiques, autant les explications mathématiques pourraient affermir, actualiser, renforcer ou développer les compréhensions mathématiques. Il est alors possible d’y reconnaître la notion de dialectique explications-compréhensions tirée des travaux de Sierpinska et présentée au Chapitre 1 sur la problématique. À ce sujet, il faut souligner que les notions d’explications et de compréhensions restent en pratique indissociables l’une de l’autre. Alors que ce chapitre aborde l’investigation de ces notions de manière individuelle, cette démarche met en lumière leurs natures interreliées, soit leur caractère dialectique. Bien que différentes, cette recherche les conçoit comme étant si profondément connectés que leur séparation est impensable. La Figure 2.3 illustre cette dialectique.

Cette conceptualisation dialectique de l’interaction des notions d’explications et de compréhensions forme l’ancrage qui oriente ce travail de recherche. Dans ce qui suit, une analyse théorique de l’avancement des compréhensions en mathématiques est offerte dans une perspective dialectique explications-compréhensions. Celle-ci permet d’asseoir cette dialectique sur des fondements théoriques qui permettent d’en apprendre sur le rôle des explications dans le développement des compréhensions mathématiques de la personne qui explique, soit les questions centrales à cette recherche.

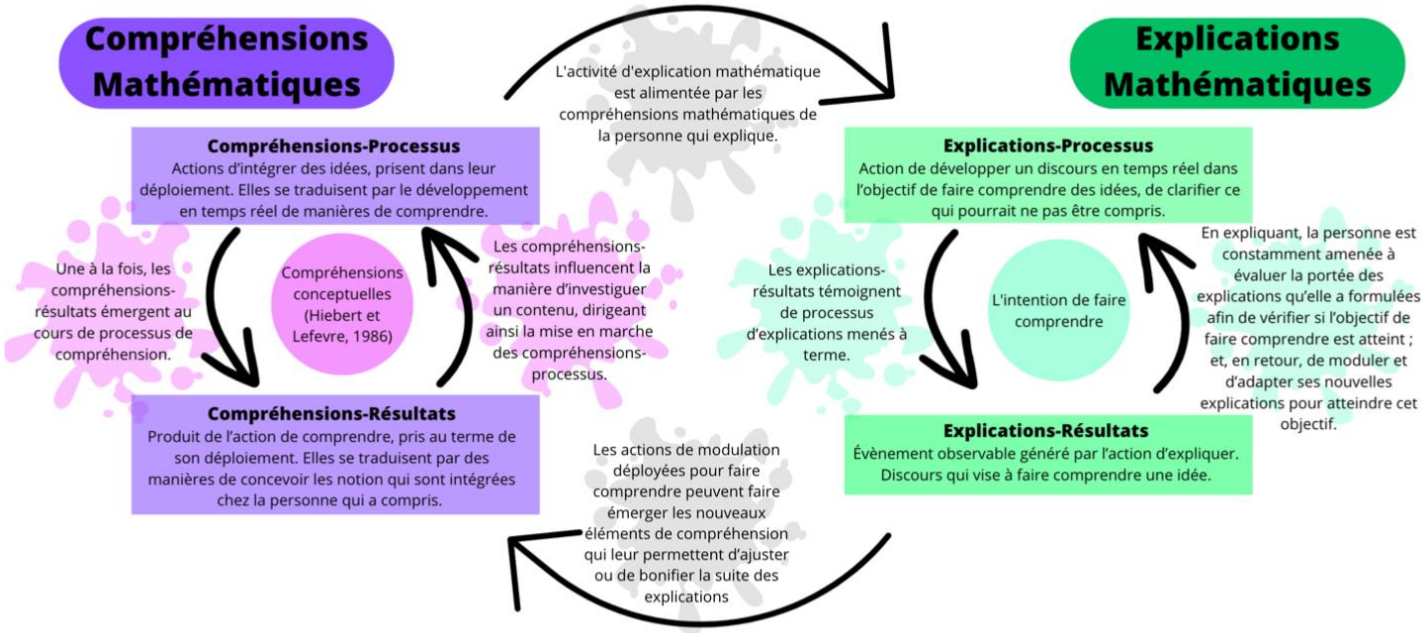


Figure 2.3 – Interaction dialectique entre les explications et compréhensions en mathématiques

CHAPITRE 3
ANCRAGE CONCEPTUEL : DIALECTIQUE EXPLICATIONS-COMPRÉHENSIONS

Différents chercheurs ont décortiqué le processus mis en œuvre permettant le développement de compréhensions mathématiques, et ce, tant sur le plan individuel que collectif. Ces travaux offrent une porte d'entrée pour approfondir la façon dont peut se déployer la dialectique explications-compréhensions en mathématiques. En particulier, ces travaux permettent d'éclaircir le processus d'autorégulation se déployant dans une explication et la façon avec laquelle celui-ci peut participer en retour au développement des compréhensions de la personne qui explique. C'est le thème au cœur de ce mémoire et ce chapitre est centré sur ces idées pour ancrer conceptuellement la dialectique explications-compréhensions en mathématiques.

Ce chapitre se compose de deux parties. Une première partie suit la piste de Sierpinska (1990) et creuse les travaux de Imre Lakatos (1976), qui concernent le processus de développement des mathématiques disciplinaires, soit les compréhensions issues de la communauté mathématique. Situées au plan collectif, les idées de Lakatos offrent une première entrée pour saisir la dynamique en cours, peu linéaire et remplie d'aléas et de compromis, du développement des mathématiques. À travers la traduction vers la classe qu'en fait Lampert (1990), le processus dynamique mis en route par Lakatos permet d'initier une réflexion sur celui de l'individu, comme métaphore globale du processus de développement des compréhensions individuelles dans l'action d'expliquer. Une seconde partie convoque les travaux de Seymour Papert (1972, 1990, 1993), centrés sur le développement des compréhensions mathématiques sur le plan individuel, qui s'appuient sur la perspective de Lévi-Strauss (1962). Dans une lignée similaire à Lakatos, Papert offre une entrée dynamique du développement de compréhensions mathématiques au niveau individuel à travers une redéfinition du concept d'expertise en mathématiques. Prises ensemble, ces entrées avec Lakatos et Papert-Lévi-Strauss offrent un regard détaillé sur le développement des compréhensions mathématiques et sur le rôle des explications dans celui-ci.

3.1 Perspective du zigzag sur la dialectique explications-compréhensions

Ce qui suit présente une première perspective sur la dialectique explications-compréhensions, celle du zigzag inspirée des travaux de Lakatos (1976). Dans une première sous-section, les travaux de Lakatos sont examinés pour le développement des mathématiques disciplinaires. Dans une deuxième sous-section, une transition vers le développement des compréhensions individuelles est offerte. Dans une troisième sous-section, cette entrée est incorporée à la perspective dialectique explications-compréhensions.

3.1.1 Travaux de Lakatos sur le développement des mathématiques

Lakatos (1976) souligne qu'à travers l'histoire, et aujourd'hui encore, la communauté de mathématiciens utilise les résultats mathématiques des époques antérieures qui constituent la discipline actuelle, dans l'objectif de faire avancer les idées. Ce faisant, ces mathématiciens peuvent être amenés à faire des réalisations, sous forme d'incohérences ou de résultats prometteurs, à propos de leurs propres conclusions mathématiques (leurs conjectures, prémisses, définitions, etc.), ainsi que celles de leurs collègues mathématiciens actuels et celles de leurs prédécesseurs. Ces réalisations peuvent les amener à vouloir enrichir leurs conclusions mathématiques initiales, à vouloir les prouver, les réviser, ou même les réfuter. Lakatos conçoit ces actions qu'il qualifie de processus de « preuves et de réfutations » comme un zigzag continuel, qui fait avancer la discipline mathématique en engendrant des réalisations, pour les aborder ensuite, transformant du même coup les résultats mathématiques utilisés. Il affirme :

> Discovery does not go up or down, but follows a zig-zag path : prodded by counterexamples, it moves from the naïve conjecture to the premisses and then turn back again to delete the naïve conjecture and replace it by the theorem. Naive conjecture and counterexamples do not appear in the fully fledged deductive structure : the zig-zag of discovery cannot be discerned in the end product. […] Proofs improve when the proof-idea discovers unexpected aspects of the naive conjecture which then appear in the theorem (Lakatos, 1976, pp. 44-45)

Les mathématiques de la discipline se retrouvent en ce sens au fondement de la genèse des prochaines mathématiques. Elles sont à la fois la source de réalisations et à la fois la base dans laquelle les nouvelles conclusions qu'elles génèrent sont enracinées. De manière itérative, les nouvelles mathématiques produites sont à leur tour réexaminées et servent elles aussi de fondation pour élaborer les prochaines mathématiques. Sans être vus comme étant déficitaires, les résultats mathématiques précédents sont pris au sérieux et étudiés rigoureusement : ils sont au centre des nouveaux résultats mathématiques qu'ils font naitre. Cette perspective amène à voir les mathématiques comme étant constamment en développement. Même si admises à titre de vérités et de finalités à un certain moment, à force d'être utilisées, elles sont constamment amenées à être réétudiées et retravaillées. Comme le souligne Lampert (1990) : « it is this vulnerability to reexamination that allows mathematics to grow and develop » (Lampert, 1990, p. 30),

Afin d'illustrer plus concrètement la perspective du zigzag sur le développement des mathématiques, un exemple tiré des écrits de Lakatos est utilisé. Dans son livre intitulé *Proofs and Refutations* (1976), le phénomène de zigzag est illustré à travers la simulation d'une discussion entre les personnages d'une classe. Bien qu'elle soit fictive, cette discussion veut retracer le développement historique de la formule d'Euler à travers diverses interactions entre des élèves et un enseignant. Voici une vignette qui résume un passage du livre (tiré de la version française traduite par Balacheff et Laborde parue en 1984).

Le théorème d'Euler pose pour tout polyèdre, que le nombre de sommets (S), le nombre d'arêtes (A) et le nombre de faces (F) sont en relation de la manière suivante : $S - A + F = 2.$ Cette relation est d'abord traitée à titre de conjecture et une preuve est présentée par l'enseignant. Certaines critiques sont adressées à la preuve présentée et un contre-exemple est proposé par l'élève nommé Alpha pour falsifier la conjecture elle-même. Cet élève propose de considérer le polyèdre suivant (Figure 3.1), un cube délimité par une paire de cubes imbriqués :

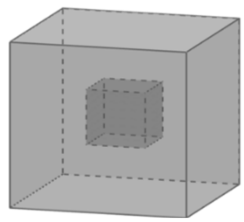


Figure 3.1 – Dessin du solide délimité par une paire de cubes imbriqués

> ALPHA : Imaginez un solide délimité par une paire de cubes emboîtés (deux cubes, l'un à l'intérieur de l'autre mais ne se touchant pas. […] En outre, pour chaque cube $S - A + F = 2$, donc pour le cube creux, $S - A + F = 4$. (p. 17)

Ce solide est proposé comme contre-exemple pour la conjecture initiale, puisqu'il montre un polyèdre pour lequel la relation $S - A + F = 2$ n'est plus valide. Elle devient $S - A + F = 4$. Cependant, ce contre-exemple est critiqué par un autre élève, Delta, qui conteste l'idée même que le solide proposé soit considéré à titre de polyèdre. Cela génère un débat entre Delta et Gamma, un autre élève, qui en vient à formuler différentes définitions de la notion de polyèdre. Voici un extrait de la discussion (pp. 18 – 19, italiques dans l'original).

> DELTA : Mais pourquoi accepter le contre-exemple? Nous avons prouvé notre conjecture, maintenant c'est un théorème. J'admets qu'elle se heurte à ce prétendu 'contre-exemple'. L'un ou l'autre doit céder. Mais pourquoi le théorème céderait-il alors qu'il a été prouvé? C'est la 'critique' qui doit battre en retraite, car elle est truquée, cette paire de cubes emboîtés n'est pas du tout un polyèdre. C'est un monstre, un cas pathologique, pas un contre-exemple.
>
> GAMMA : Pourquoi pas? *Un polyèdre est un solide dont la surface est constituée de faces polygonales.* Et mon contre-exemple est un solide limité par des faces polygonales.
>
> LE MAÎTRE : Appelons cette définition *Déf. 1*.
>
> DELTA : Votre définition est incorrecte. Un polyèdre est une *surface* : il y a des faces, des arêtes, des sommets, il peut être déformé, étiré sur un tableau et n'a rien a voir avec le concept de 'solide'. *Un polyèdre est une surface constituée d'un système de polygone.*
>
> LE MAÎTRE : Appelons cette définition *Déf. 2*.

Ainsi, la définition du contre-exemple (Déf. 1) présente la notion de polyèdre comme un solide qui est délimité par un ensemble de polygones. Cette définition est cohérente avec le solide proposé en contre-exemple (Figure 3.1). La seconde définition (Déf. 2) propose plutôt de voir un polyèdre non pas comme un solide, mais comme un système de polygones arrangés en une surface qui pourrait être dépliée. Selon cette seconde définition, le solide proposé n'est donc pas un contre-exemple, ce dernier s'avérant être deux polyèdres, puisqu'il présente deux surfaces déconnectées entre elles. Afin de se prêter au jeu, l'élève Alpha formule deux nouveaux contre-exemples qui, malgré le fait qu'ils respectent la seconde définition de Delta (Déf. 2), donnent la relation $S -$

$A + F = 3$ plutôt que $S - A + F = 2$. Les contre-exemples sont des polyèdres formés par deux tétraèdres connectés, soit par une arête (premier contre-exemple), soit par un sommet (second contre-exemple) (Figure 3.2). Ces nouveaux contre-exemples forcent Delta à raffiner pour une deuxième fois la définition en y ajoutant des clauses. Voici un extrait de la discussion qui s'en suit (pp. 19 - 20, italiques dans l'original) :

> LE MAÎTRE : Pour l'instant acceptons la définition *Déf. 2* de Delta. Pouvez-vous maintenant réfuter notre conjecture si par polyèdre nous entendons une surface?
>
> ALPHA : Certainement. Considérez deux tétraèdres qui on tune arête commune, ou considérez deux tétraèdres qui ont un sommet commun. Ce sont deux couples siamois, chacun ne constitue qu'une surface. Et vous pouvez calculer que dans les deux cas : $S - A + F = 3$.
>
> Le MAÎTRE : *Contres-exemples 2a et 2b*.
>
> DELTA : […] Il va de soi que je n'ai pas voulu dire que tout système de polygone est un polyèdre. Par polyèdre, j'entends un système de polygone tel que : (1) deux polygones et deux seulement sont adjacents à chaque arête ; (2) il est possible d'aller de l'intérieur d'un polygone à l'intérieur de n'importe quel autre par un chemin qui ne coupe jamais une arête en un sommet. Vos premiers siamois sont exclus par le premier critère de ma définition, vos seconds par le second critère.

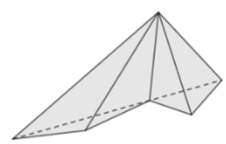


Figure 3.2 – Le contre-exemple des deux tétraèdres avec une arête en commun

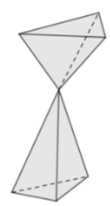


Figure 3.3 – Le contre-exemple des deux tétraèdres avec un sommet en commun.

Ici, les nouveaux contre-exemples d'Alpha ont forcé Delta à repenser la définition et à la raffiner pour qu'elle témoigne davantage de sa manière de concevoir la notion de polyèdre. Parce que les deux polyèdres proposés falsifient la conjecture de la relation $V - E + F = 2$, Delta redéfinit la notion de polyèdre en ajoutant deux clauses; deux amendements. Delta ajoute que dans tout polyèdre, (1) exactement deux polygones se rencontrent à chaque arête et (2) il est possible de tracer une route qui ne passe pas par une arête à un sommet à partir de l'intérieur de chaque polygone vers l'intérieur de n'importe quel autre polygone.

Cet extrait illustre la façon dont les mathématiques peuvent être conçues comme se développant en zigzags, entre conjectures et contre-exemples et entre définitions et redéfinitions. La conjecture initiale, accompagnée de sa preuve, génère le premier contre-exemple proposé par Alpha, soit le solide délimité par une paire de cubes imbriqués. À son tour, ce contre-exemple génère le besoin de définir avec exactitude la notion de polyèdre. Et comme le remarque Alpha, « Ainsi mon contre-exemple fait naître un nouveau concept de polyèdre » (Lakatos, 1984, p. 19). La notion de polyèdre s'en voit raffinée, par un zigzag entre une conjecture sur la relation entre les nombres de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre, un contre-exemple à cette conjecture et un débat qui a nécessité une définition plus minutieuse de la notion de polyèdre. Loin d'être terminé, ce zigzag se poursuit avec l'apport de deux nouveaux contre-exemples, soit les polyèdres formés par deux tétraèdres connectés, le premier par une arête et le second par un sommet qui à la fois s'appuient sur la nouvelle définition formulée, à la fois falsifient la conjecture. À nouveau, cela génère de nouvelles définitions qui appellent de nouvelles notions qui sont à leur tour examinées minutieusement. Ainsi, sur le plan mathématique, la notion de polyèdre s'en retrouve approfondie. Le schéma suivant (Figure 3.4) illustre le zigzag qu'il est possible de dégager de l'exemple ci-dessus.

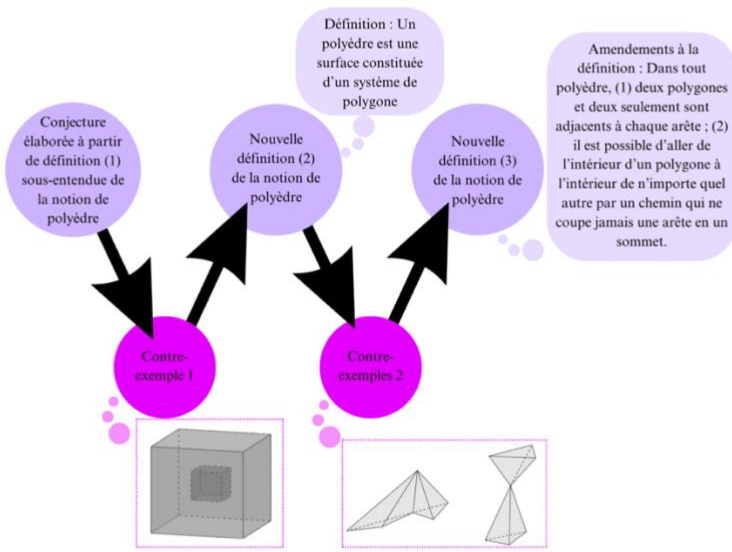


Figure 3.4 – Zigzag entre les définitions de polyèdre proposées par Delta

Dans cet extrait, la conjecture et sa preuve portent toutes les deux sur la notion de polyèdre et les contre-exemples invitent à redéfinir cette même notion. Cependant, les travaux de Lakatos soutiennent aussi que de faire des mathématiques peut générer des réalisations et des discussions sur des notions mathématiques différentes de celles directement mobilisées, notamment parce qu'elles en sont au fondement. Voici un deuxième extrait tiré du livre, qui illustre ce caractère inattendu produit durant ce zigzag.

> Sur la base de la dernière définition de Delta, Gamma propose un nouveau contre-exemple. Il s'agit du polyèdre étoilé de Kepler (Figure 3.5). Lorsque celui-ci est considéré comme étant construit par douze pentagones étoilés (Figure 3.6), il donne la relation $S - A + F = -6$. Cela force le besoin de définir avec plus de finesse non pas la notion de polyèdre, mais plutôt la notion de polygone, puisque de considérer le polygone étoilé comme un polygone ne fait pas l'unanimité dans le groupe, notamment auprès de Delta. Voici un dernier extrait de la discussion (pp. 18-19, italiques dans l'original).

Figure 3.5 – Polyèdre étoilé (Ursin) de Kepler avec chaque face d'une couleur différente

DELTA : Pourquoi pensez-vous que votre 'hérisson' est un polyèdre?

GAMMA : Ne le voyez-vous pas? C'est un polyèdre dont les faces sont 12 pentagones étoilés. Il satisfait à votre dernière définition : 'c'est un système de polygone arrangé de telle façon que : (1) *deux polygones et deux seulement sont adjacents à chaque arête ;* (2) *il est possible d'aller de l'intérieur d'un polygone à l'intérieur de n'importe quel autre par un chemin qui ne coupe jamais une arête en un sommet.*

DELTA : Mais alors vous ne savez même pas ce qu'est un polygone! Un polygone étoilé n'en est sûrement pas un! *Un polygone est un système d'arêtes arrangées de telle façon que :* (1) *deux arêtes et deux seulement sont adjacentes à chaque sommet ; (2) les arêtes n'ont pas de points communs en dehors des sommets.*

LE MAÎTRE : Appelons cette définition *Déf. 4*.

GAMMA : Je ne vois pas pourquoi vous ajoutez la seconde condition. La définition correcte d'un polygone ne devrait comprendre que la première.

LE MAÎTRE : *Déf. 4'*.

GAMMA : La seconde définition n'a rien à voir avec l'essence même d'un polygone. Regardez : si je soulève un peu une arête, le pentagone étoilé est encore un polygone même à votre sens. Vous imaginez qu'un polygone doit pouvoir être tracé à la craie sur un tableau, tandis que vous devriez l'envisager comme un assemblage de tiges : il est clair que ce que vous pensez être un point commun n'est pas vraiment un seul et unique point, mais deux points différents placés l'un au-dessus de l'autre. Vous êtes induit en erreur par le fait de tracer le polygone dans un plan. Vous devez le laisser déployer ses tiges dans l'espace!

DELTA : Accepteriez-vous de me dire ce qu'est *l'aire* d'un polygone étoilé? Ou, prétendriez-vous que certains polygones n'ont pas d'aire?

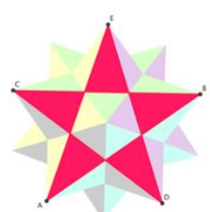


Figure 3.6 – Pentagone étoilé servant à construire l'Ursin de Kepler

GAMMA : N'est-ce pas justement vous qui disiez qu'un polyèdre n'a rien à voir avec la notion de solidité? Pourquoi suggérez-vous maintenant que la notion de polygone soit rattachée à la notion d'aire? Nous sommes d'accord pour dire qu'un polyèdre est une surface fermée, avec des arêtes et des sommets, alors pourquoi ne pas s'entendre sur le fait qu'un polygone est simplement une courbe fermée, avec des sommets? Mais comme vous vous entêtez dans votre idée, j'ai bien l'intention de définir l'aire d'un polygone étoilé.

Dans cet extrait, parce que les contre-exemples précédents ont été rejetés par la redéfinition de la notion de polyèdre, les nouveaux contre-exemples en deviennent plus sophistiqués. Ils respectent des définitions de plus en plus rigoureuses, comme le contre-exemple du polyèdre étoilé de Kepler. Celui-ci, étant ancré dans l'existence d'un pentagone étoilé, a généré un débat sur la nature même d'un polygone. Ici, c'est la notion de polygone qui accroche, alors c'est elle qui est retravaillée. Des définitions de la notion de polygone sont élaborées et argumentées, ce qui a permis de l'éclaircir et de la raffiner. Plus précisément, Delta définit un polygone comme étant un système d'arêtes dans lequel (1) à chaque sommet, exactement deux arêtes se rencontrent et (2) les arêtes n'ont pas de points communs autres que les sommets. Gamma propose plutôt une définition du polygone qui ne contient que la première affirmation de Delta, puisque les polygones seraient à voir dans l'espace et non le plan et que les croisements au cœur des arêtes ne sont en réalité pas des intersections, le pentagone étoilé n'ayant que cinq sommets. Cet épisode illustre un exemple dans lequel alors qu'une conjecture et sa preuve portent sur une certaine notion, ici les polyèdres, les remises en question amènent le besoin de raffiner une autre notion, ici les polygones.

Mis ensemble, ces extraits illustrent un zigzag initié par une conjecture et sa preuve sur la relation entre le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de tout polyèdre. Ils mettent en lumière comment une conjecture et sa preuve peuvent générer des contre-exemples, qui, un après l'autre, forcent à remettre en question les mathématiques utilisées dans la preuve, soit les notions de polyèdre en premier et de polygone en deuxième. De manière continuelle, de nouveaux contre-exemples sont trouvés, qui respectent des définitions qui se veulent de plus en plus « infaillibles », ce qui incite en retour à repenser les définitions. Ici, il s'agit d'un zigzag entre conjecture et contre-exemple, qui retravaille plusieurs définitions. Plusieurs autres éléments intègrent le zigzag, notamment les preuves et les réfutations qui font naitre des théorèmes, des propositions et des axiomes et pour Lakatos, les mathématiques se développent à l'image de cette situation. Il s'agit d'un travail s'appuyant sur les mathématiques déjà produites qui avance en étant ouvert à requestionner ce sur quoi il repose. C'est en ce sens que l'utilisation des mathématiques par la communauté peut faire naitre des réalisations, qui, lorsqu'abordées, peuvent amener à transformer les mathématiques elles-mêmes.

À travers l'exemple du théorème d'Euler, Lakatos offre une vision des manières dont les mathématiques peuvent avancer suite à une réalisation. Par exemple, dans les vignettes présentées précédemment, le contre-exemple du solide délimité par une paire de cubes imbriqués (Figure 3.1) est à voir comme une réalisation faite par Delta, qui a généré une redéfinition de la notion de polyèdre. Il en est de même pour les deux contre-exemples qui l'ont suivi, soit les polyèdres formés par deux tétraèdres connectés, un premier par une arête (Figure 3.2) et un second par un sommet (Figure 3.3). Ces trois contre-exemples sont à voir comme des réalisations faites par Delta, qui génèrent tour à tour de nouvelles définitions de la notion de polyèdre.

Dans cet exemple, les mathématiques ont ainsi avancé à travers la *redéfinition* des concepts en jeu. Une analyse de la suite du déroulement de l'évènement sut la formule d'Euler permet d'identifier d'autres manières proposées par Lakatos sur la façon dont les mathématiques avancent dans la discipline. Au total, dix types d'avancements des mathématiques sont répertoriés. Ceux-ci sont présentés dans le Tableau 3.1[4].

Tableau 3.1 – Type d'avancements des mathématiques répertoriés dans Lakatos

Avancement des mathématiques	Description tirée de Lakatos (1976)
Établissement d'une certitude	La preuve fait gagner en certitude la conjecture, lui donnant ainsi le statut de théorème (p. 11).
Amélioration	La preuve se bute à un contre-exemple, qui pousse en retour à : « améliorer la preuve en remplaçant le lemme faux par un autre obtenu en le modifiant légèrement, et non réfutable par [le] contre-exemple. » (p. 14). Le contre-exemple témoigne parfois d'aspects inattendus qui permettent d'affiner la preuve et la conjecture (p. 53).
Généralisation	Après avoir imaginé une preuve sur un domaine sûr, la vérification de chaque lemme peut révéler des potentiels pour élargir la conjecture et sa preuve (p. 48).
Renonciation	La preuve se bute à un contre-exemple, qui pousse à renoncer à la conjecture (p. 18).
Redéfinition	La preuve se bute à un contre-exemple, qui pousse à (re)définir précisément la notion mathématique de façon que le contre-exemple n'en soit pas un. (pp. 18-30).
Restriction	La preuve se bute à un contre-exemple, qui pousse à réduire le domaine de validité de la conjecture en ajoutant une restriction. De cette manière, la preuve et la conjecture restent vraies pour un certain domaine de validité réduit (p. 38).
Réinterprétation	La preuve se bute à un contre-exemple, qui pousse à définir autrement les notions mathématiques utilisées dans le contre-exemple pour le rectifier et le transformer en exemples. (pp. 39-40).
Transformation	L'inaptitude à résoudre un problème et à faire une preuve (ou possiblement le fait d'envisager une possibilité) pousse « à abandonner le problème d'origine dans le cours de sa résolution et à le remplacer par un autre » (p. 86) qui se veut plus facile à résoudre.
Accroissement	La preuve se bute à un contre-exemple (ou tombe possiblement sur un nouveau concept mathématique) qui pousse l'investigation de son fonctionnement et permet ainsi d'accéder à une variété de contre-exemples (ou concepts), qui se traduisent possiblement en un nouveau domaine de mathématiques (pp. 98-106).
Extension	La preuve pousse à remplacer les concepts mathématiques dits naïfs en *proof-generated concepts*, c'est-à-dire en concepts mathématiques formés dans la preuve. Ce sont ces nouveaux concepts qui sont utilisés pour faire la preuve (p. 114).

[4] Dans ce tableau, les pages dans *Proofs and Refutations* (Lakatos, 1976) sont indiquées entre parenthèses, pour montrer un exemple de l'avancement des mathématiques.

3.1.2 Apport de la perspective du zigzag pour le développement des compréhensions individuelles

Par le biais d'une analogie entre mathématiques disciplinaires et mathématiques individuelles, les travaux de Lakatos (1976) rendent possible une perspective sur le développement des compréhensions mathématiques individuelles. À ce moment, le développement des compréhensions mathématiques d'une personne est à voir comme étant un processus de zigzag entre des compréhensions mathématiques tenues comme vraies par la personne et les réalisations qui émergent de leur utilisation. En utilisant des compréhensions pour faire des mathématiques, la personne peut faire une réalisation sur ses compréhensions (par exemple, trouver des incohérences ou réaliser le potentiel d'une idée). Cette personne peut-être amenée à examiner à nouveau les compréhensions et les pistes d'idées qui émergent de leur utilisation, et, possiblement, à transformer quelque chose. La Figure 3.7, présente un exemple de zigzag analogue à celui présent dans la discipline mathématique au niveau des compréhensions mathématiques individuelles. Les compréhensions mathématiques d'une personne sont ainsi à la fois finales à des moments spécifiques, à la fois promptes à évoluer à travers les réalisations qui en émergent lorsqu'elles sont utilisées.

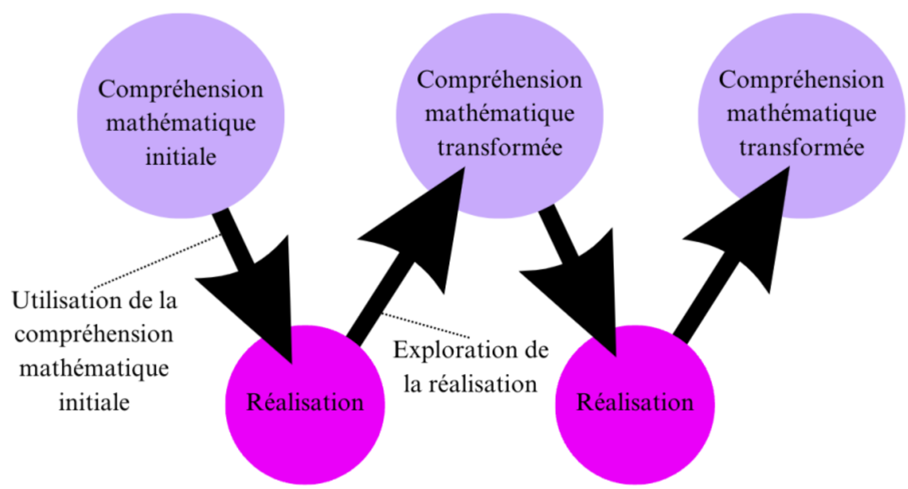


Figure 3.7 – Développement des compréhensions mathématiques sous forme de zigzag

Dans cette analogie, les réalisations qui émergent en faisant des mathématiques sont à voir comme provenant de la personne qui fait des mathématiques. Si leurs origines découlaient de quelqu'un d'autre, qu'une remise en question ou en potentiel était proposé par quelqu'un d'autre par exemple, c'est l'action de les intégrer comme si elles provenaient d'elle-même qui est vu comme générant un avancement des compréhensions. En ce sens, le développement des compréhensions individuelles peut être vu comme se faisant de façon analogue à celui des mathématiques de la discipline, c'est-à-dire relatif aux dix types d'avancements mathématiques dépistés dans les travaux de Lakatos. Ces avancements sont présentés dans le Tableau 3.2, cette fois-ci sur le plan individuel.

Tableau 3.2 – Type d’avancements des compréhensions mathématiques sur le plan individuel

Avancements des compréhensions	Traduction sur le plan des compréhensions individuelles
Établissement d’une certitude	L’utilisation d’une compréhension mathématique la fait gagner en certitude.
Amélioration	L’utilisation d’une compréhension mathématique se bute à une remise en question, qui pousse au remplacement d’une compréhension mathématique considérée inadéquate par une autre obtenue en la modifiant légèrement afin qu’elle ne fasse plus l’objet de cette remise en question.
Généralisation	Une vérification des compréhensions mobilisées peut révéler des potentiels pour généraliser, ce qui pousse au remplacement d’une compréhension mathématique adéquate, mais spécifique, par une autre obtenue en la modifiant légèrement afin d’actualiser un potentiel de généralisation.
Renonciation	L’utilisation d’une compréhension mathématique se bute à une remise en question, qui pousse à renoncer aux compréhensions mathématiques utilisées.
Redéfinition	L’utilisation d’une compréhension mathématique se bute à une remise en question ou révèle un potentiel, qui pousse à (re)définir précisément quelque chose de façon que la remise en question n’en soit pas une ou que le potentiel soit exploré. Cette redéfinition sert à conserver l’idée, mais de manière redéfinie, dans le cas d’une remise en question et à l’élargir dans le cas du potentiel.
Restriction	L’utilisation d’une compréhension mathématique se bute à une remise en question, qui pousse à formuler une nouvelle restriction pour accepter la compréhension mathématique utilisée, mais sur un domaine mathématique restreint, permettant de la conserver sur ce nouveau domaine.
Réinterprétation	L’utilisation d’une compréhension mathématique se bute à une remise en question, qui pousse à comprendre autrement les idées mathématiques utilisées dans la remise en question de manière à ce qu’elle concorde avec et appuie l’utilisation des compréhensions mathématiques.
Transformation	Soit l’inaptitude à résoudre un problème, soit l’émergence d’un nouveau potentiel, pousse à abandonner la tâche pour en concevoir une autre plus facile à accomplir au moyen des compréhensions entrevues
Accroissement	L’utilisation d’une compréhension mathématique se bute à une remise en question ou tombe sur un nouveau potentiel, qui pousse à l’investigation de son fonctionnement. Cela permet d’accéder à une variété de remises en question ou de potentiels (soit des compréhensions), qui se traduisent possiblement en un nouveau domaine de compréhensions mathématiques.
Extension	L’utilisation de compréhensions mathématiques pousse à les remplacer en compréhensions mathématiques pensées pour la tâche, c’est-à-dire en compréhensions formées dans la tâche et qui servent à accomplir la tâche.

3.1.3 Apports de la perspective du zigzag pour la dialectique explications-compréhensions

La perspective du zigzag peut être mobilisée pour donner un sens à la façon dont les explications jouent un rôle dans le développement des compréhensions de la personne qui explique, et en retour pour éclairer le déploiement de la dialectique explications-compréhensions. Lampert (1990), qui applique les travaux de Lakatos (1976) à la classe de mathématiques, souligne que chez les mathématiciens, la mise en route du développement des compréhensions individuelles se déploie en contexte d’explication. Plus précisément, elle souligne que le processus d'en venir à connaitre des mathématiques (*coming to know*) se met en route dans l'action de décrire, d'argumenter et de justifier ses travaux à un autre collègue.

> Lakatos demonstrated that this zig-zag between revising conclusions and revising assumptions in the process of coming to know occurred both in the work of individual mathematicians as they exposed their work to their colleagues and over time as conclusions that had been unquestioned in the past were reconsidered (Lampert, 1990, p. 30)

La perspective du zigzag amène ainsi à concevoir le développement des compréhensions mathématiques d'une personne comme pouvant être mis en route dans l'action de les expliquer. Les explications sont vues comme une utilisation de compréhensions mathématiques qui permettent d'expliquer. Étant donné que l'utilisation de ces compréhensions peut générer des réalisations qui les font avancer, l'action d'expliquer s'en retrouve vue comme un moteur pouvant générer des réalisations chez la personne qui explique.

L'émergence de ces réalisations mathématiques à travers l'action d'expliquer se justifie et s'approfondit par l'ancrage conceptuel développé au Chapitre 2 sur la dialectique explications-compréhensions. Notamment, il a été proposé que l'action de transformer une compréhension mathématique individuelle pour la rendre communicable peut être vue comme l'insérant dans un cadre différent, soit celui des explications. Celui-ci contient une multitude de règles associées au langage, dont la cohérence, la continuité et la complétude. Il est possible d'y voir dans l'action de façonner une compréhension mathématique pour la rendre communicable, un processus de compréhension qui peut engendrer une réalisation, puisqu'il applique de telles règles sur elle. En plus, il a été avancé que l'action d'expliquer puisse être conçue comme une analyse des compréhensions expliquées, qui sert à en éclaircir les éléments qui pourraient ne pas être compris par l'interlocuteur. Cette analyse des compréhensions expliquées peut être considérée comme engendrant une familiarisation avec elles. Ce faisant, cette analyse peut inciter à former de nouveaux liens et à retracer des caractéristiques mathématiques qui font partie de ses compréhensions. Ceci donnerait alors de plus en plus de moyens pour reconnaître un potentiel ou une remise en question. Finalement, une autorégulation des explications a été mise de l'avant. Celle-ci peut être vue comme une évaluation en temps réel des explications. Il a été proposé que cette évaluation porte sur deux plans. Sur le plan des compréhensions de la personne qui explique, cette évaluation détermine si les compréhensions mathématiques expliquées sont bel et bien valides. Sur le plan de ses explications, cette évaluation examine si les explications atteignent leur objectif de faire comprendre ce qui est expliqué à l'interlocuteur. Une telle évaluation, qui est conduite grâce à un processus de compréhension mathématique, peut être vue comme produisant des réalisations sur les compréhensions expliquées et sur la manière de les expliquer. Ces réalisations permettent en retour de moduler les explications selon les nouvelles idées qu'elles contiennent.

Cette perspective offre en plus un regard approfondi sur les manières dont les compréhensions avancent à travers les explications, c'est-à-dire sur ce qu'une réalisation survenant au cours d'une explication engendre pour les compréhensions mathématiques de la personne qui explique. Les dix types d'avancements dont les compréhensions individuelles peuvent avancer (qui ont été répertoriées à l'aide de leur analogue disciplinaire et qui sont présentées au Tableau 3.2) peuvent être réinterprétés en contextes d'explications. Elles sont détaillées dans le Tableau 3.3 ci-dessous. Dans la perspective dialectique, explications et compréhensions sont vues comme étant prises ensemble et se déployant à travers l'autre. Les avancements faits à travers les réalisations générées par l'action d'expliquer peuvent ainsi être vus comme étant sur les plans conjoints des explications et des compréhensions.

Tableau 3.3 – Type d'avancements des compréhensions dans une démarche d'explication

Avancements des compréhensions	Réinterprétation en contexte d'explication
Établissement d'une certitude	L'explication d'une idée fait gagner l'explication et la compréhension mathématique expliquée en certitude.
Amélioration	Les explications se butent à une remise en question, qui pousse au remplacement d'une des compréhensions mathématiques utilisées, et considérée inadéquate, par une autre obtenue en la modifiant légèrement afin qu'elle ne fasse plus l'objet de cette remise en question. Ce développement d'une compréhension mathématique permet de nouvelles explications qui n'admettent plus la remise en question.
Généralisation	Une vérification des compréhensions mobilisées pour expliquer peut révéler des potentiels pour généraliser les compréhensions mathématiques et les explications. En retour, cela pousse au remplacement d'une compréhension mathématique adéquate, mais spécifique, par une autre obtenue en la modifiant légèrement afin d'actualiser un potentiel de généralisation.
Renonciation	Les explications se butent à une remise en question, qui pousse à renoncer aux explications et/ou aux compréhensions mathématiques expliquées. Cette renonciation permet d'arrêter une explication maintenant jugée inadéquate.
Redéfinition	Les explications se butent à une remise en question ou révèle un potentiel, qui pousse à (re)définir précisément quelque chose de façon que la remise en question n'en soit pas une ou que le potentiel soit exploré. Cette redéfinition sert à conserver l'idée, mais de manière redéfinie, dans le cas d'une remise en question et à l'élargir dans le cas du potentiel.
Restriction	Les explications se butent à une remise en question, qui pousse à formuler une nouvelle restriction qui permet de les accepter, mais sur un domaine mathématique restreint. Cette restriction conserve l'idée expliquée sur ce nouveau domaine restreint.
Réinterprétation	Les explications se butent à une remise en question, qui pousse à comprendre autrement les idées mathématiques utilisées dans la remise en question de manière à ce qu'elle concorde avec et appuie les explications données.
Transformation	Soit l'inaptitude à faire comprendre quelque chose en l'expliquant, soit l'émergence d'un nouveau potentiel, pousse à abandonner les explications initiales et/ou les compréhensions dont elles témoignent pour à se lancer dans une nouvelle explication qui se veut plus facile à comprendre ou simplement, différentes. Celles-ci nécessitent le développement d'une compréhension mathématique ou l'organisation d'une nouvelle manière d'expliquer. Cette transformation permet une explication qui se veut plus facile à comprendre.

Accroissement	Les explications se butent à une remise en question ou tombent sur un nouveau potentiel, qui pousse à l'investigation de son fonctionnement. Cela permet d'accéder à une variété de remises en question ou de potentiels (soit des compréhensions), qui se traduisent possiblement en un nouveau domaine de compréhensions mathématiques. Cet accroissement permet d'expliquer plus profondément la remise en question ou le potentiel.
Extension	Les explications poussent à remplacer les compréhensions mathématiques expliquées en compréhensions mathématiques pensées pour expliquer, c'est-à-dire en compréhensions formées dans les explications qui servent les explications.

3.2 Perspective du bricolage sur la dialectique explications-compréhensions

Dans l'objectif de creuser davantage sur les mécanismes spécifiques avec lesquels la formulation d'explications génère l'émergence de réalisations sur le plan mathématique, et donc de nouvelles compréhensions mathématiques, une seconde perspective sur la dialectique explications-compréhensions est introduite, soit celle du bricolage, inspirée des travaux de Papert (1972, 1990, 1993), qui s'appuient pour leur part sur ceux de Lévi-Strauss (1962). Cette seconde perspective insiste davantage sur la nature des réalisations et sur les raisons pour lesquelles elles surviennent.

3.2.1 Travaux de Papert et Lévi-Strauss sur développement de compréhensions mathématiques

Les travaux de Papert (1972, 1990, 1993) sur le développement des compréhensions mathématiques sont ancrés dans une vision de l'expertise mathématique influencée par l'apport de l'ordinateur et de la programmation informatique. Papert fait de l'ordinateur non seulement un moyen pour apprendre et faire des mathématiques, mais surtout un moyen pour les penser. Pour lui, le développement des compréhensions mathématiques sur le plan individuel est situé dans l'activité mathématique, dans l'action de *faire* des mathématiques : l'expertise d'un mathématicien ne témoigne pas de la connaissance d'un grand nombre d'informations mathématiques ou même de bonnes compréhensions de phénomènes mathématiques, mais plutôt d'une capacité à faire des mathématiques et à s'engager dans la résolution d'un problème mathématique. Cette expertise, cette capacité, émerge dans l'action : celle de faire des mathématiques ou de résoudre un problème mathématique. Pour Papert (1972), dans l'action de faire des mathématiques, la personne développe quelque chose qui s'ajoute à ses compréhensions mathématiques et qui permet de les dépasser. Comme le rapportent Barabé et Proulx (2017), Papert discute du développement de « manières mathématiques de penser » (*Mathematical Ways of Thinking*).

