

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ANALYSE DU RÔLE QUE PEUT JOUER L'ARTICULATION DES DIMENSIONS
SÉMANTIQUE ET SYNTAXIQUE DANS L'APPRENTISSAGE DE LA NOTION
D'ÉQUIVALENCE D'EXPRESSIONS ALGÈBRIQUES DES ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ
D'APPRENTISSAGE DANS LE CONTEXTE D'INTERVENTIONS
ORTHOPÉDAGOGIQUES

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN ÉDUCATION

PAR
CARINE COBTI

JUILLET 2023

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.04-2020). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier, très chaleureusement, mon directeur de recherche, Gustavo Barallobres, qui m'a encadrée tout au long de ce processus. Ses critiques constructives ainsi que nos échanges ont été très enrichissants et m'ont permis d'approfondir mes réflexions. Merci d'avoir si généreusement partagé votre expertise avec moi.

J'aimerais aussi remercier mon jury, composé de Valériane Passaro, qui m'a introduite à la didactique de l'algèbre lors de mon baccalauréat, et de Laurie Bergeron, avec qui j'ai entre autres eu la chance et le plaisir de travailler pendant mon parcours à la maîtrise. Merci pour vos précieux conseils et vos lectures qui apportent un nouveau regard sur mon travail.

Je remercie aussi Stéphane Proulx, qui a assuré le bon déroulement de ma collecte de données, pour son ouverture et sa confiance en mon projet. Merci tout particulièrement à Maxime Martineau, orthopédagogue en mathématiques pour les élèves de deuxième année du secondaire. Ta flexibilité et ta précieuse collaboration ont rendu l'expérience tellement stimulante. Et bien sûr, merci aux élèves qui ont accepté de participer à ce projet.

Je tiens évidemment à remercier mes amies en recherche, Yasmine, Amélie, Laurie-Rose et Floriane, qui ont su rendre les séances de rédactions agréables et motivantes et sans qui je n'aurais pas fini de rédiger. Merci aussi à Laurie-Anne, Corinne, Florence et Léa pour leur soutien et leur écoute tout au long de mon parcours.

J'aimerais finalement remercier ma famille, plus particulièrement ma mère, Samar, mon frère, Michel, mes cousins, Yann et Karl, et mon oncle, Hani, qui me motivent à dépasser mes limites et à sortir de ma zone de confort.

Merci de m'avoir épaulée dans les doutes et les nombreuses remises en question que cette aventure m'a apportés. C'est à travers ces questionnements et grâce à votre appui que j'ai pu m'épanouir dans ce grand projet de recherche, car, comme le dit France Dubé, « la recherche, c'est inconfortable ».

Enfin, merci à l'Association des étudiantes et étudiants de la Faculté des sciences de l'Éducation (ADEESE), à l'Association étudiante aux cycles supérieurs en éducation (AÉCSÉd) et au Département d'éducation et formation spécialisées (DÉFS) de l'UQÀM pour leurs bourses et leur contribution financière.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS.....	ii
TABLE DES MATIÈRES	iv
LISTE DES FIGURES.....	vi
LISTE DES TABLEAUX	vii
RÉSUMÉ.....	viii
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 PROBLÉMATIQUE.....	3
1.1 Contexte.....	3
1.1.1 Organisation du programme, curriculum ministériel : attentes ministérielles envers les élèves au premier cycle du secondaire en algèbre.....	3
1.1.1.1 Concepts et processus	4
1.1.1.2 Éléments de méthode	6
1.1.1.3 Attentes de fin de cycle	7
1.1.2 Spécificité des difficultés en algèbre	7
1.1.3 Spécificité de l'organisation en adaptation scolaire.....	11
1.1.3.1 Les difficultés d'apprentissage des élèves dans le contexte historique du système éducatif québécois 11	
1.1.3.2 Dispositifs d'enseignement spécialisés aux élèves en difficulté en mathématiques : La classe d'adaptation scolaire et l'intervention orthopédagogique.....	14
1.2 Problème.....	20
1.3 Objectif de recherche.....	21
CHAPITRE 2 CADRE THÉORIQUE	23
2.1 Hypothèses explicatives relatives à la notion de difficultés d'apprentissage	23
2.1.1 Approche neuropsychologique	23
2.1.2 Approche sociale.....	26
2.1.3 Approche didactique	27
2.2 Certains concepts de la théorie des situations didactiques	30
2.2.1 Construction du sens et situation didactique.....	31
2.2.1.1 Situation didactique.....	31
2.2.1.2 Situation adidactique.....	32
2.2.2 Variables didactiques	33
2.2.3 Dévolution	34
2.2.4 Institutionnalisation	36
2.2.5 Contrat didactique.....	37
2.2.5.1 Effet de contrats	39
2.3 Les difficultés d'apprentissage en mathématiques	43
2.3.1 Les difficultés d'apprentissage selon la TSD.....	44
2.3.2 Phénomènes d'enseignement spécifiques à l'adaptation scolaire.....	46
2.3.2.1 Temps didactique ralenti : centration sur le repérage et le traitement de l'erreur et surcharge de la mémoire didactique.....	47
2.3.2.2 Logique de l'adaptation scolaire : économie du savoir et algorithmisation des objets de savoirs	48
2.3.2.3 Morcellement des objets de savoir	49
2.3.2.4 Cécité didactique d'enseignants en adaptation scolaire	50
2.3.2.5 Effet pharmakéia	50
2.3.3 Spécificité du savoir algébrique.....	51

