

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉTUDE DU PLÉTHYSME À L'AIDE DE LA COMBINATOIRE DES TABLEAUX

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR

FLORENCE MAAS-GARIÉPY

NOVEMBRE 2023

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.04-2020). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

Je commence par remercier chaudement mon mentor, mon directeur Franco Saliola. Tes encouragements et ta grande disponibilité m'ont soutenue tout au long de mes études aux cycles supérieurs (déjà 6 ans!). Tu m'as amené à développer mon plein potentiel mathématique, tu as cru à la chercheuse en moi quand je doutais. Sans toi, je ne me serais certainement pas rendue aussi loin! Merci milles fois, tu es une personne en or.

Je me dois par la suite de remercier toutes les personnes qui ont fait du LaCIM un laboratoire stimulant et accueillant où faire ma maîtrise et mon doctorat.

Merci à Pauline et Nadia, pour votre grande amitié et avoir partagé avec moi les écueils et les bonheurs de vos doctorats respectifs, et m'avoir encouragée dans cette voie, chacune à votre façon.

Merci à Antoine pour ta présence constante au labo, pandémie ou pas! Tu as toujours été fidèle au poste, accompagné la plupart du temps par les presque aussi fidèles Nicolas, Christophe et François. J'ai apprécié grandement tous les lunches et les cafés partagés avec vous.

Merci à Étienne pour avoir été un compagnon de route et un merveilleux collaborateur de recherche ces dernières années. On a trouvé des super résultats, on a eu l'occasion de les présenter en conférence, et à travers tout ça, on a eu plein de fun. J'aurais pas pu demander mieux!

Merci à Véronique, Mélodie et Carole, qui ont été très présentes au début de mon doctorat, avant d'aller voler de leurs propres ailes ailleurs.

Merci à Linda Tremblay, pour avoir mis du soleil dans le labo avec ta bonne humeur, ton rire et tes tricots!

Merci À Florian, Jose et GaYee, post-doctorants au LaCIM, j'ai beaucoup apprécié vous côtoyer.

Merci à tous les autres que j'oublierais peut-être. Vous êtes beaucoup à avoir terminé votre parcours

pendant le mien, mais votre empreinte n'en est pas moindre.

Merci également à Catherine et Stéphan du Coeur des sciences, pour m'avoir donné multiples occasions pour développer mon intérêt pour la vulgarisation scientifique.

Ensuite, et j'aurais pu commencer par ça, je remercie mon amour, Frédéric Monet. Notre relation a évolué avec nos doctorats respectifs, et la pandémie. Nous nous sommes encouragés mutuellement tout au long du parcours, et c'est beau. Merci d'être toujours là pour moi, lors des bons et moins bons jours. Je suis très heureuse d'accueillir les prochains chapitres de ma vie à tes côtés.

Je veux aussi remercier ma famille et mes ami.e.s qui m'ont soutenue émotionnellement à travers les montagnes russes que représentent le doctorat : Pauline, Nadia, Simina, Julie-Anne, Herman, Steph, Nancy, Camilla, Anaïs, de même que les membres de ma troupe de Jive, vous êtes bien trop hot ! Je suis choyée d'être entourée de si belles personnes !

Finalement, je remercie le jury qui entreprend de lire ma thèse un peu volumineuse, et le CRSNG pour m'avoir financé tout au long de mes études doctorales.

Merci donc à tous ceux et celles qui ont contribué à ensoleiller ces quatre dernières années.

## TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES .....	viii
RÉSUMÉ .....	x
INTRODUCTION .....	1
0.1 Idée générale de la thèse .....	1
0.2 Découpage des chapitres .....	2
CHAPITRE 1 NOTIONS PRÉALABLES .....	4
1.1 Théorie de la représentation et origine du pléthysme.....	5
1.1.1 Théorie de la représentation.....	5
1.1.2 Origine, propriétés et intérêts de l'étude du pléthysme .....	8
1.2 Tableaux et fonctions symétriques .....	10
1.2.1 Partages, compositions et tableaux .....	10
1.2.2 Fonctions symétriques .....	13
1.2.3 Fonctions quasi-symétriques.....	18
1.3 Pléthysme vu comme une opération sur les fonctions symétriques ou sur les tableaux ...	19
1.3.1 Pléthysme comme une substitution de variables dans les fonctions symétriques ..	20
1.3.2 Pléthysme comme opération sur les tableaux, et tableaux de tableaux.....	22
1.4 Mots, tableaux et cristaux .....	27
1.4.1 Mots et tableaux : monoïde plaxique, RSK, jeu de taquin et évacuation .....	28
1.4.2 Théorie des cristaux.....	32
CHAPITRE 2 SÉPARER LE CARRÉ DE FONCTIONS SYMÉTRIQUES HOMOGENES ET ÉLÉMENTAIRES EN LEURS PARTS SYMÉTRIQUES ET ANTI-SYMÉTRIQUES ...	37
2.1 Résumé de l'article .....	37

2.2	Place de cet article dans la littérature et contributions originales .....	40
2.3	Splitting the square of homogeneous and elementary symmetric functions in their symmetric and anti-symmetric parts (Maas-Gariépy et Tétreault, 022a) .....	42
2.3.1	Abstract .....	42
2.3.2	Introduction .....	42
2.3.3	Definitions .....	45
2.3.4	Associating a $Q$ -tableau indexing a copy of $s_\nu$ in $h_\lambda^2$ to a plethysm .....	49
2.3.5	Associating a $\tilde{Q}$ -tableau indexing a copy of $s_\nu$ in $e_\lambda^2$ to a plethysm .....	58
2.3.6	What's next? .....	62
2.3.7	Acknowledgements .....	65
CHAPITRE 3 3-PLÉTHYSMES DE FONCTIONS SYMÉTRIQUES HOMOGÈNES ET ÉLÉMENTAIRES .....		66
3.1	Résumé de l'article .....	66
3.2	Place de cet article dans la littérature et contributions originales .....	69
3.3	Autres notations et définitions particulières à l'article .....	69
3.4	3-plethysms of homogeneous and elementary symmetric functions (Maas-Gariépy et Tétreault, 022b) .....	72
3.4.1	Abstract .....	72
3.4.2	Introduction .....	72
3.4.3	Background .....	74
3.4.4	Plethysm and plethystic type .....	76
3.4.5	General rules for attributing types .....	78
3.4.6	Tableaux of content $(n)^3$ .....	84

3.4.7	3-ribbon tableaux .....	87
3.4.8	Integer points on polytopes.....	91
3.4.9	Type attributions for tableaux of content $(n)^3$ .....	96
3.4.10	Generalizing to $e_n^m$ .....	108
3.4.11	Plethysm of a product of symmetric functions.....	108
3.4.12	Conclusion .....	115
3.4.13	Acknowledgements .....	115
3.4.14	Appendix : Counting integer points on $\mathbb{P}_n$ .....	115
CHAPITRE 4 FONCTIONS QUASI-SYMÉTRIQUES ET QUASI-CRISTAUX .....		119
4.1	Résumé de l'article .....	119
4.2	Place de cet article dans la littérature et contributions originales.....	122
4.3	Quasicrystal Structure of Fundamental Quasisymmetric Functions, and Skeleton of Crystals (Maas-Gariépy, 2023) .....	124
4.3.1	Abstract.....	124
4.3.2	Introduction .....	124
4.3.3	Background .....	128
4.3.4	Decomposing a crystal into subcomponents corresponding to fundamental quasisymmetric function .....	134
4.3.5	Quasicrystal structure of a subcomponent associated to a fundamental quasisymmetric function $F_\alpha$ .....	139
4.3.6	Layout of subcomponents $B(T_\alpha)$ in a crystal $B(\lambda)$ .....	148
4.3.7	Crystal skeleton and dual equivalence graphs as relations between the plactic and coplactic monoids .....	160
4.3.8	Applications to plethysm .....	166

4.3.9	Conclusion .....	169
4.3.10	Aknowledgement .....	170
4.3.11	Annex : Proofs for EVAC.....	170
	CONCLUSION .....	174
4.4	Résumé des résultats .....	174
4.5	Recherche future.....	176
	BIBLIOGRAPHIE .....	178
	INDEX DES NOTATIONS ET DES DÉFINITIONS .....	181



## TABLE DES FIGURES

FIGURE 1.1	Insertion du bimot $W$ par l'algorithme alternatif de RSK .....	31
FIGURE 1.2	Insertion accélérée du bimot $W$ par l'algorithme alternatif de RSK .....	31
FIGURE 1.3	Cristal sur les mots $[4]^{\otimes 2}$ .....	35
FIGURE 1.4	Cristal sur les tableaux $[4]^{\otimes 2} \simeq B(2) \oplus B(1, 1)$ .....	36
FIGURE 2.1	Yamanouchi domino tableaux of shape $(2n, 2n)$ and $(2^{2n})$ .....	64
FIGURE 3.1	Tableau $T$ of shape $(5, 5, 3)$ , content $(3, 3, 4, 2, 0, 1)$ and associated monomial $x^T$ .	75
FIGURE 3.2	Projections $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ of $\mathbb{P}_6$ at $\kappa_5 = 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$ . .....	93
FIGURE 3.3	Side cut of $P_6$ which illustrates the fact that $P_m$ is the union of two polytopes.	94
FIGURE 3.4	Reduction of the 3-strand from $P_3$ to $P_1$ .....	95
FIGURE 3.5	Coloring of the points of $P_{10}$ . .....	103
FIGURE 3.6	Second coloring of the points of $P_{10}$ . .....	106
FIGURE 3.7	Third coloring of the points of $P_{10}$ . .....	107
FIGURE 3.8	Attributing a type to a tableau of shape $(6, 6, 5, 3, 1)$ and content $(3, 2, 2)^3$ .....	114
FIGURE 4.1	Isomorphic connected components of crystals on words and tableaux .....	133
FIGURE 4.2	Decomposition of $B(4, 3)_4$ into its subcomponents associated to fundamental quasisymmetric functions $F_\alpha$ .....	138
FIGURE 4.3	Skeleton of $B(4, 3)_4$ .....	153
FIGURE 4.4	Structure of induced subgraphs of $Skeleton(\lambda)$ .....	161
FIGURE 4.5	Dual equivalence graph for $\lambda = (4, 3)$ , as of the definition of Assaf. ....	165

FIGURE 4.6 Connected components of crystal isomorphic to  $B(\mu)$ , linked by the crystal anti-automorphisms  $Rot$  and  $EVAC$ , and the crystal isomorphism  $RSK$  ..... 173

## RÉSUMÉ

Cette thèse porte sur l'étude du pléthysme à l'aide de la combinatoire des tableaux, et regroupe trois articles de l'auteur portant sur le sujet. Le premier aborde la décomposition des 2-pléthysmes de fonctions symétriques homogènes et élémentaires, alors que le deuxième présente celle des 3-pléthysmes de ces mêmes fonctions, et présente une approche généralisable aux  $m$ -pléthysmes de ces fonctions. Ces deux articles utilisent la combinatoire des tableaux pour décrire les coefficients apparaissant dans chacun des pléthysmes de la décomposition pléthystique de la  $m^{\text{ième}}$  puissance d'une telle fonction. Le troisième article prend une approche différente, et aborde la décomposition du pléthysme de deux fonctions de Schur dans la base des fonctions quasi-symétriques fondamentales. Celle-ci peut également être comprise à travers le prisme de la combinatoire des tableaux, et tout particulièrement à travers la théorie des cristaux. Cet article vise alors à décrire les relations entre ces deux bases, les fonctions de Schur et les fonctions quasi-symétriques fondamentales, à travers l'étude de cristaux, et quasi-cristaux, de tableaux.

## INTRODUCTION

La première partie de cette introduction présente l'idée générale de la thèse. La suite présente le découpage de la thèse en chapitres.

### 0.1 Idée générale de la thèse

Beaucoup d'aspects des objets qui nous entourent peuvent être décrits, et compris, en terme de transformations, rotations, réflexions, etc. qui les préservent, autrement dit qui redonnent le même objet. C'est vrai autant pour des objets de tous les jours que pour les molécules, cristaux et autres structures complexes. Les transformations qui préservent un objet peuvent être regroupées en un ensemble qu'on appelle un groupe, où un produit décrit comment combiner deux telles transformations pour en obtenir une autre. Comprendre ces groupes permet bien souvent de mieux comprendre les objets qu'ils préservent, c'est pourquoi l'étude de ces groupes a souvent des applications en physique, chimie, cristallographie, etc.

En particulier, les matrices (invertibles) décrivent les transformations de l'espace, et donc le groupe des matrices (invertibles)  $GL_n$  est particulièrement intéressant à étudier, de même que ses sous-groupes. Pour les étudier, on utilise ce qu'on appelle la théorie de la représentation. Essentiellement, une représentation d'un groupe est une application qui envoie chaque élément du groupe sur un élément d'un autre groupe, et qui encode la structure du groupe de départ. Les représentations peuvent ensuite être décomposées en sous-représentations irréductibles de la façon la plus fine que possible. Les sous-représentations donnent alors beaucoup d'information sur le groupe.

Malheureusement, l'étude de ces représentations se révèle difficile, c'est pourquoi on se ramène souvent à l'étude des caractères de ces représentations. Ceux-ci ont l'avantage d'être égaux pour deux représentations équivalentes (isomorphes), et sont donc plus simples à étudier, mais préservent les informations les plus importantes du groupe. Dans notre cas, les caractères de  $GL_n$  sont des polynômes symétriques : des polynômes (possiblement infinis) en  $x_1, x_2, \dots$  tels qu'échanger deux variables redonne le polynôme de départ. On voudra décrire la décomposition des caractères en sous-caractères irréductibles, et donc décrire la décomposition des fonctions symétriques dans la

base des fonctions de Schur, qui correspondent aux caractères des sous-représentations simples (ici irréductibles).

On souhaite ici comprendre la composition de deux représentations, et tout particulièrement sa décomposition en sous-représentations irréductibles. Celle-ci est étonnamment mal comprise. Le pléthysme apparaît alors comme l'opération entre caractères (et donc sur les fonctions symétriques) qui donne le caractère d'une composition de représentations. On veut en particulier comprendre comment le pléthysme de deux fonctions symétriques se décompose dans la base des fonctions de Schur. Il se trouve que c'est un problème excessivement difficile, qui demeure ouvert depuis plus de 80 ans. Nous abordons alors quelques problèmes plus « simples » qui y sont reliés.

On utilise la combinatoire des tableaux : pour comprendre tous ces concepts compliqués, on étudie des diagrammes remplis d'entiers, nommés tableaux, qui décrivent bien les fonctions de Schur qui apparaissent dans ces décompositions. Ces objets sont étudiés depuis longtemps, et on a accès à une panoplie d'outils qui nous permettent de « manipuler » ces tableaux. Nous voyagerons entre les univers différents, mais inter-reliés, de la théorie de la représentation, des fonctions symétriques, de la combinatoire des tableaux et des cristaux, dont on pourra utiliser les outils. La combinatoire des tableaux a ici l'avantage d'offrir une approche visuelle du problème, tout en conservant l'accès aux outils des autres univers.

## 0.2 Découpage des chapitres

Le premier chapitre fait un survol des notions énoncées ci-haut, tels les représentations polynomiales de  $GL_n$  et leurs caractères, le pléthysme, les fonctions symétriques et les tableaux, les connections combinatoires entre les mots et les tableaux, et les cristaux. Il présente également la motivation de l'étude du pléthysme, de même que différentes approches du problème.

Chaque chapitre qui suit présente un article de l'autrice. La première partie de chaque chapitre introduit la teneur de l'article, en précise l'importance de la contribution, et comment celui-ci s'insère dans la littérature scientifique. Des concepts spécifiques à un article sont aussi définis en introduction de celui-ci.

Le deuxième chapitre présente un premier article, écrit en collaboration avec Étienne Tétreault, et soumis au journal *The Pacific Journal of Mathematics*, disponible sur ArXiv (Maas-Gariépy et Tétreault, 022a). Celui-ci donne une description combinatoire des coefficients apparaissant dans les pléthysmes de forme  $s_\mu[h_\lambda]$  ou  $s_\mu[e_\lambda]$ , pour  $\mu$  un partage de 2. On dit donc que ce sont des 2-pléthysmes. Dans le cas où  $\lambda = (n)$ , on retrouve des résultats de Carré et Leclerc (Carré et Leclerc, 1995). L'objectif premier de cet article est de donner une description combinatoire compatible avec celle de Carré et Leclerc, mais pouvant être étendue à de plus « grands » pléthysmes, soit pour des partages  $\mu$  de  $m > 2$ .

Le troisième chapitre présente un deuxième article également écrit en collaboration avec Étienne Tétreault, et soumis au journal *The Electronic Journal of Combinatorics*, de même que sur ArXiv (Maas-Gariépy et Tétreault, 022b). Cet article étend les résultats du premier article à  $m = 3$ , et décrit une méthode générale de résolution pouvant être appliquée pour  $m \geq 3$ .

Le troisième et dernier article présenté prend une approche différente pour étudier le pléthysme. Son objectif est de mieux comprendre combinatoirement la décomposition d'une fonction de Schur dans la base des fonctions quasi-symétriques fondamentales, et celle d'une somme symétrique de fonctions quasi-symétriques fondamentales dans la base de Schur. La motivation de cette étude est le fait que le pléthysme de deux fonctions de Schur a une expression en terme de fonctions quasi-symétriques fondamentales, introduite par Loehr et Warrington (Loehr et Warrington, 2012). Donner une expression combinatoire du passage des fonctions quasi-symétriques vers les fonctions de Schur permettrait (éventuellement) de résoudre, ou simplifier, le problème du pléthysme. Cet article exploite des outils de la théorie des cristaux, et évidemment de la théorie des fonctions quasi-symétriques, introduits également dans le premier chapitre. Cet article est soumis au journal *Electronic Journal of Combinatorics*, de même que sur ArXiv (Maas-Gariépy, 2023).

Finalement, une conclusion permet de mettre ces trois chapitres principaux en relation, et un index des notations et définitions permet de les retrouver plus aisément dans le document.

# CHAPITRE 1

## NOTIONS PRÉALABLES

Nous réviserons ici les notions utilisées dans les articles. Elles y seront réintroduites très succinctement, afin d'assurer la cohérence interne de chaque article. Un expert pourra sauter ce chapitre, et se référer à l'index des définitions ou celui des notations lorsque nécessaire. Les contributions originales se trouvent dans les chapitres subséquents.

Ce chapitre introduit les définitions, accompagnées d'exemples et d'explications supplémentaires, de même que différents angles d'approches de la problématique englobant les problèmes étudiés dans les différents articles : le pléthysme. L'opération du pléthysme étant issue de la théorie de la représentation, on en fera un survol avant d'énoncer les propriétés axiomatiques du pléthysme. Cette opération sur les fonctions symétrique décrit alors le caractère de la composition de deux représentations de  $GL_n(\mathbb{C})$ . Afin de comprendre le pléthysme du point de vue combinatoire, nous introduisons les bases des fonctions symétriques directement en termes combinatoires, comme des sommes sur des tableaux de formes de partage. Nous décrivons aussi les fonctions quasi-symétriques, qui généralisent les fonctions symétriques et sont à l'étude dans le troisième article présenté. Nous voyons différentes façons d'aborder le pléthysme, qui permettent d'en extraire des résultats utiles par la suite. Finalement, nous décrivons le monoïde plaxique, le jeu de taquin et l'algorithme de RSK, qui lient mots et tableaux. La théorie des cristaux permet entre autres d'unifier ces concepts et outils, et se retrouve implicitement dans tous les articles présentés.

La vaste majorité de ce chapitre est basée sur les ouvrages de référence suivants : *Young tableaux* de Fulton (Fulton, 1996), *The symmetric group : Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions* de Sagan (Sagan, 2001) et *Symmetric functions and Hall polynomials* de Macdonald (Macdonald, 1998). À l'exception des résultats énoncés comme propositions, les références ne sont indiquées que si elles diffèrent des ouvrages ci-dessus. La section sur le pléthysme est basée principalement sur l'article d'exposition de Loehr et Remmel sur le pléthysme (Loehr et Remmel, 2011) et le cours Séminaire de combinatoire : Pléthysme donné par Franco Saliola à l'hiver 2022 (Saliola, 2022). La section sur les fonctions quasi-symétriques se base principalement sur les articles

(Loehr et Remmel, 2011) et (Loehr et Warrington, 2012). Finalement, la dernière section sur la théorie des cristaux se base sur l'article de synthèse *Crystals for dummies* (Shimozono, 2005) et le livre de référence *Crystal bases* (Bump et Schilling, 2017). Les autres sources sont indiquées au fil du texte.

Il n'est pas étonnant de trouver des similitudes entre cette introduction, celle des articles présentés, et celle du mémoire de maîtrise de l'autrice, qui utilisent des outils similaires.

## 1.1 Théorie de la représentation et origine du pléthysme

### 1.1.1 Théorie de la représentation

Le pléthysme trouve son origine dans la théorie de la représentation des groupes, commençons donc par en faire un survol.

Rappelons qu'un *groupe*  $G$  est un ensemble  $E$  muni d'une multiplication associative  $\cdot$ , et d'un élément neutre  $1_G$  pour la multiplication, tel que chaque élément du groupe a un inverse, ie chaque élément de  $G$  est pairé avec un autre de façon à ce que leur produit donne l'élément neutre.

L'ensemble  $GL_n(\mathbb{C})$  des matrices carrées inversibles de taille  $n \times n$  et d'entrées dans  $\mathbb{C}$  est un groupe lorsque muni de la multiplication matricielle, et l'unité du produit est la matrice identité  $I_n$ . Plus généralement, pour un espace vectoriel complexe  $E$  de dimension  $n$ , on a un isomorphisme  $GL_n(\mathbb{C}) \simeq GL(E)$ , où  $GL(E)$  dénote le groupe des applications linéaires de  $E$  dans lui-même muni de la composition de fonctions. Le passage de  $GL(E)$  à  $GL_n(\mathbb{C})$  est déterminé par un choix d'une base ordonnée de  $E$ , qui identifie à chaque application une matrice dont les colonnes décrivent l'effet sur les éléments de la base, et qui est alors une matrice de  $GL_n(\mathbb{C})$ . Plusieurs matrices peuvent donc décrire une même application, mais elles sont toutes conjuguées (par un changement de base).

On peut aussi considérer des sous-groupes de  $GL_n$ . Le plus connu est probablement celui des matrices de permutations correspondant au groupe symétrique  $\mathbb{S}_n$ , qui décrit des permutations des éléments de n'importe quel ensemble à  $n$  éléments. Dans cette thèse, nous considérerons généra-



lement des permutations de  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ , où ces nombres peuvent donner des positions, des indices de variables  $x_i$ , etc. Les permutations de  $\mathbb{S}_n$  sont des bijections de  $[n]$  dans  $[n]$ , et peuvent être écrites sous forme cyclique, où un cycle est de forme  $(i_1 i_2 \dots i_k)$  tel que  $i_j$  est envoyé par cet élément de  $\mathbb{S}_n$  sur  $i_{j+1}$ ,  $i_k$  est envoyé sur  $i_1$ , et chaque entier de  $[n]$  apparaît dans un unique cycle d'une permutation. On peut penser aux façons de positionner des invités autour d'une table, par exemple, dans une sorte de jeu de chaises musicales. Notons en particulier que les transpositions  $(ii + 1)$  génèrent l'ensemble des permutations de  $S_n$ , pour  $1 \leq i \leq n - 1$ .

Les matrices correspondant aux permutations de  $\mathbb{S}_n \subset GL_n$  comportent exactement une entrée 1 par ligne et colonne, et que des zéros ailleurs. Une entrée 1 à la jonction de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  indique alors que l'élément  $i$  est envoyé sur l'élément  $j$  de l'ensemble. Dans cette thèse, nous considérerons généralement des permutations de  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ , où ces nombres peuvent donner des positions, des indices de variables  $x_i$ , etc.

**Exemple 1.1.1 :** L'inclusion du groupe symétrique  $\mathbb{S}_3$  dans  $GL_3$  permet de représenter ce groupe par l'ensemble de matrices suivant, avec comme produit la multiplication matricielle usuelle. Les éléments correspondants sont notés en-dessous dans leur notation cyclique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{cccccc} (1)(2)(3) & (1)(23) & (13)(2) & (12)(3) & (123) & (132) \end{array}$$

Un morphisme de groupe est une application  $\phi : G \rightarrow H$ , qui préserve la structure de groupe de  $G$  et  $H$ . Par exemple, si  $G = (E, \cdot)$  et  $H = (F, *)$ , alors  $\phi(e_1 \cdot e_2) = \phi(e_1) * \phi(e_2)$ . Une *représentation linéaire d'un groupe*  $G$  est un morphisme de groupe  $\phi : G \rightarrow GL_m$ , pour un certain  $m$ . On dit alors que  $m$  est la dimension de la représentation  $\phi$ . Plusieurs représentations de dimension  $m$  sont possibles pour un même groupe  $G$ .

L'ensemble de matrices de l'exemple précédent peut également être vu comme une représentation

$\mathbb{S}_3 \rightarrow GL_3$ , de dimension 3, où chaque permutation du groupe symétrique  $\mathbb{S}_3$  est envoyé sur la matrice de permutation correspondante dans  $GL_3$ .

Les représentations du groupe symétrique  $\mathbb{S}_n$  ont été largement étudié. Puisqu'il s'agit d'un groupe fini, alors le *théorème de Maschke* nous indique que toute représentation de  $\mathbb{S}_n$  se décompose (de façon finie) en sous-représentations irréductibles. Celles-ci sont souvent décrites par les *modules de Specht*  $S^\lambda$ , indexés par les *partages de  $n$*  : des vecteurs d'entiers strictement positifs  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$  faiblement décroissants, et dont la somme des parts donne  $n$ .

Nous nous intéressons ici plus généralement aux représentations polynomiales de  $GL_n$ , c'est-à-dire que les entrées des matrices obtenues (dans  $GL_m$ ) sont décrites comme des polynômes en  $n^2$  variables, qui correspondent aux entrées des matrices de  $GL_n$ .

Les représentations polynomiales de  $GL_n$  ont la particularité de pouvoir être construites à partir de représentations de groupes symétriques  $\mathbb{S}_k$  pour divers  $k$ . De plus, les représentations irréductibles de  $GL_n$  sont alors construites à partir des représentations irréductibles  $S^\lambda$  de  $\mathbb{S}_k$  afin de former les *modules de Schur* (ou *modules de Weyl*)  $E^\lambda$ , également indexés par les partages de  $n$ , pour un espace vectoriel complexe  $E$  de dimension  $n$  :

$$E^\lambda \simeq E^{\otimes k} \otimes_{\mathbb{C}[\mathbb{S}_k]} S^\lambda.$$

On travaille ici à isomorphisme près, on a avantage à travailler avec les caractères des représentations associées, puisque deux représentations isomorphes ont le même caractère. Le *caractère d'une représentation*  $\rho$  est la fonction  $\chi_\rho = \text{Trace} \circ \rho : G \rightarrow \mathbb{C}$ , qui donne la trace de la matrice obtenue par la représentation, soit la somme des entrées de sa diagonale principale.

Dans le cas des représentations polynomiales de  $GL_n$ , les caractères sont encodés par des *fonctions symétriques* : des sommes formelles sur un ensemble de variables  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , dont les variables correspondent aux valeurs propres des matrices de  $GL_n$ , et telles que la permutation de n'importe quelles variables redonne la fonction initiale. En effet, pour une fonction symétrique correspondant à une représentation précise, remplacer les variables par les valeurs propres d'une

matrice  $A \in GL_n$  donne le caractère de cette matrice pour cette représentation, qui est un nombre complexe. Les caractères des représentations irréductibles  $E^\lambda$  de  $GL_n$  correspondront aux fonctions de Schur  $s_\lambda(x)$ , décrites plus largement à la section 1.2.2.

Les fonctions de Schur forment une base de l'*anneau des fonctions symétriques*. On considère donc ici des polynômes en une infinité de variables, les fonctions symétriques. De nombreuses autres bases sont connues et exploitées, dont la base des fonctions homogènes  $h_\lambda$  et celle des fonctions élémentaires  $e_\lambda$ , également introduites à la section 1.2.2, et celles des fonctions de puissance, à la section suivante.

### 1.1.2 Origine, propriétés et intérêts de l'étude du pléthysme

Le *pléthysme* est une opération naturelle, mais encore peu comprise, sur les fonctions symétriques, donnant le caractère de la composition de deux représentations (polynomiales) de  $GL_n$ . Ainsi, si  $\rho : GL_n \rightarrow GL_m$  et  $\phi : GL_m \rightarrow GL_k$  sont deux représentations (polynomiales) respectivement de  $GL_n$  et  $GL_m$ , alors  $\phi \circ \rho : GL_n \rightarrow GL_k$  est aussi une représentation (polynomiale) de  $GL_n$ , et son caractère est alors une fonction symétrique  $h(x_1, \dots, x_n)$ . Si  $g(x_1, \dots, x_n)$  et  $f(x_1, \dots, x_m)$  sont les fonctions symétriques correspondant aux caractères des représentations (polynomiales) ci-dessus, alors  $h(x_1, \dots, x_n) = f[g]$ , le *pléthysme de f et g*.

Les propriétés des représentations et de leurs caractères forcent les propriétés du pléthysme. En particulier, il est possible de montrer qu'il existe une unique opération qui respecte ces propriétés. Celles-ci sont mieux décrites à l'aide des *fonctions de puissance* : les fonctions symétriques  $p_k(x) = \sum x_i^k$ , et telles que les fonctions  $p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots p_{\lambda_\ell}$  forment une autre base algébrique de l'anneau des fonctions symétriques.

Le pléthysme est caractérisé par les propriétés suivantes, pour  $f, g, h$  des fonctions symétriques,  $k, m$  des entiers et  $c \in \mathbb{C}$  un coefficient :

1.  $p_k[1] = 1$
2.  $p_k[p_m] = p_{km}$
3.  $p_k[f + g] = p_k[f] + p_k[g]$

4.  $p_k[f \cdot g] = p_k[f] \cdot p_k[g]$
5.  $(f + cg)[h] = f[h] + cg[h]$
6.  $(f \cdot g)[h] = f[h] \cdot g[h]$ .

On s'intéresse grandement à comprendre la décomposition d'un pléthysme  $f[g]$  dans la base des fonctions de Schur, un problème ouvert depuis son introduction par Littlewood (Littlewood, 1936). En utilisant les propriétés du pléthysme, ainsi que la décomposition de Kronecker décrite au chapitre 3, on peut réduire ce problème à celui de comprendre la décomposition de pléthysmes de la forme  $s_\mu[s_\lambda]$  dans la base des fonctions de Schur :  $s_\mu[s_\lambda] = \sum_\nu a_{\mu\lambda}^\nu s_\nu$ , pour certains coefficients  $a_{\mu\lambda}^\nu$ . Ces coefficients demeurent généralement excessivement compliqués à déterminer.

En fait, le simple fait de déterminer si le coefficient  $a_{\mu\lambda}^\nu$  d'une fonction de Schur  $s_\nu$  au sein d'un pléthysme  $s_\mu[s_\lambda]$  est nul, ou non-nul, est *NP*-difficile (Mulmuley et Sohoni, 2003; Fischer et Ikenmeyer, 2020; Narayanan, 2006). Ce problème est donc tout sauf simple.

Lorsqu'on interprète cette formule en terme de la théorie de la représentation, on considère la multiplicité  $a_{\mu\lambda}^\nu$  du module  $E^\nu$  au sein du module  $(E^\lambda)^\mu$ . Ces coefficients doivent donc être entiers, et sont positifs puisque ce sont des multiplicités. D'où qu'en plus d'être symétrique,  $s_\mu[s_\lambda]$  doit être Schur-positif, c'est-à-dire que tous les coefficients sont soit nuls, soit positifs. Ce résultat est connu depuis longtemps, voir par exemple la preuve de Stanley (Stanley, 2000). Ceci ouvre grand la porte à l'étude du pléthysme à l'aide de la combinatoire. On souhaite en particulier pouvoir donner une description combinatoire des coefficients apparaissant dans la décomposition de Schur d'un pléthysme.

De nombreux algorithmes ont également été développés afin de pouvoir calculer ces coefficients (Loehr et Remmel, 2011; Chen, 1998; Chen, 1982; Chen *et al.*, 1984). Ce qui nous intéressera toutefois ici, c'est d'interpréter ces coefficients de façon combinatoire, de façon à pouvoir étendre ces résultats et permettre des avancées dans le domaine.

Les deux premiers articles présentés dans cette thèse décrivent combinatoirement les coefficients apparaissant dans la décomposition de Schur des 2-pléthysmes  $s_2[g]$ ,  $s_{11}[g]$ , et des 3-pléthysmes  $s_3[g]$ ,  $s_{21}[g]$ ,  $s_{111}[g]$ , dans les cas où  $g$  est soit une fonction symétrique homogène  $h_\lambda$ , soit une fonction

symétrique élémentaire  $e_\lambda$ . Les pléthysmes de la forme  $s_n[s_m]$  sont particulièrement intéressants à étudier, puisqu'une meilleure compréhension de ceux-ci permettrait de démontrer la *conjecture de Foulkes*, qui énonce que, si  $n < m$ , alors  $s_n[s_m] - s_m[s_n]$  est Schur-positif.

## 1.2 Tableaux et fonctions symétriques

### 1.2.1 Partages, compositions et tableaux

Les tableaux et les fonctions symétriques que nous considérons sont construits à partir de *partages* : des vecteurs d'entiers positifs et faiblement décroissants  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ , où  $\lambda_i \in \mathbb{N}^*$  et  $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$  pour  $1 \leq i \leq k-1$ . Si  $n$  est la somme des *parts*  $\lambda_i$  de  $\lambda$ , on dit que  $\lambda$  est un *partage de  $n$* , ce qui est noté  $\lambda \vdash n$ , ou  $|\lambda| = n$ . On note également le nombre de parts de  $\lambda$  par  $\ell(\lambda) = k$ . Lorsque cela ne porte pas à confusion, on peut omettre les parenthèses et virgules pour représenter un partage. Par exemple, utiliser 21 au lieu de (2, 1). On utilise tout particulièrement cette notation pour les indices de fonctions symétriques.

Certains partages ayant une répétition précise de parts sont très utiles par la suite, on les note

$$\lambda^n = (\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{n \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{n \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_\ell, \dots, \lambda_\ell}_{n \text{ fois}}).$$

On considère également des *compositions*  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ , qui sont une généralisation des partages : les parts ne sont pas nécessairement ordonnées, et les parts nulles sont permises. Les notations précédentes tiennent, mais on note une composition de  $n$  par  $\alpha \vDash n$ .

On peut étendre les partages et compositions à support fini à des vecteurs infinis d'entiers en utilisant la convention  $\alpha_i = 0$  pour  $i > \ell(\alpha)$ , où  $\ell(\alpha)$  est la position de la dernière part non-nulle de  $\alpha$ . On utilise cette convention lorsqu'on considère une part d'un partage au-delà de sa longueur.

Autant pour les compositions que les partages, on utilise à l'occasion les *ordres* suivants. L'*ordre lexicographique*  $\lambda \geq_{lex} \mu$  indique qu'il existe un  $1 \leq k \leq \max(\ell(\lambda), \ell(\mu))$  maximal tel que  $\lambda_i = \mu_i$  pour tout  $i < k$ , et  $\lambda_k \geq \mu_k$ . L'*ordre de dominance*  $\lambda \geq \mu$  indique que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i$ , pour tout  $i$ . L'*ordre d'inclusion des partages*  $\mu \subseteq \lambda$  nous dit que  $\mu_i \leq \lambda_i$  pour

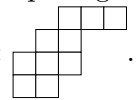
tout  $i$ . Pour les compositions, on utilise aussi l'ordre de raffinement, qu'on note par  $\alpha \preceq \beta$ , qui indique que des parts adjacentes de  $\beta$  peuvent être regroupées (et sommées) pour obtenir les parts de  $\alpha$ .

**Exemple 1.2.1 :**  $(\underbrace{2}_2, \underbrace{1, 3}_4, \underbrace{2}_2, \underbrace{4, 1}_5)$  et  $(\underbrace{1, 1}_2, \underbrace{3, 1}_4, \underbrace{2}_2, \underbrace{1, 1, 1, 1}_5)$  sont des raffinements incomparables de  $(2, 4, 2, 5)$ , et sont toutes des compositions de 13.

On associe généralement un partage avec son *diagramme de Ferrers*, ou *diagramme de Young*, qui peut être représenté par un ensemble de  $|\lambda|$  cases, justifiées à gauche sur  $\ell(\lambda)$  lignes, avec  $\lambda_i$  cases sur la  $i^{\text{ème}}$  ligne. On utilise dans cette thèse ce qui est appelé la *notation anglaise* pour les partages (et les tableaux), c'est-à-dire que la première ligne est celle du dessus, ce qui donne une sorte d'escalier renversé. Pour ceux qui préfèrent la notation française, il vous est aimablement suggéré de poursuivre votre lecture en tenant cette thèse à l'envers devant un miroir, tel que suggéré par Macdonald (Macdonald, 1998).

On considère également des partages dits *gauches*  $\lambda/\mu$ , obtenus du retranchement d'un partage  $\mu$  d'un autre partage  $\lambda$ . On veut alors  $\mu \subseteq \lambda$  pour que la forme gauche soit bien définie. La *forme extérieure* est alors celle de  $\lambda$ , et la *forme intérieure*, celle de  $\mu$ .

**Exemple 1.2.2 :** Les partages  $\lambda = (5, 3, 3, 2)$  et  $\mu = (2, 1)$  sont respectivement des partages de 13 et de 3, et sont tels que  $\lambda/\mu$  est bien défini avec le diagramme de Young suivant :



Une dernière opération qu'on applique aux partages est la *conjugaison* : les lignes du diagramme d'un partage  $\lambda$  deviennent des colonnes, pour obtenir un partage noté  $\lambda'$ .

**Exemple 1.2.3 :** Pour le partage  $\lambda = (5, 3, 3, 2)$ , le partage conjugué  $\lambda'$  est  $(4, 4, 3, 1, 1)$ .

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & & \\ \hline \square & \square & \square & & \\ \hline \square & & & & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{conj}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & & \\ \hline \square & \square & \square & \square & & \\ \hline \square & \square & \square & & & \\ \hline \square & & & & & \\ \hline \square & & & & & \\ \hline \square & & & & & \\ \hline \end{array} = \lambda'$$

À un diagramme de Young  $\lambda/\mu$ , on peut associer plusieurs remplissages par des entiers, où on associe un entier à chaque case. On utilise dans cette thèse exclusivement des remplissages appelés semi-standards : on se donne comme règle que les entiers sur une même ligne doivent être faiblement croissants de gauche à droite, et ceux dans une même colonne, strictement croissants. On a alors ce qu'on appelle un *tableau de Young semi-standard de forme  $\lambda/\mu$* , qu'on abrégera généralement en utilisant simplement le terme *tableau*, ou *tableau de forme  $\lambda/\mu$* .

On note le *poids d'un tableau  $T$*  par  $wt(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , où  $\alpha_i$  donne le nombre d'entrées  $i$  dans  $T$ . Le poids est généralement une composition. On peut décrire un tableau par un monôme  $x^T = x^{wt(T)} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$ . Évidemment, plusieurs tableaux différents peuvent correspondre au même monôme, puisqu'il y a plusieurs façons de positionner les mêmes entiers de façon semi-standard. Une autre façon de décrire un tableau est par son *mot de lecture (de ligne)*, noté  $rw(T)$  : on lit les entrées des lignes du tableau de gauche à droite, en commençant par la ligne du bas et en terminant par celle du haut.

**Exemple 1.2.4 :** Le tableau  $T$  ci-dessous est semi-standard de forme  $(5, 3, 3, 2)/(2, 1)$  et de remplissage  $(3, 1, 3, 2, 1)$ . Le monôme associé est  $x^T = x_1^3 x_2 x_3^3 x_4^2 x_5$ , et son mot de lecture est  $rw(T) = 4433512113$ .

$$T = \begin{array}{cccc} & & & 1 & 1 & 3 \\ & & & 1 & 2 & \\ & & 3 & 3 & 5 & \\ 4 & 4 & & & & \end{array}$$

On note l'ensemble des tableaux de Young semi-standards de forme  $\lambda$  par  $SSYT(\lambda)$ , ceux ayant leurs entrées dans  $[n]$  sont notés  $SSYT(\lambda)_n$ , et ceux ayant comme poids  $\alpha$ , par  $SSYT(\lambda, \alpha)$ . Il n'existait pas de formule connue pour dénombrer ces ensembles avant la rédaction de cette thèse. Une formule combinatoire apparaît dans le dernier article présenté ici.

À l'occasion, on veut un remplissage plus restrictif : un remplissage standard, c'est-à-dire que le remplissage est semi-standard, mais chaque entrée de 1 à  $|\lambda|$  est attribuée une et une seule fois à une case de  $\lambda$ . Les tableaux associés sont alors appelés *tableaux standards*. Le poids d'un tableau

standard de forme  $\lambda \vdash n$  est donc toujours  $(1)^n = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n \text{ fois}}$ . Les tableaux standards sont souvent très utiles, comme nous le voyons à la section suivante.

On note par  $SYT(\lambda) = SSYT(\lambda, (1)^m)$  l'ensemble des tableaux standards de forme  $\lambda$ . Le nombre de tableaux standards de forme  $\lambda$  est noté par  $f^\lambda$ , et peut être calculé par la *formule des équerres* (voir (Sagan, 2001) pour en voir la description). On note l'ensemble des tableaux standards à  $m$  cases par  $SYT_m$ , donc tous les remplissages standards de partages de  $m$ .

Une statistique intéressante qu'on utilise est celle des *descentes d'un tableau standard*. Pour un tableau standard donné, on considère l'ensemble des entrées  $i$  telles que  $i + 1$  apparaît dans une ligne d'index supérieur que celle sur laquelle se trouve  $i$ . Autrement dit,  $i + 1$  se trouve sous  $i$  dans le tableau standard. Notons par  $Des(T) \subseteq [n - 1]$  l'ensemble des descentes d'un tableau standard  $T$ .

Les ensembles de descentes sont en bijection avec ce qu'on appelle les *compositions de descentes*, qu'on note  $DesComp(T)$ . Si  $Des(T) = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  est l'ensemble ordonné des descentes d'un tableau standard  $T$  à  $n$  cases (donc  $i_j < i_{j+1}$ ), alors la composition de descente associée est  $DesComp(T) = (i_1, i_2 - i_1, i_3 - i_2, \dots, i_k - i_{k-1}, n - i_k)$ , qui est une composition de  $n$ . Il est évidemment possible de faire cette correspondance dans le sens inverse.

**Exemple 1.2.5 :** Le tableau  $S$  ci-dessous est standard de forme  $(4, 3, 2)$ . Son ensemble de descentes est  $Des(S) = \{2, 4, 5, 8\}$ , et sa composition de descentes est  $DesComp(T) = (2, 2, 1, 3, 1) \vDash 9$ .

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 8 \\ \hline 3 & 5 & 7 & \\ \hline 6 & 9 & & \\ \hline \end{array}$$

### 1.2.2 Fonctions symétriques

À partir des partages et des tableaux, on peut maintenant décrire les fonctions symétriques avec lesquelles nous travaillons. Mais avant cela, commençons par définir ce qu'est une fonction symétrique. Plus simplement encore, commençons par décrire un *polynôme symétrique* : pour un



ensemble de variables  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , un polynôme  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est symétrique si échanger n'importe quelles variables redonne le même polynôme. Autrement dit,

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n), \quad \text{pour tout } 1 \leq i < j \leq n.$$

Une *fonction symétrique* est une généralisation du concept de polynôme symétrique, où on considère une somme formelle de monômes en  $x = (x_1, x_2, \dots)$  :

$$f(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \in \mathbb{C}[x], \quad \text{où } c_{\alpha} \in \mathbb{C} \text{ et } x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$$

pour des compositions  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ . Cette fonction est symétrique si échanger n'importe quelles variables redonne la même fonction. Plus formellement, si  $x^{\alpha}$  apparaît dans  $f(x)$ , alors  $x^{\sigma \cdot \alpha}$  y apparaît aussi, pour n'importe quelle permutation  $\sigma \in \mathbb{S}_{|\alpha|}$ , qui a comme effet de permuter les parts de  $\alpha$ . On omet généralement le vecteur infini de variables  $x = (x_1, x_2, \dots)$  lorsqu'il est clair, dans le contexte, qu'il s'agit d'une fonction symétrique en une infinité de variables.

L'*anneau des fonctions symétriques* forme une algèbre graduée  $\Lambda = \Lambda^{(0)} \oplus \Lambda^{(1)} \oplus \dots$ , où  $\Lambda^{(i)}$  regroupe les fonctions symétriques de *degré*  $i$ , c'est-à-dire que la somme des exposants des monômes est  $i$ . Les fonctions symétriques  $s_{\lambda}$ ,  $h_{\lambda}$  et  $e_{\lambda}$  que nous voyons ci-dessous forment des bases linéaires de  $\Lambda$ , de même que les fonctions de puissance  $p_{\lambda}$  vues à la section précédente. Pour un  $i$  donné, l'ensemble des éléments d'une des bases ci-dessus dont les index  $\lambda$  sont des partages de  $i$  engendrent  $\Lambda^i$ , et chacun de ces éléments a degré  $i$ . En règle générale, on s'intéresse surtout à décomposer les fonctions symétriques dans la base de Schur, c'est-à-dire à trouver une expression  $f = \sum_{\lambda} c_{\lambda} s_{\lambda}$  pour  $f$  symétrique.

On utilise le fait qu'il existe un produit scalaire sur  $\Lambda$  pour lequel les fonctions de Schur sont orthogonales, c'est-à-dire que  $\langle s_{\lambda}, s_{\mu} \rangle = \delta_{\lambda, \mu}$ , où  $\delta_{\lambda, \mu}$  est le delta de Kronecker, et vaut donc 1 si  $\lambda = \mu$  et 0 sinon. On a alors  $\langle f, s_{\lambda} \rangle = c_{\lambda}$  pour la formule ci-haut pour une fonction symétrique  $f$ .

Définissons maintenant ces fameuses *fonctions de Schur* : pour  $\lambda \vdash n$ ,

$$s_{\lambda} = \sum_{T \in \text{SSYT}(\lambda)} x^T.$$

On fait donc la somme sur tous les remplissages possibles de  $\lambda$ . Si on se restreint aux remplissages de  $\lambda$  avec des entrées dans  $[m]$ , on obtient alors  $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_m)$ . On peut également définir les *fonctions de Schur gauches*  $s_{\lambda/\mu}$  de la même manière.

Bien qu'il n'est pas évident que cette définition donne une fonction symétrique, il suffit de considérer l'*involution de Bender-Knuth* pour s'en convaincre : pour un tableau donné, les entrées  $i, i + 1$  positionnées l'une au-dessus de l'autre sont fixées, et on échange au sein d'une même ligne le nombre de  $i$  et de  $i + 1$ . Cette opération a comme effet d'échanger le nombre de  $i$  et de  $i + 1$  dans le tableau, ce qui correspond à appliquer la permutation  $(i, i + 1)$  au poids, et au monôme associé. Puisque les transpositions génèrent  $\mathbb{S}_n$ , alors si  $\alpha$  est le poids d'un tableau  $T$  de forme  $\lambda$ , alors  $(i, i + 1) \cdot \alpha$  l'est également, de même que  $\sigma \cdot \alpha$  pour toute permutation  $\sigma \in \mathbb{S}_n$ . Ainsi, si  $x^T = x^\alpha$  apparaît comme monôme dans  $s_\lambda$ , alors  $\sigma \cdot x^\alpha = x^{\sigma \cdot \alpha}$  y apparaît aussi. Et donc  $s_\lambda$  est symétrique.

**Exemple 1.2.6 :** Soit le tableau  $T$  de l'exemple 1.2.4. Pour  $i = 1$ , l'involution de Bender-Knuth nous donne le tableau semi-standard suivant :

$$\text{invBK}(T) = \begin{array}{ccccc} & & & 1 & 2 & 3 \\ & & & 2 & 2 & \\ & & 3 & 3 & 5 & \\ & 4 & 4 & & & \end{array} .$$

Son poids est  $(1, 3, 2, 1) = (12)(3)(4) \cdot (3, 1, 2, 1)$ , qui est bel et bien une permutation du poids du tableau initial, où les deux premières parts sont échangées. Les deux tableaux engendrent respectivement les monômes  $x_1^3 x_2 x_3^2 x_4$  et  $x_1 x_2^3 x_3^2 x_4$  se retrouvant dans  $s_{(5,3,3,2)/(2,1)}$ .

Les fonctions de Schur ont été largement étudiées, particulièrement en raison de leur lien avec la théorie de la représentation, où elles donnent les caractères irréductibles des représentations polynomiales de  $GL_n(\mathbb{C})$ . On s'intéresse donc généralement à comprendre la décomposition de fonctions symétriques dans cette base, que l'on nomme *décomposition de Schur*. Les fonctions de Schur forment une base orthonormale des fonctions symétriques, tel que mentionné plus haut.

Les *fonctions symétriques homogènes*  $h_n$ , que nous étudions tout particulièrement dans les deux

premiers articles, peuvent être vues comme des fonctions de ces Schur simples :

$$h_n = s_{(n)} = \sum_{T \in SSYT((n))} x^T.$$

Les *fonctions symétriques homogènes*  $h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdot h_{\lambda_2} \cdot \dots \cdot h_{\lambda_\ell}$  sont alors le produit de fonctions de Schur simples. Elles sont symétriques puisque le produit de deux fonctions symétriques l'est.

De même façon, les *fonctions symétriques élémentaire*  $e_n$ , que nous étudions également dans les deux premiers articles, peuvent aussi être vues comme des fonctions de Schur simples :

$$e_n = s_{(1)^n} = \sum_{T \in SSYT((1)^n)} x^T.$$

Alors, les *fonctions symétriques élémentaires*  $e_\lambda = e_{\lambda_1} \cdot e_{\lambda_2} \cdot \dots \cdot e_{\lambda_\ell}$  sont aussi le produit de fonctions de Schur simples, et sont donc symétriques.

On peut vérifier que ces deux familles de fonctions symétriques forment des bases de l'anneau des fonctions symétriques, et sont également intéressantes en elles-mêmes. Elles sont alors des caractères de représentations polynomiales de  $GL_n(\mathbb{C})$ .

Le développement en base de Schur des produits de fonctions de Schur simples ci-dessus sont décrits par les deux versions de la *règle de Pieri* données ci-dessous.

Pour  $\lambda$  un partage et  $n \in \mathbb{N}$ , alors 
$$s_\lambda \cdot h_n = \sum_{\nu} s_{\nu},$$

où les partages  $\nu$  sont obtenus de  $\lambda$  en ajoutant une *bande horizontale de longueur n* : un ensemble de case formant un partage gauche tel que deux cases ne peuvent se retrouver dans la même colonne.

Similairement, 
$$s_\lambda \cdot e_n = \sum_{\nu'} s_{\nu'},$$

où les partages  $\nu'$  sont obtenus de  $\lambda$  en ajoutant une *bande verticale de longueur n* : un ensemble de case formant un partage gauche tel que deux cases ne peuvent se retrouver dans la même ligne. Les partages obtenus sont alors les conjugués  $\nu'$  de partages obtenus de  $\lambda'$  par la première règle.

Cette méthode permet de visualiser la décomposition des fonctions  $h_\lambda$  et  $e_\lambda$  dans la base des

fonctions de Schur, en appliquant récursivement la règle de Pieri, et en enregistrant l'ajout d'une  $i^{\text{ème}}$  bande horizontale (ou verticale) en remplissant chacune de ses cases par un  $i$ .

On obtient une décomposition où les fonctions de Schur sont indexées par des tableaux de poids  $\lambda$  (pour  $h_\lambda$ ) ou par des *tableaux conjugués* (pour  $e_\lambda$ ) : des tableaux non-semi-standards, mais tels qu'une réflexion selon la diagonale principale donne un tableau semi-standard.

Les fonctions de Schur de même forme  $\nu$  peuvent être regroupées, et leur nombre est alors donné par le *nombre de Kostka*  $K_\lambda^\nu$ , qui compte le nombre de tableaux de forme  $\nu$  et de remplissage  $\lambda$ .

**Exemple 1.2.7 :** La décomposition de Schur des fonctions symétriques ci-dessous est obtenue par une répétition d'une des règles de Pieri décrites ci-dessus. Notons qu'alors les « tableaux » obtenus de la deuxième règle de Pieri sont conjugués à ceux obtenus dans la première.

$$\begin{aligned}
 h_{(2,2,2)} &= (h_2)^3 = (h_2 \cdot h_2) \cdot h_2 = \left( s_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}} \right) \cdot h_2 \\
 &= \left( s_{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} \right) + \left( s_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}} \right) + \left( s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}} \right) \\
 &= s_{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}} \\
 &+ s_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}} \\
 &= s_{(6)} + 2 \cdot s_{(5,1)} + 3 \cdot s_{(4,2)} + s_{(3,3)} + s_{(4,1,1)} + 2 \cdot s_{(3,2,1)} + s_{(2,2,2)}.
 \end{aligned}$$

De façon similaire,

$$\begin{aligned}
 e_{(2,2,2)} &= (e_2)^3 = (e_2 \cdot e_2) \cdot e_2 = \left( s_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} \right) \cdot e_2 \\
 &= \left( s_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} \right) + \left( s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} \right) + \left( s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} \right) \\
 &= s_{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}} \\
 &= s_{(1^6)} + 2 \cdot s_{(2,1^4)} + 3 \cdot s_{(2^2,1^2)} + s_{(2^3)} + s_{(3,1^3)} + 2 \cdot s_{(3,2,1)} + s_{(3,3)}.
 \end{aligned}$$

On a alors la *décomposition de Schur* d'une fonction symétrique homogène, ou élémentaire suivante.

**Proposition 1.2.8 :** 
$$h_\lambda = \sum_{\nu} K_{\lambda}^{\nu} s_{\nu} \quad \text{et} \quad e_\lambda = \sum_{\nu} K_{\lambda}^{\nu'} s_{\nu}.$$

En utilisant exactement le même procédé, on peut décrire la décomposition de Schur de la  $n^{\text{ième}}$  puissance d'une fonction symétrique homogène ou élémentaire,  $h_\lambda^n$  et  $e_\lambda^n$  :

**Proposition 1.2.9 :** 
$$h_\lambda^n = \sum_{\nu} K_{\lambda^n}^{\nu} s_{\nu} \quad \text{et} \quad e_\lambda^n = \sum_{\nu} K_{\lambda^n}^{\nu'} s_{\nu}.$$

Tel que nous avons vu plus haut, les fonctions symétriques homogènes et élémentaires partagent plusieurs similarités, et leur relation est tout particulièrement bien illustrée par l'involution bien connue  $\omega$  sur les fonctions symétriques, définie par  $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}$ . On a alors que  $\omega(h_n) = e_n$ , et inversement. On peut utiliser cette involution pour transposer les résultats pour les  $h_\lambda$  en résultats pour les  $e_\lambda$ . En particulier, on peut l'utiliser pour établir une correspondance entre les pléthysmes de l'un un de l'autre, tel que nous voyons à la section 1.3.1.

### 1.2.3 Fonctions quasi-symétriques

L'anneau des fonctions symétriques est un sous-anneau de l'*anneau des fonctions quasi-symétriques*  $QSym$ . Ces fonctions quasi-symétriques ont été introduites par Gessel (Gessel, 1984), dans le contexte de l'étude des fonctions symétriques.

Deux bases sont généralement employées pour les fonctions quasi-symétriques, la base des *fonctions quasi-symétriques monomiales*, notées  $M_\alpha$ , et les *fonctions quasi-symétriques fondamentales*, notées  $F_\alpha$ . Ces deux bases sont indexées par des compositions, on a donc un relâchement de la condition que les parts du vecteur d'entiers associé soient ordonnées.

Pour une composition  $\alpha$ , la fonction quasi-symétrique fondamentale  $F_\alpha$  est définie en terme des fonctions quasi-symétriques monomiales  $M_\beta$  telles que  $\alpha \preceq \beta$ , c'est-à-dire que  $\beta$  est un raffinement

de  $\alpha$  : des parts adjacentes de  $\beta$  peuvent être regroupées pour former les parts de  $\alpha$ .

$$F_\alpha = \sum_{\beta \preccurlyeq \alpha} M_\beta, \text{ où } M_\beta = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1}^{\beta_1} x_{i_2}^{\beta_2} \dots x_{i_k}^{\beta_k}.$$

La définition originale de Gessel, très présente dans la littérature, est en terme des sous-ensembles  $I$  de  $\{1, 2, \dots, m-1\}$ , en bijection avec les compositions  $\alpha$  de  $m$ , comme nous l'avons vu à la section 1.2.1. Si  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \vDash m$ , le sous-ensemble associé est  $I_\alpha = \{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}\}$ , où  $j_i = \alpha_1 + \dots + \alpha_i$ .

On a alors

$$F_\alpha(x_1, \dots, x_n) = F_{I_\alpha}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n \\ \text{avec } i_j < i_{j+1} \text{ si } j \in I_\alpha}} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}.$$

On se convainc que ces deux définitions sont équivalentes en remarquant que la première décrit les exposants des monômes, alors que la deuxième décrit les indices des variables y apparaissant.

Les fonctions quasi-symétriques ont de très nombreuses applications en mathématiques, notamment dans l'étude des fonctions symétriques, et en particulier, pour le pléthysme. En particulier, Loehr et Warrington ont démontré que le pléthysme  $s_\mu[s_\lambda]$  de deux fonctions de Schur a une jolie décomposition en fonctions quasi-symétriques fondamentales (Loehr et Warrington, 2012). Nous voyons cette décomposition à la section 1.3.2. De nombreux auteurs se sont penché sur le lien entre le pléthysme et les fonctions quasi-symétriques, dont également Malvenuto et Reutenauer (Malvenuto et Reutenauer, 1998). De même, divers algorithmes permettent de passer d'une décomposition d'une fonction symétrique en fonctions quasi-symétriques fondamentales à une décomposition en fonctions de Schur, ce que nous verrons à la section 4.3.8.2.

### 1.3 Pléthysme vu comme une opération sur les fonctions symétriques ou sur les tableaux

Le pléthysme peut être abordé de plusieurs manières. Nous avons déjà vu l'approche d'origine par la théorie de la représentation, et évoqué celle sur les fonctions symétriques. Nous élaborons ici sur

cette approche, et en donnons une autre, plus combinatoire, en terme de tableaux de tableaux.

### 1.3.1 Pléthysme comme une substitution de variables dans les fonctions symétriques

Nous avons vu à la section 1.1.2 les propriétés axiomatiques du pléthysme, décrites à l'aide des fonctions de puissance. Plus généralement, on peut voir le pléthysme  $f[g]$  comme une substitution des *monômes moniques* (de coefficient 1) de  $g$  dans  $f$ , lorsque  $g$  a ses coefficients dans  $\mathbb{N}$ .