> Papert suggère qu'en devenant mathématicien une personne développe quelque chose de plus puissant qu'une connaissance de contenus mathématiques. Cette chose est ce qu'il appelle les manières mathématiques de penser (MWOT : *Mathematical Ways of Thinking*). Faire des mathématiques permet de développer des manières de penser particulières qui forgent l'esprit mathématique de ceux qui en font. (Barabé et Proulx, 2017, p. 26, italiques dans l'original)

Afin de développer ses idées sur le développement des compréhensions mathématiques et des manières mathématiques de penser, Papert se dote d'une analogie : celle de la programmation informatique. C'est à travers la programmation qu'il discute de la mise en route du développement des compréhensions et des manières mathématiques de penser chez un individu. Notamment, il fait remarquer que dans l'action de programmer, la personne est amenée à construire quelque chose de concret et d'appréciable par quelqu'un d'autre, c'est-à-dire un programme informatique. Selon lui, le développement des compréhensions mathématiques individuelles se met en route de manière particulièrement importante lorsque la personne construit des mathématiques qui peuvent être partagées et appréciées par autrui : « It then adds the idea that [the learning] happens especially felicitously in a context where the learner is consciously engaged in constructing a public entity, […] » (Papert et Harel, 1991, p. 1). Pour décrire finement la manière dont la construction d'un programme informatique permet le développement des compréhensions et des manières de faire, ainsi que les implications qui en découlent, Papert (1993) fait appel à la notion de *bricolage* de l'anthropologue Claude Lévi-Strauss (1962). Ce qui suit maille et organise les perspectives de Papert et de Lévi-Strauss en quatre thèmes importants : le bricolage, la programmation, les bogues de programmation et le débogage.

3.2.1.1 Bricolage

Pour Papert (1993), à l'image d'un bricoleur qui construit ou répare un objet, programmer signifie imaginer une stratégie pour construire quelque chose avec les matériaux et les outils à sa disposition. Bricoler, c'est combiner ces outils et en élaborer de nouveaux pour continuer à avancer dans la construction.

> *Bricolage* is a metaphor for the ways of the old-fashioned travelling tinker, the jack-of-all-trades who knocks on the door offering to fix whatever is broken. Faced with a job, the tinker rummages in his bag of assorted tools to find one that will fit the problem at hand and, if one tool does not work for the job, simply tries another without ever being upset in the slightest by the lack of generality. (Papert, 1993, p. 144, italiques dans l'original)

Le bricoleur dépeint ici a une expertise particulière. Celle de construire, de développer, voire d'inventer à partir de la spécificité de la situation et à partir de son expérience et de ses manières de faire. Il se laisse guider par ses idées, qui proviennent autant de la tâche que de son expérience de bricoleur, et ne suit pas de méthode fixe ou de plan préétabli. Par exemple, pour se lancer dans la tâche de fabriquer une chaise, en plus de n'utiliser que les outils et matériaux dont il dispose, le bricoleur se fie sur l'expertise acquise en construisant d'autres chaises et d'autres meubles, ainsi que sur ses compréhensions de ce qu'est une chaise, de sa nature et de ce qu'elle exige. Papert s'inspire des écrits de Lévi-Strauss (1962), qui décrit lui-même le bricoleur de la manière suivante :

> Le bricoleur est apte à exécuter un grand nombre de tâches diversifiées ; mais à la différence de l'ingénieur, il ne subordonne pas chacune d'entre elles à l'obtention de matières premières et d'outils conçus et procurés à la mesure de son projet : son univers instrumental est clos et la règle de son jeu est de s'arranger avec les « moyens du bord », c'est-à-dire un ensemble à chaque instant fini d'outils et de matériaux, hétéroclites au surplus, parce que la composition de l'ensemble n'est pas en rapport avec le projet du moment, ni d'ailleurs aucun projet en particulier, mais est le résultat contingent de toutes les occasions qui se sont présentées de renouveler ou d'enrichir le stock, ou de l'entretenir avec les résidus de constructions et de destructions antérieures. L'ensemble des moyens du bricoleur n'est donc pas définissable par un projet (ce qui supposerait d'ailleurs, comme chez l'ingénieur, l'existence d'autant d'ensembles instrumentaux que de genres de projets, au moins en théorie) ; il se définit seulement par son instrumentalité […] (Lévi-Strauss, 1962, p. 31)

Comme le présente la citation ci-dessus, le bricoleur est contrasté avec l'ingénieur. L'ingénieur est décrit comme réalisant un projet en utilisant des outils spécifiquement pensés pour la tâche. À l'inverse, le bricoleur est décrit comme s'engageant dans un projet avec les outils et l'expertise dont il dispose, mais qui ne sont pas pensés spécifiquement pour la tâche. Ce sont plutôt un ensemble d'outils et de matériaux utilisés et accumulés dans la vie du bricoleur. De plus, le bricoleur construit son bricolage à partir des spécificités qui émergent en cours de route. Il entre en dialogue avec la tâche. En effet, dans la construction de quelque chose, le bricoleur est amené, à plusieurs reprises, à évaluer les possibilités qui émergent des résultats intermédiaires de son bricolage en cours et de s'engager avec et dans une, ou plusieurs, de ces possibilités. Par exemple, le bricoleur qui construit une chaise est amené, au cours de la construction, à prendre un pas de recul, à évaluer l'état d'avancement du bricolage de la chaise, et à orienter la suite du bricolage selon les possibilités qu'il conçoit. À ce sujet, Lévi-Strauss affirme :

> Regardons-le [bricoleur] à l'œuvre : excité par son projet, sa première démarche pratique est pourtant rétrospective : il doit se retourner vers un ensemble déjà constitué, formé d'outils et de matériaux ; en faire, ou en refaire, l'inventaire ; enfin et surtout, engager avec lui une sorte de dialogue, pour répertorier, avant de choisir entre elles, les réponses possibles que l'ensemble peut offrir au problème qu'il pose. (Lévi-Strauss, 1962, p. 32)

Ainsi, la notion de bricolage renferme implicitement l'idée que ce qui est bricolé envoie une *rétroaction* au bricoleur. Il construit quelque chose, en partie ou en totalité, et le quelque chose (ré-)agit, en retour, d'une certaine manière. Et cette manière d'agir rend envisageables des « possibilités » pour la suite du bricolage.

3.2.1.2 Programmation

Pour Papert (1993), la programmation revient au bricolage d'un programme informatique. La personne qui programme s'y engage en improvisant une stratégie à partir des matériaux et outils à sa disposition, qui, d'ordres intellectuels ou informatiques, ne sont pas ou n'ont pas été nécessairement pensés pour concevoir ce programme de manière spécifique. Le programmeur se fie sur ses manières de faire et sur ses compréhensions mathématiques et de programmation informatique pour y arriver. Il entre en dialogue avec l'ordinateur pour en tirer des rétroactions spécifiques qui l'aideront à continuer la construction du programme informatique. Par exemple, une personne qui développe un programme dans lequel elle doit faire une liste et choisit de nommer le premier élément n_0 ne programmera pas de la même manière, sur le plan mathématique, que si elle choisit de nommer ce premier élément n_1. L'avancement du programme informatique peut même initier de nouvelles idées qui permettront au programmeur de s'engager dans différentes possibilités au cours de la programmation, ce qui peut résulter en un programme différent de celui qui était anticipé. Ce dialogue entre l'ordinateur et le programmeur est d'une importance particulière pour Papert et est abordé par un angle quelque peu différent que dans les travaux sur le bricolage de Lévi-Strauss (1962). Alors que Lévi-Strauss se concentre sur la mise en route de ce dialogue à travers les *possibilités* de bricolage qui émergent en cours de route et qui permettent d'ajuster la construction, Papert converge plutôt sur la mise en route de ce dialogue à travers les *erreurs* et les *ajustements* qui en émergent. En ce sens, pour ce mémoire, ces deux perspectives sont vues comme complémentaires.

Pour discuter de ce dialogue entre l'objet bricolé et le bricoleur, et plus spécifiquement entre le programme en cours de construction et le programmeur, Papert (dans Papert et Turkle, 1993) aborde l'approche du bricolage en la contrastant avec une approche dite de planification, de la même manière que Lévi-Strauss fait un contraste entre le bricoleur et l'ingénieur. Papert et Turkle décrivent l'approche de planification comme étant caractérisée par l'action de suivre une méthode, de morceler les tâches en sous-tâches et d'appliquer les procédures appropriées. L'approche de planification conçoit la programmation comme une activité individuelle dans laquelle le programmeur se dégage de l'ordinateur pour subdiviser la tâche en morceaux et faire la résolution de chaque partie de manière isolée en se dotant de méthodes pour y arriver. À ce moment, les erreurs ne sont pas vues comme des étapes de construction, mais plutôt comme des fautes dans l'application d'une procédure ou comme des faiblesses dans la méthode utilisée. À l'inverse, l'approche du bricolage conçoit la programmation comme une activité en collaboration avec l'ordinateur, dans laquelle le programmeur se lance dans la résolution de la tâche par l'entremise de tests. Le programmeur bâtit alors un programme fondé sur chaque résultat intermédiaire obtenu. Sur cela, Papert et Turkle affirment :

> The bricoleur resembles the painter who stands back between brushstrokes, looks at the canvas and only after this contemplation, decides what to do next. For planners, mistakes are missteps; for bricoleurs they are the essence of a navigation by mid-course corrections. For planners, a program is an instrument for premeditated control; bricoleurs have goals, but set out to realize them in the spirit of a collaborative venture with the machine (Papert et Turkle, 1993, p. 93).

Dans l'approche de bricolage, il arrive au programmeur de faire des erreurs et de devoir recommencer certaines parties, ce qui est un élément clé du bricolage selon Papert et Turkle. Comme l'objectif n'est pas de reproduire un résultat particulier obtenu par une méthode précise, mais plutôt simplement de construire un programme fonctionnel avec des compréhensions qui sont à portée de main, les erreurs représentent des étapes inévitables qui renforcent la démarche de bricolage. Plus précisément, Papert invite à concevoir l'erreur en programmation à titre de *bogue de programmation*.

3.2.1.3 Bogue de programmation

Un bogue de programmation peut être défini comme étant une dissonance entre l'intention du programmeur et la rétroaction obtenue de la part de l'ordinateur. En effet, alors qu'un ordinateur exécute *exactement* le programme tel qu'il a été rédigé par le programmeur, le résultat qui en émerge ne correspond pas nécessairement aux attentes du programmeur. L'ordinateur peut renvoyer quelque chose d'inattendu, montrant qu'un ajustement est nécessaire. Afin d'exemplifier la notion de bogue en programmation, Papert (1972) réfère à l'environnement informatique de la Tortue appuyé par le langage de programmation Logo. Dans cet environnement informatique, il y a une tortue qui est dotée d'une position et d'une orientation. Il est possible de programmer une séquence d'indications qui sont effectuées par la tortue au lancement du programme. Par exemple, « avance d'un certain nombre de pas », « tourne à droite d'un certain nombre de degrés » ou encore « laisse une trace ». Ces indications résultent en l'apparition de différentes formes géométriques à l'écran relatives à ces indications.

Voici un exemple typique de bogue de programmation pour Papert (exemplifié dans Tremblay, 2017, pp. 44-45). Dans l'environnement de la Tortue, il est souvent proposé à l'élève de tracer des formes géométriques connues pour l'aider à s'y familiariser. Ainsi, un élève souhaitant tracer un triangle équilatéral dans cet environnement informatique peut être amené à rédiger un programme similaire au suivant :

Avancer de 100 pas	Tourner à droite de 60 degrés	Avancer de 100 pas	Tourner à droite de 60 degrés	Avancer de 100 pas	Tourner à droite de 60 degrés

Comme le remarque Tremblay, ce programme inspiré des propriétés formelles d'un triangle équilatéral n'en trace pas un : il trace plutôt la moitié d'un hexagone régulier, tel que présenté à la Figure 3.8 (reproduction inspirée de Tremblay, 2017, p. 44 et généré à partir du simulateur de Logo nommé : Le langage Logo (http://lwh.free.fr/pages/prog/logo/logo.htm). Cette forme constitue un bogue pour le programmeur, qui s'attendait à voir apparaître un triangle équilatéral. Papert a un intérêt particulier pour ce qui se produit ensuite, et c'est ce qu'il appelle l'étape essentielle du *débogage*.

Figure 3.8 – Tentative de construction d’un triangle équilatéral dans la géométrie de la tortue

3.2.1.4 Débogage

Le débogage est une démarche qui décrit l’ensemble des actions déployées par le programmeur afin de réharmoniser le programme avec ses attentes. Par exemple, en voyant se tracer un demi-hexagone régulier, le programmeur peut être incité à transformer les indications programmées afin que la tortue trace réellement un triangle équilatéral. Pour trouver des directives qui fonctionnent, le programmeur doit développer de nouvelles indications : il vérifie les anciennes et les ajuste afin de découvrir une manière de créer un angle intérieur de 60° comme dans un triangle équilatéral. Dans ce cas, il se sert de l’environnement informatique pour trouver une combinaison d’indications qui produiront le résultat attendu. À la fin, le programmeur retravaille son programme, peut-être même à plusieurs reprises, pour arriver à en écrire un qui produit le résultat souhaité. Dans l’exemple ci-dessus, pour construire un triangle équilatéral dans l’environnement de la tortue, il est possible de rédiger le programme illustré à la Figure 3.9 (reproduction inspirée de Tremblay, 2017, p. 45) en faisant des virages de 120°, plutôt que de 60°.

Figure 3.9 – Construction d’un triangle équilatéral dans la géométrie de la tortue

La notion de débogage renferme implicitement l'idée que bien que certaines indications fonctionnent, d'autres ne fonctionnent pas. C'est ce qui force une certaine démarche de bricolage selon Papert, soit une d'investigation, d'expérimentation, de réflexion et d'exploration de la part de la personne qui programme. À travers son dialogue avec le programme, le programmeur est amené à repérer autant les éléments fonctionnels du programme que les éléments dysfonctionnels et il doit le faire à partir du seul résultat produit par l'ordinateur : *la rétroaction*. La notion de rétroaction est donc fondamentale dans la démarche de débogage, car c'est elle qui pointe les bogues et les éléments qui fonctionnent.

Pour Papert, les processus de débogage et de programmation sont à voir comme des activités de bricolage. Le programmeur est amené à réparer les bogues qui peuvent survenir, non seulement à partir de ses compréhensions mathématiques et de ses manières de faire, mais aussi et surtout à partir du programme qu'il a construit. Le programmeur n'a pas de méthode générale préétablie et fonctionnelle à tout moment, mais est amené à essayer des approches différentes et à bâtir sur les éléments qui fonctionnent et à modifier ceux qui ne fonctionnent pas. Chaque erreur est ainsi une étape qui informe le programmeur sur comment s'y prendre pour avancer davantage dans l'élaboration du programme recherché. De plus, la construction du programme informatique peut faire émerger de nouvelles idées, voire compréhensions, pour la personne qui programme. Par exemple, avec le cas du triangle équilatéral, le programme initial avec les virages de 60° contenait un bogue, mais également des éléments fonctionnels. Notamment, la Figure 3.8 est composée de trois côtés isométriques, ce qui est une caractéristique mathématique fondamentale au triangle équilatéral. L'enjeu principal s'avère être qu'ils ne sont pas orientés correctement. Dans ce même exemple, la personne qui programme, ayant plutôt produit un demi-hexagone régulier, peut être amenée à mieux comprendre comment construire un hexagone régulier dans l'environnement de la Tortue (et peut-être même la plupart des polygones réguliers). Il s'agit d'une nouvelle compréhension qui survient en cours de route. Voilà pourquoi la programmation et le débogage s'inscrivent dans une approche de bricolage pour Papert (1993) : déboguer c'est s'engager dans une démarche spécifique à la situation, c'est-à-dire face aux bogues rencontrés, aux éléments fonctionnels et aux nouvelles compréhensions. Programmer exige de prendre un pas de recul et d'ajuster la démarche de programmation en cours de route selon les résultats obtenus.

3.2.2 Développement des compréhensions individuelles selon la perspective du bricolage

Sur le plan théorique, le développement des compréhensions de programmation est à voir dans la perspective du bricolage d'un programme informatique. Cependant, Papert invite aussi à concevoir le développement de l'ensemble des compréhensions mathématiques individuelles selon cette perspective de débogage (voir Barabé et Proulx, 2017 et Proulx, 2019). Pour lui, à l'image de la programmation, faire des mathématiques, c'est bricoler des solutions et des manières de faire. Moins concret qu'un programme informatique, le résultat du bricolage est ici situé sur le plan des compréhensions. Dans cette perspective, faire des mathématiques, c'est retravailler une idée, la clarifier, l'investiguer et la questionner. C'est entrer en dialogue avec la tâche en évaluant la solution au cours de sa construction, en évaluant ce qui est fonctionnel et ce qui ne l'est pas pour atteindre le but visé. C'est de se doter de moyens pour retravailler les éléments qui accrochent pour les rendre fonctionnels et développer des pistes qui en ressortent. À ce moment, comprendre ne signifie pas trouver une bonne réponse à une tâche mathématique rapidement ou du premier coup, mais plutôt d'être en mesure de s'y engager, de faire des tentatives, des erreurs et de les réparer au besoin. À ce sujet, Proulx affirme :

> Knowing becomes being able to debug; knowing becomes something that is about adapting oneself to events and being able to reorganize them: it is about "getting through" and arriving at something. In short, debugging becomes a problem-solving activity in itself, a task on which to work, a supplementary activity that becomes part of the initial activity or of the problem itself. (Proulx, 2019, p. 310)

Les compréhensions mathématiques individuelles sont alors vues comme une capacité, celle de déboguer et de s'engager dans la résolution d'un problème. Elles sont un ensemble dynamique de manières de faire des mathématiques qui participent activement au bricolage de solutions en permettant à la personne de s'engager dans la démarche. Les compréhensions mathématiques ne sont ici plus vues simplement comme un ensemble d'acquis mathématiques qu'une personne accumule. Proulx ajoute : « It switches the issue from "having" all the bits of knowledge, and toward the enactment of expertise, unfolding in action, as a capacity to work on it » (Proulx, 2019, p. 311). Rempli de détours et d'embûches, le développement des compréhensions individuelles est dynamique. Dans cette perspective, il est vu comme se réalisant dans l'action et en interaction avec la tâche. La personne en vient à développer ses compréhensions mathématiques à force de faire des mathématiques, c'est-à-dire en étant confrontée à des bogues dans les résolutions de problèmes, en déboguant les tâches et raisonnements déployés, en bricolant des manières de les résoudre. Ces compréhensions mathématiques pourront être réinvesties à d'autres moments dans la résolution de nouvelles tâches. Et le développement de nouvelles compréhensions mathématiques, qui permettent l'avancement dans la tâche, relève de l'expertise de la personne qui fait des mathématiques. À ce sujet, Barabé et Proulx disent :

> En ce sens, comprendre ne signifie plus réussir sur le champ : l'activité mathématique est en devenir et non immédiate, rigide et fixée. L'expertise mathématique devient synonyme de capacité de réparation, d'y arriver, de réparer, de continuer à « avancer » dans la résolution, dans la tâche. (Barabé et Proulx, 2017, p. 28)

Plus encore, cette perspective du bricolage sur le développement de compréhensions mathématiques peut être étendue aux possibilités présentées par Lévi-Strauss (1962), qui émergent de la tâche. En maillant les idées de Papert, sur les bogues et le débogage, avec celles de Lévi-Strauss, sur l'apport des possibilités dans la démarche de bricolage, le développement de compréhensions s'en retrouve vécu selon deux dimensions. Faire des mathématiques signifie donc d'utiliser ses compréhensions pour bricoler une solution et de faire avancer ces mêmes compréhensions en réparant les bogues qui émergent en cours de route, soit la démarche de débogage décrite ci-dessus. En plus, cette utilisation des compréhensions est vue comme pouvant faire émerger des possibilités de faire autrement ou d'améliorer quelque chose. Ces possibilités font avancer les compréhensions lorsqu'elles sont explorées, sans avoir à surmonter une difficulté ou une erreur, mais simplement en inspirant la personne en cours de route. Ces deux dimensions, qui sont à voir comme étant complémentaires, sont centrées sur des *évènements charnières* qui émergent dans la démarche de bricolage, soit les *bogues* et les *possibilités*. Ces évènements charnières sont des moments clés qui font surface lorsqu'une personne fait des mathématiques et qui génèrent des avancements de compréhensions. La Figure 3.11 ci-dessous illustre comment l'activité mathématique met en route un développement de compréhensions dans la perspective du bricolage. Faire des mathématiques à partir de compréhensions initiales amène la personne à explorer les différentes pistes et à rencontrer des bogues, soit des erreurs dans ses compréhensions ou encore leurs limites ou le niveau auxquelles elles sont assimilées. En bricolant à partir des possibilités conçues et en déboguant les problèmes qui peuvent apparaitre, de nouveaux éléments de compréhensions font surface, bonifiant ou rectifiant les compréhensions initiales.

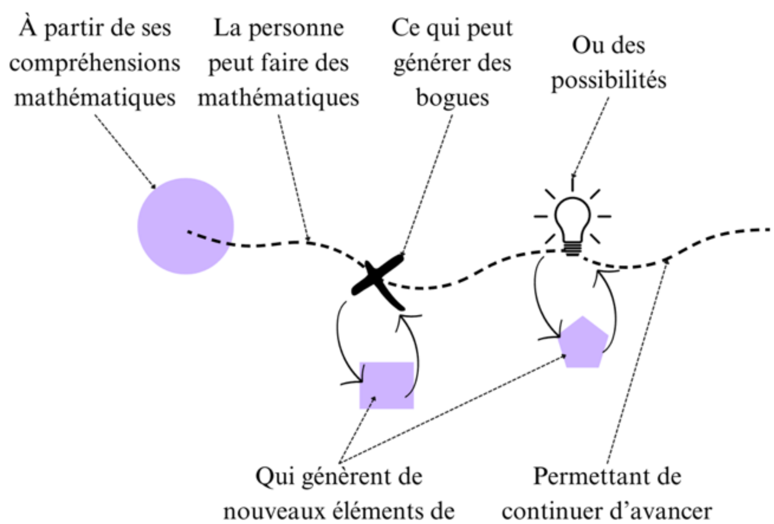


Figure 3.10 – Le rôle des bogues et possibilités dans l'activité mathématique

3.2.3 Apports de la perspective du bricolage pour la dialectique explications-compréhensions

Dans le cadre de cette recherche, il est possible d'incorporer la perspective du bricolage dans celle sur la dialectique explications-compréhensions, à l'aide d'un rapprochement entre les actions déployées au cours d’une explication et les actions mathématiques déployées par quelqu’un qui fait des mathématiques. Ceci s’aligne d’ailleurs avec les écrits de Papert et Harel (1980) au sujet de l’importance de construire quelque chose de public et d’appréciable par quelqu’un d’autre, ce qui est inhérent à la notion d’explications.

Comme le programmeur, qui a une intention derrière le développement de son programme informatique, il a été soulevé (Section 2.2) que la personne qui explique a une intention derrière le développement de son explication, celle de faire comprendre. À travers cette intention, les actions d’explications déployées par la personne qui explique peuvent être conçues dans une perspective de bricolage. À ce moment, pour faire comprendre une idée, la personne construit une explication à partir des compréhensions mathématiques à sa disposition, de la même manière que si elle faisait des mathématiques ou de la programmation. Il a été avancé (Section 2.3) que dans l’action d’expliquer, la personne transforme ses compréhensions selon les règles du langage, en fait l’analyse pour éclaircir ce qui peut ne pas être compris et qu’elle mobilise une évaluation continuelle autorégulant ses explications. Ces éléments peuvent être vus comme un dialogue entrepris par la personne qui explique avec ses propres explications. Il est possible d’y voir qu’elle évalue constamment et en temps réel l’état d’avancement et la qualité de ses explications pour continuer son élaboration, et ce, de manière analogue au programmeur qui évalue l’état d’avancement de son programme informatique pour continuer à le bricoler.

Comme le programmeur peut être inspiré par l’avancement du programme informatique ou le bricoleur de Lévi-Strauss qui construit une chaise, la personne qui explique peut être inspirée par l’avancement de ses explications. Elle peut réaliser des possibilités mathématiques qui proviennent de son propre bricolage et s’engager dans celles-ci (et les expliquer). À ce moment, l’explication résultante est différente de l’explication que la personne qui explique pensait initialement offrir. Ces possibilités peuvent être de différentes natures. D’une part, sous l’angle des explications, les possibilités de compréhension surviennent lorsque la personne qui explique entrevoit la possibilité de comprendre quelque chose de nouveau ou de manière nouvelle. D’autre part, des possibilités d’explication surviennent lorsque la personne qui explique entrevoit la possibilité d’expliquer sa même idée, mais d’une nouvelle façon.

Autrement, la personne qui explique peut aussi vivre des bogues à la lumière de son « dialogue » avec ses propres explications, si les rétroactions ne concordent pas avec ses intentions initiales de faire comprendre. Comme la dialectique explications-compréhensions développée dans ce mémoire est centrée sur la personne qui explique, il est possible de voir ces rétroactions comme provenant de la personne même qui explique, lorsqu’elle évalue si les explications qu’elle a formulées sont mathématiquement valides et si elles sont assez claires pour faire comprendre. Elles peuvent cependant avoir comme origine l’interlocuteur, lorsque ce dernier réagit ou non de manière positive ou négative aux explications formulées. Par exemple, un interlocuteur qui affirme ne pas comprendre ce qui est expliqué peut engendrer un besoin chez la personne qui explique de moduler les explications. Ces bogues peuvent être de différentes natures. D'une part, en contexte d'explications, les bogues de compréhension surviennent lorsqu'une incohérence ou une limite provenant des compréhensions de la personne qui explique fait surface en expliquant. D'autre part, les bogues d'explication surviennent lorsque, malgré la validité mathématique des compréhensions mathématiques mobilisées pour expliquer, l'explication formulée n'atteint pas son objectif de faire comprendre. Dans les deux cas, les actions déployées dans l'objectif d'améliorer les explications qu'elle vient de formuler, c'est-à-dire les nouvelles explications, sont à voir comme des actions de débogage. À ce moment, la personne qui explique retravaille son explication en donnant de nouvelles explications ou en complétant les explications en cours. Il est possible de schématiser la notion de débogage d'une explication de manière analogue à la façon habituelle de représenter la notion de débogage d'un programme informatique, comme proposé à la Figure 3.12 ci-dessous, avec à gauche un schéma pensé pour la programmation et à droite son équivalent pour les explications.

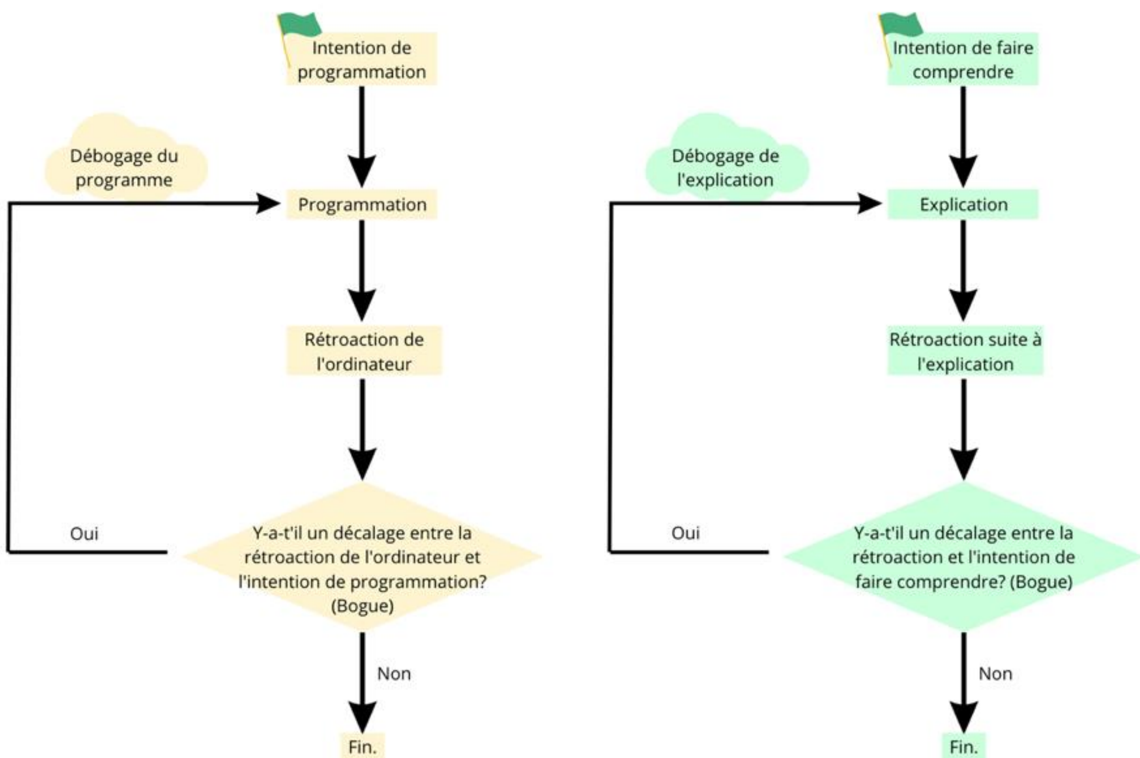


Figure 3.11 – Schématisation du débogage

Concevoir les explications dans une perspective de bricolage amène à concevoir les explications comme une activité mathématique qui nécessite des avancements de compréhensions pour surmonter les bogues et explorer les possibilités qui en émergent. Cette perspective offre un regard approfondi sur la nature même de ces évènements charnières, qui sont présentés dans le Tableau 3.4 ci-dessous.

Tableau 3.4 – Nature des évènements charnières survenant dans une démarche d'explication

Évènements charnières	Réinterprétation en contexte d'explication
Bogue de compréhension	Le bogue de compréhension émerge lorsque la personne qui explique réalise que ses explications témoignent de compréhensions erronées, ce qui la pousse à déterminer qu'est-ce qui ne fonctionne pas mathématiquement à travers un processus de compréhension. Un développement de compréhension peut permettre de surmonter le bogue. L'ancienne manière de comprendre prend le statut d'incohérence mathématique.
Bogue d'explication	Le bogue d'explication émerge lorsque la personne qui explique juge que son explication n'a pas fait ou ne fera pas comprendre adéquatement ce qu'elle est censée faire comprendre. Face à un bogue d'explication, la personne qui explique est poussée à évaluer l'explication dans l'objectif de déterminer qu'est-ce qui crée un décalage avec son intention qui l'empêche d'atteindre son objectif. Afin de surmonter le bogue, l'explication évolue. Une nouvelle explication plus claire (aux yeux de la personne qui explique) est formulée. Faire évoluer l'explication nécessite et représente un avancement des compréhensions mathématiques de la personne qui explique. L'ancienne manière d'expliquer est considérée problématique au profit de la nouvelle manière d'expliquer, car, selon la personne qui explique, elle ne fait pas comprendre suffisamment.
Possibilité de compréhension	La possibilité de compréhension est une nouvelle manière de comprendre quelque chose qui n'avait pas été initialement anticipée. Elle émerge de la démarche d'explication et pousse à en faire l'exploration, ce qui peut s'actualiser en développement de compréhensions. Ce développement de compréhensions peut faire évoluer l'explication.
Possibilité d'explication	La possibilité d'explication est une nouvelle manière d'expliquer quelque chose qui n'avait pas été initialement anticipée. Elle émerge de la démarche d'explication et pousse à en faire l'exploration. Cela peut se traduire par la formulation d'une nouvelle manière d'expliquer, qui demande possiblement la construction de nouvelles compréhensions ou l'organisation nouvelle de compréhensions mathématiques déjà existantes.

3.3 Articulation des perspectives zigzag et bricolage sur la dialectique explications-compréhensions

Les perspectives du zigzag et du bricolage offrent des approfondissements différents, mais complémentaires, sur la dialectique explications-compréhensions. Elles permettent toutes les deux de concevoir les explications comme activité mathématique qui, à la fois, utilise les compréhensions mathématiques de la personne qui explique (justement pour expliquer), à la fois engage leur développement de manière analogue à l'action de faire des mathématiques, c'est-à-dire à travers les réalisations qui en émergent. Cependant, ces deux perspectives n'insistent pas sur les mêmes points. La perspective du zigzag conçoit les explications comme étant génératrices de réalisations dont l'exploration peut faire avancer les compréhensions mathématiques de la personne qui explique. Cette première perspective insiste sur les manières dont les compréhensions avancent, soit sur la nature de ce qui se produit suite à une réalisation. La perspective du bricolage, quant à elle, conçoit les explications mathématiques comme nécessitant l'émergence de nouveaux éléments de compréhensions qui servent à faire face aux réalisations émergeant en cours de route, c'est-à-dire pour surmonter les bogues et explorer les possibilités. Elle offre un regard approfondi sur la nature de ces réalisations en contexte d'explication. Mises ensemble, ces perspectives permettent de décrire le déploiement de la dialectique explications-compréhensions, au-delà de l'ancrage conceptuel proposé au Chapitre 2.

Dans l'intention de faire comprendre une idée, la personne formule des explications sur la base de ses compréhensions mathématiques. Comme présenté au Chapitre 2, ceci peut être vu comme sculptant ses compréhensions par les règles du langage (cohérence, continuité et complétude) pour les rendre communicables, comme un processus d'analyse des compréhensions expliquées pour trouver les éléments à éclaircir, ainsi que comme mobilisant une évaluation continuelle des explications mêmes pour en assurer le bon fonctionnement. À travers ces processus de compréhensions qui se déploient dans l'action d'expliquer, il est possible de concevoir que la personne soit amenée à se familiariser avec les compréhensions qu'elle utilise pour expliquer. De plus, ces processus peuvent être vus comme invitant la personne à entrer en dialogue avec ses explications, en particulier à travers l'évaluation et l'autorégulation qui en découle. Ce dialogue entre la personne et ses explications, en étant appuyé par la familiarisation continuellement faite avec les compréhensions expliquées, peut faire émerger une réalisation, c'est-à-dire un bogue ou une possibilité, qui peut être « de compréhension » ou « d'explication » (voir Tableau 3.4). Si la réalisation est relative aux compréhensions, elle est à voir comme se traduisant directement en remise en question ou en potentiel mathématique qui vaut la peine d'être abordé. Si la réalisation est relative aux explications, elle engage plutôt sur un processus de compréhension dont l'objectif est de confectionner une façon d'expliquer autrement, ce qui peut notamment demander le développement de nouvelles compréhensions mathématiques. Dans les deux cas, l'action d'aborder une réalisation est à voir comme pouvant engendrer le développement de nouveaux éléments de compréhension, qui remplaceraient ou s'ajouteraient aux compréhensions initiales. En ce sens, il y a avancements de compréhensions. Ceux-ci peuvent être de différentes natures, comme : l'établissement d'une certitude, l'amélioration, la généralisation, la renonciation, la redéfinition, etc. (voir Tableau 3.3). Ces avancements de compréhension permettraient de réparer ou bonifier l'explication donnée ou les compréhensions qui sont mobilisées. Ces évolutions sont à voir de manière dialectique, soit à travers un déploiement conjoint des explications et des compréhensions qui s'influencent alors mutuellement. De manière itérative, cette influence mutuelle s'enclencherait continuellement, produisant ainsi des *évolutions dialectiques* jusqu'à ce que l'explication donnée soit considérée comme achevée par la personne qui explique, c'est-à-dire comme une tentative suffisante pour faire comprendre les idées expliquées.

3.4 Raffinement de la question de recherche

Les mécanismes du zigzag et du bricolage, conceptualisés à partir des écrits scientifiques, offrent une perspective théorique sur comment la dialectique explications-compréhensions se met en route chez la personne qui explique. En ce sens, le fonctionnement de ces mécanismes permet de mieux comprendre l'impact des explications sur les compréhensions mathématiques de la personne qui explique en abordant de manière théorique la question de recherche initiale :

De quelles façons la perspective dialectique explications-compréhensions fonctionne-t-elle dans l'action? Quels mécanismes sont mis à contribution lors du déploiement de cette dialectique?

Afin d'enrichir cette exploration conceptuelle, cette recherche mobilise un processus d'analyse sur de réels évènements d'explications. Ceci est fait non pas dans l'objectif d'étudier empiriquement le phénomène d'explications, mais d'examiner plus en profondeur la dialectique explications-compréhensions en explorant comment les mécanismes du zigzag et du bricolage sont mis à contribution et de quelles façons ils fonctionnent dans des explications. En ce sens, l'étude empirique de cette recherche se traduit par nouvelle la question de recherche suivante :

De quelles façons la perspective dialectique explications-compréhensions se traduit-elle dans l'action? De quelles manières les mécanismes du zigzag et du bricolage sont-ils impliqués?

CHAPITRE 4
MÉTHODOLOGIE

Ce présent chapitre détaille comment la recherche s'est mise en route au niveau méthodologique pour aborder l'objectif principal de ce mémoire, qui est de mieux comprendre l'impact des explications sur les compréhensions mathématiques de la personne qui explique. Une première sous-section détaille les orientations méthodologiques qui sous-tendent cette recherche. Une seconde sous-section dépeint la nature et la provenance des données au cœur de l'analyse conduite. Finalement, une troisième sous-section décrit la démarche d'analyse et présente les grilles développées pour étudier la dialectique explications-compréhensions, ainsi que le développement des compréhensions mathématiques.

4.1 Orientations méthodologiques

4.1.1 Démarche de recherche : Paradigme qualitatif/interprétatif

Cette recherche s'inscrit dans un paradigme de recherche qualitatif/interprétatif, tel que décrit par Savoie-Zajc (2018) pour les recherches en éducation. Cet ancrage méthodologique décrit une démarche de recherche flexible, qui a pour objectif de comprendre le sens de phénomènes « qui se mesurent difficilement : des mots, des dessins et des comportements » (Savoie-Zajc, 2018, p. 193). Ceci correspond à l'objectif de cette recherche, soit d'élaborer une compréhension détaillée de la dialectique explications-compréhensions et des façons dont elle participe au développement de compréhensions chez la personne qui explique. En effet, l'action d'expliquer est un phénomène complexe dont la dynamique évolutive se prête à la démarche d'interprétation. Par ailleurs, le courant qualitatif/interprétatif se décrit comme étant ancré dans l'interaction entre les différents individus ou avec leur environnement, pour laquelle un sens est donné de l'intérieur :

> La démarche souple et émergente de la recherche qualitative/interprétative permet au chercheur de comprendre, de l'intérieur, la nature et la complexité des interactions d'un environnement déterminé, et d'orienter sa collecte de données en tenant compte de la dynamique interactive du site de recherche. (Savoie-Zajc, 2018, p. 193)

Cette recherche utilise un modèle qualitatif/interprétatif afin de donner un sens « de l'intérieur » à des interactions qui sont vécues par une personne précise, soit celle qui explique. Ce sont les interactions de cette personne avec les propos qu'elle tient ou vient de tenir qui sont étudiés. Comme cette recherche s'appuie sur et aborde la dialectique explications-compréhensions, la perspective de l'intérieur permet de donner un sens à son déroulement et à comment elle évolue dans l'action d'expliquer. Par ailleurs, Savoie-Zajc, affirme que la compréhension du phénomène à l'étude émerge de multiples analyses, chacune donnant plus de sens au phénomène étudié. La démarche de recherche est, à cet égard, un cycle qui fait graduellement émerger un sens aux phénomènes à l'étude, ce qui oriente en retour le processus de recherche :

> Le caractère émergent du design de recherche constitue une caractéristique importante. Cette émergence est guidée par le sens que le chercheur donne graduellement aux données et par son contact avec les participants à la recherche. Ainsi, la réflexion menée au fur et à mesure de la collecte et de l'analyse des données transforme le processus même de recherche. (Savoie-Zajc, 2018, p. 197)

La recherche qualitative/interprétative mobilise de multiples analyses qui se bâtissent les unes sur les autres. De donner un premier sens à un évènement, par son analyse, permet ensuite de donner un deuxième sens, qui est appuyé sur le premier et lui ajoute. En retour ce deuxième sens établi les bases pour un troisième, puis un quatrième, et ainsi de suite; ce qui dans ce cas peut permettre de dévoiler des nuances clés qui offrent un portrait riche, voire multicouche de la dialectique explications-compréhensions de l'évènement d'explications. Ce faisant, l'analyse s'en retrouve approfondie, par les apports générés par les différents sens développés. C'est de cette façon que l'approche qualitative/interprétative qui oriente cette étude veut capturer la richesse de la dialectique explications-compréhensions en action chez la personne qui explique.

Le processus emprunté dans cette recherche s'inscrit précisément dans ce que Savoie-Zajc appelle la logique inductive délibératoire. Il s'agit d'une posture de recherche qui mobilise le cadre théorique de la recherche pour guider le processus d'analyse, et qui enrichit en retour le cadre théorique grâce à de nouvelles dimensions dégagées du processus d'analyse :

> [La] logique inductive délibératoire, consiste à utiliser le cadre théorique comme un outil qui guide le processus de l'analyse. La grille d'analyse initiale s'enrichit toutefois dans la mesure où d'autres dimensions pertinentes pour le problème étudié ressortent des données (Savoie-Zajc, 2018, p. 207)

En d'autres mots, il y a, dans le processus d'analyse, une interaction continuelle entre l'analyse des données et le cadre théorique de la recherche, soit ici les ancrages conceptuels présentés aux Chapitres 2 et 3. L'analyse se met ainsi en route grâce au cadre d'analyse, lui-même développé à partir du cadre théorique, c'est-à-dire de la perspective dialectique explications-compréhensions. En retour, cette analyse peut dévoiler de nouveaux éléments, initialement non prévus sur le plan théorique, mais qui en viennent à approfondir le cadre théorique lui-même. La posture de logique inductive délibératoire adoptée dans cette recherche permet alors aux analyses menées d'offrir un portrait riche sur la dialectique explications-compréhensions dans son déploiement, tout en reconnaissant les dimensions évolutives des ancrages mobilisés pour faire l'analyse et faire émerger des dimensions spécifiques aux évènements d'explications étudiés. Une sorte de boucle se met en route entre les analyses et le cadre d'analyse, qui s'enrichissent mutuellement au cours de la démarche d'analyse.

4.1.2 Méthode de recherche : Étude de cas suggestif

Afin de mieux interpréter le phénomène dialectique explications-compréhensions, la réalisation d'une *étude de cas* a été menée, telle que décrite par Karsenti et Demers (2018) pour les recherches en éducation. L'étude de cas est une méthode de recherche qui consiste à faire l'exploration détaillée d'un ou de quelques cas spécifiques dans lesquels le phénomène à l'étude risque de se produire, soit ici, la mise en route de la dialectique explications-compréhensions. « [L'étude de cas] permet, entre autres, de choisir des cas particuliers dans lesquels les interactions étudiées sont susceptibles de se manifester » (Karsenti et Demers, 2018, p. 290). L'objectif de l'étude de cas est de donner un sens à un phénomène à partir d'un petit nombre de cas qui sont porteurs pour étudier le phénomène en question, ce qui se traduit pour cette recherche en quelques évènements d'explications dans lesquels les mécanismes dialectiques sont présents et explicites. Cela rend possible l'observation de nombreux facteurs en interaction et permet la compréhension de leur complexité et richesse (Karsenti et Demers, 2018). L'étude de cas a été choisie dans l'objectif d'atteindre un niveau de détail qui rend justice à la complexité émergente de la dialectique explications-compréhensions et de sa dimension évolutive. Parce que cette dialectique contient de nombreuses dimensions (explications, compréhensions, intentions, évolutions, etc.) qui semblent être en interaction continuelle les unes avec les autres et parce qu'elle est vue comme se déployant à chaque instant, une méthode de recherche permettant de passer au peigne fin les évènements d'explications est ici nécessaire.