2.3.3.1	Ruptures arithmétique-algèbre	52
2.3.3.1.1	Nature des raisonnements (valeurs connues → relations)	53
2.3.3.1.2	Évolution du statut des objets et des symboles	54
2.3.3.1.3	Caractère procédural et structural	58
2.3.3.1.4	Statut accordé à l'écrit.....	59
2.3.3.2	Sens, dénotation et équivalence d'expressions algébriques	59
2.3.3.3	Activités de généralisation	62
2.3.3.4	Rapport sémantique-syntaxique	63
2.3.3.5	Les difficultés des élèves dans le domaine algébrique.....	64
2.4	Objectifs spécifiques.....	67
CHAPITRE 3 MÉTHODOLOGIE.....		68
3.1	Ingénierie didactique	68
3.2	Recherche collaborative	70
3.3	Échantillonnage	71
3.3.1	Sélection des participants.....	71
3.3.2	Description des participants.....	72
3.4	Collecte de données.....	72
3.4.1	Milieu et déroulement de la collecte.....	73
3.4.2	Outils de collecte : les situations d'enseignement-apprentissage	74
3.4.2.1	Les carreaux hachurés	74
3.4.2.1.1	Description de la situation : Parties et tâches.....	74
3.4.2.1.2	Analyse didactique de la situation	78
3.4.2.1.3	Travail avec l'orthopédagogue : conduites anticipées et relances	80
3.4.2.2	Les tuiles du plancher.....	84
3.4.2.2.1	Description de la situation : Parties et tâches.....	84
3.4.2.2.2	Analyse didactique de la situation	86
3.4.2.2.3	Travail avec l'orthopédagogue : conduites anticipées et relances	89
3.4.2.3	Paul et Lucie.....	90
3.4.2.3.1	Description de la situation : Parties et tâches.....	90
3.4.2.3.2	Analyse didactique de la situation	91
3.5	Interprétation des données.....	94
3.6	Considérations éthiques.....	95
CHAPITRE 4 ANALYSE DES RÉSULTATS		98
4.1	Les carreaux hachurés	100
4.1.1	Phase 1 : Le passage d'une stratégie de dénombrement à une stratégie de calcul.....	100
4.1.2	Phase 2 : Le passage à l'expression d'une méthode générale.....	111
4.1.3	Phase 3 : Le passage à l'écriture algébrique	117
4.1.4	La discussion de l'équivalence	125
4.2	Les tuiles du plancher.....	128
4.2.1	Phase 1 de la situation initiale : L'identification d'une méthode générale de calcul.....	129
4.2.2	Modifications apportées à la situation des tuiles du plancher.....	135
4.2.3	Version modifiée.....	138
4.3	Paul et Lucie.....	148
4.3.1	Essais et erreurs (à partir de valeurs fictives)	148
4.3.2	Production d'une écriture algébrique.....	150
4.3.3	Transformations algébriques.....	159
CONCLUSION.....		164
BIBLIOGRAPHIE.....		169

LISTE DES FIGURES

Figure 3.1 Document de l'élève - Les carreaux hachurés (page 1).....	76
Figure 3.2 Document de l'élève - Les carreaux hachurés (page 2).....	77
Figure 3.3 Document de l'élève - Les tuiles du plancher (page 1)	85
Figure 3.4 Document de l'élève - Les tuiles du plancher (page 2)	86
Figure 3.5 Première méthode	87
Figure 3.6 Deuxième méthode	87
Figure 3.7 Troisième méthode.....	88
Figure 3.8 Document de l'élève - Paul et Lucie.....	91
Figure 3.9 La démarche de recherche qualitative/interprétative	95
Figure 4.1 Stratégie proposée par l'élève A2.....	109
Figure 4.2 Démarche de l'élève A2	110
Figure 4.3 Production de l'élève B3 à la phase 2.....	114
Figure 4.4 Production de l'élève B4 à la phase 2.....	114
Figure 4.5 Production de l'élève A3 à la phase 2	114
Figure 4.6 Production de l'élève A4 à la phase 3	119
Figure 4.7 Production de l'élève A2 à la phase 3.....	124
Figure 4.8 Reproduction de ce que l'élève B3 a fait au tableau.....	131
Figure 4.9 Reproduction de ce que l'élève B3 a fait au tableau.....	132
Figure 4.10 Document de l'élève – Les tuiles du plancher (version modifiée).....	137
Figure 4.11 Production de l'élève B3 sur son document.....	139
Figure 4.12 Production de l'élève B3 au tableau	140
Figure 4.13 Production de l'élève B1	141
Figure 4.14 Production de l'élève A1 à la suite de l'intervention de la chercheuse.....	145
Figure 4.15 Production de l'élève A2 au tableau	145
Figure 4.16 Production de l'élève A4.....	146
Figure 4.17 Production de l'élève A3.....	149
Figure 4.18 Production de l'élève B4.....	149
Figure 4.19 Production de l'élève B2.....	151
Figure 4.20 Production de l'élève A1.....	155
Figure 4.21 Production de l'élève B2 au tableau	156
Figure 4.22 Production de l'élève A2.....	158
Figure 4.23 Production de l'élève A4.....	159
Figure 4.24 Démarche des élèves du groupe A au tableau.....	161

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1 Les quatre stratégies anticipées	79
Tableau 3.2 Schéma d'enseignement pour la phase 1b.....	81
Tableau 4.1 Organisation des trois situations sélectionnées.....	98
Tableau 4.2 Évolution de l'écriture algébrique de l'élève A1	121

RÉSUMÉ

Au Québec, la transition du primaire au secondaire est notamment marquée par le passage de la pensée arithmétique à la pensée algébrique. Comme le ministère de l'Éducation du Québec le prescrit au programme de formation, les élèves du premier cycle du secondaire doivent développer leur compréhension de la notion d'équivalence d'expressions algébriques en articulant les dimensions sémantique et syntaxique. De nombreuses ruptures et fausses continuités conceptuelles caractérisent ce passage de la pensée arithmétique à la pensée algébrique. On y compte entre autres la nature du raisonnement mathématique, le statut des symboles et le traitement des expressions mathématiques. Ces ruptures peuvent représenter des obstacles à l'apprentissage, et plus particulièrement pour les élèves en difficulté. Cette recherche a donc pour but d'explorer le rôle des dimensions sémantique et syntaxique dans l'apprentissage de la notion d'équivalence d'expressions algébriques des élèves en difficulté d'apprentissage de deuxième secondaire, plus spécifiquement en contexte d'intervention orthopédagogique. Pour ce faire, nous avons choisi d'aborder les difficultés d'apprentissage selon l'approche didactique, qui s'intéresse à la relation élève-enseignant-savoir dans le contexte d'enseignement-apprentissage des mathématiques, mais aussi et surtout à la spécificité du savoir. L'étude de la spécificité du savoir nous a permis de mieux comprendre ce qui caractérise la pensée algébrique, de faire une analyse *a priori* des obstacles que les élèves peuvent rencontrer dans l'apprentissage de la notion d'équivalence et de choisir des situations didactiques pertinentes à la construction du sens de ladite notion. La planification et la mise en place des situations didactiques ont été inspirées de la théorie didactique de Guy Brousseau, reconnue pour l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, et réalisées en collaboration avec l'orthopédagogue des participants. C'est donc en tenant compte des concepts fondamentaux de sa théorie, comme la dévolution, le contrat didactique, l'adidacticité et les effets de contrat, que nous avons animé les séances d'orthopédagogie auprès de deux groupes de quatre élèves en difficulté. L'analyse des interactions didactiques lors des situations « Les carreaux hachurés », « Les tuiles du plancher » et « Paul et Lucie » nous a permis de relever certaines difficultés des élèves concernant le processus de généralisation, le passage à une écriture algébrique et la transformation des expressions en conservant leur dénotation.