**Exemple 1.3.1 :** Soit  $f = s_{(1,1)}(x_1, x_2, x_3, \dots)$ , et  $g = x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2 + x_2^3$ , qui sont des fonctions symétriques,  $f$  étant symétrique en une infinité de variables, et  $g$ , en deux variables. On peut réécrire  $g$  sous la forme monique suivante :  $g = x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2^2$ . Alors

$$f[g] = f(x_1^2, x_1 x_2, x_1 x_2, x_2^2) = 2x_1^3 x_2 + x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2^3 = 2s_{(3,1)}(x_1, x_2).$$

Puisque  $f$  est symétrique, alors l'ordre mis sur les monômes moniques de  $g$  n'est pas important. De plus, puisque les deux fonctions sont symétriques, alors leur composition le sera aussi. Cela découle directement de l'origine de l'opération du pléthysme en théorie de la représentation.

On peut utiliser cette approche, de même que l'approche axiomatique pour décrire des résultats sur le pléthysme qui nous sont utiles plus loin.

On s'intéresse à la *décomposition pléthystique de  $g^m$* , soit une décomposition de  $g^m$  en une somme de pléthysmes de la forme  $s_\lambda[g]$ . La proposition ci-dessous est un résultat classique, qui nous dit que la fonction symétrique  $g^m$  contient tous les pléthysmes  $s_\mu[g]$ , où  $\mu$  est un partage de  $m$ , et donc  $s_\mu$  est de degré  $m$ . Si on connaissait la décomposition de chacun de ces  $m$ -pléthysmes, pour tout  $m$ , alors on pourrait exprimer la décomposition de tout pléthysme  $f[g]$  dans la base de Schur.

**Proposition 1.3.2 ((Macdonald, 1998, Chapitre 1, Section 8)) :** Pour toute fonction symétrique  $g$ , et  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$g^m = (p_1[g])^m = \sum_{\mu \vdash m} f^\mu s_\mu[g],$$

où  $f^\mu = K_{(1)^m}^\mu$  est le nombre de tableaux standards de forme  $\mu$ .

*Preuve.* On a que  $p_1(x) = s_{(1)}(x) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots$ ,  $p_1[g] = g$  pour toute fonction symétrique  $g$ , et que  $(f_1 \cdot f_2)[g] = f_1[g] \cdot f_2[g]$ . En utilisant la règle de Pieri et ces propriétés axiomatiques du pléthysme, on a que  $g^m = (p_1[g])^m = (p_1)^m[g] = (s_{(1)})^m[h] = (\sum_{\mu \vdash m} K_{(1)^m}^\mu s_\mu)[g] = \sum_{\mu \vdash m} f^\mu s_\mu[g]$ . ■

Dans le cas où  $m = 2$ , on connaît bien la décomposition de Schur des 2-pléthysmes de  $h_n$ , due à Littlewood (Littlewood, 1936). Par la règle de Pieri et la décomposition pléthystique ci-dessous, on sait que  $h_n^2 = \sum_{1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} s_{(2n-k,k)} = s_2[h_n] + s_{11}[h_n]$ .

On a la première partie de l'équation parce qu'une bande horizontale de  $n$  cases est ajoutée de toutes les façons possibles à  $(n)$ , ce qui donne un seul tableau pour chaque forme. Les fonctions de Schur sont alors distribuées entre les 2-pléthysmes de la façon suivante. Voir ((Macdonald, 1998, Chapitre 1, Exemple 8.9)) pour la preuve.

**Proposition 1.3.3 ((Littlewood, 1936)) :**

$$s_2[h_n] = \sum_{0 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} s_{(2n-2j,2j)},$$

$$s_{11}[h_n] = \sum_{0 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} s_{(2n-(2j+1),(2j+1))}.$$

Pour ce qui est des 2-pléthysmes des fonctions de Schur, ils ont été étudiés de manière combinatoire par Carré et Leclerc, où le coefficient de  $s_\nu$  dans  $s_\mu[s_\lambda]$  ( $\mu \vdash 2$ ) est donné par le nombre de *tableaux domino* ayant une certaine forme  $I$  dépendant de  $\mu$  et  $\nu$  et une statistique associée à  $\mu$ , appelée *cospin*. On rappelle ces résultats à la fin du premier article présenté. Un des objectifs de cet article est de présenter une interprétation combinatoire différente, et plus simple, de la décomposition de Schur des 2-pléthysmes de  $h_n$ , qui s'étend à la fois aux 2-pléthysmes de  $h_\lambda$ , mais qui soit aussi généralisable aux  $m$ -pléthysmes de  $h_\lambda$ , et éventuellement aux  $m$ -pléthysmes de  $s_\lambda$ . On introduit des règles qui s'appliquent pour tout  $m$  (pour  $h_\lambda$ ) dans le second article, en développant tout particulièrement le cas spécial des 3-pléthysmes de  $h_\lambda$ .



Tous les résultats obtenus pour les  $h_\lambda$  sont transférables aux  $e_\lambda$ , en raison de leur grandes affinités. Pour ce faire, on utilise l'involution  $\omega$  sur le pléthysme (voir (Macdonald, 1998, Chapitre 1, Exemple 8.1)) :

**Proposition 1.3.4 (Effet de l'involution  $\omega$  sur le pléthysme) :**

$$\omega(s_\nu[s_\gamma]) = \begin{cases} s_\nu[s_{\gamma'}] & \text{si } \gamma \vdash n \text{ pour } n \text{ pair} \\ s_{\nu'}[s_{\gamma'}] & \text{si } \gamma \vdash n \text{ pour } n \text{ impair} \end{cases} .$$

Cette involution nous permet en particulier de passer des pléthysmes de  $h_n$  à ceux de  $e_n$  :

$$\langle s_\nu, s_\mu[e_n] \rangle = \langle \omega(s_\nu), \omega(s_\mu[e_n]) \rangle = \begin{cases} \langle s_{\nu'}, s_\mu[h_n] \rangle & \text{si } n \text{ est pair} \\ \langle s_{\nu'}, s_{\mu'}[h_n] \rangle & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} .$$

### 1.3.2 Pléthysme comme opération sur les tableaux, et tableaux de tableaux

Vu la définition des fonction de Schur en terme de somme sur des tableaux, où chaque tableau correspond à un monôme, et la définition du pléthysme en terme de substitution de variables par des monômes moniques, on peut considérer la traduction combinatoire suivante : le pléthysme de deux fonctions de Schur  $s_\mu[s_\lambda]$  peut être calculé en faisant une somme sur des tableaux de tableaux, où le « tableau extérieur » est de forme  $\mu$  et ses entrées sont des tableaux de forme  $\lambda$ . Un des problèmes de cette définition est qu'elle demande de fixer un ordre total sur les tableaux semi-standards de forme  $\lambda$  afin que les entrées-tableaux dans le grand tableau de forme  $\mu$  soient faiblement croissantes sur les lignes et strictement croissantes dans les colonnes. Plusieurs ordres sont possibles, il convient donc de les explorer pour déterminer le plus intéressant. Un ordre peut être choisi parce qu'il simplifie des preuves, concorde mieux avec certaines autres théories, mais il devrait y avoir un ordre qui soit plus « naturel » .

Le *premier ordre total sur les tableaux SSYT*( $\lambda$ ) $_n$  que nous voyons est utilisé par De Boeck, Paget et Wildon (de Boeck *et al.*, 2021) : l'ordre lexicographique sur le mot de lecture des colonnes, soit en lisant les colonnes de droite à gauche, et de bas en haut. Autrement dit, un tableau  $t$  est

inférieur à un tableau  $u$  si, dans la première colonne qui diffère entre  $t$  et  $u$  à partir de la droite, l'entrée la plus grande apparaît dans  $u$ . C'est l'ordre utilisé par Fulton (Fulton, 1996) et plusieurs autres.

Par exemple, pour  $\lambda = (2, 1)$  et  $n = 3$ , les huit tableaux de  $SSYT((2, 1))_3$  sont ordonnés de la façon suivante :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}.$$

Un *deuxième ordre total sur les tableaux* est utilisé par Loehr et Warrington (Loehr et Warrington, 2012) : l'ordre lexicographique sur le mot de lecture de ligne. Cet ordre semble se rapprocher des notations et conventions utilisées en théorie des cristaux, qu'on souhaite exploiter ici. En utilisant cet ordre, on a l'ordre suivant sur les huit tableaux ci-haut :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}.$$

Pour un ordre total fixé, on peut définir les *tableaux de tableaux* de l'ensemble  $SSYT_{SSYT(\lambda)_n}(\mu)$ , parfois aussi nommés *tableaux pléthystiques*. Tel que décrit plus haut, ce sont des tableaux semi-standards de forme  $\mu$ , dont les entrées sont des tableaux semi-standards de forme  $\lambda$  et ordonnés selon l'un des ordres totaux décrit ci-haut. On dit que la *forme d'un tableau pléthystique* est alors  $\lambda^\mu$ , et le *poids d'un tableau pléthystique* est la somme des poids de ses entrées.

Le tableau suivant est un tableau pléthystique de forme  $(2, 1)^{(3, 3)}$  et de poids  $(7, 9, 2)$ , où l'ordre total utilisé est premier ordre total défini ici :

$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$

Il contribue alors le monôme  $x_1^{12}x_2^6x_3^2$  au pléthysme  $s_{(3,3)}[s_{(2,1)}]$ .

### 1.3.2.1 Résultats de De Boeck, Paget et Wildon

De Boeck, Paget et Wildon démontrent que cette construction donne bel et bien une description du pléthysme, en exploitant des outils de la théorie de la représentation et de la combinatoire. En particulier, ils démontrent que les tableaux pléthystiques indexent une base du module  $(E^\lambda)^\mu$  correspondant à la composition des représentations irréductibles de  $GL(E)$  et de  $GL(E^\lambda)$  associées respectivement à  $\lambda$  et  $\mu$ , et dont le caractère associé est  $s_\mu[s_\lambda]$ . Cela leur permet ensuite de démontrer combinatoirement les règles de stabilité pléthystiques suivantes, que nous utilisons dans les deux premiers articles.

Leur premier théorème indique les conditions sous lesquelles une ligne peut être supprimée (ou ajoutée) aux partages  $\lambda$  et  $\nu$  dans le pléthysme  $s_\mu[s_\lambda] = \sum_\nu a_{\mu,\lambda}^\nu s_\nu$ . Le coefficient  $a_{\mu,\lambda}^\nu$  est donné par  $\langle s_\mu[s_\lambda], s_\nu \rangle$ , qu'on note  $a_{\mu,\lambda}^\nu = \langle \mu \circ \lambda, \nu \rangle$ . On note  $(r) \cup \lambda$  le partage obtenu de  $\lambda$  en y ajoutant une part de longueur  $r$ , en réordonnant les parts de façon faiblement décroissante si nécessaire.

**Proposition 1.3.5** ((de Boeck *et al.*, 2021, Theorem 1.1)) : Soit  $\lambda \vdash m$ ,  $\mu \vdash n$  et  $\nu \vdash mn$ . Si  $r \geq \lambda_1$ , alors

$$\langle s_\mu[s_{(r) \cup \lambda}], s_{(r \cdot n) \cup \nu} \rangle = \langle s_\mu[s_\lambda], s_\nu \rangle.$$

**Exemple 1.3.6** : Notons  $\langle s_\mu[s_\lambda], s_\nu \rangle$  par  $\langle \mu \circ \lambda, \nu \rangle$ . Dans le cas suivant où  $n = 2$ , on peut utiliser le théorème 1 (avec successivement  $r = 3$ ,  $r = 2$  et  $r = 1$ ) pour avoir que

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \right\rangle &= \left\langle \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \circ \square, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \circ \emptyset, \emptyset \right) \right\rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

On a la dernière ligne parce que  $s_\emptyset = x^0 = 1$ , donc  $s_{(2)}[s_\emptyset] = s_\emptyset = 1$  et donc  $\langle s_2[s_\emptyset], s_\emptyset \rangle = 1$ .

Leur deuxième théorème indique les conditions sous lesquelles une colonne peut être supprimée (ou

ajoutée) aux partages  $\lambda$  et  $\nu$ . On note  $(n^r) + \lambda$  le partage obtenu de  $\lambda$  en y ajoutant  $n$  cases aux  $r$  premières parts de  $\lambda$ , et  $N(n^r) + \lambda$  pour celui obtenu en répétant ce processus  $N$  fois.

**Proposition 1.3.7 ((de Boeck *et al.*, 2021, Theorem 1.2)) :** Soit  $\lambda \vdash m$ ,  $\mu \vdash n$ ,  $\nu \vdash mn$ .

1. Si  $r \in \mathbb{N}$ , alors 
$$\langle s_\mu[s_{(1^r)+\lambda}], s_{(n^r)+\nu} \rangle \geq \langle s_\mu[s_\lambda], s_\nu \rangle.$$

Si  $r \geq \ell(\lambda)$  et  $r \geq \ell(\nu)$ , alors on a une égalité.

2. On a que 
$$\langle s_\mu[s_{N \cdot (1^r)+\lambda}], s_{N \cdot (n^r)+\nu} \rangle$$

est constant pour  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tel que

$$N \geq n \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{r-1}) + (n-1) \cdot \lambda_r + \lambda_{r+1} - (\nu_1 + \dots + \nu_r).$$

**Exemple 1.3.8 :** Dans le cas suivant où  $n = 3$ , on peut utiliser le théorème 2 (avec  $r = 2$ ) pour avoir que

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right\rangle &= \left\langle \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a une égalité à la première ligne puisque  $r = 2 \geq \ell(\lambda) = 2$  et  $r = 2 \geq \ell(\nu) = 2$ . On a la dernière ligne puisqu'on connaît le coefficient de  $s_{(4,2)}$  dans  $s_{(1^3)}[s_{(2)}]$ .

Le troisième théorème qui nous intéresse permet de déterminer le coefficient  $a_{\mu,\lambda}'$  des fonctions de Schur  $s_\nu$  inclus dans  $s_\mu[s_\lambda]$  lorsque  $\nu$  est dominant dans l'ordre de dominance. Nous nous y intéressons car l'algorithme introduit dans le troisième article pourrait être relié à ce résultat.

**Proposition 1.3.9 ((de Boeck *et al.*, 2021, Theorem 1.5)) :** Les partages maximaux  $\nu$  dans l'ordre de dominance tels que  $s_\nu$  apparaît dans  $s_\mu[s_\lambda]$  sont exactement les poids maximaux (pour l'ordre de dominance) des tableaux pléthystiques de forme  $\lambda^\mu$ .

Pour un tel partage  $\nu$ ,  $\langle s_\mu[s_\lambda], s_\nu \rangle$  est donné par le nombre de tableaux pléthystiques de forme  $\lambda^\mu$  et de remplissage  $\nu$ .

**Exemple 1.3.10 :** Les deux tableaux pléthystiques  $U, U'$  ci-dessous ont comme poids  $(6, 4, 2)$ , qui est maximal pour la forme  $(2, 1)^{(1^4)}$ . En particulier, aucune entrée  $c$  ne peut être changée en une entrée  $c - 1$  de manière à conserver un tableau extérieur semi-standard. Puisque ce sont les seuls tableaux pléthystiques de cette forme et de poids maximal  $(6, 4, 2)$ , alors par la proposition précédente, on a que  $\langle s_{(1^4)}[s_{(2,1)}], s_{(6,4,2)} \rangle = 2$ .

$$U = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad U' = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

### 1.3.2.2 Résultats de Loehr et Warrington

Loehr et Warrington ont également utilisé le concept de tableaux de tableaux pour décrire la décomposition du pléthysme de deux fonctions de Schur  $s_\mu[s_\nu]$  dans la base des fonctions quasi-symétriques fondamentales vues à la section 1.2.3 (Loehr et Warrington, 2012) :

$$s_\mu[s_\lambda] = \sum_{A \in S_{a,b}(\mu,\lambda)} F_{Asc(A)}.$$

Ces résultats motivent l'étude des fonctions quasi-symétriques dans le troisième article présenté. Dans cette formule,  $\mu \vdash a$ ,  $\lambda \vdash b$  et  $S_{a,b}(\lambda, \mu)$  est un ensemble de matrices standard  $a \times b$ , c'est-à-dire que les entrées 1 à  $a \cdot b$  apparaissent exactement une fois, et dont les lignes donnent le mot de lecture d'entrées-tableaux de forme  $\mu$  dans le tableau pléthystique de forme  $\lambda^\mu$ , ordonnés par l'ordre de lecture du tableau extérieur de forme  $\mu$ . Cet ensemble de matrices standards est difficile à déterminer, mais on peut assez aisément en identifier un élément.

Par exemple, la matrice standard ci-dessous correspond au tableau pléthystique à sa droite, de forme  $(3, 2, 2)^{(2,2)}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 21 & 26 & 15 & 22 & 1 & 5 & 9 \\ 24 & 28 & 16 & 23 & 2 & 6 & 10 \\ 19 & 27 & 13 & 17 & 3 & 7 & 11 \\ 20 & 25 & 14 & 18 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \quad T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 7 & 11 \\ \hline 13 & 17 & \\ \hline 19 & 27 & \\ \hline 1 & 5 & 9 \\ \hline 15 & 22 & \\ \hline 21 & 26 & \\ \hline 4 & 8 & 12 \\ \hline 14 & 18 & \\ \hline 20 & 25 & \\ \hline 2 & 6 & 10 \\ \hline 16 & 23 & \\ \hline 24 & 28 & \\ \hline \end{array}$$

Le mot de lecture  $rw(A)$  associé à cette matrice est obtenu en lisant les colonnes de gauche à droite, en réordonnant au passage les entrées d'une colonne selon l'ordre croissant des entrées de la colonne directement à sa droite. La colonne la plus à droite est simplement lue de haut en bas.

Enfin, la définition des montées de  $A$  est défini par  $Asc(A) = IDes(rw(A)) = Des(rw(A)^{-1})$ , qui correspond aux lettres  $j$  dans  $rw(A)$  telles que  $j + 1$  apparaît à sa gauche.

Ici,  $rw(A) = 20\ 21\ 19\ 24\ 27\ 25\ 26\ 28\ 13\ 14\ 15\ 16\ 22\ 23\ 17\ 18\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12$ , donc  $Asc(A) = \{12, 18, 19, 23, 26\}$ , et  $CompAsc(T) = (12, 6, 1, 4, 3, 2)$ . On a donc que  $F_{(12,6,1,4,3,2)}$  apparaît au moins une fois dans  $s_{(2,2)}[s_{(3,2,2)}]$ .

#### 1.4 Mots, tableaux et cristaux

Les tableaux sont fortement liés aux mots par plusieurs algorithmes, notamment celui de Robinson-Schensted-Knuth (RSK) et celui de jeu de taquin. Ce dernier permet, entre autres, de donner une structure de monoïde sur les tableaux par un produit de tableaux qu'on note  $*$ . Ce monoïde correspond alors au monoïde plaxique sur les mots, où les tableaux représentent les classes d'équivalences sur les mots pour les relations de Knuth, et où l'effet des glisses de jeu de taquin joue le même rôle que les relations de Knuth. On voit également l'opération d'évacuation appliquée aux tableaux semi-standards, qui entre en jeu dans le troisième article présenté ici comme un anti-automorphisme de cristal. Les cristaux donnent également une structure aux tableaux : une structure de graphe orienté et étiqueté, dont les sommets sont des tableaux. La théorie des cristaux, issue également de la théorie de la représentation, est extrêmement riche, nous nous contentons donc de revoir les outils principaux qui nous sont utiles dans le troisième article.

#### 1.4.1 Mots et tableaux : monoïde plaxique, RSK, jeu de taquin et évacuation

Tout d'abord, un mot est défini comme une séquence finie d'entiers  $w = w_1 w_2 \dots w_k \in [n]^k$ . On note  $\ell(w) = k$ , et on définit le poids  $wt(w)$  de  $w$  de même façon que pour un tableau. Les mots ont été largement étudiés, et un des liens les plus importants avec la combinatoire des tableaux est établi par l'algorithme de Robinson-Schensted-Knuth (RSK).

Les mots forment le *monoïde plaxique*, introduit par Lascoux et Schützenberger, avec la concaténation des mots comme produit et avec les *relations de Knuth* comme relations d'équivalence (Lascoux et Schützenberger, 1981). Tous les mots d'une même classe plactique sont envoyés sur un même tableau d'insertion par l'algorithme de RSK, que nous le décrivons ci-dessous, nous utilisons donc ceci comme définition d'être plactiquement équivalent. Chaque classe d'équivalence peut alors être identifiée au tableau dont le mot de lecture fait partie de la classe.

Nous décrivons ci-dessous l'algorithme de RSK à l'aide d'un produit de tableau, introduit également par Lascoux et Schützenberger dans le cadre du monoïde plaxique. Le produit de tableaux a été plus formellement décrit par Fulton (Fulton, 1996), et bien d'autres, en terme du *jeu de taquin*, de façon à ce que ce produit corresponde au produit sur les mots (la concaténation), dans le monoïde plaxique.

##### 1.4.1.1 Jeu de taquin

Commençons par définir le jeu de taquin, qui permet de rectifier un tableau gauche en un tableau (droit). Une glisse de jeu de taquin débute à un coin intérieur de la forme, soit une cellule vide avec des voisins non-vides au sud et à l'est (ou la frontière externe de la forme). La glisse échange cette cellule vide avec une de ces deux cellules voisines non-vides, en préservant la croissance des lignes et les colonnes, puis avec une des cellules voisines suivantes, et ainsi de suite jusqu'à ce que la cellule vide se trouve à la frontière extérieure de la forme, avec aucun voisin non-vide au sud ou à l'est. Des glisses de jeu de taquin sont illustrées dans l'exemple 1.4.1.

Si on applique des glisses de jeu de taquin jusqu'à ce que la forme soit droite, on obtient la

*rectification* du tableau de départ  $T$ , noté  $Rect(T)$ . Le tableau de rectification est indépendant de la séquence de glisses, et donc l'ordre dans lequel les glisses de jeu de taquin sont réalisées n'est pas important.

### 1.4.1.2 Produit de tableaux

Nous pouvons maintenant définir le produit de deux tableaux  $t_1, t_2$ , de formes respectives  $\mu, \nu$  :

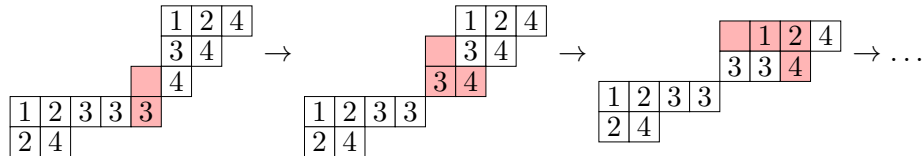
1. Un tableau gauche  $t_1 * t_2$  est construit en plaçant  $t_1$  au sud-ouest de  $t_2$  dans la forme gauche  $(\mu_1 + \nu_1, \mu_1 + \nu_2, \dots, \mu_1 + \nu_\ell, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) / (\mu_1)^\ell$ .
2. Le produit  $T$  de  $t_1, t_2$  est la rectification de  $t_1 * t_2$  par des glisses de jeu de taquin.

Notons que dans cette construction,  $t_1$  se trouve dans le coin inférieur gauche de la forme gauche,  $t_2$  dans son coin supérieur droit, et les deux tableaux n'ont aucune ligne ou colonne en commun. De cette façon, le mot de lecture de  $t_1 * t_2$  est égal à la concaténation du mot de lecture de chacun. Ce mot se trouve alors dans la classe plactique du mot de lecture de  $T = Rect(t_1 * t_2)$ , puisque les glisses de jeu de taquin agissent sur les mots de lecture comme des relations de Knuth.

**Example 1.4.1 :** Pour  $t_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 4 & & & \\ \hline \end{array}$  et  $t_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$ ,

$$t_1 * t_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & 1 & 2 & 4 \\ & & & & 3 & 4 & \\ & & & & 4 & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & & \\ \hline 2 & 4 & & & & & \\ \hline \end{array}, \text{ et } T = Rect(t_1 * t_2) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ & & & & 2 & 2 & 3 & & & & & \\ & & & & 4 & 4 & & & & & & \\ \hline \end{array}.$$

Trois premières glisses de jeu de taquin sont illustrées ci-dessous.



### 1.4.1.3 Algorithme de RSK

Nous pouvons maintenant décrire l'algorithme de RSK en terme du produit de tableau défini plus haut. L'algorithme d'insertion de Robinson-Schensted-Knuth (RSK) permet d'associer à tout mot,



ou bimot,  $w$  une paire de tableaux  $(P(w), Q(w))$  de même forme. Le tableau  $P(w)$  est appelé *tableau d'insertion* de  $w$ , et le tableau  $Q(w)$ , *tableau d'enregistrement* de  $w$ .

Un *bimot* est de la forme

$$W = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_k \\ v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \text{ avec les bilettres } \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix},$$

ordonnées pour que les  $u_i$  soient faiblement croissants, et si  $u_i = u_{i+1}$ , alors  $v_i \leq v_{i+1}$ . Un mot  $w$  est transformé en bimot en considérant  $u = 123 \dots \ell(w)$  et  $v = w$ . Le tableau d'enregistrement  $Q(w)$  est alors standard.

Un bimot est envoyé par l'algorithme de RSK sur une paire de tableaux  $(P, Q)$  de même forme : Soit  $P_i$  le tableau obtenu après l'insertion de  $v_i$ , en posant  $P_0 = \emptyset$ . Alors  $P_{i+1} = \text{Rect}(P_i * \boxed{v_{i+1}})$ , et  $P = P_k$ . Le tableau  $Q$  enregistre l'ordre dans lequel de nouvelles cases sont ajoutées, par une entrée  $u_i$  à la position  $\text{forme}(P_{i+1})/\text{forme}(P_i)$ . Ainsi,  $P$  et  $Q$  auront la même forme.

On peut considérer ce processus comme le fait de former  $v_1 * v_2 * \dots * v_k$ , puis rectifier une cellule à la fois, de gauche à droite, pour obtenir les tableaux  $P_i$ , tel qu'illustré à la figure 1.1. On enregistre l'ajout de nouvelles cellules dans  $Q_i$  par l'ajout d'une cellule d'entrée  $u_i$  à  $Q_{i-1}$ . Puisque le jeu de taquin préserve les relation d'équivalence de Knuth, et que les mots d'une même classe plaxique ont le même tableau d'insertion par RSK, alors cette description est équivalente à celle classique.

Remarquons qu'on peut accélérer le processus en regroupant en blocs les séquences faiblement croissantes des  $v_i$  associées à une même lettre  $u_j$ . En effet, la rectification de ces cases entre elles donne une bande horizontale avec la séquence faiblement croissante placée en ordre, la rectification de chacune de ces cases engendre l'ajout d'une case avec la même entrée  $u_j$  dans le tableau d'enregistrement  $Q$ , et l'ordre des glisses de jeu de taquin n'a pas d'influence sur le tableau rectifié. On obtient donc le même résultat. Ce processus accéléré d'insertion de RSK est illustré à la figure 1.2.

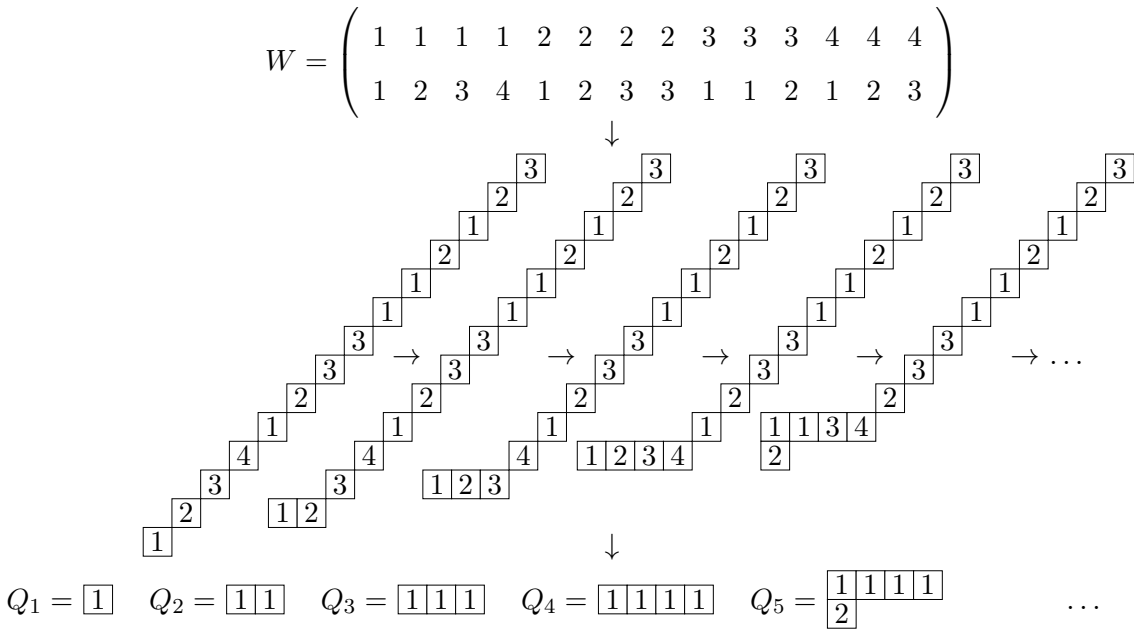


FIGURE 1.1: Insertion du bimot  $W$  par l'algorithme alternatif de RSK

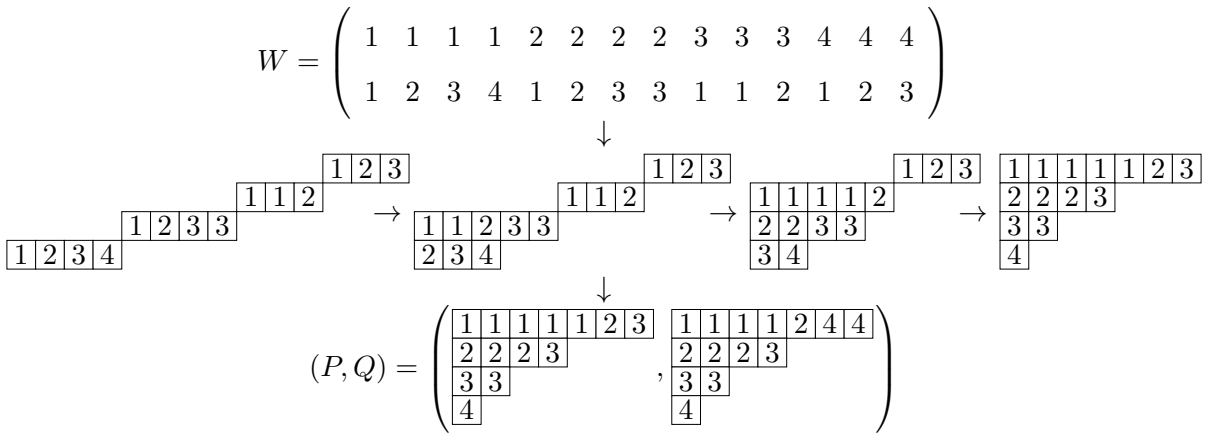


FIGURE 1.2: Insertion accélérée du bimot  $W$  par l'algorithme alternatif de RSK

#### 1.4.1.4 Évacuation

Un dernier algorithme dont nous avons besoin est l'algorithme d'évacuation de Schützenberger, défini comme une involution sur les tableaux standards de même forme (Schützenberger, 1963). Berenstein et Zelevinsky ont démontré que l'effet de l'évacuation peut être définie plus simplement, comme ci-dessous (Berenstein et Zelevinsky, 1996). Cette définition s'étend aisément aux tableaux semi-standard, c'est donc celle que nous utilisons. L'évacuation est alors une involution entre tableaux de même forme (Appleby et Whitehead, 2020), que nous notons  $EVAC$ .

Soit un tableau semi-standard  $T$ , d'entrée maximale  $s$ . Pour obtenir  $EVAC(T)$ , on fait effectuer une rotation de  $180^\circ$  à  $T$ , chaque entrée  $i$  est remplacée par  $s - i + 1$ , et le tableau gauche obtenu est rectifié par le jeu de taquin. On note les opérations intermédiaires par  $Rot_{180^\circ}$ ,  $compl$  et  $Rect$ .

**Exemple 1.4.2 :** Soit le tableau  $T = \begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{3} & \\ \boxed{3} & & & \\ \boxed{4} & & & \end{array}$ ,

$$Rect \circ compl \circ Rot_{180^\circ}(T) = Rect \circ compl \left( \begin{array}{cccc} & & & \boxed{4} \\ & & & \boxed{3} \\ & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{array} \right) = Rect \left( \begin{array}{cccc} & & & \boxed{1} \\ & & & \boxed{2} \\ & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{4} \end{array} \right) = \begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & \\ \boxed{3} & & & \\ \boxed{4} & & & \end{array} = EVAC(T).$$

On peut vérifier que la répétition de ce processus sur  $EVAC(T)$  redonne  $T$ .

#### 1.4.2 Théorie des cristaux

Nous introduisons ici les notions de la théorie des cristaux qui sont fondamentales à la compréhension du troisième article. Bien que les cristaux ne soient pas mentionnés dans les deux premiers articles, ils ont été la motivation pour plusieurs notations, conjectures, ainsi que pour certaines orientations de recherche. Dans le premier article, presque tous les résultats ont été prouvés à l'aide de la structure de cristal sur les tableaux domino, avant que des preuves plus simples soient trouvées qui utilisent uniquement les tableaux. Dans le second article, la notation de tableau de 3-rubans de Yamanouchi est également révélatrice, puisque dans le cas où une structure de cristal existerait sur les tableaux de 3-rubans, ces tableaux en seraient les sources.

En règle générale, un *cristal* est une représentation visuelle du caractère d'une représentation d'un

groupe sous la forme d'un graphe orienté et étiqueté. Les sommets d'un cristal sont des objets combinatoires, et les étiquettes des arêtes indiquent qu'on peut passer d'un objet à l'autre en y appliquant une certaine transformation indexée par l'étiquette. On nomme ces transformations des *opérateurs de cristaux*, généralement notés  $f_i$  et  $e_i$ . Les caractères irréductibles correspondent alors aux composantes connexes des cristaux.

On se concentre ici sur les *cristaux de type  $A_{n-1}$* , qui correspondent aux caractères des représentations (polynomiales) de  $GL_n(\mathbb{C})$ . Les *composantes connexes*, que nous notons  $B(\lambda)_n$ , correspondent aux fonctions de Schur  $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ , et ont comme sommets l'ensemble des tableaux de forme  $\lambda$  et d'entrées au plus  $n$ . Chaque sommet (tableau) correspond à un monôme de la fonction de Schur associée, tel que vu à la section 1.2.1. On peut également considérer les cristaux infinis  $B(\lambda)$  correspondant aux fonctions de Schur  $s_\lambda$ . Notons qu'on peut aussi décrire des cristaux de type  $A_{n-1}$  sur les mots et d'autres objets combinatoires.

Le problème classique de trouver la décomposition d'une fonction symétrique revient ici à décomposer un cristal en ses composantes connexes, ce que nous poussons plus loin dans le troisième article présenté pour étudier leur décomposition en sous-composantes correspondant à des fonctions quasi-symétriques.

Les cristaux sont également intimement liés au monoïde plactique sur les mots et sur les tableaux. En effet, les cristaux regroupent les familles de mots qui sont envoyés sur le même tableau d'enregistrement  $Q(w)$  par l'algorithme de RSK, et qui font donc partie de la même classe coplactique. De plus, les mots plactiquement équivalents sont en même position dans des cristaux isomorphes, correspondant à celle de leur tableau d'insertion  $P(w)$  dans  $B(\lambda)$ .

#### 1.4.2.1 Cristaux sur les mots

On définit les *opérateurs de cristaux  $e_i$  et  $f_i$  sur les mots* de la façon suivante, pour  $1 \leq i < n$ . Un  $e_i$  change une lettre  $i + 1$  pour un  $i$ , ou est nul, alors qu'un  $f_i$  change une lettre  $i$  pour un  $i + 1$ , ou est nul. Ces deux opérateurs sont des inverses, et donc  $e_i \circ f_i = f_i \circ e_i = Id$ , à la condition qu'aucun des deux ne soit nul.

Lorsqu'il y a plusieurs lettres  $i$  (ou  $i + 1$ ) dans un mot, on a besoin d'une règle plus précise pour déterminer sur quelle lettre agira  $f_i$  (ou  $e_i$ ), la *règle de parenthésage* :

1. On associe à chaque lettre  $i$  une parenthèse  $)$ , et à chaque lettre  $i + 1$ , une parenthèse  $($ .
2. Les parenthèses couplées  $()$  sont retirées pour obtenir une séquence de parenthèses non-couplées de la forme  $)^{\phi_i}(\epsilon_i$ . Le nombre  $\phi_i$  (respectivement  $\epsilon_i$ ) compte le nombre d'opérateurs  $f_i$  (respectivement  $e_i$ ) pouvant être appliqués successivement.
3. On définit que  $e_i$  agit sur le  $i + 1$  associé à la parenthèse non-couplée  $($  la plus à gauche, et que  $f_i$  agit sur la lettre  $i$  correspondant à la parenthèse non-couplée  $)$  la plus à droite.

**Exemple 1.4.3 :** Considérons le mot  $w = 1331233312233$ , et  $i = 1$ . Il y a plusieurs lettres 1 et 2 dans  $w$ , on doit donc recourir à la règle de parenthésage pour déterminer l'effet de  $e_1$  et  $f_1$ .

En associant une parenthèse  $)$  aux lettres 1, et une parenthèse  $($  aux lettres 2, on obtient la séquence de parenthèses  $) \ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3$ , qui est réduite à la suivante en retirant les parenthèses couplées :

$$) \ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3$$

On a alors que  $f_1(w) = 1332233312233$  et  $e_1(w) = 1331223331233$ .

Un *cristal sur des mots* est un graphe orienté et étiqueté, dont les sommets sont des mots, et on a une arête  $w \xrightarrow{i} w'$  si et seulement si  $f_i(w) = w'$ . Les sources des composantes connexes sont les mots sur lesquels aucun opérateur  $e_i$  ne peut être appliqué, et correspondent aux *mots de Yamanouchi* : des mots dont tous les suffixes ont un poids qui est un partage.

**Exemple 1.4.4 :** Ci-dessous est illustré le cristal sur l'ensemble des mots de longueur 2 avec des lettres dans  $[4]$ , que l'on notera  $[4]^{\otimes 2}$ .

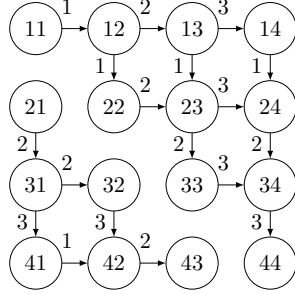


FIGURE 1.3: Cristal sur les mots  $[4]^{\otimes 2}$

#### 1.4.2.2 Cristaux de tableaux

On définit les *opérateurs de cristaux sur les tableaux* par l'effet de l'opérateur de cristal (de mots) sur leurs mots de lecture. Il est possible de démontrer que le mot résultant est aussi le mot de lecture d'un tableau de même forme (initialement prouvé par Lascoux et Schützenberger ; pour une preuve moderne voir (Bump et Schilling, 2017)). On a également que plusieurs ordres de lecture (ici celui de ligne) peuvent être utilisés, pour autant qu'il soit « valide » : il lit globalement les entrées du tableau du sud-ouest vers le nord-est (van Leeuwen, 2001).

Une composante connexe d'un cristal de tableaux regroupe tous les tableaux de même forme  $\lambda$  et d'entrées au plus  $n$ . Elle est donc notée  $B(\lambda)_n$ . Sa source est le tableau de forme et de remplissage  $\lambda$ , noté  $1_\lambda$ .

Par exemple,  $1_{(5,4,2)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & \\ \hline 3 & 3 & & & \\ \hline \end{array}$ .

**Exemple 1.4.5 :** Ci-dessous, on a le cristal de tableaux obtenu en appliquant l'insertion de RSK sur les mots de l'exemple 1.4.5. On obtient un cristal isomorphe, où on remarque que les composantes connexes correspondent à des composantes connexes  $B(\lambda)$  pour différents partages  $\lambda$ . On a donc que  $[4]^{\otimes 2} \simeq B(2) \oplus B(1,1)$ . On comprend aussi pourquoi certaines transformations  $e_i$  et  $f_i$  ne sont pas permises sur les mots : elles changeraient la forme des tableaux associés.

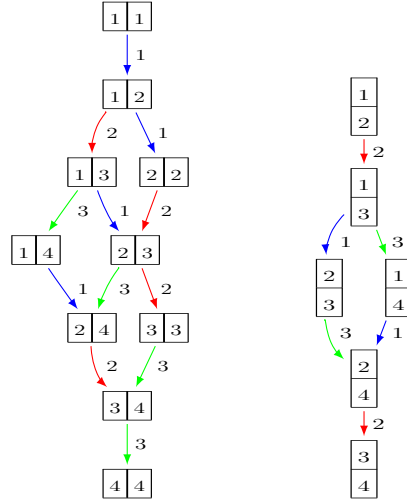


FIGURE 1.4: Cristal sur les tableaux  $[4] \otimes 2 \simeq B(2) \oplus B(1, 1)$

Cette correspondance entre les composantes connexes des cristaux sur des mots et celles de cristaux sur les tableaux n'est pas fortuite : les cristaux de tableaux représentent les cristaux de Stembridge de type  $A_n$ . En particulier les cristaux sur les mots sont un exemple de cristaux de Stembridge.

**Proposition 1.4.6 ((Bump et Schilling, 2017, Théorème 6.1)) :** Soit  $C$  un cristal connexe de Stembridge pour  $GL_n$  (de type  $A_n$ ). La source de  $C$  a un poids de partage  $\lambda$ , et alors  $C \simeq B(\lambda)$ .

Ainsi tous les cristaux de type  $A_{n-1}$  peuvent être étudiés à travers l'étude des cristaux de tableaux.

## CHAPITRE 2

### SÉPARER LE CARRÉ DE FONCTIONS SYMÉTRIQUES HOMOGÈNES ET ÉLÉMENTAIRES EN LEURS PARTS SYMÉTRIQUES ET ANTI-SYMÉTRIQUES

#### 2.1 Résumé de l'article

Cet article vise à décrire de façon combinatoire les coefficients apparaissant dans la décomposition de Schur des pléthysmes  $s_2[h_\lambda]$ ,  $s_{11}[h_\lambda]$ ,  $s_2[e_\lambda]$  et  $s_{11}[e_\lambda]$ . Ces pléthysmes apparaissent dans la décomposition pléthystique des carrés  $h_\lambda^2 = s_2[h_\lambda] + s_{11}[h_\lambda]$  et  $e_\lambda^2 = s_2[e_\lambda] + s_{11}[e_\lambda]$ . On dit alors que le carré est divisé en parties symétriques ( $s_2$ ) et anti-symétriques ( $s_{11}$ ). Ceci provient de la description d'une représentation d'un groupe  $G$  en terme de module stable  $M$  pour une action du groupe. Le tenseur  $M^{\otimes 2}$  se sépare alors en deux sous-modules stables sous l'action de  $G$ , et dont les éléments sont respectivement symétriques et anti-symétriques. Pour un élément  $x \otimes y \in M^{\otimes 2}$ , on peut l'écrire comme  $\frac{1}{2}(x \otimes y + y \otimes x) + \frac{1}{2}(x \otimes y - y \otimes x)$ , où la première partie est symétrique et la seconde, anti-symétrique : pour le premier, interchanger  $x$  et  $y$  redonne le même élément, alors que pour le second, cela redonne moins ( $-$ ) cet élément.

En utilisant la règle de Pieri et le fait que  $h_\lambda^2 = (h_{\lambda_1} \cdot h_{\lambda_2} \cdot \dots \cdot h_{\lambda_\ell})^2 = h_{\lambda_1} \cdot h_{\lambda_1} \cdot h_{\lambda_2} \cdot h_{\lambda_2} \cdot \dots \cdot h_{\lambda_\ell} \cdot h_{\lambda_\ell}$ , on dérive que les coefficients  $K_{\lambda^2}^\nu$  des fonctions de Schur  $s_\nu$  apparaissant dans la décomposition de Schur de  $h_\lambda^2$  comptent le nombre de tableaux de forme  $\nu$  et de remplissage  $\lambda^2 = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell, \lambda_\ell)$  :

$$(h_\lambda)^2 = h_{\lambda^2} = \sum_{\nu \vdash 2|\lambda|} K_{\lambda^2}^\nu s_\nu.$$

On a également que  $h_\lambda^2 = (h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots h_{\lambda_\ell})^2 = h_{\lambda_1}^2 h_{\lambda_2}^2 \dots h_{\lambda_\ell}^2$ , et donc une fonction de Schur  $s_\nu$  apparaissant dans  $h_\lambda^2$  provient d'un produit de fonctions de Schur  $s_{\nu_i}$  provenant chacune d'un  $h_{\lambda_i}^2$ . Ainsi, le tableau  $T$  indexant cette fonction de Schur  $s_\nu$  est « obtenu » du  $\ell$ -uplet de tableaux  $(T_1, T_2, \dots, T_\ell)$  indexant les fonctions de Schur  $s_{\nu_i}$  apparaissant dans le produit ci-haut.

Nous démontrons que cette correspondance est une bijection entre les tableaux  $T$  et les  $\ell$ -uplets de tableaux  $(T_1, T_2, \dots, T_\ell)$ , de la façon décrite ci-dessous. Un tableau  $T$  est séparé en  $\ell$  sous-tableaux gauches, où le  $i^{\text{ème}}$  sous-tableau  $T^{(i)}$  contient les entrées  $2i - 1$  et  $2i$  de  $T$ . Les entrées de  $T^{(i)}$  sont



ensuite ré-étiquetées de la façon suivante :

$$2i - 1 \mapsto 1 \quad 2i \mapsto 2.$$

Ces tableaux gauches sont ensuite rectifiés individuellement à l'aide de glisses de jeu de taquin pour donner le  $\ell$ -uplet de tableaux  $(T_1, T_2, \dots, T_\ell)$ , chacun de remplissage  $(\lambda_i, \lambda_i)$ .

La direction inverse est donnée en terme de produits de tableaux et de rectification à l'aide de jeu de taquin, vus au chapitre précédent :  $T = \text{Rect}(T_1 * T_2 * \dots * T_\ell)$ .

Pour chacun des  $\ell$  tableaux  $T_i$  du  $\ell$ -uplet, on connaît l'attribution pléthystique en fonction de leur forme au sein d'un  $h_{\lambda_i}^2$ . En effet, on connaît la décomposition de Schur des pléthysmes  $s_2[h_n]$  et  $s_{11}[h_n]$  depuis longtemps (Littlewood, 1950) :

$$s_2[h_n] = h_2[h_n] = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} s_{(2n-2j, 2j)},$$

$$s_{11}[h_n] = e_2[h_n] = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} s_{(2n-(2j+1), (2j+1))}.$$

La contribution principale de cet article est de montrer que l'attribution pléthystique du tableau initial  $T$  est déterminée à partir de celle de ses sous-tableaux, et donc du  $\ell$ -uplet associé  $(T_1, T_2, \dots, T_\ell)$ . Ceci est démontré à l'aide de propriétés des fonctions symétriques, du pléthysme, et de l'algorithme de RSK. Cela nous permet de donner une description combinatoire explicite des coefficients apparaissant dans la décomposition de Schur des pléthysmes  $s_2[h_\lambda]$  et  $s_{11}[h_\lambda]$  ci-dessous.

On montre également que tous les résultats précédents peuvent être traduits pour les  $e_n$  et  $e_\lambda$  par conjugaison des tableaux considérés, ce qui nous donne une description explicite des coefficients apparaissant dans la décomposition de Schur des pléthysmes  $s_2[e_\lambda]$  et  $s_{11}[e_\lambda]$ .

Les descriptions combinatoires explicite des coefficients apparaissant dans la décomposition de Schur des pléthysmes  $s_2[h_\lambda]$ ,  $s_{11}[h_\lambda]$ ,  $s_2[e_\lambda]$  et  $s_{11}[e_\lambda]$  est donnée par les théorèmes suivant.

**Théorème 1 :** Soit un partage  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ .

Soit  $Q$  un tableau de forme  $\nu \vdash 2|\lambda|$  et de contenu  $\lambda^2$ . Notons par  $Q^{(i)}$  le sous-tableau de  $Q$  contenant les entrées  $2i - 1$  et  $2i$ , pour  $1 \leq i \leq \ell$ , et  $Q_i = \text{Rect}(Q^{(i)})$ , de forme  $(2\lambda_i - j_i, j_i)$ . Définissons le signe de  $Q$  par  $\text{signe}(Q) := \prod_{i=1}^{\ell} (-1)^{j_i}$ .

La fonction de Schur  $s_\nu$  indexée par  $Q$  dans  $h_\lambda^2$  contribue alors à  $s_2[h_\lambda]$  si  $\text{signe}(Q) = 1$ , et à  $s_{11}[h_\lambda]$  si  $\text{signe}(Q) = -1$ .

Soit  $\tilde{Q}$  un tableau conjugué de forme  $\nu \vdash 2|\lambda|$  et de contenu  $\lambda^2$ . Notons par  $\widetilde{Q}^{(i)}$  le sous-tableau de  $\tilde{Q}$  contenant les entrées  $2i - 1$  et  $2i$ , pour  $1 \leq i \leq \ell$ , et  $\tilde{Q}_i = (\text{Rect}(\widetilde{Q}^{(i)}))'$ , de forme  $(2\lambda_i - j_i, 1^{2j_i})$ . Définissons le signe (conjugué) de  $\tilde{Q}$  par  $\text{signe}_c(\tilde{Q}) = \prod_{i=1}^{\ell} (-1)^{j_i}$ .

La fonction de Schur  $s_\nu$  indexée par  $\tilde{Q}$  dans  $e_\lambda^2$  contribue alors à  $s_2[e_\lambda]$  si  $\text{signe}_c(\tilde{Q}) = 1$ , et à  $s_{11}[e_\lambda]$  si  $\text{signe}_c(\tilde{Q}) = -1$ .

**Théorème 2 :** Considérons les cardinalités d'ensembles suivantes.

- $(K_{\lambda^2}^{\nu})^+ = \#\{Q \text{ tableau de forme } \nu \text{ et de contenu } \lambda^2 \mid \text{signe}(Q) = 1\}$
- $(K_{\lambda^2}^{\nu})^- = \#\{Q \text{ tableau de forme } \nu \text{ et de contenu } \lambda^2 \mid \text{signe}(Q) = -1\}$
- $(K_{\lambda^2}^{\nu'})^+ = \#\{\tilde{Q}' \text{ tableau de forme } \nu' \text{ et de contenu } \lambda^2 \mid \text{signe}_c(\tilde{Q}) = 1\}$
- $(K_{\lambda^2}^{\nu'})^- = \#\{\tilde{Q}' \text{ tableau de forme } \nu' \text{ et de contenu } \lambda^2 \mid \text{signe}_c(\tilde{Q}) = -1\}$

On a alors

$$\begin{aligned} s_2[h_\lambda] &= \sum_{\nu} (K_{\lambda^2}^{\nu})^+ s_\nu, \\ s_{11}[h_\lambda] &= \sum_{\nu} (K_{\lambda^2}^{\nu})^- s_\nu, \\ s_2[e_\lambda] &= \sum_{\nu} (K_{\lambda^2}^{\nu'})^+ s_\nu, \\ s_{11}[e_\lambda] &= \sum_{\nu} (K_{\lambda^2}^{\nu'})^- s_\nu. \end{aligned}$$

## 2.2 Place de cet article dans la littérature et contributions originales

Le titre de cet article s'inspire librement de celui de Carré et Leclerc, *Splitting the square of a Schur function into its symmetric and anti-symmetric parts* (Carré et Leclerc, 1995). Celui-ci donne une interprétation combinatoire des coefficients apparaissant dans la décomposition de Schur des pléthysmes  $s_2[s_\lambda]$  et  $s_{11}[s_\lambda]$ . Cette description est donnée en terme de tableaux domino de Yamanouchi de forme  $I = (2\lambda)^2 = (2\lambda_1, 2\lambda_1, 2\lambda_2, 2\lambda_2, \dots, 2\lambda_\ell, 2\lambda_\ell)$ , et dont la parité du cospin indique l'attribution pléthystique du tableau domino de Yamanouchi. Le cospin est, dans ce cas précis, la moitié du nombre de dominos horizontaux, et donne nécessairement un entier.

En particulier, cette description se base sur une bijection entre les paires de tableaux et les tableaux domino d'une certaine forme. Puisque cette bijection se généralise à une bijection entre les  $r$ -uplets de tableaux et les tableaux de  $r$ -rubans (Stanton et White, 1985), alors cette description semble hautement généralisable.

En terme de théorie des cristaux, les paires de tableaux peuvent être considérés comme des tenseurs de tableaux au sein de tenseur de cristaux de tableaux, qui apparaissent comme monômes dans le produit de fonctions de Schur. On devrait donc pouvoir décrire une structure de cristal sur les tableaux domino.

Il a été démontré qu'il y a une structure de cristal sur les tableaux domino qui correspond au tenseur de cristaux de tableaux (van Leeuwen, 2000), mais la bijection de Carré et Leclerc ne respecte pas les propriétés des cristaux nécessaires, et n'est donc pas « la bonne » (van Leeuwen, 1999). De plus, van Leeuwen a conjecturé qu'il est peu probable que la méthode qu'il avance pour décrire une bijection respectant les propriétés des tenseurs de cristal pour les tableaux domino soit généralisable aux tableaux de  $r$ -rubans (van Leeuwen, 1999).

Ainsi, cette description combinatoire ne semble pas optimale pour la généralisation pour des pléthysmes d'ordre supérieur (avec  $s_\mu[s_\lambda]$  pour  $\mu \vdash m$  où  $m > 2$ ). On a donc cherché à développer une autre description combinatoire qui puisse éventuellement être généralisable à des pléthysmes d'ordre supérieur, et qui soit compatible avec la théorie des cristaux.

Le cas  $s_\lambda$  étant très difficile, on s'est penché sur les cas légèrement plus simples des  $h_\lambda$  et  $e_\lambda$ . Puisque  $h_n = s_n$  et  $e_n = s_{1^n}$ , alors ces cas sont évidemment traités par l'article de Carré et Leclerc, ce qui nous permet de tisser des liens entre les deux descriptions. De plus, dans ces deux cas précis, on connaît la décomposition de Schur des pléthysmes  $s_2[h_n]$  et  $s_{11}[h_n]$  depuis longtemps, tel qu'énoncé ci-haut (Littlewood, 1950).

Cet article présente donc une nouvelle approche combinatoire qui décrit et étend les résultats de Littlewood à  $h_\lambda$  et  $e_\lambda$ , en utilisant de surcroît des outils combinatoires bien connus : les tableaux, la règle de Pieri et l'algorithme de RSK. Cette approche a aussi l'avantage d'être généralisable pour des pléthysmes d'ordre supérieur, ce qui est le sujet d'étude du second article présenté ici.

On inclut une section à la fin de l'article qui généralise les résultats de Carré et Leclerc (pour  $h_n^2$  et  $e_n^2$ ) à  $h_\lambda^2$  et  $e_\lambda^2$ , en utilisant nos résultats. Ainsi, nous gardons la porte ouverte à la généralisation de ces deux méthodes combinatoires à  $m > 2$ .

## 2.3 Splitting the square of homogeneous and elementary symmetric functions in their symmetric and anti-symmetric parts (Maas-Gariépy et Tétreault, 022a)

### 2.3.1 Abstract

We consider the expansion of the square of a complete homogeneous function  $h_\lambda$ , or of an elementary symmetric function  $e_\lambda$ , in the basis of Schur functions. These squares also decompose into two plethysms,  $s_2[h_\lambda]$  and  $s_{11}[h_\lambda]$  (resp.  $s_2[e_\lambda]$  and  $s_{11}[e_\lambda]$ ), which are called their symmetric and anti-symmetric parts, respectively. We define a sign statistic on the set of tableaux that index the Schur functions appearing in the square of those symmetric functions. This sign statistic allows to determine to which plethysm each Schur function contributes. We use mainly combinatorial tools on tableaux (product on tableau and RSK) and basic manipulations on plethysm and symmetric functions.

### 2.3.2 Introduction

The composition of polynomial representations of  $GL_n(\mathbb{C})$  translate in terms of characters to the plethysm of symmetric functions. Although introduced in 1936 by Littlewood (Littlewood, 1936), the plethysm of two symmetric functions  $f$  and  $g$ , denoted  $f[g]$ , still carries a lot of open problems.

One open problem is understanding the decomposition of  $f[g]$  in the basis of Schur functions  $s_\nu$ , since they correspond to the irreducible characters for polynomial representations of  $GL_n(\mathbb{C})$ . Basic properties of plethysm reduce the problem (slightly) to understanding the Schur decomposition of  $f$ , which is a general problem in representation theory, and that of plethysms  $s_\mu[g]$ .

This has applications in representation theory (and so chemistry, physics, crystallography, etc.), and in geometric complexity theory (see (Mulmuley, 2012) for an introduction).

For a specific symmetric function  $g$ , one wants to study  $g^n$ , which decomposes as a sum of plethysms  $s_\mu[g]$  for  $\mu \vdash n$ , each with multiplicity  $f^\mu$  counting standard tableaux of shape  $\mu$ . Often, we also know the decomposition of  $g^n$  in the basis of Schur functions, so the real difficulty is to discriminate how many copies of  $s_\nu$  contribute to a given plethysm  $s_\mu[g]$ . For small values of  $n$ , this is computable, but rather slow as the calculation of the coefficients appearing in these decompositions has been

proven to be  $\#P$ -hard (Fischer et Ikenmeyer, 2020).

In the case  $n = 2$  that interest us, the plethysms  $s_2[g]$  and  $s_{11}[g]$  in  $g^2$  are often referred to as the symmetric and anti-symmetric parts of the square.

For  $g = s_\lambda$  a Schur function, Carré and Leclerc (Carré et Leclerc, 1995) gave a combinatorial solution to this problem. The decomposition of the plethysms of  $s_\lambda^n$  in the basis of Schur function remains however open for  $n > 2$ .

Because plethysm is not additive in its second argument, we cannot compute efficiently  $s_2[g]$  and  $s_{11}[g]$  by knowing the Schur expansion of  $g$  and using the result of Carré and Leclerc. In effect, it can be shown that if  $g = \sum_\mu a_\mu s_\mu$  with non-negative coefficients  $a_\mu$ , then

$$s_2[g] = \sum_\mu \left( a_\mu h_2[s_\mu] + \binom{a_\mu}{2} s_\mu^2 \right) + \sum_{\mu \neq \nu} a_\mu a_\nu s_\mu s_\nu.$$

This is easily deduced from formula 8.8 in chapter 1 of (Macdonald, 1998). There is a similar formula for  $s_{11}[g]$ , and they are even more complicated when some coefficients are negative. These are fastidious computations involving product of Schur functions, and so Littlewood-Richardson coefficients, which can be hard to compute for large partitions. Moreover, obtaining the coefficient of a Schur function appearing in this sum does not have a combinatorial flavor.

Our contribution is to give a combinatorial description of the coefficients appearing in these plethysms in the case where  $g$  belongs to one of two other linear bases of symmetric functions, the complete homogeneous symmetric functions  $h_\lambda$  or the elementary symmetric functions  $e_\lambda$ . In addition of being combinatorial, our approach leads to significantly faster computations than expressing them as a sum of Schur functions and using the previous formula. Moreover, it can help compute plethysms for symmetric functions having less terms in those bases than in the Schur basis.