Spécifiquement, l'*étude de cas suggestif* telle que décrite par Tremblay (1968) permet de cibler des cas précis pour l'analyse, qui agissent comme bons représentants des phénomènes à l'étude. En d'autres mots, pour réussir à analyser le détail des évolutions dialectiques dans les évènements d'explications, des cas suggestifs exemplaires, voire exagérés, ont été choisis. Tremblay décrit les cas suggestifs comme *amplifiant*, les éléments qui peuvent être embryonnaires ou diffus dans d'autres situations du phénomène et les éléments permettant une compréhension de la dynamique évolutive en cours dans le phénomène :

> Les études de quelques cas suggestifs portent sur un nombre restreint de situations, d'événements ou d'individus particulièrement bien choisis pour représenter à l'état exemplaire ou même exagéré, divers aspects saillants. Le cas est suggestif soit parce que, dans ses parties constituantes, il illustre et amplifie ce qui existe à l'état embryonnaire ou diffus dans d'autres situations, soit encore parce qu'il permet de comprendre la dynamique même de l'évolution en cours, des divers éléments à l'œuvre. (Tremblay, 1968, p. 185)

L'étude de cas suggestif a été choisie afin de pouvoir bien comprendre la façon avec laquelle la dynamique évolutive de la dialectique explications-compréhensions peut se mettre en route dans l'action d'expliquer. En analysant des évolutions saillantes dans la dialectique explications-compréhensions, il est possible de décortiquer ces évènements d'explications pour en dégager une compréhension profonde des processus et mécanismes mis en route.

4.2 Données de recherche

Les évènements d'explications sélectionnés pour cette recherche, les cas suggestifs, sont de provenance et de nature variées. Un premier évènement d'explications provient de mon expérience personnelle et est l'anecdote personnelle sur la comparaison de fractions (Section 4.2.1). Un second évènement d'explications est tiré d'une recherche en didactique des mathématiques. Il s'agit d'extraits d'un verbatim d'entrevue réalisé par un autre chercheur portant sur un graphique de proportions inverses (Section 4.2.2). Finalement, les troisième et quatrième évènements d'explications retenus résultent d'une cueillette de données en salle de classe sur un problème de comparaison de périmètres. Des bandes vidéo permettent d'en rendre compte, desquelles un verbatim a été produit pour chacune (Section 4.2.3).

La décision de faire l'analyse de trois types d'évènements est apparue naturelle au cours du processus de recherche, tout en étant très personnelle. Les différentes données sont des évènements d'explications qui, à un moment ou à un autre de mon parcours de recherche, sont apparus comme des cas suggestifs intéressants à analyser. L'anecdote personnelle a permis de problématiser le projet de recherche et est devenue centrale à analyser, par l'accès privilégié qu'elle donne au phénomène dialectique. Les verbatims de recherche provenant d'une autre étude ont été croisés dans le cadre de lectures et ceux-ci pointaient sur des éléments saillants reliés au phénomène d'explications, au point d'en illustrer les appuis théoriques utilisés dans les ancrages conceptuels. Les données tirées d'explications offertes en salle de classe ont été rencontrées sur un site de recherche et me permettaient de faire avancer mes réflexions émergentes reliées au projet. Le choix d'analyser et d'inclure deux évènements de la salle de classe (plutôt qu'un seul) a été fait en raison de la diversité des réflexions que chacun suscite. Les quatre évènements choisis sont tous des cas suggestifs, car (1) des explications sont offertes et (2) une évolution explicite des explications s'y retrouve, ce qui permet d'y voir la mise en route de la dialectique explications-compréhensions. Ces évènements permettent tous d'étudier le phénomène d'évolution dans une explication et le font de différentes façons. Ils permettent de diversifier les angles avec lesquels étudier le phénomène de dialectique explications-compréhensions et de dresser un panorama plus large de différentes facettes de la mise en route de ce processus. Chacun des évènements d'explication, et leurs différences sont détaillés dans ce qui suit.

4.2.1 Anecdote tirée de mon expérience personnelle

L'anecdote tirée de mon expérience personnelle est celle de la comparaison de fraction présentée au Chapitre 1 en problématique (Section 1.2). Elle est rapportée comme un récit décrivant une suite d'explications que j'ai moi-même données. Comme cet évènement d'explications provient de mon expérience personnelle, que ce sont mes propres explications, j'y joue un rôle clé. Par cet accès privilégié, je sais qu'il y a eu un avancement de compréhensions chez la personne qui explique, soit moi-même, et je peux y voir la présence d'une dialectique explications-compréhensions. Constituant un cas suggestif, leur analyse s'avère en ce sens être d'un intérêt particulier. L'écriture de cette anecdote a été faite dans une démarche convergeant vers l'approche phénoménologique décrite par Antoine et Smith (2016) pour les recherches en psychologie. Cette approche conçoit les données comme des récits subjectifs de participants construits à partir de leurs compréhensions de leurs expériences :

> Cette compréhension est exprimée imparfaitement sous forme d'une histoire personnelle. L'analyse de cette narration permet de comprendre quel sens est donné et surtout comment du sens est donné à une expérience. (Antoine et Smith, 2016, p. 375)

Dans cette approche, lors de l'analyse, l'accent n'est pas mis sur l'exactitude de l'évènement raconté, mais plutôt sur ce qui est plausible et cohérent et sur ce qu'il est possible d'en dégager. Allant au-delà de la simple observation des paroles et gestes, un accent est mis sur le sens qui est donné aux évènements. La rédaction de cette anecdote ne prétend pas retracer les explications données mot à mot, mais les rapporte plutôt comme elles se sont déroulées au sens large. Ceci permet d'en dégager un sens unique, qui provient de l'intérieur même du phénomène, c'est-à-dire de comment la dialectique explications-compréhensions a été vécue et mobilisée par une personne qui explique (ici, moi-même). Roth (2012) parle de ce type de données en termes de *first-person perspective*. Il affirme que la *first-person perspective* donne accès à d'autres dimensions de l'expérience qui permet de construire une compréhension unique du phénomène à l'étude.

> The interest of this kind of research is not only in that which a singular subject is subjected to but, more precisely, in the singular dimensions of the experience that only the first-person perspective can reveal. […] It is intended to understand the dimensions of experience that are more archaic, more carnal than what language can articulate. (Roth, 2012, p. 6)

L'anecdote de la comparaison de fractions permet ainsi une analyse dont un sens unique peut être mis au jour. Elle offre le potentiel de mieux comprendre le phénomène de dialectique explications-compréhensions à travers le *vécu* de la personne qui explique.

4.2.2 Extraits de verbatim tirés d'un article de recherche en didactique des mathématiques

Le verbatim tiré d'une recherche menée par Arican (2019) porte sur la compréhension et l'habileté à différencier les relations proportionnelles des non proportionnelles chez des enseignants de mathématiques en formation. Ce verbatim rapporte des explications offertes par Ece, une future enseignante de mathématiques et donne accès aux explications formulées par Ece en retraçant spécifiquement comment les explications se sont déroulées. En d'autres mots, le verbatim est authentique sur le plan des mots utilisés et des pauses effectuées dans les explications. Par exemple, il offre des marqueurs pour indiquer si Ece hésite ou réfléchi en cours d'explications. Cette particularité rend intéressant ce verbatim pour cette recherche, car il rapporte ce qui est expliqué de manière précise. En incluant, par exemple, des moments où Ece entame une explication dans une certaine direction, réalise qu'elle fait fausse route et recommence dans une autre direction, ce verbatim organise les explications d'une manière particulière qui permet de décortiquer la dialectique explications-compréhensions dans ces propos. Ce verbatim donne accès à l'observation de l'extérieur, qui favorise une analyse à travers un grain fin centré sur le langage, soit le choix de mots et les ajustements langagiers faits par Ece relativement à ce choix de mots. Ce verbatim donne accès à une dimension différente de la dialectique explications-compréhensions, soit celle des évolutions du langage. Cela permet de mieux comprendre le phénomène de dialectique à travers le langage utilisé et les marqueurs de pause qui séparent les idées expliquées.

4.2.3 Évènements d'explications tirés d'une cueillette de données en salle de classe

Les explications tirées d'une cueillette de données en classe de primaire proviennent d'un projet de recherche mené par le professeur Jérôme Proulx, au courant de l'année scolaire 2022-2023. Dans ce projet, les élèves participent à des séances de calcul mental et étaient amenés à expliquer leurs stratégies de résolution de problème. Le projet pour 2022-2023 était composé de dix-huit séances de 50 minutes, sur des tâches abordant le raisonnement proportionnel et de quinze séances de 50 minutes sur des tâches abordant la relation aire-périmètre. Ce projet a été mené auprès d'élèves de 5^{e} année du primaire (10-11 ans), dans neuf classes de différentes écoles en banlieue de Montréal. J'ai participé comme auxiliaire de recherche à vingt-sept de ces séances en classe. Au cours de ces séances, de nombreux évènements me sont apparus comme intéressants en lien avec mon projet de recherche, c'est-à-dire relativement aux explications formulées (faisant ainsi avancer mes questionnements et ma réflexion sur mon thème de recherche). J'ai décidé de choisir deux de ces évènements, qui se sont particulièrement démarqués lorsque j'ai assisté en temps réel aux explications et aux évolutions dans les stratégies mobilisées. Il s'agit des explications de Nicolas et de celles de Malik. Il m'est apparu impératif d'en faire l'analyse sur le plan de la dialectique explications-compréhensions, parce que ces évolutions sont apparues tout naturellement pendant leurs explications. Le choix d'inclure les analyses des deux évènements d'explications de ce type provient des spécificités qui en ressortent. Des éléments contingents à chaque évènement semblaient pouvoir apporter des nuances enrichissant possiblement les conclusions de cette recherche, conviant ainsi à faire et à présenter l'analyse des deux événements d'explications plutôt que d'un seul.

Ces évènements d'explications constituent une troisième entrée sur la dialectique explications-compréhensions. Les explications de Nicolas et celles de Malik ne sont pas situées autant de l'intérieur que dans le cas de mes propres explications dans l'anecdote de la comparaison de fractions. Elles ont été données par un participant-élève (autre que moi). Cependant, j'étais physiquement présent lorsque les explications ont été formulées, ce qui m'en donne une compréhension plus proximale que pour les verbatims tirés d'Arican (2019). À la différence des deux autres types de données, celles-ci abordent des aspects « de l'intérieur » et « de l'extérieur » différents. Une force des données sur les explications de Nicolas et de Malik est de les avoir vécues en temps réel et d'avoir « ressenti » des évolutions dialectiques au cours de ces explications. De plus, les traces de ces évènements sont diversifiées, puisque des verbatims ont été rédigés par moi-même, à partir des bandes vidéos. Ceci rend possible une analyse en plusieurs dimensions qui permet de revivre les explications de manière proximale et d'en faire l'analyse comme si elles venaient de se produire. En somme, ces évènements d'explications rendent possible une entrée autant globale que précise sur le déploiement de la dialectique explications-compréhensions, ce qui est fait à travers la possibilité d'avoir un double accès aux postures de l'intérieur (en ressentant les évolutions dialectiques) et de l'extérieur (en ayant accès à un grain d'analyse fin issu d'un verbatim).

4.3 Démarche d'analyse

Malgré la diversité des types de données, la démarche d'analyse de cette recherche se veut uniforme. En effet, les différents évènements d'explications ont été analysés en suivant une procédure similaire pour tous les types de données, adaptant minimalement certains éléments au besoin. Cette section détaille cette démarche d'analyse de façon globale, les éléments spécifiques à chaque évènement d'explications étant détaillés dans leur propre section d'analyse au Chapitre 5. Les notions d'*unité d'observation* et d'*unité d'analyse*, tirées de Savoie-Zajc (2018), ont ici été mobilisées à des fins méthodologiques et deux grilles d'analyses ont été élaborées à partir des perspectives théoriques pour faire l'analyse. En premier lieu, à la Section 4.3.1, les unités d'observation ainsi que les unités d'analyse sont détaillées. En deuxième lieu, à la Section 4.3.2, le processus d'analyse est présenté et les grilles d'analyse sont exposées.

4.3.1 Unité d'observation et unité d'analyse

L'unité d'observation peut être définie comme un épisode d'intérêt pour la recherche. Ce sont les éléments qui, dans leur ensemble, peuvent faire l'objet d'analyses, soit du début à la fin d'un évènement observé.

Garneau (2015, dans Savoie-Zajc, 2018) parle de l'unité d'observation comme d'un moment clé dans lequel le participant est confronté à un obstacle ou à une possibilité et entreprend quelque chose face à cela.

> Garneau (2015) a recours à la notion d'unité d'observation pour dégager de ses entretiens avec les participants des comportements, objets subséquents d'analyse. Elle nomme cette unité d'observation « acte décisionnel ». Elle en donne la définition suivante : « moment où un étudiant dit avoir été confronté à un obstacle ou à une possibilité, et avoir dû agir » (Savoie-Zajc, 2018, p. 202)

Dans cette recherche, les « actes décisionnels » soulevés par Garneau sont les évolutions qui surviennent dans les explications. L'obstacle ou la possibilité auxquels elle réfère sont alors les bogues ou les possibilités provenant de l'ancrage dialectique. Ces derniers n'étant pas toujours observables sans analyse dans les données, les unités d'observations sont alors centrées sur ces évolutions. Elles sont pensées en termes de « moments d'évolution » et contiennent tous les éléments qui aident à comprendre cette évolution. Les unités d'observations comprennent donc les explications qui précèdent une évolution, les explications dans lesquelles cette évolution se retrouve, ainsi que tous les éléments qui aident à contextualiser, le cas échéant. Par exemple, si un contexte introduit une explication ou encore si une question initiale la situe, ces éléments seront compris dans l'unité d'observation. Les rétroactions des interlocuteurs peuvent également faire partie de l'unité d'observation.

À l'intérieur d'une unité d'observation se situe l'*unité d'analyse*, c'est-à-dire les éléments spécifiques des unités d'observation qui sont explicitement analysés. L'unité d'analyse balise de manière précise la portion de l'unité d'observation qui est analysée. Pour cette recherche, deux éléments sont nécessaires à l'unité d'analyse. Premièrement, il y a les *évènements charnières* qui surviennent dans une explication ou suite à elle et qui initient une évolution. Sur le plan théorique, un évènement charnière est associé à une réalisation faite durant les explications et qui module le processus dialectique. Il s'agit des possibilités et des bogues

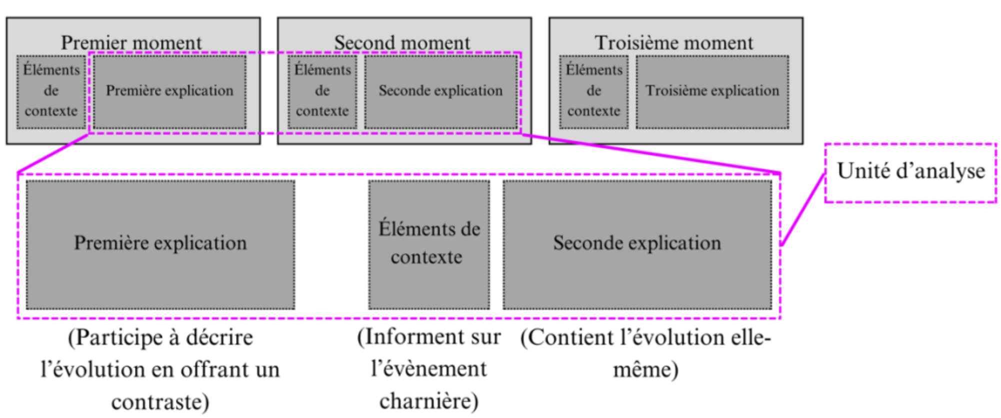


Figure 4.1 – Exemple d'unité d'analyse

survenant lors de l'action d'expliquer. Pour reconnaître un évènement charnière, il est possible de porter attention à des signes explicites. Par exemple, une explication qui contient : « Je viens de réaliser que… » peut contenir un évènement charnière explicite contenue dans le mot « réaliser ». Il en est de même pour les pauses, hésitations ou changements dans les explications, qui, bien que moins explicites, peuvent dénoter la présence d'un évènement charnière. Il est également possible d'identifier une évolution et de comparer les explications avant l'évolution et après l'évolution entre elles pour déterminer pourquoi l'évolution s'est mise en route. Ainsi, tous les éléments aidant à identifier un tel évènement charnière font partie de l'unité d'analyse. Deuxièmement, il y a l'évolution en elle-même. Pour reconnaître une évolution, il est possible d'évaluer les changements sur le plan mathématique dans les explications, dans les mathématiques expliquées et dans la manière de les expliquer. Par exemple, une explication du type : « L'inégalité triangulaire… ou plutôt, disons, la projection orthogonale aide à montrer que… » peut être vue comme contenant une évolution, puisque les explications ont été réorientées de l'inégalité triangulaire à la projection orthogonale. Ainsi, tous les éléments permettant de décrire comment les explications ont évoluées font également partie de l'unité d'analyse. Ceci inclut notamment les éléments des explications précédentes et des explications suivant les évènements charnières qui peuvent être contrastés pour identifier une évolution. La Figure 4.1 propose un schéma représentant une unité d'analyse. Ce schéma est général et donné à titre d'exemple de ce qui peut intégrer une unité d'analyse. Un équivalent est proposé au Chapitre 5 pour chaque analyse de données, afin d'éclaircir la construction de chacune des unités d'analyse.

4.3.2 Processus d'analyse

Les ancrages conceptuels de cette recherche proposent que les évolutions des compréhensions et des explications surviennent de manière dialectique chez une personne qui explique, c'est-à-dire, ensemble, et impossible sans l'autre. À ce moment, tel que présenté, ces évolutions émergeraient suite à des évènements charnières. Les évènements charnières sont vus comme des nœuds survenant au cours des explications et qui permettraient à la personne qui explique de faire évoluer les explications et les compréhensions. Ces évènements charnières sont analysés à travers l'utilisation de deux grilles d'analyse, soit la *Grille d'analyse : Bricolage* et la *Grille d'analyse : Zigzag*. L'application de ces deux grilles sur les unités d'analyse permet dans un premier temps de décrire les évolutions des explications et des compréhensions mathématiques du point de vue de la personne qui explique. Par la suite, une interprétation de la dialectique explications-compréhensions est menée et permet de donner un sens supplémentaire aux évolutions des explications. Cette interprétation dialectique permet d'offrir un portrait plus en profondeur des significations possibles des évolutions des explications sur le plan dialectique.

4.3.2.1 Grille d'analyse : Bricolage

La *Grille d'analyse : Bricolage* permet d'identifier la nature de l'évènement charnière qui a initié l'évolution pour donner un sens à pourquoi l'évolution s'est mise en route. Elle a été élaborée en opérationnalisant les évènements charnières de la dialectique explications-compréhensions tirés des travaux de Papert (1972) et de Lévi-Strauss (1962) dans un contexte d'explication. Cette opérationnalisation a déjà été présentée de manière approfondie au Tableau 3.4. Ce dernier est repris et synthétisé dans la grille suivante (Tableau 4.1).

Tableau 4.1 – Grille d'analyse : Bricolage

Évènements charnières	Réinterprétation en contexte d'explication
Bogue de compréhension	La personne qui explique réalise que ses explications témoignent de compréhensions erronées.
Bogue d'explication	La personne qui explique juge que son explication n'a pas fait ou ne fera pas comprendre adéquatement ce qu'elle est censée faire comprendre.
Possibilité de compréhension	La personne qui explique réalise une nouvelle manière de comprendre quelque chose qui n'avait pas été initialement anticipée.
Possibilité d'explication	La personne qui explique réalise une nouvelle manière d'expliquer quelque chose qui n'avait pas été initialement anticipée.

4.3.2.2 Grille d'analyse : Zigzag

La *Grille d'analyse : Zigzag*, permet de décrire comment une explication évolue suite à un évènement charnière. Elle donne un sens à la nature même de l'évolution. Elle a été construite en opérationnalisant les manières dépistées dans les travaux de Lakatos (1976), dont les mathématiques avancent dans un contexte de développement de compréhensions individuelles fait en expliquant. De manière similaire à la grille précédente, le Tableau 3.3 présenté au Chapitre 3 constitue une version détaillée de cette opérationnalisation et la grille présentée ci-dessous (Tableau 4.2) en constitue une version synthétisée.

Tableau 4.2 – Grille d'analyse : Zigzag

Avancements des compréhensions	Réinterprétation en contexte d'explication
Établissement d'une certitude	Gain en certitude d'une compréhension mathématique expliquée.
Amélioration	Remplacement d'une compréhension mathématique expliquée, et considérée inadéquate, par une autre obtenue en la modifiant légèrement.
Généralisation	Remplacement d'une compréhension mathématique adéquate, mais spécifique, par une autre obtenue en la modifiant légèrement.
Renonciation	Abandon des explications et/ou aux compréhensions mathématiques expliquées.
Redéfinition	Redéfinition plus précise d'une compréhension expliquée.
Restriction	Formulation d'une nouvelle restriction sur un domaine mathématique restreint.

Réinterprétation	Réinterprétation des compréhensions mathématiques mobilisées dans une remise en question.
Transformation	Abandon des explications et formulation de nouvelles explications différentes.
Accroissement	Investigation du fonctionnement d'une remise en question qui se traduit en nouveau domaine de compréhensions mathématiques.
Extension	Remplacement des compréhensions mathématiques expliquées en compréhensions mathématiques pensées pour expliquer.

4.3.2.3 Interprétations dialectiques

Une fois les descriptions de premier niveau faites avec ces deux grilles d'analyse, un second niveau d'analyse est proposé en lien avec une interprétation sur la dialectique explications-compréhensions. La conceptualisation dialectique proposée aux Chapitres 2 et 3 conçoit explications et compréhensions comme étant deux phénomènes venant de paire, les deux faisant partie intégrante de l'autre et se déployant simultanément. Cette conceptualisation dialectique est ici mobilisée afin de donner un sens supplémentaire aux évolutions des explications et des compréhensions mathématiques. Cette interprétation dialectique s'appuie sur la description offerte par le premier niveau d'analyse pour approfondir le sens qui lui est donné. Elle s'appuie grandement sur la Section 3.3, qui offre un cadrage théorique sur le déploiement de cette dialectique et sur les articulations théoriques des perspectives du zigzag et du bricolage. Notamment, une idée importante qui est mobilisée est qu'en expliquant des notions mathématiques, la personne qui explique est constamment en train de les comprendre. Cette interprétation conçoit les évolutions des explications comme étant des nœuds dialectiques, c'est-à-dire des moments forts de la dialectique explications-compréhensions dans lesquels celle-ci se met en œuvre de manière accrue et explicite, notamment à travers l'autorégulation mise en route, c'est-à-dire selon les ajustements et explorations qui émergent des bogues et des possibilités.

CHAPITRE 5
ANALYSES

L'objectif de cette recherche est d'investiguer le rôle des explications dans le développement des compréhensions mathématiques chez la personne qui explique. Pour ce faire, une exploration conceptuelle a été menée aux Chapitres 1, 2 et 3, résultant en une perspective théorique sur le phénomène d'explications en regard à celui du développement de compréhensions mathématiques : la dialectique explications-compréhensions. À ce stade, l'objectif en devient d'investiguer empiriquement comment cette perspective se traduit dans l'action, et plus spécifiquement les mécanismes du zigzag et du bricolage peuvent s'impliquer. À cette fin, l'analyse mise en route a pour objectif de donner un sens à des cas suggestifs d'évènements d'explications. Comme présenté au Chapitre 4 sur la méthodologie, deux couches d'analyses sont réalisées pour chaque évènement d'explications. La première couche d'analyse applique les deux grilles d'analyse, soit la *Grille d'analyse : Bricolage* et la *Grille d'analyse : Zigzag*, pour faire une description des évolutions qui émergent dans les évènements d'explications. La seconde couche d'analyse offre, quant à elle, une interprétation dialectique de l'évènement d'explications alignée avec la perspective développée aux Chapitres 2 et 3. Au total, quatre évènements d'explications font l'objet d'analyses. Le premier provient de mon expérience personnelle à la Section 5.1, et concerne l'anecdote portant sur la comparaison de fractions. Le second provient de la recherche d'Arican (2019) à la Section 5.2, et traite des explications données par Ece, une future enseignante de mathématiques, concernant le taux de variation de relations de proportions inverses. Le troisième et le quatrième proviennent d'une collecte de données en salle de classe. La Section 5.3 aborde les explications de Nicolas relatives au problème de la comparaison de périmètres dans différentes étoiles et la Section 5.4, celles de Malik, elles aussi relatives à ce même problème.

5.1 Premier évènement d'explications : Anecdote de la comparaison de fractions

L'anecdote de la comparaison de fractions est tirée de mon expérience personnelle. Sa rédaction ne prétend pas retracer avec précision mot-à-mot comment chaque moment d'explications s'est déroulé. Il s'agit plutôt d'une reconstruction de cette anecdote, organisée en cinq moments. Afin d'alléger, mais aussi d'uniformiser les analyses, cet évènement d'explications est rapporté à la troisième personne. Plutôt que de référer à moi-même ou au je, les extraits réfèrent à Antoine ou au il. L'autre prénom, Sylvain, est un pseudonyme.

La première couche d'analyse qui utilise les deux grilles porte sur les évolutions entre les explications des différents moments, c'est-à-dire sur comment les explications changent entre les moments d'explications. Pour y arriver, deux explications consécutives sont comparées et un sens est donné à un évènement charnière qui les relie. Dans le découpage de cet évènement d'explications, un évènement charnière se retrouve dans ce qui se produit entre deux explications, soit les éléments de contexte qui introduisent la seconde explication. Une unité d'analyse est composée des portions d'explications des deux moments, ainsi que de l'élément de contexte introduisant la seconde explication (voir Figure 5.1). La seconde couche d'analyse relative à l'interprétation dialectique porte sur la même unité d'analyse. Après avoir été exposées sous forme de vignette, les analyses de chaque évolution des explications et des compréhensions sont présentées. Ces analyses sont complétées par des remarques globales.

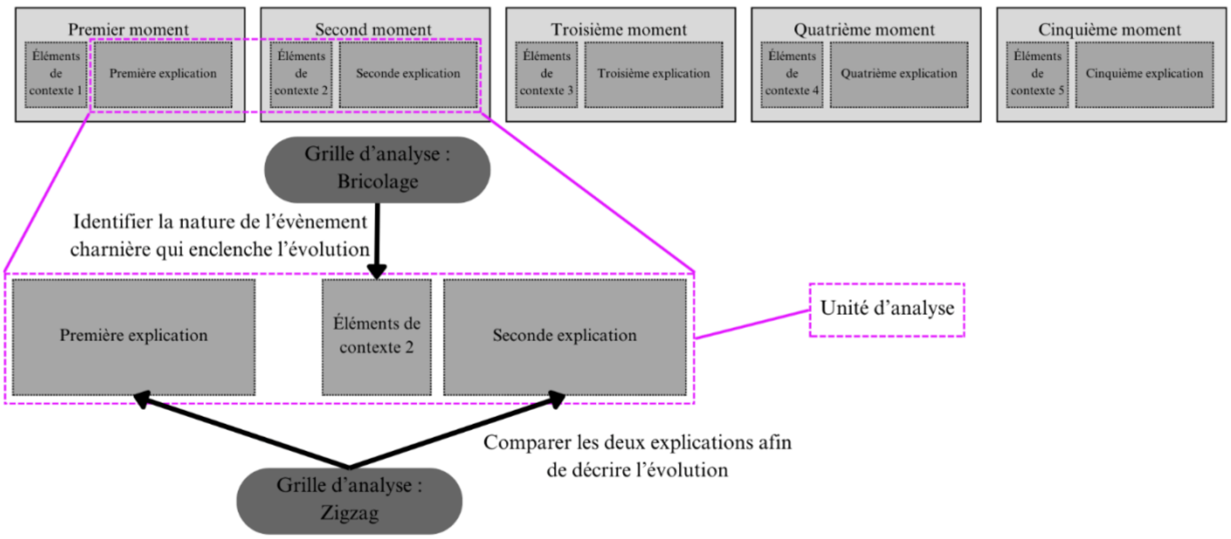


Figure 5.1 – Exemple d'unité d'analyse pour l'évènement d'explications de la comparaison de fractions

5.1.1 Anecdote de la comparaison de fractions - Vignette

Premier moment

Lors d'une discussion, Antoine, un futur enseignant de mathématiques au secondaire, et Sylvain, son ami qui a un intérêt modeste pour les mathématiques, cherchent à comparer les fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$. Sylvain conçoit une manière (et une seule) de déterminer quelle fraction est la plus grande en divisant les numérateurs par leurs dénominateurs respectifs avec une calculatrice et d'en comparer le résultat. Antoine, qui a reçu un enseignement didactique sur la comparaison spécifique de ces deux fractions, veut le persuader d'éviter la calculatrice et propose de les comparer à l'aide d'un dénominateur commun. À l'aide de dénominateurs communs trouvés en utilisant la décomposition en facteurs premiers, Antoine explique comment faire pour transformer les fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ en fractions respectivement équivalentes, mais de même dénominateur, c'est-à-dire $\frac{15}{24}$ et $\frac{14}{24}$, en soulignant que cela permet de ne comparer que les numérateurs. Voici, au sens large, l'explication qu'Antoine formule, qui se réfère au concept de dénominateurs communs :

1. Pour comparer $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$, il est possible de les transformer en fractions respectivement équivalentes, mais de même dénominateur, ce qui permet de ne comparer que les numérateurs.
2. Pour trouver un dénominateur commun, il est possible de faire la décomposition de chaque dénominateur en facteurs premiers. Les fractions deviennent donc : $\frac{5}{8} = \frac{5}{2 \times 2 \times 2}$ et $\frac{7}{12} = \frac{7}{2 \times 2 \times 3}$

3. Pour trouver un dénominateur commun, il est possible de multiplier un dénominateur par les facteurs premiers de l'autre qui sont différents ou en surplus. Comme 8 contient trois facteurs 2 et 12 contient deux facteurs 2 et un facteur 3, il est possible de multiplier 8 par 3 ou encore 12 par 2. Dans les deux cas, le dénominateur commun 24 est obtenu.
4. Il suffit ensuite de transformer les fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ pour qu'elles soient équivalentes, mais aient un dénominateur de 24. Les fractions deviennent donc : $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$ et $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$
5. Avec deux fractions qui ont le même dénominateur, il est possible de ne comparer que les numérateurs. $15 > 14$ signifie que $\frac{15}{24} > \frac{14}{24}$. Comme $\frac{15}{24} > \frac{14}{24}$, alors $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$

Second moment

Or, Sylvain n'est pas particulièrement ouvert à suivre cette explication, ce qui fait réaliser à Antoine que cette explication n'est peut-être pas appropriée à sa discussion avec Sylvain. Après tout, cette explication a été développée dans une optique d'enseigner formellement la comparaison de fractions au secondaire, et non pas de discuter informellement de pourquoi la calculatrice n'est pas nécessaire pour comparer $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$. Antoine réfléchit alors à une autre explication possible qui se porterait mieux au caractère informel de la discussion et convaincrait Sylvain que la calculatrice n'est pas indispensable. Après une brève réflexion, il en arrive à formuler une nouvelle explication, qui réfère à une nouvelle idée, soit celle de la moitié :

1. Il est possible de faire les décompositions de fractions suivantes : $\frac{5}{8}$ peut être décomposé en $\frac{4}{8} + \frac{1}{8}$ et $\frac{7}{12}$ peut être décomposé en $\frac{6}{12} + \frac{1}{12}$.
2. Ces décompositions permettent de remarquer l'équivalence $\frac{4}{8} = \frac{6}{12}$. Il s'agit de $\frac{1}{2}$. Cela signifie que : $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ et $\frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$.
3. Comme les deux fractions peuvent être décomposées en $\frac{1}{2}$ plus quelque chose, il est possible de comparer les surplus $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{12}$ entre eux pour déterminer quelle fraction est la plus grande. Puisque $\frac{1}{8} > \frac{1}{12}$ (par un raisonnement sur la notion de dénominateur), alors $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$.

Troisième moment

Une fois cette nouvelle explication terminée, Sylvain acquiesce. En expliquant, Antoine en est arrivé à prendre peu à peu conscience qu'il semble possible d'utiliser cette idée de se rapporter à la moitié, mais pour comparer d'autres fractions différentes entre elles. Cette idée de la moitié semble pouvoir être appliquée à toutes les fractions dont le numérateur est égal à 1 de plus que la moitié. Afin d'investiguer le potentiel de son idée, mais également d'appuyer son explication précédente, Antoine se lance dans une nouvelle explication :

1. $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ sont des fractions dont le dénominateur est pair et le numérateur est égal à un de plus que la moitié du dénominateur.
2. Dans $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$, la fraction la plus grande est $\frac{5}{8}$, car le surplus par rapport à $\frac{1}{2}$ est le plus grand.
3. Ainsi, pour deux fractions dont les numérateurs sont égaux à un de *plus* que la moitié de leurs dénominateurs respectifs, la fraction la plus grande sera celle dont le dénominateur est le plus *petit*, car ce surplus sera plus grand (par exemple : $\frac{9}{16} > \frac{11}{20} > \frac{33}{64} > \frac{1001}{2000} > \cdots$).

Quatrième moment

Sylvain acquiesce de nouveau. En expliquant, Antoine en a fini par comprendre qu'il est possible de généraliser davantage l'idée de la moitié. Il réalise qu'il est possible de comparer un ensemble plus grand de fractions entre elles, soit toutes les fractions dont les numérateurs sont égaux à n'importe quelle constante de plus que la moitié de leur dénominateur. Antoine se lance dans une nouvelle explication, avec l'objectif de pousser vers une généralité encore plus étendue, c'est-à-dire en faisant passer les numérateurs possibles des surplus de 1 vers une constante. Voici, au sens large, la nouvelle explication formulée :

1. Dans $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$, les surplus étaient de $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{12}$
2. Avec le même nombre (valeur nommée k) de huitièmes que de douzièmes, le surplus en huitième sera toujours plus grand que le surplus en douzièmes (par exemple : $\frac{2}{8} > \frac{2}{12}$, $\frac{3}{8} > \frac{3}{12}$, etc.)
3. Ainsi, pour deux fractions dont les numérateurs ont la même valeur constante k, de *plus* que la moitié de leurs dénominateurs, la fraction la plus grande sera celle dont le dénominateur est le plus *petit*, car le surplus sera plus grand (par exemple, pour $k = 5, \frac{13}{16} > \frac{15}{20} > \frac{37}{64} > \frac{1005}{2000} > \cdots$).

Cinquième moment
Sylvain acquiesce encore. En expliquant, Antoine en est à nouveau venu à réaliser qu'il est possible de généraliser davantage. Il s'aperçoit qu'il est possible de comparer un nouvel ensemble de fractions grâce à un raisonnement analogue, soit toutes les fractions dont les numérateurs sont égaux à n'importe quelle constante de moins que la moitié de leur dénominateur. Antoine se lance dans une nouvelle explication dans l'objectif d'adapter l'idée de la moitié pour un ensemble de fractions différentes.

1. Dans $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$, $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{12}$ étaient des surplus.
2. S'ils avaient été des manques, plutôt que des surplus, comme $\frac{1}{8}$ est plus grand que $\frac{1}{12}$, alors un manque de $\frac{1}{12}$ donne un résultat plus grand qu'un manque de $\frac{1}{8}$.
3. Il en est de même pour $\frac{2}{8} > \frac{2}{12}$, $\frac{3}{8} > \frac{3}{12}$, etc.
4. Pour deux fractions dont les numérateurs ont la même valeur constante k de *moins* que la moitié de leurs dénominateurs, la fraction la plus grande sera celle dont le dénominateur est cette fois-ci le plus *grand*, car le manque devient plus petit (par exemple, pour $k = 5, \frac{3}{16} < \frac{5}{20} < \frac{27}{64} < \frac{995}{2000} < \cdots$).

Après cette explication, Antoine est satisfait. Son objectif initial de convaincre Sylvain que la calculatrice n'était pas essentielle pour comparer les fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ semble atteint et les idées qu'il aborde vont au-delà. D'autres éléments font l'objet de petites réflexions chez lui, mais Antoine choisit de ne pas les aborder à ce moment. Notamment, il se questionne sur l'effet de la parité des dénominateurs et sur les implications émergeant de la soustraction d'une valeur k supérieure aux dénominateurs. Ce sera pour une prochaine fois.

5.1.2 Première évolution du premier au second moment

5.1.2.1 Analyse de premier niveau : Description de l'évolution

Au premier moment, Antoine souhaite convaincre Sylvain que la calculatrice n'est pas nécessaire pour comparer $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$. Pour cela, il formule une explication justifiant pourquoi $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$ qui n'utilise pas de calculatrice, justement pour le convaincre qu'il est possible de le faire sans elle. Cette explication montre comment transformer les fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ en fractions équivalentes avec le même dénominateur, soit $\frac{15}{24}$ et $\frac{14}{24}$, ce qui permet de les comparer uniquement avec leurs numérateurs. Elle s'appuie sur une compréhension mobilisant la notion de dénominateur commun, qui, pour Antoine, est elle-même articulée autour d'une décomposition en facteurs premiers. Au second moment, Antoine poursuit le même objectif, soit de convaincre Sylvain que la calculatrice peut être mise de côté en lui expliquant pourquoi $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$, mais il le fait différemment. Son explication montre comment interpréter les fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ en se rapportant à la fraction $\frac{1}{2}$, soit avec $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$, ce qui permet de ne comparer que les surplus entre eux. Cette nouvelle explication s'appuie sur une compréhension différente des fractions et de leur comparaison, qui mobilise une relation à la moitié. Les deux explications ont un même objectif, relativement à la comparaison de fractions et à la calculatrice, mais sont différentes sur la nature de ce qui est expliqué et tout autant au niveau des compréhensions mobilisées pour expliquer. L'évolution consiste en un passage d'une explication à l'autre, soit à expliquer différemment pourquoi $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$ sans utiliser de calculatrice.

Suite à l'explication initiale au premier moment, Antoine réalise que son explication, même si elle n'utilise pas de calculatrice, ne convainc pas Sylvain que celle-ci n'est pas indispensable. Bien qu'Antoine considère son explication comme étant valide sur le plan mathématique, la réaction de refus de Sylvain lui laisse entendre qu'elle n'est peut-être pas assez facile à suivre pour être convaincante. Cet évènement charnière est à voir comme un *bogue d'explication*. Ce *bogue* provient alors de la rétroaction de Sylvain, qui affirme que cette explication ne lui convient pas, comme le montre ce passage, tiré de la vignette.

> Or, Sylvain n'est pas particulièrement ouvert à suivre cette explication, ce qui fait réaliser à Antoine que cette explication n'est peut-être pas appropriée à sa discussion avec Sylvain. Après tout, cette explication a été développée dans une optique d'enseigner formellement la comparaison de fractions au secondaire, et non pas de discuter informellement de pourquoi la calculatrice n'est pas nécessaire pour comparer $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$.

Face à ce *bogue d'explication*, Antoine est amené à faire une évaluation *a posteriori* de son explication initiale afin de déterminer ce qui pourrait être changé pour arriver à formuler une explication de pourquoi $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$ qui est suffisamment simple et convaincante, tout en n'utilisant pas de calculatrice. Cette évaluation peut être vue comme provoquant une *transformation.* Antoine formule une nouvelle explication, celle du second moment, à partir d'une autre compréhension complètement différente et basée sur la relation des fractions à leur moitié. Il ne tente pas, par exemple, de retravailler l'explication du premier moment pour en simplifier ou en clarifier des éléments afin d'offrir une autre explication des mêmes compréhensions initiales sur les dénominateurs communs. Par exemple, il aurait été possible de trouver le dénominateur 24 dans la liste des multiples de 8 (8, 16, 24, etc.) et de 12 (12, 24, 36, etc.). Autrement, Antoine aurait pu trouver des fractions de même dénominateur en multipliant les dénominateurs 8 et 12 initiaux ($\frac{5}{8} * \frac{12}{12} = \frac{60}{8*12}$ et $\frac{7}{12} * \frac{8}{8} = \frac{56}{12*8}$, ce qui signifie que $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$, puisque $\frac{60}{8*12} > \frac{56}{12*8}$). Cette façon de faire qui ne demande pas de calculer le dénominateur commun. Ainsi, plutôt que de réajuster son explication relativement à la notion de dénominateur commun, Antoine bâtit une toute nouvelle explication qui, ancrée dans une autre idée, se veut plus facile à comprendre et possiblement plus convaincante, comme le montre ce passage, tiré de la vignette.

Antoine réfléchit alors à une autre explication possible qui se porterait mieux au caractère informel de la discussion et convaincrait Sylvain que la calculatrice n'est pas indispensable. Après une brève réflexion, il en arrive à formuler une nouvelle explication, qui réfère à une nouvelle idée, soit celle de la moitié.

Voici un schéma explicatif synthétisant la première évolution.

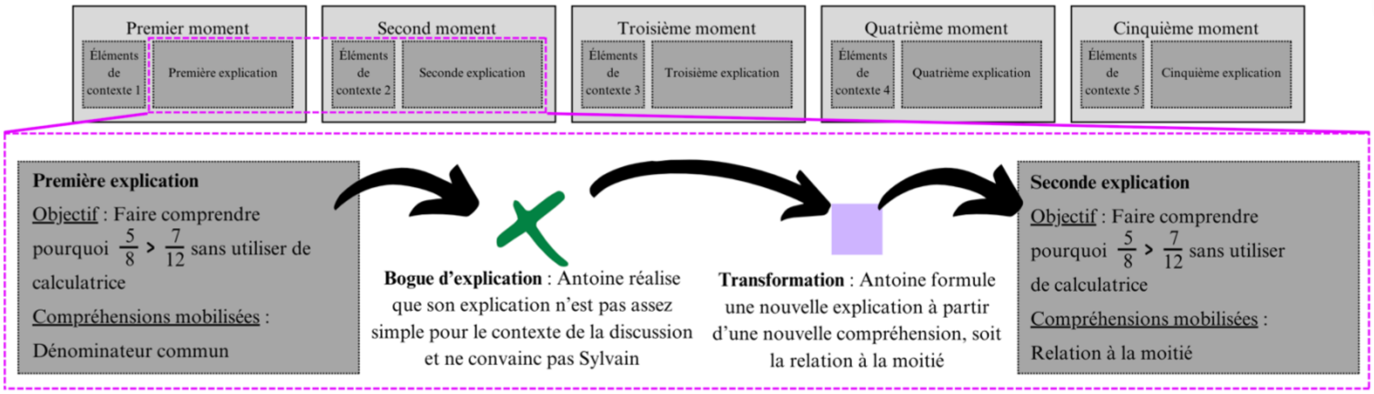


Figure 5.2 – Schématisation de la première évolution de l'anecdote de la comparaison de fractions

5.1.2.2 Analyse de second niveau : Interprétation dialectique de l'évolution

Le *bogue d'explication* est à voir comme étant né du fait que l'explication initiale d'Antoine n'a pas « fonctionnée », c'est-à-dire qu'elle n'a pas convaincu Sylvain que la calculatrice n'est pas nécessaire. Ce *bogue d'explication* peut être vu comme se traduisant en insuffisance sur le plan dialectique, et donc en retour, peut représenter un *bogue* également au niveau des compréhensions d'Antoine. Ses compréhensions mathématiques ne sont pas à voir comme étant *boguées* dans le sens d'être mathématiquement défaillantes ou invalides, mais comme n'ayant pas permis à Antoine de formuler une explication convaincante. Il est possible d'y voir qu'à ce moment, l'évaluation qu'Antoine fait de son explication l'amène à considérer la notion de dénominateur commun comme étant insuffisante en elle-même pour formuler une explication abordant la comparaison de $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ sans calculatrice qui atteigne son objectif de convaincre Sylvain. Ceci est appuyé par le fait que, pour réguler son explication, il remplace l'idée du dénominateur commun par une tout autre idée, celle de la relation à la moitié, qui est nouvelle et différente. Alors qu'il aurait pu réutiliser d'une autre manière la notion de dénominateur commun, Antoine change plutôt d'appuis conceptuels. Ceci peut être vu comme montrant une certaine limite à ses compréhensions personnelles sur la notion de dénominateurs communs. Cette limite peut être vue comme générant le *bogue d'explication*, mais, en plus, comme orientant la manière d'autoréguler son explication subséquente.