Mots clés : équivalence d'expressions algébriques, élèves en difficulté, théorie des situations didactiques, orthopédagogie

INTRODUCTION

Le passage au secondaire est un moment marquant dans le parcours scolaire des élèves au Québec et est synonyme de nombreux changements, notamment le passage de l'arithmétique à l'algèbre en mathématique. À partir du moment où les élèves y sont officiellement introduits, l'algèbre prend une place prégnante dans l'apprentissage des mathématiques au secondaire, et ce dans la plupart des pays (Squalli, Larguier, *et al.*, 2020). Nombreux sont les auteurs qui se sont intéressés à ce passage de l'arithmétique à l'algèbre en analysant les difficultés des élèves (Arzarello *et al.*, 2000; Bednarz *et al.*, 1996; Demonty, 2013; Kieran, 1992; Kieran *et al.*, 2016; Lins, 2000; Marchand & Bednarz, 1999; Mary, Squalli, Theis, *et al.*, 2014; Oliveira *et al.*, 2017; Radford, 2014; Squalli, Oliveira, *et al.*, 2020). Les difficultés relèvent généralement de l'identification de relations entre des données pour construire des expressions algébriques, de la transformation des expressions et de l'utilisation des signes et de symboles mathématiques. Nous verrons, dans la présente recherche, que ces difficultés d'ordre sémantique et syntaxique apparaissent lors des apprentissages visés par le programme de formation de deuxième secondaire et sont très présentes dans l'apprentissage de la notion d'équivalence d'expressions algébriques.

Ces difficultés sont encore plus importantes pour les élèves en difficulté d'apprentissage. C'est dans une visée de réussite éducative pour tous les élèves que le ministère de l'Éducation du Québec propose différents dispositifs à mettre en place au personnel scolaire, dont l'intervention orthopédagogique pour surmonter les obstacles rencontrés et favoriser leurs apprentissages. Nous étudierons donc de quelle façon les élèves en difficulté d'apprentissage construisent leur compréhension de la notion d'équivalence d'expressions algébrique à travers la mise en place d'interventions orthopédagogiques proposant des situations qui impliquent un travail sur le sens des expressions, sur les opérations et les symboles. C'est principalement l'étude des interactions didactiques et de la spécificité du savoir algébrique qui nous permettront d'explorer le processus d'apprentissage des élèves et de mieux comprendre les choix didactiques qui favorisent l'apprentissage. Notre recherche s'inscrira d'ailleurs dans la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau (1998b) et tiendra compte des concepts fondamentaux de la théorie, plus particulièrement du contrat didactique.

Inspirés par certains éléments de la recherche collaborative, nous avons travaillé avec l'orthopédagogue des élèves participants pour préparer les séances d'intervention. Trois situations d'enseignement-apprentissage ont été réalisées auprès de deux groupes de quatre élèves en difficulté d'apprentissage suivant le programme de la deuxième année du secondaire.

Le présent mémoire sera divisé en quatre chapitres. Le premier chapitre mettra en contexte la problématique identifiée à partir des contenus d'apprentissage au programme ministériel, des difficultés globales des élèves en algèbre et de l'organisation des services offerts aux élèves en difficulté et annoncera notre objectif. Le deuxième chapitre établira les éléments théoriques nécessaires à la compréhension de notre analyse en présentant la conception didactique des difficultés d'apprentissage des élèves, les éléments les plus importants de la théorie des situations didactiques de Brousseau et l'étude plus approfondie des difficultés relatives à l'apprentissage de la notion d'équivalence d'expressions algébriques dans le domaine de la didactique de l'algèbre. Le troisième chapitre présentera notre méthodologie de recherche et une analyse *a priori* de nos situations didactiques. C'est dans le quatrième chapitre que nos résultats seront analysés. Nous concluons en discutant les trois thèmes importants qui auront été mis en évidence lors de nos analyses.

CHAPITRE 1

PROBLÉMATIQUE

1.1 Contexte

Au Québec, la transition de l'école primaire à l'école secondaire est marquée, entre autres, par le passage, en mathématique, de la pensée arithmétique à la pensée algébrique. Ce passage a maintenant été étudié par plusieurs, et est caractérisé par de fausses continuités (comme l'utilisation de mêmes symboles mathématiques, mais interprétés différemment) et de discontinuités (Kieran, 1992). Ces ruptures conceptuelles peuvent représenter des obstacles à l'apprentissage des élèves. Dans le cadre de notre recherche, nous nous intéresserons à l'apprentissage de l'algèbre au premier cycle du secondaire, plus particulièrement auprès des élèves en difficulté.

Nous caractériserons, dans ce premier chapitre, ce passage de la pensée arithmétique à la pensée algébrique à travers le cheminement attendu du ministère de l'Éducation du Québec quant aux apprentissages à réaliser au premier cycle du secondaire et certains obstacles généralement rencontrés par les élèves. Comme les élèves en difficulté d'apprentissage sont reconnus pour vivre des difficultés encore plus importantes dans ce domaine, nous présenterons, par la suite, le contexte particulier dans lequel ces élèves évoluent au Québec et l'organisation des services qui leur sont offerts dans le champ de l'adaptation scolaire.

1.1.1 Organisation du programme, curriculum ministériel : attentes ministérielles envers les élèves au premier cycle du secondaire en algèbre

Le *Programme de formation de l'école québécoise (PFEQ)* vise le développement de trois compétences en mathématique : « résoudre une situation-problème », « déployer un raisonnement mathématique » et « communiquer à l'aide du langage mathématique » (Ministère de l'Éducation, 2006, p. 231). Ces compétences sont développées dans cinq champs de la mathématique au secondaire, soient l'arithmétique, l'algèbre, la probabilité, la statistique et la géométrie, champs qui contribuent à leur tour au développement des compétences.

Le ministère de l'Éducation décrit, dans le *PFEQ* du secondaire, les champs de l'arithmétique et de l'algèbre comme les champs qui permettent « d'interpréter les quantités » (2006, p. 231). Même

si l'algèbre n'apparaît formellement au programme qu'à partir de la deuxième année du secondaire, les élèves peuvent être initiés à leur insu à des préalables à l'algèbre dès le primaire (Ministère de l'Éducation, 2006).