The construction for both basis is similar, so we describe our construction for  $h_\lambda$  and extended it to  $e_\lambda$  afterwards. We use a combinatorial description of  $h_\lambda$  in terms of  $\lambda$ -tuples of row tableaux (corresponding to tabloids), and use the RSK algorithm to describe the  $Q$ -tableaux indexing the copies

of  $s_\nu$  appearing in the decomposition of  $h_\lambda^2$  in the Schur basis. A sign statistic on these  $Q$ -tableaux determines to which plethysm the associated Schur function contributes. Our description of the RSK algorithm uses the product of tableaux  $*$  of Lascoux and Schützenberger (Lascoux et Schützenberger, 1981), formalized by Fulton (Fulton, 1996), and rectification (Rect) of skew tableaux using jeu de taquin. Our proofs rely on this description, and on basic properties of plethysm.

Our main results are the following, combining here the analogous results for  $h_\lambda$  and  $e_\lambda$ .

**Theorem 1 :** Fix a partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ .

- Let  $Q$  be a tableau of shape  $\nu \vdash 2|\lambda|$  and content  $\lambda^2$ . Let  $Q^{(i)}$  be the subtableau of  $Q$  containing entries  $2i - 1$  and  $2i$ , for  $1 \leq i \leq \ell$  and  $Q_i = \text{Rect}(Q^{(i)})$  of shape  $(2\lambda_i - j_i, j_i)$ . Define the sign of  $Q$  to be  $\text{sign}(Q) = \prod_{i=1}^{\ell} (-1)^{j_i}$ .

The copy of  $s_\nu$  indexed by  $Q$  in  $h_\lambda^2$  lies in  $s_2[h_\lambda]$  if  $\text{sign}(Q) = 1$ , and in  $s_{11}[h_\lambda]$  if  $\text{sign}(Q) = -1$ .

- Let  $\tilde{Q}$  be a conjugate tableau of shape  $\nu \vdash 2|\lambda|$  and content  $\lambda^2$ . Let  $\tilde{Q}^{(i)}$  be the subtableau of  $\tilde{Q}$  containing entries  $2i - 1$  and  $2i$ , for  $1 \leq i \leq \ell$  and  $\tilde{Q}_i = (\text{Rect}(\tilde{Q}^{(i)}))'$  of shape  $(2\lambda_i - j_i, 1^{2j_i})$ . Define the (conjugate) sign of  $\tilde{Q}$  to be  $\text{sign}_c(\tilde{Q}) = \prod_{i=1}^{\ell} (-1)^{j_i}$ .

The copy of  $s_\nu$  indexed by  $\tilde{Q}$  in  $e_\lambda^2$  lies in  $s_2[e_\lambda]$  if  $\text{sign}_c(\tilde{Q}) = 1$ , and in  $s_{11}[e_\lambda]$  if  $\text{sign}_c(\tilde{Q}) = -1$ .

This gives us the following decomposition :

**Theorem 2 :** Consider the following numbers :

- $(K_{\lambda^2}^{\nu})^+ = \#\{Q \text{ tableau of shape } \nu \text{ and content } \lambda^2 \mid \text{sign}(Q) = 1\}$
- $(K_{\lambda^2}^{\nu})^- = \#\{Q \text{ tableau of shape } \nu \text{ and content } \lambda^2 \mid \text{sign}(Q) = -1\}$
- $(K_{\lambda^2}^{\nu'})^+ = \#\{\tilde{Q}' \text{ tableau of shape } \nu' \text{ and content } \lambda^2 \mid \text{sign}_c(\tilde{Q}) = 1\}$
- $(K_{\lambda^2}^{\nu'})^- = \#\{\tilde{Q}' \text{ tableau of shape } \nu' \text{ and content } \lambda^2 \mid \text{sign}_c(\tilde{Q}) = -1\}$

Then we have :

$$\begin{aligned}
s_2[h_\lambda] &= \sum_{\nu} (K_{\lambda^2}^{\nu})^+ s_{\nu}, \\
s_{11}[h_\lambda] &= \sum_{\nu} (K_{\lambda^2}^{\nu})^- s_{\nu}, \\
s_2[e_\lambda] &= \sum_{\nu} (K_{\lambda^2}^{\nu'})^+ s_{\nu}, \\
s_{11}[e_\lambda] &= \sum_{\nu} (K_{\lambda^2}^{\nu'})^- s_{\nu}.
\end{aligned}$$

The article is organized as follows. In section 2, we recall definitions, which allow us to introduce all concepts necessary to state and prove our theorems for  $h_\lambda$  in section 3. We recall the product of tableaux  $*$ , which uses jeu de taquin, and define the RSK algorithm using this product of tableaux. We show that it gives a bijection between  $\lambda$ -tuples of row tableaux and pairs of tableaux of the same shape  $\nu$ , with the recording tableau  $Q$  having content  $\lambda$ . We finally define a sign statistic on tableaux of content  $\lambda^2$ . We use basic properties of plethysm and symmetric functions, and properties of the RSK algorithm, to prove theorems 1 and 2 for  $h_\lambda$ . In section 4, we translate our construction to  $e_\lambda$ . Finally, in section 5, we show how our results could be generalized to higher plethysms. We also recall the construction of Carré and Leclerc, which we generalize to give an alternative proof of our results in terms of tuples of domino tableaux. This alternative construction also offers hope of generalization to higher plethysms in terms of ribbon tableaux.

### 2.3.3 Definitions

#### 2.3.3.1 Tableaux

We recall here definitions and notations on tableaux. For a more detailed introduction, see (Fulton, 1996) or (Sagan, 2001).

Recall that a partition is a weakly decreasing vector of positive integers  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$ . We identify a partition  $\lambda$  to its diagram, the collection of boxes both top- and left-justified with  $\lambda_i$  boxes in its  $i^{\text{th}}$  row, counting top to bottom. We denote  $\lambda^2 = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell, \lambda_\ell)$  and  $\lambda'$  the conjugate of  $\lambda$ , where rows of  $\lambda$  become the columns of  $\lambda'$ . We denote also  $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ ,  $\lambda \vdash n$  if



$\sum_i \lambda_i = n$  and  $\ell(\lambda) = \ell$  the number of parts of  $\lambda$ .

A *semistandard tableau*  $t$  of shape  $\lambda$  is the filling of  $\lambda$  with positive integers, such that rows weakly increase from left to right, and columns strictly increase from top to bottom. We denote  $\text{SSYT}(\lambda)$  the set of tableaux of shape  $\lambda$ . We use *tableau* to mean *semistandard tableau*, unless stated otherwise.

The *conjugate of a tableau*  $t$  of shape  $\lambda$  has shape  $\lambda'$  and is obtained by reflecting  $t$  along its main diagonal. A conjugate tableau then has strictly increasing rows and weakly increasing columns.

We allow tableaux to have skew shapes  $\lambda/\mu$ , where the boxes of the partition  $\mu$  are left blank, for  $\mu \subseteq \lambda$ . The content of a tableau  $t$  is the vector  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ , where  $\alpha_i$  counts the number of entries  $i$  in  $t$ .

**Example 2.3.1 :** The tableau 

			1	1	2	2	3	4
		1	2	2	3	3		
2	3	3	3					

 has (skew) shape  $(9, 7, 4)/(3, 2)$  and content  $(3, 5, 6, 1)$ .

$\text{SSYT}(n)$  is the set of row tableaux of length  $n$ , and  $\text{SSYT}(1^n)$ , that of column tableaux of height  $n$ . We define  $\lambda$ -tuples of row tableaux to be elements of the cartesian product  $T_{\leq}(\lambda) := \text{SSYT}(\lambda_1) \times \text{SSYT}(\lambda_2) \times \dots \times \text{SSYT}(\lambda_\ell)$ , and we define  $\lambda$ -tuples of column tableaux to be elements of  $T_{\wedge}(\lambda) := \text{SSYT}(1^{\lambda_1}) \times \text{SSYT}(1^{\lambda_2}) \times \dots \times \text{SSYT}(1^{\lambda_\ell})$ . The content of a tuple of tableaux is the sum of the contents of each tableau forming the tuple.

**Example 2.3.2 :** The tuples  $s, t$  below are  $(4, 3)^2$ -tuples of tableaux (row/column).

$$s = (s_1, s_2, s_3, s_4) = (\boxed{1\ 3\ 4\ 5}, \boxed{2\ 2\ 2\ 4}, \boxed{1\ 2\ 2}, \boxed{1\ 3\ 7}) \in T_{\leq}((4, 3)^2),$$

$$t = (t_1, t_2, t_3, t_4) = \left( \begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \\ \boxed{5} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \boxed{2} \\ \boxed{4} \\ \boxed{7} \\ \boxed{8} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \boxed{1} \\ \boxed{3} \\ \boxed{7} \\ \hline \end{array} \right) \in T_{\wedge}((4, 3)^2).$$

Their contents are  $(4, 5, 2, 2, 1, 0, 1)$  and  $(3, 2, 3, 2, 1, 0, 2, 1)$ .

The content allows one to associate a monomial  $x^t$  with a tableau (or  $\lambda$ -tuple), where the power of  $x_i$  is given by  $\alpha_i$ , the number of entries  $i$  in  $t$ .

To a tableau we can also associate a *reading word*, by reading off its entries from left to right and bottom to top. The reading word of a tuple of tableaux is the concatenation of the reading words of each tableau. For example, the tableau  $t$  in example 2.3.2 has reading word 54318742321731, and associated monomial  $x^t = x_1^3 x_2^2 x_3^3 x_4^2 x_5 x_7^2 x_8$ .

### 2.3.3.2 Symmetric functions

For an introduction to symmetric functions, see (Macdonald, 1998) or (Sagan, 2001).

Recall that *symmetric functions* over  $\mathbb{Q}$  are (potentially infinite) polynomials  $f(x)$  on formal variables  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ , such that permuting any two variables gives back the same polynomial. They form a well studied graded ring  $\Lambda$  for which many basis are known, including the following.

For each partition  $\lambda$ , the *Schur function*  $s_\lambda$  can be defined in terms of tableaux :

$$s_\lambda = \sum_{t \in \text{SSYT}(\lambda)} x^t.$$

The *homogeneous symmetric functions*  $h_\lambda$  can be defined in terms of  $\lambda$ -tuples of row tableaux :

$$h_\lambda = \sum_{t \in T_{\leq}(\lambda)} x^t = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots h_{\lambda_\ell} = s_{(\lambda_1)} s_{(\lambda_2)} \dots s_{(\lambda_\ell)}.$$

Similarly, the *elementary symmetric functions*  $e_\lambda$  can be defined in terms of  $\lambda$ -tuples of column tableaux :

$$e_\lambda = \sum_{t \in T_{\lambda}(\lambda)} x^t = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots e_{\lambda_\ell} = s_{(1^{\lambda_1})} s_{(1^{\lambda_2})} \dots s_{(1^{\lambda_\ell})}.$$

The *power sum symmetric functions*  $p_\lambda$  are defined as the product  $p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots p_{\lambda_\ell}$ , where

$$p_n = \sum_{i \geq 1} x_i^n.$$

The transition matrices between these bases are known, and important problems in representation theory correspond to decomposing a symmetric function in term of one of these bases. A widely studied problem is to find combinatorial descriptions of the coefficients appearing in the decomposition of the product of two symmetric functions, which is also a symmetric function. Generally we want the decomposition in the basis of the Schur functions, since they correspond to irreducible representations. The following propositions are well-known results about this problem, and can be found for example in (Macdonald, 1998).

The Pieri rule describes the product of any Schur function by a simple homogeneous or elementary symmetric function :

**Proposition 2.3.3 (Pieri rule) :** For any partition  $\lambda$  and integer  $n$ , we have :

- $s_\lambda s_{(n)} = s_\lambda h_n = \sum_{\nu} s_\nu$ , where the sum is over all partitions  $\nu$  obtained by adding  $n$  boxes to  $\lambda$ , no two in the same column.
- $s_\lambda s_{(1^n)} = s_\lambda e_n = \sum_{\nu} s_\nu$ , where the sum is over all partitions  $\nu$  obtained by adding  $n$  boxes to  $\lambda$ , no two in the same row.

This allows us to describe the decomposition of  $h_n^2$  and  $e_n^2$  :

**Proposition 2.3.4 :**

$$(h_n)^2 = \sum_{j=0}^n s_{(2n-j,j)} \quad \text{and} \quad (e_n)^2 = \sum_{j=0}^n s_{(2n-j,1^{2j})}.$$

To get a description of  $h_\lambda^2$  and  $e_\lambda^2$ , we apply iteratively the Pieri rule, keeping track of the  $i^{\text{th}}$  added horizontal band by filling its cells with  $i$ 's.

**Proposition 2.3.5 :**

$$(h_\lambda)^2 = h_{\lambda^2} = \sum_{\nu \vdash 2|\lambda|} K_{\lambda^2}^{\nu} s_\nu \quad \text{and} \quad (e_\lambda)^2 = e_{\lambda^2} = \sum_{\nu \vdash 2|\lambda|} K_{\lambda^2}^{\nu'} s_\nu,$$

where the Kostka numbers  $K_{\lambda^2}^{\nu}$  count the number of tableaux of shape  $\nu$  and content  $\lambda^2$ .

**Example 2.3.6 :** Using the Pieri rule and keeping track of the added horizontal bands with red cells for 2's, and blue cells for 3's, we get the following.

$$h_2^3 = (h_2 \cdot h_2) \cdot h_2 = \left( s_{\square\square\square} + s_{\square\square} + s_{\square} \right) \cdot h_2 = s_{\square\square\square\square} + s_{\square\square\square} + s_{\square\square\square} + s_{\square\square\square} + s_{\square\square\square} + s_{\square\square\square} + s_{\square\square\square}.$$

### 2.3.4 Associating a $Q$ -tableau indexing a copy of $s_\nu$ in $h_\lambda^2$ to a plethysm

We will see that the tableaux of shape  $\nu$  and content  $\lambda^2$  counted by  $K_{\lambda^2}^\nu$  in  $h_\lambda^2 = \sum_\nu K_{\lambda^2}^\nu s_\nu$  are  $Q$ -tableaux obtained through the RSK algorithm.

#### 2.3.4.1 Product of tableaux, jeu de taquin and RSK

We define the RSK algorithm in terms of product of tableaux, which will be central to our construction. The product of tableaux was introduced by Lascoux and Schützenberger in the setting of the plactic monoid (Lascoux et Schützenberger, 1981). Its elements correspond to tableaux : a tableau is identified with the Knuth-equivalence class of the reading word of the tableau. The product of tableaux was more formally defined by Fulton using *jeu de taquin*(Fulton, 1996), so that it corresponds to the product on words (concatenation) in the plactic monoid.

*Jeu de taquin* rectifies a skew tableau of shape  $\lambda/\mu$  to a straight tableau. A *jeu de taquin* slide starts at an inner corner of  $\lambda/\mu$  and exchanges the empty cell with a non-empty adjacent cell, respecting constraints on the entries of the rows and columns, until the empty cell lies on the outer border. The rectified tableau is independent of the order of the slides.

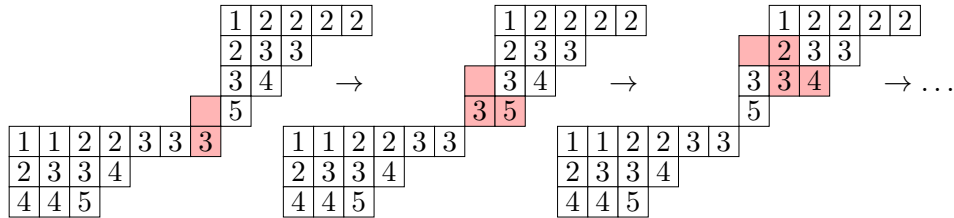
Let's define the product of two tableaux  $t_1, t_2$ , of respective shape  $\mu, \nu$  :

1. Construct the skew tableau  $t_1 * t_2$  by placing  $t_1$  below and left of  $t_2$ , into the skew shape  $(\mu_1 + \nu_1, \mu_1 + \nu_2, \dots, \mu_1 + \nu_\ell, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)/(\mu_1^\ell)$ .
2. The product  $T$  of  $t_1, t_2$  is the rectification of  $t_1 * t_2$  using *jeu de taquin*.

**Example 2.3.7 :** For  $t_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 4 & & & \\ \hline 4 & 4 & 5 & & & & \\ \hline \end{array}$  and  $t_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & & \\ \hline 3 & 4 & & & \\ \hline 5 & & & & \\ \hline \end{array}$ ,

$t_1 * t_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & & & & \\ \hline 3 & 4 & & & & & \\ \hline 5 & & & & & & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 4 & & & \\ \hline 4 & 4 & 5 & & & & \\ \hline \end{array}$ , and  $T = \text{Rect}(t_1 * t_2) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 4 & 4 & & & & \\ \hline 4 & 5 & & & & & & \\ \hline 5 & & & & & & & \\ \hline \end{array}$ .

Three jeu de taquin slides are illustrated below.



**Proposition 2.3.8 :** Let  $t_1, t_2$  be tableaux of respective shape  $\mu, \nu$ . The word obtained by the concatenation of  $\text{word}(t_1)$  and  $\text{word}(t_2)$  lies in the plactic class of the reading word of  $T = \text{Rect}(t_1 * t_2)$ .

*Idea of proof.* Applying jeu de taquin on a skew tableau takes its reading word onto a Knuth-equivalent reading word. Since the reading word of  $t_1 * t_2$  is equal to  $\text{word}(t_1)\text{word}(t_2)$ , we have the desired result. ■

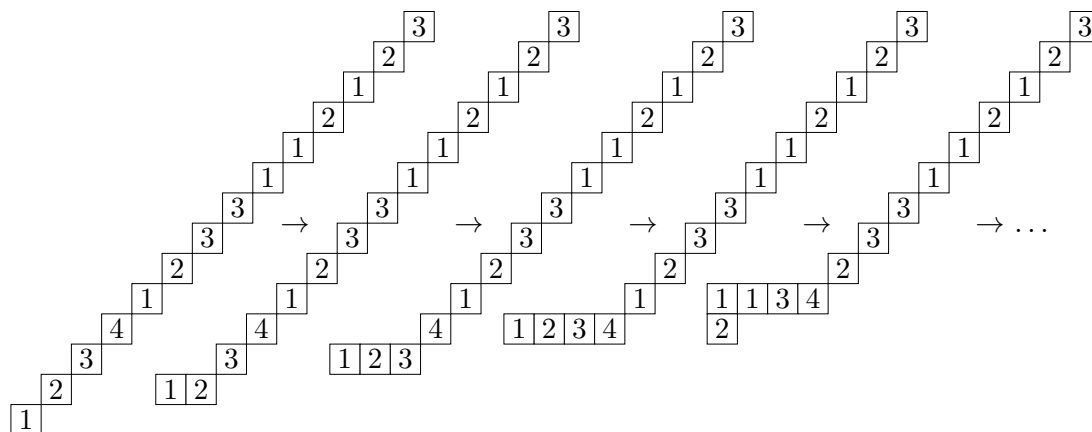
The RSK algorithm (Knuth, 1970) is closely linked to the plactic monoid, since all words in the same (plactic) class will have the same insertion tableau under RSK. Recall that RSK establishes a bijection between biwords  $W = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_k \\ v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  and pairs of tableaux  $(P, Q)$  of the same shape  $\mu$ , for  $\mu \vdash k$ , with  $\text{content}(P) = \text{content}(v)$ , and  $\text{content}(Q) = \text{content}(u)$ . Recall that the bi-letters  $\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$  of a biword are ordered such that the  $u_i$ 's weakly increase, and for  $u_i = u_{i+1}$ ,  $v_i \leq v_{i+1}$ .

Note that words  $w$  are inserted by RSK into pairs  $(P, Q)$  by considering  $u = 123 \dots \text{length}(w)$  and  $v = w$ . Then the tableau  $Q$  is standard.

Our alternate definition of RSK using product of tableaux goes as follows.

Let  $P_i$  the tableau obtained after the insertion of  $v_i$ , with  $P_0 = \emptyset$ . Then  $P_{i+1} = \text{Rect}(P_i * \boxed{v_{i+1}})$ , and  $P = P_k$ . The tableau  $Q$  records the order in which cells are added, with entry  $u_i$  in position  $\text{shape}(P_{i+1})/\text{shape}(P_i)$ .

**Remark 2.3.9 :** This process can be seen as rectifying  $v_1 * v_2 * \dots * v_k$  one cell after the other from left to right to yield the tableaux  $P_i$ , as illustrated below. Recording the added cells with the  $u_i$ 's yields the tableaux  $Q_i$ .



### 2.3.4.2 Associating a $\lambda^2$ -tuple of row tableaux to a $Q$ -tableau

**Proposition 2.3.10 :**  $\lambda$ -tuples of row tableaux with content  $\alpha$  are in bijection with pairs of tableaux of the same shape  $(P_t, Q_t)$ , where the content of  $P_t$  is  $\alpha$  and the content of  $Q_t$  is  $\lambda$ .

*Proof.* Consider the biword  $W_t$  built from a  $\lambda$ -tuple of row tableaux  $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$  using the bi-letters  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ , for  $j$  an entry in  $t_i$ . The top word of  $W_t$  is  $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots \ell^{\lambda_k}$ , and the bottom word is the reading word of  $t$ .

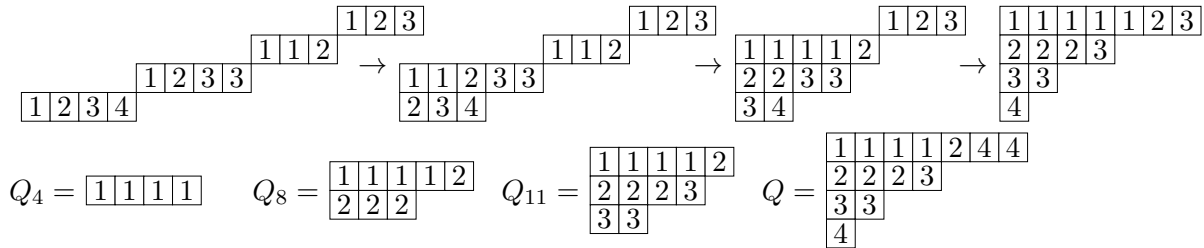
The map  $t \mapsto W_t$  is a bijection between  $\lambda$ -tuples of row tableaux of content  $\alpha$  and biwords such that the top word has content  $\lambda$ , and the bottom word has content  $\alpha$  and is the reading word of the  $\lambda$ -tuples. By RSK, these biwords are in bijection with pairs  $(P_t, Q_t)$  of tableaux with the desired properties. ■

**Example 2.3.11 :** If  $t = (\boxed{1\ 2\ 3\ 4}, \boxed{1\ 2\ 3\ 3}, \boxed{1\ 1\ 2}, \boxed{1\ 2\ 3})$ , then

$$W_t = \begin{pmatrix} 1111 & 2222 & 333 & 444 \\ 1234 & 1233 & 112 & 123 \end{pmatrix} \text{ and } (P, Q) = \left( \begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \\ \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{3} & & & & \\ \boxed{3} & \boxed{3} & & & & & & \\ \boxed{4} & & & & & & & \end{array}, \begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{4} & \\ \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{3} & & & & \\ \boxed{3} & \boxed{3} & & & & & & \\ \boxed{4} & & & & & & & \end{array} \right).$$

**Remark 2.3.12 :** In the case of a biword associated to a  $\lambda$ -tuple of row tableaux, the rectifying process of the RSK algorithm can be greatly sped up as illustrated below, by first rectifying together the letters in the same line tableau  $t_i$ .

Since all letters of the reading word of  $t_i$  correspond to entries  $i$  in  $Q$ , the skew tableau  $t_1 * t_2 * \dots * t_\ell$  can be rectified recursively row by row, recording the added cells in the subtableaux of  $Q$  with entries 1 up to  $i$ .



**Remark 2.3.13 :** In the case of a  $\lambda^2$ -tuple of row tableaux, we have a third way to rectify  $t_1 * t_2 * \dots * t_{2\ell-1} * t_{2\ell}$  into  $P_t$  : each pair of tableaux of respective length  $\lambda_i$  can be first rectified together into tableaux  $T_i$ . They correspond to insertion tableaux for the sub-biwords

$$\begin{pmatrix} 2i - 1 \dots 2i - 1 & 2i \dots 2i \\ \text{word}(t_{2i-1}) & \text{word}(t_{2i}) \end{pmatrix}.$$

We can recover the associated recording tableaux  $Q_i$  directly from  $Q$ . This follows from Proposition 1 of the chapter 5 of (Fulton, 1996).

**Corollary 2.3.14 :** Let  $t$  be a  $\lambda^2$ -tuple of row tableaux,  $W_t$  the associated biword and  $(P, Q) = \text{RSK}(W_t)$ . Let

$$(T_i, Q_i) = \text{RSK} \left( \begin{array}{cc} 2i-1 \dots 2i-1 & 2i \dots 2i \\ \text{word}(t_{2i-1}) & \text{word}(t_{2i}) \end{array} \right),$$

and  $Q^{(i)}$  the subtableau of  $Q$  with entries  $2i-1$  and  $2i$ , for  $1 \leq i \leq \ell = \ell(\lambda)$ .

Then  $Q_i = \text{Rect}(Q^{(i)})$ .

We now define a sign statistic on the  $Q$ -tableaux which will allow us to discriminate in which plethysm the associated copy of  $s_\nu$  lies. Let  $Q$  be a tableau of shape  $\nu \vdash 2|\lambda|$  and content  $\lambda^2$ , for a fixed partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ . Let  $Q^{(i)}$  be the subtableau of  $Q$  with entries  $2i-1$  and  $2i$ . Then  $Q_i = \text{Rect}(Q^{(i)})$  is of shape  $(2\lambda_i - j_i, j_i)$ , for  $1 \leq i \leq \ell$ . Finally define  $\text{sign}(Q) = \prod_{i=1}^{\ell} (-1)^{j_i}$ .

**Theorem 1 (Part 1) :** The copy of  $s_\nu$  indexed by  $Q$  in  $h_\lambda^2$  lies in  $s_2[h_\lambda]$  if  $\text{sign}(Q) = 1$ , and in  $s_{11}[h_\lambda]$  if  $\text{sign}(Q) = -1$ .

This is proved in the next section, where we show that this sign statistic is well defined, and can be used to discriminate contribution to a plethysm. We then have :

**Theorem 2 (Part 1) :** Consider the following numbers :

- $(K_{\lambda^2}^\nu)^+ = \#\{Q \text{ tableau of shape } \nu \text{ and content } \lambda^2 \mid \text{sign}(Q) = 1\}$
- $(K_{\lambda^2}^\nu)^- = \#\{Q \text{ tableau of shape } \nu \text{ and content } \lambda^2 \mid \text{sign}(Q) = -1\}$

Then we have :

$$s_2[h_\lambda] = \sum_{\nu} (K_{\lambda^2}^\nu)^+ s_\nu,$$

$$s_{11}[h_\lambda] = \sum_{\nu} (K_{\lambda^2}^\nu)^- s_\nu.$$



**Example 2.3.15 :** Let's see Theorem 1 in action. The four tableaux of shape  $\nu = (3, 2, 1)$  and content  $(2, 1)^2 = (2, 2, 1, 1)$  are illustrated below. We thank Franco Saliola for providing the figure. The computed signs tell us that  $s_2[h_{21}]$  and  $s_{11}[h_{21}]$  both contain two copies of  $s_{321}$ .

$Q$	$Q^{(1)}$	$\text{Rect}(Q^{(1)})$	$Q^{(2)}$	$\text{Rect}(Q^{(2)})$	$\text{sign}(Q)$	contributes to
$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$	$(-1)^{1+1} = 1$	$s_2[h_{21}]$
$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$	$(-1)^{1+0} = -1$	$s_{11}[h_{21}]$
$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$	$(-1)^{2+1} = -1$	$s_{11}[h_{21}]$
$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$	$(-1)^{2+0} = 1$	$s_2[h_{21}]$

### 2.3.4.3 Proof of theorem 1

In order to prove Theorem 1, we need to introduce basic properties of plethysm.

The plethysm of two symmetric functions can be defined using the following properties and power sum symmetric functions (Macdonald, 1998).

Let  $f, g, h$  be symmetric functions, and  $k, m$  be positive integers :

- $p_k[p_m] = p_{km}$
- $p_k[f + g] = p_k[f] + p_k[g]$
- $p_k[f \cdot g] = p_k[f] \cdot p_k[g]$
- $(f + g)[h] = f[h] + g[h]$
- $(f \cdot g)[h] = f[h] \cdot g[h]$ .

The proof that the sign  $(-1)^{j_i}$  of each  $Q_i$  is well defined rests in part on the following result introduced by Littlewood (Littlewood, 1950).

**Proposition 2.3.16 :** The plethysms  $s_2[h_n]$ ,  $s_{11}[h_n]$  in  $h_n^2$  decompose into the Schur basis as

$$s_2[h_n] = h_2[h_n] = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} s_{(2n-2j, 2j)},$$

$$s_{11}[h_n] = e_2[h_n] = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} s_{(2n-(2j+1), (2j+1))}.$$

*Idea of proof.* The proof follows directly from the transition matrix between the different basis, and basis properties of plethysm. It can be found in chapter 1, section 8, of Macdonald (Macdonald, 1998). For completeness, we include it here. The following formula is proved in Macdonald (Macdonald, 1998, Chapter I.8, example 9) :

$$p_2[h_n] = \sum_{j=0}^n (-1)^j s_{(2n-j, j)}$$

For  $s_2[h_n]$ , as  $s_2 = h_2 = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2$ , we have :

$$\begin{aligned} h_2[h_n] &= \left( \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2 \right) [h_n] \\ &= \frac{1}{2}p_1^2[h_n] + \frac{1}{2}p_2[h_n] \\ &= \frac{1}{2}h_n^2 + \frac{1}{2}p_2[h_n] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n s_{(2n-i, i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (-1)^i s_{(2n-i, i)} \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} s_{(2n-2j, 2j)} \end{aligned}$$

The other expression is obtained in the same way. ■

Applying this result in our context, we obtain :

**Corollary 2.3.17 :** Let  $t = (t_1, t_2)$  be a  $(n)^2$ -tuple of row tableaux,  $W_t$  the associated biword and  $(P, Q)$  the associated pair of tableaux of the same shape  $(2n - j, j)$ , with  $0 \leq j \leq n$ . The associated monomial  $x^P = x^t$  appears in the Schur function  $s_{(2n-j, j)}$  in  $h_n^2$ , which contributes to  $s_2[h_n]$  if  $\text{sign}(Q) = (-1)^j$  is positive, and to  $s_{11}[h_n]$  if  $\text{sign}(Q)$  is negative.

The other ingredient needed to prove our theorem is the following result :

**Proposition 2.3.18 :** Let  $g_1, g_2, \dots, g_n$  be any symmetric functions. Then :

$$(g_1 g_2 \dots g_n)^2 = s_2[g_1 g_2 \dots g_n] + s_{11}[g_1 g_2 \dots g_n],$$

where

$$s_2[g_1 g_2 \dots g_n] = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I| \text{ even}}} \prod_{i \in I} s_{11}[g_i] \cdot \prod_{j \in I^c} s_2[g_j],$$

$$s_{11}[g_1 g_2 \dots g_n] = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I| \text{ odd}}} \prod_{i \in I} s_{11}[g_i] \cdot \prod_{j \in I^c} s_2[g_j].$$

*Proof.* As  $g^2 = s_2[g] + s_{11}[g]$ , we have

$$\begin{aligned} (g_1 g_2 \dots g_n)^2 &= g_1^2 g_2^2 \dots g_n^2 \\ &= \prod_{i=1}^n (s_2[g_i] + s_{11}[g_i]) \end{aligned}$$

We will prove the result by induction on  $n$ .

For any symmetric functions  $g_1, g_2$ , it is possible to prove that  $s_2[g_1 g_2] = s_2[g_1] s_2[g_2] + s_{11}[g_1] s_{11}[g_2]$ , while  $s_{11}[g_1 g_2] = s_{11}[g_1] s_2[g_2] + s_2[g_1] s_{11}[g_2]$ , using only basic properties of plethysm (see for example (Macdonald, 1998, Chapter I.8, example 3)).

Suppose we have the result for  $n$  symmetric functions, and we show it holds for  $n + 1$  symmetric functions  $g_1, g_2, \dots, g_{n+1}$ .

Recall that the product of symmetric functions  $g_1, g_2, \dots, g_n$  is symmetric. Then

$$\begin{aligned}
s_2[g_1 g_2 \dots g_n g_{n+1}] &= s_2[g_1 g_2 \dots g_n] s_2[g_{n+1}] + s_{11}[g_1 g_2 \dots g_n] s_{11}[g_{n+1}] \\
&= \left( \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I| \text{ even}}} \prod_{i \in I} s_{11}[g_i] \cdot \prod_{j \in I^c} s_2[g_j] \right) s_2[g_{n+1}] \\
&\quad + \left( \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I| \text{ odd}}} \prod_{i \in I} s_{11}[g_i] \cdot \prod_{j \in I^c} s_2[g_j] \right) s_{11}[g_{n+1}] \\
&= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n+1\} \\ |I| \text{ even}}} \prod_{i \in I} s_{11}[g_i] \cdot \prod_{j \in I^c} s_2[g_j].
\end{aligned}$$

The proof for  $s_{11}[g_1 g_2 \dots g_n g_{n+1}]$  is similar. ■

*Proof of Theorem 1.* As seen in proposition 2.3.16, the shape  $(2\lambda_i - j_i, j_i)$  of the  $Q_i$  and the sign  $(-1)^{j_i}$  determine to which plethysm the associated Schur function  $s_{(2\lambda_i - j_i, j_i)}$  contributes in  $h_{\lambda_i}^2$ .  $Q$  then encodes that the associated Schur function  $s_\nu$  appears in the product

$$s_{(2\lambda_1 - j_1, j_1)} s_{(2\lambda_2 - j_2, j_2)} \dots s_{(2\lambda_\ell - j_\ell, j_\ell)} \text{ in } h_\lambda^2 = h_{\lambda_1}^2 h_{\lambda_2}^2 \dots h_{\lambda_\ell}^2 = \prod_{i=1}^{\ell} (s_2[h_{\lambda_i}] + s_{11}[h_{\lambda_i}]).$$

Let the set  $I = \{ i \mid j_i \text{ odd} \}$  record the anti-symmetric parts that have been picked. The sign of  $Q$  relies only on the parity of the cardinality of  $I$  :  $\text{sign}(Q) = \prod_i \text{sign}(Q_i) = \prod_i (-1)^{j_i} = (-1)^{|I|}$ .

Therefore, the sign of such a tableau  $Q$  is well defined and indicates the participation of the associated Schur function to the right 2-plethysm. ■

We can use the same ideas and notations to show a more general result. Let  $\mu$  be another partition, and consider the product  $s_\mu h_\lambda^2$ . Iteratively applying the Pieri rule, as in proposition 2.3.5, we have

$$s_\mu h_\lambda^2 = \sum_{\nu \vdash 2|\lambda| + |\mu|} K_{\lambda^2}^{\nu/\mu} s_\nu,$$

where  $K_{\lambda^2}^{\nu/\mu}$  counts the number of tableaux of shape  $\nu/\mu$  and content  $\lambda^2$ . We obtain the following corollary :

**Corollary 2.3.19 :** Let  $Q$  be a tableau of shape  $\nu/\mu$  and content  $\lambda^2$ , for  $\nu \vdash 2|\lambda| + |\mu|$ , and fixed partitions  $\mu$  and  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ . Let  $Q^{(i)}$  be the subtableau of  $Q$  with entries  $2i - 1$  and  $2i$ . Then,  $Q_i = \text{Rect}(Q^{(i)})$  is of shape  $(2\lambda_i - j_i, j_i)$ , for  $1 \leq i \leq \ell$ . Define the sign of  $Q$  to be  $\text{sign}(Q) = \prod_{i=1}^{\ell} (-1)^{j_i}$ .

The copy of  $s_\nu$  indexed by  $Q$  in  $s_\mu h_\lambda^2$  lies in  $s_\mu(s_2[h_\lambda])$  if  $\text{sign}(Q) = 1$ , and in  $s_\mu(s_{11}[h_\lambda])$  if  $\text{sign}(Q) = -1$ .

### 2.3.5 Associating a $\widetilde{Q}$ -tableau indexing a copy of $s_\nu$ in $e_\lambda^2$ to a plethysm

All of the above can be translated into the realm of elementary symmetric functions. We have seen that the definition of elementary symmetric functions is very similar to that of homogeneous symmetric functions. Their Pieri rules are conjugate, and so applying them iteratively give conjugate tableaux, as we'll see below, thus giving

$$e_\lambda^2 = \sum_{\nu} K_{\lambda^2}^{\nu'} s_\nu,$$

where  $K_{\lambda^2}^{\nu'}$  is the number of tableaux of shape  $\nu'$  and content  $\lambda^2$ .

We use a variation of the RSK algorithm to define the bijection of  $\lambda$ -tuples of column tableaux and pairs of "tableaux" of the same shape. This variant is called the RSK' algorithm in (Krattenthaler, 2005), but to avoid confusion with the conjugate, we call it the  $\widetilde{\text{RSK}}$  algorithm.

It works in the same way as the RSK described above, but is defined on *Burge (bi)words* : bi-words  $\widetilde{W}$  such that no bi-letters  $\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$  appears twice, and with bi-letters ordered such that the  $u_i$  weakly increase (as before), but for  $u_i = u_{i+1}$ ,  $v_i > v_{i+1}$ . See example 2.3.20, where  $\widetilde{W}_t$  is a Burge biword. The connection between Burge biwords and tableaux through the algorithm below has been described by Burge (Burge, 1974).

The pair of "tableaux" of the same shape  $(\tilde{P}, \tilde{Q}) = \widetilde{\text{RSK}}(\tilde{W}_t)$  obtained is such that the conjugate  $\tilde{Q}'$  of  $\tilde{Q}$  is a semistandard tableau. We call  $\tilde{Q}$  a conjugate tableau. The tableau  $\tilde{Q}'$  has shape conjugate to that of  $\tilde{P}$ . The  $\widetilde{\text{RSK}}$  algorithm establishes a bijection between Burge words and pairs tableaux/conjugate tableaux of the same shape. Note that the bijection between  $\lambda$ -tuples of column tableaux and Burge words follows the same construction we have seen before, with the top word being  $\lambda$ , and the bottom word being the reading words of the column tableaux.

**Example 2.3.20 :** Let  $t = \left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & & \\ \hline 2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 4 & 3 & 2 \\ \hline 5 & 6 & 5 & 4 \\ \hline 7 & 8 & & \\ \hline \end{array} \right)$  be a  $(5, 3)^2$ -tuple of column tableaux. Then

$$\tilde{W}_t = \left( \begin{array}{cccc} 11111 & 22222 & 333 & 444 \\ 75321 & 86431 & 532 & 421 \end{array} \right) \text{ and } (\tilde{P}, \tilde{Q}) = \left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 5 & \\ \hline 4 & 6 & & \\ \hline 5 & 8 & & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 2 & & \\ \hline 1 & 2 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \right).$$

We have that

**Corollary 2.3.21 :** Let  $t$  a  $\lambda^2$ -tuple of column tableaux,  $\tilde{W}_t$  the associated Burge word and  $(\tilde{P}, \tilde{Q}) = \widetilde{\text{RSK}}(\tilde{W}_t)$ . Let  $(\tilde{T}_i, \tilde{Q}_i) = \widetilde{\text{RSK}} \left( \begin{array}{cc} 2i - 1 \dots 2i - 1 & 2i \dots 2i \\ \text{word}(t_{2i-1}) & \text{word}(t_{2i}) \end{array} \right)$ , and  $\widetilde{Q}^{(i)}$  the subtableau of  $\tilde{Q}$  containing entries  $2i - 1$  and  $2i$ , for  $1 \leq i \leq \ell(\lambda)$ .

Then  $\tilde{Q}_i' = \text{Rect}((\widetilde{Q}^{(i)})')$ .

*Proof.* In order to get this result, we need to adapt Fulton's proof of Proposition 1 in chapter 5 of (Fulton, 1996) to  $\widetilde{\text{RSK}}$ . We can invert all bi-letters of a Burge word and rearrange them in lexicographical order (so that it is a biword). This gives a bottom word such that its reverse is Knuth-equivalent to the reading words of both  $\tilde{Q}_i'$  and  $(\widetilde{Q}^{(i)})'$ . The final rectification is applied on the conjugate of the conjugate tableau  $\widetilde{Q}^{(i)}$ , because jeu de taquin is not well defined otherwise. ■

This allows us to define a sign statistic on the  $\tilde{Q}$ -tableaux which will allow us to discriminate in which plethysm the associated copy of  $s_\nu$  lies :

**Theorem 1 (Part 2) :** Let  $\tilde{Q}$  be a conjugate tableau of shape  $\nu \vdash 2|\lambda|$  and content  $\lambda^2$ , for a fixed partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ . Let  $\tilde{Q}^{(i)}$  be the subtableau of  $\tilde{Q}$  with entries  $2i - 1$  and  $2i$ , for  $1 \leq i \leq \ell$ . Then  $\tilde{Q}_i = (\text{Rect}(\tilde{Q}^{(i)}))'$  is of shape  $(2^{\lambda_i - j_i}, 1^{2j_i})$ . Define the (conjugate) sign of  $\tilde{Q}$  to be  $\text{sign}_c(\tilde{Q}) = \prod_{i=1}^{\ell} (-1)^{j_i}$ .

The copy of  $s_\nu$  indexed by  $\tilde{Q}$  in  $e_\lambda^2$  lies in  $s_2[e_\lambda]$  if  $\text{sign}_c(\tilde{Q}) = 1$ , and in  $s_{11}[e_\lambda]$  if  $\text{sign}_c(\tilde{Q}) = -1$ .

This give us the following theorem, second part of theorem 2.

**Theorem 2 (Part 2) :** Consider the following numbers :

- $(K_{\lambda^2}^{\nu'})^+ = \#\{\tilde{Q}' \text{ tableau of shape } \nu' \text{ and content } \lambda^2 \mid \text{sign}_c(\tilde{Q}) = 1\}$
- $(K_{\lambda^2}^{\nu'})^- = \#\{\tilde{Q}' \text{ tableau of shape } \nu' \text{ and content } \lambda^2 \mid \text{sign}_c(\tilde{Q}) = -1\}$

Then we have :

$$s_2[e_\lambda] = \sum_{\nu'} (K_{\lambda^2}^{\nu'})^+ s_\nu,$$

$$s_{11}[e_\lambda] = \sum_{\nu'} (K_{\lambda^2}^{\nu'})^- s_\nu.$$

The proof that the sign of each  $Q_i$  is well-defined rests on the following result analogous to that seen in section 2.3.4.3, also introduced initially by Littlewood.

**Proposition 2.3.22 :** The plethysms  $s_2[e_n]$ ,  $s_{11}[e_n]$  in  $e_n^2$  decompose into the Schur basis as

$$s_2[e_n] = h_2[e_n] = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} s_{(2^{n-2j}, 1^{4j})},$$

$$s_{11}[e_n] = e_2[e_n] = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} s_{(2^{n-(2j+1)}, 1^{2(2j+1)})}.$$

*Proof.* The proof is very similar as the one in section 2.3.4.3 and relies on the following formulas, where the first is proven in MacDonal (Macdonald, 1998, Chapter I.2, example 8), and the second can be derived from the results of (Macdonald, 1998, Chapter I.8, examples 1 and 9) :

$$p_2[e_n] = \sum_{j=0}^n (-1)^j s_{2^{n-j}, 1^{2j}}$$

$$e_2 = \frac{1}{2} p_1^2 - \frac{1}{2} p_2 \quad \blacksquare$$

*Proof of Theorem 2 (Part 2).* As seen in 2.3.22, the shape  $(2^{\lambda_i - j_i}, 1^{2j_i})$  of the  $\widetilde{Q}_i$  and the (conjugate) sign  $(-1)^{j_i}$  determine to which plethysm the Schur function  $s_{(2^{\lambda_i - j_i}, 1^{2j_i})}$  contributes in  $e_{\lambda_i}^2$ .

For a given conjugate tableau  $\widetilde{Q}$  of shape  $\nu$  and content  $\lambda^2$ , this holds for each  $\widetilde{Q}_i$ , and  $\widetilde{Q}$  then encodes that the associated Schur function  $s_\nu$  appears in the product

$$s_{(2^{\lambda_1 - j_1}, 1^{2j_1})} s_{(2^{\lambda_2 - j_2}, 1^{2j_2})} \cdots s_{(2^{\lambda_\ell - j_\ell}, 1^{2j_\ell})}$$

$$\text{in } e_\lambda^2 = e_{\lambda_1}^2 e_{\lambda_2}^2 \cdots e_{\lambda_\ell}^2 = \prod_{i=1}^{\ell} (s_2[e_{\lambda_i}] + s_{11}[e_{\lambda_i}]).$$

Let the set  $I = \{ i \mid j_i \text{ odd} \}$  record the anti-symmetric parts that have been picked. The (conjugate) sign of  $\widetilde{Q}$  relies only on the parity of the cardinality of  $I$  as before :  $\text{sign}_c(\widetilde{Q}) = \prod_i \text{sign}_c(\widetilde{Q}_i) = \prod_i (-1)^{j_i} = (-1)^{|I|}$ . ■

As in section 3, we can generalize these ideas to the product  $s_\mu e_{\lambda^2}$  :

**Corollary 2.3.23 :** Let  $\widetilde{Q}$  be a conjugate tableau of shape  $\nu/\mu$  and content  $\lambda^2$ , for  $\nu \vdash 2|\lambda| + |\mu|$ , and fixed partitions  $\mu$  and  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ . Let  $\widetilde{Q}^{(i)}$  the subtableau of  $\widetilde{Q}$  with entries  $2i - 1$  and  $2i$ , for  $1 \leq i \leq \ell$  and  $\widetilde{Q}_i = (\text{Rect}(\widetilde{Q}^{(i)}))'$  of shape  $(2^{\lambda_i - j_i}, 1^{2j_i})$ . Define the (conjugate) sign of  $\widetilde{Q}$  to be  $\text{sign}_c(\widetilde{Q}) = \prod_{i=1}^{\ell} (-1)^{j_i}$ .

The copy of  $s_\nu$  indexed by  $\widetilde{Q}$  in  $s_\mu e_\lambda^2$  lies in  $s_\mu(s_2[e_\lambda])$  if  $\text{sign}_c(\widetilde{Q}) = 1$ , and in  $s_\mu(s_{11}[e_\lambda])$  if  $\text{sign}_c(\widetilde{Q}) = -1$ .



### 2.3.6 What's next ?

#### 2.3.6.1 Generalizing this approach

We are of course interested in investigating higher plethysms. To be able to generalize our approach, we need to use some known results, which are implicit in (Macdonald, 1998).

**Proposition 2.3.24 :** For any symmetric function  $g$ ,

$$g^n = \sum_{\mu \vdash n} f^\mu s_\mu[g],$$

where  $f^\mu$  is the number of standard tableaux of shape  $\mu$ .

*Proof.* We have that  $p_1[g] = g$  for any symmetric function  $g$ . Moreover,  $p_1^n = s_1^n = \sum_{\mu \vdash n} f^\mu s_\mu$ , which follows directly from the Pieri rule.

Using plethysm rules, we have :

$$g^n = (p_1[g])^n = p_1^n[g] = \left( \sum_{\mu \vdash n} f^\mu s_\mu \right)[g] = \sum_{\mu \vdash n} f^\mu s_\mu[g].$$

■

We can also use the Pieri rule recursively (or RSK/ $\widetilde{\text{RSK}}$ ) to get the decomposition of  $h_\lambda^n$  and  $e_\lambda^n$  into the basis of Schur functions :

**Proposition 2.3.25 :**  $(h_\lambda)^n = h_{\lambda^n} = \sum_{\nu \vdash n|\lambda} K_{\lambda^n}^\nu s_\nu$  and  $(e_\lambda)^n = e_{\lambda^n} = \sum_{\nu \vdash n|\lambda} K_{\lambda^n}^{\nu'} s_\nu$ , where the Kostka numbers  $K_{\lambda^n}^\nu$  count the number of tableaux of shape  $\nu$  and content  $\lambda^n$ .

All of the above constructions could then be generalized to  $n > 2$ .

For a tableau  $Q$  of shape  $\nu$  and content  $\lambda^n$ , we can consider the subtableaux  $Q^{(i)}$  of  $Q$  with entries  $ni - (n - 1), ni - (n - 2), \dots, ni$ , for  $1 \leq i \leq \ell(\lambda)$ , and their rectifications  $Q_i$ . If  $\nu_i = \text{shape}(Q_i)$ , and  $\nu = \text{shape}(Q)$ , then the Schur function  $s_\nu$  occurs in the product  $\prod_i s_{\nu_i}$ , each  $s_{\nu_i}$  indexed by  $Q_i$  in  $h_{\lambda_i}^n$ . Same thing goes to describe the tableaux counted by  $K_{\lambda^n}^{\nu'}$  using  $\widetilde{\text{RSK}}$ .

We would like to identify a statistic on the tableaux  $Q_i$  and  $Q$  to determine to which plethysms of  $h_{\lambda_i}^n$  and  $h_\lambda^n$  the associated Schur functions  $s_{\nu_i}$  and  $s_\nu$  contribute, and similarly for the plethysms of  $e_{\lambda_i}^n$  and  $e_\lambda^n$ . However, it proves to be extremely difficult.

For  $n = 3$ , we have that  $g^3 = s_3[g] + 2s_{21}[g] + s_{111}[g]$ . The changing multiplicities already make things more complicated. For  $h_n^3$ , and  $e_n^3$ , we have closed formulas for the number of copies of  $s_\nu$  that lie in  $s_3[h_n], s_{111}[h_n]$  (resp.  $s_3[e_n]$  and  $s_{111}[e_n]$ ), studied by Chen (Chen, 1982) and Thrall (Thrall, 1942). The leftover Schur functions would then be dispatched into the two copies of  $s_{21}[h_n]$  (resp.  $s_{21}[e_n]$ ). This can help pinpoint the right statistic to consider. We would however like to refine this by understanding more precisely which copies of  $s_\nu$  lie in each plethysm, eventually also distinguishing between the two copies of  $s_{21}[h_n]$  or  $s_{21}[e_n]$ , but we are far from this result.

### 2.3.6.2 Generalizing using ribbon tableaux

In this section, we describe another strategy which might be generalized successfully, and which allows to recover our results for  $n = 2$ .

The title of this article refers explicitly to that of Carré and Leclerc (Carré et Leclerc, 1995), where they describe the product of two Schur functions in terms of domino tableaux. They showed that the number of Yamanouchi domino tableaux of a certain shape  $I$  and content  $\lambda$  give the multiplicity  $c_{\mu\nu}^\lambda$  of  $s_\lambda$  in  $s_\mu s_\nu$ . When  $\mu = \nu$ , then  $I = (2\mu)^2 = (2\mu_1, 2\mu_1, 2\mu_2, 2\mu_2, \dots, 2\mu_\ell, 2\mu_\ell)$ . A Yamanouchi domino tableau has a Yamanouchi (or reverse lattice) reading word : the content of each suffix is a partition. Domino tableaux are read off by scanning rows left to right and bottom to top, reading dominoes on their first (or last) scanning.

For a square  $s_\mu^2$ , Carré and Leclerc showed that the parity of the cospin of the Yamanouchi domino tableaux determine whether the associated Schur function  $s_\lambda$  contributes to  $s_2[s_\mu]$  or  $s_{11}[s_\mu]$ , with the cospin equal the number of horizontal dominoes divided by two. Note that the cospin is more generally defined as the maximal number of vertical dominoes that can pave  $I$  minus the number of vertical dominoes in the domino tableau, divided by two.

For the first case which interest us, when considering  $h_n^2 = s_n^2$ , we have that the shape of the associated Yamanouchi domino tableau is  $I = (2n, 2n)$ . The only pavings and fillings of  $I = (2n, 2n)$  that result in Yamanouchi domino tableaux are illustrated in figure 2.1. They consist of a sequence of  $2n - 2j$  vertical dominos filled with ones, followed by  $j$  pairs of stacked horizontal dominoes, filled with a one on top, and a two on the bottom. The weight of such a Yamanouchi tableau is then  $\mu = (2n - j, j)$ , and its cospin is  $j$ . By the result of Carré and Leclerc, there is a unique copy of  $s_\mu$  in the decomposition of  $h_n^2 = s_n^2$ , and it contributes to the symmetric part of the square if  $j$  is even, and to its anti-symmetric part if  $j$  is odd. This corresponds to the sign attribution used in theorem 2 (part 1) when  $\lambda = n$ .

For the second case, when considering  $e_n^2 = s_{1n}^2$ ,  $I = (2^{2n})$ . The only pavings and fillings of  $I$  that result in Yamanouchi domino tableaux are also illustrated in figure 2.1. Built top to bottom, they consist of a sequence of  $n - j$  couples of vertical dominoes filled with ones, then two's, etc. till  $n - j$ , followed by  $2j$  horizontal dominoes, filled with  $j + 1$ , etc. till  $n + j$ . The weight of such a Yamanouchi tableau is then  $\mu = (2^{n-j}, 1^{2j})$ , and its cospin is  $j$ . By the result of Littlewood, there is a unique copy of  $s_\mu$  in the decomposition of  $e_n^2 = s_{1n}^2$ , and it contributes to the symmetric part of the square if  $j$  is even, and to its anti-symmetric part if  $j$  is odd (Littlewood, 1950). This corresponds to the sign attribution used in theorem 2 (part 2) when  $\lambda = n$ .

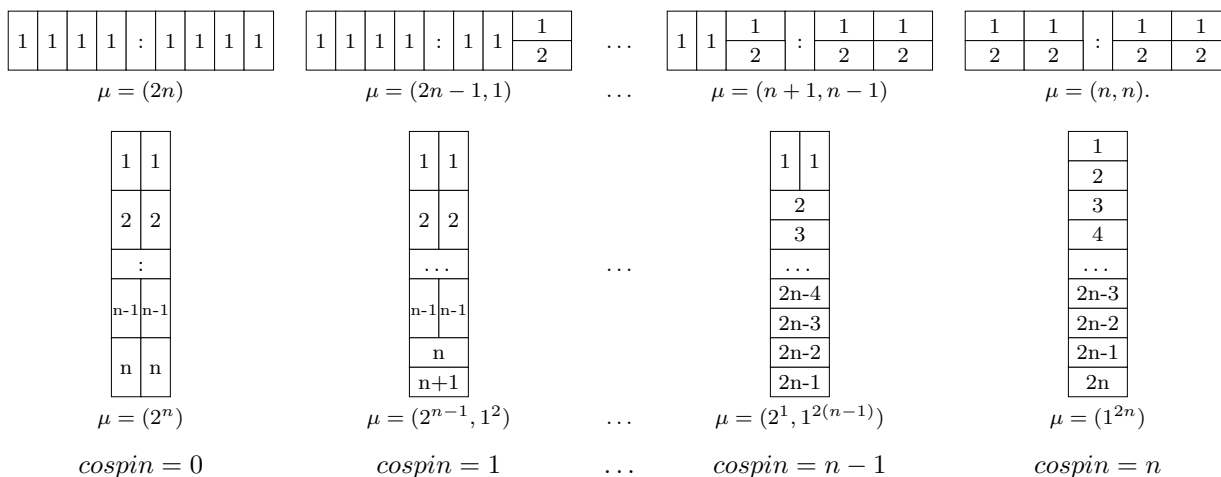


FIGURE 2.1: Yamanouchi domino tableaux of shape  $(2n, 2n)$  and  $(2^{2n})$

We retrieve theorem 2 (part 1, for  $h_\lambda$ ) by considering all possible  $k$ -tuples  $(D_1, D_2, \dots, D_k)$  of such Yamanouchi domino tableaux of respective shape  $(2\lambda_i, 2\lambda_i)$  for  $1 \leq i \leq k = \ell(\lambda)$ . Denoting the total weight of such a  $k$ -tuple by the sum of the respective weights  $wt(D_1, D_2, \dots, D_k) = wt(Y_1) + wt(Y_2) + \dots + wt(Y_k)$ , and its sign by  $sign(D_1, D_2, \dots, D_k) = \prod_{i=1}^k (-1)^{cospin(Y_i)}$ , we have

$$s_2[h_\lambda] = \sum_{\nu} (K_{\lambda^2}^{\nu})^+ s_{\nu} = \sum_{\nu} \sum_{\substack{(D_1, D_2, \dots, D_k) \text{ of respective shapes } (2\lambda_i, 2\lambda_i), \\ \text{such that } wt(D_1, D_2, \dots, D_k) = \nu \text{ and} \\ sign(D_1, D_2, \dots, D_k) = 1}} s_{\nu},$$

$$s_{11}[h_\lambda] = \sum_{\nu} (K_{\lambda^2}^{\nu})^- s_{\nu} = \sum_{\nu} \sum_{\substack{(D_1, D_2, \dots, D_k) \text{ of respective shapes } (2\lambda_i, 2\lambda_i), \\ \text{such that } wt(D_1, D_2, \dots, D_k) = \nu \text{ and} \\ sign(D_1, D_2, \dots, D_k) = -1}} s_{\nu}.$$

The corresponding result for  $e_\lambda$  (part 2 of theorem 2) is obtained by considering all possible  $k$ -tuples of  $k$  Yamanouchi domino tableaux of respective shapes  $(2\lambda_i, 2\lambda_i)' = (2^{2\lambda_i})'$ , with weight and sign defined as above.

$$s_2[e_\lambda] = \sum_{\nu} (K_{\lambda^2}^{\nu'})^+ s_{\nu} = \sum_{\nu} \sum_{\substack{(D_1, D_2, \dots, D_k) \text{ of respective shapes } (2\lambda_i, 2\lambda_i)', \\ \text{such that } wt(D_1, D_2, \dots, D_k) = \nu \text{ and} \\ sign(D_1, D_2, \dots, D_k) = 1}} s_{\nu},$$

$$s_{11}[e_\lambda] = \sum_{\nu} (K_{\lambda^2}^{\nu'})^- s_{\nu} = \sum_{\nu} \sum_{\substack{(D_1, D_2, \dots, D_k) \text{ of respective shapes } (2\lambda_i, 2\lambda_i)', \\ \text{such that } wt(D_1, D_2, \dots, D_k) = \nu \text{ and} \\ sign(D_1, D_2, \dots, D_k) = -1}} s_{\nu}.$$

This could be generalized to higher plethysms. We know, thanks to Stanton and White (Stanton et White, 1985), that  $r$ -tuples of tableaux are in bijection with  $r$ -ribbon tableaux (domino tableaux are 2-ribbon tableaux). In particular,  $(m)^n$ -tuples of row (resp. column) tableaux are in bijection with  $r$ -ribbon tableaux of shape  $(m \cdot n)^n$  (resp.  $(n)^{m \cdot n}$ ). Could we then define a Yamanouchi-like property and a cospin-like statistic that could help solve the plethystic decomposition of  $h_m^n$  and  $e_m^n$ ? Could this be extended even to  $h_\lambda^n$ ,  $e_\lambda^n$  or  $s_\lambda^n$ ?

### 2.3.7 Acknowledgements

The authors are grateful to Franco Saliola for his support. FMG received support from NSERC.