Pour surmonter ce *bogue d'explication*, Antoine effectue une *transformation* qui, elle aussi, est à voir comme émergeant de manière dialectique, c'est-à-dire conjointement sur les plans des explications et des compréhensions. En cherchant une autre manière d'expliquer, Antoine en arrive à développer une autre manière de comprendre pourquoi $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$ avec la relation à la moitié, celle-ci ayant émergée en action. L'idée de se rapporter à la moitié a effectivement émergée dans l'objectif de formuler une autre explication de pourquoi $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$ sans utiliser de calculatrice, et qui réussirait à convaincre Sylvain que cette dernière n'est pas nécessaire. La référence à la moitié est à voir comme une *transformation* des compréhensions d'Antoine, ce qui lui permet d'atteindre son objectif d'explication en *transformant* autant ses explications que ses compréhensions. Le fait qu'Antoine considère ses explications mobilisant la relation à la moitié comme étant bonnes et fonctionnelles peut être vu comme montrant qu'il considère tout autant sa compréhension relative à la moitié comme étant, non seulement, elle aussi bonne et fonctionnelle, mais en plus, appropriée pour convaincre Sylvain en expliquant la comparaison des fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$. Ainsi, ce *bogue d'explication* provoque une évolution (une *transformation*) des compréhensions d'Antoine, parce que ce sont les compréhensions sur lesquelles les explications initiales se sont appuyées (relatives au dénominateur commun) qui ont fait l'objet de remises en question et qui sont *déboguées*. Ainsi, le besoin de mieux expliquer la comparaison de $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ semble alors mener à une nouvelle compréhension relative à la moitié, qui, en retour, mène à une nouvelle explication ancrée dans cette idée de moitié.

5.1.3 Deuxième évolution du second au troisième moment

5.1.3.1 Analyse de premier niveau : Description de l'évolution

Au second moment, Antoine explique pourquoi $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$ sans utiliser de calculatrice afin de convaincre Sylvain que cette dernière n'est pas essentielle. En mobilisant une compréhension relative à la moitié, son explication montre comment comparer les fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ en se rapportant à la fraction $\frac{1}{2}$, soit $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$, ce qui permet de ne considérer que les surplus de $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{12}$ à la moitié. Au troisième moment, Antoine explique comment cette même idée de la moitié peut être utilisée pour l'ensemble des fractions dont le numérateur est égal à « 1 de plus » que la moitié du dénominateur. Son explication s'appuie tout autant sur sa compréhension relative à la moitié, mais la creuse pour l'ensemble des fractions dont le numérateur est égal à 1 de plus que la moitié du dénominateur (par exemple : $\frac{9}{16} > \frac{11}{20} > \frac{33}{64} > \frac{1001}{2000} > \cdots$). Il le fait non plus dans l'objectif de convaincre Sylvain qu'une calculatrice n'est pas nécessaire, mais plutôt pour lui faire voir le fonctionnement global de l'idée de la moitié. Les deux explications partagent une même compréhension, l'idée de la moitié, mais sont différentes au niveau de la généralité de ce qui est expliqué : l'explication du second moment est davantage locale, centrée sur les fractions spécifiques $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ et l'explication du troisième moment est étendue de façon générale, pensée pour l'ensemble des fractions dont le numérateur est égal à 1 de plus que la moitié du dénominateur.

Cette évolution peut être vue comme étant générée par une *possibilité de compréhension*. Après l'explication du second moment, Antoine réalise qu'il est possible d'étendre l'idée de moitié pour une famille de fractions dont $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ font partie, soit l'ensemble des fractions dont le numérateur est égal à 1 de plus que la moitié du dénominateur. Les surplus de $\frac{1}{8}$ et de $\frac{1}{12}$ sont des cas particuliers au niveau de leurs dénominateurs, ils sont reliés localement à $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$. La nouvelle explication réfère à tous les surplus de 1, peu importe leur dénominateur, comme le montre ce passage tiré de la vignette.

> En expliquant, Antoine en est arrivé à prendre peu à peu conscience qu'il semble possible d'utiliser cette idée de se rapporter à la moitié, mais pour comparer d'autres fractions différentes entre elles. Cette idée de la moitié semble pouvoir être appliquée à toutes les fractions dont le numérateur est égal à 1 de plus que la moitié.

Cette *possibilité de compréhension* semble mener Antoine à comprendre que des dénominateurs plus grands génèrent tout le temps des surplus plus petits. Cette réalisation semble le mener vers l'explication que la comparaison de deux fractions dont le numérateur est égal à 1 de plus que la moitié du dénominateur peut se faire en ne comparant que les dénominateurs. Dans cette famille de fractions, plus grand est le dénominateur, plus petite sera la fraction. Cet approfondissement de compréhension émerge de, et suit, l'explication du second moment. Suite à cette *possibilité de compréhension,* Antoine explore et produit une nouvelle explication qui lui permet d'appuyer l'idée de la moitié utilisée pour les fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$. Cette exploration de la *possibilité de compréhension* provoque ce qui peut être vu comme un *accroissement*. Antoine investigue le fonctionnement de l'idée de la moitié pour $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ et l'applique à un ensemble de fractions dont $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ font partie, soit toutes les fractions dont le numérateur est égal à 1 de plus que la moitié du dénominateur (par exemple : $\frac{9}{16} > \frac{11}{20} > \frac{33}{64} > \frac{1001}{2000} > \cdots$). Il accède à une variété de fractions pour lesquelles l'idée précédente de la moitié est utilisable. Cette nouvelle compréhension, soit l'idée de se rapporter à la moitié pour comparer deux fractions dont le numérateur est égal à 1 de plus que la moitié du dénominateur, est le sujet de l'explication du troisième moment. Il bâtit sur l'explication du second moment pour l'*accroitre* et, par le fait même, l'appuyer, comme le montre ce passage tiré de la vignette.

> Dans l'élan de la conversation, afin d'investiguer le potentiel de son idée, mais également d'appuyer son explication précédente, Antoine se lance dans une nouvelle explication, sous le prétexte de pousser l'idée de la moitié vers une généralité.

Voici un schéma explicatif synthétisant la seconde évolution.

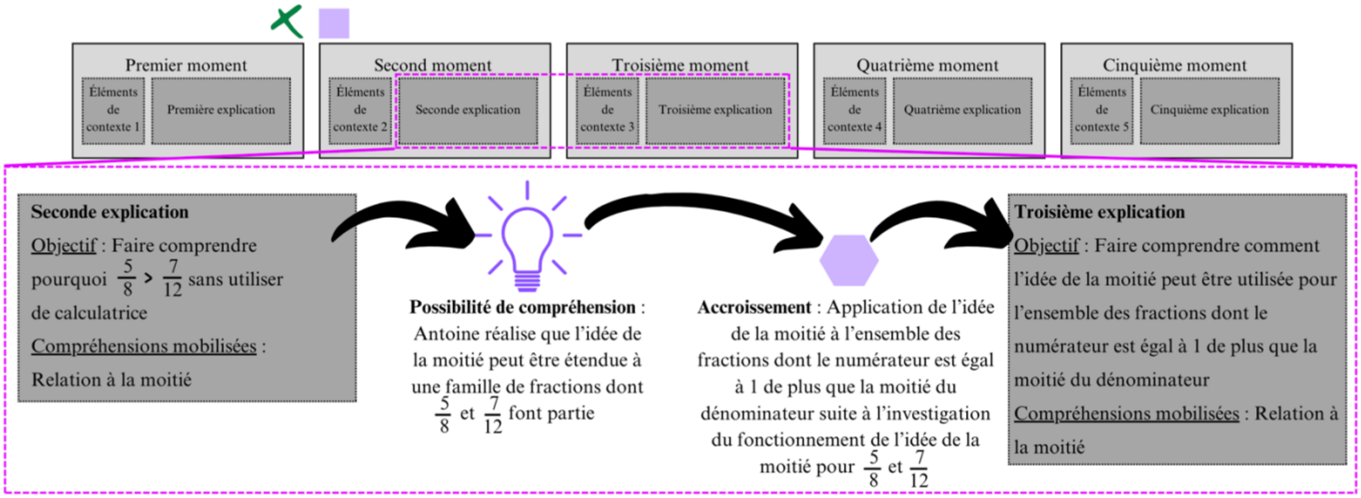


Figure 5.3 – Schématisation de la seconde évolution de l'anecdote de la comparaison de fractions

5.1.3.2 Analyse de second niveau : Interprétation dialectique de l'évolution

La *possibilité de compréhension* de généraliser l'idée de la moitié à une famille de fractions est à voir comme étant née dans l'action d'expliquer, dans son déploiement dialectique. L'action d'expliquer l'interprétation des fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ en fractions se rapportant à $\frac{1}{2}$, soit $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{2}+\frac{1}{12}$ pour n'en comparer que les surplus, est vue comme mobilisant un processus de compréhension chez Antoine qui travaille l'idée de la moitié en la projetant vers d'autres fractions, pour formuler cette explication. Ce processus de compréhension force Antoine à se familiariser avec les compréhensions qu'il utilise pour expliquer, signifiant qu'il les fait alors avancer. Cet avancement dialectique des explications et des compréhensions permet de préparer le terrain pour qu'Antoine réalise une *possibilité de compréhension*.

Il est également possible d'y reconnaître un processus d'évaluation et d'autorégulation émergeant de la dialectique explications-compréhensions. À ce moment, en expliquant, Antoine est amené à faire une évaluation continuelle de son explication. Cette évaluation se fait afin de vérifier si une explication atteint son objectif et si elle est mathématiquement valide, le tout dans l'idée de l'ajuster et de la bonifier en cours de route au besoin. Il s'agit d'un autre processus de compréhension portant autant sur la teneur mathématique des idées expliquées que sur leur clarté dans l'explication. Une telle évaluation veut donner un sens à l'émergence de la *possibilité de compréhension* dans cet évènement, à travers les questionnements qu'elle peut inviter. En voyant l'explication d'Antoine comme étant évaluée par lui au fur et à mesure qu'elle est formulée, il est possible de reconnaître qu'elle peut faire naître des questionnements sur l'idée de se rapporter à la moitié. Par exemple, « Les fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ sont-elles des cas spécifiques d'une famille de fractions plus grande? ». « L'idée de la moitié fonctionne-t-elle sur l'ensemble de fractions dont le numérateur est égal à 1 de plus que la moitié du dénominateur? ». Ces questionnements peuvent être vus comme générant chez Antoine une analyse en temps réel des explications pour approfondir les éléments qu'il voit comme pouvant ne pas être clairs pour Sylvain. En étant alimentée par le fait qu'Antoine se familiarise avec ces idées, cette évaluation est vue comme faisant naitre un potentiel de comprendre quelque chose de nouveau, soit l'*accroissement*, et d'améliorer l'explication en l'ancrant dans un fonctionnement généralisé.

Les explications d'Antoine sont à voir comme un moyen d'explorer la *possibilité de compréhension*. La vignette mentionne qu'Antoine explique « afin d'investiguer le potentiel de son idée », parce que les processus de compréhensions soulevés ci-dessus se mettraient en route dans l'action d'expliquer. Cette exploration résulte en *accroissements* simultanés des explications et des compréhensions, dans leurs influences mutuelles. En expliquant, Antoine est amené à comprendre de mieux en mieux l'*accroissement* possible de l'idée de la moitié et, en retour, ces avancements des compréhensions lui permettent de continuer à s'engager dans la démarche d'explication et d'arriver jusqu'au bout.

5.1.4 Troisième évolution du troisième moment au quatrième moment

5.1.4.1 Analyse de premier niveau : Description de l'évolution

Au troisième moment, Antoine explique l'idée de la moitié en étendant les dénominateurs possibles pour les fractions à comparer. Au quatrième moment, Antoine étend plus loin encore cette idée et explique comment elle peut être utilisée pour l'ensemble des fractions dont le numérateur est égal à, non pas uniquement 1, mais à une valeur constant k de plus que la moitié du dénominateur (par exemple, pour $k = 5, \frac{13}{16} > \frac{15}{20} > \frac{37}{64} > \frac{1005}{2000} > \cdots$). Son explication porte sur le fonctionnement de l'idée de la moitié pour $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$, avec une attention particulière pour les surplus par rapport à $\frac{1}{2}$, une partie qu'il généralise. Les surplus de l'explication initiale du troisième moment de 1 huitième et 1 douzième (1 nième pour les fractions dont le numérateur est égal à 1 de plus que la moitié du dénominateur) sont étendus à une valeur constante k en huitième, douzième (ou nième), soit k huitièmes, k douzièmes (ou k nièmes). Les deux explications mobilisent encore les mêmes compréhensions, soit celles de l'idée de la moitié; les deux portent sur son fonctionnement, mais ne mettent pas l'accent sur la même partie. Alors que l'explication du troisième moment s'intéresse en particulier aux dénominateurs des surplus ou des fractions à comparer, celle du quatrième moment s'intéresse en particulier à leurs numérateurs.

Cette évolution peut être vue comme émergeant d'une *possibilité de compréhension*. La réalisation survenant suite à l'explication du troisième moment, soit que les surplus de $\frac{1}{8}$ et de $\frac{1}{12}$ sont des cas particuliers au niveau de leurs numérateurs, semble faire entrevoir à Antoine la possibilité que tant que les numérateurs des surplus sont égaux entre eux, il est possible de comparer en rapportant la moitié. C'est ce que montre ce passage tiré de la vignette.

> En expliquant, Antoine en a fini par comprendre qu'il est possible de généraliser davantage l'idée de la moitié. Il réalise qu'il est possible de comparer un ensemble plus grand de fractions entre elles, soit toutes les fractions dont les numérateurs sont égaux à n'importe quelle constante de plus que la moitié de leur dénominateur.

Face à cette *possibilité de compréhension*, Antoine explore le fonctionnement de l'idée de la moitié pour les fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ avec l'angle des surplus des numérateurs, ce qui est à voir comme produisant une *généralisation*. Il remplace une partie spécifique de son explication par une autre obtenue en la modifiant légèrement afin de la rendre plus générale. Ici, « un surplus de *spécifiquement 1* de plus que la moitié de leurs dénominateurs » devient « *une valeur constante* de plus que la moitié de leurs dénominateurs ». Le reste de l'explication du troisième moment demeure le même, comme le montre ce passage tiré de la vignette.

> Antoine se lance dans une nouvelle explication, avec l'objectif de pousser vers une généralité encore plus étendue, c'est-à-dire en faisant passer les numérateurs possibles des surplus de 1 vers une constante.

Voici un schéma explicatif synthétisant la troisième évolution.

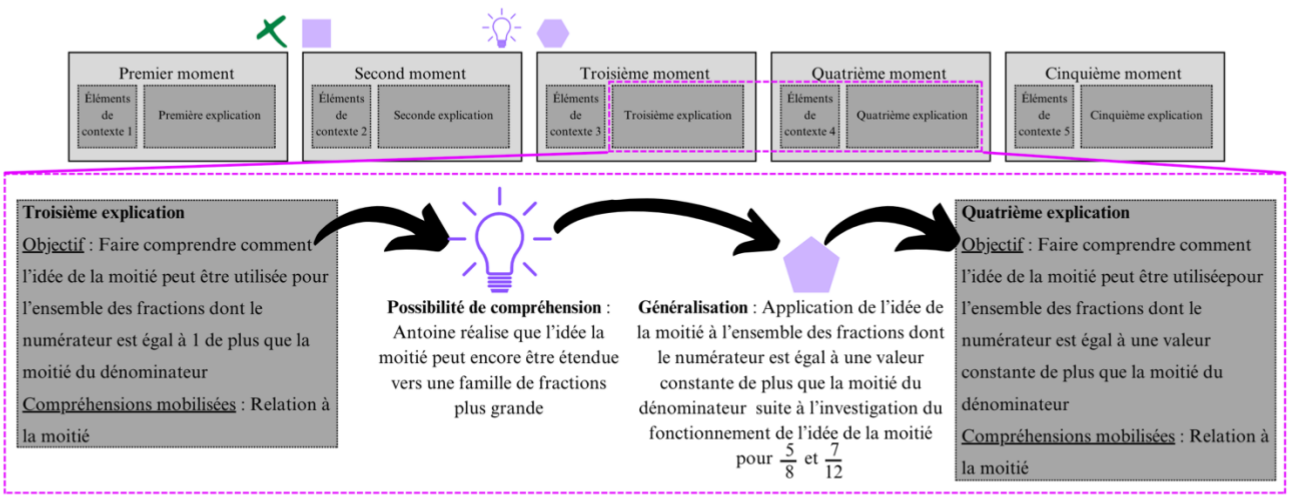


Figure 5.4 – Schématisation de la troisième évolution de la comparaison de fractions

5.1.4.2 Analyse de second niveau : Interprétation dialectique de l'évolution

Cette interprétation dialectique sur les mécanismes explications-compréhensions recoupe celle offerte pour la seconde évolution. À nouveau, la *possibilité de compréhension* de généraliser l'idée de la moitié à une famille de fractions encore plus grande est vue comme étant née dans le déploiement dialectique de l'action d'expliquer. En expliquant en quoi l'idée de mettre en relation avec la moitié peut être étendue au premier ensemble de fractions, Antoine se familiarise avec les compréhensions qui y sont mobilisées, ce qui lui donne de plus en plus de moyens pour réaliser une *possibilité de compréhension*. Appuyée sur elles, une évaluation continuellement faite par Antoine de ses explications mènerait à la *possibilité de compréhension* à travers les questionnements qui peuvent en émerger, tels que : « Les surplus sont-ils limités à 1 de plus que la moitié? » et « L'idée de la moitié fonctionne-t-elle pour n'importe quel surplus égal à une valeur constante? » Antoine entrevoit et prend l'avantage d'un potentiel de comprendre du nouveau et d'améliorer son explication précédente en l'ancrant dans un fonctionnement encore plus généralisé.

La *généralisation* qui en découle est à voir comme prenant elle aussi forme dans la dialectique explications-compréhensions. À nouveau, l'exploration de cette possibilité de compréhension peut être vue comme se faisant par l'explication qu'Antoine fait de ce qu'il comprend de l'idée de la moitié et sa généralisation des surplus de 1 qu'il étant à des surplus de k. Il est alors possible de concevoir encore ici qu'expliquer permet à Antoine de comprendre mieux ce que cette possibilité de compréhension signifie mathématiquement, ce qui lui permettrait en retour de généraliser ses explications et de les mener à terme.

5.1.5 Quatrième évolution du quatrième au cinquième moment

5.1.5.1 Analyse de premier niveau : Description de l'évolution

Au quatrième moment, Antoine approfondit davantage l'idée de se rapporter à la moitié en expliquant comment étendre les possibilités de numérateurs des surplus à la moitié. Son explication généralise l'idée de la moitié pour les fractions dont le numérateur est égal à une valeur constante k de *plus* que la moitié du dénominateur. Au cinquième moment, Antoine explique comment cette idée généralisée peut être utilisée pour des fractions dont le numérateur est égal à une valeur constante k de *moins* que la moitié du dénominateur (par exemple, pour $k = 5, \frac{3}{16} < \frac{5}{20} < \frac{27}{64} < \frac{995}{2000} < \cdots$). D'une certaine façon, son explication porte sur le cas où les surplus deviennent des « manques ». Les deux explications mobilisent ainsi les mêmes compréhensions en les raisonnant différemment.

L'évènement charnière qui génère une évolution de l'explication des surplus vers l'explication des manques est à voir comme étant, encore une fois, une *possibilité de compréhension*. En effet, après l'explication du quatrième moment, Antoine réalise que l'idée de la moitié, qui porte initialement sur les surplus, peut être élargie vers une idée analogue, qui porte sur les manques, comme le montre ce passage tiré de la vignette.

> En expliquant, Antoine en est à nouveau venu à réaliser qu'il est possible de généraliser davantage. Il s'aperçoit qu'il est possible de comparer un nouvel ensemble de fractions grâce à un raisonnement analogue, soit toutes les fractions dont les numérateurs sont égaux à n'importe quelle constante de moins que la moitié de leur dénominateur.

Il est possible de comprendre que face à cette *possibilité de compréhension*, Antoine soit amené à investiguer le fonctionnement des surplus et l'effet de les transformer en manques. Tout ceci est à voir comme menant vers une *généralisation*. En modifiant légèrement une prémisse, soit en changeant des surplus vers les manques, Antoine explique que l'idée de la moitié reste fonctionnelle, à une modification près. À nouveau, Antoine remplace une partie spécifique de l'idée de la moitié utilisée dans l'explication du quatrième moment par une autre obtenue en la modifiant légèrement. Cela permet de pousser l'idée de la moitié vers une nouvelle généralité, soit qu'elle peut être appliquée à deux familles de fractions distinctes, mais analogues, comme le montre ce passage tiré de la vignette.

> Antoine se lance dans une nouvelle explication dans l'objectif d'adapter l'idée de la moitié pour un ensemble de fractions différentes.

Voici un schéma explicatif synthétisant la quatrième évolution.

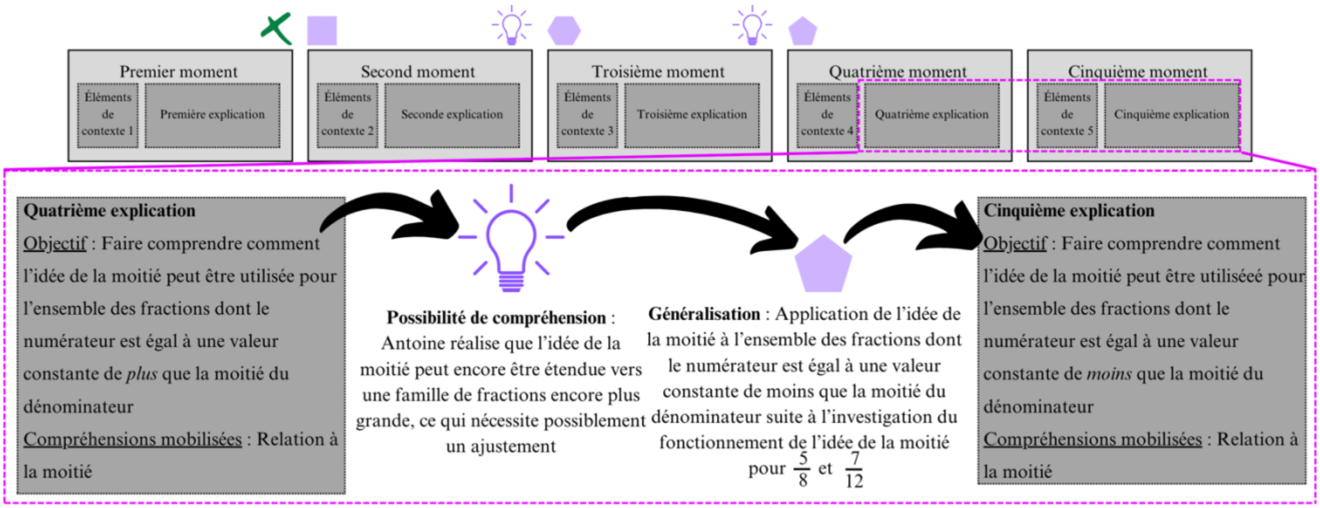


Figure 5.5 – Schématisation de la quatrième évolution de la comparaison de fractions

5.1.5.2 Analyse de second niveau : Interprétation dialectique de l'évolution

À son tour, l'interprétation dialectique recoupe celle offerte pour la seconde évolution (ainsi que celle de la troisième évolution). À nouveau, la *possibilité de compréhension* de généraliser l'idée de la moitié à une famille de fractions encore plus grande est à voir comme étant née dans l'action d'expliquer, qui se déploie dialectiquement avec les compréhensions. L'action d'expliquer l'idée de la moitié avec les surplus peut être vue comme amenant Antoine à se questionner sur l'idée des manques. Plus spécifiquement, en mobilisant ses compréhensions sur les surplus pour expliquer, il est possible d'y voir qu'Antoine se familiarise avec elles, générant un contexte opportun pour faire naitre une *possibilité de compréhension* supplémentaire et connexe, soit celle des manques. En plus, l'évaluation qu'Antoine fait continuellement de ses explications, qui s'appuierait d'ailleurs sur sa familiarisation avec les compréhensions qu'il utilise pour expliquer, est à voir comme continuant à l'amener à se poser des questions sur ce qu'il explique. Cette fois-ci, ce sont des questionnements qui peuvent être du type : Et si le surplus d'une valeur constante était un manque? L'idée de se rapporter à la moitié puisse fonctionne-t-elle, à quelques ajustements près, avec des manques plutôt que des surplus? Tout ceci est à voir comme constituant un potentiel de comprendre quelque chose de nouveau et de *généraliser* son explication précédente.

De la même manière qu'élaborée précédemment, cette *généralisation* émergente est à voir comme prenant forme dans la dialectique explications-compréhensions, parce que l'exploration de cette *possibilité de compréhension* est faite en expliquant ce qu'il en comprend. Ainsi, l'action d'expliquer est de nouveau mobilisée par Antoine comme un moyen de mieux comprendre ce que cette *possibilité de compréhension* signifie mathématiquement, ce qui lui permet en retour d'avancer dans sa démarche d'explication et même de les mener à terme. En d'autres mots, autant l'action d'expliquer les surplus a mené Antoine à entrevoir celle des manques, autant c'est en expliquant ce qu'il comprend de ces manques que cette dernière a pu murir au-delà de ce qu'elle était initialement.

5.1.6 Remarques globales sur l'anecdote de la comparaison de fraction

Cette anecdote rend explicite un caractère particulier de la dialectique explications-compréhensions. Il s'agit de l'influence des évolutions sur les possibilités de futures évolutions dialectiques. Ici, les évolutions dialectiques semblent fréquemment avoir ouvert la porte à de nouvelles évolutions. Par exemple, il a été souligné que c'est en raison du fait que l'explication du premier moment s'est butée à un *bogue d'explication* que l'explication du second moment s'est mise en route. L'idée de se rapporter à la moitié provient alors d'un ajustement de l'explication du premier moment, qui a généré un besoin de mobiliser des compréhensions nouvelles. Cependant, cette évolution, soit le développement d'une seconde explication ancrée dans les nouvelles compréhensions relatives à l'idée de la moitié, a en retour ouvert la possibilité d'approfondir cette même idée : de locale à générale pour les surplus de numérateurs 1, à plus générale pour les surplus de numérateurs k, à encore plus générale pour les manques de numérateurs k. Et grâce à cette seconde explication, les trois possibilités de compréhension ont ensuite émergé, une à la fois et entremêlées. Chaque évolution représente un pas de plus dans l'approfondissement de l'idée de la moitié, qui ouvre la porte à être approfondie à son tour. Ainsi, cette anecdote rend explicite le caractère chargé en potentiel des évolutions dialectiques. Ici, chaque explication semble approfondir l'explication qui la précède et, par le fait même, les compréhensions mathématiques en appui aux explications. En plus, *a posteriori*, chaque explication peut être vue comme ayant la capacité d'évoluer encore plus à travers l'évaluation continuelle menée par Antoine et parce qu'il s'approprie les idées mathématiques en les expliquant. Une roue semble être en cours, dans laquelle chaque explication, basée dans une compréhension, peut faire émerger une nouvelle compréhension qui se matérialise en expliquant. Tout ceci n'est pas à voir de façon linéaire : explications et compréhensions sont ici déployées en tandem, de façon dialectique.

À ce sujet, il se dégage de cette anecdote une dimension de la dialectique explications-compréhensions qui éclaire un rôle que semble avoir l'action d'expliquer dans le développement de compréhensions mathématiques chez la personne qui explique. Lorsque les explications d'Antoine sont achevées et génèrent l'acquiescement de la part de Sylvain, Antoine semble accorder une importance supplémentaire aux compréhensions expliquées. Notamment, l'idée de la moitié semble être devenue significative pour Antoine, parce qu'elle a fonctionné pour formuler une explication de pourquoi $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$ qui s'avérait assez simple et efficace pour convaincre Sylvain qu'il était possible de comparer les fractions sans utiliser de calculatrice. Alors que l'idée de la moitié était initialement bonne, mais sans plus, elle était utilisée de manière instrumentale, elle est devenue d'intérêt parce qu'elle a mené à une explication fonctionnelle. L'idée de la moitié est devenue une fin en soi et cet intérêt semble n'avoir que grandi à travers les évolutions engendrées. Cette anecdote révèle une dimension à la dialectique explications-compréhensions qui donne de l'importance et qui rend significatives les compréhensions *à travers* l'action d'expliquer. Cette valorisation des compréhensions expliquées semble déclencher un effet boule de neige, où explications et compréhensions se développent de plus en plus. Il est difficile de distinguer ou de reconnaître lesquels entre explications et compréhensions sont déclencheurs : il s'agit de la dialectique explications-compréhensions en action.

De plus, il est possible d'y voir une autre facette de la dialectique explications-compréhensions en action, soit le rôle que peut avoir l'action d'expliquer dans l'exploration des idées. Durant cette anecdote, les trois *possibilités de compréhensions* sont explorées par Antoine grâce à des explications de ce qu'il en comprend de ces possibilités. Pour les troisième, quatrième et cinquième évolutions, faire l'explication de ses compréhensions n'est pas simplement un moyen de les faire comprendre à un interlocuteur, mais semble être un moyen pour Antoine d'explorer des *possibilités de compréhensions* et celles-ci se matérialisent en expliquant.

5.2 Deuxième évènement d'explications : Les explications d'Ece

Les explications d'Ece forment un évènement d'explications provenant d'une recherche en didactique des mathématiques, celle d'Arican (2019). Ces explications sont rapportées grâce à des extraits de verbatims, entrecoupés d'analyses relatives à l'étude. Ces extraits sont organisés en trois moments distincts, chacun rapportant des explications formulées par Ece de manière précise. La première couche d'analyse utilisant les deux grilles d'analyse porte sur les évolutions dans les explications à l'intérieur de chaque moment, c’est-à-dire sur comment les explications changent en cours de route dans un même moment d’explications. Pour y arriver, les évolutions sont repérées dans le moment d’explications sous forme d’endroits précis où une explication se réoriente. Par exemple, la localisation d’une évolution peut se faire en identifiant des coupures dans lesquelles Ece, la personne qui explique, en arrive à expliquer quelque chose de différent, ou encore, à expliquer la même chose, mais différemment. Il y a un découpage des explications en sous-moments, qui sont nommés des *blocs d’explications*. Pour décrire les évolutions avec les grilles d’analyse, deux blocs d’explications consécutifs sont comparés et un sens est donné à l’évènement charnière qui les relie. Dans le découpage de cet évènement d’explications, les évènements charnières ne sont pas explicitement annoncés. C’est pourquoi ils sont déterminés par l’analyse, notamment au cours de la comparaison des deux blocs d’explications qui donne un sens à l’évolution. Une unité d’analyse est alors composée de deux blocs d’explication consécutifs (voir Figure 5.6). La seconde couche d’analyse relative à la dialectique explications-compréhensions porte sur la même unité d’analyse. Ainsi, après avoir présenté les verbatims dans une vignette, les analyses (à deux niveaux) des évolutions sont présentées. Ces analyses sont complétées par des remarques globales.

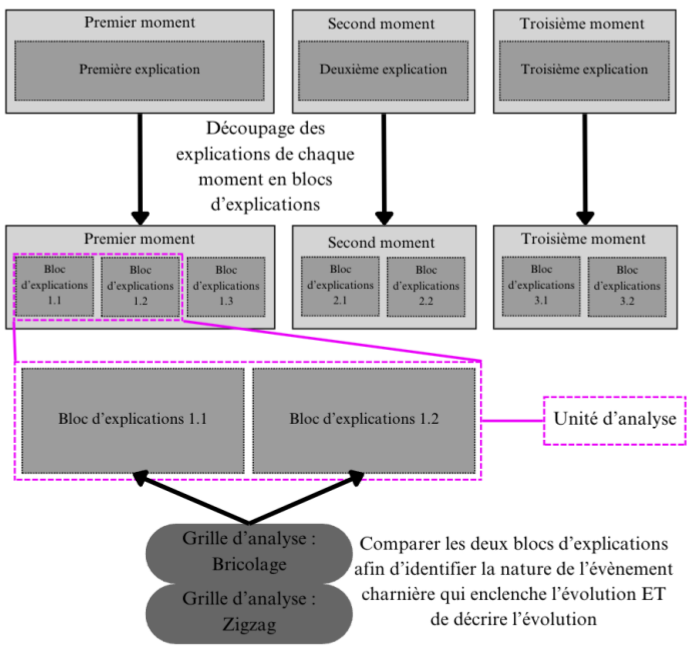


Figure 5.6 – Exemple d’unité d’analyse pour les explications d’Ece

5.2.1 Les explications d’Ece - Vignette

Arican (2019, pp. 1428 – 1436)

Gear I : Please calculate the number of notches on Gear B with 3-cm radius, given that Gear A has 4-cm radius and 12 notches. Show the relationship between the number of notches and radius by an appropriate graph.

Gear II : Please calculate the number of revolutions of Gear A with 4-cm radius, given that Gear B with 3-cm radius revolved 12 times. Show the relationship between the number of revolutions and radius (or the number of notches) by an appropriate graph.

Premier moment

Similar to Feyza, Ece provided correct solutions to the Gear I and Gear II problems. […] In the Gear II problem, she used the across-multiplication strategy to solve the problem (Fig. 8a). Next, she determined an inversely proportional relationship between the number of revolutions and radius and represented this relationship drawing the linear graph in Fig. 8a. During the interview, I asked to Ece if she could draw a new graph since she did not clearly mark the points on her graph. Hence, she drew the graph in Fig. 8b. Some exchanges later, I pointed that she had a straight line in her first graph, but a curved line in the second graph. She explained the reason as follows:

> **Ece**: It should be straight in this one [pointing the graph in Fig. 8b] too. The reason for this is that when radius increases by 1 cm....no it should not be straight. When this one [pointing at 36 notches] decreases by half, this one [pointing at 18 notches] decreases by two-thirds. Hence, the increase in this one [referring to the increase from 1 cm to 2 cm] and this one [referring to the decrease from 36 notches to 18 notches] are not the same. [Thinking] No...no this is not [referring to the line in Fig. 8a] straight.
>
> **Int**: Do you think it should be curved like this [pointing at the graph in Fig. 8b]?
>
> **Ece**: Yes.

Second moment

Ece's responses showed that my point of attention to the straightness of lines precipitated a perturbation in her understanding of the inversely proportional graph. Therefore, to investigate her reasoning, I asked her understanding of an inversely proportional graph:

> **Int**: For you, what does an inversely proportional graph look like?
>
> **Ece**: For me, an inversely proportional graph looks like...so, when a variable increases, the other one decreases [drawing a graph]. It should look like this one.
>
> **Int**: Do you think, it intercepts the axes? Your previous graphs did not intercept the axes too.
>
> **Ece**: I do not think it intercepts the axes because when it is 0 cm, we cannot talk about the number of revolutions.

Troisième moment

When I asked Ece what an inversely proportional graph looks like, she drew the small linear graph, which is in the right upper corner of Fig. 8b. Similar to Feyza, she attended to the simultaneous increases and decreases in values when drawing her graph. Since Ece drew a curved graph earlier, she responded as follows to eliminate the perturbation in her understanding of an inversely proportional graph:

> **Ece:** I am only confused about whether the line in this graph [pointing at the big curved graph in Fig. 8b] is straight or curved...this an inverse proportion too. This one [pointing at the small linear graph in Fig. 8b] is a linear inverse proportion. This one [drawing the small curved graph in Fig. 8b]...decreasing, right? So, there is an inverse proportion in this one too, because when one [quantity] increases, the other [quantity] decreases. So, I think there is an inverse proportion.

5.2.2 Première évolution du premier moment

Au premier moment, Ece explique l'allure du graphique pour le problème *Gear II*, indiquant s'il est rectiligne ou non. Elle est amenée à expliquer cette idée, car elle avait tracé un graphique rectiligne pour résoudre initialement le problème dans le questionnaire. Cependant, au cours de l'interview, elle est amenée à tracer un second graphique, qu'elle forme cette fois-ci de manière courbée. L'interviewer relève cette incohérence et questionne Ece à ce sujet. Les explications offertes par Ece au premier moment constituent sa prise de position sur la question de quel graphique est le bon et quel devrait être rejeté dans le cas du problème *Gear II*. Voici un tableau explicitant le découpage fait des explications du premier moment :

Tableau 5.1 – Découpage de l'explication d'Ece : Premier moment

Bloc d'explications 1.1	It should be straight in this one too. The reason for this is that when the radius increases by 1 cm…
Bloc d'explications 1.2	…no it should not be straight. When this one [pointing at 36 notches] decreases by half, this one [pointing at 18 notches[5]] decreases by two-thirds. Hence, the increase in this one [referring to the increase from 1 cm to 2 cm] and this one [referring to the decrease from 36 notches to 18 notches] are not the same.
Bloc d'explications 1.3	[Thinking] No… no this is not straight.

5.2.2.1 Analyse de premier niveau : Description de l'évolution

Au bloc d'explications 1.1, Ece explique pourquoi les deux graphiques représentant la relation entre le rayon et le nombre de révolutions d'un engrenage auraient dû être rectilignes. Elle entreprend une explication à partir de l'effet d'une augmentation du rayon d'un engrenage sur son nombre de révolutions. Elle s'arrête en cours de route. Au bloc d'explications 1.2, Ece se ravise et explique pourquoi les deux graphiques auraient plutôt dû être courbés. À nouveau, elle formule une explication à partir de l'effet d'une augmentation du rayon d'un engrenage sur son nombre de révolutions. Elle constate que pour une même augmentation de rayon, le nombre de révolutions diminue de moitié à un certain moment et du deux tiers à un autre, ce qui se traduit plutôt par une représentation graphique courbée. Les deux explications sont ainsi contraires au niveau de la conclusion mathématique expliquée.

Il est possible de voir un évènement charnière générant cette évolution comme un *bogue de compréhension*. Au cours de l'explication initiale sur l'allure rectiligne du graphique, au bloc d'explications 1.1, il est possible de comprendre qu'Ece s'aperçoit qu'elle s'apprête à expliquer quelque chose de mathématiquement erroné. Le verbatim laisse comprendre qu'Ece aurait une certaine compréhension initiale du fonctionnement de la relation entre le rayon et le nombre de révolutions d'un engrenage. Cette conclusion provient du fait

[5] Le mot *notches* est utilisé dans la recherche. Selon la résolution et l'analyse du problème et du graphique, c'est plutôt la notion de révolutions qui semble être en jeu. L'analyse menée ici utilise plutôt la notion de révolution.

qu’elle affirme que le graphique devrait être rectiligne et entame une explication sur cette affirmation à partir d’augmentations de rayon au bloc d’explications 1.1 et que lorsqu’elle change d’avis au bloc d’explications 1.2, son explication reprend la notion d’augmentations de rayon en annonçant que des augmentations constantes de rayon provoquent des diminutions qui ne sont pas constantes. Le contraste entre ces explications laisse comprendre qu’au bloc d’explications 1.1, pour Ece, une augmentation constante du rayon semble devoir générer une diminution constante du nombre de révolutions, traçant un graphique rectiligne. En s’appuyant sur cette compréhension pour expliquer en quoi le graphique devrait être rectiligne, elle est amenée à réaliser que les deux premières augmentations du rayon de 1 cm représentent des diminutions différentes du nombre de révolutions. Dans le problème, pour une première augmentation de rayon de 1 cm, soit de 1 cm à 2 cm, le nombre de révolutions diminue de moitié, soit de 36 révolutions à 18 révolutions. Pour une seconde augmentation de rayon de 1 cm, soit de 2 cm à 3 cm, le nombre de révolutions diminue au deux tiers, de 18 révolutions à 12 révolutions. Il est possible de comprendre que c’est en réalisant ce *bogue de compréhension* qu’elle est portée à s’arrêter, ce qui justifierait pourquoi le verbatim contient une coupure à ce moment, représentée par le symbole : « … ». Celui-ci est interprété à titre de pause dans la démarche d’explications d’Ece.

Afin de rectifier le *bogue de compréhension*, Ece est amenée à déterminer ce qui, sur le plan mathématique, se révèle problématique, ce qu’elle fait en expliquant. Il est possible d’y voir une *renonciation*, puisqu’Ece communique qu’elle *renonce* à l’idée que le graphique du problème *Gear II* soit rectiligne, lorsqu’elle dit : « no it should not be straight ». Cette *renonciation* s’opère possiblement parce qu’Ece entrevoit que pour une même augmentation de rayon, la diminution du nombre de révolutions n’est pas constante. Ceci peut justifier pourquoi elle se lance à ce moment dans une explication de l’idée que le graphique devrait être courbe, en s’appuyant sur les raisons qui ont généré son *bogue de compréhension*. Elle semble abandonner son explication initiale, ainsi que la compréhension dont elle fait l’objet, possiblement car elle comprend qu’en fin de compte, pour le problème *Gear II*, la relation entre le rayon d’un engrenage et le nombre de révolutions trace une courbe. Voici un schéma explicatif synthétisant cette première évolution.

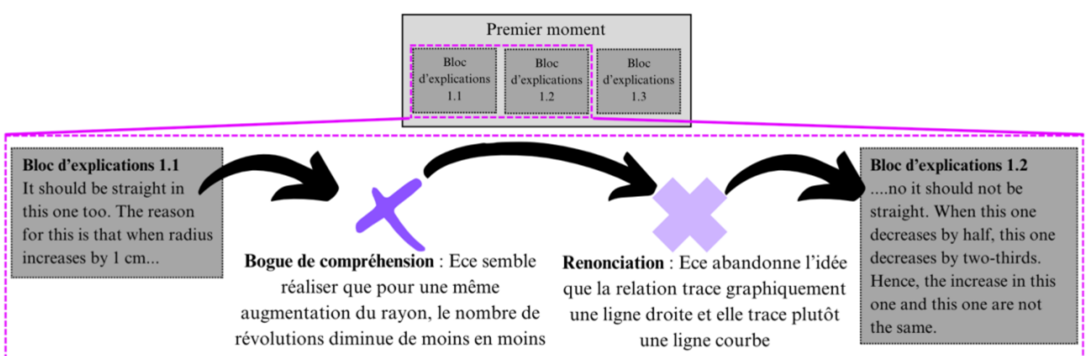


Figure 5.7 – Schématisation de la première évolution du premier moment dans les explications d’Ece

5.2.2.2 Analyse de second niveau : Interprétation dialectique de l’évolution

Le *bogue de compréhension* peut être vu comme étant né d’une incohérence dans les compréhensions d’Ece, qui se révèle dans l’action d’expliquer à travers la dialectique explications-compréhensions s’y déployant. En devant expliquer en quoi le graphique doit être rectiligne, il est possible de voir qu’Ece soit amenée à évaluer continuellement l’explication qu’elle formule. Ece vérifierait à ce moment si l’objectif de son explication est atteint et si cette dernière est valide sur le plan mathématique. Cette évaluation peut agir de manière rétroactive, mais semble également porter sur ce qui s’en vient dans les explications suivantes : Ece semble amenée à faire une projection anticipant ses prochaines explications. En expliquant pourquoi le graphique est rectiligne, Ece semble penser en temps réel à comment pouvoir l’expliquer. Ceci donne un sens à pourquoi elle semble initialement choisir de montrer numériquement que pour une même augmentation de rayon, la diminution du nombre de révolutions est constante. En anticipant comment les nombres utilisés spécifiquement dans ce problème vont illustrer ses compréhensions, elle semble réaliser qu’ils ne le font pas. Le nombre de révolutions diminue de moins en moins pour des augmentations de rayon constantes. L’évaluation continuelle faite par Ece au cours de cette évolution semble lui permettre d’anticiper l’erreur qu’elle allait expliquer et de se réajuster avant même de le faire, en temps réel, en se projetant vers l’avant.

La *renonciation* qui découle du *bogue de compréhension* peut être vue comme émergeant à travers une dialectique explications-compréhensions. Le verbatim laisse comprendre qu’en un instant et avant même de mener à terme son explication considérée *boguée*, Ece *renonce* simultanément à ses explications du bloc d’explications 1.1 et aux compréhensions qui ont été mobilisées et à celles qui auraient dû être mobilisées si les explications avaient été menées à terme. Elle semble accepter comme contre-argument valide le *bogue de compréhension*, justifiant pourquoi elle tire la conclusion différente que le graphique doit finalement être courbé. Cet avancement de compréhensions semble se matérialiser alors qu’elle explique et formule cette nouvelle explication.