Mentionnons notamment la recherche de termes manquants par l'utilisation des propriétés des opérations et des relations entre elles, l'appropriation du sens des relations d'égalité et d'équivalence, l'utilisation des priorités des opérations et la recherche de régularités dans différents contextes. (Ministère de l'Éducation, 2006, p. 253)

Dans le programme de formation actuel, l'enseignement des mathématiques au premier cycle du secondaire est organisé de sorte que l'élève développe ces compétences dans diverses situations qui impliquent une variété de concepts et de processus mathématiques. Pour mieux comprendre les contenus d'enseignement en algèbre, nous nous intéresserons, dans la section qui suit, aux concepts et aux processus impliqués dans les champs de l'arithmétique et de l'algèbre. Nous nous pencherons ensuite sur les éléments de méthode proposés aux enseignants et sur les attentes du ministère envers les élèves du premier cycle du secondaire.

1.1.1.1 Concepts et processus

D'abord, il importe de constater la présence irrévocable de la notion d'équivalence d'expressions parmi les concepts et les processus abordés au premier cycle du secondaire en mathématique dans les champs de l'arithmétique et de l'algèbre.

En arithmétique, les élèves se familiarisent avec des concepts liés au **sens du nombre et des opérations** de différentes façons. La relation d'égalité fait partie des concepts à aborder en arithmétique ; selon le PFEQ, le sens de l'égalité ainsi que ses propriétés et les règles de transformation des expressions sont travaillés au premier cycle du secondaire, notamment avec le principe de la balance. C'est aussi au premier cycle que les élèves se familiarisent avec les propriétés des opérations, soit la commutativité, l'associativité, la distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction et la mise en évidence simple (Ministère de l'Éducation, 2006).

Ces concepts requièrent la mise en place de différents processus qui sollicitent les **différentes formes d'écriture et de représentation**, mais aussi les **opérations sur des nombres**. Ils doivent

utiliser des représentations variées et reconnaître et produire des écritures équivalentes (Ministère de l'Éducation, 2006). Pour ce faire, ils font appel à la décomposition additive et multiplicative, aux fractions équivalentes et à la simplification et la réduction d'expressions. Ils apprennent donc à passer d'une écriture à une autre, ou encore d'une représentation à une autre. Ils transforment des égalités arithmétiques et recherchent des expressions arithmétiques équivalentes.

Dans le domaine algébrique, les élèves découvrent le **sens des expressions algébriques**. Ils traitent des expressions algébriques (en abordant la variable, le coefficient, les degrés, le terme et les termes semblables des expressions algébriques). Les concepts d'égalité, d'équation et d'inconnue sont au programme, ainsi que l'équation du premier degré à une inconnue de la forme $ax + b = cx + d$. Ils apprennent à mettre en place des processus comme la construction d'une expression algébrique, la reconnaissance et la recherche d'expressions algébriques équivalentes, l'évaluation numérique d'une expression algébrique, la manipulation d'expressions algébriques (par l'addition et la soustraction, la multiplication et la division par une constante et la multiplication de monômes de degré 1) (Ministère de l'Éducation, 2006). Les élèves résolvent aussi des équations du premier degré à une inconnue et valident leur solution par substitution.

À partir des concepts et des processus au programme du secondaire, Jeannotte et Corriveau relèvent des activités mathématiques opportunes pour le développement de la pensée algébrique dès le primaire :

Une analyse sommaire des concepts et processus permet de dégager des opportunités pour le développement [de] la pensée algébrique : l'étude des suites et régularités (repérer et décrire) débutée dès le premier cycle tout comme l'étude de différents types de nombres et de leurs propriétés, pair/impair, premier, composé, multiples, l'étude de structures additive et multiplicative, les critères de divisibilité, l'égalité et les équations, les expressions équivalentes, la comparaison, les relations d'ordre. (Jeannotte & Corriveau, 2020, p. 115)

Pour résumer, les élèves doivent développer des concepts en lien avec le sens du nombre et des opérations en arithmétique et avec le sens des expressions algébriques en algèbre (concepts qui se rapportent à la dimension sémantique de l'apprentissage puisqu'ils traitent du sens). Pour ce qui est des processus, les élèves doivent opérer sur les nombres en arithmétique et manipuler des expressions algébriques en algèbre (ce qui renvoie à la dimension syntaxique) en utilisant

différentes formes d'écriture et de représentation. Nous traiterons donc l'articulation de ces deux dimensions (sémantique et syntaxique) dans l'apprentissage de la notion d'équivalence d'expressions algébriques à travers diverses situations mathématiques.

Le ministère de l'Éducation présente aussi, dans le PFEQ, des éléments de méthodes et ses attentes pour chaque fin de cycle. Comme nous étudierons l'apprentissage de l'équivalence d'expressions algébriques, nous présenterons les éléments de méthodes d'enseignement spécifiques au domaine algébrique.

1.1.1.2 Éléments de méthode

Pour construire la pensée algébrique des élèves, le ministère suggère aux enseignants que « l'élève observe des régularités issues de situations diverses et représentées de différentes façons » (Ministère de l'Éducation, 2006, p. 254) pour l'amener à généraliser par des règles équivalentes. Les situations de généralisation permettraient aux élèves de développer leur pensée algébrique en construisant des formules à partir de registres de représentations variées. En résolution de problème, c'est la traduction d'un énoncé par une ou des expressions algébriques ou la traduction d'un problème en équations qui est travaillée. On propose alors à l'enseignant de faire produire à l'élève un énoncé à partir d'une expression, ou un problème à partir d'une équation. Pour ce qui est des manipulations algébriques lors de la substitution de valeurs numériques et de résolutions d'équations (pour résoudre une proportion, calculer un périmètre ou une aire ou utiliser une formule dans un tableur), le ministère propose que l'élève utilise des dessins ou des arrangements rectangulaires. De plus, les propriétés des opérations sont réinvesties pour trouver la valeur d'une expression ou pour valider la solution d'une équation. Plusieurs méthodes sont proposées pour la résolution d'équations : « essais et erreurs, dessins, méthodes arithmétiques (opérations inverses ou équivalentes), méthodes algébriques (principe de la balance, méthode du terme caché) » (Ministère de l'Éducation, 2006, p. 254). Ces éléments de méthode sont proposés aux enseignants pour favoriser le développement de la pensée algébrique des élèves afin que ces derniers répondent aux attentes ministérielles.

1.1.1.3 Attentes de fin de cycle

Les attentes du ministère de l'Éducation sont présentées en fonction des trois compétences à développer en mathématiques en précisant les attentes pour chaque champ. Nous retenons qu'à la fin du premier cycle du secondaire, en arithmétique, il est attendu que les élèves soient en mesure de choisir les opérations pertinentes pour résoudre un problème en utilisant les processus nécessaires et en tenant compte des propriétés et des priorités des opérations. Ils doivent aussi être en mesure d'interpréter les types de nombres. « En arithmétique, l'élève sollicite son sens du nombre et des opérations et utilise l'équivalence de nombres ou d'expressions numériques. » (Ministère de l'Éducation, 2006, p. 245) Les élèves doivent convertir les écritures décimale et fractionnaire et déployer un raisonnement proportionnel. Ils doivent aussi faire appel à des expressions symboliques pour effectuer un travail mettant en évidence des relations numériques.