**CHAPITRE 3**  
**3-PLÉTHYSMES DE FONCTIONS SYMÉTRIQUES HOMOGÈNES ET**  
**ÉLÉMENTAIRES**

3.1 Résumé de l'article

Cet article est la suite logique du précédent. Il vise à décrire de façon combinatoire les coefficients des fonctions de Schur apparaissant dans la décomposition (dans cette base) des pléthysmes composant les cubes  $h_\lambda^3 = s_3[h_\lambda] + 2s_{2,1}[h_\lambda] + s_{111}[h_\lambda]$  et  $e_\lambda^3 = s_3[e_\lambda] + 2s_{2,1}[e_\lambda] + s_{111}[e_\lambda]$ .

On introduit les concept généraux d'*attribution pléthystique (de type)*, et de *type*, pour décrire les applications  $SSYT(-, \lambda^m) \rightarrow SYT_m$ , où les tableaux standards de  $SYT_m$  indiquent les pléthysmes apparaissant dans la  $m^{\text{ième}}$  puissance d'une fonction symétrique  $g$ , ici  $h_\lambda$  ou  $e_\lambda$ . Dans le cas particulier où  $m = 3$ , cette application envoie chaque tableau de remplissage  $\lambda^3$  sur un tableau standard à trois cases indiquant les pléthysmes ci-dessus, son type. On veut que, si  $t \in SYT_m$ ,

$$s_{\text{forme}(t)}[h_\lambda] = \sum_{\substack{T \in SSYT(-, \lambda^m) \\ \text{type}(T)=t}} s_{\text{forme}(T)}.$$

On commence par étudier le cas  $\lambda = (n)$  pour  $m > 2$ . On montre des règles générales que doivent respecter les attributions pléthystiques pour n'importe quel  $m$ , et une récursion permettant de décrire les attributions pour  $m + 1$  à partir de celles pour  $m$ . Elles sont démontrées à l'aide de résultats connus sur le pléthysme et les fonctions symétriques. Ces règles sont les suivantes.

**Theorem 3 (Règles de stabilité pléthystique) :**

1.  $\text{type}(T \downarrow_\ell) = \text{type}(T) \downarrow_\ell$ , où  $T \downarrow_\ell$  est le sous-tableau de  $T$  contenant les entrées 1 à  $\ell$ ,
2.  $\text{type} \left( \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline m \\ \hline \end{array} \vee T \right) = \text{type}(T)'$ , où  $\vee$  est la concaténation horizontale de tableaux, avec réordonnement des entrées, et  $t'$  est le tableau conjugué obtenu par la conjugaison de  $t$ ,
3.  $\text{type} \left( T \vee \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \cdots & m \\ \hline \end{array} \right) = \text{type}(T)$ , et
4.  $\text{type} \left( T \vee \begin{array}{|c|c|c|} \hline m+1 & \cdots & m+1 \\ \hline \end{array} \right) = \text{type}(T) \vee \begin{array}{|c|} \hline m+1 \\ \hline \end{array}$ .

La première règle décrit le processus récursif énoncé plus haut, où ajouter une bande horizontale de  $n$  entrées  $m + 1$  à un tableau de remplissage  $(n)^m$  a comme effet d'ajouter une cellule de remplissage  $m+1$  à son type. La manière de le faire demeure toutefois généralement non déterminée, à l'exception du cas où la bande horizontale ajoutée est exclusivement dans la première ligne du tableau, auquel cas l'effet est donné par la quatrième, et dernière, règle.

On démontre qu'une telle attribution pléthystique existe pour tous les tableaux de contenu  $(n)^m$ , bien que la description explicite d'une telle application demeure un problème ouvert pour  $m \geq 4$ .

On développe ensuite sur le cas particulier  $m = 3$ , pour lequel certains résultats sont connus. En effet, les règles de Chen et Thrall, décrites à la section 3.4.6, donnent une formule pour les coefficients apparaissant dans la décomposition de Schur des pléthysmes  $s_\mu[h_n]$  pour  $\mu \vdash n$ . L'objectif est alors de donner une interprétation combinatoire de ces résultats, d'une manière qui soit généralisable aux cas  $m > 3$ , pour lesquels nous ne savons presque rien. Nous donnons l'attribution pléthystique explicite ci-dessous pour le cas  $m = 3$ , et démontrons qu'il s'agit de l'attribution la plus simple et cohérente qu'on puisse choisir, et devrait donc en conséquent être retenue pour les constructions récursives subséquentes, pour  $m > 3$ .

**Théorème 3 :** Soit  $T$  un tableau de forme  $(3n - j, j)$  et de remplissage  $(n)^3$ , avec  $\kappa_2$  entrées 2, et  $k_{3,2}$  entrées 3, sur sa deuxième ligne. Définissons le type de  $T$  de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{llllll} \boxed{1\ 2\ 3} & \text{si } \kappa_2 \text{ est pair} & \text{ET} & 2\kappa_2 \geq k_{3,2} & \text{ET} & k_{3,2} \equiv_4 \{0, 1\} \\ \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} & \text{si } \kappa_2 \text{ est impair} & \text{ET} & 2\kappa_2 \geq k_{3,2} & \text{ET} & k_{3,2} \equiv_4 \{2, 3\} \\ \boxed{1\ 2} \\ \boxed{3} & \text{si } \kappa_2 \text{ est pair} & \text{ET SI SOIT} & 2\kappa_2 < k_{3,2} & \text{, SOIT} & k_{3,2} \equiv_4 \{2, 3\} \\ \boxed{1\ 3} \\ \boxed{2} & \text{si } \kappa_2 \text{ est impair} & \text{ET SI SOIT} & 2\kappa_2 < k_{3,2} & \text{, SOIT} & k_{3,2} \equiv_4 \{0, 1\} \end{array} \right. .$$

Le nombre de tableaux de chaque type est alors égal aux cardinalités données par les règles de Chen, et l'attribution pléthystique respecte les règles de stabilité pléthystique. Le coefficient de  $s_\nu$  dans le pléthysme  $s_{\text{forme}(t)}[h_n]$  indexé par le tableau standard  $t$  est alors donné par

$$c_\nu^{(t)} = |\{T \in \text{SSYT}(\nu, (n)^3) \mid \text{type}(T) = t\}|.$$

Pour obtenir cette attribution pléthystique, on utilise une représentation visuelle des tableaux de remplissage  $(n)^3$  en terme de points à coefficients entiers sur un polytope, et dont les coordonnées sont obtenues par des statistiques sur des tableaux de 3-rubans de Yamanouchi. Ces derniers sont définis à la section 3.4.7. L'attribution pléthystique des tableaux de forme  $(3n - j, j)$  peut alors être vue comme une coloration des points entiers sur l'union de polytopes  $P_n$ . En particulier, les tableaux (points) de même forme  $(3n - j, j)$  sont reliés par des transformations, et forment le  $j$ -brin ( $j$ -strand). On peut donc étudier les colorations valides le long de ces  $j$ -brins. Tout ceci est illustré à la figure 3.5, dans le cas  $n = 10$ .

On montre ensuite comment ces résultats peuvent être étendus à  $h_\lambda$  par une fonction de Kronecker. Ces fonctions découlent des coefficients de Kronecker, qui sont eux-mêmes encore peu compris. Les fonctions et coefficients de Kronecker sont décrits en détails à la section 3.3. Cela nous permet alors d'attribuer un type aux tableaux de remplissage  $\lambda^3$ . Finalement, les résultats sont étendus à  $e_n$  et  $e_\lambda$  à l'aide de l'involution sur les fonctions symétriques  $\omega$  vue à la section 1.2.2. On peut de plus étendre cette approche pour tout  $m$  :

**Théorème 4 :** Supposons qu'une attribution pléthystique de  $h_n^m$  soit connue pour tout  $n$  et pour  $m$  fixé. Supposons de plus qu'une application de Kronecker  $F_{m,k} : \text{SYT}_m^k \rightarrow \text{SYT}_m$  soit connue. Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  un partage et  $T$  un tableau de contenu  $\lambda^m$ . Si la décomposition de  $T$  (pour  $m$ ) est  $\text{Dec}_m(T) = (T_1, \dots, T_k)$ , posons  $t_i$  le type de  $T_i$ , qui est connu par hypothèse. Définissons alors  $t = F_{m,k}(t_1, \dots, t_k)$  comme le type de  $T$ . Alors

$$s_{\text{forme}(t)}[h_\lambda] = \sum_T s_{\text{forme}(T)},$$

où la somme est sur l'ensemble des tableaux  $T$  de contenu  $\lambda^m$  ayant le type  $t$ .

Notons que la décomposition  $\text{Dec}_m(T) = (T_1, \dots, T_k)$  de  $T$  en un tuple de tableaux correspond à celle décrite dans le chapitre précédent.

### 3.2 Place de cet article dans la littérature et contributions originales

Le cas  $m = 3$  qui nous intéresse ici a été étudié par Chen (Chen, 1982) et Thrall (Thrall, 1942), qui ont donné des formules pour les coefficients apparaissant dans la décomposition de Schur de pléthysmes  $s_\mu[h_n]$  pour  $\mu$  un partage de 3. Les preuves de ces formules exploitent des résultats de la théorie de la représentation, qui deviennent rapidement difficiles à généraliser pour des partages de 4, 5, etc., voir par exemple (Howe, 1987).

Cet article donne donc une interprétation combinatoire de ces coefficients en terme de tableaux, interprétation qui est implicite dans l'article de Thrall, mais absente de celui de Chen. De plus, nous utilisons divers résultats de stabilité pléthystique de de Boeck (de Boeck, 2015), Brion (Brion, 1993), et de Boeck, Paget et Wildon (de Boeck *et al.*, 2021) afin de donner une description explicite des tableaux associés aux pléthysmes, en différenciant ici entre les deux copies  $s_{21}[h_n]$ , ce qui est également une contribution nouvelle.

La description de règles d'attribution de types et d'un processus récursif pour n'importe quel  $m$  sont des contributions particulièrement importantes, puisqu'elles permettent la généralisation à des pléthysmes d'ordre supérieur, ce qui est le prochain objectif.

### 3.3 Autres notations et définitions particulières à l'article

Dans cet article, en plus des notions introduites précédemment, nous utilisons aussi les coefficients de Kronecker, et les fonctions de Kronecker qui peuvent en être déduites. Nous les introduirons donc ici.

Les coefficients de Kronecker sont les coefficients de  $s_\mu$  dans le *produit interne*  $s_\alpha * s_\beta$ , défini dans la section 7 du chapitre 1 du livre de référence *Symmetric functions and Hall polynomials* de Macdonald (Macdonald, 1998). Les propriétés axiomatiques du pléthysme nous disent que si  $f = \sum_\mu c_\mu s_\mu$ , alors  $f[g] = \sum_\mu c_\mu s_\mu[g]$ . On aimerait toutefois avoir une décomposition de la forme  $f[g] = \sum_{\mu,\lambda} c_\mu^\lambda s_\mu[s_\lambda]$ . C'est la décomposition de Kronecker qui permet alors cette décomposition.



**Proposition 3.3.1 :** Pour un partage  $\mu \vdash m$  et deux fonctions symétriques  $f_1, f_2$ , alors :

$$s_\mu[f_1 f_2] = \sum_{\alpha, \beta \vdash m} g_{\alpha, \beta}^\mu s_\alpha[f_1] s_\beta[f_2],$$

où les  $g_{\alpha, \beta}^\mu$  sont les *coefficients de Kronecker*.

Notons que les coefficients de Kronecker ne sont pas encore très bien compris. Il existe des formules pour les calculer utilisant les caractères irréductibles, ce qui peut demander une grande puissance de calcul pour de grandes valeurs  $m$ . Toutefois, ils échappent à une interprétation combinatoire pour l'instant. Notons aussi que les coefficients de Kronecker dépendent des formes, ou partages,  $\alpha, \beta$  et  $\mu$ , mais pas des remplissages possibles de ces formes.

Nous introduisons la notion de fonctions de Kronecker, qui est nouvelle, de fonctions  $SYT_m^2 \rightarrow SYT_m$  définies à partir de ces coefficients de Kronecker. Autrement dit, on envoie une paire de tableaux standards sur un unique tableau standard. On dira qu'une telle fonction est une *fonction de Kronecker* si le nombre de paires de tableaux de formes respectives  $\alpha, \beta$  étant envoyé sur un tableau de forme  $\mu$  est exactement le coefficient de Kronecker  $g_{\alpha, \beta}^\mu$ . Il y a évidemment plusieurs façons de définir une telle application dès qu'il y a plusieurs remplissages standards possibles pour une même forme. On peut imaginer que cette façon de voir les coefficients de Kronecker pourrait aider à mieux les comprendre, et permettre des avancées dans ce domaine.

Dans le cas particulier  $m = 2$ , pour chaque forme  $\mu \vdash 2$ , il y a un unique remplissage standard. Ainsi, la fonction de Kronecker pour  $m = 2$  est entièrement déterminée, et décrite par les pré-images ci-dessous.

$$\begin{aligned} F_{2,2}^{-1}(\boxed{12}) &= \left\{ (\boxed{12}, \boxed{12}), \left( \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \right) \right\}; \\ F_{2,2}^{-1}\left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}\right) &= \left\{ \left( \boxed{12}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \right), \left( \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \boxed{12} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Par contre, lorsque  $m = 3$ , il y a plus d'un remplissage possible pour certaines formes. Ainsi, il est possible de décrire une fonction de Kronecker, mais elle ne sera pas uniquement déterminée. On peut toutefois restreindre les choix possibles en décrivant des propriétés désirées.

La fonction de Kronecker donnée par les pré-images ci-dessous a la propriété que la parité du nombre d'entrées 2 sur la deuxième ligne est la même pour les paires envoyées sur  $\boxed{123}$  et  $\boxed{\frac{12}{3}}$ , et inverse pour les paires envoyées sur  $\boxed{\frac{1}{2}}$  et  $\boxed{\frac{13}{2}}$ . Il y toutefois quatre fonctions de Kronecker qui respectent cette condition, obtenues en interchangeant les paires de tableaux de forme (2, 1) entre les types de même *parité*, soit entre  $\boxed{123}$  et  $\boxed{\frac{12}{3}}$ , et entre  $\boxed{\frac{13}{2}}$  et  $\boxed{\frac{1}{2}}$ .

$$\begin{aligned}
F_{3,2}^{-1}(\boxed{123}) &= \left\{ \left( \boxed{123}, \boxed{123} \right), \left( \boxed{\frac{12}{3}}, \boxed{\frac{12}{3}} \right), \left( \boxed{\frac{1}{2}}, \boxed{\frac{1}{2}} \right) \right\}; \\
F_{3,2}^{-1}(\boxed{\frac{12}{3}}) &= \left\{ \left( \boxed{\frac{12}{3}}, \boxed{123} \right), \left( \boxed{123}, \boxed{\frac{12}{3}} \right), \left( \boxed{\frac{1}{2}}, \boxed{\frac{13}{2}} \right), \left( \boxed{\frac{13}{2}}, \boxed{\frac{1}{2}} \right), \left( \boxed{\frac{13}{2}}, \boxed{\frac{13}{2}} \right) \right\}; \\
F_{3,2}^{-1}(\boxed{\frac{13}{2}}) &= \left\{ \left( \boxed{\frac{13}{2}}, \boxed{123} \right), \left( \boxed{123}, \boxed{\frac{13}{2}} \right), \left( \boxed{\frac{1}{2}}, \boxed{\frac{12}{3}} \right), \left( \boxed{\frac{12}{3}}, \boxed{\frac{1}{2}} \right), \left( \boxed{\frac{13}{2}}, \boxed{\frac{12}{3}} \right) \right\}; \\
F_{3,2}^{-1}(\boxed{\frac{1}{2}}) &= \left\{ \left( \boxed{123}, \boxed{\frac{1}{2}} \right), \left( \boxed{\frac{12}{3}}, \boxed{\frac{13}{2}} \right), \left( \boxed{\frac{1}{2}}, \boxed{123} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

La condition ci-haut se formalise par le fait que, si une paire de tableaux  $(t_1, t_2) \in \text{SYT}_m^2$  apparaît dans la préimage (pour  $F_{m,2}$ ) d'un tableau standard  $t$ , alors la paire de tableaux standards de  $\text{SYT}_{m-1}$  obtenus en retirant l'entrée  $m$  des tableaux  $t_1, t_2$  se retrouve dans la préimage (par  $F_{m-1,2}$ ) du tableau standard de  $\text{SYT}_{m-1}$  obtenu de  $t$  en retirant son entrée  $m$ . Cela donne alors une construction récursive pour les fonctions de Kronecker. Malheureusement, cela est encore insuffisant pour entièrement déterminer une application de Kronecker, tel que vu avec le cas  $m = 3$ .

Dans le cas  $m = 4$ , il y a dix tableaux standards, donc 100 paires distinctes de tableaux à distribuer en dix sous-ensembles, de manière à respecter les coefficients de Kronecker. En effet, toutes les paires de tableaux apparaîtront une et une seule fois dans un sous-ensemble. Il est possible de décrire une telle fonction de Kronecker, mais plusieurs sont possibles. On voit également que le nombre de fonctions de Kronecker à considérer croît très rapidement.

Il serait donc intéressant d'étudier les propriétés que devraient respecter les fonctions de Kronecker, peut-être par des règles similaires à celle énoncée plus haut, afin de restreindre les possibilités.

### 3.4 3-plethysms of homogeneous and elementary symmetric functions (Maas-Gariépy et Tétrault, 022b)

#### 3.4.1 Abstract

We introduce the notion of *plethystic type* of tableaux as a method to understand coefficients of Schur functions appearing in plethysms  $s_\nu[h_\lambda]$  and  $s_\nu[e_\lambda]$ , for any partitions  $\lambda$  and  $\nu$ . We begin by establishing some general properties of the plethystic type of a tableau, and then specialize to the case where  $\nu$  is a partition of 3. We use results on tableaux, ribbon tableaux and integer points in polytopes to understand the case where  $\nu$  is a partition of 3 and  $\lambda$  has one part. We then use a *Kronecker map* to extend these results to any partition  $\lambda$ . In this article, we explicitly describe the plethystic decomposition of  $g^m$  when  $m = 3$  and  $g$  is either a homogeneous symmetric function  $h_\lambda$  or an elementary symmetric function  $e_\lambda$ . We also give partial advances on the general question, for any  $m$ .

#### 3.4.2 Introduction

Plethysm of symmetric functions is an operation which arises naturally in representation theory as the character of a composition of representations. In general, we are interested in understanding plethysms  $f[g]$  for any two symmetric functions  $f, g$ , which are characters of polynomial representations of the general linear group. The plethysm  $f[g]$  is also a character, so we are interested in understanding its decomposition into the basis of Schur functions  $s_\lambda$ , as these are the irreducible characters of the general linear group, indexed by partitions  $\lambda$ . The general problem can be reduced (slightly) to that of understanding plethysms  $s_\nu[g]$  for any Schur function  $s_\nu$ , but this remains extremely difficult, and an open problem. Our approach exploits the classical decomposition into irreducibles of the  $m^{\text{th}}$ -tensor power representation. Under composition, we obtain a decomposition of the  $m^{\text{th}}$ -tensor power of any representation. Coined as plethysm of characters, this gives the symmetric function identity  $g^m = \sum_{\nu \vdash m} f^\nu s_\nu[g]$ , where  $f^\nu$  is the number of standard tableaux of shape  $\nu$ . We call the second part of this equation the *plethystic decomposition* of  $g^m$ . The study of powers of symmetric functions, of their Schur decomposition (ie their decomposition in the basis of Schur functions) and plethystic decomposition, can then enlighten us in our quest to understand plethysm.

We can restate the formula above by summing over all standard tableaux with  $m$  cells, which we denote  $SYT_m$ , so that each plethysm  $s_\nu[g]$  in  $g^m$  corresponds to a standard tableau. If  $g$  is a homogeneous symmetric function  $h_n$ , we have the Schur decomposition and plethystic decomposition

$$h_n^m = \sum_{\mu \vdash mn} K_{(n)^m}^\mu s_\mu = \sum_{t \in SYT_m} s_{\text{shape}(t)}[h_n]. \quad (3.1)$$

The coefficients  $K_{(n)^m}^\mu$  are Kostka numbers and give the cardinality of sets of semistandard tableaux with given shape  $\mu$  and content  $(n)^m = \underbrace{(n, \dots, n)}_{m \text{ times}}$ . This first equality is described by the Pieri rule, recalled in section 3.4.3. We consider the set of semistandard tableaux of content  $(n)^m$  of any shape, noted  $SSYT(-, (n)^m)$ , and define a map  $\text{type}: SSYT(-, (n)^m) \rightarrow SYT_m$  to assign to any semistandard tableau of content  $(n)^m$  a standard tableau of content  $(1)^m$ , such that it satisfies

$$s_{\text{shape}(t)}[h_n] = \sum_{\substack{\text{content}(T)=(n)^m \\ \text{type}(T)=t}} s_{\text{shape}(T)}.$$

We prove such a map must satisfy the following properties, for  $n$  fixed :

- $\text{type}(T \downarrow_\ell) = \text{type}(T) \downarrow_\ell$ , where  $T \downarrow_\ell$  is the subtableau of  $T$  with entries 1 to  $\ell$ ,
- $\text{type} \left( \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline m \\ \hline \end{array} \vee T \right) = \text{type}(T)'$ , where  $\vee$  is the horizontal concatenation of tableaux and  $t'$  is the conjugate tableau obtained by reflecting entries along the main diagonal,
- $\text{type} \left( T \vee \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \cdots & m \\ \hline \end{array} \right) = \text{type}(T)$ , and
- $\text{type} \left( T \vee \begin{array}{|c|c|c|} \hline m+1 & \cdots & m+1 \\ \hline \end{array} \right) = \text{type}(T) \vee \begin{array}{|c|} \hline m+1 \\ \hline \end{array}$ , with  $n$  cells of content  $m+1$  added to  $T$ .

Furthermore, we prove the existence of such a map for all tableaux of content  $(n)^m$ , but describing the map explicitly remains an open problem for  $m \geq 4$ .

We call the image of a semistandard tableau under such a map its (*plethystic*) *type*, and the explicit description of such a map, a (*plethystic*) *type attribution*. We describe the possible type attributions for  $m = 3$ , and show which is the simplest and most consistent (see theorem 3). We use the  $\omega$  involution on symmetric functions, recalled in section 3.4.3, to define the corresponding

plethystic type attribution for  $e_n^3$ , and define a *Kronecker map* to extend this further to  $h_\lambda^3$  and  $e_\lambda^3$ . All results in this article can be used to determine plethystic types for  $m > 3$ , as we show there is a recursive structure to type attributions.

The article is organised as follows. After a review of basic notions about symmetric functions in section 3.4.3, we explain our combinatorial approach of plethystic type in section 4.3.8, state general results in section 3.4.5, and apply them to the case  $h_n^3$  in section 3.4.6. There are known formulas for the coefficients appearing in the plethysms above in the case  $m = 3$ , known as Chen's formulas (Chen, 1982), for which we give an explicit combinatorial description. All these rules are not sufficient to determine a type attribution, so we establish results on ribbon tableaux and integer points in polytopes in sections 3.4.7 and 3.4.8, which allow us to define the type attribution for  $h_n^3$  in section 3.4.9. By using the  $\omega$  map, we describe the decomposition of  $e_n^3$  in section 3.4.10. Finally, using properties of plethysm, Kronecker coefficients and jeu de taquin, we use these results to understand the decomposition of plethysms of  $h_\lambda^3$  and  $e_\lambda^3$  in section 3.4.11. This last part extends the results of (Maas-Gariépy et Tétreault, 022a), which introduced the description of the plethystic decomposition of  $h_\lambda^2$  and  $e_\lambda^2$  in terms of plethystic type of tableaux.

### 3.4.3 Background

As much as possible, results, definitions and notations are introduced when needed. The following gives an overview of the notations and the definitions that are used throughout the article. We refer to (Fulton, 1996), (Sagan, 2001) or (Stanley, 2012) for more detailed descriptions.

Recall that partitions are weakly decreasing sequences of integers. If all parts of a partition  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  add up to  $n$ , we say that  $\lambda$  is a partition of  $n$ , denoted  $\lambda \vdash n$ . We identify partitions with their diagrams, the left- and top-justified arrays of boxes with  $\lambda_i$  cells in the  $i^{\text{th}}$  row. We can also form skew partitions  $\lambda/\mu$  by removing the cells of  $\mu$  from  $\lambda$ , if  $\mu$  is contained in  $\lambda$ . The *conjugate partition* of  $\lambda$ , denoted  $\lambda'$ , is the partition obtained from  $\lambda$  by reflecting it along its main diagonal, exchanging lengths of rows and columns.

A filling of the cells of a diagram  $\lambda$  by positive integers is called a *tableau* of shape  $\lambda$ . We say

that a tableau  $T$  is *semistandard* if its rows weakly increase from left to right, and its columns strictly increase from top to bottom. Unless otherwise stated, we use the word tableau to mean semistandard tableau further on, and we denote by  $\text{SSYT}(\lambda)$  the set of tableaux of shape  $\lambda$ . If every entry from 1 to  $n$  appears exactly once, we say that a tableau  $t$  is *standard*. We use lowercase letters to distinguish them from semistandard tableaux.

The *content* of a tableau  $T$  is the sequence  $(\beta_1, \beta_2, \dots)$ , where  $\beta_i$  is the number of entries  $i$  in  $T$ . For  $x = (x_1, x_2, \dots)$ , the monomial associated to  $T$  is  $x^T = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 3 & 4 & 6 & & \\ \hline \end{array} \in \text{SSYT}(5, 5, 3), \text{ and } x^T = x_1^3 x_2^3 x_3^4 x_4^2 x_6.$$

FIGURE 3.1: Tableau  $T$  of shape  $(5, 5, 3)$ , content  $(3, 3, 4, 2, 0, 1)$  and associated monomial  $x^T$ .

*Schur functions*  $s_\lambda$  are defined as the sum of the monomials associated to tableaux of same shape  $\lambda$  :  $s_\lambda = \sum_{T \in \text{SSYT}(\lambda)} x^T$ . *Homogeneous symmetric functions*  $h_\lambda$  are defined as the product  $h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots h_{\lambda_k}$ , where  $h_n = s_{(n)}$ . *Elementary symmetric functions*  $e_\lambda$  are defined as the product  $e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots e_{\lambda_k}$ , where  $e_n = s_{(1)^n}$ . The sets  $\{s_\lambda \mid \lambda \text{ partition}\}$ ,  $\{h_\lambda \mid \lambda \text{ partition}\}$  and  $\{e_\lambda \mid \lambda \text{ partition}\}$  are three bases of the *algebra of symmetric functions* : formal sums on a countable set of variables  $x = (x_1, x_2, \dots)$ , with coefficients in  $\mathbb{C}$ , such that exchanging any two variables gives back the original formal sum. In particular, there is a scalar product  $\langle, \rangle$  on this algebra for which Schur functions are orthonormal.

We use the *Pieri rule* to describe the product by homogeneous symmetric functions  $h_n$  : for any partition  $\mu$  and positive integer  $n$ ,  $s_\mu h_n = \sum_{\nu} s_\nu$ , where the sum is over all partitions  $\nu$  such that  $\nu/\mu$  has  $n$  cells and does not have two cells in the same column.

Using this rule, we derive the following formula :

$$h_n^m = \sum_{\mu \vdash mn} K_{(n)^m}^\mu s_\mu, \tag{3.2}$$

where  $K_{(n)^m}^\mu$  are *Kostka numbers*, counting the number of tableaux of shape  $\mu$  and content  $(n)^m = (n, n, \dots, n)$  (entries 1 to  $m$  each appear  $n$  times). The set of such tableaux is denoted  $\text{SSYT}(\mu, (n)^m)$ .

### 3.4.4 Plethysm and plethystic type

*Plethysm* is a binary operation on symmetric functions, denoted  $f[g]$ . The easiest way to define it is via *power sum symmetric functions*  $p_k = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^k$ , which form an algebraic basis of the ring of symmetric functions. Plethysm is the unique operation such that, for any symmetric functions  $f, g, h$  and any nonnegative integers  $k, m$  :

- $p_k[p_m] = p_{km}$ ,
- $p_k[f + g] = p_k[f] + p_k[g]$ ,
- $p_k[f \cdot g] = p_k[f] \cdot p_k[g]$ ,
- $(f + g)[h] = f[h] + g[h]$ ,
- $(f \cdot g)[h] = f[h] \cdot g[h]$ .

Using these rules and the decomposition of  $p_1^n$  in the Schur basis (see (Stanley, 2012)), we obtain the following equality. An easy proof can be found in (Maas-Gariépy et Tétreault, 022a).

**Proposition 3.4.1 (Plethystic decomposition of  $g^m$ ) :** For every symmetric function  $g$ , and  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$g^m = (p_1[g])^m = \sum_{\nu \vdash m} f^\nu s_\nu[g], \quad (3.3)$$

where  $f^\nu = K_{(1)^m}^\nu$  is the number of standard tableaux of shape  $\nu$ .

Denote by  $\text{SYT}_m$  the set of standard tableaux with  $m$  cells. Combining (3.2) and (3.3), we have

$$h_n^m = \sum_{\mu \vdash mn} K_{(n)^m}^\mu s_\mu = \sum_{t \in \text{SYT}_m} s_{\text{shape}(t)}[h_n]. \quad (3.4)$$

Since  $s_{\text{shape}(t)}[h_n]$  is a (positive) sum of Schur functions, this equality implies the existence of a partition of the set  $\text{SSYT}(\mu, (n)^m)$  into subsets  $\text{SSYT}_t(\mu, (n)^m)$ , one for each standard tableau  $t \in \text{SYT}_m$ , such that  $\langle s_\mu, s_{\text{shape}(t)}[h_n] \rangle = |\text{SSYT}_t(\mu, (n)^m)|$ .

Then,

$$s_{\text{shape}(t)}[h_n] = \sum_{T \in \text{SSYT}_t(-, (n)^m)} s_{\text{shape}(T)}. \quad (3.5)$$

We call such a partition a *(plethystic) type attribution*. We say that a tableau  $T$  has *type*  $t$  when  $T \in \text{SSYT}_t(\mu, (n)^m)$ , and that the copy of  $s_\mu$  indexed by  $T$  (in  $h_n^m$ ) contributes to the copy of  $s_\nu[h_n]$  indexed by  $t$ , if  $t$  has shape  $\nu$ .

**Example 3.4.2 :** This article is about the case  $m = 3$ , so we want to attribute to tableaux of content  $(n)^3$  either the type  $\boxed{1|2|3}$ ,  $\boxed{\frac{1}{3}|2}$ ,  $\boxed{\frac{1}{2}|3}$  or  $\boxed{\frac{1}{2}|3}$ .

When  $n = 1$ , then  $\text{SSYT}(-, (1)^3)$  contains exactly the tableaux above, so they are attributed trivially to themselves.

When  $n = 2$ , the plethystic attribution of the tableaux below is non-trivial.

$$\text{SSYT}(-, (2)^3) = \left\{ \boxed{1|1|2|2|3|3}, \boxed{\frac{1}{3}|1|2|2|3}, \boxed{\frac{1}{2}|1|2|3|3}, \boxed{\frac{1}{2}|2|1|3|3}, \boxed{\frac{1}{2}|3|1|2|3}, \boxed{\frac{1}{3}|3|1|2|2}, \right. \\ \left. \boxed{\frac{1}{2}|3|3|1|2}, \boxed{\frac{1}{3}|1|2|3}, \boxed{\frac{1}{3}|2|2|1|3}, \boxed{\frac{1}{3}|2|3|1|2}, \boxed{\frac{1}{3}|3|3|1|1} \right\}$$

In section 3.4.5, we describe and prove general rules for attributing types to tableaux. Section 3.4.5.6 applies these rules to the case  $n = 2$  above.

To understand the plethystic decomposition of  $h_n^m$ , we want to find a unique explicit type attribution for every tableau of content  $(n)^m$ , forced by plethystic rules. However, how to do so is a difficult problem, and remains open in general.

In the next sections, we explore conditions that must be respected by this attributions, and describe the simplest, and most elegant, type attribution for tableaux of content  $(n)^3$ . We then use this result to understand the plethystic decomposition of  $e_n^3$ ,  $h_\lambda^3$  and  $e_\lambda^3$ .

In order to navigate between plethysms on homogeneous and elementary symmetric functions, we use the involution  $\omega$  on symmetric functions defined on Schur functions by  $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}$ .



As  $h_n = s_{(n)}$  and  $e_n = s_{(1)^n}$ , we have that  $\omega(h_n) = e_n$ . Note that this involution preserves the scalar product. It is possible to show ((Macdonald, 1998, Chapter 1, Example 8.1)) that :

$$\omega(s_\nu[s_\lambda]) = \begin{cases} s_\nu[s_{\lambda'}] & \text{if } \lambda \vdash n \text{ for } n \text{ even} \\ s_{\nu'}[s_{\lambda'}] & \text{if } \lambda \vdash n \text{ for } n \text{ odd} \end{cases} .$$

In section 3.4.10, we show how the  $\omega$  involution translates a plethystic decomposition of  $h_n^m$  into a plethystic decomposition for  $e_n^m$ .

### 3.4.5 General rules for attributing types

In this section, we show that we can use a recursive process to attribute types to tableaux of content  $(n)^{m+1}$  from a type attribution of tableaux of content  $(n)^m$ . We also show how to reduce our study by decomposing tableaux into simpler ones, while describing the corresponding effect on the plethystic type.

#### 3.4.5.1 Types and $\ell$ -subtypes

For a tableau  $T$  of filling  $(n)^m$ , let us denote by  $T \downarrow_\ell$  the subtableau of  $T$  restricted to entries 1 to  $\ell \leq m$ . We show here that plethystic attributions have a recursive structure, such that if  $\text{type}(T) = t \in \text{SYT}_m$ , then  $\text{type}(T \downarrow_\ell) = t \downarrow_\ell$  for all  $\ell \leq m$ .

Suppose we have a type attribution for  $m$ . Then for all  $t \in \text{SYT}_m$ , we have

$$s_{\text{shape}(t)}[h_n] = \sum_{T \in \text{SSYT}_t(-, (n)^m)} s_{\text{shape}(T)} \cdot$$

Multiplying both sides by  $h_n$  yields

$$s_{\text{shape}(t)}[h_n] \cdot h_n = s_{\text{shape}(t)}[h_n] \cdot h_1[h_n] = (s_{\text{shape}(t)} \cdot h_1)[h_n] = \sum_{T \in \text{SSYT}_t(-, (n)^m)} s_{\text{shape}(T)} \cdot h_n,$$

where the first equality comes from the identity  $g = p_1[g] = h_1[g]$  for any symmetric function  $g$ , and the second comes from the product rule for plethysm (such that  $(f \cdot g)[h] = f[h] \cdot g[h]$ ).

Applying the Pieri rule, we then have

$$\sum_{\bar{t} \in \text{SSYT}_{m+1} \text{ such that } \bar{t} \downarrow_m = t} s_{\text{shape}(\bar{t})}[h_n] = \sum_{\bar{T} \in \text{SSYT}(-, (n)^{m+1}) \text{ such that } \text{type}(\bar{T} \downarrow_m) = t} s_{\text{shape}(\bar{T})}.$$

This implies that type attribution must satisfy the following property :

$$\text{type}(T \downarrow_\ell) = \text{type}(T) \downarrow_\ell, \text{ for all } 1 \leq \ell \leq m. \quad (3.6)$$

Let  $T$  be a tableau with filling  $(n)^m$  such that  $\text{type}(T)$  is known. We then call  $\text{type}(T) \downarrow_\ell$  the  $\ell$ -subtype of  $T$ , for  $1 \leq \ell \leq m$ .

Using this property, the plethystic decomposition of  $h_n^{m+1}$  can be understood in terms of that of  $h_n^m$ , by understanding how adding  $n$  cells to a tableau adds a cell to its type. One determined case is discussed in section 3.4.5.5.

Let's consider previously known results for  $m < 3$ . For  $m = 1$ , the 1-subtype is always  $\boxed{1}$ . For  $m = 2$ , we have the following well-known formulas, attributed to Littlewood (Littlewood, 1936). For a proof, see (Macdonald, 1998, Chapter 1, Example 8.9).

$$\begin{aligned} s_2[h_n] &= \sum_{T \in \text{SSYT}(-, (n)^2) \text{ such that } \text{type}(T) = \boxed{1 \ 2}} s_{\text{shape}(T)} = \sum_{0 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} s_{(2n-2j, 2j)}, \\ s_{11}[h_n] &= \sum_{T \in \text{SSYT}(-, (n)^2) \text{ such that } \text{type}(T) = \boxed{\frac{1}{2}}} s_{\text{shape}(T)} = \sum_{0 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} s_{(2n-(2j+1), (2j+1))}. \end{aligned}$$

The 2-subtype of  $T \in \text{SSYT}(\nu, (n)^m)$  is then given by the following.

$$\begin{aligned} \text{If } \text{shape}(T \downarrow_2) \text{ has even second part, then } \quad & \text{type}(T) \downarrow_2 = \boxed{1 \ 2} \\ \text{If } \text{shape}(T \downarrow_2) \text{ has odd second part, then } \quad & \text{type}(T) \downarrow_2 = \boxed{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

We use this to discriminate types according to their *parity*, *even types* having  $t \downarrow_2 = \boxed{1 \ 2}$ , and *odd types*,  $t \downarrow_2 = \boxed{\frac{1}{2}}$ . The parity of the 2-subtype of a tableau  $T$  is then the parity of the number of 2's in the second row of  $T$ .

### 3.4.5.2 Decomposing tableaux into smaller tableaux : operation $\vee$ on tableaux

We describe in the following two sections how we can decompose tableaux of content  $(n)^m$  into simpler tableaux while keeping track of associated changes of plethystic type. To do so, we need an operation  $\vee$  on tableaux.

If  $T_1$  and  $T_2$  are two tableaux of respective shape  $\mu^{(1)}$  and  $\mu^{(2)}$ , denote  $T_1 \vee T_2$  the tableau of shape  $\mu^{(1)} + \mu^{(2)}$  (where addition is component-wise) obtained by concatenating each row, and reorder the entries in the rows so that they appear in weakly increasing order. For example :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \vee \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & & & \\ \hline 3 & & & & & & \\ \hline \end{array}.$$

**Proposition 3.4.3 :** Let  $T_1, T_2$  be two tableaux of any shape. Then  $T_1 \vee T_2$  is also a tableau.

*Proof.* Let  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots), \nu = (\nu_1, \nu_2, \dots)$  be the respective (partition) shape of  $T_1, T_2$ . Then  $\mu + \nu = (\mu_1 + \nu_1, \mu_2 + \nu_2, \dots)$  is also a partition shape.

The rows of  $T_1 \vee T_2$  are weakly increasing by construction, we must then only investigate whether columns remain strictly increasing. Since  $T_1, T_2$  are tableaux, then each entry in a row  $j > 1$  of  $T_i$  is paired with a smaller entry (sitting above it) in row  $j - 1$  of the same tableau. Therefore an entry  $c$  in row  $j$  of  $T_1 \vee T_2$  cannot lay below an entry  $d \geq c$ , and the resulting tableau  $T_1 \vee T_2$  must be semistandard. ■

### 3.4.5.3 Adding columns of height $m$

For  $T \in \text{SSYT}(\mu, (n)^m)$  with  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) \vdash nm$ , then  $T$  is of the form  $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline m \\ \hline \end{array}^{\vee \mu_m} \vee \hat{T}$ ,

where  $\hat{T}$  has at most  $m - 1$  rows and content  $(n - \mu_m)^m$ , and  $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline m \\ \hline \end{array}^{\vee k} = \underbrace{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline m \\ \hline \end{array} \vee \dots \vee \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline m \\ \hline \end{array}}_{k \text{ times}}.$

**Example 3.4.4 :** Decomposing  $T$  below, we get

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & & & & & \\ \hline 3 & 3 & & & & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \vee \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \vee \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 & & & & & \\ \hline \end{array}}_{\hat{T}} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}^{\vee 2} \vee \hat{T}.$$

The following proposition implies that the type of  $T$  is determined by the type of  $\hat{T}$  and the number of columns  $\mu_m$ . The proof uses results of de Boeck, Paget and Wildon (de Boeck *et al.*, 2021), and solves a previous conjecture in Chapter 4 of de Boeck's thesis (de Boeck, 2015).

**Proposition 3.4.5 :** For every  $\mu \vdash mn$  and  $\nu \vdash m$ , we have

$$\langle s_{\nu'}[h_{n+1}], s_{(1)^{m+\mu}} \rangle = \langle s_{\nu}[h_n], s_{\mu} \rangle.$$

*Proof.* We use a special case of theorem 1.1 of (de Boeck *et al.*, 2021). It gives us that

$$\langle s_{\nu}[s_{(1)^{n+1}}], s_{(m) \cup \mu} \rangle = \langle s_{\nu}[s_{(1)^n}], s_{\mu} \rangle,$$

where  $(m) \cup \mu$  is the partition obtained by adding a part of length  $m$  to  $\mu$ .

If we suppose that  $n$  is even, the  $\omega$  involution defined in section 4.3.8 gives that

$$\begin{array}{ccc} \langle s_{\nu}[s_{(1)^{n+1}}], s_{(m) \cup \mu} \rangle & = & \langle s_{\nu}[s_{(1)^n}], s_{\mu} \rangle \\ \omega \downarrow & & \downarrow \omega \\ \langle s_{\nu'}[s_{n+1}], s_{(1)^{m+\mu'}} \rangle & = & \langle s_{\nu}[s_n], s_{\mu'} \rangle \end{array} .$$

If  $n$  is odd, then  $\nu$  and  $\nu'$  in the bottom equation are interchanged. The desired result therefore arises no matter the parity of  $n$ . ■

We then have that

$$\text{type} \left( \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline m \\ \hline \end{array} \vee T \right) = \text{type}(T)'. \quad (3.8)$$

More generally, if  $T$  has shape  $\mu \vdash mn$  and content  $(n)^m$ ,

$$\text{type} \left( \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \vdots \\ \boxed{m} \end{array} \vee^{\mu_m} \hat{T} \right) = \begin{cases} \text{type}(\hat{T}) & \text{if } \mu_m \text{ even,} \\ \text{type}(\hat{T})' & \text{if } \mu_m \text{ odd} \end{cases}. \quad (3.9)$$

#### 3.4.5.4 Adding elements in the first row

In this section, we study how adding cells exclusively in the first row of a tableau, using the operation  $\vee$ , modifies the plethystic attribution. To do this, we consider the following result, which is a special case of a theorem of Brion (Brion, 1993), and also of Theorem 1.2 of de Boeck, Paget and Wildon ((de Boeck *et al.*, 2021)) :

**Proposition 3.4.6 :** Let  $\nu$  be a partition of an integer  $m$ , and  $\mu \vdash mn$ . Then :

$$\langle s_\nu[h_n], s_\mu \rangle \leq \langle s_\nu[h_{n+N}], s_{\mu+(N \cdot m)} \rangle.$$

The inequality above becomes an equality for  $N \in \mathbb{N}$  such that  $N \geq (m-1) \cdot n - \mu_1$ .

Note that  $T \mapsto T \vee \boxed{1 \cdots m}$  is an injection from  $\text{SSYT}(\mu, (n)^m)$  to  $\text{SSYT}(\mu + (m), (n+1)^m)$ .

This proposition then gives us another rule for types :

$$\text{type} \left( T \vee \boxed{1 \cdots m} \right) = \text{type}(T). \quad (3.10)$$

More generally, if  $T$  has content  $(n)^m$ , and there exists a positive integer  $k$  and a tableau  $\tilde{T}$  of content  $(n-k)^m$  such that  $T = \tilde{T} \vee \boxed{1 \cdots m}^{\vee k}$ , then

$$\text{type}(T) = \text{type} \left( \tilde{T} \vee \boxed{1 \cdots m}^{\vee k} \right) = \text{type}(\tilde{T}). \quad (3.11)$$

#### 3.4.5.5 Adding the $(m+1)$ 's to the first row

There is one case where we know how adding  $n$  cells to a tableau adds a cell to its type : when we add all of them to the first row. This relies on a theorem of Brion (Brion, 1993).

**Theorem 3.4.7 :** For every  $\mu \vdash nm$  and  $\nu \vdash n$ , we have

$$\langle s_\nu[h_n], s_\mu \rangle \leq \langle s_{\nu+(1)}[h_n], s_{\mu+(n)} \rangle.$$

The map  $T \mapsto T \vee \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline m+1 & \cdots & m+1 \\ \hline \end{array}}_{n \text{ times}}$  is an injection  $\text{SSYT}(\mu, (n)^m) \hookrightarrow \text{SSYT}(\mu+(n), (n)^{m+1})$ , so we obtain the following rule for types :

$$\text{type} \left( T \vee \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline m+1 & \cdots & m+1 \\ \hline \end{array}}_{n \text{ times}} \right) = \text{type}(T) \vee \begin{array}{|c|} \hline m+1 \\ \hline \end{array}. \quad (3.12)$$

In order to attribute types to any tableau of content  $(n)^{m+1}$ , we need to understand what happens when we add cells with content  $m+1$  in another row than the first one.

### 3.4.5.6 Applying general rules to the case $n = 2$

The tableaux of filling  $(n)^m = (2)^3$  are

$$\text{SSYT}(-, (2)^3) = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 3 & & & & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 3 & & & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & & & \\ \hline 2 & 3 & & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline 3 & 3 & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & \\ \hline 3 & 3 & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline 3 & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline 3 & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 3 & & \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \end{array} \right\}.$$

Let's use the general rules stated above to assign to each a type, either  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & & \end{array}$ ,  $\begin{array}{|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}$ ,  $\begin{array}{|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \end{array}$  or  $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \end{array}$ .

First off, we want the parity of the number of 2's in the second row to be the same in the tableau as in its type, and so the parity of its 2-subtype. This only indicates if the type is odd or even.

If we are able to remove the three cells  $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$ ,  $\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}$  and  $\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}$  from the first row (possibly repeating this process) to retrieve a tableau which type is known, then this is the type of the tableau. The type of the first three tableaux above is then respectively  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & & \end{array}$ ,  $\begin{array}{|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}$  and  $\begin{array}{|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \end{array}$ .

If there are columns of height 3, the type of the tableau is that of the smaller tableau left after removing these columns if the number of these columns is even, and its conjugate otherwise. Then the type of the last four tableaux is respectively  $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$ ,  $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ ,  $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$  and  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$ .

Finally, if all the cells with content 3 appear in the first row of a tableau, its type is constructed from its 2-subtype by adding a 3 to its first row. The type of the fourth tableau is then  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$ . For the leftover tableaux of the example above, it is much more difficult to attribute a type, so we need to introduce more plethystic rules.

### 3.4.6 Tableaux of content $(n)^3$

Our goal in this section is to collect some results on tableaux  $T \in \text{SSYT}(\mu, (n)^3)$ , for any  $\mu \vdash 3n$ , and to explore what should be considered when attributing a type to such tableaux.

#### 3.4.6.1 Number of tableaux

There is a very simple formula for the coefficients  $K_{(n)^3}^\mu$  of the Schur functions in  $h_n^3$ , which can be found implicitly in (Thrall, 1942). We include a proof for the convenience of the reader.

**Proposition 3.4.8 :** The Kostka number  $K_{(n)^3}^\mu$  counting tableaux of shape  $\mu$  and content  $(n)^3 = (n, n, n)$  is given by

$$K_{(n)^3}^\mu = \min(\mu_1 - \mu_2, \mu_2 - \mu_3) + 1,$$

when  $\mu$  has at most three parts, and 0 otherwise.

*Proof.* A tableau  $T$  of content  $(n)^3$  must have at most three rows, so let  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \vdash 3n$  be its shape. Columns of height 3 must be of the form  $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$ , and all 1's must be on the first row. There are then two cases to consider.

Suppose that  $\mu_2 - \mu_3 \leq \mu_1 - \mu_2$ , so equivalently  $\mu_2 \leq n$ . We can fill the second row entirely with 2's. All other tableaux can be obtained by exchanging some of these 2's with 3's on the first row,

so there are  $\mu_2 - \mu_3 + 1$  possible tableaux.

Otherwise,  $\mu_2 - \mu_3 > \mu_1 - \mu_2$ , so equivalently  $\mu_2 > n$ . We can fill the first row entirely with only 1's and 2's, and we obtain all other tableaux by exchanging some 2's on the first row with 3's on the second, but at least  $\mu_2 - n$  2's must remain on the first row since they cover 3's. Then there are  $\mu_1 - n - (\mu_2 - n) + 1 = \mu_1 - \mu_2 + 1$  possible tableaux.

In both cases, the number of tableaux is exactly  $\min(\mu_1 - \mu_2, \mu_2 - \mu_3) + 1$ . ■

**Example 3.4.9 :** Let  $\mu = (8, 6, 1) \vdash 15$ . We have  $\mu_1 - \mu_2 = 2 < \mu_2 - \mu_3 = 5$ , with the corresponding cells of  $\mu$  respectively highlighted in red and blue. The smallest set of cells (here in red) can always be filled with only 2's. We can then exchange each of these 2's with 3's in the other set of cells (here in blue), starting with the rightmost 2. These exchanges are illustrated below. So, there are  $\mu_2 - \mu_1 + 1 = 3$  tableaux of shape  $\mu = (8, 6, 1)$ .

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & & \\ \hline 3 & & & & & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & & \\ \hline 3 & & & & & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & & \\ \hline 3 & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

We can always consider the (unique) tableau which maximizes the number of 2's on the first row, and obtain all the others by making exchanges with 3's on the second row.

### 3.4.6.2 Chen's formulas

The formulas below are due to Chen (Chen, 1982), and give the number of copies of  $s_\mu$  that lie in each part of the plethystic decomposition of  $h_n^3$ . The formula for  $s_3[h_n]$  was already known to Thrall (Thrall, 1942), although given in a different form. These formulas say that roughly a sixth of the tableaux in  $\text{SSYT}(\mu, (n)^3)$  must be of type  $\boxed{123}$ , a sixth of type  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}}$ , and a third of each type  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}}$  and  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}}$ .

Note that the formulas below are restated, as there are no references to tableaux in Chen's article.



For a fixed  $\mu \vdash 3n$ , we have  $K_{(n)^3}^\mu = \min(\mu_1 - \mu_2, \mu_2 - \mu_3) + 1$ . Chen's formulas state that the coefficients appearing in the plethysms of  $h_n^3$  can be computed as following (Chen, 1982).

$$\text{For } s_3[h_n] = \sum_{\mu \vdash 3n, \ell(\mu) \leq 3} c_\mu s_\mu : c_\mu = \begin{cases} \left\lfloor \frac{K_{(n)^3}^\mu}{6} \right\rfloor & \text{if } (K_{(n)^3}^\mu \bmod 6) \in \{0, 4\} \text{ OR} \\ & (K_{(n)^3}^\mu \bmod 6) \in \{1, 3, 5\} \text{ AND } \mu_2 \text{ even} \\ \left\lfloor \frac{K_{(n)^3}^\mu}{6} \right\rfloor & \text{if neither above condition hold.} \end{cases},$$

$$\text{For } s_{111}[h_n] = \sum_{\mu \vdash 3n, \ell(\mu) \leq 3} c_\mu s_\mu : c_\mu = \begin{cases} \left\lfloor \frac{K_{(n)^3}^\mu}{6} \right\rfloor & \text{if } (K_{(n)^3}^\mu \bmod 6) \in \{0, 4\} \text{ OR} \\ & (K_{(n)^3}^\mu \bmod 6) \in \{1, 3, 5\} \text{ AND } \mu_2 \text{ odd} \\ \left\lfloor \frac{K_{(n)^3}^\mu}{6} \right\rfloor & \text{if neither above condition hold.} \end{cases},$$

$$\text{For } s_{21}[h_n] = \sum_{\mu \vdash 3n, \ell(\mu) \leq 3} c_\mu s_\mu : c_\mu = \left\lfloor \frac{K_{(n)^3}^\mu - 1}{3} \right\rfloor.$$

These were proved using the SXP algorithm (Chen, 1982; Chen *et al.*, 1984). Thus, we have a way to prove the validity of a type attribution for tableaux of content  $(n)^3$ .

### 3.4.6.3 Using general results

We have seen that the 2-subtype of a tableau  $T$  of content  $(n)^3$  is given by the parity of the number of 2's in its second row. About a half of tableaux will have either 2-subtype.

Among tableaux with 2-subtype  $\boxed{1|2}$  (resp.  $\boxed{1|2}$ ), about a third should be of type  $\boxed{1|2|3}$  (resp.  $\boxed{1|2|3}$ ), and about two thirds, of type  $\boxed{1|3|2}$  (resp.  $\boxed{1|3|2}$ ), to respect Chen's rule.

We use the other rules of section 3.4.5 to restrict further our study. We have seen that any tableau  $T \in \text{SSYT}(\mu, (n)^3)$ , for  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ , can be expressed as  $T = \begin{matrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{matrix}^{\vee \mu_3} \vee \hat{T}$ , where  $\hat{T}$  has at most

two rows. Then

$$\text{type}(T) = \begin{cases} \text{type}(\hat{T}) & \text{if } \mu_3 \text{ is even} \\ \text{type}(\hat{T})' & \text{if } \mu_3 \text{ is odd} \end{cases} .$$

We can moreover break down  $\hat{T}$  into  $\hat{T} = \bar{T} \vee \boxed{1|2|3}^{\vee k}$  for a certain  $k$ . Then

$$\text{type}(\hat{T}) = \text{type}(\bar{T}).$$

When  $k$  is maximal, the minimal tableaux  $\bar{T}$  have interesting properties, which we study in section 3.4.8 (see Figure 3.4).

Finally, the fourth rule of section 3.4.5 gives us

$$\text{type}(T) = \begin{cases} \boxed{1|2|3} & \text{if all 3's are in the first row AND} \\ & \text{the number of 2's in the second row is even} \\ \boxed{1|3} \\ \boxed{2} & \text{if all 3's are in the first row AND} \\ & \text{the number of 2's in the second row is odd} \end{cases} .$$

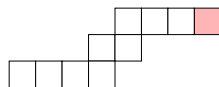
This allows us to fix the type of certain minimal tableaux, and restrict our choices further.

### 3.4.7 3-ribbon tableaux

We now describe the construction of a polytope which integer points represent tableaux of content  $(n)^3$ . The coordinates of these integer points are given by defining characteristics of what we call Yamanouchi 3-ribbon tableaux. We define these below, and show they are in bijection with tableaux of content  $(n)^3$ .

#### 3.4.7.1 General definition of $r$ -ribbon tableaux

A  $r$ -*ribbon* is a connected skew diagram with  $r$  cells, and no squares (sets of  $2 \times 2$  boxes). Its *head* is its northeast-most cell. The 10-ribbon below has its head marked in red.

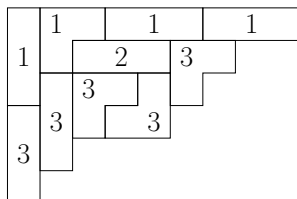


We say that a shape  $\lambda/\mu$  is *pavable by  $r$ -ribbons* if there is a sequence of skew shapes  $\mu = \lambda_0 \subseteq \lambda_1 \subseteq \lambda_2 \subseteq \dots \subseteq \lambda_k = \lambda$  such that each  $\lambda_{i-1}/\lambda_i$  is a  $r$ -ribbon. Each ribbon in the paving can be filled with a positive integer to form a  $r$ -ribbon tableau. Its content is the composition  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$  where  $\alpha_i$  is the number of ribbons with entry  $i$ .

We say that a  $r$ -ribbon tableau is semistandard if the subset of ribbons with entry  $i$  form a *horizontal band* : a sequence of partitions  $\lambda_0 \subseteq \lambda_1 \subseteq \lambda_2 \subseteq \dots \subseteq \lambda_k$ , such that  $\lambda_j/\lambda_{j-1}$  is a ribbon  $\xi_j$  with entry  $i$ , and the head of  $\xi_j$  lies weakly northeast of that of  $\xi_{j-1}$ , for all  $1 \leq j \leq k$ .

We can define the reading word of a ribbon tableau to be the word read off by reading rows left to right, bottom to top, recording a ribbon only when its head is scanned.

A reading word is said to be *Yamanouchi* (or *reverse lattice*) if the content of each of its suffix is a partition. A ribbon tableau with Yamanouchi reading word is said to be Yamanouchi. Using this reading order, the semistandard 3-ribbon tableau below has reading word 3333231111, which is not Yamanouchi, since it admits the suffix 31111 whose content  $(4, 0, 1)$  is not a partition.



### 3.4.7.2 Yamanouchi 3-ribbon tableaux

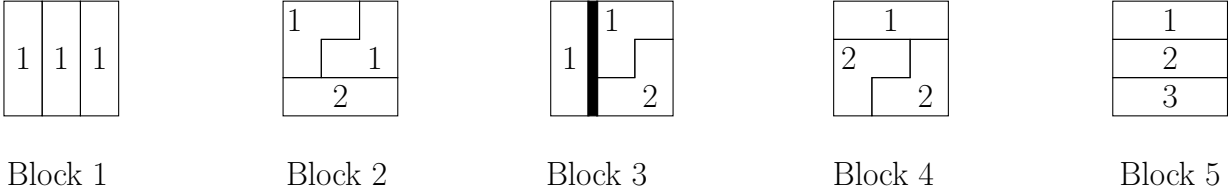
Carré and Leclerc described in (Carré et Leclerc, 1995) the product of two Schur functions in terms of domino tableaux (2-ribbon tableaux). They showed that the number of Yamanouchi domino tableaux of a certain shape  $I$  depending on  $\mu, \nu$  and of content  $\lambda$  gives the multiplicity  $c_{\mu\nu}^\lambda$  of  $s_\lambda$  in  $s_\mu s_\nu$ . These Littlewood-Richardson coefficients have been widely studied before, with their usual definition using Yamanouchi tableaux of skew shape  $\lambda/\mu$  and content  $\nu$ .

In the case of a square  $s_\mu^2$ , Carré and Leclerc showed that the parity of the cospin of the Yamanouchi

domino tableaux determines the contribution of the associated Schur function  $s_\lambda$  to  $s_2[s_\mu]$  or  $s_{11}[s_\mu]$ , where the cospin equals the number of horizontal dominoes divided by two in this specific context.

We generalize their strategy to 3-ribbon tableaux. The bijection described by Carré and Leclerc is a particular case of a bijection given by Stanton and White (Stanton et White, 1985), between  $r$ -tuples of tableaux and  $r$ -ribbon tableaux. The 3-ribbon version gives a bijection between triples of tableaux and 3-ribbon tableaux. In particular, when all tableaux of the triple have shape  $(n)$ , the corresponding 3-ribbon tableaux have shape  $(3n)^3 = (3n, 3n, 3n)$ . This approach is interesting as it has the potential to generalize to  $r$ -ribbon tableaux (and so  $r$ -plethysms).