5.2.3 Deuxième évolution du premier moment

5.2.3.1 Analyse de premier niveau : Description de l’évolution

Cette évolution se distingue des autres analyses présentées jusqu’à maintenant, puisqu’elle ne provient pas d’un *bogue* ou d’une *possibilité*. Cette évolution est vue comme provenant uniquement de l’évaluation qu’Ece fait explicitement elle-même de son explication une fois achevée. Cette évaluation semble ici ne pas aboutir sur un évènement charnière tel que présenté dans les grilles d’analyse. Ainsi, au bloc d’explications 1.2, Ece explique que la bonne représentation graphique est courbée en s’appuyant sur l’idée que pour une même augmentation de rayon, le nombre de révolutions diminue de moitié à un moment et du deux tiers à un autre. Au bloc d'explications 1.3, Ece s'arrête pour réfléchir, vraisemblablement à son explication du bloc 1.2, et confirme qu'elle la considère bonne.

Il est possible de comprendre qu'Ece fait ici une évaluation réfléchie de son explication. Elle s'arrête pour penser, comme l'indique le commentaire « Thinking » du chercheur à propos d'Ece. Après avoir fait ce qui semble être l'évaluation de son explication, Ece confirme à l'interviewer que cette nouvelle explication concevant le graphique comme étant courbé est bien valide. Ici, Ece semble faire *gagner en certitude* l'explication et la compréhension qui y est mobilisée. Elle le fait après un pas de recul, lorsqu'elle en confirme qu'à ses yeux, son explication confirme que son le graphique ne devrait pas être rectiligne, laissant alors comprendre qu'elle conçoit qu'il doit être courbé. De plus, Ece ne fait pas part d'une possibilité qui pourrait être survenue dans l'évaluation de ses explications. Explications et compréhensions sont ici à voir comme *gagnant en certitude*, car elles sont acceptées, voire confirmées, par Ece, suite à ce qui est vu comme étant une évaluation plus méticuleuse de l'explication que celle qui se déploierait normalement au cours de sa démarche d'explication.

5.2.3.2 Analyse de second niveau : Interprétation dialectique de l'évolution

Il est possible de voir qu'en expliquant pourquoi les deux graphiques représentant la relation entre le rayon et le nombre de révolutions d'un engrenage auraient du être courbés, Ece soit amenée à évaluer continuellement ce qu'elle explique. Ceci serait fait dans l'idée de s'assurer de la validité mathématique de ses explications et pour vérifier que ses explications sont claires et atteignent leur objectif. Cela peut être vu comme étant fait en comprenant de mieux en mieux ses propres compréhensions mathématiques mobilisées, justement parce que de les utiliser lui permet de se familiariser avec celles-ci. Cependant, cette évaluation peut être floue, voir échapper à la personne qui explique dans le feu de l'action. C'est pourquoi, sur le plan théorique, la perspective dialectique reconnaît un apport à la notion de pas de recul (voir Lévi-Strauss, 1962), dans lequel la personne qui explique s'arrête pour mieux prendre conscience, voire pour avoir pleine conscience, de l'explication formulée est des implications qui s'en dégagent. Il est possible de penser qu'Ece y cherche des *bogues* qu'elle n'avait pas anticipés et est attentive aux *possibilités* qui pourraient l'inspirer, deux types de réalisations situées sur le plan des compréhensions ou des explications. Elle cherche possiblement également à vérifier si le débogage de l'explication initialement entamée au bloc d'explications 1.1 a porté fruit. Cette évolution, causée par la pause qu'Ece prend pour valider la teneur de son explication, représente un tel pas de recul. Comme il ne semble pas y avoir de *bogue* ou de *possibilité* survenus suite à cette évaluation faite *a posteriori* de l'explication donnée et des compréhensions mobilisées, il est possible d'y voir un *gain en certitude* situé au cœur de la dialectique explications-compréhensions.

5.2.4 Première évolution du second moment

Au second moment, Ece explique l'allure générale de graphiques de proportions inverses, en insistant sur leur caractère rectiligne ou courbé. Elle se fait questionner par l'interviewer qui souhaite en savoir plus sur les compréhensions d'Ece sur les relations de proportions inverses, en particulier l'allure de leurs graphiques. L'analyse du second moment révèle une seule évolution. Voici un tableau explicitant le découpage fait de l'explication du second moment :

Tableau 5.2 – Découpage de l'explication d'Ece : Second moment

Bloc d'explications 2.1	For me, an inversely proportional graph looks like...
Bloc d'explications 2.2	…so, when a variable increases, the other one decreases [drawing a graph]. It should looks like this one.

5.2.4.1 Analyse de premier niveau : Description de l'évolution

Au bloc d'explications 2.1, Ece explique l'allure des graphiques de proportions inverses. Elle entame une explication directement à partir de l'allure du graphique. Elle affirme : « For me, an inversely proportional graph looks like... ». Au bloc d'explications 2.2, l'objectif d'Ece semble être le même, soit de faire comprendre à l'interviewer l'allure des graphiques de proportions inverses. Elle entreprend une explication à partir de ce qui justifie l'allure du graphique[6] et l'accompagne d'un croquis. Elle affirme : « …so, when a variable increases, the other one decreases ». Les deux explications semblent partager le même objectif, mais s'y prennent de manières différentes pour y arriver.

Il est possible d'y voir qu'un *bogue d'explication* génère cette évolution. Comme les deux explications sont compatibles sur le plan mathématique, Ece semble faire évoluer ses explications, parce qu'au cours de sa démarche d'explication elle conçoit que la manière d'expliquer dans laquelle elle s'est initialement engagée à partir de l'allure du graphique, n'allait pas faire comprendre facilement ce qu'elle voulait. Cette réalisation semble provenir directement d'Ece, qui se rend compte de cela alors qu'elle l'explique. Ceci est appuyé par une coupure contenue dans le verbatim, qui, représentée par « … », est ici interprétée à titre de pause dans l'explication. Alors qu'Ece répond initialement à la question de l'interviewer sur l'allure du graphique de

[6] Il faut souligner qu'ici la compréhension d'Ece d'une situation de proportions inverses semble ne pas être mathématiquement tout à fait exacte. Elle affirme que dans une relation de proportions inverses, lorsqu'une variable augmente, l'autre diminue, ce qui n'est pas faux, mais s'avère insuffisant. Or, dans le cadre de cette recherche, la validité mathématique des compréhensions n'est pas un enjeu; l'accent est sur la façon dont ses compréhensions évoluent.

manière littérale en faisant une description directe, il semble qu'elle réalise quelque chose par rapport à son explication. Après une courte pause, elle change sa démarche d'explications et s'y prend autrement pour expliquer, soit grâce à une justification vérifiant l'allure du graphique.

Afin de rectifier le *bogue d'explication*, Ece semble mettre en route une *transformation*. L'explication à partir de l'allure du graphique est ici mise de côté. Ece entame une nouvelle explication sur une nouvelle base en justifiant l'allure du graphique, et trace un nouveau graphique qui se veut représentant l'ensemble des graphiques de proportions inverses. Voici un schéma explicatif synthétisant cette évolution.

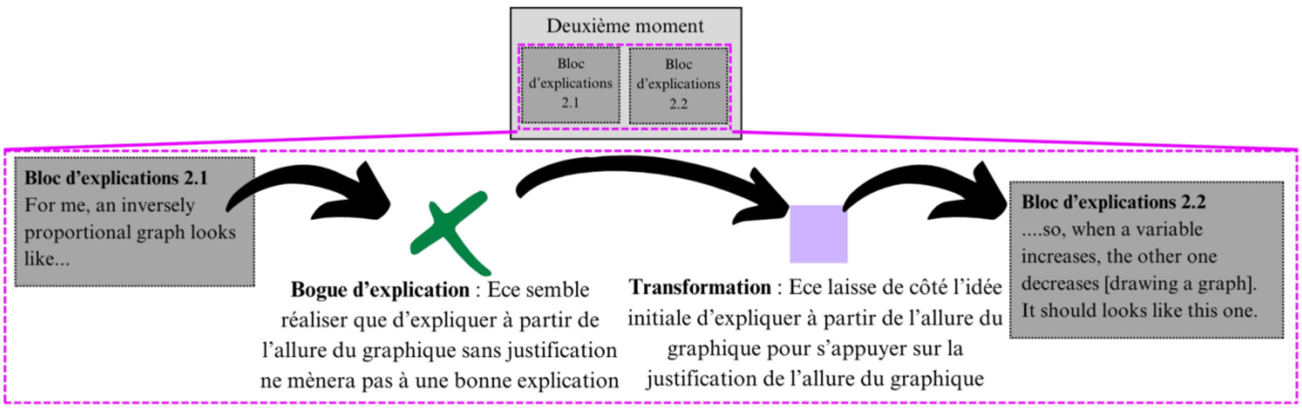


Figure 5.8 – Schématisation de l'évolution du second moment des explications d'Ece

5.2.4.2 Analyse de second niveau : Interprétation dialectique de l'évolution

Le *bogue d'explication* peut être vu comme étant né de l'évaluation qu'Ece fait continuellement de ses explications. Pour Ece, décrire littéralement l'allure du graphique semble initialement être une bonne manière d'expliquer. Puisqu'elle se ravise en cours d'explication, il est possible d'y voir qu'elle en vient à considérer qu'une justification de l'allure du graphique est un meilleur point de départ. Cette autorégulation des explications peut être conçue comme provenant de l'évaluation de ses explications, qui se déploie et prend forme de manière dialectique. Selon la perspective dialectique explications-compréhensions, en mobilisant ses compréhensions dans l'action d'expliquer, elle serait amenée à se familiariser avec. En raison de cela, l'action d'expliquer lui permettrait d'évaluer ses explications de manière de plus en plus apte. En retour cela semble lui permettre de réaliser que son explication n'allait pas être suffisamment claire. L'évaluation mobiliserait à nouveau sa dimension projective. Ce *bogue d'explication* semble nécessaire, voire inévitable, pour qu'Ece formule son explication. Avoir fait fausse route peut avoir permis à Ece d'établir des fondations pour expliquer autrement. Expliquer à partir de l'allure du graphique peut être vu comme questionnant Ece sur les raisons qui justifient un tel graphique. En retour, ces questionnements sont à voir comme faisant émerger, et possiblement avancer, ses compréhensions sur la justification d'un tel graphique. Cela semble ici lui permettre de réaliser le *bogue d'explication*, soit que l'allure du graphique ne semble pas être un point de départ adéquat.

Il est possible d'envisager que la *transformation* opérée par Ece est faite de manière dialectique. À ce moment, Ece considèrerait qu'une explication peut remplir plus efficacement son objectif si elle démarre avec une justification, soit que dans les relations de proportions inverses, lorsqu'une variable augmente, l'autre diminue. Cette *transformation* des explications est à voir comme *transformant* également les compréhensions des graphiques de relations de proportions inverses, puisqu'en expliquant à partir de ce qui justifie l'allure du graphique, elle organise ses compréhensions comme telles. Cette manière d'expliquer devient simultanément une bonne manière pour faire comprendre *et* une bonne manière pour comprendre.

5.2.5 Première évolution du troisième moment

Au troisième moment, Ece explique ce qui la rend confuse par rapport à l'allure des graphiques de proportions inverses, c'est-à-dire si elle doit les considérer rectilignes ou courbés. Elle se fait questionner par l'interviewer qui souhaite en savoir plus sur comment elle comprend l'allure des graphiques de proportions inverses, puisqu'elle affirme en être incertaine. L'explication du troisième moment porte sur le dénouement de cette confusion et révèle une seule évolution. Voici un tableau explicitant le découpage fait de l'explication du troisième moment :

Tableau 5.3 – Découpage de l'explication d'Ece : Troisième moment

Bloc d'explication 3.1	I am only confused about whether the line in this graph straight or curved...this an inverse proportion too. This one [pointing at the small linear graph in Fig. 8b] is a linear inverse proportion. This one… decreasing right?
Bloc d'explication 3.2	So, there is an inverse proportion in this one too because when one [quantity] increases, the other [quantity] decreases. So, I think there is an inverse proportion.

5.2.5.1 Analyse de premier niveau : Description de l'évolution

Au bloc d'explications 3.1, Ece explique ce qui apparaît être l'objet de sa confusion. Elle explique qu'elle ne sait pas si les graphiques de proportions inverses sont tracés de manière rectiligne ou courbée. Pour cela, Ece aborde les raisons qui mènent à sa confusion. Elle affirme : « I am only confused about whether the line in this graph straight or curved...this an inverse proportion too. This one [pointing at the small linear graph in Fig. 8b] is a linear inverse proportion. This one… decreasing right? ». À ce moment, elle semble comprendre que si le graphique est rectiligne, il n'est pas courbé et vice-versa. Au bloc d'explications 3.2, Ece explique que les deux possibilités de graphique, soit rectiligne et courbé, sont valides et qu'il ne faut pas forcément choisir entre l'un ou l'autre. Sur un ton qui semble plus assuré, elle affirme : « So, there is an inverse proportion in this one too, because when one [quantity] increases, the other [quantity] decreases. So, I think there is an inverse proportion ». Les deux explications n'offrent pas la même conclusion.

Il est possible de concevoir que cette évolution provient d'une *possibilité de compréhension*. En expliquant que les deux graphiques semblent pouvoir représenter des relations de proportions inverses, la source de sa confusion, Ece semble en arriver à concevoir la *possibilité de compréhension* qu'elle n'ait pas à choisir. Cette *possibilité de compréhension* est à voir comme étant cohérente avec ce qui est interprété comme sa compréhension, soit qu'une relation de proportion inverse puisse être tracée graphiquement de manière rectiligne ou de manière courbée[7]. C'est pourquoi le ton de son discours passe de l'incertitude au bloc d'explications 3.1 (représenté par quelques : « … » et par une formulation interrogative : « right? ») vers la certitude au bloc d'explications 3.2 (représenté par des phrases fermes, comme « there is an inverse proportion » ou « there is an inverse proportion »).

Cette *possibilité de compréhension* semble générer une *réinterprétation* de sa confusion. Sa confusion apparaît être définie autrement, de manière à ce qu'elle concorde et appuie ses compréhensions. Comme les deux options de graphiques peuvent coexister selon ce qui est vu comme sa définition, elle *réinterprète* l'idée de devoir choisir une des options de graphique. Lors de cette explication, Ece semble concevoir que les graphiques rectilignes et courbés peuvent représenter une situation de proportions inverses tant que, lorsqu'une variable augmente, l'autre diminue. Voici un schéma explicatif synthétisant cette évolution.

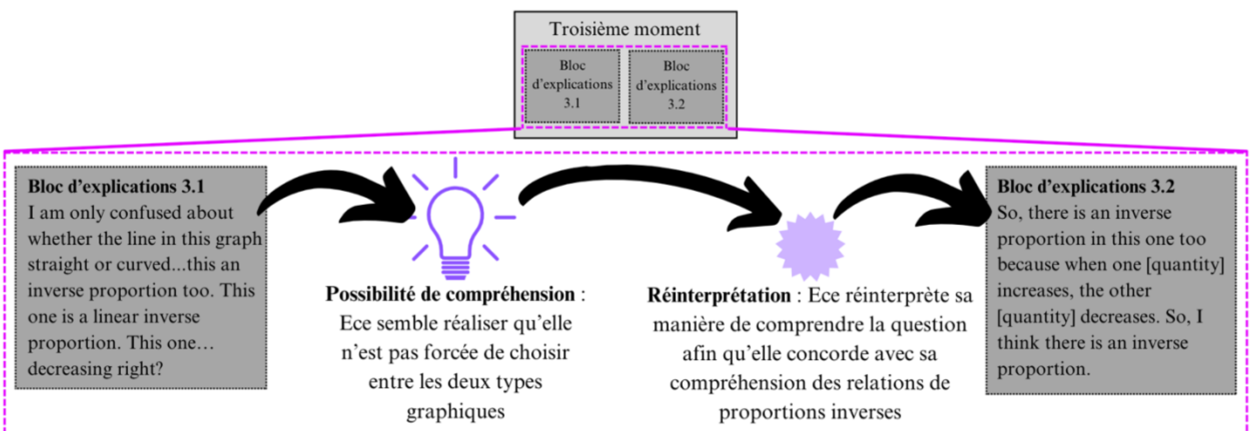


Figure 5.9 – Schématisation de l'évolution du troisième moment dans les explications d'Ece

[7] À nouveau, cette compréhension semble ne pas être tout à fait vailde mathématiquement. Cela est notamment dû à la compréhension qu'Ece présente d'une relation de proportions inverse. Pour elle, dans une relation de proportions inverses, lorsqu'une variable augmente, l'autre diminue. Cette *possibilité de compréhension* s'aligne avec cela.

5.2.5.2 Analyse de second niveau : Interprétation dialectique de l'évolution

La *possibilité de compréhension* peut être vue comme étant née dans le déploiement dialectique du dispositif explications-compréhensions. En expliquant ce qui la rend confuse, il est possible de voir qu'Ece soit amenée à mobiliser ses compréhensions mathématiques, ce qui est considéré comme les faisant avancer par le fait même. En s'appropriant ainsi ces compréhensions mathématiques en les expliquant, Ece semble se donner de plus en plus de moyens pour donner un sens à sa confusion. En même temps, il est possible d'envisager qu'il s'agit d'une évaluation qu'Ece fait explicitement de sa compréhension mathématique, c'est-à-dire de sa confusion. Elle est amenée à remettre des choses en question : « I am only confused about whether the line in this graph is straight or curved… this is an inverse proportion too ». En affirmant cela, elle semble commencer à remettre l'idée de devoir choisir en question. « This one is a linear inverse proportion. » En retour, cela l'amène à se questionner sur une distinction possible entre des types de relations de proportions inverses. « This one… decreasing, right? » En affirmant cela, elle montre explicitement qu'elle se questionne sur sa compréhension. C'est alors qu'émerge la *possibilité de compréhension* de pouvoir considérer les deux graphiques comme étant valides, qui émerge graduellement à travers l'explication méticuleuse de pourquoi les deux graphiques paraissent valides, ce qui peut être vu comme une évaluation de ses explications et des compréhensions mobilisées.

La *réinterprétation* qu'elle effectue peut être vue comme étant déployée à travers la dialectique explications-compréhensions. Face à la *possibilité de compréhension* que les deux graphiques puissent être valides tous les deux, Ece explique ce que cela signifierait. L'action d'en expliquer le sens semble faire avancer ses compréhensions de cela de la même manière, c'est-à-dire comme concevant valide les deux types de graphique. Cette *réinterprétation* est ainsi à voir comme faisant avancer conjointement explications et compréhensions, et ce, à travers l'action d'expliquer.

5.2.6 Remarques globales sur les explications d'Ece

Dans l'ensemble, cette situation rend explicite la perspective dialectique pour l'interaction entre explications et compréhensions. Cette recherche suggère que la dialectique explications-compréhensions se déploie à différentes échelles et cette situation illustre comment elle prend forme dans le déploiement minutieux et en temps réel d'explications. Ici, les évènements charnières qui émergent de la dialectique, les *bogues* et les *possibilités* font surface à petite échelle. Lorsqu'Ece choisit des mots pour exprimer ses compréhensions et lorsqu'elle évalue ces choix de mots, des processus de compréhension participent à l'élaboration en temps réel de ses explications. Les ajustements générés par des *bogues* et des *possibilités* à ce moment sont des évolutions dialectiques naturelles et nécessaires à la construction de ces explications.

De plus, cette situation rend explicite un caractère projectoire de l'évaluation en temps réel ainsi que son rôle quant à la dialectique explications-compréhensions. En effet, tel que souligné, bien que les explications d'Ece ne soient pas toujours terminées, elles sont parfois tout de même ajustées. Ici, l'évaluation des explications semble jouer le rôle d'anticiper les futures explications, ce qui permet à Ece de les réajuster de manière préventive. Les évènements charnières survenus dans les explications sont à voir au même titre que si les explications étaient terminées et avaient des rétroactions explicites d'un interlocuteur, par exemple. Le caractère anticipatoire de cette évaluation est vu comme permettant, et comme forçant également, la personne qui explique à faire évoluer ses explications en cours de route, afin de les rendre les plus compréhensibles possibles et de s'assurer que ce qui est expliqué est valide.

5.3 Troisième évènement d'explications : Les explications de Nicolas

Les explications de Nicolas sont tirées d'une collecte de données en salle de classe. Elles portent sur un problème, celui de la comparaison du périmètre de quatre étoiles, affiché sur un écran interactif. Les explications de Nicolas sont rapportées sous forme de verbatim rédigé à partir de la bande vidéo de l'évènement. Ces explications ne sont pas uniquement faites de manière orale, mais sont aussi accompagnées d'un ensemble de dessins et de déplacements de ces dessins au tableau. Simplement lire le verbatim ne rend pas tout à fait justice à l'évènement d'explications, beaucoup d'entre ces explications étant encapsulées dans le travail fait au tableau par Nicolas. Des traces tirées de la bande vidéo ont donc été ajoutées. Les explications de Nicolas sont organisées en quatre moments d'explications. La particularité de cet évènement d'explications est que certaines évolutions sont repérées entre les moments, alors que d'autres sont repérées au cœur d'un même moment. Ainsi, pour les analyses de premier et de deuxième niveau, à

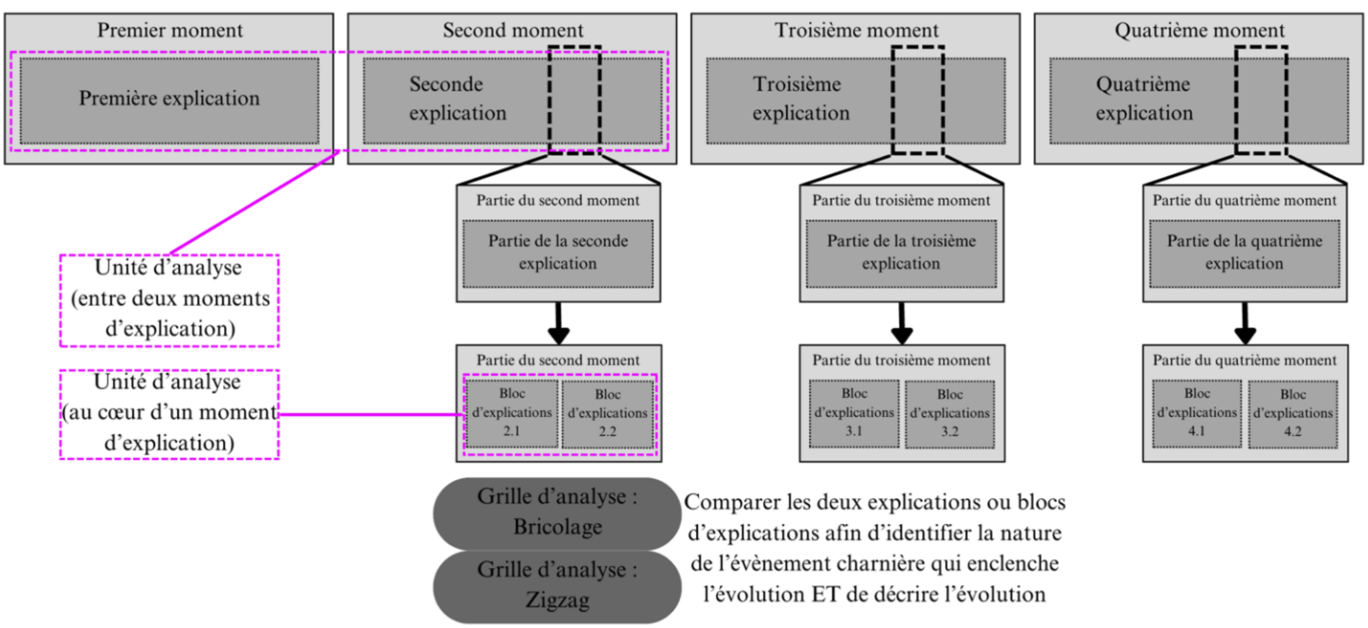


Figure 5.10 – Exemple d'unité d'analyse pour les explications de Nicolas

certains moments, une unité d'analyse est composée de deux moments d'explications consécutifs (comme dans l'anecdote sur la comparaison de fractions à la Section 5.1). À d'autres moments, une unité d'analyse est composée de blocs d'explications provenant du même moment (comme pour les explications d'Ece à la Section 5.2). La Figure 5.10 ci-dessus illustre ces unités d'analyse prises à différents niveaux.

5.3.1 Les explications de Nicolas – Vignette

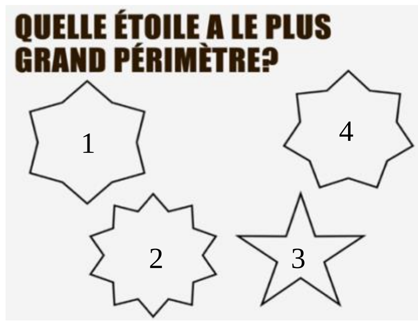


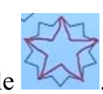
Figure 5.11 – Question affichée à l'écran sur laquelle portent les explications de Nicolas

Cet évènement se déroule en salle de classe, devant un auditoire d'élèves. Nicolas explique sa stratégie au chercheur, mais également à l'ensemble de sa classe. Certaines interventions du chercheur sont simultanément destinées à Nicolas et à la classe. À certains moments, Mathis, un autre élève, intervient. De plus, à des fins de clarifications, cette vignette réfère aux étoiles de manière numérique, de gauche à droite, comme indiqué par les numéros dans la Figure 5.11 ci-dessus. Cependant, ces numéros n'étaient pas affichés à l'écran lors de la séance de classe et aucune intervention des élèves ou du chercheur n'est faite selon cet étiquetage.

Premier moment

Nicolas arrive au tableau en affirmant qu'à son avis la seconde étoile est celle qui a le plus grand périmètre :

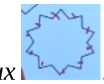
> **Nicolas** : Je dirais que c'est elle. […] [*À voix basse*] Je veux vérifier que c'est ça.
>
> **Chercheur** : Tu veux vérifier si tu as raison.

Nicolas trace alors le contour de la troisième étoile sur le tableau interactif afin d'en faire un nouvel objet numérique possible de déplacer. Il fait ensuite glisser ce calque de la troisième étoile et l'inscrit dans la seconde étoile . Il répète cette manœuvre en déplaçant ce même calque de la troisième étoile pour l'inscrire dans la première étoile , puis dans la quatrième étoile . Pendant ces manipulations, Nicolas affirme :

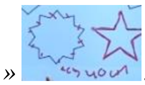
> **Nicolas** : C'est pas vraiment la même forme par rapport à ça [*Nicolas pointe la seconde étoile*]. Et là non plus [*il déplace le contour de la dans la quatrième étoile*].
>
> **Chercheur** : Donc?
>
> **Nicolas** : Mais logiquement… [*hésitant*]

Second moment

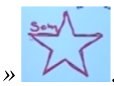
Nicolas change de stratégie :

Nicolas : En fait ici [*pointe la seconde étoile*], y'a un – deux – trois – quatre – cinq – six – sept – huit – neuf – dix [*en notant un côté sur deux* .]Y'a vingt côtés!

Chercheur : Tu as compté dix pointes et chaque pointe, deux côtés […] ça fait vingt côtés. […]

Nicolas : Disons que c'est deux centimètres chaque pointe. [*En écrivant « 2 cm »*] Deux centimètres, fois vingt, ça donne quarante centimètres. [*écrit « 40 cm »* .]

Chercheur: Oui.

Nicolas : Ben, ici [*pointe la seconde étoile*], ça serait quarante centimètres [*écrit « 40 cm »*]. Et ici [*pointe la troisième étoile*] on va dire cinq… [*écrit « 5 cm »* .]

Chercheur : Tu prends ça où, ces nombres-là, toi?

Nicolas : Je sais pas.

Chercheur : Ooh ouais, mais admettons que tu avais dit un million, ça changerait la donne un peu.

Nicolas : Ouais, c'est ça, j'essaie de trouver le… Ben… J'essaie de trouver, eh, sans trop, eh,

Mathis : Ben c'est plus dix centimètres.

Nicolas : Ouais c'est ça.

Chercheur : Ça ressemble. Si ça c'est deux, alors ça, ça ressemble à cinq.

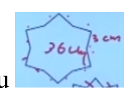
Nicolas : Ouais.

Chercheur : Ok je comprends mieux, j'étais curieux de savoir d'où il venait ton cinq.

Nicolas : Cinq – Dix – Quinze – Vingt – Vingt-cinq – Trente – Trente-cinq – Quarante – Quarante-cinq. Ce qui donne quarante-cinq , donc déjà-là, celle-là [*troisième étoile*], elle a un plus grand [périmètre].

Chercheur : Ouais, mais on se rappelle que tu es approximatif sur ton cinq.

Nicolas : Ouais. Ici [*pointe la première étoile*] environ, je dirais trois [centimètres]. Humm, trois.

Nicolas trouve le périmètre de la première étoile en comptant douze bonds de trois, de manière similaire à ce qu'il a fait pour la seconde étoile par bonds de cinq. Il trouve un périmètre de 36 cm, qu'il inscrit au tableau .

Troisième moment

En s'apprêtant à continuer sa méthode pour la quatrième étoile, Nicolas hésite. Il se place devant la quatrième étoile. Après quelques instants, il retourne à la première étoile. Il trace une ligne sur un côté de la première étoile et reporte celui-ci sur un côté de la quatrième étoile. Nicolas s'arrête ensuite, hésitant. Au tableau la mesure provenant du calque d'un côté de la première étoile semble être identique au côté de la quatrième étoile sur lequel il est superposé.

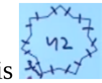
Nicolas : Ouain…

Chercheur : Hummm… [*quelques secondes s'écoulent*]

Mathis : C'est à peu près pareil.

Nicolas : Ouais je pense… Oh ok, donc ce serait… ce serait trois centimètres aussi. [*écrit : « 3 cm ».*]

Chercheur : Oh oui c'est pareil? Ok.

Nicolas trouve le périmètre de quarante-deux centimètres en dénombrant quatorze bonds de trois 

.

Nicolas : Donc ce serait celle-là [*pointe la troisième étoile*] avec le plus grand [périmètre].

Chercheur : Ok, donc là avec les mesures que tu t'es donné, mais en même temps

Nicolas : Ouais, c'est approximatif

Chercheur : C'est ça! Elle [*troisième étoile*], elle finit à quarante-cinq avec les mesures que tu t'es donné. Quarante [*pointe la seconde étoile*], quarante-deux [*pointe la quatrième étoile*], trente-six [*pointe la première étoile*]. Puis ici, tu nous a dis que ça et ça [*reporte avec ses doigts la mesure d'un côté de la quatrième étoile vers la première étoile*], ce serait approximativement la même chose.

Quatrième moment

Nicolas : Si jamais on peut vérifier deux [*trace un côté de la seconde étoile et le rapporte sur la première*]. On irait là. Ouais, ça serait bien… Ici [*reporte le côté tracé de la seconde étoile sur la troisième*], il faudrait que je puisse [*le duplique et le met au bout de la première mesure reportée*].

Nicolas s'arrête un instant. Les deux copies du côté de la seconde étoile mises bout-à-bout semblent être de la même mesure qu'un côté de la troisième étoile sur lequel ils sont superposés 

.

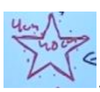
Nicolas : Ok, non. C'est quatre centimètres [*en référant à la mesure du côté de la troisième étoile*].

Nicolas change les mesures des côtés de la troisième étoile pour quatre centimètres.

Chercheur : Ah ok, tu changes pour quatre.

Nicolas : Ouais parce que c'est plus, si jamais on prendrait le deux là [*celui de la seconde étoile*].

Chercheur : Oui oui oui.

Nicolas : Ben c'est quatre. [*trouve un périmètre de quarante centimètres en dénombrant dix bonds de quatre* 

.] Donc, celle-là [*quatrième étoile*] aurait le plus grand périmètre.

Chercheur : Ok, plutôt que l'autre.

5.3.2 Première évolution du premier au second moment

5.3.2.1 Analyse de premier niveau : Description de l'évolution

Une particularité de cet évènement est que Nicolas, la personne qui explique, semble s'engager dans une démarche d'explications sans forcément savoir exactement ce qu'il s'apprête à expliquer. Il mentionne lui-même, au premier moment, vouloir faire la vérification de son intuition que la seconde étoile a le plus grand périmètre. Il affirme : « Je dirais que c'est elle. […] Je veux vérifier que c'est ça », ce qu'il fait grâce au tableau interactif. Il trace puis déplace un calque de la troisième étoile sur les autres étoiles. Il semble alors s'attendre à ce que l'action de superposer les étoiles lui permette d'expliquer quelque chose. Au second moment, il change de stratégie et dénombre les côtés de chaque étoile et leur attribue une mesure en centimètres. Il commence par la seconde étoile, lui attribuant arbitrairement une mesure fictive de deux centimètres pour un côté et trouve un périmètre de quarante centimètres (obtenu en multipliant cette mesure par les vingt côtés de l'étoile). Il attribue ensuite une mesure de cinq centimètres aux côtés de la troisième étoile, qui comme les questionnements du chercheur permettent de le savoir, est bien fictive, mais n'est plus arbitraire, puisqu'elle est attribuée grâce à une estimation faite à partir de l'étalon représenté par les côtés de la seconde étoile[8]. Grâce à cette mesure, en la comptant neuf fois pour les neuf côtés[9] de la troisième étoile, Nicolas en déduit que cette étoile possède un périmètre de quarante-cinq centimètres, plus grand que celui de la seconde étoile. Il reproduit cette méthode pour la première étoile, à laquelle il attribue une mesure de trois centimètres et trouve un périmètre de trente-six centimètres. Les deux explications partagent l'objectif de comparer les périmètres des différentes étoiles. Cependant, elles divergent au niveau de la stratégie utilisée pour trouver les périmètres, qui passe d'une stratégie non fonctionnelle d'inscription des étoiles les unes dans les autres à une stratégie fonctionnelle de dénombrement des côtés et assignation de mesures.

Il est possible d'y voir dans cet évènement un évènement charnière qui génère une évolution des explications et des compréhensions mobilisées. Il s'agit ici d'un *bogue de compréhension*. Nicolas semble réaliser que son explication initiale ne mène à rien et que sa manière de faire ne l'aide pas à en apprendre plus sur le problème. Lorsqu'il dit : « C'est pas vraiment la même forme par rapport à ça. Et là non plus » et qu'il répond de manière hésitante « Mais logiquement… » au questionnement du chercheur, Nicolas ne semble pas arriver à tirer une autre conclusion que de remarquer que les étoiles n'ont pas la même forme. Ceci est aussi appuyé par le fait qu'il change sa stratégie complètement.

Face à ce *bogue de compréhension*, il est possible d'y voir que Nicolas effectue une *transformation*. Il abandonne l'idée de superposer les étoiles et s'engage dans une autre manière de faire, soit de dénombrer les côtés des étoiles et leur attribuer des mesures cohérentes entre elles pour comparer leur périmètre. Cette manière de faire semble émerger à travers les explications qu'il en fait. En dénombrant en premier le nombre de côtés, il semble être amené à assigner ensuite des mesures pour ces côtés et à estimer un périmètre. En

[8] Nicolas n'a pas été en mesure d'expliquer comment il en est arriver à attribuer une mesure de cinq centimètres aux côtés de la troisième étoile. Cependant, grâce aux questionnements du chercheur, un sens collectif a été donné cette mesure. Nicolas adhère à ce sens, qui est cohérent avec ce qui a été fait jusqu'à maintenant. Ceci fait l'objet de la seconde évolution analysée pour cet évènement d'explication.

[9] Nicolas fait une erreur ici. Il y a dix côtés dans la troisième étoile. Cette erreur n'est relevée qu'à la fin de l'épisode.

effet, il affirme en premier : « En fait ici, y'a un – deux – trois – quatre – cinq – six – sept – huit – neuf – dix. Y'a vingt côtés! ». À partir cela, il affirme : « Disons que c'est deux centimètres chaque pointe. Deux centimètres. Fois vingt, ça donne quarante centimètres ». Voici un schéma synthétisant la première évolution.

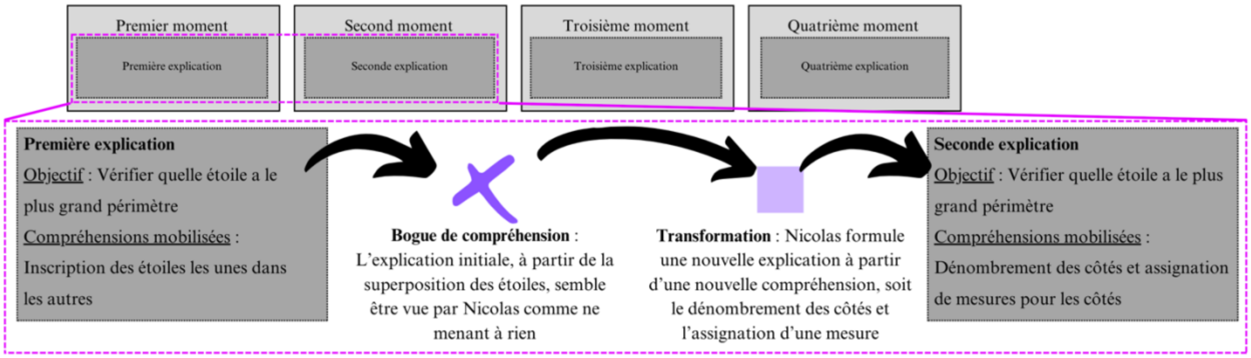


Figure 5.12 – Schématisation de la première évolution pour les explications de Nicolas

5.3.2.2 Analyse de second niveau : Interprétation dialectique de l'évolution

Le *bogue de compréhension* peut être vu comme étant né du fait que Nicolas voulait vérifier son intuition que la seconde étoile était la plus grande à l'aide d'une stratégie embryonnaire et incertaine, c'est-à-dire en superposant les étoiles. En effet, l'intention initiale de Nicolas semble être avant tout de mobiliser sa stratégie de superposition, une stratégie qu'il semble n'avoir que visualisée brièvement dans sa tête, pour vérifier que la seconde étoile possède le plus grand périmètre. Bien que cette vérification soit plutôt de nature visuelle, et non pas une vérification faite en expliquant, elle laisse tout de même penser qu'il y aurait des répercussions de nature dialectique. En superposant les étoiles, Nicolas n'arrive pas à expliquer comment cela permet de comparer leurs périmètres. Cette incapacité à expliquer peut être vue comme provoquant un *bogue de compréhension*. Normalement, une stratégie aux fondements mathématiques valides et compris par une personne permet d'en faire une explication, ce qui n'est pas le cas ici. Même si Nicolas peut être amené à mieux comprendre en expliquant les étapes de la superposition, justement parce qu'il mobilise des compréhensions mathématiques pour expliquer, il n'arrive tout de même pas à donner un sens et à répondre à la tâche. En raison de cela, à travers l'évaluation continuelle qu'il serait amené à faire au cours des explications, Nicolas se retrouve à considérer que ses compréhensions mathématiques contiennent un *bogue* et nécessitent d'être déboguées. Sans l'entendre explicitement affirmer cela lui-même, cette interprétation provient du fait que, suite à des signes d'hésitation, Nicolas change complètement de stratégie, sans jamais y retourner. Il affirme : « C'est pas vraiment la même forme par rapport à ça. Et là non plus – Donc? – Mais logiquement… » et *transforme* la nature même de ce qui est expliqué, en passant au dénombrement de côtés et à l'assignation de mesures fictives.

Cette *transformation* est à voir comme émergeant sur le plan dialectique. Parce que Nicolas explique d'une nouvelle manière, il est possible de comprendre que le *bogue de compréhension* émergeant de sa stratégie initiale l'amène à réfléchir à une autre manière de comparer le périmètre des étoiles. Sa réflexion est à voir comme un processus de compréhension qui le conduit vers l'idée générale de dénombrer les côtés d'une étoile et d'assigner des mesures fictives pour en déterminer des périmètres. Cette idée semble se développer à travers l'explication que Nicolas en fait. Parce qu'il se fait demander des explications de la part du chercheur, il explore la piste de solution qu'il a entrevue, la développant par le fait même en l'expliquant. Il commence par expliquer le dénombrement du nombre de côtés, en affirmant : « En fait ici, y'a un – deux – trois – quatre – cinq – six – sept – huit – neuf – dix. Y'a vingt côtés! ». Il explique ensuite l'assignement des mesures pour ces côtés, en disant : « Disons que c'est deux centimètres chaque pointe ». Sans affirmer que Nicolas ne savait pas qu'il pouvait assigner une mesure fictive de deux centimètres aux vingt côtés et que c'est à coup sûr l'explication du dénombrement qui lui a fait réaliser cette possibilité (bien qu'il s'agisse d'une éventualité), le fait d'avoir expliqué la première portion, le dénombrement, est vu comme un tremplin pour la seconde portion, l'assignation des mesures. Selon la perspective dialectique, de considérer valide et fonctionnelle son explication du dénombrement lui permet de s'engager dans l'explication de l'assignation de mesures. De la même manière, expliquer l'assignation de mesures, et considérer valide et fonctionnelle cette explication l'amène à expliquer comment trouver le périmètre, ce qu'il fait en exprimant : « Deux centimètres. Fois vingt, ça donne quarante centimètres ». Sur le plan dialectique, il est difficile de déterminer si les compréhensions ont ici précédé l'ensemble de l'explication ou si, pas-à-pas, les explications ont mené à l'émergence de compréhensions dans une boucle dialectique. Or, dans les deux cas, l'action de les expliquer est vue comme matérialisant les compréhensions de Nicolas sur sa stratégie de dénombrement des côtés et d'assignation de mesures, ce qui est appuyé par l'assurance que Nicolas prend au cours des explications des périmètres de la troisième et de la première étoile. En effet, la bande vidéo laisse comprendre que Nicolas gagne en assurance à chaque nouvelle étoile à travers ce processus, car il explique de manière plus rapide et concise : « Cinq – Dix – Quinze – Vingt – Vingt-cinq – Trente – Trente-cinq – Quarante – Quarante-cinq. Ce qui donne quarante-cinq, donc déjà-là, celle-là, elle a un plus grand [périmètre] » et « Trois. Trois. Une – Deux – Trois – Quatre – Cinq – Six – Sept – Huit – Neuf – Dix – Onze – Douze [côtés dans la première étoile]. Trois fois douze, ça égal à trente-six ». Ceci est vu comme signifiant qu'il se familiarise avec cette nouvelle manière de faire.

5.3.3 Deuxième évolution au cours du second moment

La seconde évolution se produit au cours du second moment. Pendant qu'il explique, Nicolas se fait questionner par le chercheur, ce qui semble générer une évolution.

Tableau 5.4 – Découpage de l'explication de Nicolas : Second moment

Bloc d'explications 2.1	**Nicolas** : Disons que c'est deux centimètres chaque pointe. [*En écrivant « 2 cm »*] Deux centimètres, fois vingt, ça donne quarante centimètres. [*écrit « 40 cm »*.] **Chercheur**: Oui. **Nicolas** : Ben, ici [*pointe la seconde étoile*], ça serait quarante centimètres [*écrit « 40 cm »*]. Et ici [*pointe la troisième étoile*] on va dire cinq… [*écrit « 5 cm »*.] **Chercheur** : Tu prends ça où, ces nombres-là, toi?
Bloc d'explications 2.2	**Nicolas** : Je sais pas. **Chercheur** : Ooh ouais, mais admettons que tu avais dit un million, ça changerait la donne un peu. **Nicolas** : Ouais, c'est ça, j'essaie de trouver le… Ben… J'essaie de trouver, eh, sans trop, eh, **Mathis** : Ben c'est plus dix centimètres. **Nicolas** : Ouais c'est ça. **Chercheur** : Ça ressemble. Si ça c'est deux, alors ça, ça ressemble à cinq. **Nicolas** : Ouais.