Au même moment, dans le champ algébrique, il est attendu que les élèves généralisent une situation à l'aide d'une expression algébrique, qu'ils interprètent, construisent et manipulent ces expressions, qu'ils déterminent et interprètent l'inconnue d'une situation et qu'ils modélisent et généralisent des relations entre les nombres par des expressions symboliques (Ministère de l'Éducation, 2006).

Il apparaît évident, à travers les contenus d'apprentissage, les éléments de méthodes d'enseignement proposés et les attentes ministérielles relatives aux compétences à développer, que l'algèbre, et plus particulièrement l'équivalence d'expressions algébriques, est un apprentissage central pour les élèves de deuxième année du secondaire. Ces prescriptions ministérielles évoquent à plusieurs reprises l'articulation des dimensions sémantique et syntaxique dans le domaine algébrique. Puisque le passage de la pensée arithmétique à la pensée algébrique est caractérisé par de nombreux obstacles épistémologiques qui peuvent nuire à la transmission du savoir algébrique, il importe de s'intéresser à la spécificité de ce savoir pour mieux comprendre les ruptures, et par le fait même les difficultés, qui marquent ce passage.

1.1.2 Spécificité des difficultés en algèbre

Le passage de l'arithmétique à l'algèbre est une des problématiques fondamentales caractérisant la transition du primaire au secondaire. C'est le cas dans de nombreux pays (Blanton *et al.*, 2015; Davydov, 2008), les apprentissages sont organisés de sorte que les élèves développent leur pensée

dans le domaine arithmétique au primaire et doivent passer à une pensée s'inscrivant dans le domaine algébrique au secondaire.

Les élèves qui entrent au premier degré du secondaire abordent l'enseignement de l'algèbre avec leurs représentations arithmétiques issues de l'école primaire. Un profond fossé conceptuel sépare les modes de raisonnement arithmétique et algébrique. Trop souvent, l'ampleur de cette rupture est sous-estimée, ce qui conduit de nombreux élèves à travailler en algèbre tout en conservant un mode de pensée arithmétique. Des difficultés apparaissent et de nombreuses erreurs sont commises : elles ont essentiellement pour origine un manque de transition entre l'arithmétique et l'algèbre. (Vlassis & Demonty, 2002, p. 16)

Si la notion de « pensée algébrique » n'apparaît pas telle quelle dans le programme, elle reste sous-entendue dans le champ de développement de la compétence mathématique « algèbre ». Squalli, Oliveira *et al.* (2020) décrivent la pensée algébrique comme une manière mathématique de penser des activités du domaine algébrique. Ils ajoutent qu'elle peut être caractérisée par les significations des concepts et par la nature des raisonnements. C'est donc à travers les ruptures entre la pensée arithmétique et la pensée algébrique que nous définirons la pensée algébrique.

L'algèbre représente une double rupture épistémologique : d'une part, l'introduction d'un détour formel dans le traitement de problèmes habituellement traités intuitivement, d'autre part, l'introduction d'objets mathématiques nouveaux comme ceux d'équation et d'inconnue, de fonction et de variable, de monôme et de polynôme. (Vergnaud, 1988, p. 189)

Ces éléments de rupture épistémologique peuvent représenter des obstacles à l'apprentissage des élèves et ainsi constituer des sources de difficultés en algèbre. Plusieurs auteurs ont établi la difficulté à passer d'un mode de pensée à l'autre et ont exposé les difficultés importantes que posait ce passage (Kieran, 1992; Rojano, 1996; Vergnaud, 1988).

Par exemple, en arithmétique, chaque donnée intermédiaire a du sens. La solution peut donc être qualifiée de « pas à pas » puisqu'il faut d'abord sélectionner les données et les opérations à réaliser pour trouver, dans la majorité des cas, une inconnue intermédiaire et finalement obtenir l'inconnue recherchée. Vergnaud (1988) explique que le choix des données intermédiaires et des données et opérations à utiliser pour les obtenir se fait assez intuitivement en arithmétique. En algèbre, il faut plutôt renoncer au sens contextuel pour accéder aux avantages du traitement algébrique basé sur

les propriétés des opérations (Barallobres, 2020). Les pas intermédiaires n'ont pas nécessairement de sens en algèbre. La démarche est différente : il faut plutôt expliciter les relations qui existent entre les inconnues et les données pour les traiter indépendamment du contexte particulier, en faisant appel aux propriétés des opérations. Il est alors contre-intuitif pour les élèves de travailler à partir de nombres inconnus ou quelconques (Vergnaud, 1988).

De plus, certains signes changent de signification, malgré qu'ils soient représentés de manière identique. Un exemple classique est l'interprétation du signe égal : en arithmétique, il annonce un résultat, il signifie « le résultat de », tandis qu'en algèbre, ce signe représente une équivalence entre deux expressions (Barallobres, 2020; Booth, 1984; Kieran *et al.*, 2016; Vergnaud, 1988).

Un autre élément de rupture important concerne le statut que porte la lettre. Les lettres sont utilisées différemment selon les contextes mathématiques. En arithmétique, elles sont employées pour désigner une dimension, comme une longueur, une largeur, une hauteur, etc., ou des objets géométriques simples, comme un point, une droite, un cercle, un angle (Barallobres, 2020). Lorsqu'on travaille en algèbre, la lettre représente plutôt un nombre inconnu ou un ensemble de nombres : elle devient un nombre indéterminé dans le contexte d'expressions algébriques, et une variable dans celui de fonctions. Ces ruptures peuvent engendrer des difficultés majeures chez les élèves qui ne savent pas utiliser les lettres comme des nombres généralisés ou des variables (Booth, 1984). Tremblay, Polotskaia et Passaro (2021) relèvent entre autres que le matériel didactique utilisé au primaire suggère habituellement une interprétation de la lettre en tant que mot étiquette plutôt que comme symbole représentant une quantité et que le développement de la pensée algébrique passe notamment par le développement de la flexibilité à interpréter la lettre selon son contexte d'utilisation. Par exemple, en algèbre, une lettre utilisée comme une variable dans une fonction ne sera pas traitée comme une lettre représentant une inconnue dans une équation. Le sens accordé à la lettre aura donc un impact sur son utilisation.