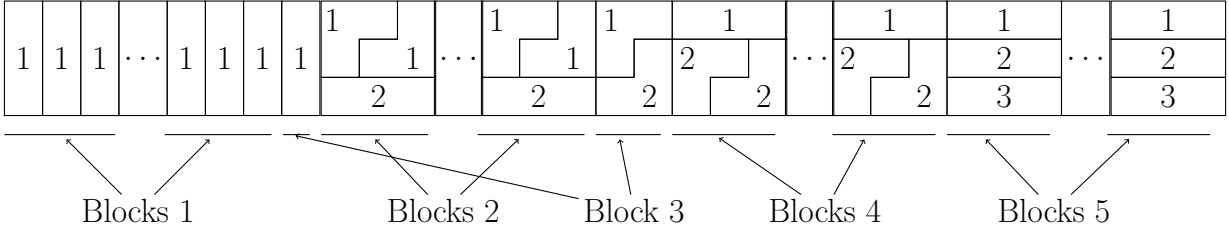
We need first to introduce the following building blocks of 3-ribbons of shape  $3 \times 3$  :



These blocks can be combined to form 3-ribbon tableaux. There can be at most one block 3, with its left part inserted after a block 1 and before a block 2, and its right part inserted after a block 2 and before a block 4 or 5, because otherwise the 1's or 2's do not form a horizontal band.

We define Yamanouchi 3-ribbon tableaux of shape  $(3n)^3$  to be built out of the blocks of 3-ribbons above according to the following conditions : if  $\kappa_i$  is the number of blocks  $i$ , then

- $0 \leq \kappa_i \leq n$  with  $0 \leq \kappa_3 \leq 1$ ,
- $\kappa_4 \leq \kappa_1 + \kappa_2$  and
- $\sum_i \kappa_i = n$ .



**Proposition 3.4.10 :** A Yamanouchi 3-ribbon tableau of shape  $(3n)^3$  (defined as above) has content

$$\nu = (3\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4 + \kappa_5, \kappa_2 + \kappa_3 + 2\kappa_4 + \kappa_5, \kappa_5),$$

where  $\nu$  is a partition of  $3n$ , and has Yamanouchi reading word

$$2^{\kappa_2} 3^{\kappa_5} 2^{\kappa_3 + 2\kappa_4 + \kappa_5} 1^{3\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4 + \kappa_5}.$$

*Proof.* We have  $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \nu_3$ , since  $\kappa_1 + \kappa_2 \geq \kappa_4$ , and  $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 3(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 + \kappa_5) = 3n$ , so  $\nu \vdash 3n$ . The reading word is obtained by the reading order described above, and the fact that it is Yamanouchi is easily verified : the length of the sequence of 1's is greater than that of the following sequence of 2's (reading right to left) since  $\kappa_4 \leq \kappa_1 + \kappa_2$ . The sequence of 3's is shorter than that of the first sequence of 2's since  $\kappa_5$  appears in its length  $\kappa_3 + 2\kappa_4 + \kappa_5$ . Finally, adding the last sequence of  $\kappa_2$  2's also does not break the Yamanouchi condition. ■

**Remark 3.4.11 :** A Yamanouchi 3-ribbon tableau of shape  $(3n)^3$  is entirely determined by the composition  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5)$  of  $n$  describing its building block composition. Further on we identify a Yamanouchi 3-ribbon tableau of shape  $(3n)^n$  with its defining composition.

**Proposition 3.4.12 :** Yamanouchi 3-ribbon tableaux of shape  $(3n)^3$  and content  $\nu$  are in bijection with tableaux of shape  $\nu$  and content  $(n)^3$  counted by the Kostka number  $K_{(n)^3}^\nu$ .

*Proof.* The correspondance between a tableau of shape  $\nu$  and content  $(n)^3$  and a defining composition  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5) \in Yam((3n)^3, \nu)$  can be described as follows, where  $k_{i,j}$  denotes the number of  $i$  in the row  $j$  of the tableau.

1.  $\kappa_1 = k_{2,1} - \left\lceil \frac{k_{3,2}}{2} \right\rceil,$
2.  $\kappa_2 = k_{2,2} - \nu_3,$
3.  $\kappa_3 = k_{3,2} \pmod{2},$
4.  $\kappa_4 = \left\lfloor \frac{k_{3,2}}{2} \right\rfloor,$
5.  $\kappa_5 = \nu_3.$

We can easily verify that it is a composition of  $n$ , and that  $0 \leq \kappa_3 \leq 1$ . It remains to show that  $\kappa_4 \leq \kappa_1 + \kappa_2$ . This is equivalent to  $\lfloor \frac{k_{3,2}}{2} \rfloor \leq k_{2,1} - \lfloor \frac{k_{3,2}}{2} \rfloor + k_{2,2} - \nu_3$ , itself equivalent to  $k_{3,2} + \nu_3 \leq k_{2,1} + k_{2,2} = n$ . As  $k_{3,2} + \nu_3 = n - k_{3,1}$ , this inequality is true.

For a defining composition  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5)$ ,  $\nu$  and  $n$  are determined. A tableau of shape  $\nu$  and content  $(n)^3$  has all its entries 1 in its first row, and  $\nu_3 = \kappa_5$  columns of height 3 filled with 1, 2, 3. The leftover cells are filled with an equal amount  $m = n - \nu_3$  of entries 2 and 3, so a tableau is entirely determined by the position of those 2's and 3's in row 1 and 2. The values  $\nu$  and  $k_{2,2}$  obtained from  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5)$  are enough to determine uniquely a tableau of content  $(n)^3$ . ■

Denote by  $\text{Yam}_3((3n)^3)$  the set of defining compositions for Yamanouchi 3-ribbon tableaux of shape  $(3n)^3$ , and by  $\text{Yam}_3((3n)^3, \nu)$  its subset with fixed  $\nu$ . We identify these sets and the associated tableaux further on.

**Remark 3.4.13 :** We have seen in section 3.4.6 that tableaux of content  $(n)^3$  with a fixed shape are obtained one from another by exchanging 2's and 3's in different rows. These exchanges correspond to transformations on the corresponding defining compositions :

$$\begin{aligned} &(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5) + (-1, 1, 1, -1, 0) \text{ if } \kappa_3 = 0, \\ &(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5) + (0, 1, -1, 0, 0) \text{ if } \kappa_3 = 1. \end{aligned}$$

### 3.4.8 Integer points on polytopes

We have seen in section 3.4.7 that tableaux counted by  $K_{(n)^3}^\nu$  are in bijection with defining compositions  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5) \in \text{Yam}((3n)^3, \nu)$ . We now study the compositions  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5)$  in  $\text{Yam}((3n)^3)$  as positive integer points on the polytope  $\mathbb{P}_n$  defined by the system of equations below.

- $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 + \kappa_5 = n$ ,
- $\kappa_i \geq 0$ ,
- $\kappa_3 \leq 1$ ,
- $\kappa_1 + \kappa_2 \geq \kappa_4$ .

Each point in  $\mathbb{P}_n$  with  $\nu = (3\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4 + \kappa_5, \kappa_2 + \kappa_3 + 2\kappa_4 + \kappa_5, \kappa_5)$  is in  $Yam_3((3n)^3, \nu)$  and corresponds to a tableau counted by  $K_{(n)^3}^\nu$ , the one with  $\kappa_2 + \kappa_5$  2's on its second row.

### 3.4.8.1 Visualizing $\mathbb{P}_n$

The polytope  $\mathbb{P}_n$  lies in a 5 dimension space. To visualize it, we consider two projections onto  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4)$ , thus lying in 3 dimension spaces :

$$\begin{array}{ll}
- \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4 = m, & - \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4 = m - 1, \\
- \kappa_i \geq 0, & - \kappa_i \geq 0, \\
- \kappa_1 + \kappa_2 \geq \kappa_4, & - \kappa_1 + \kappa_2 \geq \kappa_4, \\
- \kappa_3 = 0, & - \kappa_3 = 1.
\end{array}$$

Both projections can be visualised simultaneously as the union of two polytopes denoted  $P_m$ . This corresponds to the restriction of  $\mathbb{P}_n$  with  $\kappa_5 = n - m$ . Compositions of  $n$  with a fixed  $\kappa_5 > 0$  are in bijection with the compositions of  $m = n - \kappa_5$  (corresponding to removing columns of height 3 in the associated tableaux), so we do not lose information through this projection. Since adding a column conjugates the type, we also merely need to keep track of the values  $\kappa_5 = n - m$ .

All integer points of  $\mathbb{P}_n$  occur once as a point in a  $P_m$  with  $0 \leq m \leq n$ , so the  $P_m$ 's give us a good understanding of  $\mathbb{P}_n$ . Further on, we oversimplify the situation by calling  $P_m$  a polytope. See figure 3.2 for the first  $P_m$ 's, for  $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Together, they give projections of  $\mathbb{P}_6$  at  $\kappa_5 = 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$ . Figure 3.3 illustrates the fact that  $P_m$  is the union of two polytopes.

We can focus on points with  $\nu = (3n - j, j)$ , for with  $0 \leq j \leq \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$ , which are the points in  $P_n$ . For  $j$  fixed, we call the subcollection of points with  $\nu = (3n - j, j)$  the  $j$ -strand (of  $P_n$ ). We then say these points have shape  $(3n - j, j)$  (like their associated tableau).

The operation on tableaux exchanging a 2 on the first row with a 3 on the second, seen at the end of section 3.4.7, preserves shapes and translates to the following on the associated compositions :  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) \pm (-1, +1, +1, -1)$  (if  $\kappa_3 = 0$ ) or  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) \pm (0, +1, -1, 0)$  (if  $\kappa_3 = 1$ ). The points of shape  $(3n - j, j)$  are then linked by these transformations, and form an actual strand.

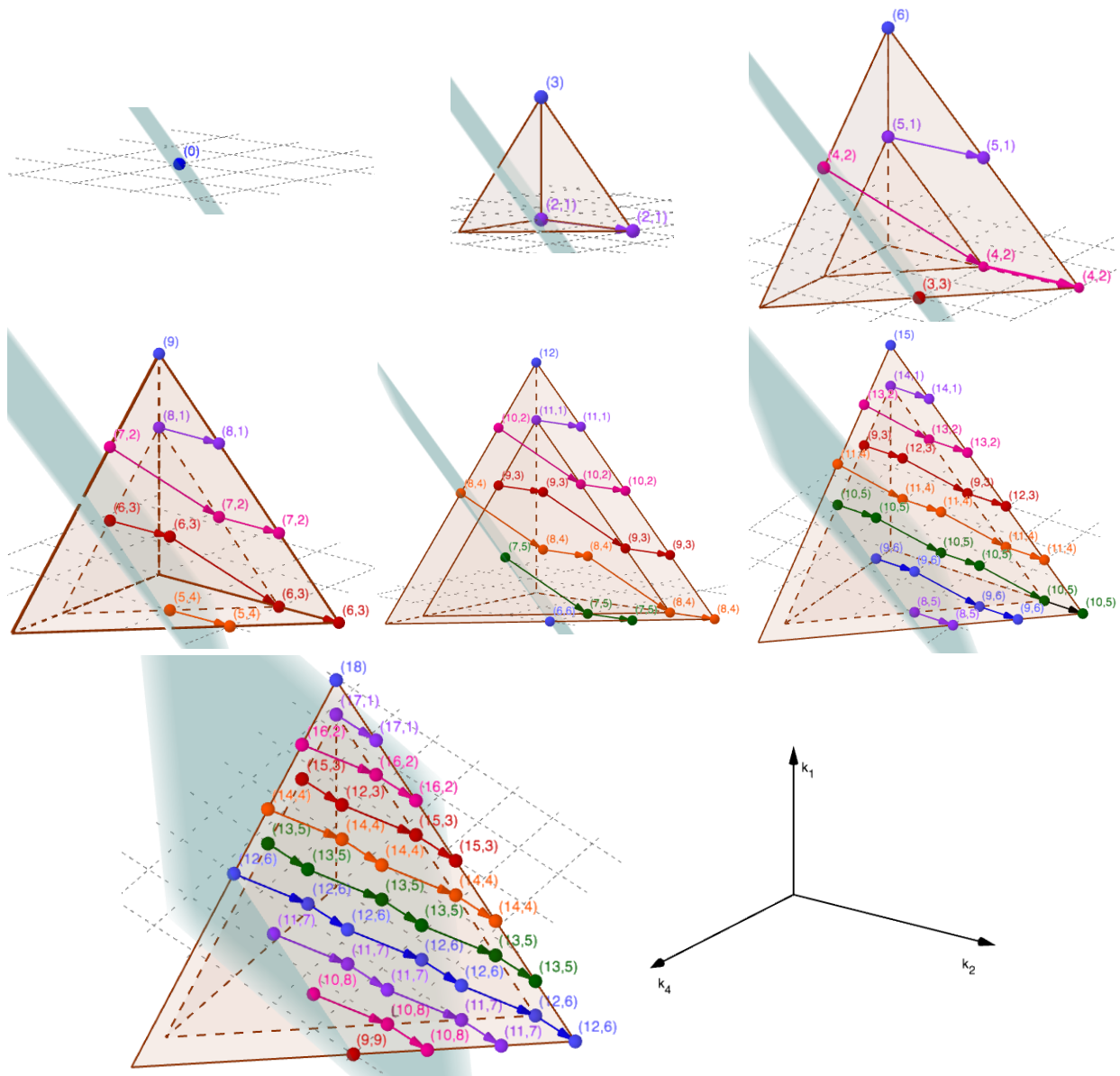


FIGURE 3.2: Projections  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  of  $\mathbb{P}_6$  at  $\kappa_5 = 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$ . The shaded plane is  $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa_4$ . The partition strands are colored identically from one figure to the next if they occur as a shift of  $\kappa_1$  by 1. This allows to visualize how  $P_i \subset P_{i+1}$ .



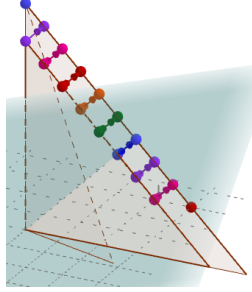


FIGURE 3.3: Side cut of  $P_6$  which illustrates the fact that  $P_m$  is the union of two polytopes, an inner one with  $\kappa_3 = 1$ , and an outer one with  $\kappa_3 = 0$ . Integer points of both polytopes of the same  $j$ -strand lie on the line of direction  $(-1, +2, -1)$ , by the geometry of transformations.

### 3.4.8.2 Inclusion of polytopes, complete and incomplete strands

**Proposition 3.4.14 :** The polytope  $P_{n-1}$  is included in  $P_n$  for  $n \geq 1$ , with the strands of  $\nu \vdash 3(n-1)$  becoming strands of  $\nu + (3) = (\nu_1 + 3, \nu_2) \vdash 3n$ .

*Proof.* This injection corresponds to the operation  $T \vee \boxed{123}$  defined in section 3.4.5. This gives a shift to all points of  $P_{n-1}$  by adding 1 to  $\kappa_1$ . ■

A  $j$ -strand is called *complete* when the injection of  $P_n$  into  $P_{n+1}$  is a bijection (for  $n$  fixed). The complete  $j$ -strands of  $P_n$  are associated to partitions  $\nu = (3n-j, j)$  with  $j \leq n$ , and correspond to the case where  $K_{(n)3}^\nu = j+1$ . The initial point of a complete  $j$ -strand corresponds to the tableau which only has 3's on its second row, and its final point, to the one which only has 2's on its second row.

For  $n < j \leq \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$ , the  $j$ -strands of  $P_n$  are *incomplete*, meaning that the  $j$ -strand in  $P_{n+1}$  will hold more tableaux than in  $P_n$ , those which do not have the form  $\overline{T} \vee \boxed{123}$ : the first tableau of the  $j$ -strand (in  $P_{n-1}$ ) which has no 3's on its first row, the last one which has no 2's on its first row, and the previous to last one, which becomes non standard when removing three cells with entries 1, 2, 3 in its first row.

Going from  $P_n$  to  $P_{n-1}$  either preserve  $j$ -strands (if  $j \leq n$ , so the  $j$ -strand is complete) or shortens  $j$ -strands by three points : one at its start, and two at its end (until it vanishes, see figure 3.4). The inclusion of  $P_{n-1}$  in  $P_n$  also justifies the notation of  $j$ -strand, as the length and composition of the second row is not modified by  $\vee[123]$ , so the strands depend only on the values of  $j$  and  $n$ .

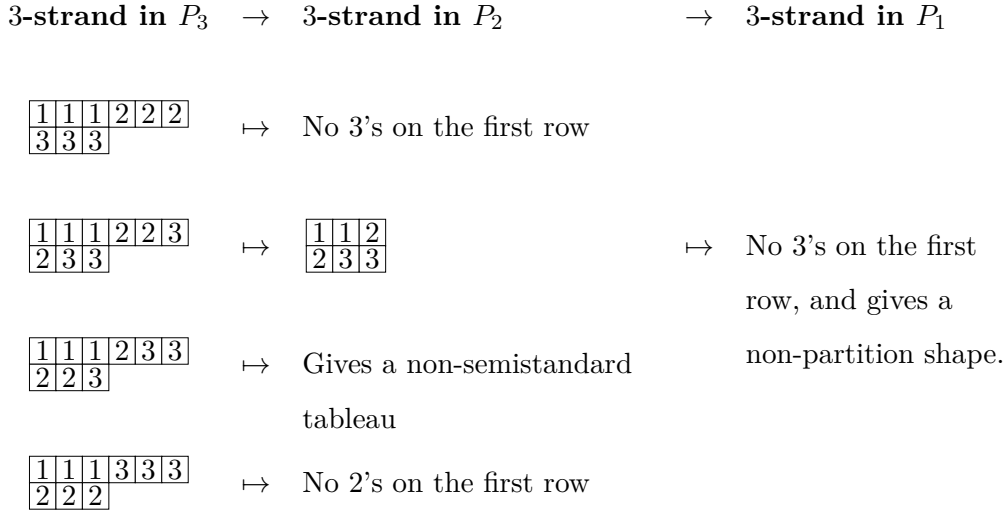


FIGURE 3.4: Reduction of the 3-strand from  $P_3$  to  $P_1$ . The 3-strand is complete in  $P_3$ , and counts 4 tableaux. The 3-strand in  $P_2$  counts only 1 tableau, and it vanishes in  $P_1$ .

**Proposition 3.4.15 :** As  $m$  grows, an (incomplete)  $j$ -strand first appears in  $P_m$  for  $m = \lceil \frac{2j}{3} \rceil$  and grows until it is complete in  $P_m$  with  $m = j$ , and remains so in  $P_m$  when  $m \geq j$ .

A  $j$ -strand holds respectively 1, 2 or 3 tableaux in its first occurrence, depending on the value of  $j$  modulo 3. The first tableau of the  $j$ -strand then has  $k_{3,2} = \lceil \frac{2j}{3} \rceil$  and  $k_{2,2} = \lfloor \frac{j}{3} \rfloor$ , where  $k_{i,j}$  is the number of entry  $i$  in the row  $j$  of the tableau.

*Proof.* We have seen that a  $j$ -strand is complete in  $P_n$  when  $n \geq j$ , and holds  $K_{(j)3}^{(2j,j)} = j + 1$  tableaux. Going from  $P_n$  to  $P_{n-1}$ , starting with  $n = j$ , each time removes 3 tableaux from the strand, until doing so once more eliminates the strand. A  $j$ -strand then first appears in  $P_n$  with  $n = j - \lfloor \frac{j}{3} \rfloor = \lceil \frac{2j}{3} \rceil$ , and holds  $j + 1 \pmod 3$  tableaux.

Tableaux in different  $P_n$  which have the same second row correspond to the same points of the  $j$ -strand, using the inclusion. In a complete  $j$ -strand, the first tableau has no 2's on the second row. After  $\lfloor \frac{j}{3} \rfloor$  exchanges, the second row holds  $\lfloor \frac{j}{3} \rfloor$  2's and  $\lceil \frac{2j}{3} \rceil$  3's, so this corresponds to the second row of the first tableau of the  $j$ -strand at its first occurrence. ■

### 3.4.9 Type attributions for tableaux of content $(n)^3$

The results of previous sections allow us to define type for integer points  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5)$  in  $Yam_3((3n)^3)$ , which lie on  $\mathbb{P}_n$ . We say that a point has type  $\nu$  if and only if the corresponding tableau (of content  $(n)^3$ ) has type  $\nu$ . We use the words points and tableaux interchangeably to refer to elements in  $Yam_3((3n)^3)$ .

The type attribution of points in the polytope  $\mathbb{P}_n$  is obtained from the type attribution of points in the union of polytopes  $P_m$ , through the following rule.

By proposition 3.4.5, we know that the type of  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5)$  is :

- the type of  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, 0)$  if  $\kappa_5$  even ;
- the conjugate of the type of  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, 0)$  if  $\kappa_5$  odd.

We can then restrict our type attribution to points (tableaux) in  $P_n$ . Tableaux in  $P_n$  have shape  $(3n - j, j)$ , for  $0 \leq j \leq \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$ , and are partitioned into the  $j$ -strands which regroup tableaux of the same shape. We use this decomposition to describe type attributions.

Moreover, we have seen in section 3.4.5 that adding three cells with entries 1, 2, 3 to the first row does not change the type. If a tableau first appears in  $P_n$ , we can keep the same type for the corresponding tableau in  $P_N$  for  $N > n$ .

In the next sections, we study the behaviour of type attributions along the  $j$ -strands, and identify when a type attribution along  $j$ -strands is uniquely determined. For  $j$ -strands along which the type attribution is not entirely determined, we highlight some choices that appear to be simplest.

### 3.4.9.1 Determined type attributions

The next lemma tells us about the behaviour of 2-subtypes along  $j$ -strands. Recall that  $\boxed{1\ 2\ 3}$  and  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}}$  have 2-subtype  $\boxed{1\ 2}$ , and  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}}$  and  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}}$  have 2-subtype  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}}$ .

**Lemma 3.4.16 :** Along a  $j$ -strand of  $P_n$ , 2-subtypes alternate between  $\boxed{1\ 2}$  and  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}}$ .

The first tableau of any *complete*  $j$ -strand of  $P_n$  ( $j \leq n$ ) has 2-subtype  $\boxed{1\ 2}$ , and its last tableau has type

$$\begin{cases} \boxed{1\ 2\ 3} & \text{if } j \text{ even} \\ \boxed{\begin{smallmatrix} 1\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}} & \text{if } j \text{ odd} \end{cases} .$$

The first tableau of any *incomplete*  $j$ -strand of  $P_n$  ( $j > n$ ) has 2-subtype

$$\begin{cases} \boxed{1\ 2} & \text{if } j \equiv_2 n \\ \boxed{\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}} & \text{if } j \not\equiv_2 n \end{cases} ,$$

and its last tableau, has 2-subtype

$$\begin{cases} \boxed{1\ 2} & \text{if } j \text{ even} \\ \boxed{\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}} & \text{if } j \text{ odd} \end{cases} .$$

*Proof.* The alternance between 2-subtypes follows from the fact that the parity of the number of 2's on the second row of tableaux determines the 2-subtype.

In the case of complete  $j$ -strands, the first tableau has no entry 2 on its second row. Then its 2-subtype is  $\boxed{1\ 2}$ . For the last tableau, it has  $j$  entries 2 on its second row. Therefore its 2-subtype depends only on the parity of  $j$ . Moreover, as it corresponds to the tableau with only 2's in the second row, by the last rule of section 3.4.6, the type is obtained from the 2-subtype by adding a 3 to its first row, giving the types as above.

In the case of incomplete  $j$ -strands, the first tableau has  $j - n$  entries 2 on its second row. Therefore the number of 2's on the second row is even when  $j$  and  $n$  have the same parity, and odd otherwise, which gives us the 2-subtypes as noted. The last tableau has  $\kappa_2 = 2n - j$  entries 2 on its second row, so its 2-subtype depends only on the parity of  $j$ . ■

Using the inclusion from proposition 3.4.6, we see that a plethystic decomposition of  $h_n^3$  for all  $n$  is equivalent to coloring the points of strands of  $P_\infty = \bigcup_{n=0}^\infty P_n$  (by their type).

Let's start by examining the tableaux of  $P_n$  which have  $\kappa_2 = \kappa_4$ . These lie in the "center" of the  $P_n$ , at the junction of the planes  $\kappa_2 + \kappa_4 = n$  and  $\kappa_4 = \kappa_1 + \kappa_2$  which mark the boundary between  $P_n$  and  $P_{n+1}$  in  $P_\infty$ . These tableaux appear first in a new  $j$ -strand under the inclusion of  $P_n$  in  $P_{n-1}$ .

**Lemma 3.4.17 :** In order to be consistent with Chen's rule and proposition 3.4.6, the type for the points (tableaux) of  $P_n$  on the plane  $\kappa_2 = \kappa_4$  is determined by the value of the second part  $j$  of the associated partition  $(3n - j, j)$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boxed{123} & \text{if } j \equiv_6 0 \\ \boxed{\begin{array}{c} 12 \\ 3 \end{array}} & \text{if } j \equiv_6 1 \\ \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}} & \text{if } j \equiv_6 3 \\ \boxed{\begin{array}{c} 13 \\ 2 \end{array}} & \text{if } j \equiv_6 4 \end{array} \right.$$

*Proof.* There are two points in  $P_n$  which have  $\kappa_2 = \kappa_4 = i$  for a certain  $i \in \mathbb{N}$  :  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) \in \{(n - 2i, i, 0, i), (n - 2i - 1, i, 1, i)\}$ . The first lies in the strand associated to the partition  $(3n - 3i, 3i)$ , and the second, in the one associated to  $(3n - 3i - 1, 3i + 1)$ . Therefore, the only strands with a point on the plane  $\kappa_2 = \kappa_4$  have second part  $j \equiv_3 \{0, 1\} \equiv_6 \{0, 1, 3, 4\}$ .

Recall that a  $j$ -strand first appears in  $P_n$  for  $n = \lceil \frac{2j}{3} \rceil$ . Let  $j$  correspond to a new  $j$ -strand in  $P_n$ , so  $j = \frac{3n - (j \bmod 3)}{2}$ .

If  $(j \bmod 6) \in \{0, 3\}$ , then  $j = \frac{3n}{2}$ , so  $n$  must be even and  $K_{(n)^3}^{(3n-j, j)} = 1$ . By Chen's rules, this tableau must have type  $\boxed{1|2|3}$  if  $j \equiv_6 0$ , and type  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}}$  if  $j \equiv_6 3$ . This agrees with the 2-subtype, because the second row must hold  $\frac{3n}{2} - n = \frac{n}{2}$  entries 2, which has the same parity as  $j$ .

For  $(j \bmod 6) \in \{1, 4\}$ , we have that  $j = \frac{3n-1}{2}$ , so  $n$  must be odd and  $K_{(n)^3}^{(3n-j, j)} = 2$ . By Chen's rules, these two tableaux must have type  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1|2 \\ 3 \end{smallmatrix}}$  or  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1|3 \\ 2 \end{smallmatrix}}$ . The first tableau of the  $j$ -strand has  $(j-1)$  2's on the second row, and the second,  $j$  2's. Note that only the first rests on the plane  $\kappa_2 = \kappa_4$ . In the case  $j \equiv_6 1$ ,  $j$  is odd, so to respect the 2-subtype, the first tableau must be associated to  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1|2 \\ 3 \end{smallmatrix}}$ , and the second to  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1|3 \\ 2 \end{smallmatrix}}$ . In the case  $j \equiv_6 4$ , it is the opposite. ■

### 3.4.9.2 Choice of order for undetermined type attributions

In the previous section we have seen cases when the type of points of  $P_n$  is determined. We now examine cases where the type is not (entirely) determined.

We have seen in proposition 3.4.15 that new  $j$ -strands, which appear in  $P_n$  but not in  $P_{n-1}$ , have 1 ( $j \equiv_3 0$ ) or 3 ( $j \equiv_3 2$ ) points if  $n$  is even, and 2 points ( $j \equiv_3 2$ ) if  $n$  is odd. If such a  $j$ -strand holds 1 or 2 points, their types are entirely determined as seen in the previous section. If it holds three points, we have the following lemma.

**Lemma 3.4.18 :** If a  $j$ -strand holds three tableaux, then two of the tableaux have types  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1|2 \\ 3 \end{smallmatrix}}$  and  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1|3 \\ 2 \end{smallmatrix}}$ , and one has type  $\boxed{1|2|3}$  (if  $j$  is even) or  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}}$  (if  $j$  is odd). Moreover, the middle tableau of the  $j$ -strand must have type  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1|3 \\ 2 \end{smallmatrix}}$  if  $j$  is even, and type  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1|2 \\ 3 \end{smallmatrix}}$  if  $j$  is odd.

*Proof.* The first part follows directly from Chen's rules. The second part follows from the 2-subtype : since  $n$  even, if  $j$  is even, then only one tableau (corresponding to the middle one) has 2-subtype  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}}$ , so its type must be  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1|3 \\ 2 \end{smallmatrix}}$ ; if  $j$  is odd, the middle tableau is the only one to have 2-subtype  $\boxed{1|2}$ , so its type must be  $\boxed{\begin{smallmatrix} 1|2 \\ 3 \end{smallmatrix}}$ . ■

For a  $j$ -strand with three tableaux, the type of its middle tableau is then determined. For its first and last tableaux, the types are determined, but not the order of their attribution, ie which type is attributed to the first tableau, and which type to the last.

Moreover, going from  $P_n$  to  $P_{n+1}$  adds three points to all incomplete  $j$ -strands, one at the start, and two at the end (see figure 3.4). For attributing types, we observe the same pattern as in the previous lemma.

**Lemma 3.4.19 :** Let  $j > n$ , such that the  $j$ -strand is incomplete in  $P_n$ . Going from  $P_n$  to  $P_{n+1}$ , the  $j$ -strand holds three more tableaux : two of them must have types  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  and  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ , and the other must have type  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  if  $K_{(n^3)}^{(3n-j,j)} \equiv_2 j$ , or  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  otherwise. Among the two last tableaux of the  $j$ -strand, one has fixed type  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  or  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

*Proof.* We have that when  $j > n$ ,  $K_{(n+1)^3}^{(3(n+1)-j,j)} = K_{(n^3)}^{(3n-j,j)} + 3$ . The first part of the lemma follows from checking the new numbers obtained from Chen's rules. The other part follows using 2-subtypes, as two consecutive points cannot have the same 2-subtype. ■

Then, as  $m$  grows, the type of one of the two added points at the end of a  $j$ -strand (in  $P_m$ ) is determined, the two other types are also determined, but not the order of the attribution. We then say that these two points are paired under *undetermined attribution*. In other words, their type is one of the two with fixed 2-subtype, but which point of the pair gets which of the two types is not known. See figure 3.5 for a type attribution with determined types represented by large dots, and undetermined ones, by smaller dots. Notice how the undetermined pairs are positioned "symmetrically" on both side of the "middle attribution".

Finally, going from  $P_{j-1}$  to  $P_j$  the  $j$ -strand is completed, and this last attribution is nearly determined : the last tableau has only 2's in the second row so its type is determined by the fourth rule of section 3.4.5; and the type first tableau of the  $j$ -strand is determined half of the time :

**Lemma 3.4.20 :** The first tableau of any *complete*  $j$ -strand of  $P_n$  ( $j \leq n$ ) has type

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}} & \text{if } j \text{ is even} \\ \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}} \text{ or } \boxed{123} & \text{if } j \text{ is odd} \end{array} \right.$$

*Proof.* We have seen that the type of the last tableau of a complete  $j$ -strand is determined by the fourth stability rule of section 3.4.5. When  $j$  even, the complete  $j$ -strand holds  $j + 1$  tableaux, and so by the alternance of 2-type discussed in lemma 3.4.16, the first tableau must be of type  $\boxed{123}$  or  $\boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}}$ . The last tableau and the first are paired in the completion of the  $j$ -strand in terms of undetermined order of attribution : they have either type  $\boxed{123}$  or  $\boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}}$ . However, when  $j$  even, we have seen that the last tableau of the  $j$ -strand has type  $\boxed{123}$  by lemma 3.4.16. This then determines also the type of the first tableau to be  $\boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}}$ . When  $j$  odd, however, the attribution remains undetermined for the first tableau. ■

### 3.4.9.3 Plethystic type attributions

For a fixed  $j$ -strand, the type of all tableaux to the left of the "middle attribution" is undetermined, aside from the first tableau when  $j$  even. Since the undetermined attributions are paired, and only the order of the attribution is really undetermined, fixing a rule for the attribution of the types of these first tableaux (left of the "middle attribution") determines the others.

We can then describe a pattern which originates from the middle attribution, alternates between the 2-subtypes  $\boxed{12}$  and  $\boxed{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}}$  going left, and ends at the first tableaux of complete  $j$ -strands with either  $\boxed{123}$  or  $\boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}}$  (forced when  $j$  even).

Consider the two sets below, which regroup 3-types (standard tableaux with 3 cells) by their 2-subtype. Recall that we call them respectively *even types* and *odd types*.

$$\left\{ \boxed{123}, \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}} \right\} \quad \left\{ \boxed{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}}, \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}} \right\}$$

Even types                      Odd types



**Proposition 3.4.21 :** For any fixed  $j$ -strand, selecting alternately any type from even and odd types (of 3-types) generates an *attribution pattern* for the left points of the  $j$ -strand, starting from the middle attribution and going towards the start of the  $j$ -strand. When  $(j \bmod 6) \in \{0, 1, 5\}$ , the first type chosen must be odd, and when  $(j \bmod 6) \in \{2, 3, 4\}$ , it must be even.

Such a pattern determines a type attribution which is consistent with the restriction to the 2-subtype and Chen's rules, and preserves the type under the map  $\vee \boxed{123}$ . The last type of the pattern must be  $\boxed{\frac{12}{3}}$  when  $j$  even in order to respect the fourth rule of section 3.4.5.

There are many attribution patterns which agree with the above conditions. The simplest ones emerge from picking only one type in each set of even and odd types, and alternating between both, for all  $j$ -strands. We discuss them below, and show the first is the most consistent one.

#### 3.4.9.4 First type attribution

The first attribution pattern alternates between  $\boxed{\frac{12}{3}}$  and  $\boxed{\frac{13}{2}}$ . The resulting coloring is illustrated in figure 3.5. It gives the following type attribution.

**Theorem 3 :** Let  $T$  be a tableau of shape  $(3n - j, j)$  and content  $(n)^3$ , with  $\kappa_2$  entries 2, and  $k_{3,2}$  entries 3, on its second row. Define the type of  $T$  to be :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boxed{123} & \text{if } \kappa_2 \text{ even} \quad \text{AND} \quad 2\kappa_2 \geq k_{3,2} \quad \text{AND} \quad k_{3,2} \equiv_4 \{0, 1\} \\ \boxed{\frac{1}{2}} \\ \boxed{3} & \text{if } \kappa_2 \text{ odd} \quad \text{AND} \quad 2\kappa_2 \geq k_{3,2} \quad \text{AND} \quad k_{3,2} \equiv_4 \{2, 3\} \\ \boxed{\frac{12}{3}} & \text{if } \kappa_2 \text{ even} \quad \text{AND EITHER} \quad 2\kappa_2 < k_{3,2} \quad \text{OR} \quad k_{3,2} \equiv_4 \{2, 3\} \\ \boxed{\frac{13}{2}} & \text{if } \kappa_2 \text{ odd} \quad \text{AND EITHER} \quad 2\kappa_2 < k_{3,2} \quad \text{OR} \quad k_{3,2} \equiv_4 \{0, 1\} \end{array} \right.$$

The number of tableaux of each type coincides with Chen's formulas, and the type attribution respects the plethystic stability rules from section 3.4.5. In particular, the coefficient of  $s_\nu$  in the plethysm  $s_{\text{shape}(t)}[h_n]$  indexed by the standard tableau  $t$  is

$$c_\nu^{(t)} = |\{T \in \text{SSYT}(\nu, (n)^3) \mid \text{type}(T) = t\}|.$$

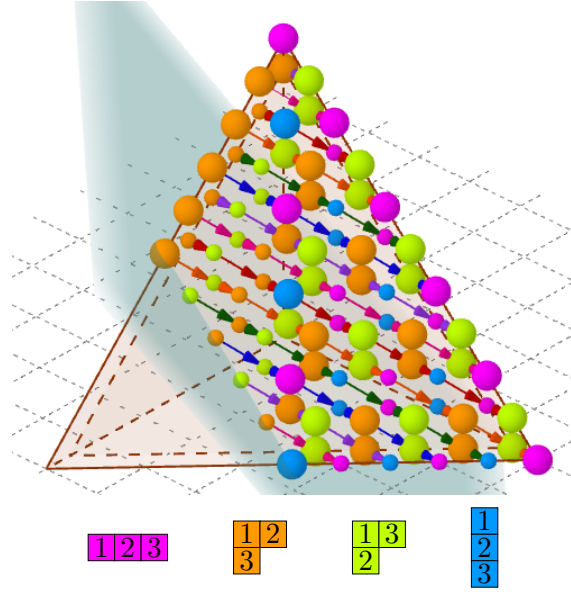


FIGURE 3.5: Coloring of the points of  $P_{10}$ , with colors giving the types above. Large dots indicate determined plethystic attributions, and smaller dots, undetermined ones.

**Remark 3.4.22 :** Since  $\kappa_4 = \lfloor \frac{\kappa_{3,2}}{2} \rfloor$ , the conditions amount to verifying whether  $\kappa_2 < \kappa_4$  or  $\kappa_2 > \kappa_4$ , and if  $\kappa_2 = \kappa_4$  (at the middle plane), the value of  $j$  modulo 6.

**Remark 3.4.23 :** This construction is interesting when considering the antidiagonals appearing in  $P_n$ , which correspond to the tableaux in different strands with the same number of 2's on the second row. They have the same 2-subtype. In a specific antidiagonal, the attributions are segregated in two blocks, before and after passing the threshold plane  $\kappa_2 = \kappa_4 = \lfloor \frac{\kappa_{3,2}}{2} \rfloor$ . When the number of 3's on the second line is greater than twice the number of 2's (but not a difference of 1), the type is either  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  or  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  (depending on the 2-subtype); and when it is smaller, types with the same parity of 2's on the second row alternate every two tableaux.

For the points with  $\kappa_2 = \kappa_4$  (exactly two points on each complete antidiagonal), the types are exchanged. This means that when constructing a tableau of content  $(n)^3$ , there is a threshold when adding 3's to the second line after which the plethystic attribution changes. This threshold occurs when about a third of the second row holds 2's.

*Proof of theorem 3.* Let's start by showing that this description does correspond to the choice of attributions left of the middle plane, which alternates between  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  and  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

Left of the middle plane  $\kappa_2 = \kappa_4 = \lfloor \frac{k_{3,2}}{2} \rfloor$ , we have the condition  $2\kappa_2 < k_{3,2}$ , so the attributed type is  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  if  $\kappa_2$  is even, and  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  if  $\kappa_2$  is odd, to respect the choice above and the restriction to the 2-subtypes. When  $(j \bmod 6) \in \{1, 4\}$ , the condition  $2\kappa_2 < k_{3,2}$  is still valid at the middle point, which then gives the desired attribution.

The middle attributions are always determined as we have seen in proposition 3.4.17. Let's now see how the choice of type alternance between  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  and  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  left of the middle plane force the description above right of the middle plane.

We do this explicitly for the case  $j \equiv_6 1$ . The other cases are done similarly.

When  $j = 6k + 1$ , the middle attribution is  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ , and the corresponding tableau has  $\kappa_2 = \lfloor \frac{j}{3} \rfloor = 2k$ , and  $\kappa_{3,2} = \lfloor \frac{2j}{3} \rfloor = 4k + 1$ . We then have  $2k_2 < k_{3,2}$  and  $k_2$  even. The next tableau to the right has determined attribution  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ , and has  $\kappa_2 = 2k + 1$ , and  $\kappa_{3,2} = 4k$ . Both attributions agree with the description above.

Continuing with  $j = 6k + 1$ , the next left attribution is  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ , and the two next attributions to the right are respectively  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ , the determined type of the addition of tableaux in the  $j$ -strand, and  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ , forced by the choice of the left attribution. The corresponding tableaux then have respectively  $\kappa_2$  odd, even and odd, and  $\kappa_{3,2} \equiv_4 2, 3, 2$ , which agrees with the description above.

Continuing, the next left attribution is  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ , and the two next attributions to the right are respectively  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ , the determined type of the addition of tableaux in the  $j$ -strand, and  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ , forced by the choice of the left attribution. The corresponding tableaux then have respectively  $\kappa_2$  even, odd and even, and  $\kappa_{3,2} \equiv_4 2, 1, 0$ , which again agrees with the description above.

All further left and right attributions are obtained by the procedure above, and those with  $2\kappa_2 \geq$

$k_{3,2}$  only depend on the parity of  $\kappa_2$  and the value of  $k_{3,2} \bmod 4$  as described above. When  $2\kappa_2 < k_{3,2}$ , the attributions depend only on the value  $\kappa_2$ , and alternate between  $\begin{array}{|c|} \hline 1\ 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$  and  $\begin{array}{|c|} \hline 1\ 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$ .

The verification for  $j = 6k + \ell$  for  $\ell \in \{0, 2, 3, 4, 5\}$  is done similarly : one verifies the middle attribution, and the other attributions fixed by the first occurrence of the  $j$ -strand and Chen's rules. Then, one validates that the one left and two right attributions added by going from  $P_n$  to  $P_{n+1}$  have the wanted properties in the description above. Doing this twice adds up the six plethysms of Chen's rules, and four attributions to the right of the  $j$ -strand, in a way that continuing the process simply repeats the previous steps. Therefore, this description agrees with the choice above for all  $j$ 's and  $n$ 's.

This description respects the restriction to the 2-subtypes by construction, as well as Chen's rules, as per proposition 3.4.21.

We then only need to verify that the first and last tableaux of complete  $j$ -strands have the desired types, which agree with the fourth rule of section 3.4.5. The last tableaux, which have all their 3's on their first row, should have type with a 3 on its first row, therefore giving types  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1\ 2\ 3 \\ \hline \end{array}$  or  $\begin{array}{|c|} \hline 1\ 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$ . The last tableau of a  $j$ -strand has no 3's on its second row, so it has  $k_{3,2} = 0$ , which does give the wanted two types. Moreover, when  $j$  even, this forces  $\kappa_2$  even (as  $k_{3,2} = 0$  and the second row holds only 2's and 3's), and so the type of the last tableau is  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1\ 2\ 3 \\ \hline \end{array}$ . Similarly, when  $j$  odd, then  $\kappa_2$  odd and the type of the last tableau is  $\begin{array}{|c|} \hline 1\ 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$  as wanted. This also forces the attribution of the first tableau of complete  $j$ -strands with  $j$  even to be  $\begin{array}{|c|} \hline 1\ 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$ , as discussed in lemma 3.4.20. ■

### 3.4.9.5 Second type attribution

This attribution pattern alternates between  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1\ 2\ 3 \\ \hline \end{array}$  and  $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$ . It was found independantly by Mike Zabrocki and coauthors (Colmenarejo *et al.*, 2022). However, this attribution pattern does not respect the fourth stability rule of section 3.4.5. We include it here for comparison, as it has interesting properties on anti-diagonals, with a clear threshold point at the middle plane (see the coloring of figure 3.6). It could still be interesting in some settings.

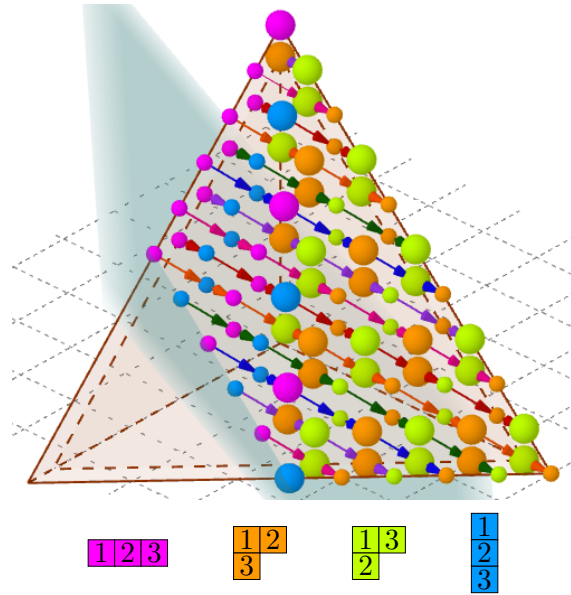


FIGURE 3.6: Coloring of the points of  $P_{10}$ , according to the second attribution pattern above, with colors giving the types above. The rightmost point of every  $j$ -strand does not respect the needed attributions under the fourth rule of section 3.4.5, and so the plethystic attribution of first and last tableaux are non-valid.

### 3.4.9.6 Third type attribution

Another valid attribution pattern alternates between  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  and  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ . This third attribution does respect the fourth stability rule of section 3.4.5. However, it does not seem to have a simple description in terms of the values  $k_2$  and  $k_{3,2}$ . The resulting coloring is illustrated in figure 3.7.

With this choice, we still have interesting properties on anti-diagonals, with a threshold point at the middle plane, but now with alternations between types with the same parity of 2's on the second row, regrouping adjacent couples of tableaux when  $k_2$  even, and no change of plethystic attribution right of the middle attributions when  $k_2$  odd.

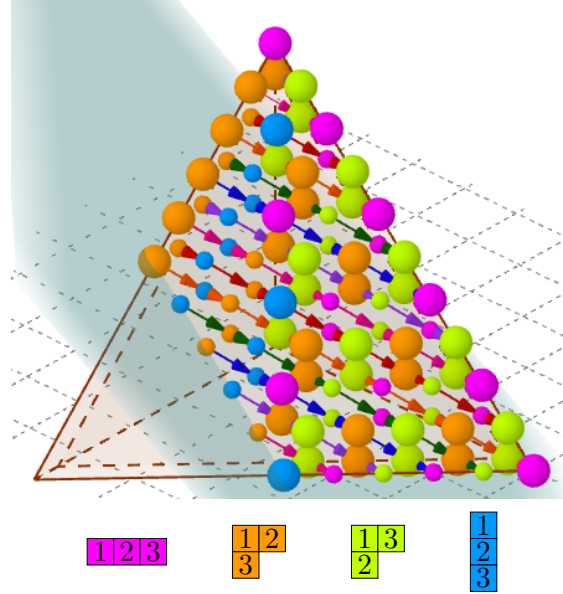


FIGURE 3.7: Another coloring of the points of  $P_{10}$ , with colors giving the types above. Large dots indicate determined plethystic attributions, and smaller dots, undetermined ones.

### 3.4.9.7 Other type attributions

There are many other attribution patterns that can be obtained from either the first or third above by exchanging the types of any pairs of tableaux with undetermined attribution. The patterns generated on the left of the middle threshold by other attributions will be more complex, since the alternance between even and odd types must then give patterns with cycles of types of even lengths of more than two types, or even acyclic patterns.

### 3.4.9.8 Decision

Therefore, we propose the first attribution pattern as the simplest, and most consistent, to give the type attribution for tableaux of content  $(n)^3$  in at most two rows. The type of tableaux with columns of height 3 is inferred by using the second rule of section 3.4.5 : keeping or conjugating the type of the smaller tableau according to the parity of the number of columns. This type attribution should also be used for any generalization for  $n > 3$ .

### 3.4.10 Generalizing to $e_n^m$

All results above can be generalized to  $e_n^3$ . To do so, first note that :

$$e_n^m = \omega(h_n)^m = \sum_{\mu \vdash nm} K_{(n)^m}^{\mu'} s_\mu.$$

The Kostka numbers  $K_{(n)^m}^{\mu'}$  can be interpreted as the number of *conjugate tableaux* of shape  $\mu$  and content  $(n)^m$ , which are tableaux such that the entries are strictly increasing along the rows and weakly increasing along the columns. This is because each of them are obtained by conjugating a tableau of shape  $\mu$  (*i.e.* reflecting it along the main diagonal).

Using proposition 3.4.1, we also have that

$$e_n^m = \sum_{\nu \vdash m} f^\nu s_\nu[e_n].$$

We can understand the plethystic decomposition of  $e_n^m$  by attributing types to conjugate tableaux. By using the  $\omega$  involution introduced in section 4.3.8, we have that

$$\langle s_\mu, s_\nu[e_n] \rangle = \langle \omega(s_\mu), \omega(s_\nu[e_n]) \rangle = \begin{cases} \langle s_{\mu'}, s_\nu[h_n] \rangle & \text{if } n \text{ is even;} \\ \langle s_{\mu'}, s_{\nu'}[h_n] \rangle & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

So, we have that the type of a conjugate tableau is :

- The same type as its conjugate tableau if  $n$  is even ;
- The conjugate type of its conjugate tableau if  $n$  is odd.

Using this, our results for the plethystic decomposition of  $h_n^m$  give the plethystic decomposition of  $e_n^m$ , so the results for  $h_n^3$  can be extended to  $e_n^3$ , and eventually those for  $h_\lambda^3$  to  $e_\lambda^3$ .

### 3.4.11 Plethysm of a product of symmetric functions

Let  $f_1, \dots, f_k$  be symmetric functions. We study the plethystic decomposition of  $(f_1 \cdot \dots \cdot f_k)^m$ , using the knowledge of the plethystic decomposition of each  $f_i^m$ , in order to apply it to  $h_\lambda$  and  $e_\lambda$ .

It turns out that it involves an understanding of the Kronecker coefficients, which we don't have in general. For small values of  $m$ , we can compute them, and doing so, we give explicit results for  $m \leq 3$ . We then use results from (Maas-Gariépy et Tétreault, 022a) to show how to apply this technique to  $h_\lambda^m$  and  $e_\lambda^m$ , and get an explicit plethystic decomposition of  $h_\lambda^3$  and  $e_\lambda^3$ .

### 3.4.11.1 The general case

Consider the symmetric function  $(f_1 \cdots f_k)^m$ . There are two possible plethystic decompositions, depending on whether we decompose the whole product, or first the power of each function separately. These decompositions respectively give the following.

$$\begin{aligned} (f_1 \cdots f_k)^m &= \sum_{t \in \text{SYT}_m} s_{\text{shape}(t)}[f_1 \cdots f_k] \\ (f_1 \cdots f_k)^m &= f_1^m \cdots f_k^m \\ &= \prod_{i=1}^k \left( \sum_{t_i \in \text{SYT}_m} s_{\text{shape}(t_i)}[f_i] \right) \\ &= \sum_{(t_1, \dots, t_k) \in \text{SYT}_m^k} \left( \prod_{i=1}^k s_{\text{shape}(t_i)}[f_i] \right). \end{aligned}$$

In our case, we know the latter decomposition, and we want to recover the former. That is, we would like to find a map  $F_{m,k} : \text{SYT}_m^k \rightarrow \text{SYT}_m$  such that

$$s_{\text{shape}(t)}[f_1 \cdots f_k] = \sum_{(t_1, \dots, t_k) \in F_{m,k}^{-1}(t)} \left( \prod_{i=1}^k s_{\text{shape}(t_i)}[f_i] \right).$$

We call such a map a *Kronecker map*. We can construct one recursively on  $k$ . When  $k = 2$ , we use the following result, which can be found in (Macdonald, 1998, Chapter 1, Equation 7.9).

**Proposition 3.4.24 :** For  $\mu \vdash m$  and  $f_1, f_2$  two symmetric functions. Then :

$$s_\mu[f_1 f_2] = \sum_{\alpha, \beta \vdash m} g_{\alpha, \beta}^\mu s_\alpha[f_1] s_\beta[f_2],$$

where  $g_{\alpha, \beta}^\mu$  are the *Kronecker coefficients*.



These coefficients are the coefficients of  $s_\mu$  in the *internal product*  $s_\alpha * s_\beta$ , which is defined in (Macdonald, 1998, Chapter 1, Section 7).

We have seen that all plethysms  $s_\nu[g]$  in  $g^m$  can be indexed by a standard tableau  $t$  of shape  $\nu \vdash m$ , so this result tells us that the map  $F_{m,2}$  must be such that the number of pairs  $(t_1, t_2) \in F_{m,2}^{-1}(t)$ , where  $t_1$  is of shape  $\alpha$  and  $t_2$  is of shape  $\beta$ , is equal to  $g_{\alpha,\beta}^{\text{shape}(t)}$ . This is the reason why we call  $F_{m,k}$  a Kronecker map. Kronecker coefficients have no nice combinatorial description, but are computable. Constructing a Kronecker map for all  $m$  seems unlikely, as there are usually many choices for a Kronecker map because Kronecker coefficients only tell us about the shape of the pairs of tableaux, not the tableaux themselves.

When  $m = 2$ , there is only one choice of Kronecker map, which is :

$$F_{2,2}^{-1}(\boxed{12}) = \left\{ \left( \boxed{12}, \boxed{12} \right), \left( \boxed{1}, \boxed{2} \right) \right\}; F_{2,2}^{-1} \left( \boxed{1} \right) = \left\{ \left( \boxed{12}, \boxed{1} \right), \left( \boxed{1}, \boxed{12} \right) \right\}.$$

When  $m = 3$ , there are many possible choices. The map below is such that if  $(t_1, t_2) \in F_{3,2}^{-1}(t)$ , for  $t \in \left\{ \boxed{123}, \boxed{12} \right\}$ , then  $t_1 \downarrow_2 = t_2 \downarrow_2$ , and otherwise,  $t_1 \downarrow_2 = (t_2 \downarrow_2)'$ . In other words,  $(t_1 \downarrow_2, t_2 \downarrow_2) \in F_{2,2}^{-1}(t \downarrow_2)$ . However this choice still doesn't determine all pairs : there are four possible Kronecker maps which respect this condition, obtained from the map below by interchanging pairs of tableaux of the same shape  $(2,1)$  between the even or odd types.

$$\begin{aligned} F_{3,2}^{-1}(\boxed{123}) &= \left\{ \left( \boxed{123}, \boxed{123} \right), \left( \boxed{12}, \boxed{12} \right), \left( \boxed{1}, \boxed{1} \right) \right\}; \\ F_{3,2}^{-1} \left( \boxed{12} \right) &= \left\{ \left( \boxed{12}, \boxed{123} \right), \left( \boxed{123}, \boxed{12} \right), \left( \boxed{1}, \boxed{13} \right), \left( \boxed{13}, \boxed{1} \right), \left( \boxed{13}, \boxed{13} \right) \right\}; \\ F_{3,2}^{-1} \left( \boxed{13} \right) &= \left\{ \left( \boxed{13}, \boxed{123} \right), \left( \boxed{123}, \boxed{13} \right), \left( \boxed{1}, \boxed{12} \right), \left( \boxed{12}, \boxed{1} \right), \left( \boxed{13}, \boxed{12} \right) \right\}; \\ F_{3,2}^{-1} \left( \boxed{1} \right) &= \left\{ \left( \boxed{123}, \boxed{1} \right), \left( \boxed{12}, \boxed{13} \right), \left( \boxed{1}, \boxed{123} \right) \right\}. \end{aligned}$$

For  $m = 4$ , there is 10 standard tableaux with 4 cells, so there are  $10^2 = 100$  pairs of tableaux to divide in 10 sets. While it is not too difficult to construct a Kronecker map  $F_{4,2}$  in that case, there are many possible choices and we can see that the difficulty increases rapidly.

Note that all pairs of tableaux always appear exactly once.

Once  $F_{m,2}$  has been fixed, then using proposition 3.4.24 recursively, we can define the map  $F_{m,k}$  to be the map  $F_{m,2} \circ (F_{m,2} \times \text{Id}) \circ \dots \circ (F_{m,2} \times \text{Id}^{k-3}) \circ (F_{m,2} \times \text{Id}^{k-2})$ . Thus, the only difficulty to construct  $F_{m,k}$  is to determine the map  $F_{m,2}$ .

**Example 3.4.25 :** Using the map  $F_{3,2}$  as above,

$$F_{3,3} \left( \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \right) = F_{3,2} \left( F_{3,2} \left( \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \right), \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \right) = F_{3,2} \left( \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \right) = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}.$$

This means that the copy of  $s_{21}[f_1]s_{21}[f_2]s_{21}[f_3]$  indexed respectively by tableaux  $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$ ,  $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$  and  $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$  contributes to the copy of  $s_{21}[f_1 f_2 f_3]$  indexed by  $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$ .

### 3.4.11.2 The case $h_\lambda^m$

Let  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  be a partition. Recall that  $h_\lambda = h_{\lambda_1} \dots h_{\lambda_k}$ . We denote

$$\lambda^m = \underbrace{(\lambda_1, \dots, \lambda_1)}_{m \text{ times}}, \dots, \underbrace{(\lambda_k, \dots, \lambda_k)}_{m \text{ times}}$$

the partition where each part is repeated  $m$  times. We use this notation so that  $h_\lambda^m = h_{\lambda^m}$ .

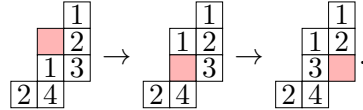
We show how to use the plethystic decomposition of  $h_n^m$  and the map  $F_{m,k}$  from the previous section to obtain the plethystic decomposition of  $h_\lambda^m$ . This has been done by the authors for  $m = 2$  in (Maas-Gariépy et Tétreault, 022a), and we generalize this construction. This generalization is somewhat straightforward; see the article for a more detailed exposition.

By the Pieri rule, we have that :

$$h_\lambda^m = \sum_{\mu \vdash m|\lambda|} K_{\lambda^m \mu} s_\mu$$

Each copy of the Schur functions  $s_\mu$  above is indexed by a tableau of content  $\lambda^m$ . We decompose such tableau  $T$  into a tuple of tableaux which each index a Schur function  $s_{\nu_i}$  in  $h_{\lambda_i}^2$ . To do so,

we consider subtableaux of  $T$  with some subsets of entries, given below, and use Schützenberger’s *jeu de taquin* (Schützenberger, 1977) to rectify them. See (Fulton, 1996) or (Sagan, 2001) for more details about jeu de taquin and its properties. A jeu de taquin slide starts at an inner corner of the tableau, exchanges that empty cell with the cell directly under it or to its right, always respecting the conditions on rows and columns for tableaux. Exchanges continue until the empty cell can no longer be moved. Below is illustrated the jeu de taquin slide starting at the inner corner in red :



Doing this until there are no more inner corners, we obtain a (straight) tableau. The order of the slides applied of a skew tableau  $T$  do not matter, and we always obtain the same *rectification* of  $T$ , denoted  $\text{Rect}(T)$  (Schützenberger, 1977). The rectification of the skew tableau above is  $\begin{array}{c} \boxed{1} \boxed{1} \\ \boxed{2} \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \end{array}$ .

Let’s now describe the decomposition of a tableau  $T \in \text{SSYT}(\mu, \lambda^m)$  for  $\mu \vdash m|\lambda|$ . For  $1 \leq i \leq k$ , let  $T^{(i)}$  be the skew tableau obtained by taking the cells with entries in  $\{(i-1)m+1, (i-1)m+2, \dots, im\}$  in  $T$ . Then, let  $\tilde{T}^{(i)}$  be the tableau obtained by subtracting  $(i-1)m$  to each entry ; this way,  $\tilde{T}^{(i)}$  has content  $(\lambda_i)^m$ . Finally, let  $T_i = \text{Rect}(\tilde{T}^{(i)})$ . We define the decomposition fo  $T$ ,  $\text{Dec}_m(T)$ , to be the tuple of tableaux  $(T_1, \dots, T_k)$ . This process is illustrated in figure 3.8.

We can then determine the type of each  $T_i$  according to theorem 1, and use the Kronecker map  $F_{3,k}$  given in section 3.4.11.1 to get a unique standard tableau  $t \in \text{SYT}_m$ . We define it to be the type of  $T$ . We show below that this is well defined.