5.3.3.1 Analyse de premier niveau : Description de l'évolution

Au bloc d'explications 2.1, Nicolas explique qu'il attribue une mesure de deux centimètres pour les côtés de la seconde étoile et une mesure de cinq centimètres pour la mesure de ceux de la troisième étoile. Cela génère un questionnement de la part du chercheur, qui lui demande pourquoi avoir choisi ces nombres : « Tu prends ça où, ces nombres-là, toi? ». Au bloc d'explications 2.2, Nicolas tente d'y répondre, mais n'y arrive pas. Il bredouille : « Je sais pas. […] Ouais, c'est ça, j'essaie de trouver le… Ben… J'essaie de trouver, eh, sans trop, eh, ». Suite à une intervention de Mathis, un autre élève, c'est finalement le chercheur qui donne un sens en proposant que si les côtés de la première étoile mesurent deux centimètres, alors ceux de la troisième étoile semblent mesurer cinq centimètres. Ce sens est alors confirmé par Nicolas, qui le mobilise pour de nouvelles explications dans lesquelles il estime aussi la mesure de côtés d'autres étoiles.

Cette évolution peut être vue comme étant générée par un *bogue de compréhension*. Alors que Nicolas est dans une lancée, ses explications engendrent un questionnement inattendu sur la provenance des mesures de la part du chercheur. L'évènement laisse comprendre que, pour Nicolas, ces clarifications semblent être principalement requises pour que les explications soient acceptées par le chercheur (et pas forcément pour atteindre son objectif). En effet, il est possible de sentir que Nicolas se presse de retourner à l'explication qu'il était en train de formuler lorsque Mathis affirme : « Ben c'est plus dix centimètres » et qu'il répond : « Ouais, c'est ça » sans en prendre compte ensuite. En plus, Nicolas ne semble pas en mesure de répondre à ce questionnement, car il n'arrive pas à formuler une explication qui se tienne. Cela peut se voir comme un *bogue de compréhension*. Alors que Nicolas semble vouloir expliquer d'où proviennent les mesures qu'il a choisies, dans l'idée de satisfaire la curiosité du chercheur, il affirme en fin de compte ne pas savoir d'où elles viennent et ne formule simplement pas de réponse pour cette question du chercheur.

Face au *bogue de compréhension*, une *amélioration* se met en route. Cette évolution est particulière, parce qu'elle ne provient pas directement de Nicolas. Devant l'incapacité de Nicolas à répondre sur le coup, et sentant que dans la classe les autres élèves commencent à perdre leur concentration, le chercheur offre alors une proposition d'*amélioration* lorsqu'il affirme : « Ça ressemble. Si ça, c'est deux, alors ça, ça ressemble à cinq ». Nicolas accepte cette manière d'interpréter les mesures, car il dit « Ouais » et semble ensuite intégrer cette *amélioration* à ses compréhensions lorsqu'il explique comment assigner des mesures aux côtés des autres étoiles. Cela est attesté par le fait que cette *amélioration*, qui justifie la provenance des mesures, demeure vivante tout au long des explications de Nicolas pour l'ensemble de l'évènement. Initialement plus en arrière-plan, cette conclusion est illustrée plus explicitement par l'interaction suivante, tirée du quatrième moment, dans lequel Nicolas explique pourquoi il faut changer la mesure de cinq centimètres de la troisième étoile pour une mesure de quatre centimètres. Il est possible d'y voir comment Nicolas traite la comparaison des mesures fictives de la même manière que suite à l'*amélioration*, comme le montre ce passage tiré du quatrième moment de la vignette, qui reprend cette idée.

Chercheur : Ah ok, tu changes pour quatre.
Nicolas : Ouais parce que c'est plus, si jamais on prendrait le deux là (*celui de la seconde étoile*)
Chercheur : Oui oui oui.
Nicolas : Ben c'est quatre.

Voici un schéma explicatif synthétisant la seconde évolution.

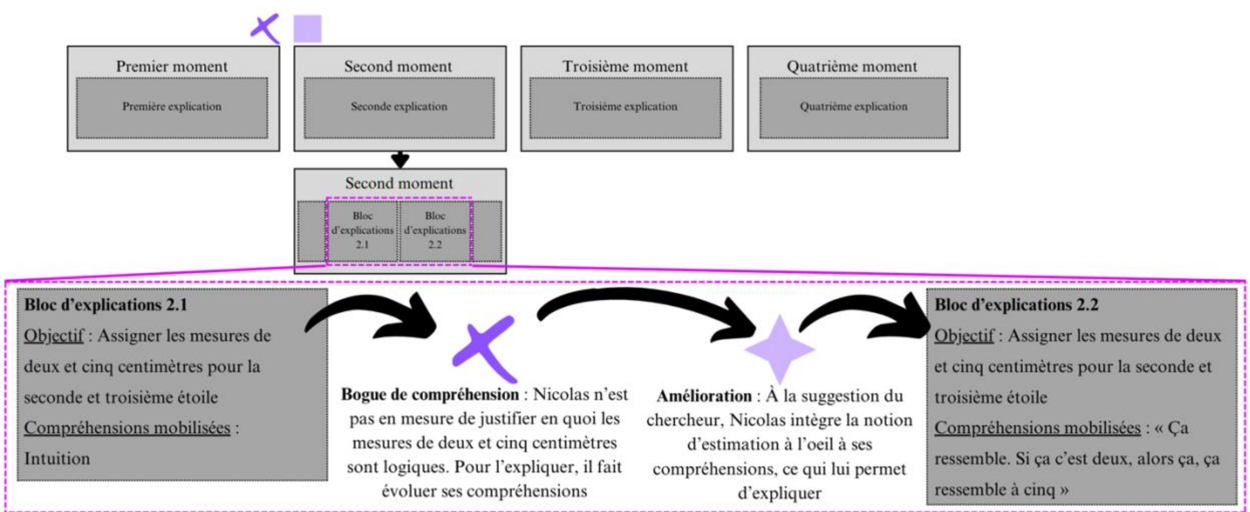


Figure 5.13 – Schématisation de la seconde évolution pour les explications de Nicolas

5.3.3.2 Analyse de second niveau : Interprétation dialectique de l'évolution

Le *bogue de compréhension* peut être vu comme étant né d'une insuffisance dans les compréhensions de Nicolas. Les mesures « deux centimètres » et « cinq centimètres » ayant certainement été choisies pour une raison, il apparaît que Nicolas n'est pas en mesure d'expliquer pourquoi il a fait ce choix. Il ne semble pas être capable de trouver les mots pour rendre compte de son idée lorsqu'il affirme : « Je sais pas. […] Ouais, c’est ça, j’essaie de trouver le… Ben… J’essaie de trouver, eh, sans trop, eh, ». Cela peut signifier que sa propre compréhension lui échappe. Il est possible d’y voir qu’en essayant d’expliquer, Nicolas est amené à réaliser qu’il ne sait pas exactement pourquoi il a choisi ces mesures, ou encore, du moins, qu’il ne le comprend pas suffisamment pour en faire des explications.

L’*amélioration* qui en découle est de nature différente, puisque c’est le chercheur qui la propose, plutôt que Nicolas. Cependant, elle semble être intégrée par Nicolas, car après avoir acquiescé, il reprend ses explications en conservant cette idée de mesure étalon, comme si elle provenait de lui-même. Ainsi, même si la proposition d’*amélioration* a une origine extérieure à Nicolas, en acceptant celle-ci, ce dernier semble effectuer une *amélioration* sur le plan de ses propres compréhensions mathématiques. Cette *amélioration* est visible dans la suite des explications de manière de plus en plus explicite. Notamment, la bande vidéo permet de constater une assurance grandissante à chaque fois qu’il mobilise cette manière de faire. Il est possible d’attribuer cela au fait que Nicolas s’approprie de plus en plus cette mesure étalon à chaque fois qu’il la mobilise. Cette *amélioration* est ainsi interprétée comme s’intégrant à sa manière de comprendre en même temps qu’à sa manière d’expliquer.

5.3.4 Troisième évolution du second au troisième moment

5.3.4.1 Analyse de premier niveau : Description de l’évolution

Au deuxième moment, Nicolas explique comment comparer le périmètre de chaque étoile en comptant le nombre de côté et en estimant la mesure d’un côté par rapport aux autres étoiles et à un étalon fictif. La première mesure de deux centimètres est arbitraire, mais les autres sont estimées en comparaison avec elle. Il faut souligner qu’elles sont, jusqu’à présent, toujours différentes. Au troisième moment, Nicolas change de stratégie pour traiter la quatrième étoile, à laquelle il s’intéresse en dernier. Au lieu d’estimer la mesure des côtés à partir de ceux d’une autre étoile, il choisit de reporter la mesure d’un côté de la première étoile sur un de la quatrième étoile. En faisant cela, il confirme que les deux mesures semblent être isométriques[10]. Il parvient ainsi à déduire un périmètre pour cette étoile. Les deux explications ont ainsi des objectifs analogues, relatifs à la comparaison des périmètres des étoiles. Cependant, elles divergent sur le comment les périmètres sont déterminés, passant d’une estimation à l’œil à une issue d’une superposition des côtés.
Il est possible d’y voir qu’un *bogue de compréhension* génère ici cette évolution. Dans ses explications portant sur les trois premières étoiles, Nicolas arrivait à estimer la mesure d’un côté par rapport à un étalon du plus petit côté, soit le deux centimètres appartenant à la seconde étoile. Lorsqu’il affirme « Ici environ,

[10] Pour en arriver à dire que les deux mesures semblent être isométriques, Nicolas s’est appuyé sur un commentaire provenant d’un autre élève. Cet épisode fait l’objet de la quatrième évolution.

je dirais trois [centimètres]. Humm, trois. », il ne semble pas sentir le besoin d'avoir plus de précision, peut-être parce que les différences entre les mesures de côtés appartenant aux diverses étoiles suffisamment significatives à l'œil. Cependant, alors qu'il s'apprête à mobiliser cette manière de faire pour la quatrième étoile, Nicolas semble s'apercevoir que la mesure d'un côté de cette étoile est très près de celle de la première étoile, voire trop près, comme le montre le passage suivant, tiré de la vignette :

> En s'apprêtant à continuer sa méthode pour la quatrième étoile, Nicolas hésite. Il se place devant la quatrième étoile. Après quelques instants, il retourne à la première étoile. Il trace une ligne sur un côté de la première étoile et reporte celui-ci sur un côté de la quatrième étoile.

Il est possible de comprendre qu'il considère alors sa manière de faire comme étant trop rudimentaire pour le niveau de précision requis pour différentier spécifiquement les mesures de ces côtés. Cela est à voir comme signifiant qu'il doit se doter d'une manière de faire plus sophistiquée. Face à ce *bogue de compréhension*, Nicolas effectue une *amélioration*. Sa manière de faire initiale, l'estimation à l'œil, s'en retrouve *améliorée* en étant dotée d'un outil plus précis, soit la superposition d'un côté connu sur un côté inconnu. Ceci permet une comparaison plus directe qui offre une estimation assez précise selon lui pour faire la comparaison des côtés de la première et de la quatrième étoile. Voici un schéma explicatif synthétisant la troisième évolution.

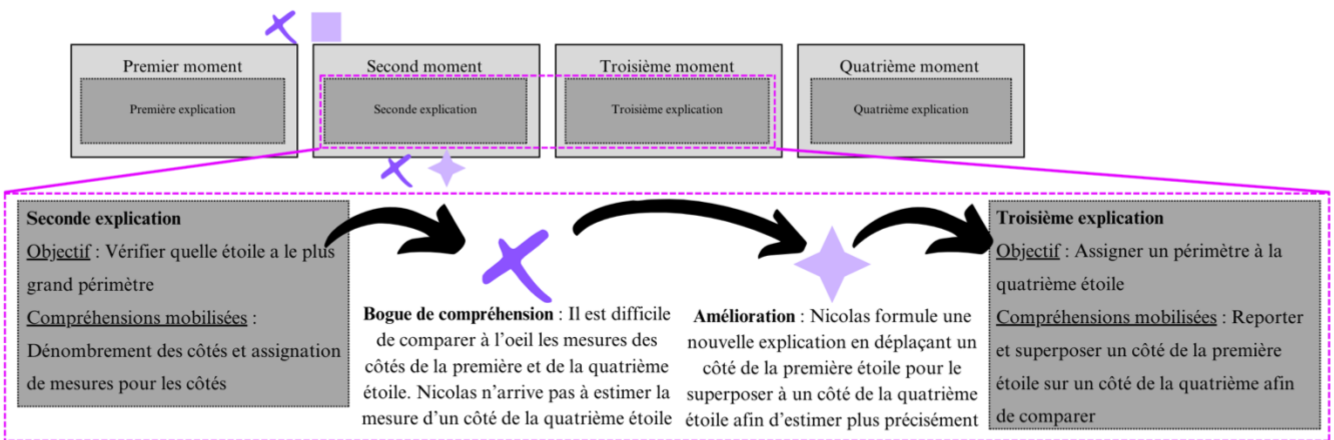


Figure 5.14 – Schématisation de la troisième évolution pour les explications de Nicolas

5.3.4.2 Analyse de second niveau : Interprétation dialectique de l'évolution

Le *bogue de compréhension* peut être vu comme étant né du fait que les compréhensions initialement mobilisées par Nicolas pour expliquer se retrouvaient mathématiquement insuffisantes pour le dernier cas de la quatrième étoile, l'empêchant ainsi de continuer à expliquer. Ce n'est pas forcément le contexte d'explication qui lui fait réaliser que sa manière de faire n'est pas suffisamment précise. S'il avait résolu la tâche individuellement de cette manière, il aurait possiblement été confronté au même enjeu. Cependant, il est possible de voir le contexte d'explication comme ayant joué un rôle dans l'émergence du *bogue de* *compréhension* et dans sa résolution. La formulation de l'assignation d'un périmètre pour la quatrième étoile est vue comme ayant permis à Nicolas de s'approprier ses compréhensions, soit ici, sa manière de comparer les mesures de côté à l'œil. Le cheminement effectué par Nicolas à travers les mises en mots de ses idées, à travers les clarifications demandées par l'action d'expliquer et par ses interlocuteurs (voir par exemple la résolution du *bogue d'explication* de la seconde évolution à la Section 5.3.3), peut alors être conçu comme lui faisant comprendre le *bogue de compréhension* d'une certaine manière. Selon la perspective dialectique, Nicolas se familiariserait avec sa manière d'estimer les mesures ainsi qu'avec le fonctionnement de cette méthode, car il la mobilise à trois reprises pour expliquer. Un point qui semble avoir joué un rôle dans la manifestation du *bogue de compréhension* est que les mesures des côtés des trois premières étoiles étaient toutes clairement différentes à l'œil. Il est possible qu'après avoir assigné des mesures aux côtés de ces étoiles, Nicolas pense que les mesures des côtés de toutes les étoiles doivent être différentes. Cette conclusion est appuyée par le fait que Nicolas se dote d'une méthode plus précise pour comparer deux étoiles dont les côtés semblent être isométriques, soit la superposition des côtés et qu'en arrivant au même résultat après avoir superposé les côtés de ces deux étoiles, il hésite tout de même à affirmer qu'ils sont de même mesure. Cette hésitation joue un rôle dans la quatrième évolution et fait l'objet de sa propre section (voir Section 5.3.5). Ainsi, il est possible qu'en expliquant comment assigner des mesures aux côtés de trois étoiles qui s'adonnent à avoir des côtés hétérométriques, Nicolas ait développé ses compréhensions en ce sens. C'est pour cela qu'en arrivant face à la quatrième étoile, Nicolas semble considérer sa méthode comme n'étant pas suffisamment précise pour estimer. En plus, en s'appropriant sa manière initiale de comparer les mesures à l'œil, d'un point de vue dialectique, Nicolas semble se doter de plus en plus de moyens pour la faire évoluer. En intégrant l'idée d'estimer derrière le commentaire du chercheur : « Ça ressemble. Si ça c'est deux, alors ça, ça ressemble à cinq. », Nicolas peut avoir mathématiquement préparé le terrain pour aller au-delà de la ressemblance à l'œil, soit la ressemblance superposée.

L'*amélioration* qui en découle peut être vue comme émergeant dans le déploiement dialectique explications-compréhensions dans lequel Nicolas serait amené à mieux comprendre en expliquant. En effet, l'*amélioration* faite par Nicolas se matérialise à travers une démarche d'explication. De plus, en expliquant comment superposer les côtés d'une étoile sur une autre, Nicolas semble amené à se familiariser avec cette manière de faire. Sur cela, la bande vidéo présente Nicolas comme étant davantage à l'aise avec cette méthode, qu'il mobilise pour une deuxième et troisième fois au quatrième moment (lorsqu'il superpose un côté de la seconde étoile à la première et la troisième pour vérifier ses estimations). En expliquant, Nicolas semble être amené à comprendre de mieux en mieux cette *amélioration*.

5.3.5 Quatrième évolution au cours du troisième moment

La quatrième évolution arrive au cours du troisième moment. Alors que la troisième évolution porte sur le changement de manière de comparer les mesures des côtés des différentes étoiles, cette présente quatrième évolution porte sur le changement conceptuel fin qui survient au cours de ce changement de stratégie.

Tableau 5.5 – Découpage de l'explication de Nicolas : Troisième moment

Bloc d'explications 3.1	En s'apprêtant à continuer sa méthode pour la quatrième étoile, Nicolas hésite. Il se place devant la quatrième étoile. Après quelques instants, il retourne à la première étoile. Il trace une ligne sur un côté de la première étoile et reporte celui-ci sur un côté de la quatrième étoile.
Bloc d'explications 3.2	Nicolas s'arrête ensuite, hésitant. Au tableau la mesure provenant du calque d'un côté de la première étoile semble être identique au côté de la quatrième étoile sur lequel il est superposé. **Nicolas** : Ouain… **Chercheur** : Hummm… [*quelques secondes s'écoulent*] **Mathis** : C'est à peu près pareil. **Nicolas** : Ouais je pense… Oh ok, donc ce serait… ce serait trois centimètres aussi. [*écrit : « 3 cm »*.]

5.3.5.1 Analyse de premier niveau : Description de l'évolution

Au bloc d'explications 3.1, Nicolas entame une explication sur la méthode de la superposition développée face à la similarité trop grande entre les côtés de la première et ceux de la quatrième étoile. Son objectif semble être d'attribuer une mesure différente aux côtés de la quatrième étoile. Au bloc d'explications 3.2, Nicolas explique que les mesures des côtés de la première et de la quatrième étoile sont identiques, soit de trois centimètres. Les deux explications sont ainsi différentes au niveau de ce qui est expliqué, la première étant menée dans l'objectif de différentier les mesures et la seconde admettant à présent leur isométrie.

Cette évolution semble être générée suite à un *bogue de compréhension*. Le déroulement de l'épisode laisse comprendre qu'ici, Nicolas considère initialement que les mesures des côtés auraient dû être différentes, car, face à la superposition d'un côté de la première sur la quatrième étoile, il hésite. C'est parce que les mesures semblaient isométriques à l'œil qu'il se serait doté de la méthode de superposition, qui, plus précise, allait lui permettre de différentier les côtés. Malgré cela, le résultat de la superposition que les deux côtés superposés semblent être de même mesure. Ce résultat, parce qu'il ne lui permet pas de différencier les mesures des côtés, est vu comme ayant été vécu comme un *bogue de compréhension*.

Face à ce *bogue de compréhension*, il est possible d'y voir une *réinterprétation* de Nicolas sur sa manière de voir la question. Il accepte que les côtés aient la même mesure. Il n'a pas, par exemple, considéré sa méthode finalement trop imprécise et jugé nécessaire de l'améliorer. Lorsqu'il affirme : « Oh ok, donc ce serait… ce serait trois centimètres aussi », il semble plutôt choisir de *réinterpréter* la prémisse issue de ses compréhensions comme quoi les mesures doivent être différentes. À nouveau, cette évolution est particulière, parce qu'elle semble avoir été initiée par un autre élève, Mathis. Alors que Nicolas semble hésiter en voyant les deux lignes superposées semblant être isométriques, Mathis intervient et affirme qu'elles apparaissent être de même mesure lorsqu'il dit : « C'est à peu près pareil ». Nicolas donne alors l'impression d'intégrer cette rétroaction, en la faisant sienne, car il affirme que les deux mesures sont égales entre elles. C'est ainsi à travers la rétroaction d'un interlocuteur que Nicolas semble entrevoir une manière de déboguer ses compréhensions, ou du moins, avoir l'assurance d'affirmer que les côtés sont de même mesure. Le schéma explicatif ci-dessous (Figure 5.15) synthétise cette quatrième évolution.

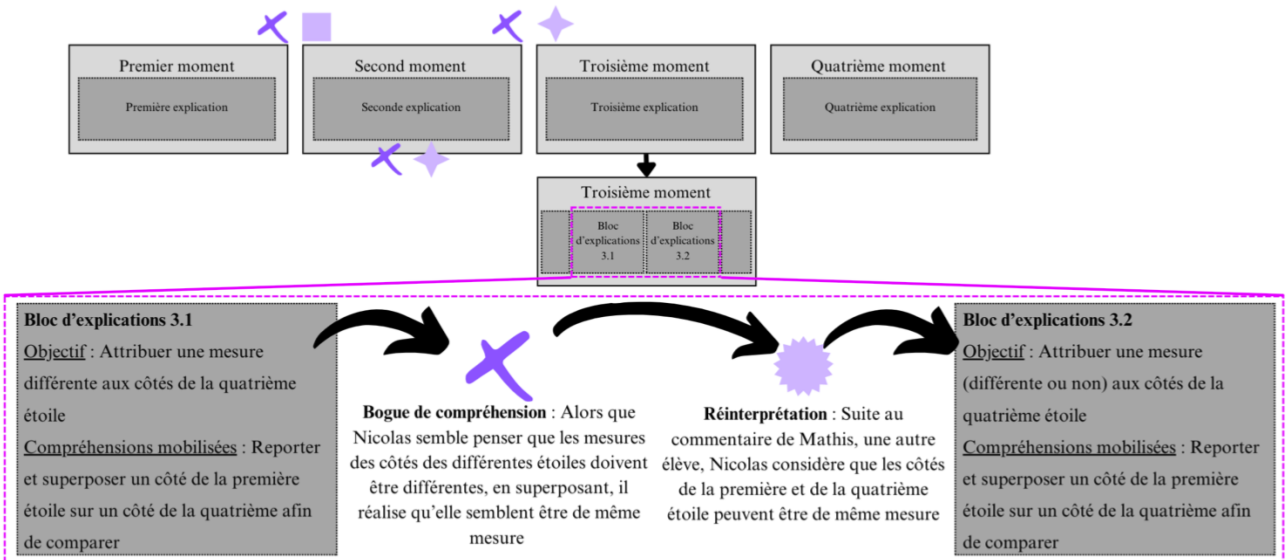


Figure 5.15 – Schématisation de la quatrième évolution pour les explications de Nicolas

5.3.5.2 Analyse de second niveau : Interprétation dialectique de l'évolution

Le *bogue de compréhension* peut être vu comme étant né d'une insuffisance dans les compréhensions de Nicolas, qui s'est révélée dans l'action d'expliquer. Le déroulement de l'évènement laisse comprendre que Nicolas conçoit initialement que les mesures des côtés des étoiles sont différentes entre elles. Il est ainsi possible de comprendre qu'après avoir effectué la superposition, Nicolas peut s'attendre à expliquer comment elles sont différentes. C'est peut-être pourquoi, face au résultat mathématique de la superposition, Nicolas ne semble pas être en mesure d'expliquer, car sa compréhension se révèlerait inexacte. Ici, le *bogue* est vu comme étant situé dans le décalage que le résultat mathématique à l'écran représente par rapport aux compréhensions de Nicolas. À nouveau, ce n'est pas forcément le contexte d'explication qui génère ce *bogue de compréhension*. Si Nicolas avait eu à résoudre ce problème de manière individuelle, il aurait probablement été confronté à un enjeu similaire. Cependant, le contexte d'explication est à voir comme ayant permis à Nicolas de surmonter ce *bogue de compréhension* et de s'approprier les compréhensions qui s'en dégagent en faisant une *réinterprétation* de sa manière de concevoir les mesures des côtés.

À ce sujet, la *réinterprétation* qui émerge est à considérer sur le plan dialectique. Face au *bogue de compréhension*, Nicolas semble hésiter. Cette hésitation est vue comme un processus de compréhension à l'œuvre dans lequel Nicolas tente de donner un sens à la superposition finalement isométrique. En admettant ici ne pas pouvoir observer ce à quoi Nicolas pense dans le moment, plusieurs pistes mathématiques émergent de la situation. Par exemple, plutôt que de considérer les mesures égales, Nicolas aurait pu remettre en question sa méthode de superposition, notamment s'il avait été convaincu que les mesures devaient vraiment se retrouver différentes. Pendant cette hésitation, Mathis, un autre élève, intervient en disant : « C'est à peu près pareil ». Suite à ce commentaire, Nicolas affirme à son tour : « Ouais je pense… Oh ok, donc ce serait… ce serait trois centimètres aussi ». Il est alors possible d'y voir qu'il s'approprie à ce moment les compréhensions mathématiques sous-jacentes au commentaire de Mathis, les intégrants comme si elles tiraient leur origine de lui-même, et qu'il semble considérer maintenant la possibilité que les côtés des première et quatrième étoiles aient la même mesure. Bien que l'idée soit apparue à travers un interlocuteur, il est possible de comprendre que c'est en assimilant cette idée que Nicolas a pu générer une évolution dialectique. En expliquant, Nicolas semble s'approprier de plus en plus cette idée, la faisant sienne, car il utilise le résultat de trois centimètres au cours des explications qui suivent au même titre que les trois résultats qui le précèdent pour la première, seconde et troisième étoile.

5.3.6 Cinquième évolution du troisième au quatrième moment

5.3.6.1 Analyse de premier niveau : Description de l'évolution

Au troisième moment, en expliquant, Nicolas développe sa manière de comparer les côtés de la première et de la quatrième étoile par la méthode de superposition. Au quatrième moment, Nicolas explique comment vérifier la teneur mathématique de ses conclusions précédentes sur les mesures des première et troisième étoiles estimées à l'œil, soit que si la mesure d'un côté de la seconde étoile est de deux centimètres, alors celle d'un côté de la première étoile ressemble à trois centimètres et celle d'un côté de la troisième étoile ressemble à cinq centimètres. Pour cela, il mobilise cette nouvelle manière de superposition pour comparer les mesures des côtés pour ces étoiles. Les deux explications ont ainsi le même objectif de comparer les mesures des côtés des étoiles, mais portent sur des paires d'étoiles différentes, soit la paire première-quatrième au troisième moment et les paires seconde-première et seconde-troisième au quatrième moment.

Cette évolution peut être vue comme provenant d'une *possibilité d'explication*. Après avoir expliqué de manière plus précise la comparaison des première et quatrième étoiles, Nicolas semble reconnaitre que la nouvelle manière de faire en superposant est plus précise que celle initialement utilisée pour comparer la seconde et la première ou la troisième étoile, c'est-à-dire la comparaison à l'œil faite au second moment. Cela est par exemple appuyé par le fait qu'il affirme : « Si jamais on peut vérifier deux ». Il entrevoit alors la *possibilité* de confirmer pour ses interlocuteurs, ou pour lui-même, que les estimations de trois et de cinq centimètres pour les côtés respectifs des la première et de la troisième étoile, sont justes.

Cette *possibilité d'explication* est à voir comme résultant en *gain en certitude* pour la comparaison des côtés de la seconde et de la première étoile, mais pas pour la comparaison des côtés de la seconde et de la troisième étoile. Sur la première comparaison, Nicolas confirme le résultat de trois centimètres pour la première étoile lorsqu'il affirme « Ouais, ça serait bien… ». Le schéma explicatif ci-dessous (Figure 6.15) synthétise la quatrième évolution pour la comparaison des côtés de la seconde et de la première étoile. Cependant, l'explication de la seconde comparaison, celle entre la seconde et la troisième étoile, semble faire émerger un *bogue de compréhension*. En expliquant comment comparer les côtés de la seconde et troisième étoile en superposant, Nicolas est confronté au fait que l'application de la méthode de superposition sur ces étoiles montre que les mesures de deux et de cinq centimètres sont incohérentes entre elles. Ce *bogue de compréhension* fait l'objet de sa propre section, à la sixième évolution, puisqu'il a émergé en expliquant. Un schéma combinant la cinquième et la sixième évolution est de mise pour la comparaison des côtés de la seconde et de la troisième étoile et est offert à la Section 5.3.7 sur la sixième évolution.

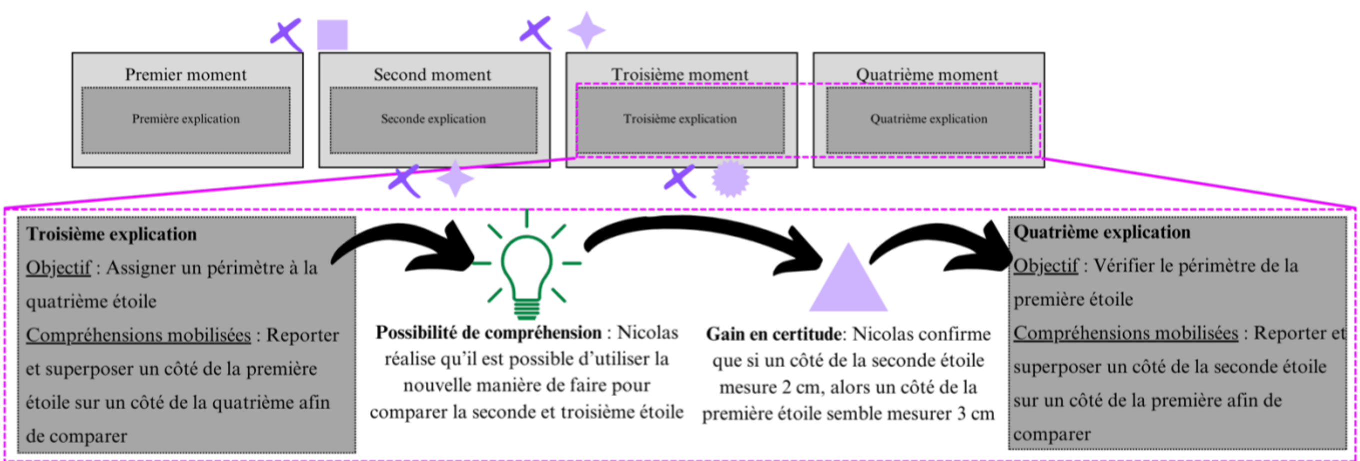


Figure 5.16 – Schématisation de la cinquième évolution pour les explications de Nicolas

5.3.6.2 Analyse de second niveau : Interprétation dialectique de l'évolution

La *possibilité d'explication* peut être vue comme étant née de la dialectique explications-compréhensions. En expliquant la méthode de la superposition au troisième moment, soit pour la première et quatrième étoile, Nicolas semble mobiliser ce qu'il comprend du fonctionnement de cette idée. En utilisant ses compréhensions, il apparait les faire avancer. Ceci est vu comme provenant du fait qu'il se les approprie au fur et à mesure qu'il explique, ce qui peut être remarqué lorsqu'il explique la superposition pour une seconde et troisième fois au quatrième moment. Notamment, il affirme de manière fluide et assurée : « Si jamais on peut vérifier deux. On irait là. Ouais, ça serait bien… Ici, il faudrait que je puisse […] », alors vu comme un avancement par rapport à la première fois qu'il mobilise ces compréhensions pour élaborer une explication, au cours de laquelle il agissait de manière hésitante en faisant des aller-retours entre les étoiles à comparer. Nicolas apparaît alors de plus en plus confortable avec cette manière de faire. De plus, le fait qu'il comprenne de mieux en mieux en expliquant est à voir comme lui donnant les moyens de concevoir la *possibilité* d'appliquer cette méthode à d'autres cas et les bienfaits de le faire. En effet, la réussite de l'explication offerte au troisième moment, mobilisant la superposition, aurait un rôle dans l'émergence de la *possibilité* d'appliquer cette méthode à d'autres cas, car le fait de gagner en précision lui ouvre la porte.

En expliquant, Nicolas semble amené à faire continuellement l'évaluation de ce qu'il explique. Dans cette évaluation, il est possible d'y voir que Nicolas se prononce sur la méthode de la superposition, en comparaison à la méthode de comparaison à l'œil nu. Le déroulement de son explication laisse comprendre que Nicolas semble concevoir comme plus rigoureuse la méthode de la superposition que celle de comparaison à l'œil, car il s'en sert pour vérifier ses résultats obtenus en comparant à l'œil. Cette évaluation peut être vue comme l'amenant à pouvoir, mais possiblement également à vouloir, confirmer les autres cas. À ce moment, le fait d'expliquer semble amener Nicolas à donner une importance plus grande à sa nouvelle manière de faire. Ceci est attesté par le fait que, malgré que le chercheur propose une synthèse conclusive des explications de Nicolas, ce dernier se lance dans une vérification mobilisant cette méthode. En retour, cette évaluation semble l'amener à y voir une *possibilité d'expliquer* autrement la comparaison des côtés pour deux autres paires d'étoiles, et possiblement, de faire *gagner en certitude* sa supposition en l'expliquant.

5.3.7 Sixième évolution au cours du quatrième moment

La quatrième évolution arrive au cours du quatrième moment. Comme mentionné précédemment, pendant que Nicolas explique comment utiliser la méthode de la superposition pour comparer la seconde et la troisième étoile, il semble réaliser un *bogue de compréhension*. Ce dernier fait l'objet de cette analyse.

Tableau 5.6 – Découpage de l'explication de Nicolas : Quatrième moment

Bloc d'explications 4.1	**Nicolas** : Si jamais on peut vérifier deux [*trace un côté de la seconde étoile et le rapporte sur la première*]. On irait là. Ouais, ça serait bien… Ici [*reporte le côté tracé de la seconde étoile sur la troisième*], il faudrait que je puisse [*le duplique et le met au bout de la première mesure reportée*].
Bloc d'explications 4.2	Nicolas s'arrête un instant. Les deux copies du côté de la seconde étoile mises bout à bout semblent être de la même mesure qu'un côté de la troisième étoile sur lequel ils sont superposés .

	Nicolas : Ok, non. C'est quatre centimètres [*en référant à la mesure du côté de la troisième étoile*]. Nicolas change les mesures des côtés de la troisième étoile pour quatre centimètres. **Chercheur** : Ah ok, tu changes pour quatre. **Nicolas** : Ouais parce que c'est plus, si jamais on prendrait le deux là [*celui de la seconde étoile*]. **Chercheur** : Oui oui oui. **Nicolas** : Ben c'est quatre.

5.3.7.1 Analyse de premier niveau : Description de l'évolution

Au bloc d'explications 4.1, Nicolas entame une explication visant à faire comprendre comment mobiliser la nouvelle manière de faire de la superposition pour confirmer la comparaison des mesures des côtés de la seconde et de la troisième étoile. En cours de route, il réalise que deux côtés de la seconde étoile mis bout à bout mesurent approximativement, mais presque exactement, un côté de la troisième, signifiant que les mesures fictives initialement attribuées de deux centimètres et de cinq centimètres sont incohérentes entre elles. Au bloc d'explications 4.2, Nicolas explique que les côtés de la troisième étoile devraient mesurer quatre centimètres plutôt que cinq centimètres, puisqu'ils sont deux fois plus longs que les côtés de la seconde étoile, auxquels la mesure fictive et arbitraire de deux centimètres a été précédemment attribuée. Les deux explications sont ainsi différentes au niveau de ce qui est expliqué. L'explication du bloc d'explications 4.2 corrige celle du bloc d'explications 4.1.

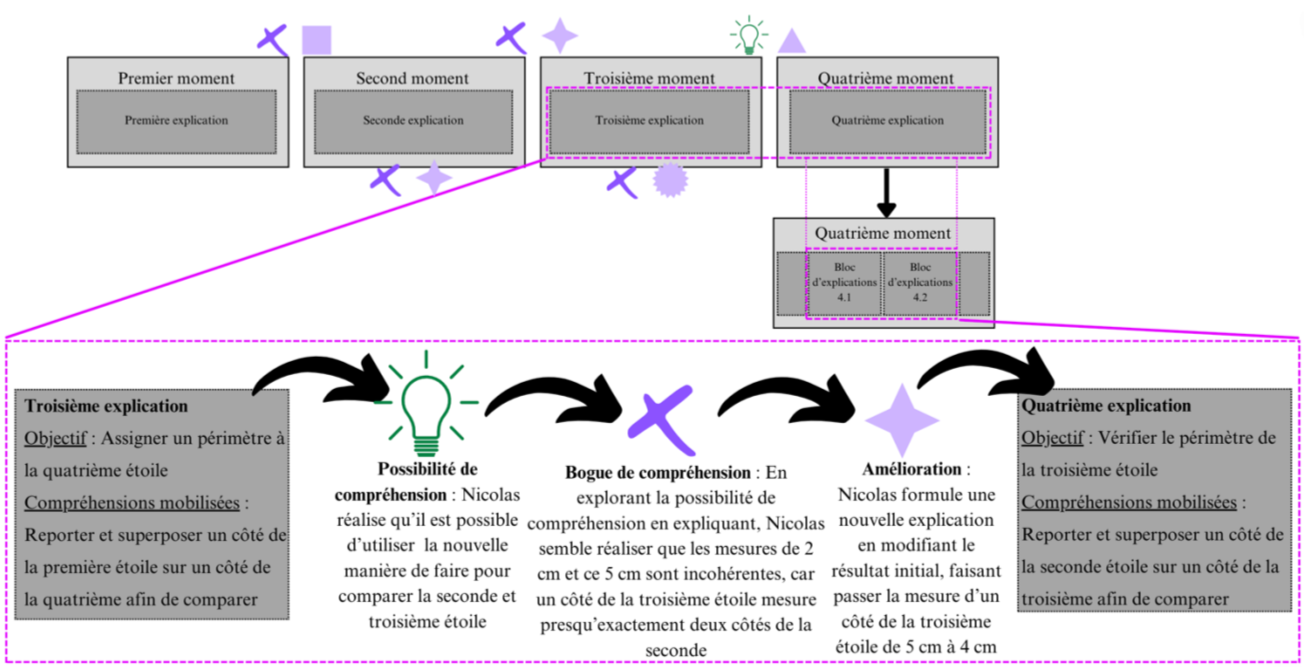


Figure 5.17 – Schématisation de la cinquième et sixième évolution pour les explications de Nicolas

Comme souligné précédemment, cette évolution semble naître d'un *bogue de compréhension*. Celui-ci provient du fait qu'en expliquant comment utiliser la méthode de la superposition pour confirmer la comparaison de deux et de cinq centimètres, Nicolas semble réaliser que si les côtés de la seconde étoile mesurent deux centimètres, alors ceux de la troisième étoile devraient plutôt mesurer quatre centimètres. Ceci est vécu comme un *bogue de compréhension* par Nicolas, qui pensait confirmer ses mesures estimées, par sa vérification, mais qui les a plutôt infirmées grâce à cette nouvelle méthode qu'il considère plus précise.

Ceci est à voir comme ayant généré une *amélioration*. Face au *bogue de compréhension*, Nicolas s'est ravisé lorsqu'il a affirmé : « Ok, non. C'est quatre centimètres » et a changé la mesure des côtés de la troisième étoile. Il modifie la partie non fonctionnelle du résultat en faisant passer la mesure assignée aux côtés de la troisième étoile de cinq centimètres vers quatre centimètres, ce qu'il fait en expliquant.

5.3.7.2 Analyse de second niveau : Interprétation dialectique de l'évolution

Le *bogue de compréhension* peut être vu comme étant né de la dialectique explications-compréhensions. L'évènement laisse comprendre que Nicolas s'engage dans la démarche d'explications dans l'objectif de convaincre ses interlocuteurs, eou lui-même, que les estimations faites de deux et de cinq centimètres sont bien valides, à la lumière de sa nouvelle manière de faire. Le développement de cette explication semble mener au *bogue de compréhension,* et ce, parce que, l'estimation initiale est erronée. L'idée de superposer les côtés permet de dépister cela et ensuite d'obtenir un résultat plus précis, ce qui est appuyé par l'extrait de verbatim suivant, dans lequel Nicolas superpose deux côtés de la seconde étoile à un côté de la troisième et change les mesures assignées à la troisième de cinq centimètres à quatre centimètres.

> Nicolas s'arrête un instant. Les deux copies du côté de la seconde étoile mises bout à bout semblent être de la même mesure qu'un côté de la troisième étoile sur lequel ils sont superposés .
>
> **Nicolas** : Ok, non. C'est quatre centimètres [*en référant à la mesure du côté de la troisième étoile*].
>
> Nicolas change les mesures des côtés de la troisième étoile pour quatre centimètres.

Il est également possible d'y voir une évaluation continuellement déployée par Nicolas sur ses explications alors qu'il explique. Cette évaluation peut être vue comme ayant donné un sens à l'incohérence mathématique qui est apparue, car en voyant que les mesures de la seconde étoile mises bout à bout donnaient exactement la mesure de la troisième, Nicolas s'arrête. Cet arrêt peut être vu comme le fait que Nicolas soit amené à se questionner sur ce résultat. Notamment, il peut être amené à réaliser que, dans un premier temps, ce résultat est incohérent avec le résultat issu de l'estimation initiale. Dans un second temps, il semble que Nicolas se soit questionné sur la nature de cette incohérence. Il en est alors arrivé à la conclusion que son estimation initiale s'avère erronée, et que l'estimation obtenue en superposant les côtés des étoiles est mathématiquement plus certaine. C’est pourquoi il affirme ensuite : « Ok, non. C’est quatre centimètres ».

L’*amélioration* qui en découle est à voir comme étant générée de manière dialectique. L’idée que l’estimation initiale de cinq centimètres soit finalement erronée est un avancement des compréhensions de Nicolas. En retour cet avancement des compréhensions peut être vu comme se manifestant à travers les explications que Nicolas en fait. Selon la perspective dialectique, ceci est un processus de compréhension mettant en route les explications et se déployant à travers elles. En expliquant, Nicolas semble s’approprier réellement ce résultat, ce qui est appuyé lorsqu’il dit : « Ouais parce que c’est plus, si jamais on prendrait le deux là [celui de la seconde étoile], ben c’est quatre ». Cet extrait se démarque du moment qui le précède dans lequel il affirme « Ok, non. C’est quatre centimètres » d’une manière plus prudente.

5.3.8 Remarques globales sur les explications de Nicolas

Cet évènement d’explications rend explicite un caractère particulier de la dialectique explications-compréhensions, soit la mise en route dialectique d’une explication spontanée. Nicolas souhaite d’abord vérifier un résultat intuitif, celui proposant que la seconde étoile ait le plus grand périmètre, à l’aide d’une stratégie embryonnaire, celle d’inscrire les étoiles les unes dans les autres. Comme cette manière de faire ne mène à rien, car Nicolas ne semble pas être en mesure de formuler des explications, il est même amené à mettre cette idée de côté, les explications qui s’en suivent sont formulées sur le vif et sont entremêlées avec les actions de comprendre. Par exemple, la nouvelle méthode du second moment, soit le dénombrement et de l’assignation de mesures, est développée par Nicolas alors qu’il l’explique et est raffinée au cours d’explications subséquentes, selon la nature spécifique du problème et contingente aux explications données précédemment. Il est possible de concevoir ces situations dans l’idée que Nicolas fait des mathématiques en les expliquant. Il déploie alors des processus de compréhension qui sont approfondis des explications qu’il en fait, à travers les *bogues* et *possibilités* qui en émergent. À ce sujet, les explications représentent parfois un moyen de comprendre pour Nicolas, car par moments il semble chercher autant à comprendre lui-même en expliquant qu’à faire comprendre. Par exemple, au quatrième moment, Nicolas veut vérifier que les mesures de côtés initialement estimées à l’œil pour la première et troisième étoile sont valides. Il est possible de comprendre dans cet évènement qu’il vérifie grâce à la nouvelle méthode autant pour lui-même que pour ses interlocuteurs. Cette situation montre alors que de faire des mathématiques non seulement peut se faire à travers des explications, mais en plus que cela semble mettre en route la dialectique explications-compréhensions, faisant avancer par le fait même les compréhensions individuelles expliquées.