Ces ruptures entre l'arithmétique et l'algèbre témoignent des différences en ce qui a trait au rôle du sens et du traitement mathématique des expressions. Par exemple, bien que le développement de la pensée algébrique exige parfois de renoncer au sens contextuel pour effectuer un travail algébrique axé sur les propriétés des opérations, ce travail algébrique doit être réalisé selon le

contexte mathématique de la situation pour qu'elle ait du sens. Ainsi, le travail syntaxique est réalisé selon le sens contextuel de la situation. L'articulation des dimensions sémantique et syntaxique est donc au cœur du développement de la pensée algébrique.

Kouki (2017) a étudié cette articulation auprès d'élèves du secondaire en Tunisie et a noté leur préférence à appliquer de façon automatique des techniques algébriques. Il montre cependant

qu'en l'absence de mobilisation de techniques sémantiques articulant différents modes d'interprétations inter-registre et intra-registre, les techniques syntaxiques de résolution peuvent s'avérer inopérantes et peuvent mettre les apprenants en échec (Kouki, 2017, p. 9).

Selon Kouki, le langage logique est caractérisé par une syntaxe et une sémantique. La syntaxe est le « système géré par des symboles et des règles combinées sous forme de formules » (Kouki, 2017, p. 9). Elle concerne l'utilisation de règles algébriques ; ce sont notamment celles qui permettent de conserver l'équivalence entre deux expressions. Les manipulations syntaxiques permettent de transformer une expression, d'opérer sur une situation en utilisant des techniques algébriques. La dimension sémantique, quant à elle, est celle qui renvoie au sens attribué à un objet par le contexte. Elle permet d'attacher une interprétation à l'utilisation de différents registres sémiotiques (gestes, écritures, dessins, etc.), aux symboles et aux formules.

Kouki (2017, p. 38) établit un lien entre ces dimensions et les difficultés vécues par les élèves :

La noosphère constate que les difficultés des élèves en algèbre élémentaire sont dues essentiellement :

- sur le plan sémiotique et syntaxique, à l'incompréhension de la signification des lettres et de leurs assemblages dans les expressions littérales.
- sur le plan conceptuel et sémantique, à l'influence de la pensée arithmétique acquise aux deux cycles de l'enseignement de base.

Pour que les élèves puissent effectuer un travail sur des expressions algébriques en conservant leur équivalence comme établi au programme ministériel du premier cycle du secondaire, une attention particulière doit être portée à la fois sur les significations, les techniques algébriques et les représentations impliquées dans le processus. Il est à noter que les obstacles concernant le passage de l'arithmétique à l'algèbre semblent être plus persistants chez les élèves en difficulté

d'apprentissage. Ces élèves sont reconnus pour vivre des difficultés encore plus importantes dans le domaine algébrique. Nous nous intéresserons donc à l'apprentissage de l'équivalence d'expressions algébriques de ces élèves, qui apprennent dans le contexte particulier de l'adaptation scolaire.

1.1.3 Spécificité de l'organisation en adaptation scolaire

Les conditions d'apprentissage des élèves en difficulté ont beaucoup évolué à travers le temps et il est essentiel de comprendre le contexte scolaire québécois dans lequel ils se situent pour analyser leur processus d'apprentissage.

1.1.3.1 Les difficultés d'apprentissage des élèves dans le contexte historique du système éducatif québécois

Au cours du siècle dernier, la dénomination des élèves qui ne réussissent pas a changé selon les périodes. On a parlé d'élèves « en retard », d'enfants « arriérés » ou de « débilés mentaux » (de 1900 aux environs de 1960), puis d'élèves « en échec » ou « inadaptés ». A partir de 1990, une nouvelle dénomination a vu le jour, celle « d'élèves en difficulté ». Pourtant, si les dénominations changent, les faits demeurent, ou, pour reprendre l'expression de Watzlawick (1975, p. 49) « plus ça change, plus c'est la même chose ». (Roiné, 2015, p. 3)

Ces changements d'appellations ont été accompagnés de nouvelles interprétations de leurs difficultés. Pour mieux comprendre les interprétations qui sont faites des difficultés d'apprentissage des élèves, il importe de comprendre le contexte historique du système éducatif québécois, ainsi que les réformes scolaires qui ont eu lieu. Les premiers changements majeurs ont commencé dans les années 1960, lorsque la Commission royale d'enquête sur l'éducation a été créée par le gouvernement Lesage en 1961.

Trois ans plus tard, la Commission présente le rapport Parent, qui est composé de plus de 500 recommandations sur les changements à apporter au système éducatif, dont la création du ministère de l'Éducation du Québec (Dupuis, 2020; Tardif & Lessard, 1992). Ce rapport vise l'égalité des chances et démocratise l'accès à l'éducation.

À partir de 1967, les premières formations universitaires en orthopédagogie sont mises en place et proposent de joindre les exigences pédagogiques de la classe aux approches cliniques que relèvent

les difficultés d'élèves. Le ministère de l'Éducation n'officialise pas la profession, ce qui laisse un grand flou quant au rôle de l'orthopédagogue dans les écoles québécoises ; soutien pédagogique, spécialiste du diagnostic, titulaire de classe spéciale, le rôle de ces professionnels varie d'une école à l'autre (L'Association des Orthopédagogues du Québec (L'ADOQ), 2018). S'en suit alors le rapport COPEX qui emboîte le pas en 1976 dans le but d'« offrir aux élèves de l'adaptation scolaire le cadre scolaire le plus normal possible » (Giroux, 2014, p. 30). Sa formule normalisante vise le maintien de l'élève en difficulté dans la classe régulière ou son retour dès que possible (Bergeron, 2017).

C'est depuis la fin des années 70 que l'expression « difficultés d'apprentissage en mathématiques » est utilisée pour faire référence à « un écart de performance par rapport à une norme selon l'âge et le niveau scolaire de l'élève et sert essentiellement à justifier la mise en place de dispositifs d'aide à l'élève » (Giroux, 2013, p. 61). C'est à partir de l'hypothèse déficitaire sous-entendue que le ministère justifie des dispositifs d'enseignement spécifiques à ces élèves. Le diagnostic et l'intervention portent alors sur le développement des compétences prescrites par le ministère et lesdits déficits des élèves. Le courant instrumental de la psychologie et l'épistémologie développementale de Piaget n'offrent cependant que très peu d'outils aux orthopédagogues pour évaluer si les élèves vivent des difficultés et pour intervenir sur les contenus à enseigner et à apprendre (Giroux, 2014).

Vers le début des années 2000, le ministère se donne pour objectif la réussite et l'intégration sociale des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (HDAA) (Ministère de l'Éducation, 2000).