It is easy to derive from results in (Maas-Gariépy et Tétreault, 022a) that :

**Proposition 3.4.26 :** Let  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  be a partition and  $m$  a positive integer. For  $1 \leq i \leq k$ , let  $T_i$  be a tableau of content  $(\lambda_i)^m$ . Then, we have :

$$\prod_{i=1}^k s_{\text{shape}(T_i)} = \sum_T s_{\text{shape}(T)},$$

where the sum is over all  $T$  of content  $(\lambda)^m$  such that  $\text{Dec}_m(T) = (T_1, \dots, T_k)$ .

**Remark 3.4.27 :** In a previous article by the authors (Maas-Gariépy et Tétreault, 022a), we construct skew tableaux  $T_1 * T_2 * \dots * T_k$ , where  $T_i$  has content  $(\lambda_i)^2$ , so only the number  $m$  of different entries in each  $T_i$  differs here. This skew tableau is then rectified using jeu de taquin to obtain the straight tableau  $T$ . The tableaux  $T$  we sum on are then exactly tableaux of content  $\lambda^m$  which are rectifications of such skew tableaux.

**Corollary 3.4.28 :** Suppose that we know the plethystic decomposition of  $h_n^m$  for all  $n$  for a given  $m$ , i.e. we can attribute types to tableaux of content  $(n)^m$ . Then, for any  $(t_1, \dots, t_k) \in \text{SYT}_m^k$ , we have

$$\prod_{i=1}^k s_{\text{shape}(t_i)}[h_{\lambda_i}] = \sum_T s_{\text{shape}(T)},$$

where the sum is over all tableaux  $T$  of content  $\lambda^m$  such that  $\text{Dec}_m(T) = (T_1, \dots, T_k)$ , with  $\text{type}(T_i) = t_i$  for all  $i$ .

Then, by using results from the previous section, we finally obtain that :

**Theorem 4 :** Suppose that we know the plethystic decomposition of  $h_n^m$  for all  $n$  for a given  $m$ , and that we know a Kronecker map  $F_{m,k} : \text{SYT}_m^k \rightarrow \text{SYT}_m$ . Let  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  be a partition and  $T$  be a tableau of content  $\lambda^m$ . If  $\text{Dec}_m(T) = (T_1, \dots, T_k)$ , let  $t_i$  be the type of  $T_i$ . Define  $t = F_{m,k}(t_1, \dots, t_k)$  to be the type of  $T$ . Then :

$$s_{\text{shape}(t)}[h_\lambda] = \sum_T s_{\text{shape}(T)},$$

where the sum is over all tableaux  $T$  of content  $\lambda^m$  having type  $t$ .

Thus, to understand the plethystic decomposition of  $h_\lambda^m$ , we only need to understand the plethystic decomposition of  $h_n^m$  (for all  $n$ ) and a Kronecker map  $F_{2,m}$ , and then apply the results of this section. This is done explicitly here for  $m = 3$ , so we can understand the plethystic decomposition of  $h_\lambda^3$ . See figure 3.8 as an example, where the types are attributed as in section 3.4.9.4, and the image of  $F_{3,3}$  has been computed in example 3.4.25.

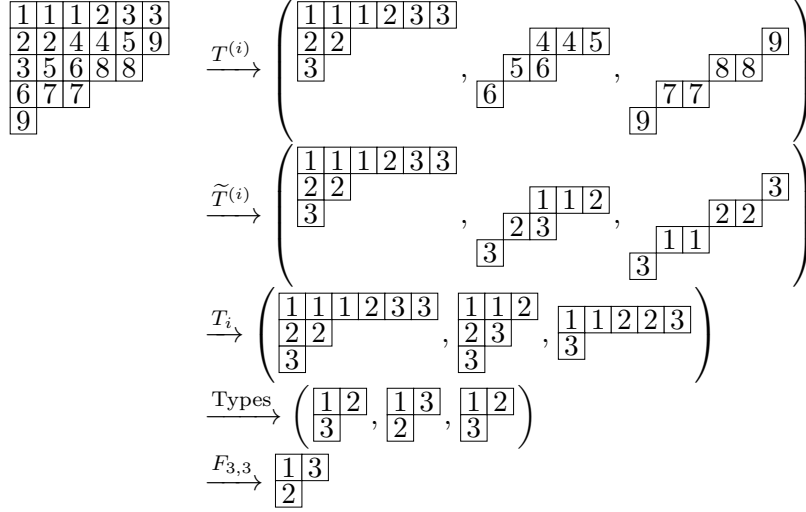


FIGURE 3.8: Attributing a type to a tableau of shape  $(6, 6, 5, 3, 1)$  and content  $(3, 2, 2)^3$ .

### 3.4.11.3 The case $e_\lambda^m$

The same technique can be applied to understand the plethystic decomposition of  $e_\lambda^m$ , by applying the  $\omega$  involution. We have seen how to obtain the plethystic decomposition of  $e_n^m$  from the one of  $h_n^m$  in section 3.4.10, by attributing types to conjugate tableaux of content  $(n)^m$ .

So we have :

$$e_\lambda^m = \omega(h_\lambda^m) = \sum_{\mu \vdash m|\lambda} K_{\lambda^m}^{\mu'} s_\mu.$$

Recall that  $K_{\lambda^m}^{\mu'}$  counts the number of conjugate tableaux of shape  $\mu$  and content  $\lambda^m$ . Let  $T'$  be such a conjugate tableau of content  $\lambda^m$ . As before, define  $T'^{(i)}$  to be the skew conjugate tableau obtained by taking the cells with entries in  $\{(i-1)m+1, (i-1)m+2, \dots, im\}$ . Let  $\tilde{T}'^{(i)}$  be the skew conjugate tableau obtained by subtracting  $(i-1)m$  to every entry of  $T'^{(i)}$ , and finally let  $T'_i = \text{Rect}((\tilde{T}'^{(i)})')$  (so we rectify the conjugate of  $\tilde{T}'^{(i)}$ , and conjugate again). We define  $\text{Dec}'_m(T') = (T'_1, \dots, T'_k)$ .

Then, we have the following theorem, which is obtained by applying the  $\omega$  involution on results of the previous section.

**Theorem 3.4.29 :** Suppose that we know the plethystic decomposition of  $e_n^m$  for all  $n$ , and that we know a Kronecker map  $F_{m,k} : \text{SYT}_m^k \rightarrow \text{SYT}_m$ . Let  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  be a partition, and  $T'$  be a conjugate tableau of content  $\lambda^m$ . If  $\text{Dec}'_m(T') = (T'_1, \dots, T'_k)$ , let  $t_i$  be the type of  $T'_i$ . Define  $t = F_{m,k}(t_1, \dots, t_k)$  to be the type of  $T'$ . Then,

$$s_{\text{shape}(t)}[e\lambda] = \sum_{T'} s_{\text{shape}(T')},$$

where the sum is over all conjugate tableaux  $T'$  of content  $\lambda^m$  having type  $t$ .

### 3.4.12 Conclusion

We have defined in this article the simplest and most consequent plethystic decompositions for  $h_n^3$ , by using various techniques. Moreover, we have shown how to extend these results to understand the plethystic decomposition of  $e_n^3$ ,  $h_\lambda^3$  and  $e_\lambda^3$ . We have seen that this can be used to understand plethysms in the plethystic decomposition of  $h_\lambda^m$  and  $e_\lambda^m$  with  $m > 3$  by using the recursiveness of type attribution. We have also described other general rules for attributing types, which apply for any  $m$ .

In the future, we hope to be able to understand the plethystic decomposition of  $h_n^4$ . Using results in this article, it would imply a plethystic decomposition of  $e_n^4$ , and by constructing a Kronecker map  $F_{4,2}$ , of  $h_\lambda^4$  and  $e_\lambda^4$ . We also hope to be able to use these results for the plethystic decomposition of  $s_\lambda^m$  when we know the one of  $h_n^m$ .

### 3.4.13 Acknowledgements

The authors are grateful to Franco Saliola for his support, and to Mike Zabrocki for sharing related conjectures which helped formulate theorem 3. FMG received support from NSERC.

### 3.4.14 Appendix : Counting integer points on $\mathbb{P}_n$

We give here a closed formula for the number of integer points in both  $P_m$  and  $\mathbb{P}_n$  defined in section 3.4.8. This is of interest, since they respectively give the number of tableaux of content  $(n)^3$

with at most two rows, and the number of tableaux of content  $(n)^3$  of any shape.

We have seen that  $\mathbb{P}_n$  can be visualized through its projection onto the union of polytopes  $P_m$ , which represent tableaux of content  $(n)^3$ , and of shape  $\nu$  with  $\nu_3 = n - m$ . Figure 3.2 illustrates the first  $P_n$ 's, for  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Together, they give projections of  $\mathbb{P}_6$  at  $\kappa_5 = 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$ .

The numbers of points in these  $P_m$ 's are 1, 3, 7, 12, 19, 27, 37, etc., which give the numbers of points in  $\mathbb{P}_n$  : 1, 4, 11, 23, 42, 69, 106, etc., where each is obtained from the previous sequence by summing the number of points in  $P_m$ 's for  $m \leq n$ . These two sequences are known on the OEIS as sequences A077043 and A019298. This interpretation of these sequences as counting tableaux however appears to be new.

**Proposition 3.4.30 :** Let  $n \in \mathbb{N}$ . The number of integer points on  $\mathbb{P}_n$  is equal to the sum of integer point in all  $P_m$  for  $m \leq n$  :

$$\#\{\text{integer points } (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5) \text{ in } \mathbb{P}_n \} = \sum_{0 \leq m \leq n} \underbrace{\left[ \frac{(m+2)(m+1)}{2} + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \right]}_{\#\{\text{integer points } (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5) \text{ in } P_m \}}$$

The proof rests on the following lemmas. In particular, we show that the last part of the formula for the number of integer points in  $P_m$  gives the number of points which are added to all incomplete strands when going from  $P_{m-1}$  to  $P_m$ .

**Lemma 3.4.31 :** Final points of strands in  $P_n$  are integer points on lines  $\kappa_1 + \kappa_2 = n$  ( $\kappa_4 = 0$ ) or on  $\kappa_2 + \kappa_4 = n$  with  $\kappa_2 \geq \kappa_4$  ( $\kappa_1 = 0$ ). In particular, they all have  $\kappa_3 = 0$ , so they lie on  $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4 = n$ .

The position of the final point of the  $j$ -strand in  $P_n$  is  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4) = (n - j, j, 0)$  if  $0 \leq j \leq n$ , and  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4) = (0, 2n - j, j - n)$  if  $n \leq j \leq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$ .

*Proof.* Let's start by noting that all final points must lay on the lines  $\kappa_1 + \kappa_2 = n$  or  $\kappa_2 + \kappa_4 = n$ . If

$\kappa_3 = 1$ , we can always apply the transformation  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4) + (0, +1, 0)$ , which changes the boolean value of  $\kappa_3$ . So final points must have  $\kappa_3 = 0$ , and must lie on the polytope  $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4 = n$ . If neither  $\kappa_1 = 0$  or  $\kappa_4 = 0$  (and  $\kappa_3 = 0$ ), then we can apply the two transformations  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4) + (-1, +1, -1) + (0, +1, 0)$  iteratively until one or both are zero. Then no more transformations can be applied, and the final point must lie on the wanted lines. Note that if a starting point has  $\kappa_1 + \kappa_2 \geq \kappa_4$ , then so will the final point.

Recall that points  $(\kappa_1, \kappa_3, \kappa_2, \kappa_4, \kappa_5)$  on  $\mathbb{P}_n$  that give  $\nu = (3n - j, j)$ , are such that  $\nu_3 = \kappa_5 = 0$ ,  $\nu_2 = j = \kappa_2 + \kappa_3 + 2\kappa_4 + \kappa_5$  and  $\nu_1 = 3n - j = 3\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4 + \kappa_5$ . Therefore, the final point of  $(3n - j, j)$  in  $P_n$  will be such that  $j = \kappa_2 + 2\kappa_4$ , and  $3n - j = 3\kappa_1 + 2\kappa_2 + \kappa_4$ .

Final point will have either  $\kappa_1 = 0$ , or  $\kappa_4 = 0$ , as seen above. If  $\kappa_4 = 0$ , then  $j = \kappa_2$  and  $\kappa_1 = n - j$ , which is greater or equal to zero if and only if  $0 \leq j \leq n$ . Therefore, the  $n + 1$  partitions  $(3n - j, j)$  such that  $0 \leq j \leq n$  will have their final point on  $\kappa_1 + \kappa_2 = n$  ( $\kappa_4 = 0$ ), in position  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4) = (n - j, j, 0)$ . Now, if  $\kappa_1 = 0$ , then  $\kappa_2 = 2n - j$  and  $\kappa_4 = j - n$ , which is greater or equal to zero if and only if  $n \leq j \leq \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$ . Therefore, the  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$  partitions  $(3n - j, j)$  such that  $n \leq j \leq \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$  will have their final point on  $\kappa_2 + \kappa_4 = n$  ( $\kappa_1 = 0$ ), in position  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4) = (0, 2n - j, j - n)$ . ■

**Lemma 3.4.32 :** For  $\nu = (3n - j, j)$  fixed, the value of  $K_{(n)3}^{(3n-j,j)} = \min(\nu_1 - \nu_2, \nu_2 - \nu_3) + 1$  is given by  $\kappa_2 - \kappa_4 + 1$ , for  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4)$  the final point of the strand of  $\nu$  in  $P_n$ .

*Proof.* We have seen that if  $j \leq n$  then the final point is in position  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4) = (n - j, j, 0)$  in  $P_n$ . Then  $K_{(n)3}^\nu = \nu_2 - \nu_3 + 1 = j + 1 = \kappa_2 - \kappa_4 + 1$ .

Similarly, if  $n \leq j \leq \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$ , then the final point is in position  $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_4) = (0, 2n - j, j - n)$  in  $P_n$ . Then  $K_{(n)3}^\nu = \nu_1 - \nu_2 + 1 = 3n - 2j + 1 = \kappa_2 - \kappa_4 + 1$ . ■

*Proof of Proposition 3.4.30.* The  $n + 1$  strands in  $P_n$  associated with partitions  $(3n - j, j)$  with  $0 \leq j \leq n$  have their final points on line  $\kappa_1 + \kappa_2 = n$ , and have  $K_{(n)3}^{(3n-j,j)} = j + 1$ . Therefore the



number of integer points on  $P_n$  in these strands is  $\sum_{0 \leq j \leq n} (j+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .

The  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  strands associated with partitions  $(3n-j, j)$  with  $n < j \leq \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$  have their final point on the line  $\kappa_2 + \kappa_4 = n$ , with  $\kappa_2 \geq \kappa_4$ . Then they have  $K_{(n)^3}^{(3n-j, j)} = 3n - 2j + 1 = n + 1 - 2\ell$ , where  $\ell = j - n$ .

The number of point on these strands is  $\sum_{1 \leq \ell \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (n + 1 - 2\ell) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \left( n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . This gives the wanted result for the number of points in  $P_n$ .

As discussed above,  $\mathbb{P}_n$  is constructed from all the  $P_m$  with  $m \leq n$ , which respectively contain integer points with  $\kappa_5 = n - m$ . Therefore, we have the wanted result for  $\mathbb{P}_n$ . ■

## CHAPITRE 4

### FONCTIONS QUASI-SYMÉTRIQUES ET QUASI-CRISTAUX

#### 4.1 Résumé de l'article

Cet article prend une approche détournée pour étudier le pléthysme. Comme nous l'avons vu à la section 1.3.2, le pléthysme de deux fonctions de Schur admet une expression en terme des fonctions fondamentales quasi-symétriques. On souhaite donc mieux comprendre comment une somme symétrique de fonctions fondamentales quasi-symétriques se décompose dans la base de Schur, afin de pouvoir donner la décomposition de Schur d'un tel pléthysme.

Pour ce faire, on commence par étudier la décomposition d'une fonction de Schur dans la base des fonctions quasi-symétriques fondamentales. On sait qu'il existe une telle décomposition depuis l'introduction des fonctions quasi-symétriques par Gessel (Gessel, 1984). Celle que nous utiliserons utilise la composition de descente de tableaux standards (Gessel, 2019) :

$$s_\lambda = \sum_{T \in \text{SYT}(\lambda)} F_{\text{DesComp}(T)}$$

Cette étude est réalisée à l'aide de la théorie des cristaux, ce qui est totalement nouveau. Rappelons qu'un cristal connexe  $B(\lambda)$  donne une représentation visuelle de  $s_\lambda$ , où les monômes sont représentés par les tableaux associés qui forment les sommets du graphe de cristal, et ses arêtes orientées et étiquetées indiquent les transformations (de cristal) permettant de passer d'un tableau à l'autre. Cela donne alors un graphe orienté et étiqueté sur les tableaux de forme  $\lambda$ , tel que vu à la section 1.2.2. La décomposition ci-haut implique qu'il existe une partition des sommets (tableaux) de façon à ce que chaque sous-ensemble décrive les monômes d'une fonction quasi-symétrique fondamentale apparaissant dans cette décomposition.

On utilisera les notions de *bandes horizontales maximales* et de *découpage minimal* pour partitionner l'ensemble des sommets (les tableaux de forme  $\lambda$ ) en sous-ensembles. Celles-ci généralisent aux tableaux semi-standard les notions de descentes et compositions de descentes des tableaux standards, et sont définis de la façon suivante. Au sein d'un tableau donné, pour obtenir la première

bande horizontale maximale, on adjoint maximalement les bandes horizontales des  $1, 2, \dots$ , etc. jusqu'à ce qu'ajouter la suivante brise la condition (pour l'ensemble de cases) d'être une bande horizontale. On poursuit ensuite avec les entrées suivantes jusqu'à obtenir la deuxième bande horizontale maximale, et ainsi de suite. L'ensemble des formes gauches donnant les bandes horizontales maximales est alors défini comme le découpage en bandes horizontales maximales, ce qu'on appellera le découpage minimal. Les longueurs des bandes horizontales maximales donnent les parts d'une composition  $\alpha$ , on dira alors que le découpage minimal de ce tableau est de type  $\alpha$ .

On montre que les tableaux ayant un même découpage minimal de type  $\alpha$  apparaissent dans le même sous-ensemble de sommets (du cristal), et donnent les monômes de la même fonction quasi-symétrique fondamentale  $F_\alpha$  apparaissant dans la décomposition de  $s_\lambda$  dans cette base. Il est important de noter qu'ici on peut faire une distinction entre les différentes fonctions quasi-symétriques  $F_\alpha$  apparaissant dans  $s_\lambda$  pour un  $\alpha$  fixé : elles correspondent à différents découpages minimaux de type  $\alpha$  pour  $\lambda$ .

On montre que ces sous-ensembles génèrent des sous-graphes induits connexes de  $B(\lambda)_n$ , qu'on dénote  $B(T_\alpha)$ , pour  $T_\alpha$  leur source de poids et découpage minimal de type  $\alpha$ . Le fait que ces sous-graphes induits soient connexes est particulièrement surprenant et intéressant : il est donc possible d'en décrire une structure de graphe « quasi »-cristal. La décomposition donnée par Gessel indique aussi qu'il existe une sous-composante pour chaque tableau standard de forme  $\lambda$  (Gessel, 2019), et que les compositions associées sont données par leur découpage minimal (ou leur descentes). Cela s'explique par la surjection sur les tableaux d'une sous-composante donnée par leur standardisation, la même pour tous les tableaux de la sous-composante, et donnant un tableau standard possédant le même découpage minimal.

Pour un  $n$  fixé, on étudie la structure de quasi-cristal des sous-composantes de  $B(\lambda)_n$  associées à  $\alpha$ , et on démontre qu'elles sont isomorphes, en tant que graphes orientés, aux cristaux  $B(|\alpha|)_{n-\ell(\alpha)+1}$ , où certaines étiquettes sont modifiées. De plus, on montre que toutes les sous-composantes associées à  $\alpha$  sont isomorphes entre-elles (cette fois-ci comme graphe orienté et étiqueté), ce qui justifie l'étude de la classe des sous-composantes de composition de descente  $\alpha$ . On nommera cette classe le quasi-cristal  $B(\alpha)_n$ .

Il est possible de dénombrer les sommets de  $B(m)_{n-s+1}$ , ce qui donne la formule combinatoire suivante qui énumère les tableaux de forme  $\lambda$  et d'entrées au plus  $n$ , dont l'ensemble est dénoté  $SSYT(\lambda)_n$ . Une telle formule n'était pas connue auparavant.

$$|SSYT(\lambda)_n| = \sum_{0 \leq d \leq D} f_d^\lambda \cdot \binom{|\lambda| + n - d - 1}{n - d - 1},$$

où  $f_d^\lambda$  dénote le nombre de tableaux standards de forme  $\lambda$  ayant  $d$  descentes, et où  $D$  est le nombre de descentes maximal pour un tableau standard de forme  $\lambda$ .

Le même contexte nous permet également de donner une preuve constructive à une formule combinatoire pour les nombres de Kostka  $K_\mu^\lambda$ , pour lesquels il n'y avait qu'une preuve bijective. Il est peu probable qu'il existe une formule « simple » pour ces nombres, vu le fait que leur détermination est liée à la résolution de la problématique  $P = NP$  (Narayanan, 2006; Mulmuley, 2012). Ainsi, la formule combinatoire permet une meilleure compréhension de ceux-ci.

Nous étudierons également la position des sous-graphes induits  $B(T_\alpha)$  au sein de  $B(\lambda)$ . Nous démontrons que les sous-composantes associées à  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$  et  $\overleftarrow{\alpha} = (\alpha_s, \dots, \alpha_1)$  apparaissent nécessairement en paires, sont duales l'une à l'autre (en tant que graphes) et sont positionnées dualement au sein de  $B(\lambda)$ . Pour ce faire, nous étudions l'involution d'évacuation de Schützenberger généralisée EVAC, introduite à la section 4.3.6. Celle-ci est un anti-automorphisme de cristal entre les deux sous-composantes. Ainsi, tous les tableaux d'une sous-composante sont l'image par l'évacuation des tableaux de l'autre. De plus, puisque EVAC est un anti-automorphisme de cristal, l'image d'un tableau sera en position duale dans l'autre sous-composante, et dans le cristal : si un tableau  $T$  est atteint par une séquence d'opérateurs  $f_{i_j}$  de cristal appliqués respectivement à la source du cristal ou à celle de la sous-composante, alors  $EVAC(T)$  est atteint par la séquence « duale » d'opérateurs de cristaux  $e_{n-i_j}$  à partir respectivement du puit du cristal ou celui de la sous-composante. Ainsi, les deux composantes sont duales entre-elles, mais également positionnées de façons duales dans  $B(\lambda)$ , ce qui est bien visible dans la figure 4.2.

On étudie ensuite la structure de  $B(\lambda)$  obtenue en remplaçant chaque sous-composante  $B(T_\alpha)$  par le tableau standard ayant le même découpage minimal, et en préservant une arête étiquetée  $i$  entre

deux tableaux standards si cette valeur est celle minimale telle qu'il existe une arête étiquetée  $i$  entre les deux sous-composantes associées. On appelle cette structure squelette, et on montre qu'elle est fixe pour  $n \geq S$ , où  $S - 1$  est le plus grand nombre de descentes pour  $\lambda$ . On conjecture que les relations du squelette encodent les relations sur les mots entre monoïde plaxique et coplaxique. On compare ensuite le squelette à une autre construction de graphe orienté et étiqueté sur les tableaux standards de forme  $\lambda$ , les graphes d'équivalence duale, introduits par Assaf (Assaf, 2015). Ces derniers encodent les relations duales pour  $RSK$ . En particulier, on conjecture que la structure de graphe du squelette pour  $\lambda$  inclut celle du graphe d'équivalence duale pour  $\lambda$ . Ainsi, le squelette encoderait, entre autres relations, ces relations duales de  $RSK$ .

Finalement, on décrit des applications des résultats précédents pour le pléthysme. En premier lieu, la formule ci-haut dénombrant les tableaux semi-standard permet de dénombrer les monômes *moniaux* dans les pléthysmes  $s_\mu[s_\lambda]$ , c'est-à-dire exprimés comme une somme de monômes de coefficients 1. Cela permet, entre autres, de décrire la complexité de certains algorithmes de calcul pléthystique. Puis, on décrit un algorithme permettant d'écrire une somme symétrique de fonctions quasi-symétriques fondamentales dans la base des fonctions de Schur. Cet algorithme n'est pas plus efficace en terme de temps de calcul que les autres algorithmes connus, mais sa structure peut permettre des avancées puisqu'il décrit une relation élégante entre les deux bases. Celle-ci pourrait permettre d'expliquer certains résultats surprenants de de Boeck, Paget et Wildon (de Boeck *et al.*, 2021), en lien avec les tableaux de tableaux dits *maximaux*.

## 4.2 Place de cet article dans la littérature et contributions originales

Les fonctions quasi-symétriques ont été introduites par Gessel, comme il a été souligné à la section 1.2.3. La décomposition utilisée ici d'une fonction de Schur dans la base des fonctions quasi-symétriques fondamentales est toutefois plus récente (Gessel, 2019).

Il est également connu que les fonctions de Schur  $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$  peuvent être visualisées par les cristaux connexes pour  $A_{n-1}$ . Toutefois, aucune étude ne s'était penché sur la décomposition d'un cristal en sous-composantes associées aux fonctions quasi-symétriques fondamentales, ni sur la structure que pourraient avoir les fonctions quasi-symétriques fondamentales comme cristal ou

quasi-cristal. Ceci est probablement la contribution la plus importante de cet article.

De plus, à notre connaissance, l'utilisation des bandes horizontales maximales pour des tableaux semi-standards est nouvelle. Celles-ci ont été utilisées par Gessel (pour des tableaux standards) pour démontrer la décomposition ci-haut, sous le nom de « runs ». Elles sont alors reliées intrinsèquement aux descentes des tableaux standards. Les compositions de descentes n'ont pas été définies pour les tableaux semi-standards auparavant.

La formule permettant d'énumérer les tableaux de forme fixée  $\lambda$  et d'entrée au plus  $n$  est une contribution très importante. En effet, il n'existait aucune telle formule jusqu'à maintenant. De même, la preuve constructive pour la formule permettant de calculer les nombres de Kostka est également une contribution importante. Ce sont des questions ouvertes depuis longtemps.

Danilov, Karzanov et Koshevoy ont également étudié les notions de sous-composantes et squelette de cristal (Danilov *et al.*, 2008). Ils décrivent dans cet article un modèle alternatif pour les cristaux de types  $A_{n-1}$ , nommé « Crossing model », autrement dit, les sommets ne sont pas des tableaux, mais des objets appelés des croisements. Ils utilisent les axiomes de Stembridge, des axiomes locaux pour déterminer si le graphe considéré est un cristal. Dans ce cadre particulier, ils décrivent une décomposition en sous-composantes et une structure de cristal. Toutefois le squelette n'est pas décrit comme un graphe sur des objets « standards », et il n'y a pas de lien établi entre les sous-composantes du cristal et les fonctions quasi-symétriques. Ainsi, il est ardu de comparer les deux constructions, et de déterminer si elles sont équivalentes. Il serait très intéressant de faire ce travail dans le futur. De plus, il serait intéressant d'étudier ces axiomes de Stembridge pour voir lesquels sont respectés par les quasi-cristaux, dans l'éventualité où il serait possible de les décrire simplement par le relâchement de certains des axiomes.

Une structure de graphe orienté et étiqueté sur les tableaux standards de forme  $\lambda$  a également été introduite par Assaf, celle des graphes d'équivalence duale (Assaf, 2015). Elle est étudiée, et comparée à celle de squelette de cristal, à la section 4.3.7, et on montre qu'elles sont surprenamment similaires. Établir des structures sur les tableaux standards est d'intérêt dans la littérature, entre autres pour décrire des relations entre monoïdes plaxique et coplaxique comme fait à la section 4.3.7.

### 4.3 Quasicrystal Structure of Fundamental Quasisymmetric Functions, and Skeleton of Crystals (Maas-Gariépy, 2023)

#### 4.3.1 Abstract

We use crystals of tableaux and descent compositions to understand the decomposition of Schur functions  $s_\lambda$  into Gessel's fundamental quasisymmetric functions  $F_\alpha$ . The connected crystal of tableaux  $B(\lambda)$ , associated to  $s_\lambda$ , is shown to be partitionned into a disjoint union of connected induced subgraphs  $B(T_\alpha)$  corresponding to the  $F_\alpha$ 's.

We show that these subgraphs, which we call quasicrystals, are isomorphic (as graphs) to specific crystals of tableaux. This allows us to give a formula for the number of tableaux of shape  $\lambda$  and maximal entry  $n$ . We also use this setting to give a constructive proof of a combinatorial formula for Kostka numbers  $K_\mu^\lambda$ . We study the position of the quasicrystals within the crystal  $B(\lambda)$ , and show that they appear in dually positionned pairs, with the crystal anti-automorphism between them being given by a generalization of Schützenberger's evacuation. We introduce the notion of skeleton of the crystal  $B(\lambda)$  given by replacing each subgraph  $B(T_\alpha)$  by the standard tableau of shape  $\lambda$  with same (semi-standard) descents. We conjecture that the graph of the skeleton includes the dual equivalence graph for  $\lambda$ , introduced by Assaf, and that its subgraphs of tableaux with fixed number of descents have particular structures. Finally, we describe applications to plethysm, among which we give an algorithm to express any symmetric sum of fundamental quasisymmetric functions into the Schur basis, whose construction gives insight into the relationship between the two basis.

#### 4.3.2 Introduction

Quasisymmetric functions were introduced by Gessel (Gessel, 1984), in the context of the study of symmetric functions, which they generalise. Notably, the plethysm  $s_\mu[s_\lambda]$  of two Schur functions has been shown to be a sum of fundamental quasisymmetric functions (Loehr et Warrington, 2012). Understanding the decomposition of such a plethysm into the Schur basis has been an open problem for more than 80 years, since its initial introduction by Littlewood (Littlewood, 1936). Therefore, studying both the basis of fundamentatal quasisymmetric functions and Schur functions,

and relations between them, has the potential of greatly advancing our understanding of plethysm.

We propose here a study of Schur functions and fundamental quasisymmetric functions through crystal theory. We believe this to be of value, since both plethysm and crystal theory originate from representation theory.

A *crystal* is a visual representation of the character of a representation of a group in the shape of a labelled oriented graph on combinatorial objects. Irreducible characters then correspond to connected components of crystals, which then are crystals in their own right. A good introductory reference on crystals is *Crystals for dummies* (Shimozono, 2005). For a thorough understanding, see *Crystal Bases* (Bump et Schilling, 2017).

We focus on crystals of type  $A_{n-1}$ , which correspond to characters of representations of  $GL_n$ , which are encoded by symmetric functions : formal power series such that permuting any two variables gives the same function. The Schur function  $s_\lambda$  encodes the irreducible characters  $\chi^\lambda$  for  $GL_n$ .

The problem of decomposing a symmetric function into the basis of Schur functions corresponds to breaking down a character (and the associated representation) into its smallest pieces : irreducible characters (or representations). In the setting of crystals, we are interested in understanding the decomposition of crystals into connected components  $B(\lambda)_n$ , which correspond to the Schur functions  $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ .

Furthermore, the following formula of Gessel (Gessel, 2019) tells us that these connected components can be decomposed further into subcomponents corresponding to fundamental quasisymmetric functions.

$$s_\lambda = \sum_{T \in \text{SYT}(\lambda)} F_{\text{DesComp}(T)}$$

Understanding this decomposition in the crystal setting is the first aim of the article. The second aim is to understand the added structure on quasisymmetric functions within the crystal structure, and relations between them.



We introduce a notion of *minimal parsing of type  $\alpha$*  of a shape  $\lambda$ , corresponding to a set of non-overlapping horizontal bands of respective length  $\alpha_i$  covering  $\lambda$ . A minimal parsing of type  $\alpha$  is such that filling the  $i^{\text{th}}$  horizontal band by  $i$ 's yields a semistandard tableau of filling  $\alpha$ , which we denote  $T_\alpha$ . We say that any tableau with such a minimal parsing has *descent composition  $\alpha$* , thus extending the notion of descent compositions for standard tableaux. See section 4.3.3 for examples. We show the following.

**Theorem 5 :** The connected crystal  $B(\lambda)_n$ , of tableaux of shape  $\lambda$  and entries at most  $n$ , is partitioned into disjoint connected induced subgraphs  $B(T_\alpha)_n$  which correspond to quasisymmetric functions  $F_\alpha(x_1, \dots, x_n)$ , where the subsets of vertices are tableaux with a fixed minimal parsing of type  $\alpha$ . The sources  $T_\alpha$  of these subcomponents have filling  $\alpha$ . The number  $f_\alpha^\lambda$  of subgraphs of type  $\alpha$  is the number of standard tableaux of shape  $\lambda$  and descent composition  $\alpha$ .

As a consequence of the following theorem, we have that for a fixed composition  $\alpha$ , all subcomponents  $B(T_\alpha)_n$  are isomorphic as labelled oriented graphs (see corollary 4.3.16). Moreover this is true no matter the crystal  $B(\lambda)_n$  they live in, so no matter the shapes of the sources  $T_\alpha$ . We denote the class of such subcomponents  $B(\alpha)_n$ , and call them *quasicrystals*. We can then study their graph structure :

**Theorem 6 :** Let  $\alpha$  be a composition of  $m$  in  $s$  parts. The quasicrystal  $B(\alpha)_n$  is isomorphic (as an oriented graph) to  $B(m)$  with maximal entry  $n - s + 1$ . In particular, the oriented graph structure of  $B(\alpha)_n$  is independent of partitions  $\lambda$  for which  $\alpha$  is a descent composition.

An application of both theorems above, and of proposition 4.3.20, is the following formula, giving the number of tableaux with fixed shape  $\lambda$  and maximal entry  $n$ .

**Theorem 7 :** The number of tableaux of shape  $\lambda$  with maximal entry  $n$ ,  $SSYT(\lambda)_n$ , is given

by

$$|SSYT(\lambda)_n| = \sum_{0 \leq d \leq D} f_d^\lambda \cdot \binom{|\lambda| + n - d - 1}{n - d - 1},$$

where  $f_d^\lambda$  denotes the number of standard tableaux of shape  $\lambda$  with  $d$  descents, and  $D$  is the maximal number of descents in a standard tableau of shape  $\lambda$ .

The existence of "nice" formulas for counting tableaux has generated open questions for many years. For the similar problem of giving a "nice" formula for Kostka numbers  $K_\mu^\lambda$ , open for many years, it has been conjectured that no "nice" formula exists, given the chaotic behavior of those numbers (Stanley et Fomin, 1999) (see the discussion on mathoverflow on this question (Morales, 2010), viewed a thousand times and with contributions from experts).

There is however a known combinatorial formula below, using descents, which had only a bijective proof, and for which we give a constructive proof using the setting of quasicrystals.

**Theorem 4.3.1 (Proposition 4.3.26 (Sagan, 2001, Proposition 5.3.6)) :** The Kostka number  $K_\mu^\lambda$  counting tableaux of shape  $\lambda$  and composition weight  $\mu$  is given by the following formula, where  $\alpha \preceq \mu$  if  $\mu$  is a refinement of  $\alpha$ .

$$K_\mu^\lambda = |\{T \in SYT(\lambda) \mid DesComp(T) \preceq \mu\}|$$

After studying the structure of quasicrystals  $B(\alpha)$ , we study the underlying structures of the crystal  $B(\lambda)$ .

**Theorem 8 :** Subcomponents  $B(T_\alpha)$  and  $B(T_{\alpha^-})$  necessarily appear in pairs in a given crystal  $B(\lambda)$ . They are dual one to another as graphs, and are positionned in dual locations within  $B(\lambda)$ , with the anti-automorphism of crystal between both being the evacuation map.

By replacing each subcomponent  $B(T_\alpha)$  in  $B(\lambda)_n$  by the unique standard tableau with same minimal parsing, and preserving only the edges of minimal index between subcomponents, we obtain

what we call the skeleton of  $B(\lambda)_n$ , denoted  $Skeleton(\lambda)_n$ .

**Theorem 9 :** For  $\lambda \vdash m$  fixed, let  $S$  be the maximal length of a descent composition for tableaux of shape  $\lambda$ . Then the skeletons  $Skeleton(\lambda)_n$  of the crystals  $B(\lambda)_n$  are equal for all  $n \geq S$ . For  $1 \leq n \leq S$ , the skeleton of  $B(\lambda)_n$  is the induced subgraph of  $Skeleton(\lambda)_S$  containing standard tableaux of shape  $\lambda$  with descent composition having at most  $n$  parts.

The skeleton is then determined for all  $n$ , and we can define  $Skeleton(\lambda) = Skeleton(\lambda)_S$  to be the skeleton of  $B(\lambda)$ , thus giving its underlying structure.

We conjecture that the (unoriented and unlabelled) graph structure of the skeleton contains that of the dual equivalence graph for  $\lambda$ , introduced by Assaf (Assaf, 2015) (see conjecture 4.3.41). We also conjecture that the induced subgraph of the skeleton holding standard tableaux with fixed number of descents have interesting structures (see conjecture 4.3.38).

The third aim of the article is to give some applications to plethysm of the results above (see section 4.3.8), notably counting monomials in plethysms  $s_\mu[s_\lambda]$  and understanding how a (symmetric) sum of quasicrystals can be regrouped into connected components associated to Schur functions. To do the latter, we introduce an elegant algorithm. This algorithm is not more efficient than others currently in use, but its structure may help understand better plethysm.

### 4.3.3 Background

#### 4.3.3.1 Words and crystals on words

Recall that a *word* (of length  $k$  on  $n$ ) is a sequence of  $k$  letters  $w \in [n]^{\otimes k}$  on the alphabet  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . We say a word  $w$  has *weight*  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  where  $\beta_i$  counts occurrences of the letter  $i$  in  $w$ .

One can define *crystal operators*  $e_i$  and  $f_i$  on words, for  $1 \leq i < n$ . A general description is that  $e_i$  changes a letter  $i + 1$  into an  $i$ , or is null, as  $f_i$  changes an  $i$  into an  $i + 1$ , or is null, and if  $e_i, f_i$

are not null, then  $e_i \circ f_i = f_i \circ e_i = Id$ . The exact action of  $e_i$  and  $f_i$  on words is described using the following *parenthesis rule* :

1. Each letter  $i$  is associated to a parenthesis  $($ , and each letter  $i + 1$ , to a parenthesis  $)$ .
2. Coupled parenthesis are removed to obtain a sequence of uncoupled parenthesis  $)^{\phi_i}(\epsilon_i$ .
3.  $e_i$  acts on the letter  $i + 1$  corresponding to the leftmost uncoupled parenthesis  $($ , and  $f_i$  acts on the letter  $i$  corresponding to the rightmost uncoupled parenthesis  $)$ .

**Example 4.3.2 :** Let  $w = 1331233312233$ , and  $i = 1$ .

The associated sequence of parenthesis is  $\overset{1}{(} \overset{3}{)} \overset{3}{(} \overset{1}{)} \overset{2}{(} \overset{3}{)} \overset{3}{(} \overset{3}{)} \overset{1}{(} \overset{2}{)} \overset{2}{(} \overset{3}{)} \overset{3}{)}$ , which is reduced to

$\overset{1}{(} \overset{3}{)} \overset{3}{(} \overset{1}{)} \overset{2}{(} \overset{3}{)} \overset{3}{(} \overset{3}{)} \overset{1}{(} \overset{2}{)} \overset{2}{(} \overset{3}{)} \overset{3}{)}$  by removing coupled parenthesis.

Then  $f_1(w) = 1332233312233$  and  $e_1(w) = 13312233311233$ .

A *crystal on words* is then a labelled oriented graph on words where the edges  $w \rightarrow w'$  are labelled by  $i$  if  $f_i(w) = w'$ . See figure 4.1 for an example of a crystal on words.

#### 4.3.3.2 Tableaux and Schur functions

Recall that *partitions* are weakly decreasing positive integer vectors  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$ . If the sum of the parts of  $\lambda$  gives  $m$ , then we say that  $\lambda$  is a *partition of  $m$* , noted  $\lambda \vdash m$  or  $|\lambda| = m$ , and use  $\ell(\lambda) = \ell$  to denote its number of parts, or length. We identify the partitions with their *Young diagram*, the top- and left-justified array of boxes with  $\lambda_i$  boxes in the  $i^{th}$  row. A *tableau of shape  $\lambda$*  is a filling of the cells of  $\lambda$  with integers. We say that a tableau is *semistandard* if the entries weakly increase along rows from left to right, and increase down columns. A tableau is said to be *standard* if it is semistandard and entries 1 to  $|\lambda|$  appear exactly once. Unless otherwise stated, we use the word tableau for semistandard tableau.

The *weight* (or *filling*) of a tableau is the composition  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots)$  where  $\gamma_i$  counts its entries  $i$ . It is possible to associate a word to a tableau by using a fixed reading order for its entries. We

use the *row reading order*, noted  $rw$  : we read rows from left to right, starting with the last row, and ending with the first.

**Example 4.3.3 :**  $t = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 5 & \\ \hline 3 & 4 & & & \\ \hline 5 & & & & \\ \hline \end{array}$  is a tableau of shape  $(5, 4, 2, 1)$  and weight  $(2, 3, 3, 2, 2)$ .

Its row reading word is  $rw(t) = 534223511234$ .

To a tableau  $t$  of weight  $\gamma$ , it is also possible to associate the monomial  $x^t = x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} x_3^{\gamma_3} \dots$ . This gives the connection between tableaux and *Schur functions* : the Schur function associated to a partition  $\lambda$  is  $s_\lambda = \sum_{t \in SSYT(\lambda)} x^t$ , where  $SSYT(\lambda)$  is the set of all tableaux of shape  $\lambda$ .

The cells containing entries  $i$  in a tableau form a *horizontal band* : a skew shape such that each column contains at most one cell (and its entry  $i$ ), and reading the tableau left to right, each new cell with content  $i$  must be weakly North-East (NE) to the preceding ones. We say the NE-most cell of a horizontal band is its head, and its South-West (SW)-most cell, its tail. We say a horizontal band (containing a certain number of entries, up to entries  $i$ ) is *maximal* if adding the "next" horizontal band (of entries  $i + 1$ ) is not a horizontal band anymore. We use the expression *maximal horizontal band* to mean both the skew shape defined by a certain filling, and its filling.

We call the set of maximal horizontal bands of a tableau its *minimal parsing*, and say it has *type*  $\alpha$  if the length of the  $i^{\text{th}}$  maximal horizontal band is given by  $\alpha_i$ . Among the tableaux with a fixed minimal parsing of type  $\alpha$ , there is a unique one which also has weight  $\alpha$ , obtained by filling the  $i^{\text{th}}$  maximal horizontal band by entries  $i$ , for all  $i$ . We denote these tableaux  $T_\alpha$ .

**Example 4.3.4 :** Let  $T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}$  and  $T' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 & & \\ \hline 3 & & & & & \\ \hline \end{array}$ , where the maximal horizontal bands of the two tableaux are distinguished.

$T$  has minimal parsing of type  $(2, 3, 3, 1)$ , and its horizontal bands (of individual entries  $i$ ) are not all maximal. The tableau  $T_{(2,3,3,1)}$  with same minimal parsing appears in example 4.3.6. For its

part,  $T'$  has minimal parsing of type  $(2, 3, 6)$ , and all its horizontal bands are maximal. It is then equal to  $T_{(2,3,6)}$  for this specific minimal parsing of type  $(2, 3, 6)$ .

The integer vector  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$  giving the length of the maximal horizontal bands in a tableau  $T$  is what we'll call its *descent composition*, denoted  $DesComp(T) = \alpha$ . This corresponds to the traditional notion of descent composition (in standard tableaux), which we recall below. We see in section 4.3.3.4 that descent compositions can be used to define fundamental quasisymmetric functions, which are central to our study.

For standard tableaux, we can consider their *descents* : entries  $i$  such that  $i + 1$  appears in a row of greater index. To descent sets, we can associate bijectively a *descent composition* : if  $\{i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$  is the descent set of a standard tableau with  $m$  cells, then  $\alpha = (i_1, i_2 - i_1, i_3 - i_2, \dots, m - i_k)$  is the associated descent composition. It is a composition of  $m$ , and gives the lengths of the maximal horizontal bands of the standard tableau. There is then a unique semistandard tableau with weight  $\alpha$  and same minimal parsing as the standard tableau. This gives the following.

**Proposition 4.3.5 :** Semistandard tableaux with minimal parsing of type and weight  $\alpha$  are in bijection with standard tableaux with descent composition  $\alpha$ .

We can also *standardize a tableau* using the minimal parsing : entries in the first maximal horizontal band are relabelled by 1 to  $\alpha_1$ , the ones in the second, by  $\alpha_1 + 1$  to  $\alpha_1 + \alpha_2$ , etc. This gives the same result as standardizing a tableau through its reading word, as seen below.

**Example 4.3.6 :** The tableau  $T_{(2,3,3,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 & \\ \hline 3 & & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$  standardizes to  $std(T_{(2,3,3,1)}) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 4 & 7 & \\ \hline 6 & & & \\ \hline 9 & & & \\ \hline \end{array}$ .

This standard tableau has descent set  $\{2, 5, 8\}$ , and descent composition  $(2, 3, 3, 1)$ , which gives the lengths of the maximal horizontal bands in both tableaux. All tableaux with the same minimal parsing of type  $(2, 3, 3, 1)$ , like the tableau  $T$  in example 4.3.4, standardize to  $std(T_{(2,3,3,1)})$ .

The *descents of a word*  $w$  are the positions  $i$  such that  $w_i > w_{i+1}$ . The descent composition of a word  $w$  corresponds to the lengths of maximal weakly increasing factors in  $w$ . Words can then be standardized uniquely in a way that preserves descents : entries  $i$  of  $w$  are replaced from left to right by entries  $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{i-1} + 1$  to  $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_i$ , where  $\beta_j$  counts letters  $j$  in  $w$ . A tableau  $T$  can be standardized by standardizing its reading word  $rw(T)$ , which gives the same result as above.

#### 4.3.3.3 Crystals of tableaux

*Crystal operators* on tableaux are defined as applying the (word) crystal operators on the reading word of a tableau, and changing the corresponding entry. Tableaux obtained in this way are always semistandard (Bump et Schilling, 2017). These crystal operators define an oriented graph structure on the set of semistandard tableaux, where there is an arrow from  $T$  to  $T'$  labelled  $i$  if  $T' = f_i(T)$ .

Since only entries change and the shape is fixed, the connected components regroup all the tableaux of the same shape  $\lambda$  which we denote  $B(\lambda)_n$  if the fixed maximal entry is  $n$ . It corresponds to the irreducible character  $\chi^\lambda$  of  $GL_n$  given by the Schur function  $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . More generally, we consider the infinite graph  $B(\lambda)$  corresponding to  $s_\lambda$ . The unique source vertex of  $B(\lambda)$  (and any  $B(\lambda)_n$ ) is the tableau of shape and filling  $\lambda$ , which we denote  $1_\lambda$ . Note that it corresponds to  $T_\lambda$ .

For example,  $1_{(5,4,2)} = T_{(5,4,2)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & \\ \hline 3 & 3 & & & \\ \hline \end{array}$ .

Crystals of tableaux are especially important to study, because any connected crystal of type  $A_{n-1}$  is isomorphic to a crystal of tableau :

**Theorem 4.3.7 ((Bump et Schilling, 2017)) :** For any connected Stembridge crystal  $C$  for  $GL_n(\mathbb{C})$  (of type  $A_{n-1}$ ), there is a unique source. Its weight is a partition  $\lambda$  and  $C \simeq B(\lambda)$ .

Crystals of words and of tableaux are strongly linked through the Robinson-Schensted-Knuth (RSK) algorithm, jeu de taquin, and the plactic and coplactic monoids (see section 4.3.7).

Figure 4.1 illustrates corresponding connected components of crystals of  $GL_n$  on words and tableaux, with words appearing as skew tableaux whose rows give their maximal weakly increasing factors.

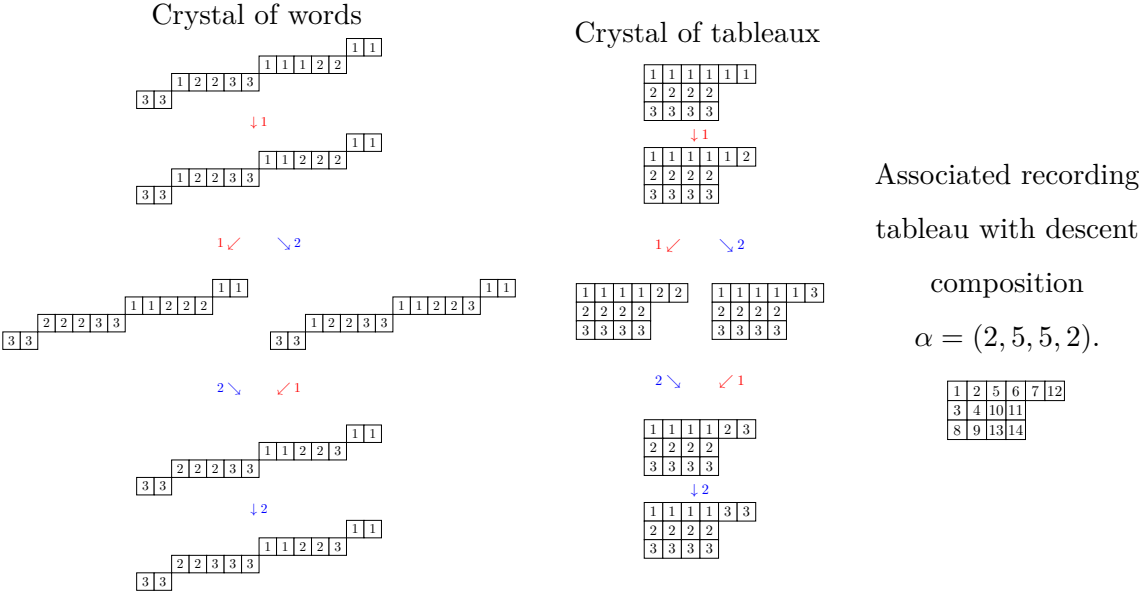


FIGURE 4.1: Isomorphic connected components of crystals on words and tableaux

4.3.3.4 Fundamental quasisymmetric functions and descent compositions

The ring of quasisymmetric functions  $QSym$ , introduced by Gessel, generalizes and contains the ring of symmetric functions (Gessel, 1984). We will consider the basis of  $QSym$  given by the *fundamental quasisymmetric functions*, which are indexed by compositions :

$$F_\alpha = \sum_{\alpha \preceq \beta} M_\beta, \text{ where } M_\beta = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1}^{\beta_1} x_{i_2}^{\beta_2} \dots x_{i_k}^{\beta_k},$$

and  $\alpha \preceq \beta$  indicates that  $\beta$  is a refinement of  $\alpha$  : adjacent parts of  $\beta$  can be summed to obtain  $\alpha$ . The  $M_\beta$  are *monomial quasisymmetric functions*, and also form a basis of  $QSym$ .

For example,  $\beta_1 = (2, 1, 3, 2, 4, 1)$  and  $\beta_2 = (1, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$  are distinct, but incomparable, refinements of  $\alpha = (2, 4, 2, 5)$ . Therefore  $M_{\beta_1}$  and  $M_{\beta_2}$  both appear in  $F_\alpha$ .

Schur functions (which are also quasisymmetric functions) a decomposition in the basis of funda-



mental quasisymmetric functions. The decomposition below was proved by Gessel (Gessel, 2019) by using horizontal bands in standard tableaux, called runs, and an involution acting on them.

$$s_\lambda = \sum_{T \in SYT(\lambda)} F_{DesComp(T)}. \quad (*)$$

#### 4.3.4 Decomposing a crystal into subcomponents corresponding to fundamental quasisymmetric function

We show how the above formula (\*), expressing  $s_\lambda$  as a sum of fundamental quasisymmetric functions  $F_\alpha$ , induces a decomposition of the crystal of tableaux  $B(\lambda)$  into subcomponent, where each subcomponent corresponds to one of the  $F_\alpha$  in (\*).

We remark that crystal operators on tableaux do not necessarily preserve descent compositions. This is because changing the value of entries can modify the maximal horizontal bands along with the weight of the tableau. However, tableaux of the same parsing will be grouped together in connected subcomponents of  $B(\lambda)$  :

**Proposition 4.3.8 :** The set of tableaux of shape  $\lambda$  with a fixed minimal parsing of type  $\alpha$  form a connected induced subgraph of  $B(\lambda)$ . Its source is the tableau  $T_\alpha$  with filling and (same) minimal parsing of type  $\alpha$ , and its vertices give the monomials appearing in  $F_\alpha$ .

An example of the decomposition can be seen in figure 4.2.

*Proof.* Let's consider the definition of  $F_\alpha$ . For  $T_\alpha$  a tableau of filling and minimal parsing into horizontal bands of type  $\alpha$ ,  $x^{T_\alpha} = x^\alpha$  appears in  $M_\alpha \subseteq F_\alpha$ , since  $\alpha \preceq \alpha$ . Now, any refinement  $\alpha \preceq \beta$  gives a (non-)minimal parsing of the same maximal horizontal bands. Any filling  $\gamma$  obtained from  $\beta$  by (potentially) adding zero parts gives a valid filling of the same (non-)maximal horizontal bands, and the associated monomial will appear in  $M_\beta$ . In particular,  $\alpha \preceq \beta \preceq \gamma$ . Therefore, the set of tableaux of shape  $\lambda$  with fixed minimal parsing of type  $\alpha$  (and any weight  $\alpha \preceq \gamma$ ) gives all monomials of  $F_\alpha$ .

Crystal operators  $f_i$ , for  $1 \leq i \leq n-1$ , modify the weight of tableaux by  $b_{i+1} - b_i$ , where  $b_i$  is the vector with zeros everywhere except in position  $i$ . If a tableau  $T$  of weight  $\gamma$  has minimal parsing of type  $\alpha$ , then  $f_i(T)$  has the same parsing if and only if  $\alpha \preceq \gamma + (b_{i+1} - b_i)$ . This follows from the above discussion.

The set of tableaux with the same minimal parsing, and so the same descent composition  $\alpha$ , form a subset of the vertices of  $B(\lambda)$ . Among these tableaux, there is only one with filling  $\alpha$ ,  $T_\alpha$ . We now show that every tableau in the subset of vertices can be obtained by a certain sequence of crystal operators from  $T_\alpha$ , thus showing that the induced subgraph is connected with  $T_\alpha$  as its source.

Let  $T$  be a tableau of weight  $\gamma$  with the same parsing of type  $\alpha$ , then there is a set of sets of consecutive parts of  $\gamma$  such that the sum of the parts in every set gives a part of  $\alpha$ . Let

$$\{\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k_1}\}, \{\gamma_{k_1+1}, \dots, \gamma_{k_2}\}, \dots, \{\gamma_{k_{s-1}+1}, \dots, \gamma_{k_s}\}\}$$

be such a set of sets, with  $k_1 < k_2 < \dots < k_s = \ell(\gamma)$ , so  $\sum_{j=k_{r-1}+1}^{k_r} \gamma_j = \alpha_r$  for  $1 \leq r \leq s = \ell(\alpha)$ .

Then the following sequence of crystal operators applied to  $T_\alpha$  gives  $T$  :

$$\begin{aligned} & (f_1)^{\gamma_2} \circ (f_2 \circ f_1)^{\gamma_3} \circ (f_3 \circ f_2 \circ f_1)^{\gamma_4} \circ \dots \circ (f_{k_1-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)^{\gamma_{k_1}} \circ \dots \circ \\ & (f_{k_{j-1}} \circ \dots \circ f_{j+1} \circ f_j)^{\gamma_{k_{j-1}+1}} \circ \dots \circ (f_{k_j-1} \circ \dots \circ f_{j+1} \circ f_j)^{\gamma_{k_j}} \circ \dots \circ \\ & (f_{k_{(s-1)}} \circ \dots \circ f_{s+1} \circ f_s)^{\gamma_{k_{(s-1)}+1}} \circ \dots \circ (f_{k_s-1} \circ \dots \circ f_{s+1} \circ f_s)^{\gamma_{k_s}} \quad (T_\alpha) = T. \end{aligned}$$

This sequence changes entries in the last horizontal band first, then in the previous to last, etc. until the entries in the first maximal horizontal band are changed, and the obtained tableau is  $T$ . Moreover, it is straightforward to see that every intermediate tableau also has the same minimal parsing into horizontal bands.

Finally, the labelled oriented subgraph on tableaux with the same minimal parsing of type  $\alpha$ , with labels of edges given by the application of crystal operators which preserve minimal parsing, gives a connected *induced* subgraph of  $B(\lambda)$ . This is because crystal operators which preserve the minimal

parsing remain crystal operators, and if there is an edge between two tableaux in the subset, then the crystal operator applied preserves the minimal parsing. ■

**Remark 4.3.9 :** The induced subgraphs are not generally crystals. They are however isomorphic (as oriented graphs) to crystals  $B(\mu)$  after re-labelling of vertices and oriented edges, as we will see in section 4.3.5.

We denote the induced subgraphs of  $B(\lambda)$  with minimal parsing of type  $\alpha$  by  $B(T_\alpha)$ , where the tableaux  $T_\alpha$  are the source vertices. Note that there may be many subcomponents associated to the same composition  $\alpha$ , which means that  $F_\alpha$  occurs more than once in  $s_\lambda$ . This is simply because there can be many ways to partition  $\lambda$  into maximal horizontal bands of respective lengths  $\alpha_i$ , as is illustrated below. We will see in the next section that all subcomponents associated to the same composition  $\alpha$  are in fact isomorphic.

**Example 4.3.10 :** The two standard tableaux below have shape  $(4, 3)$  and distinguished maximal horizontal bands of type  $(2, 3, 2)$ , thus giving two distinct partitions of  $(4, 3)$  into minimal parsings of type  $(2, 3, 2)$ .

1	1	2	2
2	3	3	

1	1	2	3
2	2	3	

**Theorem 1 :** The connected crystal  $B(\lambda)_n$ , of tableaux of shape  $\lambda$  and entries at most  $n$ , is partitionned into disjoint connected induced subgraphs  $B(T_\alpha)$  which correspond to quasisymmetric functions  $F_\alpha(x_1, \dots, x_n)$ , where the subsets of vertices are tableaux with a fixed minimal parsing of type  $\alpha$ . The sources  $T_\alpha$  of these subcomponents have filling  $\alpha$ . The number  $f_\alpha^\lambda$  of subgraphs of type  $\alpha$  is the number of standard tableaux of shape  $\lambda$  and descent composition  $\alpha$ .

**Example 4.3.11 :** Figure 4.2 shows the decomposition of  $B(4, 3)_4$ , into subcomponents associated to quasisymmetric functions. Those associated to a descent composition  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$  appear in the same color as that associated to the *reverse composition*  $\overleftarrow{\alpha} = (\alpha_s, \dots, \alpha_2, \alpha_1)$ . We show in section 4.3.6 that pairs of subcomponents associated respectively to descent compositions

$\alpha$  and  $\overleftarrow{\alpha}$  are positioned dually in the crystal (as respective images under an anti-automorphism of crystal), and are dual one to another (as graphs).