Cet évènement d'explications permet aussi de souligner l'effet dans le déploiement de la dialectique explications-compréhensions de ne pas pouvoir expliquer quelque chose. À plusieurs reprises, Nicolas n'est pas arrivé à expliquer ce qu'il comprenait. Parfois, cela provenait de l'incohérence ou du peu de potentiel des compréhensions utilisées. Par exemple, lorsqu'il fait face à la superposition des côtés de la première et de la quatrième étoile, il n'arrive pas à expliquer. Ceci est interprété comme confrontant une de ses compréhensions, celle concevant les côtés comme étant hétérométriques. Parfois cela provenait plutôt du fait que ses compréhensions, bien que valides, lui échappaient. Par exemple, lorsqu'il se fait questionner par le chercheur au sujet de la provenance des nombres, Nicolas n'arrive pas à expliquer pourquoi il a choisi les mesures de deux centimètres et cinq centimètres. Dans tous les cas, ces moments sont vus comme se traduisant en avancement sur le plan dialectique, ici à travers l'émergence de *bogues de compréhension*. Dans cette situation, il semble que l'incapacité d'expliquer sur le coup ait mis en lumière pour Nicolas les manques sur le plan de ses compréhensions mathématiques. Ceux-ci génèrent ensuite des évolutions, puisque Nicolas trouve des manières alternatives de faire.

À ce sujet, cet évènement d'explications rend explicite le caractère collectif des évolutions. En effet, à deux reprises, les évolutions ont été suggérées par un interlocuteur, plutôt que par Nicolas. Cependant, l'effet de ces suggestions sur les compréhensions de Nicolas, ainsi que sur la dialectique explications-compréhensions, semble être le même que si elles prenaient racine en lui. Au même titre que s'il avait fait naitre les évolutions lui-même, il les a faites siennes et les a intégrées dans ses prochaines explications. L'action de les expliquer semble lui avoir permis de se les approprier davantage, participant ainsi au processus de compréhension.

5.4 Quatrième évènement d'explications : Les explications de Malik

Les explications de Malik sont également tirées d'une cueillette de données en classe. Elles portent sur le même problème de la comparaison des périmètres des étoiles, mais sont données par un autre élève, Malik, qui faisait partie d'une classe différente. Ces explications ont été organisées en trois moments d'explications et des évolutions ont été repérées entre ces moments. La démarche d'analyse utilisée est la même que pour les explications de Nicolas, mais, par un concours de circonstances, ne contient pas d'unité d'analyse au cœur d'un moment. Une unité d'analyse est alors uniquement composée de deux moments d'explications consécutifs (comme dans l'anecdote sur la comparaison de fractions à la Section 5.1). Voici un schéma (Figure 5.18) illustrant une unité d'analyse pour les explications de Malik.

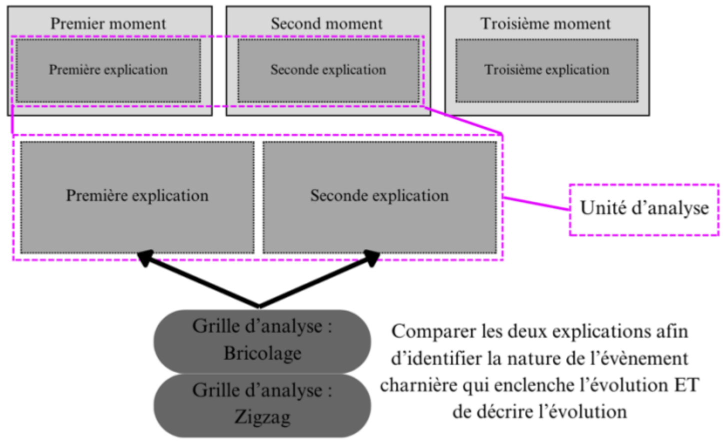


Figure 5.19 – Exemple d'unité d'analyse pour les explications de Malik

5.4.1 Les explications de Malik – Vignette

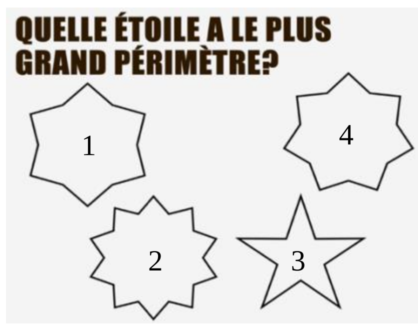


Figure 5.18 – Question affichée à l'écran sur laquelle portent les explications de Malik

(Comme pour la vignette des explications de Nicolas, cette vignette réfère aux étoiles à l'aide de numéros. Ceux-ci, organisés numériquement de gauche à droite, n'étaient pas affichés à l'écran, et servent à clarifier cet évènement.)

Premier moment

Malik explique que sa stratégie consiste à « déplier » les pointes des étoiles pour en faire des polygones convexes. En faisant cela, il affirme pouvoir comparer les périmètres et que, selon lui, c'est la troisième qui a le plus grand périmètre.

Malik : En fait, ce que j'ai fait dans ma tête, c'est que j'ai pris comme ça [*dans la quatrième étoile, il dessine les deux côtés en bas qui forment une pointe rentrante* ]. Là, on les plie pour que ça devienne une ligne.

Chercheur : Tu les… Ah, au lieu que ça soit comme ça [*fait une pointe avec ses mains*], tu fais ça [*déplie les mains pour qu'elles soient alignées*].

Malik : Oui.

Chercheur : Ok.

Malik : Sauf que là, ça voudrait dire qu'on a des morceaux qui dépassent [*trace des morceaux qui dépassent de la pointe de l'étoile* ]. […]

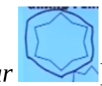
Malik explique pourquoi les morceaux dépassent en faisant référence à une séance de recherche précédente dans laquelle la notion d'inégalité triangulaire a été abordée.

Malik : Mais! Sauf que, si ici on fait pareil avec tous les autres piques [de l'étoile], là ça va faire une genre de forme comme ça [*Malik trace un hexagone convexe* ]. Du coup, avec l'étoile standard, si on le fait ça va donner une genre de longue ligne comme ça [*trace autour de la troisième étoile le grand carré* ]. Ça risque d'être vraiment grand.

Chercheur : Très grand. Ok.

Malik : C'est tout.

Chercheur : Et puis eux autres [*en pointant la première et deuxième étoile*]?

Malik : Et bien eux autres, et bien, si on ferait pareil, ça donnerait [*Malik trace le contour* ].

Chercheur : Mais jamais aussi grand que l'autre, c'est ça?

Malik : Oui, c'est ça.

Second moment

Chercheur : Qu'est-ce qui te dit que le périmètre est plus grand, si la forme est grosse?

Malik : C'est ce que je viens juste de *me* dire, c'est genre… ehh…

Chercheur : Et bien, c'est un bon questionnement.

Malik : Ouais, mais surement que si eehhhm… Ah mais non, mais genre… J'allais dire un truc, mais sauf que, ça ne se pourrait pas, mais genre…

Chercheur : Vas-y donc.

Malik : J'allais dire que si ces deux là [*montre une pointe de la première étoile*] de ces deux morceaux on les mets en ligne pour que ça fasse ça [*aligne deux côtés*], que ces deux morceaux, on fait pareil [*aligne deux nouveaux côtés perpendiculairement aux premiers*], mais ça veut dire que ceux-là on va les mettre comme ça [*trace un grand côté perpendiculairement aux deuxièmes côtés et donc parallèle aux premiers côtés* ], mais genre…

Chercheur : Ah tu voudrais faire un genre de rectangle…?

Malik : Ouais, un genre de truc comme ça, sauf que… ça ne se pourrait pas parce que cette forme [*la première étoile*[. Cette forme [*la quatrième étoile*], je crois [que ça se pourrait]. C'est compliqué.

Chercheur : C'est compliqué! [*rires*] Ok, ok, mais là dans le fond, ce que tu dis, c'est qu'en le défaisant, tu peux obtenir une grosse forme.

Malik : Ouais.

Chercheur : Et puis, elle serait plus grosse que les autres [*la troisième étoile*].

Malik : Ouais.

Troisième moment

Malik : Sauf que là, elle serait plus grosse, mais genre… en termes d'aire, mais pas en termes de périmètre.

Chercheur : Ok. Et bien, gardons ça, on pourra y revenir après, parce que je pense que c'est une piste qui est pas mal bonne.

Malik : Mais sinon, on pourrait juste genre… Ici on les transforme en ligne, on a juste à les mettre genre… bout à bout, comme ça, on verra la ligne la plus grande, sauf que c'est un peu…

Chercheur : Ok, attend un peu, ça, c'est une autre idée ce que tu viens de me dire là!

Malik : Ouais.

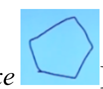
Chercheur : Parce que là, tu dis, les formes que tu as ici [*celles qui entourent les étoiles*], tu les prendrais en longueurs?

Malik : Ouais.

Chercheur : Tu les déferais toutes?

Malik : Ouais, et on les mettrait en longueur.

Chercheur : Donc par exemple […] ton étoile ici comme ça [*trace, sur une nouvelle page, une autre étoile similaire à la troisième*]. Qu'est-ce que tu ferais pour la mettre en longueur ?

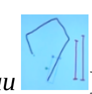
Malik : On fait comme la stratégie, humm… le début de mon autre stratégie, on les humm… humm… On les rend non convexe. Eh, non, on les rend convexes. Ouais c'est ça. On les rend convexes, pour les mettre en ligne droite. Du coup, ça va faire une genre de forme [*trace un hexagone convexe, réalise qu'il se trompe, puis l'efface et trace à un autre endroit un pentagone convexe* ].

Chercheur : Ça c'est si tu sors tes côtés d'étoile, ça te donne ça.

Malik : Ouais! Et là, toutes les lignes droites qu'on voit ici, on les sépare. Genre celle-là, on casse ici [*efface un coin du pentagone* ]. Et là, on genre… attends. Je vais tenter un truc [*prend la ligne sur le tableau interactif, lui fait subir une rotation et la met au bout d'une autre ligne du pentagone* ]. Et là on la met comme ça, à peu près. Et là, on fait ça avec tous les autres morceaux.

Chercheur : Oh, pour obtenir une longue ligne!

Malik : Ouais!

Chercheur : Ok, et puis là, tu pourrais le faire avec toutes les étoiles et regarder. Imaginons une est longue comme ça [*trace une ligne verticale au tableau*]. On la part ici. L'autre, on la part et elle tombe là [*trace une seconde ligne verticale plus longue au tableau* ]. Là, on va savoir que ça appartient à l'étoile qui a le plus long périmètre.

Malik : Ouais.

5.4.2 Première évolution du premier au second moment

5.4.2.1 Analyse de premier niveau : Description de l'évolution

Au premier moment, Malik explique comment déplier les pointes des étoiles pour en faire des polygones convexes. L'évènement laisse comprendre que Malik aurait une certaine compréhension de comment répondre à la question associant possiblement l'aire au périmètre. Il se rapporte au périmètre lorsqu'il dit : « Du coup, avec l'étoile standard [troisième étoile], si on le fait ça va donner une genre de longue ligne comme ça ». Cependant, il semble penser que de comparer la grosseur des formes résultantes pourrait permettre de comparer leur périmètre lorsqu'il affirme immétiadement après : « Ça risque d'être vraiment grand », ce sur quoi il se fait questionner par le chercheur. Au second moment, Malik reconnaît qu'il y a un souci mathématique dans cette première explication. Il explique alors comment corriger sa manière de faire pour qu'il soit possible de comparer les périmètres. Il tente alors de retravailler les polygones créés en les dépliant afin qu'ils soient plus faciles à comparer. Même si cette explication n'est pas concluante à ce moment, car l'explication qu'il formule au second moment ne permet toujours pas d'en comparer les périmètres, il en reste néanmoins qu'il s'agit de son objectif. Les deux explications utilisent ainsi la même manière de faire dans le même objectif de réussir à comparer les périmètres, mais l'explication du second moment pousse mathématiquement plus loin.

Il est possible d'y voir un évènement charnière qui génère une évolution. Cet évènement est ici un *bogue de compréhension*. Après avoir expliqué sa manière de faire initiale, Malik se fait demander par le chercheur si une comparaison des grosseurs de formes permet d'en apprendre sur la comparaison de leurs périmètres. Malik semble alors réaliser que la manière de faire qu'il explique ne permet pas de comparer les périmètres lorsqu'il répond : « C'est ce que je viens juste de me dire, c'est genre… ehh… ». Ceci peut être vu comme la raison pourquoi il s'engage dans une démarche pour la faire évoluer.

Face à ce *bogue de compréhension*, Malik *améliore* sa manière de retravailler les polygones créés initialement afin qu'il soit possible de comparer leurs périmètres. Il les convertit en rectangles. Il s'agit d'une *amélioration*, même si elle ne s'avère finalement pas suffisante à ce moment pour permettre de répondre à la question. Malgré le passage vers des formes plus facilement comparables, notamment des rectangles, l'explication de Malik porte toujours sur une comparaison de la grosseur des formes. Malik reconnaît d'ailleurs cela au début du troisième moment, lorsqu'il dit : « Sauf que là, elle serait plus grosse, mais genre… en termes d'aire, mais pas en termes de périmètre ». La Figure 5.20 ci-dessous offre un schéma explicatif synthétisant cette première évolution.

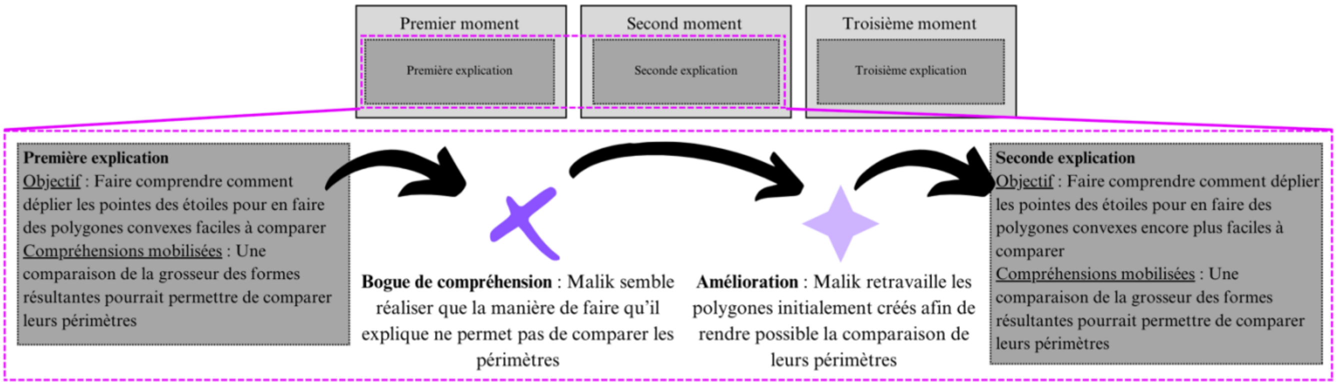


Figure 5.20 – Schématisation de la première évolution pour les explications de Malik

5.4.2.2 Analyse de second niveau : Interprétation dialectique de l'évolution

Le *bogue de compréhension* peut être vu comme étant né d'une compréhension erronée chez Malik. En expliquant, Malik semble amené à se familiariser avec ce qu'il explique, car il gagne en assurance en expliquant et passe rapidement sur certaines notions analogues à celles qui viennent d'être expliquées. Par exemple, alors que son explication du premier dépliage est faite de manière méticuleuse, celles des dépliages subséquents sont grandement écourtées : « Et bien eux autres, et bien, si on ferait pareil, ça donnerait… », ce qui peut être interprété comme une aisance grandissante avec cette notion. De façon dialectique, ceci semble permettre de faire grandir la capacité de Malik de reconnaître que sa méthode, sous sa forme initiale, ne permet pas de comparer les périmètres des étoiles. Suite au questionnement du chercheur, Malik reconnaît que sa méthode ne fonctionne pas tout à fait, mais les explications qu'il donne ensuite au second moment ne clarifient pas non plus cette dernière. Il est possible d'attribuer cela au fait que le *bogue de compréhension* entrevu par Malik et soulevé par le chercheur lui échappe toujours quelque peu. Malik semble savoir que quelque chose cloche, mais sans être en mesure de mettre le doigt dessus. Par exemple, il est possible de sentir un certain inconfort chez Malik alors qu'il tente de donner un sens à sa stratégie lorsqu'il affirme : « Ouais, un genre de truc comme ça, sauf que… ça ne se pourrait pas parce que cette forme [première étoile]. Cette forme [quatrième étoile], je crois [que ça se pourrait]. – Humm… Ok. – C'est compliqué. ». D'ailleurs ceci apparaît comme le rendu explicite d'un processus d'évaluation fait par Malik de ce qui est expliqué, car il remet en question ce qu'il vient d'expliquer et offre ses hypothèses sur les étoiles sur lesquelles ses explications semblent être applicables, notamment en disant « je crois ».

Dans cela, Malik semble également faire l'évaluation continuelle de ce qu'il explique. Alors qu'après avoir expliqué sa stratégie, Malik affirme initialement : « C'est tout », ce qui peut être vu comme le fait que Malik considère son explication achevée, le chercheur le questionne sur le lien entre le périmètre et la grosseur des formes. Malik répond instantanément : « C'est ce que je viens juste de *me* dire, c'est genre… Ehh… ». Cela est interprété comme résultant du fait que Malik était dans un processus de vérification sur la teneur mathématique de ce qu'il explique et que le questionnement du chercheur concorde avec cette évaluation. Sur la bande vidéo, c'est de manière instantanée que Malik répond qu'il se disait justement que quelque chose n'allait pas. Ainsi, l'intervention du chercheur joue ici un rôle dans la genèse du *bogue de compréhension*. Pour Malik, ce dernier prend forme à la lumière de l'évaluation continuelle qu'il déploie en expliquant et lorsqu'il intègre la remise en question du chercheur. Bien que cette évaluation ne semble pas aboutir immédiatement sur un enjeu clair, elle installe cependant des bases sur lesquelles remettre en question l'idée de dépliage qu'il propose. En d'autres mots, faire l'évaluation de ce qu'il explique initie une réflexion pour Malik au sujet de la validité de sa stratégie.

Cette *amélioration* mise en route peut être vue sous l'angle de la dialectique explications-compréhensions, dans laquelle c'est en expliquant que Malik tente de réparer les compréhensions qu'il a utilisées, soit la méthode du dépliage d'étoile. En temps réel, le processus de débogage est ici explicite. Malik tente incessamment de rectifier son idée pour qu'elle lui permette de comparer les périmètres, ce qu'il fait à travers de nombreuses hésitations (eh, genre, …, etc.). Malik propose finalement de transformer les polygones dépliés pour possiblement pouvoir les comparer deux à deux au niveau de leurs périmètres. Bien que l'*amélioration* ne génère pas un résultat fonctionnel à ce stade, il en reste qu'elle semble se développer à travers un processus conjoint entre les compréhensions et les explications, qui évoluent ensemble dans l'évènement. Ce faisant, Malik est amené à se familiariser avec les compréhensions relatives à son idée de dépliage et à se familiariser avec le *bogue de compréhension* relatif à cette idée, ce qui a un rôle pour la seconde évolution.

5.4.3 Deuxième évolution du second au troisième moment

5.4.3.1 Analyse de premier niveau : Description de l'évolution

Au second moment, Malik repense sa méthode du dépliage en polygones en expliquant devoir retravailler les polygones créés afin de les rendre plus facilement comparables. Au troisième moment, Malik commence par identifier exactement l'enjeu dans ce qu'il est en train d'expliquer, soit qu'en comparant la grosseur des polygones, il compare davantage leurs aires que leurs périmètres. Il explique ensuite comment faire pour corriger sa méthode afin d'arriver à comparer les périmètres. Pour cela, il corrige à nouveau l'idée du dépliage en affirmant maintenant devoir casser les polygones pour rendre leurs périmètres des lignes droites faciles à comparer entre eux. Il dit : « Ici on les transforme en ligne, on a juste à les mettre genre… bout à bout, comme ça, on verra la ligne la plus grande […] ». Les deux explications ont le même objectif de comparer les périmètres des étoiles, mais sont différentes sur comment s'y prendre.

Cette évolution peut être vue comme provenant d'un *bogue de compréhension*. Après avoir expliqué comment faire à l'aide du dépliage des étoiles, Malik semble pleinement réaliser qu'il n'est pas passé par-dessus le souci rencontré au premier moment, c'est-à-dire qu'il n'a pas débogué sa première explication. En effet, il souligne lui-même que sa méthode permet de comparer facilement les aires des formes, mais pas forcément leurs périmètres. Cela montre qu'il s'est davantage familiarisé avec le *bogue de compréhension* et qu'il le comprend mieux au début du troisième moment qu'au début du second, lorsqu'il affirme : « Sauf que là, elle serait plus grosse, mais genre… en termes d'aire, mais pas en termes de périmètre ».

Face à ce *bogue de compréhension*, il est possible de voir que Malik fait une *amélioration*. À nouveau, Malik retravaille les polygones pour en faire des objets dont le périmètre est aisément comparable. Il s'agit de fabriquer des lignes avec les côtés des polygones. Malik suggère de réarranger les étoiles en polygones convexes, puis de réarranger ensuite les polygones convexes en lignes en séparant les lignes droites, en les cassant, puis en les replaçant bout à bout. Ceci est à voir comme une *amélioration*, car Malik mobilise la démarche précédemment utilisée dans l'évolution, soit le dépliage des polygones, pour en faire une version améliorée, et ce, même si l'inclusion de la méthode initiale du dépliage n'était pas forcément nécessaire sur le plan mathématique. Cela montre cependant qu'elle semble être nécessaire dans le cheminement des compréhensions de Malik. Voici un schéma explicatif synthétisant cette seconde évolution.

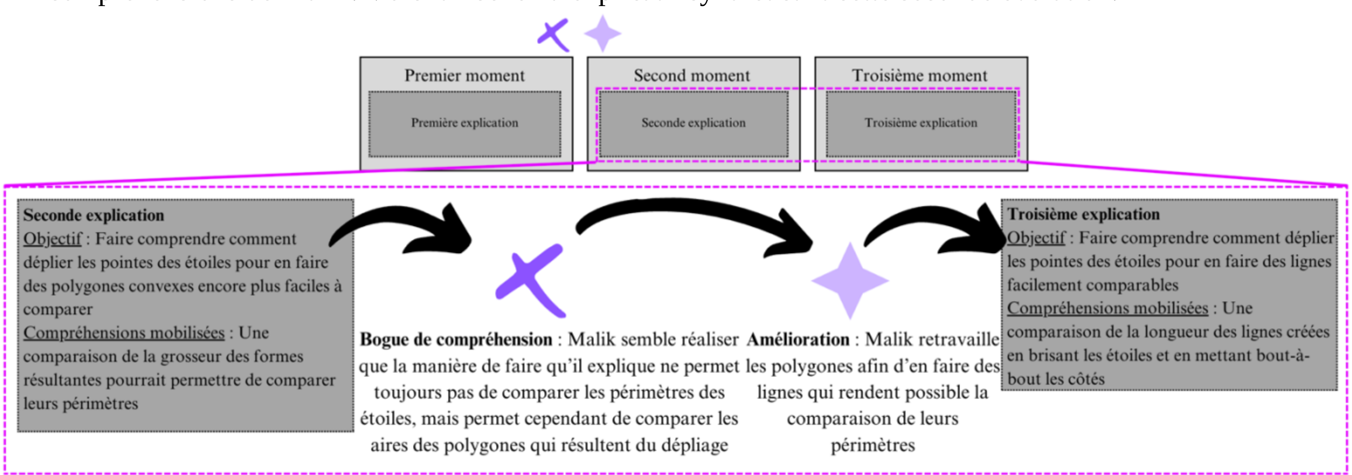


Figure 5.21 – Schématisation de la seconde évolution pour les explications de Malik

5.4.3.2 Analyse de second niveau : Interprétation dialectique de l'évolution

À nouveau, le *bogue de compréhension* peut être vu comme étant né d'une compréhension erronée de Malik, qui s'avère être la même que pour la première évolution, et ce, malgré son état précédemment *amélioré* dans la première évolution. Malik semble constamment faire avancer ses compréhensions en expliquant, en les mobilisant dans la démarche d'explications. Il est possible de reconnaître que cela influence sa capacité à reconnaître et à comprendre les défauts dans les idées mathématiques utilisées. Cette capacité est à voir comme grandissant dans l'action d'expliquer. Cet évènement permet d'observer concrètement ce processus, à travers les explications de Malik. La première fois qu'il rencontre le *bogue de compréhension*, au début du second moment, Malik ne semble pas l'identifier de manière très claire et ne le fait pas évoluer pour le surmonter. En comparaison, au troisième moment, il démontre beaucoup plus de contrôle sur ce qui ne fonctionne pas sur le plan mathématique. Il affirme : « Sauf que là, elle serait plus grosse, mais genre… en termes d'aire, mais pas en termes de périmètre », montrant qu'il comprend mieux la nature du problème de ses compréhensions mathématiques. À ce moment, ces avancements de compréhensions permettent à Malik de faire de son incohérence un *bogue de compréhension* plus contrôlé et surmontable.

Il est possible d'y voir qu'une évaluation faite par Malik au cours de ses explications, grâce à laquelle, en vérifiant la teneur mathématique de ce qu'il explique, lui fait se familiariser avec le *bogue de compréhension*. En expliquant la méthode du dépliage des étoiles, Malik est amené à se questionner sur ce que cela signifie en termes de périmètres, lorsqu'il dit au sujet du dépliage des formes au second moment : « Ouais, un genre de truc comme ça, sauf que… ça ne se pourrait pas parce que cette forme [première étoile]. Cette forme [quatrième étoile], je crois [que ça se pourrait] ». Il semble qu'en évaluant l'apport de sa méthode pour la question, Malik en vient à réaliser qu'elle n'est pas suffisante. Cette situation donne un accès privilégié à ce processus de réalisation, qui vient en deux étapes. Au second moment, Malik semble être en dialogue avec sa manière de faire. Il la travaille en temps réel et à voix haute dans l'espoir d'y trouver un débouché, après quoi, il est forcé de se résigner et de faire évoluer sa méthode d'une autre façon. À la fin, il affirme : « C'est compliqué », ce qui est à voir comme partie intégrante de son évaluation, voire du résultat de cette évaluation. En étant appuyé par le fait qu'il ait de plus en plus de moyens pour comprendre la nature de son erreur, le fait d'évaluer continuellement ses explications est à voir comme arrivant à mettre en lumière les défauts mathématiques de sa méthode et à faire cheminer ses compréhensions relatives à celles-ci.

Cette *amélioration* faite au troisième moment peut être vue comme tirant ses racines de cette évaluation. Le *bogue de compréhension*, ainsi que l'évaluation que Malik fait de son explication du second moment, semblent faire voir à Malik la piste d'ajustement du remaniement des mesures des côtés des polygones convexes en ligne droite. Le fait d'avoir dit : « on les met en ligne pour que ça fasse ça » avant d'aligner deux côtés pour en faire un polygone convexe peut être vu comme une première étape qui a inspiré l'idée d'en faire ensuite des lignes. Au premier moment, Malik transforme très peu les étoiles en dépliant les pointes. Au second moment, il conçoit la possibilité de faire de plus grosses transformations, desquelles les étoiles sont de moins en moins reconnaissables. Au troisième moment, en faisant des lignes, il propose des transformations encore plus grandes des étoiles. Pour comprendre la possibilité du troisième moment, il semble que le passage par l'explication du second moment ait été nécessaire. Cette explication du second moment semble avoir donné de plus en plus de sens à la manière de faire de Malik et à la tâche à résoudre sur la comparaison des périmètres, signifiant que Malik aurait des moyens supplémentaires pour proposer une *amélioration* efficace. Celle-ci a, à son tour, été déployée de manière dialectique. Suite à ses interactions avec le chercheur, Malik est amené à développer cette manière de faire, notamment en l'expliquant. Le déploiement conjoint des explications et des compréhensions est à voir comme menant à une *amélioration*.

5.4.4 Remarques globales sur les explications de Malik

Dans l'ensemble, cet évènement rend explicite un caractère particulier de la dialectique explications-compréhensions, soit les rôles des explications dans le débogage des compréhensions mathématiques en contexte d'explication. En effet, comme souligné précédemment, cet évènement donne un accès privilégié au processus de débogage fait dans l'action d'expliquer. Cet accès privilégié illustre comment le processus d'explications permet à la personne qui explique de se familiariser avec ce qu'elle explique. Au second moment, qui peut être vu comme les actions initialement prises par Malik pour déboguer ses compréhensions du premier moment, Malik essaie des choses en tentant de donner un sens à sa manière de faire et cherche à mieux comprendre le fonctionnement du périmètre des étoiles pour voir comment la rendre fonctionnelle. Au cours du second moment, il ne réussit pas à déboguer, car son explication n'est pas mathématiquement viable, ce qu'il reconnaît lui-même lorsqu'il dit : « Sauf que là, elle serait plus grosse, mais genre… en termes d'aire, mais pas en termes de périmètre » au début du troisième moment. Cependant, comme souligné dans l'interprétation dialectique de la seconde évolution, ces actions de débogage peuvent être vues comme une préparation de terrain permettant à Malik de surmonter le *bogue de compréhension*. Amené à le comprendre de mieux en mieux en tentant de le déboguer, le *bogue de compréhension* en devient une compréhension mathématique en elle-même. En comprenant mieux ce qui ne fonctionne pas dans ses explications initiales, il est amené à y voir des pistes de débogage plus fonctionnelles, au même titre qu'en clarifiant de plus en plus un problème mathématique, il est possible qu'une solution fasse surface. De plus, à travers ses explications, il est amené à s'approprier sa méthode, à se familiariser avec la notion de périmètre et à concevoir un lien conceptuel entre les deux. Ainsi, en plus de mieux comprendre le fonctionnement du *bogue de compréhension*, Malik est amené à comprendre davantage les notions fondamentales pour trouver une solution. Comme tout cela est fait à travers une démarche d'explications, il est possible de voir cette situation comme illustrant comment l'action d'expliquer peut être mobilisée à des fins de débogage. Dans cette situation, expliquer est à voir comme permettant à la fois de faire émerger le *bogue de compréhension* dans la méthode utilisée et à la fois à le surmonter en *améliorant* l'explication.

CHAPITRE 6
CONCLUSIONS

Comme annoncé au Chapitre 4 sur la méthodologie, les analyses du Chapitre 5 ont été menées dans l'objectif de mieux comprendre le fonctionnement de la dialectique explications-compréhensions en étudiant des évènements d'explications dans lesquels il était possible de reconnaître cette dialectique. Ce sixième chapitre relève les éléments principaux qui se dégagent des analyses sur les quatre cas suggestifs d'explications. Il s'agit des conclusions qui permettent d'approfondir sur la dialectique explications-compréhensions en abordant la question de recherche de ce mémoire de maitrise, soit :

De quelles façons la perspective dialectique explications-compréhensions se traduit-elle dans l'action? De quelles manières les mécanismes du zigzag et du bricolage sont-ils impliqués?

Ces éléments de réponses pour la question de recherche se regroupent en deux catégories. D'abord, la Section 6.1 présente les résultats d'*appuis*, qui attestent de la validité de mécanismes théoriques fondamentaux à la perspective dialectique explications-compréhensions. Ensuite, la Section 6.2 présente les résultats d'*avancées*, qui offrent des enrichissements supplémentaires et nouveaux à certaines dimensions du phénomène de dialectique explications-compréhensions. Finalement, la Section 6.3 présente des prolongements possibles entrevus pour cette étude. Des remarques finales sont offertes à la Section 6.4.

6.1 Premier type de résultats : Appuis sur le fonctionnement de la dialectique explications-compréhensions

La perspective dialectique explications-compréhensions s'est retrouvée centrale pour cette étude. Problématisant son intérêt de recherche vers une question de recherche au Chapitre 1, elle a ensuite été conceptualisée sur le plan théorique au Chapitre 2, ainsi que dans une perspective de développement des compréhensions mathématiques individuelles au Chapitre 3. Cette dialectique étant ancrée uniquement sur le plan théorique, des observations faites dans les données semblent attester de la validité de certains mécanismes théoriques fondamentaux à la perspective dialectique et qui ont été adoptés à de nombreuses reprises dans différentes analyses pour donner un sens aux évolutions. Cette section porte sur deux résultats provenant de ces observations. Bien qu'ils sont vus comme étant présents dans l'ensemble des processus d'explications étudiés, les exemples soulignés dans ce qui suit invitent à voir comment ces éléments théoriques peuvent se dérouler dans l'action. Voici le Tableau 6.1 synthétisant les deux résultats d'appuis.

Tableau 6.1 – Résultats d’appuis de la recherche

Mécanisme	Description sommaire
Familiarisation avec les compréhensions expliquées (Section 6.1.1)	L’action d’expliquer semble amener la personne qui explique à se familiariser avec les compréhensions mathématiques qu’elle mobilise pour expliquer.
Évaluation des explications par la personne qui explique (Section 6.1.2)	L’action d’expliquer semble amener la personne qui explique à continuellement déployer une évaluation de ses explications, modulant ainsi en cours de route les explications et les compréhensions expliquées.

6.1.1 Familiarisation avec les compréhensions expliquées

Lorsque la personne explique, elle est vue comme étant amenée à assimiler les idées qu’elle explique, et ce, parce que l’action d’expliquer est conçue par la perspective dialectique à titre d’activité mathématique mobilisant ses compréhensions mathématiques. Les deux évènements d’explications tirées de la collecte de données en classe, notamment à travers l’écoute de leurs bandes vidéo, permettent d’observer des éléments qui illustrent ce phénomène en action. Les explications de Nicolas (voir Section 5.3) le font à travers un gain en confiance observé à travers des explications mobilisant une même compréhension. Celles de Malik (voir Section 5.4) le font à travers des avancements mathématiques dans ce qui est expliqué. À ce moment, l’action d’expliquer est à voir comme un moyen pour la personne qui explique de se familiariser avec les compréhensions mathématiques expliquées.

Au cours des explications de Nicolas, il est possible d’observer un gain en confiance émergeant au fur et à mesure qu’il explique à l’aide de certaines compréhensions mathématiques. Notamment, comme relevé dans l’analyse présentée à la Section 5.3.4, lorsque Nicolas utilise la méthode de superposition pour la première fois, il le fait de manière prudente, en prenant le temps de bien superposer les côtés et d’être précis. Pourtant, lorsqu’il répète cette procédure pour les deux autres étoiles qui n’avaient jusqu’à maintenant qu’été estimées à l’œil, il le fait de manière plus confiante et rapide. Il semble avoir meilleure conscience du fonctionnement de cette méthode, c’est-à-dire que cette dernière relève en fin de compte de l’estimation, même si cette dernière est plus précise que celle faite à l’œil, ainsi que de ses limites. Ceci est interprété comme découlant du fait qu’il ait assimilé cette manière de comparer les mesures en l’ayant expliqué une première fois.

À un niveau plus fin dans les explications de Nicolas, ce dernier a été amené à expliquer deux idées qui n’étaient initialement pas les siennes (voir notamment les analyses proposées aux Sections 5.3.3 et 5.3.5). Elles provenaient de ses interlocuteurs, mais il semble se les approprier au moyen des explications qu’il en fait. Dans un premier cas, comme soulevé dans l’analyse de la Section 5.3.3, le chercheur propose un sens pour la première assignation des côtés de deux étoiles en estimant à l’œil. Alors qu’initialement Nicolas ne répond qu’en acquiesçant, après avoir utilisé cette compréhension à plusieurs reprises pour assigner des mesures aux autres étoiles, il semble réellement s'être familiarisé avec ce sens. Il déploie par lui-même le sens initialement donné par le chercheur et le fait dans ses propres mots, comme présenté dans l'analyse de la Section 5.3.7. Il en est de même pour un deuxième cas, à un degré encore plus pointu. Lorsque Mathis, un autre élève, lui propose que deux mesures superposées puissent être de même mesure, ce qui ne concorde pas avec sa manière de comprendre la comparaison des mesures de côtés (voir l'analyse de la Section 5.3.5). Dans cet épisode, pas à pas, mot à mot, lorsqu'il affirme « Ouais je pense… Oh ok, donc ce serait… ce serait trois centimètres aussi », Nicolas s'approprie cette réinterprétation de ses compréhensions et l'accepte à mesure qu'il l'explique.

Les explications de Malik, quant à elles, permettent d'observer le déploiement du phénomène de familiarisation à travers les avancées dans celles-ci sur le plan mathématique. Notamment, comme l'analyse de la Section 5.4.2 le souligne, lorsque Malik est confronté pour la première fois au bogue de compréhension de sa méthode initiale, celle du dépliement des pointes des étoiles pour en faire des polygones convexes, il ne semble pas être en plein contrôle des sens sous-jacents à celle-ci. Il ne nomme pas clairement l'enjeu (que les transformations des polygones qu'il propose n'aident pas vraiment à comparer les périmètres), ce dernier étant plutôt énoncé sous forme de questionnement de la part du chercheur. De plus, les ajustements qu'il propose, bien qu'ils poussent un peu plus loin son idée du dépliage, n'abordent pas cet enjeu. Cependant, après avoir expliqué cela, il nomme par lui-même de manière très claire l'enjeu en utilisant les notions mathématiques appropriées (il affirme que sa méthode permet de comparer des aires et non pas des périmètres). En plus, il offre ensuite un ajustement directement centré sur sa réparation (voir l'analyse offerte à la Section 5.4.3). Ceci est interprété comme étant dû aux explications antérieures, qui sont alors à voir comme ayant approfondi ses compréhensions sur le bogue de compréhension relatif à sa manière de faire, ce qui lui a permis de mieux le comprendre et d'envisager une manière fonctionnelle de le régler.

Les cas de Nicolas et de Malik soulevés ci-dessus exemplifient comment l'action d'expliquer peut favoriser la *familiarisation* de la personne qui explique avec ses compréhensions expliquées. Le cas de Nicolas illustre comment une idée initialement chancelante (qu'elle soit initialement la sienne ou celle d'une autre personne) gagne en certitude à travers l'action de l'expliquer. De son côté, le cas de Malik montre la manière dont l'explication d'un bogue de compréhension, et la tentative de le corriger en expliquant, permet de mieux cerner les déterminants de ce bogue, voire de mieux en comprendre la nature et d'y apercevoir de meilleures pistes pour le rectifier. Ensemble, ces cas témoignent de comment les explications se révèlent être une voie dirigeant vers des compréhensions plus établies, voire plus riches.

6.1.2 Évaluation des explications par la personne qui explique

Lorsque quelqu'un explique quelque chose, selon la perspective dialectique, une évaluation de ce qui est expliqué se met en route. La personne qui explique s'interroge sur ses explications et les module au besoin. Ceci signifie que l'action d'expliquer est à voir comme mobilisant une évaluation continuelle qui questionne ce qui est expliqué et la module en cours de route (soit l'autorégulation des explications). Cette section illustre comment cette évaluation a pris forme au niveau mathématique des idées expliquées dans deux épisodes tirées des évènements d'explications analysés. Premièrement, le verbatim d'Arican (2019), qui fait l'objet des analyses de Section 5.2, laisse comprendre que ce phénomène se produit dans les explications d'Ece. Par exemple, comme soulevé dans l'analyse la Section 5.2.3, le verbatim mentionne explicitement qu'Ece s'arrête pour réfléchir au cours de ses explications : « Thinking », ce qui est interprété comme accompli par Ece dans l'objectif d'évaluer ses explications. Il en est de même dans l'analyse de la Section 5.2.4, qui a mis en évidence une pause dans le verbatim rapportée sous la forme de « … », ce qui peut être vu comme un bref moment au cours duquel Ece fait l'évaluation de ce qu'elle explique. Ces deux exemples représentent des exemples implicites du phénomène d'évaluation. Or, les explications d'Ece permettent d'observer un autre épisode dans lequel cette même évaluation semble se mettre explicitement en route. En effet, comme relevé dans l'analyse de la Section 5.2.5, le fait d'expliquer pour une première fois la source de sa confusion sur le caractère rectiligne ou courbé du graphique peut être vu comme le déploiement en temps réel du processus d'évaluation. Dans cette explication, Ece est initialement dans une posture interrogative. Elle affirme : « I am only confused about whether the line in this graph straight or curved...this an inverse proportion too. This one […] is a linear inverse proportion. This one… decreasing, right? ». Pas-à-pas, elle explique ce qui la rend confuse, c'est-à-dire, ce qui cloche avec une de ses compréhensions, soit l'idée de devoir choisir entre un graphique rectiligne ou un courbé. À la lumière de cette évaluation, elle semble faire passer sa compréhension de confusion à conviction. Ece remet directement en question ce qu'elle vient d'expliquer sur le plan mathématique. Bien que l'évaluation soulevée ici se situe sur le plan de ses compréhensions, c'est-à-dire sur sa composante mathématique, elle porte également sur le plan des explications, c'est-à-dire sur sa composante explicative.

Ceci peut également être observé dans les deux collectes en salle de classe, c'est-à-dire dans les explications de Nicolas (voir Section 5.3) et de Malik (voir Section 5.4). À plusieurs reprises, ces derniers se montrent hésitants dans leurs processus d'explications. Bien que les explications de Nicolas permettent d'observer ce processus uniquement à ce niveau, comme pour le cas d'Ece, un épisode particulier tiré des explications de Malik, rendu visible par l'analyse de la Section 5.4.2, invite à voir le déploiement de cette évaluation. Après que Malik ait terminé ses explications sur le dépliement des pointes des étoiles pour en faire des polygones convexes encore plus faciles à en comparer le périmètre, comme des rectangles, il fait une déclaration qui semble être une évaluation explicite de ses explications. En disant : « Ouais, un genre de truc comme ça, sauf que… ça ne se pourrait pas parce que cette forme. Cette forme, je crois [que ça se pourrait]. – Humm… Ok. – C'est compliqué », il lance des questionnements sur sa nouvelle méthode, en remarquant notamment qu'elle ne semble pas s'appliquer à toutes les étoiles, et en offrant des hypothèses au passage. À son tour, par cette évaluation, Malik remet directement en question ce qu'il vient d'expliquer. Ainsi, les cas d'Ece, de Nicolas et de Malik montrent qu'une *évaluation* se met en route dans l'action d'expliquer, et que cette dernière mène à l'autorégulation des explications. En plus, deux épisodes tirés de ces évènements d'explications illustrent la mise en route de ce processus, dans le cas d'Ece, en soulevant des interrogations sur ses compréhensions, et dans le cas de Malik, en remettant en question des idées expliquées. Ces cas réunis montrent en quoi l'action d'expliquer s'accompagne d'une évaluation en temps réel de ce qui est expliqué, un processus qui participe activement à la construction et l'autorégulation continuelle d'explications. D'ailleurs, cette évaluation semble traiter l'anticipation d'un bogue de la même manière qu'une explication menée à terme. Il est possible d'observer cela dans les analyses de la Section 5.2 sur le verbatim d'Arican (2019), en particulier dans l'explication d'Ece analysée à la Section 5.2.2, dans laquelle Ece autorégule son explication avant même de l'avoir terminée.

La *familiarisation* avec les compréhensions expliquées et l'*évaluation* des explications par la personne qui explique sont deux résultats d'appuis. Soulevés sur le plan théorique, ces résultats valident ces fondements théoriques en illustrant leur mise en route selon une perspective dialectique explications-compréhensions.

6.2 Second type de résultats : Avancées sur le fonctionnement de la dialectique explications-compréhensions

Cette section dépeint les résultats d'avancées de la recherche. Ceux-ci offrent des éléments supplémentaires sur le fonctionnement des mécanismes de la dialectique explications-compréhensions. Ils ont été regroupés en quatre thèmes offrant des façons dont les explications participent au développement de compréhensions chez la personne qui explique. Résumés dans le Tableau 6.2, ils sont détaillés dans les sous-sections qui suivent.