L'élaboration, en janvier 2000, de la Politique de l'adaptation scolaire, a mis l'accent sur la réussite de tous les élèves, mais, avec comme principale orientation, d'aider l'élève HDAA à réussir sur les plans de l'instruction, de la socialisation et de la qualification. Elle introduit la notion d'élèves à risque, abolit l'obligation pour les commissions scolaires de déclarer les élèves en difficulté d'apprentissage, préconise l'organisation des services éducatifs basée sur une approche individualisée et cible les services à l'élève handicapé ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage. [...] Ainsi, la commission scolaire a l'obligation d'adapter les services éducatifs à l'élève handicapé ou en difficulté selon ses besoins, d'après l'évaluation qu'elle doit faire de ses capacités (art. 234). La commission scolaire doit aussi adopter (art. 235) une politique relative à l'organisation des services éducatifs offerts à ces élèves qui assure

l'intégration harmonieuse dans une classe ou un groupe ordinaire et aux autres activités de l'école de chacun de ces élèves lorsque l'évaluation de ses capacités et de ses besoins démontre que cette intégration est de nature à faciliter ses apprentissages et son insertion sociale. Cette politique de la commission scolaire doit notamment prévoir les modalités d'évaluation des élèves, lesquelles doivent prévoir la participation des parents et de l'élève. (Office des professions du Québec, 2014, p. 28-29)

Par le biais d'ententes de scolarisation ou d'ententes de services, il est possible, selon la *Loi sur l'instruction publique*, qu'un centre de service scolaire (CSS), antérieurement appelé « commission scolaire », réfère un élève à un autre CSS ou à un établissement d'enseignement privé spécialisé si le CSS prouve qu'il n'est pas en mesure de répondre aux besoins dudit élève (Ministère de l'Éducation, 1999). Ces ententes ont pour but d'offrir les ressources nécessaires à l'élève après consultation de divers acteurs (parents ou élève, et comité consultatif des services aux élèves HDAA).

Selon les documents ministériels actuels, dont plusieurs articles de la *Loi sur l'instruction publique* (LIP), *L'organisation des services éducatifs aux élèves à risque et aux élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA)*¹, la *Politique de l'adaptation scolaire*, les programmes des services éducatifs complémentaires et le *Programme de formation de l'école québécoise* (PFEQ), le ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport favorise une approche individualisée des services dans le milieu scolaire (2006).

Il revient alors à l'équipe-école d'identifier [les besoins éducatifs de chaque élève qui lui est confié] et de prévoir les mesures nécessaires pour y répondre, puisque c'est elle qui connaît le mieux ces élèves ainsi que les forces du milieu dans lequel ils évoluent. (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2006, p. 3)

¹ Mise à jour de *Élèves handicapés ou élèves en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA) : définitions* (2000)

Le ministère de l'Éducation, du Loisir et de Sport définit l'élève en difficulté d'apprentissage dans *L'organisation des services éducatifs aux élèves à risque et aux élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA)* :

L'élève en difficulté d'apprentissage est [...] au secondaire celui : dont l'analyse de sa situation démontre que les mesures de remédiation mises en place, par l'enseignante ou l'enseignant ou par les autres intervenantes ou intervenants durant une période significative, n'ont pas permis à l'élève de progresser suffisamment dans ses apprentissages pour lui permettre d'atteindre les exigences minimales de réussite du cycle en langue d'enseignement et en mathématique conformément au Programme de formation de l'école québécoise. (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2006, p. 24)

En 2009, Roiné montre la pression mise sur les chercheurs et les enseignants quant au développement et à la mise en œuvre de dispositifs adaptés aux caractéristiques des élèves en France. Giroux fait le même constat au Québec : « L'institution scolaire pose l'exigence aux enseignants d'adapter leur enseignement aux caractéristiques et besoins particuliers des élèves. » (2013, p. 64-65) C'est dans ce contexte que les élèves considérés en difficulté rencontrent différents dispositifs d'enseignement et d'apprentissage. On y compte entre autres les écoles spécialisées, les classes d'adaptation scolaire et les services particuliers, comme les interventions orthopédagogiques.

1.1.3.2 Dispositifs d'enseignement spécialisés aux élèves en difficulté en mathématiques : La classe d'adaptation scolaire et l'intervention orthopédagogique

Les dispositifs particuliers proposés par le ministère ont été créés pour les élèves HDAA et s'insèrent dans le domaine de l'adaptation scolaire.

Depuis plusieurs années, le terme adaptation scolaire est utilisé pour désigner les services éducatifs mis en œuvre pour répondre aux besoins des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation et d'apprentissage (EHDAA), peu importe que ces élèves soient rattachés à l'enseignement préscolaire, primaire ou secondaire. De son côté, Legendre (2005) définit l'adaptation scolaire comme étant un « ensemble de mesures et d'activités dont l'objet est de venir en aide aux élèves qui éprouvent des difficultés d'harmonisation dans leur fonctionnement scolaire [...] ». Les classes spéciales, dont l'enseignement est généralement donné par des enseignants en adaptation scolaire, font partie des services éducatifs de l'adaptation scolaire dont le but est de répondre aux besoins des EHDAA. (Boudreau, 2012, p. 15)

Nous verrons d'abord de quelle façon est organisée la classe d'adaptation scolaire avant de nous intéresser plus particulièrement aux interventions orthopédagogiques pour mieux comprendre en quoi les modalités de l'enseignement offert aux élèves en difficulté diffèrent de l'enseignement régulier.

Bien que la *Loi sur l'instruction publique* privilégie l'intégration de l'élève en difficulté dans une classe ordinaire, elle permet l'intégration de l'élève dans une classe ou une école spécialisée dans la mesure où il est démontré que la classe ordinaire ne favorise pas ses apprentissages ou son intégration sociale, ou encore qu'elle porte atteinte de manière excessive aux droits des autres élèves (Ministère de l'Éducation, 2003). Cette modalité d'enseignement est choisie pour un élève lorsque les services éducatifs adaptés ne répondent plus aux besoins de celui-ci et qu'il est jugé, par les intervenants de l'école, que des services plus spécialisés sont nécessaires (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2006).