*Proof of theorem 1.* The minimal parsing is uniquely determined for any tableau, so the sets of tableaux with given minimal parsing are disjoint. As we have seen above, each of these sets induce a connected subgraph of  $B(\lambda)$  with source  $T_\alpha$ , and the monomials associated to these tableaux form a quasisymmetric functions  $F_\alpha$ . Finally, the sources  $T_\alpha$  are put in bijection with standard tableaux of descent compositions  $\alpha$  and same minimal parsing by using proposition 4.3.5. By the formula of Gessel, this confirms that we get the right number of subcomponents associated to each  $F_\alpha$  in  $B(\lambda)$ . ■

**Proposition 4.3.12 :** Compositions  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$  which appear as descent compositions of tableaux in  $B(\lambda)_n$ , for  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell) \vdash m$ , have the following properties.

1.  $1 \leq \alpha_i \leq \lambda_1$ ,
2.  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_j \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j$  for all  $j$ ,
3.  $s \leq (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_\ell) + 1$ ,
4.  $\ell \leq s \leq n$ ,
5.  $s \leq k$ .

*Proof.* 1. The  $\alpha_i$ 's describe lengths of maximal horizontal bands, and each has at most one cell in every column of  $\lambda$ . Then  $\alpha_i \leq \lambda_1$ , since  $\lambda_1$  is the number of columns spanned by  $\lambda$ . Moreover, by the maximality of (maximal) horizontal bands,  $\alpha_i \geq 1$ .

2. In order to be maximal, the horizontal band of  $i$ 's must have its tail on a row of larger index than that on which lies the head of the horizontal band of  $(i+1)$ 's. Then the  $j$  first horizontal bands span at most  $j$  rows and their cells.

3. The first horizontal band is necessarily of shape  $(\alpha_1)$ . This gives us the  $+1$ . The maximal number of horizontal bands possible occurs if every new horizontal band has a single cell on the next non-fully filled row, and the rest of its cells on the rows above.

4. The first inequality follows from the discussion on the second condition. The second inequality follows from the fact that the composition  $\alpha$  also gives the weight of a tableau  $T_\alpha$  of shape

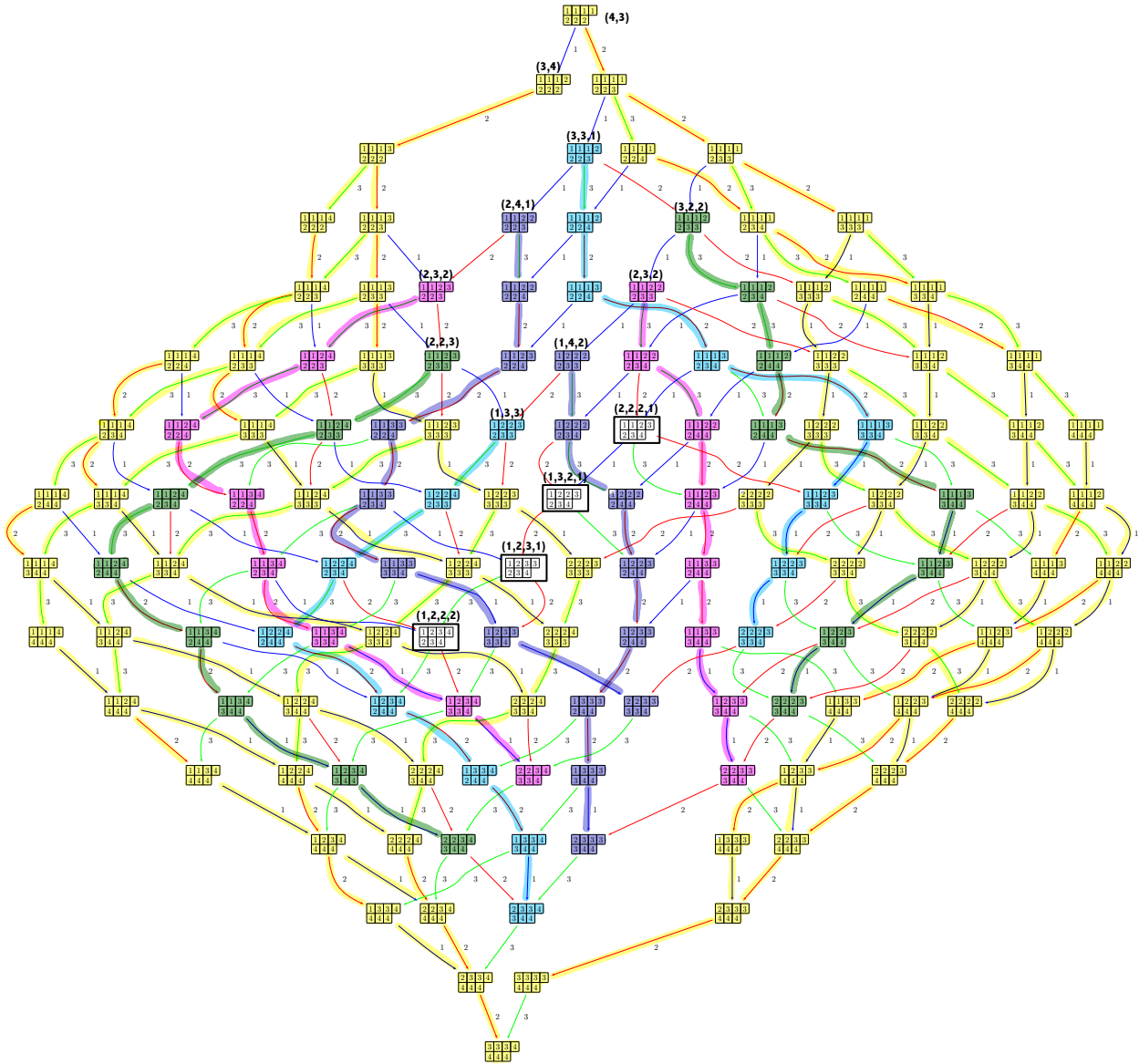


FIGURE 4.2: Decomposition of  $B(4, 3)_4$  into its subcomponents associated to fundamental quasi-symmetric functions  $F_\alpha$  :  $s_{(4,3)} = F_{(4,3)} + F_{(3,4)} + F_{(3,3,1)} + F_{(2,4,1)} + F_{(3,2,2)} + 2 \cdot F_{(2,3,2)} + F_{(2,3,3)} + F_{(2,2,3)} + F_{(1,4,2)} + F_{(1,3,3)} + F_{(2,2,2,1)} + F_{(1,3,2,1)} + F_{(1,2,3,1)} + F_{(1,2,2,2)}$ .

$\lambda$  by the above proposition. Then  $s \leq n$ , since  $n$  is the maximal entry allowed in tableaux of  $B(\lambda)_n$ , as a crystal of  $GL_n$ , and  $\alpha_s$  indicates the number of entries  $s$  in a source  $T_\alpha$ .

5. The weight of a tableau cannot have more non-zero parts than the number of cells in it. ■

**Remark 4.3.13 :** For  $\lambda \vdash m$  fixed, not all the compositions of  $m$  with the properties above are descent composition for  $\lambda$ . For example, for  $\lambda = (3, 3)$ ,  $\alpha = (1, 2, 3)$  has all the properties above, however, there are no semistandard tableau of shape  $\lambda$  with minimal parsing  $\alpha$ .

**Proposition 4.3.14 :** Let  $\lambda$  be the weakly decreasing reordering of the parts of  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ . Then  $F_\alpha$  occurs in  $s_\lambda$ . In particular, all reorderings  $\beta$  of  $\lambda$  appear as descent compositions for  $\lambda$ , with  $F_\beta$  in  $s_\lambda$ .

We thank Joseph Pappé for providing insight for the following proof.

*Proof.* Let  $\lambda = \text{sort}(\alpha)$ . By Green's theorem, if the insertion of  $w = s^{\alpha_s} \dots 2^{\alpha_2} 1^{\alpha_1}$  under RSK insertion is  $(P, Q)$ , then the shape of  $P, Q$  is  $\lambda$ . The resulting tableau  $P$  has filling  $\alpha$  and reading word Knuth equivalent to  $w$ . Moreover, by construction, the rightmost entry  $i$  must lay to the *NE* of the leftmost entry  $i + 1$ , and so  $P$  must have minimal parsing. Then  $P$  is the source of a subcomponent  $B(T_\alpha)$ , and so  $F_\alpha$  appears in  $s_\lambda$ . ■

#### 4.3.5 Quasicrystal structure of a subcomponent associated to a fundamental quasisymmetric function $F_\alpha$

We have seen in theorem 1 that subcomponents  $B(T_\alpha)$  associated to a fundamental quasisymmetric function  $F_\alpha$  form induced subgraphs of crystals. This notion of induced subgraph of crystal has not been studied by the mathematical community to our knowledge.

We push this further by studying the structure of these subcomponents. In this section, we prove that all subcomponents associated to a composition  $\alpha$  are isomorphic, no matter their crystal host  $B(\lambda)_n$ . We denote that class of subcomponents by  $B(\alpha)_n$ , and call them *quasicrystals*.

The quasicrystals  $B(\alpha)_n$  are not crystals of type  $A_{n-1}$ , one reason being that they are not self-dual in general. They may however be Kashiwara crystals for other groups. It would be interesting to investigate which groups (and the associated representations) might have such a crystal structure.

#### 4.3.5.1 Oriented graph structure of quasicrystals $B(\alpha)_n$

**Theorem 2 :** Let  $\alpha$  be a composition of  $m$  in  $s$  parts. The quasicrystal  $B(\alpha)_n$  is isomorphic (as an oriented graph) to  $B(m)$  with maximal entry  $n - s + 1$ . In particular, the oriented graph structure of  $B(\alpha)_n$  is independant of partitions  $\lambda$  for which  $\alpha$  is a descent composition.

In order to prove this theorem, we need to introduce the original definition of quasisymmetric functions of Gessel (Gessel, 1984), which is in terms of subsets  $I \subseteq \{1, 2, \dots, m-1\}$ . To do this, we use the bijection between descent sets  $I$  and descent compositions  $\alpha$  defined before proposition 4.3.5 : if  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ , then the associated set is  $I_\alpha = \{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}\}$  where  $j_i = \alpha_1 + \dots + \alpha_i$ . Then

$$F_\alpha(x_1, \dots, x_n) = F_{I_\alpha}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n \\ \text{with } i_j < i_{j+1} \text{ if } j \in I_\alpha}} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}.$$

This definition is more generally used in the literature as the one given in the introduction.

*Proof of theorem 2.* A subcomponent  $B(T_\alpha)$  in any crystal  $B(\lambda)_n$  corresponds to the quasisymmetric function  $F_\alpha(x_1, \dots, x_n)$ , since we restrict ourselves to a maximal entry  $n$ . The tableaux in the crystal  $B(m)_{n-s+1}$  have a unique descent composition,  $\alpha = (m)$ , so the whole crystal corresponds to the quasisymmetric function  $F_{(m)}(x_1, \dots, x_{n-s+1})$ . We now show that the sets of monomials associated to both quasisymmetric functions above are in bijection. To do this, we use the definition of quasisymmetric functions above.

Let's note that, for  $1 \leq s \leq n$ ,

$$F_{(m)}(x_1, \dots, x_{n-s+1}) = F_{\emptyset}(x_1, \dots, x_{n-s+1}) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n-s+1} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}.$$

The weakly increasing sequence of integers which index each monomial of  $F_{\emptyset}(x_1, \dots, x_{n-s+1})$  is in bijection with the weakly increasing sequence of integers indexing the monomials of any  $F_I$ , with  $I = \{j_1, \dots, j_{s-1}\}$ , through the following bijection.

$$\begin{aligned}
& 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m \leq n - s + 1 \\
& \quad \downarrow \\
& 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{j_1} < i_{j_1+1} + 1 \leq \dots \leq i_{j_2} + 1 < i_{j_2+1} + 2 \leq \dots \leq i_{j_k} + (k - 1) < i_{j_k+1} + k \leq \dots \leq \\
& \quad i_{j_{s-1}} + (s - 2) < i_{j_{s-1}+1} + (s - 1) \leq \dots \leq i_m + (s - 1) \leq (n - s + 1) + (s - 1) = n.
\end{aligned}$$

All possible sequences of indices in  $F_I$  can be retrieved this way, and the strict ascents will be respected. One can find the initial sequence by removing  $i$  from each part between the  $i^{\text{th}}$  and the  $i + 1^{\text{th}}$  increasing sign  $<$ . Similarly as before, all sequences of  $F_{\emptyset}$  can be retrieved this way.

Lets now fix  $n, m, 1 \leq s \leq n$ , a composition  $\alpha$  of  $m$  in  $s$  parts, and any shape  $\lambda \vdash m$  in which  $\alpha$  appears as a descent composition. The sequences of indices above then give fillings of the maximal horizontal bands of type  $\alpha$  in  $\lambda$  : indices  $i_j$  indexed by  $1 \leq j \leq j_1$  fill the first horizontal band, indices  $i_j$  indexed by  $j_1 + 1 \leq j \leq j_2$  fill the second horizontal band, etc.

Let us replace the tableaux in the crystal  $B(m)_{n-s+1}$  by the corresponding tableaux according to the above bijection. The first tableau has weight and minimal parsing of type  $\alpha$ , i.e. if indexing the integers by their position in the sequence, we get

$$1 \leq 1_1 \leq \dots \leq 1_{j_1} < 2_{j_1+1} \leq \dots \leq 2_{j_2} < 3_{j_2+1} \leq \dots \leq k_{j_k} < (k + 1)_{j_k+1} \leq \dots \leq s_m \leq n.$$

Since the indices  $i_j$  correspond to entries in a tableau, we can consider how crystal operators act on such entries. We are restricting ourselves to crystal operators which preserve the parsing, so they may only be applied to the indices  $i_j$  if the weak order described above is preserved. In particular, the crystal operators which may be applied on the sequence, without breaking its weak order, are  $f_{i_{j_k+\ell+k}}$  if  $f_{i_{j_k+\ell}}$  can be applied to the corresponding tableau in  $B(m)_{n-s+1}$ . Then the structure of the quasicrystal  $B(\alpha)$  will be exactly that of  $B(m)_{n-s+1}$ , with some relabelled oriented edges.

Finally, this is independent of  $\lambda$ , since only the weakly increasing sequence is important in the



above isomorphism. ■

**Corollary 4.3.15 :** Let  $n, m \in \mathbb{N}$  be fixed, and consider any composition  $\alpha$  of  $m$  in  $s \leq n$  parts. Then the number of monic monomials in  $F_\alpha(x_1, \dots, x_n)$  is equal to the number of monic monomials in  $F_{(m)}(x_1, \dots, x_{n-s+1})$ .

**Corollary 4.3.16 :** For  $n$  fixed, and a fixed composition  $\alpha$ , all subcomponents  $B(T_\alpha)_n$  are isomorphic as labelled oriented graphs, no matter the crystal  $B(\lambda)_n$  they live in.

*Proof.* We have seen that  $B(\alpha)$  is isomorphic to  $B(m)_{n-s+1}$ , where  $n$  is the fixed maximal entry in the tableaux of  $B(\alpha)$ ,  $m = |\alpha|$  and  $s = \ell(\alpha)$ . Moreover, the isomorphism seen in the proof above does not depend on the shape  $\lambda$  of tableaux, and the modifications of the labels only depend on  $\alpha$ . Therefore, a crystal operator can be applied on all tableaux in a given position in different  $B(\alpha)$ 's, no matter their shapes. ■

In other words, it is justified to study graphs (or quasicrystals) associated to quasisymmetric functions  $F_\alpha$ , as their oriented graph structure is determined for any fixed  $n$ . We could also use a notation  $B(m, n, s)$  as only these values are important in defining the oriented graph structure : relabellings of crystals  $B(m)$  with maximal entry  $n - s + 1$ . In particular, all  $B(\alpha)_n$  for any composition of  $m$  in  $s \leq n$  parts will have the same oriented graph structure : that of  $B(m)_{n-s+1}$ .

**Remark 4.3.17 :** The proof of theorem 2 considers the weakly increasing sequences obtained by reading the entries of tableaux in order of their maximal horizontal bands. We can consider when crystal operators acting on such weakly increasing sequences preserve the maximal horizontal bands. By definition, a crystal operator  $f_i$  will act on the rightmost  $i$  in such a sequence. It will preserve the maximal horizontal bands as long as it does not break the increasing sequences marking the change of horizontal bands : the entries  $i$  can only appear in one horizontal band at the time, and in order to preserve the strict increasingness of the sequence.

For example, the tableau below has the weakly increasing sequence 111|2333 read of its entries

along its maximal horizontal bands, with a marked division between horizontal bands.

1	1	1	3
2	3	3	

Applying the crystal operator  $f_1$  modifies the horizontal bands, since it acts on the rightmost 1, thus breaking the condition of strict increasingness between horizontal bands. However applying the crystal operator  $f_2$  does not, so preserves the horizontal bands.

#### 4.3.5.2 Height of quasicrystals, sources and sinks

**Corollary 4.3.18 :** The quasicrystals  $B(\alpha)_n$  have height, or length of their maximal subchain,  $m \cdot (n - s) + 1$ , where  $n$  is the fixed maximal entry,  $s = \ell(\alpha)$  and  $|\alpha| = m$ .

*Proof.* The subcomponents  $B(T_\alpha)$  in any crystal  $B(\lambda)$  contain the chain of tableaux with transformations given by  $(f_{n-s}^{\alpha_1} \circ \dots \circ f_2^{\alpha_1} \circ f_1^{\alpha_1}) \circ \dots \circ (f_{n-2}^{\alpha_{s-1}} \circ \dots \circ f_s^{\alpha_{s-1}} \circ f_{s-1}^{\alpha_{s-1}}) \circ (f_{n-1}^{\alpha_s} \circ \dots \circ f_{s+1}^{\alpha_s} \circ f_s^{\alpha_s})$ , which modifies maximally one horizontal band at a time, from its head to its tail : all entries  $s$  are changed to  $s + 1$ 's, then into  $s + 2$ 's, etc. until they are all changed into  $n$ 's. Then all entries  $s - 1$  are changed into  $s$ 's, then into  $s + 1$ 's, etc. until they have all been changed into  $n - 1$ 's. This process is continued until all entries 1 have been changed into  $n - s$ 's and no more transformations can be applied without modifying the minimal parsing into horizontal bands.

This sequence of transformations preserves the parsing into horizontal bands, so we remain always in the same subcomponent  $B(T_\alpha)$ . Moreover, no crystal operator can be applied to the final tableau of the chain without coming out of the subcomponent. We have then obtained, and described, the sink of the subcomponent  $B(T_\alpha)$  : preserving the same minimal parsing as the source, entries  $i$  are replaced by  $n - s + i$ . This tableau has weight  $(0^{n-s}, \alpha)$ .

There are  $|\alpha| \cdot (n - s)$  crystal operators in this sequence of transformations, and it describes a chain of length  $|\alpha| \cdot (n - s) + 1$  in any subcomponent  $B(T_\alpha)_n$ , when adding the source to which the crystal operators are applied. Since the chain starts from the source and ends at the sink, it is maximal,

for  $f_i$  has a unique image going down each row of  $B(\lambda)$ . Then any maximal chain in a quasicrystal  $B(\alpha)$  will have the same length :  $|\alpha| \cdot (n - s) + 1$ . Since the oriented graph structure of  $B(\alpha)$  is only determined by  $n, m = |\alpha|$  and  $s$ , the height  $|\alpha| \cdot (n - s) + 1 = m \cdot (n - s) + 1$  only depends on  $n, m, s$ . ■

**Corollary 4.3.19 :** The sink of a subcomponent  $B(T_\alpha)$  is obtained from its source  $T_\alpha$  by replacing entries  $i$  by  $n - s + i$ , where  $s$  is the length of  $\alpha$ .

#### 4.3.5.3 Number of semistandard tableaux of shape $\lambda$ and entries at most $n$ , and Kostka numbers

Using the results above, we give a formula for computing the number of tableaux of a given shape  $\lambda$  and entries at most  $n$ . In other words, we count the number of tableaux in  $B(\lambda)_n$ , which is equal to the number of monic monomials in  $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

We have seen that  $s_\lambda = \sum_{T \in SYT(\lambda)} F_{DesComp(T)}$ , and that each quasisymmetric function  $F(\alpha)$  corresponds to a subcomponent  $B(T_\alpha)$  in the crystal  $B(\lambda)_n$ , whose vertices are all tableaux of shape  $\lambda$  and entries at most  $n$ .

The number of standard tableaux of shape  $\lambda$  is well known to be given by the hook-length formula, and are generally not too hard to enumerate. We have seen that  $B(\alpha)_n$  is isomorphic to  $B(m)_{n-s+1}$ , for any compositions  $\alpha$  of  $m$  with the same number  $s \leq n$  of parts, and that these subcomponents of  $B(\lambda)_n$  are counted by the number of standard tableaux with  $d = s - 1$  descents. It would then suffice to have formulas for the number of tableaux in  $B(m)_{n-d}$  and for the number of standard tableaux of shape  $\lambda$  with  $d$  descent to give a formula for the number of semistandard tableaux of shape  $\lambda$ .

Using the results above allows us to do this.

**Proposition 4.3.20 :** The number of tableaux in  $B(m)_k$  is equal to the multiset coefficient

and binomial coefficient below.

$$\left( \binom{m+1}{k-1} \right) = \binom{m+k-1}{k-1} = \frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdot \dots \cdot (m+k-1)}{(k-1)!}.$$

*Proof.* For all tableaux of shape  $(m)$ , one must chose the position after which the array holds no more 1's, then the position after which the array holds no more 1's and 2's, etc. up to the end of the array, which is filled with  $k$ 's after the  $k-1^{\text{th}}$  position. We want to allow repetitions of chosen positions, since we want to allow that an entry does not appear and is "sandwiched out". We also want to allow the tableau with only 1's, which is the source of  $B(m)_k$ , so we add 1 position which lies outside of the array. If this outside position is picked  $j$  times, for  $1 \leq j \leq k-1$ , the entries  $k-j+1$  to  $k$  do not appear in the array.

Therefore, one chooses  $k-1$  positions in the  $m+1$  possible ones for the breaks between integers, allowing for repetitions, and without keeping track of the order in which the positions are picked. This gives precisely the multiset coefficient above. ■

**Example 4.3.21 :** The arrays below have their corresponding multiset of positions of breaks noted under them, for  $m = 10$  and entries at most  $k = 5$ .

$$\begin{array}{ccc} \boxed{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 3\ 3\ 3} & \boxed{1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 4\ 4\ 4\ 4} & \boxed{5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5} \\ \{8, 8, 11, 11\} & \{2, 7, 7, 11\} & \{1, 1, 1, 1\} \end{array}$$

**Corollary 4.3.22 :** The number of tableaux with entries at most  $n$  in a quasicrystal  $B(\alpha)_n$ , for any composition  $\alpha$  of  $m$  in  $s$  parts, is given by

$$\left( \binom{m+1}{n-s} \right) = \binom{m+n-s}{n-s} = \frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdot \dots \cdot (m+n-s)}{(n-s)!}.$$

**Corollary 4.3.23 :** For any composition  $\alpha \vDash m$  in  $s$  parts, the number of monic monomials in  $F_\alpha(x_1, \dots, x_n)$  is equal to the binomial coefficient above.

**Theorem 3 :** The number of tableaux of shape  $\lambda$  with maximal entry  $n$  is given by

$$|SSYT(\lambda)_n| = \sum_{0 \leq d \leq D} f_d^\lambda \cdot \binom{|\lambda| + n - d - 1}{n - d - 1},$$

where  $f_d^\lambda$  denotes the number of standard tableaux of shape  $\lambda$  with  $d$  descents, and  $D$  is the maximal number of descents in a standard tableau of shape  $\lambda$ .

**Example 4.3.24 :** There are 14 standard tableaux of shape  $(4, 3)$ , which all appear in figure 4.3. Among these, two have one descents, eight have two and four have three.

Then the number of tableaux of shape  $(4, 3)$  with maximal entry  $n$ , for any  $n$ , is equal to

$$|SSYT((4, 3))_n| = 2 \cdot \binom{7 + n - 1 - 1}{n - 1 - 1} + 8 \cdot \binom{7 + n - 2 - 1}{n - 2 - 1} + 4 \cdot \binom{7 + n - 3 - 1}{n - 3 - 1}.$$

One may verify that when  $n = 4$ , one retrieves 140 tableaux, the number of tableaux in figure 4.2. The following values for  $n = 5, 6, 7$  (for the same shape  $(4, 3)$ ) are respectively 560, 1764 and 4704 tableaux, which shows how fast these numbers grow. This formula can then really help to enumerate tableaux of a given shape, especially when  $n$  is large.

*Proof of theorem 3.* Recall that a tableau with  $d$  descents will have an associated descent composition in  $s = d + 1$  parts. Let then  $D$  be the maximal number of descents in standard tableaux of shape  $\lambda$ , and let  $S$  be the maximal number of parts of the associated descent compositions.

When  $n = D + 1 = S$ , all connected components are present in  $B(\lambda)_n$ . All those associated to a descent composition  $\alpha$  in  $s = d + 1$  parts is isomorphic to a crystal  $B(m)_k$ , which number of vertices is the multiset coefficients above, where  $k = n - s + 1 = n - d$  and  $m = |\lambda| = |\alpha|$ . The quasicrystals in  $B(\lambda)_n$  are disjoint, and are counted by the standard tableaux of shape  $\lambda$ . Therefore we have the formula above. Moreover, this formula accounts for the cases where  $n < D + 1 = S$ , since the terms of the summation with  $n < d + 1 \leq D + 1$  will be zero. ■

**Corollary 4.3.25 :** For a partition  $\lambda \vDash m$ , the number of monic monomials in  $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$  is equal to the sum above.

Although very interesting, the formula above for the number of tableaux of shape  $\lambda$  and entries at most  $n$  does not solve the much more interesting problem of giving a (closed) formula for Kostka numbers  $K_\mu^\lambda$ , a problem highlighted by Stanley ((Stanley, 2012), Vol.2, section 7.10). Recall that these  $K_\mu^\lambda$  count the number of tableaux of shape  $\lambda \vdash m$  and filling  $\mu$  (a fixed composition of  $m$ ).

There is however a combinatorial formula, given below, for which only a bijective proof was known. The setting of quasicrystals allows us to give a constructive combinatorial proof.

**Proposition 4.3.26 ((Sagan, 2001, Proposition 5.3.6)) :** Let  $\lambda \vdash n$ ,  $S = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k\} \subseteq [n - 1]$ , and  $\mu = (n_1, n_2 - n_1, \dots, n - n_k)$ . Then

$$|\{P : P \text{ a standard } \lambda\text{-tableau and } Des(P) \subseteq S\}| = K_\mu^\lambda.$$

**Proposition 4.3.27 :** A given weight  $\mu$  appears exactly once in a quasicrystal  $B(\alpha)$ , and if and only if  $\alpha \preceq \mu$ .

*Proof.* We have seen that all weights  $\alpha \preceq \mu$  in at most  $n$  parts occur in  $B(\alpha)_n$ , and only such weights appear in  $B(\alpha)_n$ . Moreover, for a given minimal parsing of type  $\alpha$  of a given shape  $\lambda$ ,  $\alpha \preceq \mu$  defines uniquely a tableau of shape  $\lambda$  in the corresponding subcomponent  $B(T_\alpha)_n$  in  $B(\lambda)_n$ , where  $T_\alpha$  has the desired minimal parsing. Therefore, in any subcomponent  $B(T_\alpha)_n$ , there is exactly one tableau of the desired weight  $\mu$  in at most  $n$  parts. ■

By the above, each subcomponent  $B(T_\alpha)$  in  $B(\lambda)$  with  $\alpha \preceq \mu$  will contain exactly one tableau of filling  $\mu$ . This gives us the following reinterpretation of Proposition 4.3.26, with a constructive proof.

**Corollary 4.3.28 :** The Kostka number  $K_\mu^\lambda$  counting tableaux of shape  $\lambda$  and composition weight  $\mu$  is given by the number of subcomponents  $B(T_\alpha)$  of  $B(\lambda)$  such that  $\alpha \preceq \mu$ , and this number is given by the number of standard tableaux with descent composition  $\alpha$  with  $\alpha \preceq \mu$ . So

$$K_\mu^\lambda = |\{T \in SYT(\lambda) : DesComp(T) \preceq \mu\}|.$$

#### 4.3.6 Layout of subcomponents $B(T_\alpha)$ in a crystal $B(\lambda)$

From the previous sections, we have a decomposition of  $B(\lambda)$  into a disjoint union of induced subgraphs  $B(T_\alpha)$  corresponding to the  $F_\alpha$  appearing in the expansion of  $s_\lambda$  in the basis of fundamental quasisymmetric functions. Each of these subcomponents regroup tableaux with a specific minimal parsing of type  $\alpha$  and correspond to the standard tableau of shape  $\lambda$  with the same minimal parsing.

In this section, we study how a crystal  $B(\lambda)$  breaks down into these subcomponents, by looking at how they are positioned relatively to one another. In order to understand better their distribution, we need to introduce the evacuation involution  $\text{EVAC}$  on tableaux, as we'll show it is a crystal anti-automorphism on  $B(\lambda)_n$  which reverses descent compositions and respects the above decomposition.

The evacuation map sets up a double duality between subcomponents associated to descent compositions  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$  and those associated to its reverse composition  $\overleftarrow{\alpha} = (\alpha_s, \dots, \alpha_1)$ , which we discuss below. We also study the (fixed) skeleton structure of  $B(\lambda)$  obtained by replacing each subcomponent by the standard tableau with same minimal parsing, and compare this underlying graph structure on standard tableaux with the one of dual equivalence graphs, introduced by Assaf (Assaf, 2015).

##### 4.3.6.1 Evacuation as a crystal anti-automorphism

The evacuation involution was first introduced by Schützenberger as an involution on tableaux of the same shape  $\lambda$  (Schützenberger, 1963). Berenstein and Zelevinsky showed that the effect of evacuation can be described in the following way (Berenstein et Zelevinsky, 1996).

Let  $T$  be a tableau of any shape. Rotate  $T$   $180^\circ$ , change entries  $i$  to  $n - i + 1$ , where  $n$  is fixed to be the maximal entry allowed in  $T$ , and rectify this skew tableau using jeu de taquin (see section 4.3.7 for a recall of the proces of rectifications). We shall use this result as the definition of

evacuation :  $\text{EVAC} = \text{jdt} \circ \text{compl} \circ \text{Rot}_{180^\circ}$ , where  $\text{Rot}_{180^\circ}$ ,  $\text{compl}$  and  $\text{jdt}$  are the three intermediate manipulations described above. The obtained tableau  $\text{EVAC}(T)$  has the same shape as  $T$ , and applying  $\text{EVAC}$  to it recovers  $T$  (Berenstein et Zelevinsky, 1996).

**Example 4.3.29 :** For the straight tableau  $T = \begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{3} & \\ \boxed{3} & & & \\ \boxed{4} & & & \end{array}$ ,

$$\text{jdt} \circ \text{compl} \circ \text{Rot}_{180^\circ}(T) = \text{jdt} \circ \text{compl} \left( \begin{array}{cccc} & & & \boxed{4} \\ & & & \boxed{3} \\ & \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{array} \right) = \text{jdt} \left( \begin{array}{cccc} & & & \boxed{1} \\ & & & \boxed{2} \\ & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{4} \end{array} \right) = \begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & \\ \boxed{3} & & & \\ \boxed{4} & & & \end{array} = \text{EVAC}(T).$$

One may verify that repeating this process on  $\text{EVAC}(T)$  recovers  $T$ .

Berenstein and Zelevinsky showed that  $\text{EVAC}$  is an anti-automorphism on crystals  $B(\lambda)_n$  (Berenstein et Zelevinsky, 1996). This means that if a tableau  $T$  is obtained from the source  $1_\lambda$  of the crystal by a sequence of crystal operators  $T = f_{i_k} \circ f_{i_{k-1}} \circ \dots \circ f_{i_2} \circ f_{i_1}(1_\lambda)$ , then  $\text{EVAC}(T) = e_{n-i_k} \circ e_{n-i_{k-1}} \circ \dots \circ e_{n-i_2} \circ e_{n-i_1}(T_{\min})$ , where  $T_{\min}$  is the sink of the crystal, which would then be  $\text{EVAC}(1_\lambda)$ .

The original proof of Berenstein and Zelevinsky uses crystal theory and representation theory heavily, so we give an alternate proof of this fact in annex 4.3.11, which may be more accessible. We also believe our proof to be of interest on its own, as it uses an anti-automorphism of crystals on words, defined by  $\text{Rot}(w) = w_0 w w_0$ , which has been already studied in the literature. We also give a proof that  $\text{EVAC}$  reverses descent compositions.

#### 4.3.6.2 Double duality of subcomponents $B(T_\alpha)$ and $B(T_\alpha^-)$ in $B(\lambda)$

There are two notions of duality at play in this section. The notion of duality which comes from graph (or poset) theory, where the dual of a labelled oriented graph is the graph obtained by reversing arrows, relabelling by  $n - i + 1$ , and replacing each vertex by its "dual image". There is also the notion of duality coming from the involution  $\text{EVAC}$ , where  $\text{EVAC}(A)$  is dual to  $A$  for a



set of tableaux  $A$ .

In the case of the subcomponents of a crystal  $B(\lambda)_n$ , we will see that these two notions of duality coincide, as evacuation sets up a (graph) duality between the subcomponents. For each subcomponent  $B(T_\alpha)$ , there will be a subcomponent  $B(T_{\overleftarrow{\alpha}})$  such that they are the reciprocal image under the EVAC map and are the dual graphs of one another. Then the dual image of each vertex is precisely its image under the EVAC map.

We will also see that they are placed dually in  $B(\lambda)_n$ , since EVAC is an anti-automorphism of crystals on  $B(\lambda)_n$ . We have the following results on the subcomponents of  $B(\lambda)$  associated to the fundamental quasisymmetric functions  $F_\alpha$ .

**Theorem 4 :** Subcomponents  $B(T_\alpha)$  and  $B(T_{\overleftarrow{\alpha}})$  both necessarily appear in a given crystal  $B(\lambda)$ , they are dual to each other and are positioned in dual locations in  $B(\lambda)$ . The crystal anti-automorphism between them is the evacuation map EVAC.

*Proof.* We have seen that the source of a subcomponent  $B(T_\alpha)$  is the tableau  $T_\alpha$  of shape  $\lambda$ , with filling and descent composition  $\alpha$ . Consider a set  $A$  of tableaux in  $B(T_\alpha)$ . Since EVAC reverses descent compositions, then  $\text{EVAC}(A)$  will be a set of tableaux with descent composition  $\overleftarrow{\alpha}$ . Moreover, since it is also a crystal anti-automorphism, if a tableau  $T \in A$  is obtained from  $T_\alpha$  by a sequence of crystal operators  $f_i$  which preserve descent compositions, then  $\text{EVAC}(T)$  is obtained from  $\text{EVAC}(T_\alpha)$  by the complementary sequence of crystal operators  $e_{n-i}$ , and so the set  $\text{EVAC}(A)$  is connected and regroups tableaux with same descent composition  $\overleftarrow{\alpha}$ . This is because the  $f_i$ 's modify the weight by  $b_{i+1} - b_i$ , and the  $e_i$ 's, by  $-b_{i+1} + b_i$ , so the effect of  $f_i$  on a weight  $\gamma$  will be dual to that of  $e_{n-i}$  on  $\overleftarrow{\gamma}$ .

Then, subcomponents  $B(T_\alpha)$  are mapped onto subcomponents  $B(T_{\overleftarrow{\alpha}})$ , and they are dual to each other as graphs, with the dual image of each vertex given by their image under EVAC.

Finally, by the previous argument, we also have that the two subcomponents are positioned dually in  $B(\lambda)$  : if a sequence of crystal operators  $f_{i_k} \circ \dots \circ f_{i_1}$ , applied to the source  $1_\lambda$  of  $B(\lambda)_n$ , gives

a vertex of  $B(T_\alpha)$ , then the "dual" sequence  $e_{n-i_k+1} \circ \dots \circ e_{n-i_1+1}$ , applied to the sink  $\text{EVAC}(1_\lambda)$  of  $B(\lambda)_n$ , gives its dual image in  $B(T_{\overleftarrow{\alpha}})$ ,  $\text{EVAC}(T_\alpha)$ . ■

This tells us that the evacuation map respects intrinsically the decomposition of  $B(\lambda)$  into its subcomponents  $B(T_\alpha)$ .

**Corollary 4.3.30 :** The source  $T_\alpha$  of a subcomponent  $B(T_\alpha)$  is sent by  $\text{EVAC}$  on the sink of the corresponding dual subcomponent  $B(T_{\overleftarrow{\alpha}})$ , and conversely.

**Example 4.3.31 :** Figure 4.2 illustrates the duality (and symmetry) of the positioning of the subcomponents  $B(T_\alpha)$  and  $B(T_{\overleftarrow{\alpha}})$ . The pairs of subcomponents  $B(T_\alpha)$  and  $B(T_{\overleftarrow{\alpha}})$  both appear in the same color in the figure. Note how the source of the first component of the pair lies at the same distance from the source of the crystal than the sink of the second from the sink of the crystal.

**Proposition 4.3.32 :** The quasicrystals  $B(\alpha)$  are self-dual as labelled oriented graphs when  $\alpha$  is symmetric, i.e.  $\alpha = \overleftarrow{\alpha}$ .

**Remark 4.3.33 :** This self-duality holds on the structure of quasicrystals  $B(\alpha)$  (as graphs). However, the subcomponents  $B(T_\alpha)$  are not necessarily sent onto themselves under the  $\text{EVAC}$  map when  $\alpha$  is symmetric, as illustrated in example 4.3.31.

*Proof of Proposition 4.3.32.*  $\text{EVAC}$  is an anti-automorphism which sends one subcomponent  $B(T_\alpha)$  onto a subcomponent  $B(T_{\overleftarrow{\alpha}}) = B(T'_\alpha)$ . Since both subcomponents are isomorphic and dual, and all subcomponents in  $B(\alpha)$  are isomorphic, then  $B(\alpha)$  is auto-dual as a labelled oriented graph when  $\alpha = \overleftarrow{\alpha}$ . ■

**Corollary 4.3.34 :** For a fixed composition  $\alpha$ , the subcomponents  $B(T_\alpha)$  have their sources on row  $j+1$  of  $B(\lambda)$ , where  $j$  is the number of transformations  $+(b_{i+1}-b_i) = +(0, \dots, 0, -1, 1, 0, \dots, 0)$  applied to  $\lambda$  to obtain  $\alpha$ , or equivalently the number  $j$  of crystal operators  $f_i$  applied to  $1_\lambda$  to obtain any source  $T_\alpha$ .

*Proof.* We have seen that the crystal operators  $f_i$  have effect  $+(b_i - b_{i-1})$  on the weight of tableaux. Then row  $j + 1$  of  $B(\lambda)$  holds all tableaux obtained from  $1_\lambda$  by applying  $j$  crystal operators  $f_i$ . If a certain sequence of crystal operators  $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_j}$  modify  $\lambda$  to obtain  $\alpha$ , then all tableaux of weight  $\alpha$  are obtained by the application of a certain reordering of these crystal operators. Then all tableaux of weight  $\alpha$  will be on the same row  $j + 1$ . Among these, all tableaux with weight and minimal parsing of type  $\alpha$  lie on this row  $j + 1$  of  $B(\lambda)$ . Since these are the sources of the subcomponents of  $B(\alpha)$ , we have the desired result. ■

**Remark 4.3.35 :** In a crystal  $B(\lambda)$ , all descent compositions  $\alpha$  occur also as weights of tableaux, and are therefore obtained from  $\lambda$  by applying modifications  $b_{i+1} - b_i$ , from  $\lambda$  to  $\overleftarrow{\lambda}$ . Moreover, all the descent compositions  $\alpha$  are not refinements of another and do not include zero parts (by their definition as counting lengths of horizontal bands in minimal parsings).

#### 4.3.6.3 Crystal skeleton

If we replace every subcomponent of  $B(\lambda)_n$  by the standard tableaux of shape  $\lambda$  with same minimal parsing, and keep only one oriented edge between linked subcomponents, with the minimal label appearing at least once, one gets a labelled oriented graph on standard tableaux. Note that this can create cycles. We call the result the skeleton of  $B(\lambda)_n$ .

This notion of skeleton is especially interesting, because it gives a compact visual representation of  $B(\lambda)_n$  for any  $n$ , and also of  $B(\lambda)$ , as we will see.

Doing this to figure 4.2, one gets the labelled oriented graph on standard tableaux of shape  $(4, 3)$  of figure 4.3. Since we know the oriented graph structure of these subcomponents by corollary 4.3.16, these can be expanded to essentially retrieve the full graph, with some edges missing between subcomponents. Note the symmetry coming from the auto-duality of  $B(\lambda)$ .

The obtained labelled oriented graph on standard tableaux does not have a crystal structure, in particular because a standard tableau can have two distinct images for the same transformations. For example, in figure 4.3, the top standard tableau (sometimes referred to as the *superstandard*

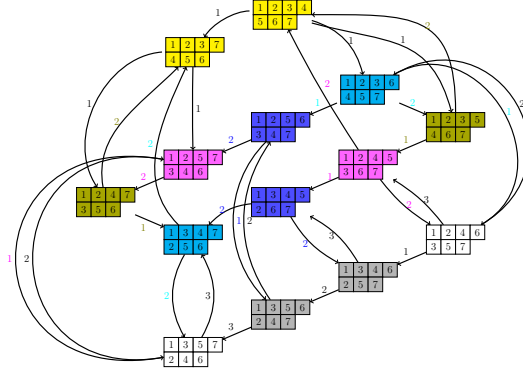


FIGURE 4.3: Skeleton of  $B(4,3)_4$ , where subcomponents are replaced by the standard tableau with same minimal parsing. Oriented edges labeled  $i$  indicate that transformations  $f_i$  connect one subcomponent to another, and  $i$  is minimal (by definition). Labels are colored according to the origin subcomponent for clarity. The vertical position of a vertex is determined by the row  $j + 1$  of the source  $T_\alpha$  of the corresponding subcomponent  $B(T_\alpha)$  in  $B(4,3)_4$ , and alternatively also segregates standard tableaux by their number of descents.

*tableau*) has three distinct images under the transformations 1. We will see in the proposition below that we are justified in keeping only the minimal label of oriented edges between subcomponents.

**Proposition 4.3.36 :** Let  $n$  and  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$  be fixed. Let  $std(T_\alpha)$  and  $std(T_\beta)$  be standard tableaux of shape  $\lambda$ , and of respective descent compositions  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  and  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ . Let  $i$  be the smallest index such that a crystal operator  $f_i$  allows one to pass between the associated subcomponents  $B(T_\alpha)$  and  $B(T_\beta)$  in  $B(\lambda)_n$ , for  $1 \leq i \leq n - 1$ . Then the crystal operators  $f_{i+1}, \dots, f_{i+(n-s)}$  do too.

*Proof.* Crystal operators act on weights  $\gamma$  of tableaux in  $B(\lambda)_n$ . If a tableau  $T$  lies in  $B(T_\alpha)$ , it has also  $\alpha \preceq wt(T) = \gamma$ . If  $f_i(T)$  lies in  $B(T_\beta)$ , then it means that  $\beta \preceq wt(f_i(T)) = \gamma + (b_{i+1} - b_i)$ . This will also be the case for  $(0^k, \gamma)$ , for  $0 \leq k \leq n - s$ , with the crystal operators having the corresponding actions on the weights being  $f_{i+k}$ . ■

This means we can keep only the smallest label  $i$  of oriented edges between subcomponents. We denote the obtained skeleton  $Skeleton(\lambda)_n$ .

**Theorem 5 :** For  $\lambda \vdash m$  fixed, and let  $S$  be the maximal length of descent compositions for  $\lambda$ . Then the skeletons  $Skeleton(\lambda)_n$  of the crystals  $B(\lambda)_n$  are equal for all  $n \geq S$ . For  $1 \leq n \leq S$ , the skeleton of  $B(\lambda)_n$  consists of the induced subgraph of  $Skeleton(\lambda)_S$  containing standard tableaux of shape  $\lambda$  with descent compositions in at most  $n$  parts.

*Proof.* We consider two random subcomponents  $B(T_\alpha), B(T_\beta)$ , for  $T_\alpha, T_\beta$  of the same shape  $\lambda$ , with respective weight and minimal parsing of type  $\alpha$  and  $\beta$ , for incomparable descent compositions  $\alpha, \beta$ . Both subcomponents occur in all  $B(\lambda)_n$  for  $n \geq N = \max(\ell(\alpha), \ell(\beta))$ .

We now suppose that there exists a minimal value  $k \in \mathbb{N}$  such that there exists an edge labelled  $i$  from  $B(T_\alpha)$  into  $B(T_\beta)$  in  $B(\lambda)_{N+k}$ .

In order to prove the first part of theorem 5, we want to show that the conditions above force  $k = 0$ . It follows that since all subcomponents appear in  $B(\lambda)_S$ , all minimally labeled edges between subcomponents must appear in  $Skeleton_S(\lambda)$ , and  $Skeleton_n(\lambda) = Skeleton_S(\lambda)$  for  $n \geq S$ . The second part of the theorem follows.

By the conditions above, there must be two tableaux  $T_{\gamma^{(1)}} \in B(T_\alpha)$  and  $T_{\gamma^{(2)}} \in B(T_\beta)$  such that  $\alpha \preceq \gamma^{(1)}, \beta \preceq \gamma^{(2)}$  and  $f_i(T_{\gamma^{(1)}}) = T_{\gamma^{(2)}}$ . We then have

$$\begin{aligned}\alpha \preceq \gamma^{(1)} &= (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_i, \gamma_{i+1}, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{N+k}) \\ \beta \preceq \gamma^{(2)} &= (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_i - 1, \gamma_{i+1} + 1, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{N+k}).\end{aligned}$$

The crystal operator  $f_i$  changes exactly one entry  $i$  into an entry  $i + 1$  in  $T_{\gamma^{(1)}}$ , but changes the minimal parsing. Therefore, it must act exactly on two maximal horizontal bands of  $T_{\gamma^{(1)}}$ , modifying the maximal horizontal band containing that entry  $i$  and the one containing  $(i + 1)$ 's in  $T_{\gamma^{(1)}}$ . Moreover, the entries  $i$  and  $i + 1$  cannot be part of the same maximal horizontal band,

otherwise the minimal parsing would not be changed.

Recall that we can express a decomposition of  $\gamma^{(1)}$  and  $\gamma^{(2)}$  into subsets of parts, respectively summing to the parts of  $\alpha$  and  $\beta$ , to represent the minimal parsing respectively of  $T_{\gamma^{(1)}}$  and  $T_{\gamma^{(2)}}$ . Since they differ in exactly two maximal horizontal bands, then the decompositions of  $\gamma^{(1)}$  and  $\gamma^{(2)}$  have all subsets equal, except for those containing the  $i^{\text{th}}$  and  $(i+1)^{\text{th}}$  parts. Suppose then that  $j_1 < j_2 < \dots$  give the position of the last part of each subset, this gives the following decompositions, with potentially an added separation  $|$  before the  $i^{\text{th}}$  part and/or after the  $(i+1)^{\text{th}}$  part, in  $\gamma^{(1)}$  and/or  $\gamma^{(2)}$ .

$$\begin{aligned}\alpha &\preceq \gamma^{(1)} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{j_1} | \gamma_{j_1+1}, \dots, \gamma_{j_2} | \dots | \gamma_{j_\ell+1}, \dots, \gamma_i | \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{\ell+1} | \dots, \gamma_{N+k}) \\ \beta &\preceq \gamma^{(2)} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{j_1} | \gamma_{j_1+1}, \dots, \gamma_{j_2} | \dots | \gamma_{j_\ell+1}, \dots, \gamma_i - 1 | \gamma_{i+1} + 1, \dots, \gamma_{\ell+1} | \dots, \gamma_{N+k}).\end{aligned}$$

Now, since  $k$  is minimal by hypothesis, then there cannot be equal subsets with more than one part, because otherwise there exists two tableaux  $T_{\gamma^{(1)'}}$ ,  $T_{\gamma^{(2)'}}$  respectively in  $B(T_\alpha)$  and  $B(T_\beta)$  which have weights of smaller length than  $N+k$  obtained by summing parts of equal subsets, with  $T_{\gamma^{(1)'}} \xrightarrow{j} T_{\gamma^{(2)'}}$  in  $B(\lambda)_n$  for  $n < N+k$  and  $j \leq i$ .

For the same reason, there cannot be more than two parts in the subsets containing the  $i^{\text{th}}$  and  $(i+1)^{\text{th}}$  parts in  $\gamma^{(1)}$  and  $\gamma^{(2)}$ .

We then have that the decomposition above is coarser, with again potentially an additionnal separation  $|$  before the  $i^{\text{th}}$  part and/or after the  $(i+1)^{\text{th}}$  part, in  $\gamma^{(1)}$  and/or  $\gamma^{(2)}$  :

$$\begin{aligned}\alpha &\preceq \gamma^{(1)} = (\gamma_1 | \gamma_2 | \dots | \gamma_{i-1}, \gamma_i | \gamma_{i+1}, \gamma_{i+2} | \dots | \gamma_{N+k}) \\ \beta &\preceq \gamma^{(2)} = (\gamma_1 | \gamma_2 | \dots | \gamma_{i-1}, \gamma_i - 1 | \gamma_{i+1} + 1, \gamma_{i+2} | \dots | \gamma_{N+k}).\end{aligned}$$

The different decompositions into subsets of the parts in position  $i-1$  to  $i+1$  are given below for  $\gamma^{(1)}$ , the ones for  $\gamma^{(2)}$  are equivalent.

$$\gamma_{i-1}|\gamma_i|\gamma_{i+1}|\gamma_{i+2} \quad \gamma_{i-1},\gamma_i|\gamma_{i+1},\gamma_{i+2} \quad \gamma_{i-1},\gamma_i|\gamma_{i+1}|\gamma_{i+2} \quad \gamma_{i-1}|\gamma_i|\gamma_{i+1},\gamma_{i+2}.$$

Therefore  $k \leq 2$ .

Let's now study the different possibilities, depending on the position of the cell  $i$  modified by  $f_i$ , in relationship to the (non-maximal) horizontal bands containing the entries  $i - 1, i, i + 1$  and  $i + 2$ .

As we have seen, the entries  $i$  and  $i + 1$  have to be in different maximal horizontal bands, otherwise the minimal parsing is preserved by  $f_i$ . Then the  $i$ 's appear at the end of their maximal horizontal band, and the  $(i + 1)$ 's, at the start of theirs. We call the specific entry  $i$  modified by  $f_i$  in  $T_{\gamma^{(1)}}$  *the modified entry  $i$* . All entries considered are in  $T_{\gamma^{(1)}}$ . We consider how the modification of one entry  $i$  changes the division of  $\gamma^{(1)}$  into subsets to get that of  $\gamma^{(2)}$ .

Recall that the head of a (non-maximal) horizontal band is its northeastmost cell, and its tail, its southwestmost cell.

Case 1 : If the modified entry  $i$  lays on a row of index strictly smaller than that of the tail of the horizontal band of the  $i + 1$ 's, and weakly greater than that of the head of the horizontal band of the  $i + 1$ 's, then the divisions in the corresponding weights  $\gamma^{(1)}$  and  $\gamma^{(2)}$  are in the same positions, so we say the divisions are preserved. This is because the change of that single entry  $i$  does not interfere with the entries  $i - 1$  or  $i + 2$ .

Case 2 : If the modified entry  $i$  lays on a row of index weakly greater than that of the tail of the horizontal band of the  $i + 1$ 's, then there are three cases to consider.

- If the modified entry  $i$  is not the tail of the horizontal band of entries  $i$ , then the divisions are preserved.
- If the modified entry  $i$  is the tail of the horizontal band of entries  $i$ , and the next entry  $i$  of the horizontal band is southwest of the head of the horizontal band of the  $i - 1$ 's, then the divisions are preserved.
- If the modified entry  $i$  is the tail of the horizontal band of entries  $i$ , and the next entry  $i$  of the horizontal band is weakly northeast of the head of the horizontal band of the  $i - 1$ 's, then

if there is a division between the  $(i - 1)^{\text{th}}$  and  $i^{\text{th}}$  parts in  $\gamma^{(1)}$ , then it is removed in  $\gamma^{(2)}$ . All other divisions are preserved.

Case 3 : If the modified entry  $i$  is weakly northeast of the head of the horizontal band of the  $i + 1$ 's, then there are similarly three cases to consider.

- If the modified entry  $i$  is not the head of the horizontal band of entries  $i$ , then the divisions are preserved.
- If the modified entry  $i$  is the head of the horizontal band of entries  $i$ , and the tail of the horizontal band of the  $i + 2$ 's is to its northwest, then the divisions are preserved.
- If the modified entry  $i$  is the head of the horizontal band of entries  $i$ , and the tail of the horizontal band of the  $i + 2$ 's is weakly to its southwest, then if there is no division between the  $(i + 1)^{\text{th}}$  and  $(i + 2)^{\text{th}}$  parts in  $\gamma^{(1)}$ , then it is added in  $\gamma^{(2)}$ . All other divisions are preserved.

There are very limited cases when a division is either added or removed, otherwise divisions are preserved. Let's consider what transitions are possible from the possible configurations of  $\gamma^{(1)}$ .

Let's start with the configuration  $(\gamma_1 | \dots | \gamma_{i-1} | \gamma_i | \gamma_{i+1} | \gamma_{i+2} | \dots | \gamma_{N+k})$ . Either divisions are preserved, or the division between the  $(i - 1)^{\text{th}}$  and  $i^{\text{th}}$  parts is removed, to get either configurations below in  $\gamma^{(2)}$ .

$$(\gamma_1 | \dots | \gamma_{i-1} | \gamma_i - 1 | \gamma_{i+1} + 1 | \gamma_{i+2} | \dots | \gamma_{N+k}) \text{ OR } (\gamma_1 | \dots | \gamma_{i-1}, \gamma_i - 1 | \gamma_{i+1} + 1 | \gamma_{i+2} | \dots | \gamma_{N+k}).$$

Let's now consider the configuration  $(\gamma_1 | \dots | \gamma_{i-1}, \gamma_i | \gamma_{i+1}, \gamma_{i+2} | \dots | \gamma_{N+k})$ . Either divisions are preserved, or the division between the  $(i + 1)^{\text{th}}$  and  $(i + 2)^{\text{th}}$  parts can be added, to get either configurations below in  $\gamma^{(2)}$ .

$$(\gamma_1 | \dots | \gamma_{i-1}, \gamma_i - 1 | \gamma_{i+1} + 1, \gamma_{i+2} | \dots | \gamma_{N+k}) \text{ OR } (\gamma_1 | \dots | \gamma_{i-1}, \gamma_i - 1 | \gamma_{i+1} + 1 | \gamma_{i+2} | \dots | \gamma_{N+k}).$$

However, in these two cases, the  $(i - 1)^{\text{th}}$  and  $i^{\text{th}}$  parts can be summed (in  $\gamma^{(1)}$  and  $\gamma^{(2)}$ ) to retrieve valid weights of smaller length, so they must be rejected.



Let's now consider the configuration  $(\gamma_1 | \dots | \gamma_{i-1}, \gamma_i | \gamma_{i+1} | \gamma_{i+2} | \dots | \gamma_{N+k})$ . Divisions can only be preserved here, to get the configuration below in  $\gamma^{(2)}$ .

$$(\gamma_1 | \dots | \gamma_{i-1}, \gamma_i - 1 | \gamma_{i+1} + 1 | \gamma_{i+2} | \dots | \gamma_{N+k}).$$

Similarly as for the previous configuration, the  $(i-1)^{\text{th}}$  and  $i^{\text{th}}$  parts can be added (in  $\gamma^{(1)}$  and  $\gamma^{(2)}$ ) to retrieve weights of smaller length, so this must be rejected.

Let's finally consider the configuration  $(\gamma_1 | \dots | \gamma_{i-1} | \gamma_i | \gamma_{i+1}, \gamma_{i+2} | \dots | \gamma_{N+k})$ . Either divisions are preserved, or the division between the  $(i+1)^{\text{th}}$  and  $(i+2)^{\text{th}}$  parts is added, to get either configurations below in  $\gamma^{(2)}$ .

$$(\gamma_1 | \dots | \gamma_{i-1} | \gamma_i - 1 | \gamma_{i+1} + 1, \gamma_{i+2} | \dots | \gamma_{N+k}) \text{ OR } (\gamma_1 | \dots | \gamma_{i-1} | \gamma_i - 1 | \gamma_{i+1} + 1 | \gamma_{i+2} | \dots | \gamma_{N+k}).$$

In the first configuration above, the  $(i+1)^{\text{th}}$  and  $(i+2)^{\text{th}}$  parts can be added (in  $\gamma^{(1)}$  and  $\gamma^{(2)}$ ) to retrieve weights of smaller length, so this configuration must be rejected. The second one is valid.

There are finally only three possible configurations for the divisions in  $\gamma^{(1)} \xrightarrow{i} \gamma^{(2)}$ , such that  $k$  is minimal and the minimal parsing is modified by  $f_i$ , going from  $T_{\gamma^{(1)}}$  to  $T_{\gamma^{(2)}}$ . Note that they all force  $k = 0$ , and that  $|\ell(\alpha) - \ell(\beta)| \in \{0, 1\}$ .

There is also a special case to consider in cases where  $\gamma_i = 1$ , with  $\gamma_{i+1} \geq 1$  or  $\gamma_{i+1} = 0$ . The second case is easy since then the maximal horizontal bands are preserved. In the first case, the only possible configurations are the following.

$$\begin{aligned} & (\gamma_1 | \dots | \gamma_{i-1} | 1 | \gamma_{i+1}, \gamma_{i+2} | \dots | \gamma_{N+k}) \xrightarrow{i} (\gamma_1 | \dots | \gamma_{i-1}, 0 | \gamma_{i+1} + 1 | \gamma_{i+2} | \dots | \gamma_{N+k}) \text{ OR} \\ & (\gamma_1 | \dots | \gamma_{i-1} | 1 | \gamma_{i+1} | \gamma_{i+2} | \dots | \gamma_{N+k}) \xrightarrow{i} (\gamma_1 | \dots | \gamma_{i-1}, 0 | \gamma_{i+1} + 1 | \gamma_{i+2} | \dots | \gamma_{N+k}). \end{aligned}$$

In the second configuration, we still get  $k = 0$ . In the first one, these configurations are only possible if the only entry  $i$  is northeast of both the head of the horizontal band of the  $i+1$ 's and the tail

of the  $i + 2$ 's (in order to break their maximal horizontal band). However,  $f_i$  cannot change this entry, since the corresponding parenthesis sequence (for the parenthesis rule) will give  $(\dots())$ , with at least one parenthesis ( to be paired with the parenthesis ) of the entry  $i$ , so  $f_i$  must be null and the first configurations cannot occur. Then, in all cases,  $k = 0$ .

Therefore, if there exist a minimal edge labelled  $i$  between two subcomponents  $B(T_\alpha)$  and  $B(T_\beta)$ , it occurs in  $B(\lambda)_N$  for  $N = \max(\ell(\alpha), \ell(\beta))$ , and in all  $B(\lambda)_n$  for  $n \geq N$ . Moreover, edges only occur between subcomponents associates to descent compositions which have equal length or which lengths differ only by 1.