Tableau 6.2 – Résultats d'avancées de la recherche

Mécanisme	**Description sommaire**
Dépistage de possibilités ou bogues sur le plan des compréhensions mathématiques (Section 6.2.1)	• L'action d'expliquer peut permettre de dépister les possibilités de compréhension (Section 6.2.1.1). • L'action d'expliquer peut permettre de dépister des incohérences mathématiques (bogues) de compréhension (Section 6.2.1.2). • L'incapacité d'expliquer peut permettre de dépister des incohérences mathématiques (bogues) de compréhension (Section 6.2.1.3).

Modulation des compréhensions selon l'autorégulation des explications (Section 6.2.2)	• La bonification d'une explication en explorant une possibilité d'explication peut bonifier les compréhensions expliquées en y ajoutant des éléments et en les organisant de la même nouvelle façon (Section 6.2.2.1). • La réparation d'un bogue d'explication peut réparer de la même manière les compréhensions qui ont mené au malfonctionnement (Section 6.2.2.2). • La réparation d'un bogue d'explication ou la bonification d'une explication en explorant une possibilité d'explication peut permettre de mettre au jour des bogues de compréhensions (Section 6.2.2.3).
Traitement de possibilités et bogues (Section 6.2.3)	• L'action d'expliquer peut représenter pour la personne qui explique un moyen de faire l'exploration de possibilités et la réparation de bogues.
Élévation des compréhensions expliquées (Section 6.2.4)	• L'action de mener à terme une explication peut inciter la personne qui explique à donner une importance supplémentaire aux compréhensions expliquées, les rendant ainsi plus significatives.

6.2.1 Dépistage des possibilités ou bogues sur le plan des compréhensions mathématiques

Lorsque quelqu'un s'engage dans une démarche explicative, il arrive qu'en cours de route cette personne réalise quelque chose sur le plan mathématique. Il est possible que l'idée expliquée contienne un fonds conceptuel supplémentaire ou des liens additionnels à faire, ou encore qu'elle s'avère mathématiquement fausse ou incohérente avec une de ses compréhensions. À ce moment, la démarche d'explication est à voir comme permettant de *dépister* les possibilités et les bogues sur le plan des compréhensions mathématiques. Les possibilités et bogues de compréhension, par définition, sont des avancements de compréhensions et ces derniers peuvent générer de nouveaux avancements de compréhension lorsqu'ils sont explorés ou débogués. Ceci offre alors un élément de réponse à la question de recherche, puisque les déclencheurs mathématiques incitant le développement des compréhensions, soit les possibilités et les bogues de compréhension, sont à voir comme pouvant être générés dans l'action d'expliquer. Les deux mécanismes de *familiarisation* et d'*évaluation continuelle* (en particulier sa composante mathématique ici) sont mobilisés dans les interprétations dialectiques de manière conjointe. Ces mécanismes donnent un sens aux conclusions présentées dans ce qui suit. Cette section présente les trois différentes variétés de dynamiques observées dans les données, qui conduisent au dépistage de réalisations mathématiques.

6.2.1.1 Expliquer peut permettre de dépister des possibilités de compréhension

Expliquer peut augmenter la capacité de la personne qui explique à reconnaître quelque chose de nouveau, ce qui provient du fait que la personne qui explique peut être amenée à se familiariser avec ce qu'elle explique parce qu'elle utilise ses compréhensions mathématiques pour expliquer. Combiné à cela, expliquer peut agir comme source de questionnements qui peuvent s'actualiser en potentiels mathématiques, ce qui provient de l'évaluation continuellement déployée en expliquant. Ensemble, ces deux processus de compréhension inhérents aux explications peuvent mettre en route l'émergence de possibilités de compréhension au cours d'une démarche d'explications. Par exemple, dans l'anecdote sur la comparaison de fractions faisant l'objet des analyses de la Section 5.1, Antoine, lorsqu'il approfondit l'idée de la moitié, dépiste des possibilités de compréhension en expliquant. Spécifiquement, ceci est mis en évidence dans l'analyse de la Section 5.1.3 dans laquelle l'action d'expliquer comment utiliser l'idée de la moitié pour comparer $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ est vue comme faisant émerger pour lui la possibilité d'élargir à une famille de fractions. Ceci est attribué aux deux processus de compréhension soulevés ci-dessus. Antoine semble avoir reconnu cette possibilité en comprenant mieux le fonctionnement de son idée de la moitié et en se questionnant sur son applicabilité sur d'autres fractions. Dans les analyses des Sections 5.1.4 et 5.1.5, il est soulevé qu'Antoine est amené à dépister, de la même manière, deux nouvelles possibilités de compréhensions, chaque fois en expliquant la précédente. Autrement, le verbatim d'Arican (voir Section 5.2) permet un constat similaire. Comme rapporté dans l'analyse de la Section 5.2.5, Ece semble, elle aussi, repérer une possibilité de compréhension à travers l'action d'expliquer sa confusion sur le fait de devoir choisir un des deux graphiques, rectiligne ou courbé. Elle y voit l'idée de ne pas avoir à choisir. Il est à nouveau possible de concevoir que d'expliquer sa confusion lui a permis de mieux la comprendre et l'a amenée à remettre en question l'idée d'en choisir un des deux. Ainsi, ces deux cas illustrent comment l'action d'expliquer peut dynamiser la reconnaissance de nouvelles possibilités de compréhension, soit en affinant la compréhension d'idées existantes ou encore en suscitant des questionnements qui ouvrent sur des perspectives mathématiques nouvelles.

6.2.1.2 Expliquer peut permettre de dépister des bogues de compréhension

De manière analogue, expliquer peut améliorer la capacité de la personne qui explique pour identifier une erreur mathématique qui s'y trouve, ce qui provient aussi de la familiarisation faite avec les idées en expliquant. En plus, expliquer peut faire se poser des questions à la personne qui explique, qui peuvent résulter en remises en question des compréhensions utilisées pour expliquer, ce qui provient aussi de l'évaluation faite en expliquant. Ensemble, ces processus de compréhension mis en route dans l'action d'expliquer peuvent faire émerger les bogues de compréhension contenus dans une explication. Ceci est illustré par les analyses de la Section 5.4 sur la collecte de données en salle de classe avec Malik. Par exemple, lorsque Malik explique comment comparer les périmètres des étoiles grâce au dépliage des pointes des étoiles qui donne des polygones convexes, il dépiste un bogue de compréhension (voir les analyses aux Sections 5.4.2 et 5.4.3). Il affirme réaliser que sa manière de faire compare davantage les aires, et non pas les périmètres des étoiles. Il est possible d'attribuer cette réalisation au fait que d'expliquer lui a permis de mieux comprendre sa méthode et, conjointement, l'a questionné sur elle.

D'un autre côté, certains bogues de compréhensions semblent être apparus non pas en raison du double processus de compréhension de familiarisation et d'évaluation. Ils sont plutôt survenus suite à un résultat mathématique inattendu et incohérent avec une compréhension, qui a émergé dans une explication. Il est possible de le voir dans le verbatim d'Arican (2019) analysé à la Section 5.2. Notamment, l'analyse de la Section 5.2.2 souligne que lorsqu'Ece s'apprête à expliquer pourquoi les graphiques illustrant la relation entre le rayon et le nombre de révolutions d'un engrenage auraient dû être rectilignes, elle réalise que ce n'est pas le cas. Il semble que ce soit en calculant si numériquement pour une même augmentation de rayon, la diminution du nombre de révolutions reste constante, ce qui représenterait effectivement un graphique rectiligne, qu'elle réalise que la diminution du nombre de révolutions varie. Ce résultat mathématique, parce qu'il est incohérent avec ce qu'elle s'apprêtait à expliquer, représente un bogue de compréhension. Un évènement similaire se produit dans les données issues de la collecte en salle de classe avec Nicolas (voir Section 5.3). Spécifiquement, l'analyse de la Section 5.3.5 montre que lorsque Nicolas commence à expliquer la nouvelle méthode de superposition pour comparer les mesures de côtés des première et quatrième étoiles, il semble alors réaliser que les côtés sont de même mesure, ce qui ne concorde pas avec ce que l'évènement laisse comprendre comme étant sa compréhension initiale. Expliquer la superposition est vu comme ayant fait émerger ce résultat mathématique, qui représente un bogue de compréhension. Similairement, lorsque Nicolas commence à expliquer comment mobiliser cette nouvelle manière de faire pour confirmer la comparaison initialement à l'œil des mesures des côtés de la seconde et de la troisième étoile (voir l'analyse à la Section 5.3.7), il réalise que deux côtés de la seconde étoile se superposent approximativement exactement sur un côté de la troisième étoile. Ce résultat s'avère incohérent avec les mesures précédemment estimées, d'où le bogue de compréhension. En conclusion, les cas observés dans les explications de Malik, d'Ece et de Nicolas permettent d'observer en quoi l'action d'expliquer constitue un moyen de prendre conscience d'incohérences dans les compréhensions mathématiques de la personne qui explique, c'est-à-dire en questionnant et réévaluant ces compréhensions mobilisées pour expliquer ou en arrivant à un résultat mathématique inattendu.

6.2.1.3 Tenter d'expliquer, mais échouer peut permettre de dépister les bogues de compréhension

Les bogues de compréhension peuvent également émerger dans une tentative d'explication, lorsqu'une personne tente d'expliquer une idée, mais n'y arrive pas. Normalement, une compréhension mathématique familière et valide permet à la personne qui veut expliquer de formuler une explication. C'est pourquoi si ce n'est pas le cas, c'est possiblement que la compréhension mathématique échappe à la personne qui explique ou contient une incohérence mathématique. Une tentative d'explication peut alors révéler des bogues de compréhension. Les données collectées en salle de classe avec Nicolas (voir Section 5.3) illustrent cela. Lorsque Nicolas n'arrive pas à expliquer en quoi la superposition des étoiles permet de comparer leur périmètre, comme présenté dans l'analyse de la Section 5.3.2, ce dernier semble réaliser que cette manière de faire n'offre aucun moyen de comparer les périmètres des étoiles. Autrement, l'analyse de la Section

5.3.3 souligne que lorsqu'il n'arrive pas à expliquer la logique derrière les mesures attribuées aux côtés de la seconde et troisième étoile, il semble réaliser qu'il ne sait pas pourquoi il a choisi ces mesures avec exactitude. Finalement, lorsqu'il n'arrive pas à expliquer comment comparer la première et la quatrième étoile à l'œil (voir l'analyse de la Section 5.3.4), Nicolas semble réaliser que cette méthode ne lui permet pas de comparer des mesures trop similaires. Ainsi, parfois, il s'agit d'une incohérence mathématique ou de compréhensions faibles en potentiel mathématique (comme dans le premier et troisième cas présenté ici). Parfois, il s'agit plutôt du fait que les compréhensions, bien que mathématiquement valides, échappent à la personne qui explique (comme dans le second cas présenté ici). Dans tous les cas, ces situations sont à voir comme des bogues de compréhension qui ont émergé dans l'incapacité de la personne à expliquer quelque chose. Ainsi, à travers les explications de Nicolas, il est possible de voir comment l'incapacité à expliquer quelque chose peut faire émerger des bogues de compréhension, soit en révélant des incohérences sous-jacentes ou des flous compréhensifs lorsque l'explication échoue.

En somme, la présente Section 6.2.1 illustre en quoi l'action d'expliquer peut conduire à des réalisations importantes en termes de compréhensions. Soulignées dans les ancrages théoriques de la recherche, il s'agit de possibilités de compréhension (Section 6.2.1.1) et de bogues de compréhension (Section 6.2.1.2). En plus, les tentatives d'explications, mêmes si échouées, semblent avoir l'effet analogue de faire émerger des bogues de compréhensions (Section 6.2.1.3). Ainsi, la mise en route d'explications peut favoriser le développement de compréhensions chez la personne qui explique, par l'entremise des réalisations qu'elle fait naitre en cours de route.

6.2.2 Modulation des compréhensions selon l'autorégulation des explications

La démarche explicative peut également mener à des bogues et des possibilités provenant de considérations sur les explications. La personne qui explique peut réaliser que ses explications n'atteignent pas leur objectif de faire comprendre les idées expliquées ou encore qu'il est possible de les expliquer autrement, potentiellement de manière plus claire ou convaincante. D'aborder ces réalisations sur les explications, c'est-à-dire de moduler les explications pour inclure une possibilité d'explication ou surmonter un bogue d'explication, peut générer des avancements dialectiques des explications et des compréhensions. En raison de cela, la démarche d'autorégulation des explications est vue comme modifiant les compréhensions mathématiques de la personne qui explique. Ceci offre des éléments de réponse à la question de recherche ciblés sur les bogues et possibilités spécifiquement d'explication. L'exploration des possibilités de compréhension, centrée sur l'idée de bonifier une explication, est à voir comme bonifiant également les compréhensions de la même manière. De manière analogue, le débogage d'une explication centré sur des considérations d'explications est à voir comme générant des évolutions sur les compréhensions mathématiques mobilisées pour expliquer au même titre que si elles-mêmes étaient boguées. En plus de cela, la démarche d'autorégulation semble avoir un autre impact provenant des réalisations d'explications, celui de mettre au jour des bogues de compréhensions. En effet, expliquant différemment quelque chose, la personne qui explique peut en venir à réaliser des erreurs dissimulées dans ses compréhensions, ce qui constitue un autre élément de réponse à la question de recherche. Cette section porte sur ces trois impacts, qui sont générés suite à une réalisation spécifiquement d'explication.

6.2.2.1 Bonifier une explication peut bonifier les compréhensions expliquées

Il arrive qu'en expliquant, la personne fasse la réalisation qu'il soit possible d'expliquer l'idée plus clairement ou de manière plus convaincante. Réaliser cela peut amener la personne qui explique à faire évoluer son explication afin de la bonifier en actualisant le nouveau potentiel perçu. À ce moment, les actions déployées pour explorer une possibilité d'explication peuvent bonifier les manières de comprendre ce qui est expliqué en y ajoutant des éléments et en les organisant de la même façon. Les interprétations dialectiques aident à nouveau à comprendre pourquoi. En effet, les possibilités d'explication sont des nouvelles manières d'arriver à faire comprendre une idée à un interlocuteur, ce qui signifie qu'elles sont à voir comme de nouvelles manières de comprendre une idée. En explorant ces possibilités d'explication, la personne qui explique est alors amenée à développer de nouvelles manières de comprendre, qui servent à expliquer, mais qui représentent aussi des avancements de compréhensions. Il en devient difficile de faire la distinction entre une possibilité d'explication et une de compréhension, puisque les deux amènent la personne qui explique à développer ces nouvelles manières de comprendre une idée. Ceci rappelle le travail de Mopondi (1995, dans Hersant, 2001) sur la notion d'explications. La différence est principalement centrée sur l'intention de la personne qui explique. Un exemple de cela est situé dans la collecte de données avec Nicolas (voir Section 5.3). Spécifiquement, tel que soulevé dans l'analyse de la Section 5.3.6, ce dernier réalise la possibilité d'expliquer la comparaison des périmètres de paires d'étoiles grâce à la méthode de la superposition nouvellement développée. Explorer cette réalisation en l'expliquant semble faire gagner en certitude les compréhensions mathématiques de Nicolas sur la première paire d'étoiles. Grâce à une comparaison plus fine, il en arrive à avoir la certitude que si un côté de la seconde étoile mesure deux centimètres, alors un côté de la première mesure trois centimètres. Ce gain en certitude s'en retrouve avoir développé ses compréhensions. En fin de compte, le cas de Nicolas permet d'illustrer comment les actions prises pour bonifier une explication font avancer ses compréhensions, soit en faisant progresser les compréhensions de manière à actualiser la possibilité d'explication.

6.2.2.2 Réparer un bogue d'explication peut réparer les compréhensions expliquées

De manière analogue, la réalisation qu'une explication n'atteigne pas son objectif d'explication peut mener la personne qui explique à la réparer afin qu'elle puisse y parvenir. À ce moment, les actions déployées pour réparer les éléments considérés défectueux sur le plan de l'explication semblent réparer de la même manière les compréhensions qui ont mené à ce malfonctionnement. Ceci peut être éclairci grâce aux interprétations dialectiques offertes en analyse. Un élément important de celles-ci est que, pour la personne qui explique, les compréhensions mathématiques mobilisées dans les explications initiales peuvent être considérées en elles-mêmes comme étant malgré tout bonnes et fonctionnelles. Ce sont les explications qui sont vues comme étant défaillantes. Néanmoins, les compréhensions sont à voir comme étant réparées de la même manière que si elles présentaient un bogue de compréhension. Elles semblent être considérées par la personne qui explique comme étant insuffisantes en elles-mêmes pour formuler une explication fonctionnelle. C'est pourquoi la compréhension soutenant une explication boguée nécessiterait d'être révisée au même titre que si elle-même était mathématiquement incohérente ou défaillante, c'est-à-dire boguée. L'anecdote de la comparaison de fraction présentée à la Section 5.1 permet d'illustrer cela. Plus spécifiquement, comme rapporté dans l'analyse de la Section 5.1.2, Antoine réalise que son explication mobilisant la notion de dénominateur commun n'atteint pas son objectif de convaincre Sylvain que la calculatrice n'est pas nécessaire. Bien qu'il considère ses compréhensions sur les dénominateurs communs comme étant valides, il développe une nouvelle manière de comprendre pourquoi $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$, comme si ces compréhensions initiales étaient défaillantes. Il développe l'idée de la moitié qui se veut être une meilleure manière de comprendre pourquoi $\frac{5}{8} > \frac{7}{12}$ sans utiliser de calculatrice. En plus de lui permettre de formuler une explication qui semble mieux atteindre son objectif relatif à Sylvain, cette idée de la moitié est à voir comme représentant une transformation de ses compréhensions. Ceci semble se produire également à un niveau plus fin, dans le verbatim d'Arican (2019) (voir Section 5.2). Lorsqu'Ece semble réaliser que d'expliquer à partir de l'allure du graphique risque de ne pas être suffisamment clair pour son interlocuteur, tel que souligné dans l'analyse de la Section 5.2.4, elle transforme son explication. Bien que cette transformation ait probablement été opérée dans l'idée de bien faire comprendre son idée à l'interviewer, elle est à voir comme développant une nouvelle manière d'organiser ses compréhensions, soit à partir de la justification. En conclusion, les cas d'Antoine et d'Ece permettent de montrer comment la correction d'un bogue d'explication peut aller au-delà de la simple réparation de l'explication, pour impliquer une révision des compréhensions, et ce, même lorsque ces dernières sont considérées mathématiquement valides en elles-mêmes par la personne qui explique.

6.2.2.3 Moduler une explication peut permettre de dépister des bogues de compréhensions

Les actions déployées pour moduler une explication sur des considérations d'explications peuvent avoir un autre rôle, celui de dévoiler un bogue de compréhension. En effet, tenter d'expliquer de manière plus claire ou convaincante altère la manière d'expliquer et peut demander de relier ou d'utiliser de nouvelles compréhensions, qui peuvent en retour déboucher sur une réalisation au sujet de ces compréhensions. Il est possible de déboucher sur un résultat inattendu qui s'actualise en bogue de compréhension. Ceci peut être observé dans les données tirées de la salle de classe de Nicolas (voir Section 5.3). Notamment, l'analyse offerte à la Section 5.3.6 illustre comment Nicolas explore la possibilité d'appliquer sa nouvelle méthode de superposition à d'autres paires d'étoiles. En s'attendant à confirmer les mesures obtenues avec l'ancienne méthode de la comparaison à l'œil, il tombe plutôt sur une incohérence entre les résultats issus des deux méthodes. Dans ce cas, l'exploration d'une possibilité d'explication lui a permis de dépister un bogue de compréhension. Ainsi, le cas de Nicolas montre comment moduler une explication pour la rendre plus claire ou convaincante peut amener la personne qui explique à réaliser un bogue de compréhension, soit mettant la personne qui explique dans une nouvelle situation mathématique qui peut avoir des ramifications sur ses compréhensions.

En somme, la présente Section 6.2.2 montre comment le processus continuel d'autorégulation inhérent à la démarche explicative peut être générateur d'avancements de compréhensions mathématiques chez la personne qui explique. De bonifier une explication en explorant une possibilité peut bonifier les compréhensions (Section 6.2.2.1). De la réparer en déboguant un bogue d'explication peut amener la révision de compréhensions mathématiques (Section 6.2.2.2). Non seulement cela, mais en plus ces deux processus de modulation des explications faits dans l'objectif de mieux expliquer peuvent permettre de dépister des défaillances sur le plan mathématique, qui, autrement, pourraient passer inaperçues (Section 6.2.2.3). Ainsi, l'autorégulation des explications, qu'elle soit de nature corrective ou exploratoire, peut avoir un effet important en matière de développement de compréhensions chez la personne qui explique.

6.2.3 Traitement des possibilités et des bogues dans la démarche d'explication

Comme mentionné précédemment, l'exploration des possibilités et la réparation des bogues qui apparaissent au cours d'une explication, qu'ils proviennent de considérations sur cette explication ou qu'ils soient de nature compréhensive, peuvent jouer un rôle clé dans le développement des compréhensions mathématiques chez la personne qui explique. Les données permettent de montrer que ces explorations de possibilités et réparations de bogues peuvent se faire à travers une démarche d'explication. Ceci offre un élément de réponse à la question de cette recherche, puisque les explications sont à voir comme un terrain fertile pour explorer les possibilités et réparer les bogues. À travers les interprétations dialectiques des données, il est possible d'en dire davantage sur ceci. Par exemple, dans l'anecdote de la comparaison de fractions (voir Section 5.1), les explications sur l'idée entrevue de se rapporter à la moitié ont été données de manière spontanée et n'ont pas été réfléchies ou préalablement préparées dans toute la profondeur de l'idée, signifiant que les compréhensions expliquées étaient embryonnaires avant les explications et ont été explorées *par* et *à travers* elles. C'est pour cette raison que de nombreuses réalisations ont émergées de chaque explication subséquente. Les explications de Nicolas et de Malik issues des collectes de données en salle de classe (voir Sections 5.3 et 5.4) en illustrent le fonctionnement en temps réel plus en profondeur. En particulier, la présence des bandes vidéo exemplifie ce fonctionnement. Certaines évolutions de compréhensions qui se font dans ces explications sont à voir comme se matérialisant dans l'action d'expliquer, à travers les évolutions des explications. Par exemple, Nicolas opère une transformation dont l'analyse de la Section 5.3.2 fait l'objet. Il répare le bogue de compréhension relatif à sa stratégie initiale d'inscription des étoiles les unes dans les autres. Il fait cela en expliquant une nouvelle stratégie, celle du dénombrement de côtés et d'assignation de mesures, ce qui est à voir comme développant une nouvelle manière de comprendre à travers l'action d'expliquer. En plus, il semble s'approprier de plus en plus cette stratégie en l'expliquant pour différents cas. De manière similaire, il opère une amélioration, qui est creusée par l'analyse de la Section 5.3.4. Il ajuste la manière d'assigner une mesure de sa forme initiale, soit initialement estimée à l'œil, vers une forme plus sophistiquée, soit estimée suite à une superposition avec un côté « connu » d'une autre étoile, et ce, grâce à l'explication qu'il en fait. À ce moment, expliquer est à voir comme développant simultanément sa compréhension de cela. De plus, comme élaboré dans l'analyse de la Section 5.3.6, Nicolas explore la possibilité d'appliquer sa méthode de superposition aux autres étoiles en l'expliquant. À ce moment, il fait gagner en certitude et réalise grâce aux explications un nouveau bogue de compréhension jusqu'ici dissimulé. Finalement, creusée par l'analyse de la Section 5.3.7, Nicolas opère une amélioration à travers l'action d'expliquer. Il ajuste les mesures de la troisième étoile, de cinq centimètres vers quatre centimètres en expliquant pourquoi les côtés ne peuvent pas mesurer cinq centimètres, en fin de compte.

Le cas de Malik (voir Section 5.2), quant à lui, permet d'observer le déroulement d'un débogage sur le plan de ses compréhensions. Ce dernier tente de déboguer sa stratégie initiale du dépliage des pointes en expliquant. Comme abordé dans l'analyse de la Section 5.4.2, il explique comment la pousser plus loin, ce qui génère une amélioration, en dépliant en polygones convexes encore plus faciles à comparer. Cette amélioration s'avère sans succès par rapport au bogue de compréhension, mais semble tout de même lui permettre de mieux comprendre son idée ainsi que la nature du bogue qu'il essaie de surmonter. Tel que présenté dans l'analyse de la Section 5.4.3, il parvient à déboguer en expliquant une seconde amélioration de sa stratégie, en dépliant les polygones pour en faire des lignes droites. Ces deux améliorations de compréhensions semblent avoir été développées par Malik au moyen de ses explications.

La perspective dialectique propose la notion de boucles dialectiques, dans lesquelles l'action d'expliquer fait avancer quelque peu les compréhensions et qu'en retour, ces dernières permettent de continuer à s'engager dans la démarche explicative. Cet aspect provenant de la perspective dialectique éclaire ainsi pourquoi l'action d'expliquer peut être une occasion de faire le traitement d'une réalisation. À ce sujet, les explications de Malik tirées de la collecte de données en salle de classe présentées à la Section 5.4 permettent d'assister au déroulement d'une telle boucle dialectique. Comme décortiqué dans l'analyse de la Section 5.4.2, expliquer comment améliorer sa stratégie initiale du dépliage semble lui permettre de mieux comprendre la stratégie ainsi que le bogue de compréhension, même si l'amélioration s'en retrouve toujours boguée. Cela l'amène à améliorer à nouveau sa stratégie et lui permet d'arriver à surmonter le bogue, ce qui fait l'objet de l'analyse de la Section 5.6.3. D'une certaine manière, il est possible de considérer que Malik tire ici avantage du caractère dialectique des explications et des compréhensions, soit du fait que l'action d'expliquer mobilise des processus de compréhension et les fasse avancer.

D'ailleurs, les évolutions survenant dans les boucles dialectiques peuvent contenir un potentiel d'enclencher à nouveau le dispositif dialectique d'évolution. À ce moment, les boucles dialectiques peuvent être engendrées par les évolutions dans la dialectique explications-compréhensions, à travers le potentiel qu'elles contiennent. De manière continuelle, les évolutions du dispositif dialectique peuvent l'amener à évoluer à nouveau, faisant alors avancer les compréhensions mathématiques de la personne qui explique à chaque fois, comme c'est le cas dans l'anecdote personnelle présentée à la Section 5.1. Par exemple, comme souligné dans l'analyse de la Section 5.1.6, l'idée de la moitié élaborée par Antoine pour surmonter un bogue d'explication était chargée en potentiel d'évolution. Initialement pensée pour comparer les fractions $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$, l'idée de la moité avait le potentiel d'être poussée pour comparer l'ensemble des fractions dont le numérateur est égal à 1 de plus que la moitié du dénominateur. Ceci est aussi à voir comme une boucle dialectique. En effet, l'action d'expliquer la comparaison de $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ grâce à l'idée de la moitié engendre le potentiel d'expliquer la comparaison d'un ensemble de fractions à travers l'accroissement de cette idée. Cependant, l'actualisation de cette boucle dialectique génère le potentiel de pousser l'idée de la moitié pour l'ensemble des fractions dont le numérateur est égal à k de plus que la moitié du dénominateur, engendrant ainsi une autre boucle dialectique. Ceci continue pour les manques de k et aurait pu continuer davantage si Antoine n'avait pas senti qu'il était temps de passer à autre chose. Ainsi, d'aborder une réalisation en l'expliquant est à voir comme pouvant générer une autre réalisation, qui à son tour, peut en générer une nouvelle, et ainsi de suite, c'est-à-dire une série de réalisations. De manière continuelle, chaque évolution peut être chargée d'un potentiel d'évoluer à nouveau qui peut se révéler dans l'action d'expliquer.

En conclusion, cette présente Section 6.2.3 rapporte en quoi l'action d'expliquer peut être vue comme plus qu'un moyen de dépister les possibilités et bogues de compréhension, comme élaboré à la Section 6.2.1; comme faisant plus que moduler les compréhensions selon leur autorégulation, mais comme étant un moyen de faire ces explorations et réajustements. Dans les cas d'Antoine, de Nicolas et de Malik, expliquer devient un environnement propice favorisant la mise en route de la dialectique explications-compréhensions qui permet d'explorer les possibilités et de déboguer les bogues.

6.2.4 Élévation des compréhensions expliquées

Alors qu'une explication en train d'être formulée peut mobiliser les compréhensions d'une manière incertaine ou contingente à l'explication offerte, dans une explication menée à terme, les compréhensions mobilisées semblent gagner en certitude, mais également en importance. La manière de faire comprendre un interlocuteur qui est considérée fonctionnelle semble donner un statut de conviction, voire de vérité, aux compréhensions mobilisées, rappelant ainsi le travail de Lakatos (1976) sur l'évolution des mathématiques disciplinaires. Une explication considérée achevée et bonne par la personne qui explique peut devenir plus significative pour elle. Il est possible de remarquer cela dans les explications d'Antoine sur la comparaison de fractions grâce à l'idée de la moitié présentées à la Section 5.1. Comme discuté dans les remarques globales de la Section 5.1.6 sur les analyses de cet évènement d'explications, à travers la complétion de chaque explication, Antoine semble accorder une importance supplémentaire aux compréhensions expliquées, importance à partir de laquelle il se permet de les creuser davantage. Dans cette situation, cela mène à l'enclenchement de boucles dialectiques. En effet, l'idée de la moitié, qui était initialement centrée sur la comparaison spécifique de $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$ n'était pas forcément de premier ordre pour Antoine. Cette idée était utile pour comparer ces fractions, mais sans plus. Cependant, après avoir été expliquée, l'idée de la moitié est devenue, non seulement excellente pour faire la comparaison de ces fractions, mais en plus, d'intérêt pour comparer d'autres fractions. Cela est vu comme provenant du fait qu'elle ait mené à une explication qui fonctionne. Un résultat similaire peut être observé dans la collecte de données en salle de classe avec Nicolas (voir Section 5.3), en particulier par ses explications sur la comparaison des périmètres des étoiles, notamment lorsqu'il fait le dénombrement des côtés des étoiles et de l'assignation de mesures. Après avoir expliqué une première comparaison à l'aide de cette méthode, cette dernière semble réellement devenir fondamentale pour Nicolas. Initialement Nicolas s'en sert de manière hésitante. Or, au cours de ses explications, cette idée devient utilisée comme une stratégie mathématique « certifiée », voire comme une formule chevronnée. Notamment, comme discuté par les analyses de la Section 5.3.6, Nicolas souhaite continuer à mobiliser cette manière de faire, malgré le fait que le chercheur ait offert une synthèse de ces idées, ce qui est vu comme illustrant l'importance supplémentaire accordée par Nicolas à sa méthode de dénombrement des côtés et d'assignation de mesures à ces côtés.

En conclusion, cette présente Section 6.2.4 montre comment l'action d'expliquer ne se contente pas de tenter de transmettre une compréhension de manière neutre, impartiale ou détachée, mais leur accorde une valeur et une légitimité nouvelle par le fait même. Comme le montrent les cas d'Antoine et de Nicolas, en utilisant leurs compréhensions pour expliquer, ils transforment leur vision de ces compréhensions, les rendant plus vivantes, bonnes et importantes à leurs yeux, ce qui correspond à une autre retombée dialectique de l'action d'expliquer pour les compréhensions mathématiques de la personne qui explique.

Ces quatre résultats d'avancées s'ajoutent aux deux résultats d'appuis soulevés à la Section 6.1. Ensemble, ils forment les six conclusions explicites de cette recherche, soit six manières dont les mécanismes de la dialectique explications-compréhensions sont impliqués dans l'action d'expliquer et qui illustrent comment cette dernière participe au développement de compréhensions chez la personne qui explique.

6.3 Prolongements

Cette étude sur les rôles des explications dans le développement de compréhensions mathématiques chez la personne qui explique mène à des questions et réflexions supplémentaires, qui méritent d'être explorées. Cette section pointe sur trois pistes de prolongements possibles. La première s'intéresse à la composante contextuelle quant aux dimensions affectives propres à la démarche explicative. La seconde porte sur les applications possibles de cette recherche, notamment en contexte scolaire.

6.3.1 Réflexions sur une dimension supplémentaire pour la perspective dialectique

Cette étude n'aborde pas les dimensions contextuelles concernant la dialectique explications-compréhensions. Or, des dimensions reliées au contexte d'explication peuvent possiblement avoir un impact sur le déploiement de cette dialectique, voire sur son efficacité. Il est en effet possible de reconnaître que le contexte dans lequel les explications sont formulées peut avoir une influence sur celles-ci, parce que, comme le décrit Polya (1954, dans Lampert, 1990) pour le cas de l'activité mathématique. Polya reconnaît qu'il y a un risque émotionnel relié à la démarche mathématique qu'il est essentiel de surmonter pour être en mesure de réellement s'y engager et de faire des mathématiques. Il semble alors possible de tracer certains rapprochements entre les risques de la démarche mathématique et ceux possibles dans une démarche d'explications mathématiques. Cela amène à s'intéresser d'autre part à ces risques possibles de la démarche d'explication et à ses influences sur la dialectique explications-compréhensions. D'autre part, plus largement, cela conduit à vouloir explorer l'apport d'une dimension contextuelle pour cette dialectique. Proulx et Mégrourèche (2021) ouvrent une piste sur cette idée de contexte sécuritaire à travers la notion de bienveillance didactique en enseignement des mathématiques. Ils affirment :

> Les mathématiques qui sont produites, développées et explorées sont contingentes à ce contexte spécifique […]. Le caractère spécifique de ce contexte et l'expérience propre qui y est façonnée représentent des dimensions à prendre en compte dans la compréhension de l'activité mathématique qui en émerge. (Proulx et Mégrourèche, 2021, p. 652)

Il est ainsi possible de concevoir qu'un contexte d'explications « sécuritaire » pour la personne qui explique soit nécessaire pour enclencher le dispositif dialectique. D'ailleurs, les quatre évènements d'explications analysées dans cette recherche proposent des explications qui semblent faites dans de tels contextes. Cependant, la notion de contexte sécuritaire en ratisse large et mérite d'être approfondie. Notamment, de quoi est composé un contexte d'explications sécuritaire? Quelles qualités y sont mises de l'avant? Comment la nature des contextes, en particulier de ceux considérés sécuritaires, influence-t-elle le déploiement dialectique? Une étude développant sur une dimension contextuelle et l'incorporant à la perspective dialectique apporterait possiblement un niveau de profondeur supplémentaire à celle-ci.

6.3.2 Réflexions sur l'application de cette recherche

Cette étude conduit à six mécanismes de la dialectique explications-compréhensions (voir Sections 6.1 pour les mécanismes d'appuis et 6.2 pour ceux d'avancées), qui peuvent être traduits en façons dont l'action d'expliquer participerait au développement de compréhensions mathématiques chez la personne qui explique. Ceci ouvre une réflexion sur la place des explications dans la classe de mathématique et pour l'enseignement de mathématiques. Cette recherche, dans la lignée du travail de Bednarz (1991), réaffirme le potentiel que peut avoir la pratique mathématique d'explications pour la personne qui apprend des notions mathématiques, si elle explique ce qu'elle en comprend. Alors que cette recherche s'en tient à vouloir mieux comprendre le phénomène, elle invite tout de même à creuser la place qu'occuperait l'activité d'explication mathématique en salle de classe ainsi que sur sa capacité pour *faire apprendre*. Est-il possible de mobiliser cette perspective centrée sur la personne qui explique à des fins d'enseignement? En particulier, ce travail invite à vouloir en creuser le fonctionnement de l'action de *faire expliquer* un apprenant dans l'objectif de faire cheminer ses compréhensions mathématiques individuelles. Qu'apporterait une perspective d'avancements dialectiques des processus d'explications et de compréhensions? Une étude visant à mieux comprendre l'impact de cette perspective dialectique explications-compréhensions pour les pratiques enseignantes informerait sur le potentiel de l'action de faire expliquer à des fins d'enseignement.

6.4 Remarques finales

Le point de départ de cette recherche provient d'un éventail d'expériences personnelles d'explications qui ont fait cheminer mes propres compréhensions mathématiques et qui m'ont conduit à créer moi-même des situations dans lesquelles j'expliquais certaines idées dans l'objectif de mieux les comprendre. De ces démarches est né un intérêt pour mieux comprendre le développement des compréhensions mathématiques individuelles, ainsi que l'influence que peuvent avoir les explications mathématiques sur ce processus de compréhension. Problématiser cet intérêt de recherche a incité l'étude d'une perspective portant sur leur interaction mutuelle, soit la dialectique explications-compréhensions, qui est devenue à la fois la manière d'investiguer mon intérêt de recherche, à la fois l'objet même de la recherche. L'étude de la perspective dialectique explications-compréhensions a fait cheminer plusieurs éléments clés. Notamment, cette conceptualisation vivante de l'interaction explications-compréhensions, qui s'appuie elle-même sur des visions dynamiques des natures individuelles des explications et des compréhensions, offre un cadre pour approfondir les rôles des explications sur le développement de compréhensions mathématiques individuelles. Au-delà d'y reconnaître un effet, la perspective dialectique rend vivantes les influences mutuelles entre explications et compréhensions et creuse les détails du phénomène. Étudier cette dialectique explications-compréhensions m'a permis de développer une sensibilité accrue pour l'exploration dans la précision de phénomènes complexes et pour accorder une importance aux nuances qui en émergent.

L'écriture de cette recherche m'a également permis de mieux comprendre ce que j'ai vécu. En mettant des mots sur mes expériences et sur mes compréhensions, j'ai pu approfondir ce que j'en comprenais, tout en m'initiant au processus même de recherche. (Y aurait-il une dialectique dans le processus de recherche, entre les compréhensions relatives à lui et sa mise en mots?) Mieux comprendre les expériences relatives aux explications que j'ai vécues, celles qui étaient emballantes comme celles qui étaient difficiles, a participé à rendre ma recherche très humaine à mes yeux. En creusant les nuances des explications et du développement des compréhensions, en normalisant et en relativisant l'expérience de vivre un bogue ou de s'imprégner d'une possibilité qui émerge en cours de route, j'en suis arrivé à concevoir et confirmer l'action d'expliquer comme une démarche dynamique, dans laquelle se tromper, essayer des choses et se laisser inspirer font partie du processus. En ce sens, je souhaite partager cette vision humaine des explications, et plus largement, des mathématiques. J'ai espoir que ma recherche peut, à l'image d'une lignée de travaux incluant notamment ceux de Papert, participer à l'humanisation des mathématiques et à les rendre accessibles à tous.

BIBLIOGRAPHIE

Antoine, P. et Smith, J.-A. (2016). Saisir l'expérience : présentation de l'analyse phénoménologique interprétative comme méthodologie qualitative en psychologie. *Société française de psychologie Elsevier Masson*. http://dx.doi.org/10.1016/j.psfr.2016.04.001

Arican, M. (2019). Preservice Mathematics Teachers' Understanding of and Abilities to Differentiate Proportional Relationships from Nonproportional Relationships. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*, 1423–1443 https://doi.org/10.1007/s10763-018-9931-x

Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*, *3*(3), 261-304.

Barabé, G. et Proulx, J. (2017). Révolutionner l'enseignement des mathématiques : le projet visionnaire de Seymour Papert. *For the Learning of Mathematics*, *37*(2), 25-29.

Baraquin, N., Baudart, A., Dugué, J., Laffitte, J., Ribes, F. et Wilfert, J. (1995). *Dictionnaire de philosophie*. Armand Colin.

Bednarz, N. (1991). Interactions sociales et construction d'un système d'écriture des nombres en classe primaire. Dans C. Garnier, N. Bednarz et I. Ulanovskaya (dir.), *Après Vygotski et Piaget. Perspectives sociale et constructiviste* (p. 51-67). De Boeck.

Bessis, D. (2022). *Mathematica : une aventure au cœur de nous-mêmes*. Seuil.

Boyer, P. et Martineau, S. (2018). La problématique. Dans Karsenti, T. et Savoie-Zajc, L. (dir.), *La recherche en éducation* (4e édition, p. 85-108). Presses de l'Université de Montréal.

Byers, V., & Erlwanger, S. (1984). Content and Form in Mathematics. *Educational Studies In Mathematics*, *15*(3), 259-275. https://doi.org/10.1007/bf00312077

Compréhension (s.d.). Dans *Larousse en ligne*. https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/compr%C3%A9hension/17772

Compréhension (s.d.). Dans *Le Robert dico en ligne*. https://dictionnaire.lerobert.com/definition/comprehension

De Villers, M.-É. (2009). Explication. *Multidictionnaire de la langue française* (p. 678). Québec Amérique.

Explication (s.d.). Dans *Larousse en ligne*. https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/explication/32267

Explication (s.d.). Dans *Le Robert dico en ligne*. https://dictionnaire.lerobert.com/definition/explication

Explication. (2016). Dans *Oxford English Dictionary*. https://www.oed.com/dictionary/explication_n

Hersant, M. (2001). *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège* [thèse de doctorat, Université Paris-Diderot-Paris VII]. HAL theses. https://theses.hal.science/tel-00122340

Hiebert, J. et Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Dans J. Hiebert (dir.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (p. 1-23). Routledge.

Karsenti, T. et Demers S. (2018) Dans Karsenti et Savoie-Zajc (dir.), *La recherche en éducation* (4e édition, p.191-218). Presses de l'Université de Montréal.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique* (traduit par N. Balacheff et J. M. Laborde). Editions Hermann. (Ouvrage original publié en 1976)

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American educational research journal*, *27*(1), 29-63.

Lévi-Strauss, C. (1962). *La pensée sauvage*. Librairie Plon.

Papert, S. (1972). Teaching children to be mathematicians versus teaching about mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *3*(3), 249-262.

Papert, S. (1990). *Constructionism vs. Instructionism. Part I: Teaching vs. Learning*. Papert.org. http://www.papert.org/articles/const_inst/const_inst1.html

Papert, S. et Harel, I. (1991). Situating constructionism. *Constructionism*, *36*(2), 1-11.

Papert, S. (1993). *The children's machine: Rethinking school in the age of the computer*. BasicBooks.

Proulx, J. (2019). Reconceptualizing the Nature of Mathematical Expertise. *Constructivist Foundations, 14*(3), 310-312.

Proulx, J. (2021). *Toutes ces réponses sont bonnes*. Éditions MultiMondes.

Proulx, J. et Mégrourèche, C. (2021). Retombées collatérales d'un Teaching Experiment : vers une bienveillance didactique. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology 21*, 639-655. https://doi.org/10.1007/s42330-021-00171-5

Raynal, F. et Rieunier, A. (2014). *Pédagogie, dictionnaire des concepts clés : apprentissage, formation, psychologie cognitive*. ESF Éditeur.

Rey, A. (2011). Comprendre. *Le Robert dictionnaire historique de la langue française*. (p. 827-828)

Roth, W.-M. (2012). *First-Person Methods, Toward an Empirical Phenomenology of Experience*. Sense Publishers.

Savoie-Zajc, L. (2018) La recherche qualitative/interprétative. Dans Karsenti et Savoie-Zajc (dir.), *La recherche en éducation* (4e édition, p.191-218). Presses de l'Université de Montréal.

Sierpinska, A. (1990) Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *10*(3), 24-41. https://flm-journal.org/Articles/43489F40454C8B2E06F334CC13CCA8.pdf

Sierpinska, A. (1995). *La compréhension en mathématiques*. De Boeck Université.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20-26.

Struik, D. J. (1987). *A concise* history *of mathematics* (4e éd.). Dover Publications.

Tremblay, M.-A. (1968), *Initiation à la recherche en sciences humaines*, Montréal : McGraw Hill

Tremblay, K.-P. (2017), *Étude des aspects transformateurs de la technologie pour l'activité mathématique : analyse de trois logiciels utilisés dans le milieu scolaire*. [mémoire de maitrise, Université du Québec à Montréal]. Archipel. https://archipel.uqam.ca/11155/

Turkle, S. et Papert, S. (1993). Styles and voices. *For the Learning of Mathematics*, *13*(1), 49-52.