Now,  $B(\lambda)_S$  contains all tableaux of shape  $\lambda$  and filling at most  $S$ . Since  $S$  is the maximal number of parts in descent compositions for  $\lambda$ , then all subcomponents associated to quasisymmetric functions  $F_\alpha$  occur in  $B(\lambda)_S$ , with at least one tableau (if  $\ell(\alpha) = S$ ). By the above result, all minimal edges also occur in  $B(\lambda)_S$ .

For  $n \geq S$ , all subcomponents occur in  $B(\lambda)_n$ , potentially with more tableaux. For  $n < S$ , some subcomponents will be missing, but the minimal edges between occurring subcomponents will also appear in  $B(\lambda)_n$  by the previous result. Then the obtained skeleton is the induced subgraph of  $Skeleton(\lambda)_S$  containing the standard tableaux with descent composition of length at most  $n$  as vertices, giving the desired result. ■

We can define  $Skeleton(\lambda) = Skeleton(\lambda)_S$ , where  $S$  is the maximal length of a descent composition for  $\lambda$ . Then  $Skeleton(\lambda)$  is also the underlying structure of  $B(\lambda)$ . It is a corollary of the proof that

**Corollary 4.3.37 :** There are edges in  $Skeleton(\lambda)$  only between standard tableaux whose number of descents differ by at most 1.

We also note interesting underlying structures of the skeleton when considering induced subgraphs  $H_s$  with subsets of vertices being standard tableaux with fixed number of descents  $s$ . Recall that the

union of two graphs  $G_1 = (V_1, E_1)$  and  $G_2 = (V_2, E_2)$  is defined to be  $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ , where  $V_i$  and  $E_i$  is respectively the set of vertices and edges of  $G_i$ . If  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , then we say that this union is *disjoint*.

**Conjecture 4.3.38 :** Let  $H_s$  be the induced subgraphs of  $Skeleton(\lambda)$  whose vertices are the standard tableaux with descent compositions having  $s$  parts. Then  $H_s$  is either a

- Disjoint union of singletons, or
- Disjoint union of chains of same lengths, or
- Disjoint union of even cycles (of same lengths), or
- Disjoint union of union(s) of even cycles with, or without, two extra attached vertices giving the source(s) and sink(s) of the connected component(s).

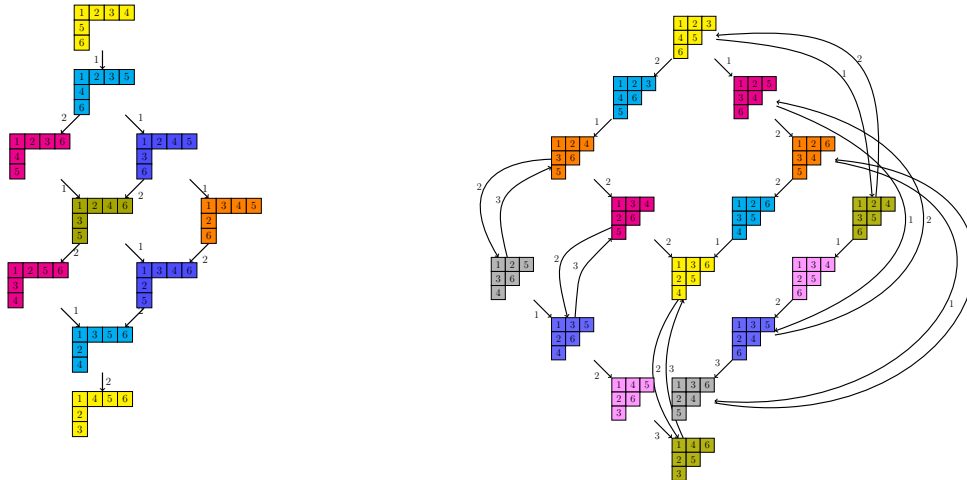
Multiple edges occur only between such induced subgraphs associated to different descent composition lengths  $s$ .

This has been verified for all partitions  $\lambda \vdash m$  with  $m \leq 6$ . Figure 4.4 illustrates different cases of the conjecture.

It would be interesting to study further this notion of skeleton of crystals. In particular, Danilov, Karzanov and Koshevoy have done so, along with studying the notion of subcrystals (Danilov *et al.*, 2008), in the alternative crossing model for  $A_{n-1}$  crystals. They introduced alternate combinatorial objects as vertices of crystals, defined crystal operators on these objects by using feasible functions, and showed that this does give an alternative model for  $A_{n-1}$  crystals by using Stembridge axioms. Some results may then have connections to those found here, but the vastly different setting makes comparisons difficult. It would however be extremely interesting to further study the connections with their results.

#### 4.3.7 Crystal skeleton and dual equivalence graphs as relations between the plactic and coplactic monoids

In this section, we explore the relationship between the skeleton and the dual equivalence graphs introduced by Assaf (Assaf, 2015), which is another oriented graph structure on standard tableaux.



(a)  $Skeleton(4, 1, 1)$  : all tableaux have two descents and form a (connected) union of 4-cycles, with the two attached vertices being the source and sink of the induced subgraph.

(b)  $Skeleton(3, 2, 1)$  : standard tableaux with two descents form an even cycle of length 8, and those with three descents form a disjoint union of two chains of length 4.

FIGURE 4.4: Structure of induced subgraphs of  $Skeleton(\lambda)$  whose vertices are standard tableaux with a fixed number of descents

We will see how the fundamental quasisymmetric functions can be seen as describing the relationship between the plactic and coplactic monoid, and relations between them encode dual  $RSK$  equivalences. Let's start by recalling certain definitions.

#### 4.3.7.1 RSK algorithm, jeu de taquin, plactic and coplactic monoids in crystals

Recall that the RSK algorithm associates to any word  $w$  a pair of tableaux  $(P(w), Q(w))$ . See (Fulton, 1996) or (Sagan, 2001) for a full description of the algorithm. The tableau  $P(w)$  is called the insertion tableau of  $w$ , and will have the same weight as  $w$ . The tableau  $Q(w)$  is called the recording tableau of  $w$ , and is standard in this context.

Words form the plactic monoid with concatenation as product and Knuth relations as equivalence relations (Lascoux et Schützenberger, 1981). All words in the same equivalence class in the plactic monoid are mapped onto the same insertion tableaux  $P$ , and its row reading word  $rw(P)$  can be

seen as a representative of this Knuth-equivalence class. We will take this as the definition for words to be *plactically equivalent*.

*Jeu de taquin* allows, among other things, to translate Knuth relations to tableaux, and to describe a crystal structure on skew tableaux : tableaux on shapes  $\lambda/\mu$ , where the cells of  $\mu$  are blanks in  $\lambda$ , and other cells are filled with the usual row and column conditions. The effect of jeu de taquin on these skew tableaux corresponds to applying Knuth relations to their reading words.

Starting with a skew tableau, blanks pass through non-empty cells, always preserving conditions on rows and columns. A jeu de taquin slide always starts at an inner corner, having non-empty cells to its right and under it, exchanging it successively with non-empty cells until it lies on the outer shape of  $\lambda$  and no more exchanges are possible. Doing this process recursively allows one to "rectify" the tableau to a partition shape. This tableau is called the *rectification* of the initial skew tableau. The rectification is unique, so the order of the slides doesn't matter.

For example, the skew tableau  $T$  below, of skew shape  $(5, 5, 3)/(2, 2)$ , is rectified in five jeu de taquin slides, where the inner corners used for the slides are identified by red cells, and the entries moved in the slide appear in red :

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \cdot & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 1 & 3 \\ \hline \cdot & 2 & 2 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \cdot & 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 & & \\ \hline 1 & 3 & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \cdot & 2 & 2 & & \\ \hline 1 & 3 & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \cdot & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 & & & \\ \hline 3 & & & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & & & & \\ \hline 3 & & & & & \\ \hline \end{array} = \text{Rect}(T)$$

At each step the skew tableau remains semistandard and (skew) partition shaped. Jeu de taquin slides commute with crystal operators (van Leeuwen, 2001), so a crystal of skew tableaux is isomorphic to the crystal where all skew tableaux have been rectified. In particular, skew tableaux which rows are maximal increasing factors of words, as in figure 4.1, are rectified to tableaux obtained from those words through the RSK algorithm, and the crystals containing them are isomorphic.

The following results give relations between crystals on words and on tableaux :

**Proposition 4.3.39 ((Bump et Schilling, 2017, Theorems 8.6 and 8.7)) :** The crystal on words of length  $k$  with letters in  $[n]$ , noted  $[n]^{\otimes k}$ , decomposes into a disjoint union of crystals,

each isomorphic to a certain  $B(\lambda)$ , for  $\lambda$  partitions of  $k$  with length at most  $n$ .

Let  $x, y \in [n]^{\otimes k}$ , then

1.  $P(f_i(x)) = f_i(P(x))$ , where  $f_i$  denotes a crystal operator on words or tableaux depending on the object it is applied to.
2. If  $\lambda$  is the shape of  $P(x)$  and  $Q(x)$ , then  $x$  lies in a connected component of the crystal isomorphic to  $B(\lambda)$ .
3. If  $P(x) = P(y)$ , then  $x, y$  are plactically equivalent.
4. If  $Q(x) = Q(y)$ , then  $x, y$  lie in the same connected component of the crystal on words.

Plactically equivalent words then lie in the same position in isomorphic crystals, and the distinct recording tableaux  $Q(w)$  allow us to differentiate between isomorphic components. We can then consider pairs  $(P(w), Q(w))$  as the vertices of crystals of tableaux. In general, we only consider the first tableau of the pair, since crystal operators act only on them.

The following classic result states that  $RSK$  preserves descents, and so descent compositions, from words to recording tableaux. A proof can be found in (Loehr, 2011, Theorem 10.117 ).

**Proposition 4.3.40 :** Let  $w$  be a word, and  $Q(w)$  the associated recording tableau obtained through the RSK algorithm. Then

$$Des(Q(w)) = Des(w).$$

All words with the same recording tableau  $Q(w)$  are said to be coplactically equivalent (in the associated coplactic monoid). They all land in the same connected crystal. In particular, coplactic equivalences preserve descents by the above proposition.

#### 4.3.7.2 Relation between plactic and coplactic monoids : skeleton and dual equivalence graphs

The relation between plactic and coplactic classes is illustrated by the well known fact that if  $RSK(w) = (P(w), Q(w))$ , then  $RSK(w^{-1}) = (Q(w), P(w))$  (see Theorem 10.112 of (Loehr, 2011)). This correspondence works for any word, not only permutations, by using the  $RSK$  map on biwords, where the inverse of a biword is easily computed. In this context, the recording tableau  $Q(w)$  may be semistandard.

This can then be understood by linking standard tableaux of shape  $\lambda \vdash m$  indexing connected crystal components  $B(\lambda)$  in  $[n]^{\otimes m}$ , and the associated subcomponents of  $B(\lambda)$ . They can be seen as the inverse images of the relation in RSK, exchanging the  $P, Q$ -tableaux as the effect of considering  $w^{-1}$  : standard tableaux expand into their associated subcomponent under destandardization in all possible ways which preserve the minimal parsing, as the subcomponents shrink to their associated standard tableau under standardization.

The fundamental quasisymmetric functions  $F_\alpha$  and their associated subcomponents can then be seen as representing the relation between plactic and coplactic classes. This new interpretation of these relationships establishes additional relations between connected components  $B(\lambda)$  in the tensor  $B(1)^{\otimes m}$ .

Other interesting relations are often referred to as *dual RSK relations* : equivalences, generally on permutations, with the following elementary transformations on letters  $i - 1, i$  and  $i + 1$  in a permutation, according to their relative positions :

$$\begin{array}{ccccccc} i & i + 1 & i - 1 & \xleftrightarrow{i} & i - 1 & i + 1 & i \\ i & i - 1 & i + 1 & \xleftrightarrow{i} & i + 1 & i - 1 & i \end{array}$$

Note that these elementary transformations do not correspond to coplactic relations, in particular since they introduce (or remove) descents.

Assaf introduced dual equivalence graphs to represent these dual RSK relations on permutations as actions on the standard tableaux with these permutations as reading words (Assaf, 2015). They

are then graphs on standard tableaux, just like our skeleton of crystals.

Even though they are defined very differently, these two types of oriented graph structures on standard tableaux are surprisingly similar. The associated dual graph for  $\lambda = (4, 3)$ , as defined by Assaf, would be the one illustrated in figure 4.5. Its graph structure only differs from that of figure 4.3 by seven edges missing.

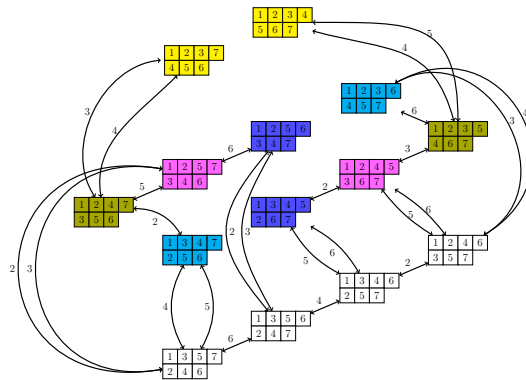


FIGURE 4.5: Dual equivalence graph for  $\lambda = (4, 3)$ , as of the definition of Assaf.

Franco Saliola suggested the dual equivalence graph for  $\lambda$  is a subgraph of  $Skeleton(\lambda)$ . We conjecture further that

**Conjecture 4.3.41 :** The dual equivalence graph for  $\lambda$  is a subgraph of  $Skeleton(\lambda)$ , in the sense that, forgetting orientations and labels, if there are  $r$  two sided arrows between two standard tableaux in the dual equivalence graph, there are also  $r$  edges between the same standard tableaux in  $Skeleton(\lambda)$ .

Moreover, if  $Skeleton(\lambda)$  has  $r > 1$  edges between two standard tableaux, then there are  $r$  edges between the same standard tableaux in the dual equivalence graph for  $\lambda$ .

This conjecture has been verified for all partitions  $\lambda \vdash m$  with  $m \leq 6$ . We also note that most of the time the two graph structures are equal. The skeleton would then encode the dual RSK



equivalences (among other relations) on standard tableaux.

Note that the reading word of all tableaux with same minimal parsing standardize to the same permutation, as noted in example 4.3.6. All these tableaux correspond to the vertices of a sub-component  $B(T_\alpha)$ , mapped onto  $std(T_\alpha)$  in the skeleton. We can then see the skeleton as encoding relations between permutations (reading words of the standard tableaux). However, the fact that these relations are generally dual RSK equivalences is surprising.

### 4.3.8 Applications to plethysm

#### 4.3.8.1 Counting monomials in plethysms $s_\mu[s_\lambda]$

As discussed in the introduction, plethysms of two Schur functions  $s_\mu[s_\lambda]$  have a decomposition in the basis of fundamental quasisymmetric functions (Loehr et Warrington, 2012) :

$$s_\mu[s_\lambda] = \sum_{A \in S_{a,b}(\mu,\lambda)} F_{Asc(A)}.$$

In this formula,  $\mu \vdash a$ ,  $\lambda \vdash b$ ,  $S_{a,b}(\mu, \lambda)$  is a set of  $a \times b$  "standard" matrices which depend on the shapes  $\mu$  and  $\lambda$ , and  $Asc(A)$  gives a composition giving the ascents of the word read off the matrix  $A$  under a complex reading order.

The matrices are built from what Loehr and Warrington call tableaux of tableaux : entries of the tableau of shape  $\mu$  are tableaux of shape  $\lambda$ . We then say they have *shape*  $\lambda^\mu$ . When a total order on tableaux is fixed, the tableaux of tableaux of shape  $\lambda^\mu$  give the monomials of  $s_\mu[s_\lambda]$  (see for example (de Boeck *et al.*, 2021), (Loehr et Warrington, 2012), (Stanley et Fomin, 1999), etc.).

One definition of plethysm is in terms of the variable substitution of the  $x_1, x_2, \dots$  in  $s_\mu$  by the monic monomials of  $s_\lambda$  (monomials with coefficient 1). Monomials with coefficients  $c \in \mathbb{N}$  greater than 1 are simply broken down into  $c$  equal monic monomials. Since both functions in the plethysm are Schur functions (so symmetric), then the order of the monomials is not important, and the concept of tableaux of tableaux makes perfect sense.

By using the results above, we have that

**Corollary 4.3.42 :** The number of monic monomials in a plethysm  $s_\mu[s_\lambda(x_1, \dots, x_n)]$  is equal to

$$|SSYT(\mu)_{SSYT(\lambda)_n}| = \sum_{0 \leq d \leq D_\mu} f_d^\mu \cdot \begin{pmatrix} |\mu| + \left( \sum_{0 \leq e \leq D_\lambda} f_e^\lambda \cdot \binom{|\lambda| + n - e - 1}{n - e - 1} \right) - d - 1 \\ \left( \sum_{0 \leq e \leq D_\lambda} f_e^\lambda \cdot \binom{|\lambda| + n - e - 1}{n - e - 1} \right) - d - 1 \end{pmatrix},$$

where  $f_d^\mu$  denotes the number of standard tableaux of shape  $\mu$  with  $d$  descents, and  $D_\mu$  is the maximal number of descents in a standard tableau of shape  $\mu$ .

*Proof.* One need only consider the plethystic substitution of the monic monomials of the Schur function  $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$  into  $s_\mu$ , and the formula counting the number of tableaux of shape  $\lambda$  and entries at most  $n$  given above. ■

#### 4.3.8.2 Decomposing a symmetric sum of quasisymmetric functions into the basis of Schur functions

In order to help progress for plethysm problems, we aim to understand the change of basis from fundamental quasisymmetric functions to Schur functions, and conversely, especially when considering expressions of the plethysm of two Schur functions. In particular, we aim to give a combinatorial description of these changes of basis.

If  $f$  is a symmetric function with decomposition into the basis of quasisymmetric functions  $f = \sum d_\alpha F_\alpha$ , we can replace the  $F_\alpha$  by generalized Schur functions  $s_\alpha$ , defined using the Jacobi-Trudi definition on determinants, with the same coefficients (Garsia et Remmel, 2018). A generalized symmetric function  $s_\alpha$  is equal to  $\pm s_\lambda$ , for some partition  $\lambda$ . When using this method a lot of generalized Schur functions cancel out, so this is far from efficient.

For a symmetric  $f = \sum d_\alpha F_\alpha$ , another way to express it in the Schur basis is through multiple changes of basis : fundamental quasisymmetric functions to monomial quasisymmetric functions to monomial symmetric functions to Schur functions. This is computationally faster, so this is the

algorithm implemented in SageMath. However, this doesn't give much insight into the relationship between the two basis which truly interests us.

We can use the results above to give another way of expressing a symmetric function (given in terms of fundamental quasisymmetric functions) into the basis of Schur functions.

**Proposition 4.3.43 :** Let  $f$  be a symmetric function which admits a decomposition  $f = \sum_{\beta} c_{\beta} F_{\beta}$  into the basis of fundamental quasisymmetric functions. Let  $\alpha$  be the maximal descent composition appearing in the decomposition of  $f$  for the lexicographical order. Then  $\alpha$  is a partition.

If  $f$  is also Schur-positive, then  $f - c_{\alpha} s_{\alpha}$  is Schur-positive and  $F$ -positive.

*Proof.* Since  $f$  is symmetric, it must admit a (unique) decomposition into the basis of Schur function. We have seen in proposition 4.3.12 that the partitions  $\lambda$  such that  $F_{\alpha}$  can appear in  $s_{\lambda}$  must have  $\lambda_1 \geq \alpha_i$ , so in particular  $\lambda_1 \geq \alpha_1$ . We must also have that  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_j$  for all  $j$ , so  $\alpha \leq_{lex} \lambda$ , with  $\leq_{lex}$  the lexicographical order.

If  $s_{\lambda}$  appears in  $f$ , then  $F_{\lambda}$  must appear in the decomposition of  $f$  in the basis of quasisymmetric functions. This is because  $s_{\lambda} = \sum_{T \in SYT(\lambda)} F_{compDes(T)}$ , and  $\lambda$  is the descent composition of the standard tableau often referred as the *superstandard tableau*, which has destandardization (according to its minimal parsing)  $1_{\lambda}$ .

Since we have picked  $\alpha$  maximal for the lexicographical order in all descent compositions appearing in the decompositions of  $f$ ,  $c_{\gamma} = 0$  for all  $\gamma >_{lex} \alpha$ . We must then have that  $\alpha = \lambda$  is a partition, and that  $s_{\alpha}$  appears  $c_{\alpha}$  times in the decomposition of  $f$  in the basis of Schur functions.

If  $f$  is Schur-positive, then so is  $f - c_{\alpha} s_{\alpha}$ . Moreover, since Schur-positivity implies  $F$ -positivity,  $f - c_{\alpha} s_{\alpha}$  is also  $F$ -positive. ■

**Corollary 4.3.44 :** The following algorithm gives the decomposition of a symmetric function  $f$ , expressed in the basis of fundamental quasisymmetric functions, into the Schur basis.

**Algorithm 4.3.45 :** Let  $f$  be a symmetric function with an expression in the basis of fundamental quasisymmetric functions  $f = \sum_{\beta} c_{\beta} F_{\beta}$ . Let  $S = f$ , and set  $g = 0$ .

1. Let  $\alpha$  be the leading support, ie the largest descent composition appearing in  $S$  for the lexicographical order. It must be a partition.
2. Let  $S = S - c_{\alpha} \left( \sum_{T \in SYT(\alpha)} F_{compDes(T)} \right)$  and  $g = g + c_{\alpha} s_{\alpha}$ .
3. Repeat until  $S = 0$ .

Then  $g = f$  is expressed in the basis of Schur functions.

**Remark 4.3.46 :** This algorithm is rather simple and straightforward from the definitions, so others may have used it before. However, it seems to be absent from the literature. Its underlying construction is its most important feature, as it is generally not more efficient than the algorithm implemented in SageMath (when computing the decomposition of a random symmetric sum of quasisymmetric functions of degree  $n$  into the Schur basis). Maybe plethysm is even more closely related to fundamental quasisymmetric functions than we thought.

**Remark 4.3.47 :** This algorithm may explain the result of De Boeck, Paget and Wildon, stating that a Schur function  $s_{\nu}$  occurs in a plethysm  $s_{\mu}[s_{\lambda}]$  with multiplicity given exactly by the number of *maximal plethystic tableaux of weight  $\nu$*  if and only if  $\nu$  is maximal for the lexicographical order for  $\mu, \lambda$  (de Boeck *et al.*, 2021). Maximal here indicates that no entry  $c$  of a tableau-entry can be changed for an entry  $c - 1$  without breaking the condition of the larger tableau being semistandard.

#### 4.3.9 Conclusion

We now have a better understanding of the decomposition of Schur functions into quasisymmetric functions, and of the relationships between them. We may now use this to find a more direct expression of the plethysm of two Schur functions into the basis of Schur functions.

#### 4.3.10 Acknowledgement

I thank Franco Saliola for his support throughout this project. I also thank those who contributed to SageMath, which helped test examples and generate figures, and those behind OEIS, which helped formulate proposition 4.3.20. FMG received funding from NSERC.

#### 4.3.11 Annex : Proofs for EVAC

We give here a proof that the evacuation map EVAC defined in section 4.3.6 is an anti-automorphism of crystals. We also give a proof that it inverses descent compositions. Berenstein and Zelevinsky proved the former in (Berenstein et Zelevinsky, 1996), but their proof uses a lot of tools of crystal theory and representation theory. We believe our proof to be of interest, since it can be more accessible, and also uses an anti-automorphism of crystals on words  $Rot$  studied already in the litterature : for  $w = w_1 w_2 \dots w_k \in [n]^{\otimes k}$ ,

$$Rot(w) = \text{compl}(w_k \dots w_2 w_1) = \overline{w_k} \dots \overline{w_2 w_1},$$

where  $\bar{\ell} = \text{compl}(\ell) = n - \ell + 1$ .

The operator  $Rot$  was studied by Poirier and Reutenauer among others (Poirier et Reutenauer, 1995). They showed that  $Rot(w) = w_0 w w_0$ , where  $w_0 = k(k-1) \dots 321$  is the longest permutation of the symmetric group  $\mathbb{S}_k$ , for  $k$  the length of  $w$ .  $w w_0$  is the mirror image  $w$ , and  $w_0 w$  changes letters  $i$  of  $\overleftarrow{w}$  into  $k - i + 1$ . If  $w$  is not a permutation, we can standardize  $w$  according to its weight  $\beta$  from left to right, and afterwards de-standardize it according to  $\overleftarrow{\beta}$ , from right to left. We then get the same effect on  $w$  as  $Rot$ .

We then have that

**Proposition 4.3.48 :**  $Rot$  is an anti-automorphism of crystals of words which inverses descent compositions.

*Proof.* We have that  $Rot$  is an involution, so we have an automorphism. We need to show that  $Rot(f_i(w)) = e_{n-i}(Rot(w))$  for any word  $w$ .

By definition,  $Rot(w) = \overline{w_k w_{k-1}} \dots \overline{w_2 w_1}$  where  $\overline{w_i} = n - w_i + 1$ . Suppose entries  $i$  and  $i + 1$  give a certain sequence of unpaired parenthesis  $)^{\phi_i}(\epsilon_i$ .  $Rot(w)$  has the sequence  $)^{\epsilon_i}(\psi_i$  for entries  $n - i$  and  $n - i + 1$ , where entries  $n - i + 1$  are obtained from letters  $i$  in  $w$ , and letters  $n - i$ , from letters  $i + 1$  in  $w$ . The letter  $i$  affected by  $f_i$  in  $w$  then corresponds to the letter  $n - i + 1$  affected by  $e_{n-i}$  in  $Rot(w)$ , and  $Rot(f_i(w)) = e_{n-i}(Rot(w))$ .

Descent compositions have been described as the lengths of the minimal parsing of words  $w$  into weakly increasing factors. If a word  $w$  has minimal parsing of lengths  $\alpha$ , then reversing the order of the letters gives weakly increasing sequences of lengths  $\overleftarrow{\alpha}$ , and complementing letters gives back weakly increasing sequences of lengths  $\overleftarrow{\alpha}$ . Then  $Rot$  inverses descent compositions. ■

Let's denote by  $B_\lambda(w)_n$  the crystal (on words in  $[n]^k$ ) which has source  $w$ , of weight  $\lambda$ . Then  $B_\lambda(w)_n \simeq B(\lambda)_n$  by proposition 4.3.7.

**Remark 4.3.49 :** It is possible to show that crystal operators preserve descent compositions on words (Appleby et Whitehead, 2020), so the fact that  $Rot$  inverses descent compositions of words implies that the image of a connected component crystal of words  $B_\lambda(w)_n$ , under the  $Rot$  map, is the (dual) isomorphic connected component of crystal of words  $B_\lambda(w)_n^\#$ , obtained by reversing arrows directions, re-labelling arrows  $i$  by  $n - i + 1$ , and vertices  $v$  by  $Rot(v)$ . In particular, if  $w$  is a Yamanouchi word (the source of a connected component  $B_\lambda(w)_n$ ), then  $Rot(w)$  is an anti-Yamanouchi word, with  $f_i(Rot(w)) = NULL \forall i$ , and the sink of  $B_\lambda(w)_n^\#$ .

These two components are isomorphic to the same  $B(\lambda)_n$ , so the sources and sinks of both will map respectively on  $1_\lambda$  and the sink of  $B(\lambda)_n$ , which will be  $EVAC(1_\lambda)$ .

We can now use the correspondence given by Poirier and Reutenauer to see how this  $Rot$  map affects the  $RSK$  insertion. Since  $Rot(w) = w_0 w w_0$ , then  $RSK(Rot(w)) = RSK(w_0 w w_0)$ . The following result is due to Schützenberger, a proof of which can be found in (Chmutov *et al.*, 2022).

**Proposition 4.3.50 :**  $RSK(w_0 w w_0) = (EVAC(P(w)), EVAC(Q(w)))$ .

We can finally show that EVAC is an anti-automorphism of crystals of tableaux, by using only the results above.

**Proposition 4.3.51 :** EVAC is an anti-automorphism of crystals of tableaux, when considering vertices as pairs of tableaux  $(P, Q)$  obtained through  $RSK$ , with  $Q$  standard.

*Proof.* First off, let's note that  $EVAC(Q)$  is a standard tableau which indexes an isomorphic connected component of crystals of tableaux. Then pairs  $(P, EVAC(Q))$  are the vertices of this isomorphic connected component, for all  $P$  appearing in the first connected component.

All tableaux  $P$  of shape  $\lambda$  appear in  $B(\lambda)_n$ . Since the involution EVAC sends a tableau of shape  $\lambda$  onto another tableau of the same shape, then it is an auto(iso)morphism on  $B(\lambda)_n$ .

If  $w$  is a Yamanouchi word, it is sent onto the pair of tableaux  $(1_\lambda, Q(w))$  through  $RSK$ , and  $Rot(w)$  is sent onto  $(EVAC(1_\lambda), EVAC(Q(w)))$ .  $EVAC(1_\lambda)$  is the sink of  $B(\lambda)_n$  by the above remark. If  $v = f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_\ell}(w)$ , for  $w$  the Yamanouchi word which is the source of the connected component of the crystal of words in which lies  $v$ , then

$$\begin{aligned} RSK(Rot(v)) &= RSK(Rot(f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_\ell}(w))) \\ &= RSK(e_{n-i_1} e_{n-i_2} \dots e_{n-i_\ell}(Rot(w))) \\ &= (e_{n-i_1} e_{n-i_2} \dots e_{n-i_\ell}(EVAC(1_\lambda)), EVAC(Q(w))), \end{aligned}$$

where the crystal operators are either those on words or on tableaux depending on the object they apply to. The fact that  $RSK$  commutes with crystal operators, going from second equality to the third, follows from proposition 4.3.39.

We then have that  $EVAC(f_i(P)) = e_{n-i}(EVAC(P))$ , and that EVAC is a crystal anti-automorphism. ■

**Proposition 4.3.52 :** EVAC inverts descent compositions of tableaux :

if  $DesComp(T) = \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ , then  $DesComp(EVAC(T)) = \overleftarrow{\alpha} = (\alpha_s, \dots, \alpha_2, \alpha_1)$ .

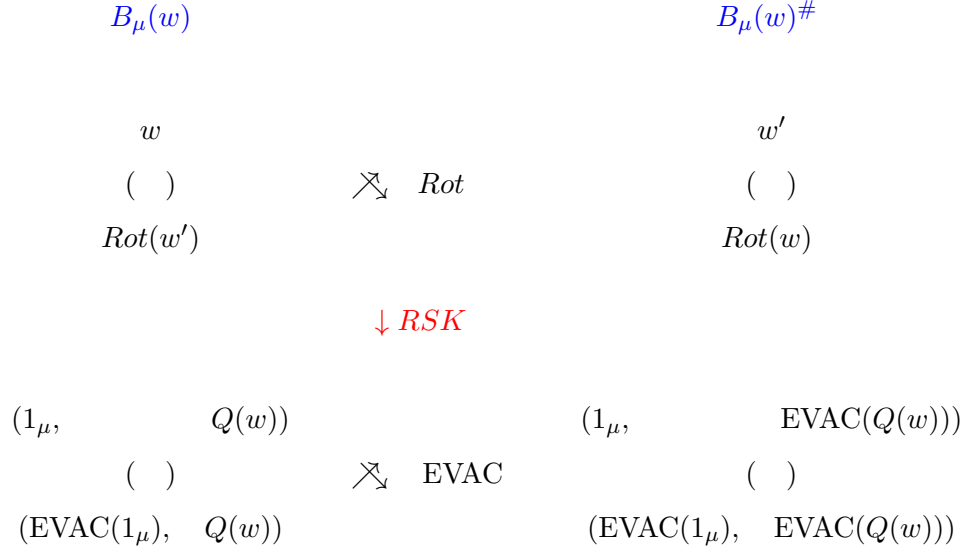


FIGURE 4.6: Bijection between connected components isomorphic to  $B(\mu)$  which are linked by the anti-automorphisms  $Rot$  and  $EVAC$ , and the isomorphism of crystals  $RSK$ , with  $EVAC(Q(w)) = Q(w')$  and  $w' = RSK^{-1}(1_\mu, EVAC(Q(w)))$ . Connected components are identified here solely by their source and sink.

*Proof.* We have seen in section 4.3.7 that a word  $w$  and its recording tableau  $Q(w)$  share the same descent composition, and that  $RSK(w^{-1}) = (P(w^{-1}), Q(w^{-1})) = (Q(w), P(w))$ . For a fixed tableau  $T$ , if  $rw(T) = w$ , then  $w^{-1}$  and  $P(w) = T$  share the same descent composition.

We have also seen that  $RSK(Rot(w)) = (EVAC(P(w)), EVAC(Q(w)))$ , so

$$\begin{aligned}
 RSK(Rot(w)^{-1}) &= (EVAC(Q(w)), EVAC(P(w))) \\
 &= RSK(Rot(w^{-1})).
 \end{aligned}$$

Then  $Rot(w^{-1})$  and  $EVAC(P(w)) = EVAC(T)$  share the same descent composition.

Finally, since  $Rot$  inverses descent compositions on words, then if the descent composition of  $w^{-1}$  and  $P(w) = T$  is  $\alpha$ , then the descent composition of  $Rot(w^{-1})$  and  $EVAC(T)$  is  $\overleftarrow{\alpha}$ . ■



## CONCLUSION

### 4.4 Résumé des résultats

Nous avons fait une révision de l'origine du pléthysme au sein de la théorie de la représentation des groupes, et nous avons introduit tous les outils combinatoires nécessaires afin d'interpréter le pléthysme de façon combinatoire, à travers la notion de substitution de variables dans des fonctions symétriques, et par la notion de tableaux de tableaux. Nous avons introduit la problématique de décrire (idéalement de façon combinatoire) les coefficients des fonctions de Schur apparaissant dans la décomposition d'un pléthysme  $s_\mu[s_\lambda]$ . Nous avons vu qu'ils s'agit de problèmes complexes et ouverts depuis plus de 80 ans.

Nous avons vu que les pléthysmes  $s_\mu[g]$  avec  $\mu$  un partage de  $m$  sont tous présents dans  $g^m$  (avec multiplicité  $f^\mu$ ), d'où l'intérêt d'étudier les puissances des fonctions symétriques. Puisque nous pouvons généralement exprimer la décomposition de Schur d'une telle puissance, on souhaite décrire combinatoirement la contribution pléthystique des fonctions de Schur y apparaissant, autrement dit, quelles fonctions de Schur contribuent à quel pléthysme. Puisque les pléthysmes sont alors indexés par les tableaux standards de forme  $\mu$ , cela peut se faire en associant à chaque fonction de Schur un tableau standard.

Pour aborder ce problème très difficile, nous nous sommes concentrés sur les fonctions symétriques homogènes  $h_\lambda$  et les fonctions symétriques élémentaires  $e_\lambda$ , qui sont respectivement les fonctions de Schur  $s_{(n)}$  et  $s_{(1^n)}$  lorsque  $\lambda = (n)$ . Ces fonctions correspondent à un produit de fonctions de Schur simples, et les résultats obtenus dans le cas  $\lambda = (n)$  sont directement applicables aux fonctions de Schur. Le cas où  $\lambda$  a plus d'une part est également intéressant en soi.

Nous avons étudié la décomposition des  $m$ -pléthysmes dans le cas où  $g = h_\lambda$ , et montré que ceux-ci se généralisent pour  $e_\lambda$  par l'involution  $\omega$  sur les fonctions symétriques. Les fonctions de Schur  $s_\nu$  apparaissant dans  $h_\lambda^m$  sont indexés par les tableaux de forme  $\nu$  et de remplissage  $\lambda^m$ , on a donc voulu décrire une application allant des tableaux de remplissage  $\lambda^m$  vers les tableaux standards à  $m$  cases. C'est ce que nous avons appelé attribution pléthystique, ou attribution de type.

Dans le cas  $\lambda = (n)$ , nous avons vu que les attributions pléthystiques pour  $m + 1$  peuvent être déduites de celles de  $m$ , où l'ajout d'une bande horizontale à  $n$  cases à un tableau de remplissage  $(n)^m$  a comme effet d'ajouter une case de remplissage  $m+1$  au type associé. D'autres règles nous aident également à définir une « bonne » attribution pléthystique. Nous avons donné l'attribution pléthystique pour  $m = 2$  dans le premier article. Dans le second article, nous avons défini une attribution pléthystique pour  $m = 3$ , et démontré pourquoi celle-ci est la plus simple et la plus cohérente, et devrait être retenue pour les généralisations futures. En particulier, les règles pléthystiques présentées permettent d'infirmer des attributions présentes dans la littérature.

Dans le cas où  $\lambda$  a plus d'une part, nous avons vu qu'une fonction de Kronecker peut être définie. Dans le cas  $m = 2$ , elle est entièrement déterminée, ce qui nous permet d'exploiter un produit de tableaux définissant RSK dans le premier article présenté. Dans le cas  $m > 2$ , elle n'est pas entièrement déterminée, ce qui demande de définir certaines propriétés voulues. C'est ce que nous avons initié dans le second article. Cette notion de fonction de Kronecker est entièrement nouvelle, et pourrait permettre des avancées dans l'étude des coefficients de Kronecker.

L'approche d'attribution pléthystique est particulièrement intéressante, puisqu'elle pave la voie pour des généralisations à  $m > 3$ , avec des règles générales, en plus d'un processus récursif à appliquer de  $m$  à  $m + 1$ . Dans ces deux articles, nous généralisons l'utilisation des tableaux de rubans pour étudier le pléthysme, introduite par Carré et Leclerc, tout en indiquant les limites de cette approche alternative, en particulier dues à la théorie des cristaux.

Dans le dernier article présenté, nous avons utilisé une approche différente pour étudier le pléthysme, en abordant la décomposition de fonctions de Schur en fonctions quasi-symétriques fondamentales, à l'aide de la théorie des cristaux. Nous avons obtenu plusieurs résultats très intéressants, notamment une formule permettant de dénombrer les tableaux de forme fixe  $\lambda$  et d'entrées au plus  $n$ . Nous avons vu que les monômes contribuant à une fonction quasi-symétrique fondamentale  $F_\alpha$  donnée sont regroupés, au sein d'un cristal  $B(\lambda)_n$ , en sous-composantes connexes isomorphes au cristal  $B(|\alpha|)_{n-\ell(\alpha)+1}$  (en tant que graphe orienté). Cela nous a amené à introduire le concept de quasi-cristal décrivant la structure de graphe orienté et étiqueté de la classe des sous-composantes associées à  $\alpha$ , donnant alors aussi cette structure aux fonctions quasi-symétriques fondamentales.

Nous avons étudié la sous-structure des cristaux  $B(\lambda)_n$  en terme de squelette de cristal, obtenu en remplaçant chaque sous-composante par le tableau standard associé. Nous avons vu que cette structure est fixe pour tout  $n > S$ , où  $S$  est déterminé pour chaque  $\lambda$ , et permet de décrire la structure inhérente de  $B(\lambda)$ . En particulier, nous conjecturons que les relations du squelette décrivent un lien entre les classes plactiques et celles coplactiques, des monoïdes plactiques et coplactiques respectivement. Nous avons également conjecturé que la structure de graphe du squelette inclut celle des graphes d'équivalence duale, et donc que les relations induites respectives sur les tableaux standards sont liées.

Enfinement nous avons étudié des applications de ces résultats au pléthysmes. En particulier, nous avons introduit un algorithme permettant de passer d'une expansion symétrique dans la base des fonctions quasi-symétriques fondamentales à la base de Schur.

Ces avancées nous permettent d'avancer, ne serait-ce que d'un petit pas, vers une meilleure compréhension de cette opération encore mystérieuse qu'est le pléthysme.

#### 4.5 Recherche future

Il serait intéressant de poursuivre la recherche entamée dans les deux premiers articles, en explorant les cas  $m > 3$ , mais aussi les règles générales qui permettraient d'affiner nos choix d'attribution pléthystique. Les cas  $m = 4, 5$  ont déjà commencé à être investigués. Également, il serait intéressant d'étudier davantage les coefficients de Kronecker avec l'approche combinatoire exposée ici, comme comptabilisant des couples de tableaux de forme fixées envoyés sur un tableau standard de forme fixe sous une fonction de Kronecker. Plus particulièrement, il serait intéressant de caractériser les propriétés qui seraient alors désirées pour les fonctions de Kronecker.

Pour ce qui est des fonctions quasi-symétriques fondamentales, il serait intéressant de comparer les notions des sous-composantes et de squelettes présentées ici à celles présentées dans l'article de Danilov, Karzanov et Koshevoy (Danilov *et al.*, 2008). Le lien entre le squelette et les graphes d'équivalence duale mériterait également d'être investigué davantage. La notion de quasi-cristal devrait être davantage étudiée, en validant s'ils peuvent être décrits par un relâchement de certains

axiomes de Stembridge, mais aussi s'il s'agit de cristaux pour des sous-groupes de  $GL_n$ , ou pour d'autres groupes. Il serait également intéressant d'étudier davantage le lien entre les fonctions de Schur et les fonctions quasi-symétriques fondamentales avec l'approche donnée par l'algorithme présenté à la fin du troisième article. Tout particulièrement, il serait intéressant d'étudier d'autres applications pour le pléthysme, en lien avec les descriptions de Loehr et Warrington, et celle de De Boeck, Paget et Wildon, en terme de tableaux de tableaux.

Finalement, il serait intéressant d'étudier davantage les liens entre le pléthysme et la théorie des cristaux, et de tenter de décrire une structure de cristal sur les tableaux de tableaux. En effet, il devrait y avoir une structure de cristal sur les tableaux de tableaux, puisque le pléthysme de deux fonctions de Schur est le caractère d'une représentation de  $GL_n$ . Être capable de caractériser la décomposition de ce cristal en composantes connexes isomorphes à  $B(\lambda)$  permettrait de décrire la décomposition du pléthysme associé dans la base de Schur, il s'agit donc d'un problème complexe. Toutefois, on sait maintenant que les tableaux de tableaux (correspondant à des monômes au sein du pléthysme) se regroupent en sous-composantes de cristal associées aux fonctions quasi-symétriques fondamentales. Caractériser cette décomposition permettrait des avancées, et comprendre comment relier entre-elles ces sous-composantes au sein de cristaux permettrait de véritablement comprendre le lien entre les fonctions de Schur et celles quasi-symétriques fondamentales, et peut-être même résoudre le pléthysme.

## BIBLIOGRAPHIE

- Appleby, G. D. et Whitehead, T. (2020). Perforated tableaux : A combinatorial model for crystal graphs in type  $a_{n-1}$ . arXiv.
- Assaf, S. H. (2015). Dual equivalence graphs and a combinatorial proof of LLT and Macdonald positivity. arXiv :1005.3759.
- Berenstein, A. et Zelevinsky, A. (1996). Canonical bases for the quantum group of type  $A_r$  and piecewise-linear combinatorics. *Duke Math. J.*, 82(3), 473–502.
- Brion, M. (1993). Stable properties of plethysm : on two conjectures of Foulkes. *Manuscripta mathematica*, 80, 347–371.
- Bump, D. et Schilling, A. (2017). *Crystal bases*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ. Representations and combinatorics.
- Burge, W. H. (1974). Four correspondences between graphs and generalized young tableaux. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 17(1), 12–30.  
[http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0097-3165\(74\)90024-7](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0097-3165(74)90024-7). Récupéré de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0097316574900247>
- Carré, C. et Leclerc, B. (1995). Splitting the square of a Schur function into its symmetric and antisymmetric parts. *J. Algebraic Combin.*, 4(3), 201–231.
- Chen, M. Y. (1998). An algorithm for computing plethysm coefficients. *Discrete Mathematics*, 180(1), 391–402. Proceedings of the 7th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics.
- Chen, Y.-M. (1982). *Combinatorial Algorithms for Plethysm*. (Thèse de doctorat). University of California, San Diego.
- Chen, Y. M., Garsia, A. M. et Remmel, J. (1984). Algorithms for plethysm. In *Combinatorics and algebra (Boulder, Colo., 1983)*, volume 34 de *Contemp. Math.* 109–153. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- Chmutov, M., Frieden, G., Kim, D., Lewis, J. et Yudovina, E. (2022). An affine generalization of evacuation. *Selecta Mathematica*, 28.
- Colmenarejo, L., Orellana, R., Saliola, F., Schilling, A. et Zabrocki, M. (2022). The mystery of plethysm coefficients. arXiv :2208.07258.
- Danilov, V. I., Karzanov, A. V. et Koshevoy, G. A. (2008). The crossing model for regular an-crystals. *Journal of Algebra*, 320(9), 3398–3424.
- de Boeck, M. (2015). *On the structure of Foulkes modules for the symmetric group*. (Thèse de

- doctorat). University of Kent.
- de Boeck, M., Paget, R. et Wildon, M. (2021). Plethysms of symmetric functions and highest weight representations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 374(11), 8013–8043.
- Fischer, N. et Ikenmeyer, C. (2020). The computational complexity of plethysm coefficients. *Comput. Complexity*, 29(2), Paper No. 8, 43.
- Fulton, W. (1996). *Young Tableaux : With Applications to Representation Theory and Geometry*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press.
- Garsia, A. M. et Remmel, J. B. (2018). A note on passing from a quasi-symmetric function expansion to a schur function expansion of a symmetric function. *arXiv : Combinatorics*.
- Gessel, I. M. (1984). Multipartite  $P$ -partitions and inner products of skew Schur functions. In *Combinatorics and algebra (Boulder, Colo., 1983)*, volume 34 de *Contemp. Math.* 289–317. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- Gessel, I. M. (2019). On the schur function expansion of a symmetric quasi-symmetric function. *Electron. J. Comb.*, 26, 4.
- Howe, R. M. (1987).  $(\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{gl}_m)$ -duality and symmetric plethysm. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences - Mathematical Sciences*, 97, 85–109.
- Knuth, D. (1970). Permutations, matrices, and generalized Young tableaux. *Pacific Journal of Mathematics*, 34(3), 709 – 727.
- Krattenthaler, C. (2005). Growth diagrams, and increasing and decreasing chains in fillings of ferrers shapes. *Advances in Applied Mathematics*, 37, 404–431.
- Lascoux, A. et Schützenberger, M.-P. (1981). Le monoïde plaxique. 109, 129–156.
- Littlewood, D. E. (1936). Polynomial concomitants and invariant matrices. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-11(1), 49–55.
- Littlewood, D. E. (1950). *The Theory of Group Characters* (2nd éd.). Oxford University Press.
- Loehr, N. A. (2011). *Bijjective combinatorics*. CRC Press.
- Loehr, N. A. et Remmel, J. B. (2011). A computational and combinatorial exposé of plethystic calculus. *J. Algebraic Combin.*, 33(2), 163–198.
- Loehr, N. A. et Warrington, G. S. (2012). Quasisymmetric expansions of Schur-function plethysms. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140(4), 1159–1171.
- Maas-Gariépy, F. (2023). Quasicrystal structure of fundamental quasisymmetric functions, and skeleton of crystals. arXiv : 2302.07694.

- Maas-Gariépy, F. et Tétreault, E. (2022a). Splitting the square of homogeneous and elementary functions into their symmetric and anti-symmetric parts. ArXiv : 2203.08279.
- Maas-Gariépy, F. et Tétreault, E. (2022b). 3-plethysms of homogeneous and elementary symmetric functions. arXiv : 2209.14942.
- Macdonald, I. (1998). *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. Oxford classic texts in the physical sciences. Clarendon Press.
- Malvenuto, C. et Reutenauer, C. (1998). *Discrete mathematics*, (193), 225–233.
- Morales, A. (2010). Is there a known formula for the number of ssyt of given shape with partition type? Récupéré le 13 février 2023 de <https://mathoverflow.net/questions/18597>.
- Mulmuley, K. (2012). The gct program toward the P vs. NP problem. *Commun. ACM*, 55(6), 98–107.
- Mulmuley, K. et Sohoni, M. (2003). Geometric complexity theory, P vs. NP and explicit obstructions. In *Advances in algebra and geometry (Hyderabad, 2001)* 239–261. Hindustan Book Agency, New Delhi.
- Narayanan, H. (2006). On the complexity of computing kostka numbers and littlewood-richardson coefficients. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 24, 347–354. <http://dx.doi.org/10.1007/s10801-006-0008-5>
- Poirier, S. et Reutenauer, C. (1995). Algèbres de Hopf de tableaux. *Ann. Sci. Math. Québec*, 19(1), 79–90.
- Sagan, B. (2001). *The Symmetric Group : Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*. Graduate Texts in Mathematics. Springer.
- Saliola, F. (2022). Notes de cours du cours séminaire de combinatoire : pléthysme. Cours suivi par l'autrice à l'hiver 2022.
- Schützenberger, M.-P. (1977). La correspondance de robinson. Dans D. Foata (dir.). *Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique*, 59–113., Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.
- Schützenberger, M. P. (1963). Quelques remarques sur une construction de schensted. *MATHEMATICA SCANDINAVICA*, 12, 117–128.
- Shimozono, M. (2005). Crystals for dummies. Récupéré le 31 janvier 2023 de <https://www.aimath.org/WWN/kostka/crysdumb.pdf>.
- Stanley, R. P. (2000). Positivity problems and conjectures in algebraic combinatorics. In *Mathematics : frontiers and perspectives* 295–319. Amer. Math. Soc., Providence, RI.

- Stanley, R. P. (2012). *Enumerative combinatorics. Volume 1* (second éd.), volume 49 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Stanley, R. P. et Fomin, S. (1999). *Enumerative Combinatorics*, volume 2 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press.
- Stanton, D. et White, D. (1985). A Schensted algorithm for rim hook tableaux. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 40(2), 211–247.
- Thrall, R. M. (1942). On symmetrized kronecker powers and the structure of the free lie ring. *American Journal of Mathematics*, 64(1), 371–388.
- van Leeuwen, M. A. A. (1999). Edge sequence, ribbon tableaux, and an action of affine permutations. *European J. of Combin.*, 20(2), 179–195.
- van Leeuwen, M. A. A. (2000). Some bijective correspondences involving domino tableaux. *Electron. J. Combin.*, 7, Research Paper 35, 25.
- van Leeuwen, M. A. A. (2001). The Littlewood-Richardson rule, and related combinatorics. In *Interaction of combinatorics and representation theory*, volume 11 de *MSJ Mem.* 95–145. Math. Soc. Japan, Tokyo.



## INDEX DES NOTATIONS ET DES DÉFINITIONS

- $1_\lambda$ , 35  
 $\alpha$ , composition, 10  
 $\alpha \vDash n$ , composition de  $n$ , 10  
 $B(\lambda)_n$ , cristal irréductible pour  $A_{n-1}$  (ou  $GL_n$ ), 33  
 $Des(T)$ , nombre de descentes dans un tableau standard  $T$ , 13  
 $DesComp(T)$ , composition de descentes d'un tableau  $T$ , 13  
 $e_i$ , opérateur de cristal remontant, 33  
 $e_\lambda$ , fonctions symétriques élémentaires, 16  
 $e_n$ , fonctions symétriques élémentaires, 16  
EVAC, processus d'évacuation défini sur tous les tableaux, 32  
 $f_i$ , opérateur de cristal descendant, 33  
 $f^\lambda$ , nombre de tableaux standards de forme  $\lambda$ , 13  
 $F_\alpha$ , fonctions quasi-symétriques fondamentales, 18  
 $GL_n(\mathbb{C})$  Groupe général linéaire pour  $E$ , 5  
 $GL_n(\mathbb{C})$  Groupe général linéaire pour  $n$ , 5  
 $h_\lambda$ , fonctions symétriques homogènes, 16  
 $h_n$ , fonctions symétriques homogènes, 15  
 $K_\lambda^\nu$ , nombres de Kostka, 17  
 $\Lambda$ , algèbre des fonctions symétriques, 14  
 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  partage, 10  
 $\lambda'$ , partage conjugué, 11  
 $\lambda_i$ , parts de  $\lambda$ , 10  
 $\lambda^n = (\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell, \dots, \lambda_\ell)$ , 10  
 $\lambda \vdash n$ ,  $\lambda$  partage de  $n$ , 10  
 $\lambda^\mu$  forme des tableaux de tableaux, 23  
 $\lambda/\mu$ , partage gauche, 11  
 $\ell(\lambda)$ , nombre de parts de  $\lambda$ , 10  
 $M_\alpha$ , fonctions quasi-symétriques monomiales, 18  
 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ , 6  
 $\lambda \geq \mu$ , ordre de dominance, 10  
 $\mu \subseteq \lambda$ , ordre d'inclusion pour les partages, 10  
 $\lambda \geq_{lex} \mu$ , ordre lexicographique, 10  
 $\alpha \preceq \beta$ , ordre de raffinement pour les compositions, 11  
 $(r) \cup \lambda$ , partage obtenu de  $\lambda$  en y ajoutant une part de longueur  $r$ , 24  
 $(n^r) + \lambda$ , partage obtenu de  $\lambda$  en y ajoutant  $n$  cases aux  $r$  premières parts de  $\lambda$ , 25  
 $QSym$ , anneau des fonctions quasi-symétriques, 18  
 $Rect(T)$ , rectification d'un tableau à l'aide du jeu de taquin, 29, 112  
 $rw(T)$ , mot de lecture (de ligne) d'un tableau, 12  
 $s_\lambda$ , fonction de Schur associée à  $\lambda$ , 14  
 $s_{\lambda/\mu}$ , fonction de Schur associée à  $\lambda/\mu$ , 15  
 $SSYT(\lambda)$ , ensemble des tableaux de forme  $\lambda$ , 12

$SSYT(\lambda, \alpha)$ , ensemble des tableaux de forme  $\lambda$  et de poids  $\alpha$ , 12  
 $SSYT(\lambda)_n$ , ensemble des tableaux de forme  $\lambda$  et d'entrée au plus  $n$ , 12  
 $SSYT_{SSYT(\lambda)_n}(\mu)$ , ensemble de tableaux de tableaux, 23  
 $wt(T)$ , poids d'un tableau, 12  
 $x^T$ , monôme d'un tableau, 12  
algebra of symmetric functions, 75  
anneau des fonctions quasi-symétriques, 18  
anneau des fonctions symétriques, 8, 14  
attribution pattern, 102  
attribution pléthystique (de type), 66  
bande horizontale de longueur  $n$ , 16  
bande verticale de longueur  $n$ , 16  
bandes horizontales maximales, 119  
bimot, 30  
Burge (bi)words, 58  
caractère d'une représentation, 7  
coefficients de Kronecker, 70  
complete, 94  
composantes connexes, 33  
compositions, 10  
compositions de descentes, 13  
conjecture de Foulkes, 10  
conjugaison, 11  
conjugate of a tableau, 46  
conjugate partition, 74  
conjugate tableaux, 108  
content, 75  
cospin, 21  
cristal, 32  
cristal sur des mots, 34  
cristaux de type  $A_{n-1}$ , 33  
crystal, 125  
crystal on words, 129  
Crystal operators, 132  
crystal operators, 128  
décomposition de Schur, 15  
décomposition de Schur d'une fonction symétrique homogène, ou élémentaire, 18  
décomposition pléthystique de  $g^m$ , 20  
découpage minimal, 119  
degré, 14  
descent composition, 131  
descentes d'un tableau standard, 13  
descents, 131  
descents of a word  $w$ , 132  
deuxième ordre total sur les tableaux, 23  
diagramme de Ferrers, 11  
diagramme de Young, 11  
elementary symmetric functions, 47  
elementary symmetric functions  $e_\lambda$ , 75  
even types, 101  
filling, 129  
fonction de Kronecker, 70  
fonction symétrique, 14  
fonctions de puissance, 8

fonctions de Schur, 14  
fonctions de Schur gauches  $s_{\lambda/\mu}$ , 15  
fonctions quasi-symétriques fondamentales,  
18  
fonctions quasi-symétriques monomiales, 18  
fonctions symétriques, 7  
fonctions symétriques élémentaire  $e_n$ , 16  
fonctions symétriques élémentaires  $e_\lambda$ , 16  
fonctions symétriques homogènes  $h_\lambda$ , 16  
fonctions symétriques homogènes  $h_n$ , 15  
forme d'un tableau pléthystique, 23  
forme extérieure, 11  
forme intérieure, 11  
formule des équerres, 13  
fundamental quasisymmetric functions, 133  
gauches, 11  
groupe, 5  
head, 87  
homogeneous symmetric functions, 47  
homogeneous symmetric functions  $h_\lambda$ , 75  
horizontal band, 88, 130  
incomplete, 94  
internal product, 110  
involution de Bender-Knuth, 15  
  
*j*-brin, 68  
jeu de taquin, 28, 49, 112, 162  
*j*-strand, 68, 92  
  
Kostka numbers, 75  
  
Kronecker coefficients, 109  
Kronecker map, 72, 74, 109  
  
*m*-pléthysmes, 20  
maximal, 130  
minimal parsing, 130  
modules de Schur, 7  
modules de Specht, 7  
modules de Weyl, 7  
monômes moniques, 20  
monoïde plaxique, 28  
monomial quasisymmetric functions, 133  
mot de lecture (de ligne), 12  
mots de Yamanouchi, 34  
  
nombre de Kostka  $K_{\lambda'}^\nu$ , 17  
notation anglaise, 11  
  
odd types, 101  
opérateurs de cristaux, 33  
opérateurs de cristaux  $e_i$  et  $f_i$  sur les mots,  
33  
opérateurs de cristaux sur les tableaux, 35  
ordre d'inclusion des partages, 10  
ordre de dominance  $\lambda \geq \mu$ , 10  
ordre de raffinement, 11  
ordre lexicographique, 10  
ordres, 10  
  
parenthesis rule, 129  
parité, 71  
partage de  $n$ , 10  
partages, 10

partages de  $n$ , 7  
partition of  $m$ , 129  
partitions, 129  
parts, 10  
pavable by  $r$ -ribbons, 88  
Pieri rule, 75  
pléthysme, 8  
plactically equivalent, 162  
Plethysm, 76  
plethystic type, 72  
poids d'un tableau, 12  
poids d'un tableau pléthystique, 23  
polynôme symétrique, 13  
power sum symmetric functions, 47, 76  
premier ordre total sur les tableaux, 22  
quasicrystals, 139  
  
 $r$ -ribbon, 87  
règle de parenthésage, 34  
règle de Pieri, 16  
reading word, 47  
rectification, 29, 162  
rectification of  $T$ , 112  
relations de Knuth, 28  
représentation linéaire d'un groupe  $G$ , 6  
row reading order, 130  
  
 $\ell$ -subtype, 79  
Schur function, 47  
Schur functions, 75, 130  
  
semistandard, 46, 75, 129  
semistandard tableau, 46  
shape  $\lambda^\mu$ , 166  
standard, 75, 129  
standardize a tableau, 131  
strand, 92  
symmetric functions, 47  
  
(plethystic) type attribution, 77  
tableau, 12  
tableau d'enregistrement, 30  
tableau d'insertion, 30  
tableau de forme  $\lambda/\mu$ , 12  
tableau de Young semi-standard de forme  
 $\lambda/\mu$ , 12  
tableau of shape  $\lambda$ , 129  
tableaux conjugués, 17  
tableaux de tableaux, 23  
tableaux domino, 21  
tableaux pléthystiques, 23  
tableaux standards, 12  
théorème de Maschke, 7  
type, 66, 73, 77  
type  $\alpha$ , 130  
  
undetermined attribution, 100  
  
weight, 128, 129  
Yamanouchi, 88  
Young diagram, 129