La classe d'adaptation scolaire, aussi appelée classe adaptée, classe spéciale ou classe d'enseignement spécialisé, regroupe un certain nombre d'élèves HDAA, en fonction (dans la mesure du possible) de leurs caractéristiques particulières. Elle est généralement « constituée de petits groupes d'élèves en difficulté, dont le rythme d'apprentissage requiert un enseignement particulier qui se révèle difficile, voire impossible, à donner en classe ordinaire » (Boudreau, 2012, p. 15). Le centre de service scolaire de la Seigneurie-des-Mille-Îles (2018) propose des groupes de 5 à 16 élèves au primaire et de 6 à 20 au secondaire, selon le type de regroupement et le centre de service scolaire Marguerite-Bourgeoys (2010) spécifie que ces classes sont aménagées et équipées pour l'enseignement adapté auprès d'élèves ayant des caractéristiques ou besoins particuliers. On y trouve des classes pour les élèves présentant des difficultés d'adaptation, des retards d'apprentissage, un retard mental léger, des troubles spécifiques du langage, une déficience intellectuelle moyenne à sévère, une déficience langagière, un trouble envahissant du développement et un trouble spécifique d'apprentissage de la lecture et de l'écriture, les cinq derniers types de classes adaptées étant disponibles pour l'ordre d'enseignement secondaire. La constitution de ces classes peut varier selon les besoins des CSS.

Un autre dispositif d'enseignement peut être offert aux élèves en difficulté d'apprentissage. Pour favoriser la progression des élèves dans leurs apprentissages, le *Régime pédagogique de l'éducation préscolaire, de l'enseignement primaire et de l'enseignement secondaire* prescrit aux commissions scolaires quatre programmes de services complémentaires : services de soutien, de vie scolaire, d'aide à l'élève et de promotion et de prévention (RLRQ, c. I-13.3, r. 8, art. 5). Différents services font partie des services complémentaires à mettre en place pour soutenir ces programmes, dont le service d'orthopédagogie, un moyen privilégié pour atteindre les objectifs des programmes de services complémentaires (Direction de l'adaptation scolaire et des services complémentaires, 2002).

Selon Laplante (1998, p. 13), l'intervention orthopédagogique est « une intervention spécialisée centrée sur les processus cognitifs et métacognitifs qui compromettent le développement des compétences ». Toute définition présuppose un cadre théorique de référence qui n'est pas nécessairement explicité. La définition donnée par Laplante (1998) attribue une place prépondérante à la psychologie cognitive au détriment d'autres disciplines, en particulier les didactiques disciplinaires. Elle nous permet tout de même de contextualiser les pratiques actuelles qui s'inscrivent souvent dans cette perspective psychologisante de l'apprentissage des élèves, comme l'a soulevé Giroux (2013, 2014) en définissant les difficultés d'apprentissage des élèves selon la perspective ministérielle.

Le *Dictionnaire actuel de l'éducation* définit l'orthopédagogie comme une « pédagogie qui se caractérise par un ensemble de moyens didactiques et orthodidactiques en vue d'aider les élèves en difficulté à réaliser leurs apprentissages scolaires » (Legendre, 2005, p. 979). Ce terme, utilisé au Québec, désigne un service pédagogique du domaine de l'éducation spéciale.

L'Association des orthopédagogues du Québec (ADOQ), qui regroupe les intervenants du domaine de l'orthopédagogie depuis le 17 mai 1988, a mis à jour sa définition de l'orthopédagogie en février 2018 dans le *Référentiel des compétences professionnelles liées à l'exercice de l'orthopédagogue au Québec* :

L'orthopédagogie est un domaine d'intervention et de recherche appliquée dont l'objet est l'évaluation et l'intervention relatives aux apprenants susceptibles de présenter ou

présentant des **difficultés d'apprentissage** incluant les **troubles d'apprentissage**. Afin de prendre en considération l'ensemble des dimensions contributives à l'apprentissage, la pratique orthopédagogique se fonde sur la recherche en éducation, plus spécifiquement en orthodidactique, en didactique, en pédagogie et en psychopédagogie. Plus largement, elle s'appuie également sur les connaissances pertinentes issues de la psychologie, de la linguistique, des mathématiques, des neurosciences et des sciences humaines.

L'**évaluation orthopédagogique** est un processus dynamique d'évaluation continue qui consiste à préciser, chez l'apprenant, les difficultés qui font obstacle aux apprentissages et les capacités qui favorisent la réussite de qualité. L'évaluation s'intéresse aux connaissances, aux stratégies, aux processus cognitifs et à la nature et à l'origine des objets d'apprentissage, notamment en lecture, en écriture et en mathématiques. L'évaluation orthopédagogique considère également d'autres facteurs susceptibles d'influencer l'apprentissage, soit des facteurs affectifs et motivationnels, sociofamiliaux, scolaires et extrascolaires. Ces facteurs incluent les approches didactiques, les situations d'apprentissage et les contextes éducationnels.

S'appuyant sur les conclusions évaluatives, l'**intervention orthopédagogique** vise à prévenir, consolider ou rééduquer de façon corrective ou compensatoire, afin de permettre à l'apprenant de progresser de façon optimale au niveau de ses apprentissages, notamment en lecture, en écriture et en mathématiques. Elle s'adresse directement à l'apprenant et implique la collaboration avec les acteurs concernés. (L'Association des Orthopédagogues du Québec (L'ADOQ), 2018, p. 5)

Dans son *Plan d'action en matière d'adaptation scolaire*, le ministère propose comme voie d'action de « placer l'adaptation des services éducatifs comme première préoccupation de toute personne intervenant auprès des élèves handicapés ou en difficulté » (Ministère de l'Éducation, 1999, p. 20). Pour ce faire, il propose, entre autres, d'offrir davantage de services d'orthopédagogie. Plus récemment, dans un nouveau plan d'action, le MELS annonçait la priorité d'action d'accroître la formation et l'accompagnement du personnel intervenant auprès d'élèves HDAA en invitant les universités à créer des programmes de deuxième cycle permettant de répondre aux besoins de spécialisation en orthopédagogie (Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2013), ce qui traduit une demande grandissante pour ce type d'intervention.

Le ministère de l'Éducation propose un *Cadre de référence pour guider l'intervention* auprès d'élèves ayant des difficultés d'apprentissage (2003) qui suggère un accompagnement s'inscrivant dans un contexte dynamique d'évaluation-intervention-organisation et sollicitant différents acteurs (élève, enseignant, parents, équipe-école, équipe-cycle, partenaires externes) dans une visée de

réussite éducative. Pour favoriser la réussite des élèves, il est attendu que les intervenants des services complémentaires collaborent.

À cet effet, le travail de l'orthopédagogue est indispensable au regard de l'aide à apporter aux élèves qui ont des difficultés d'apprentissage. Ce travail, comme celui des autres professionnels, doit, le plus possible, se faire en classe. Chacun doit explorer des façons novatrices d'intervenir. (Ministère de l'Éducation, 2003, p. 16)

Le service d'orthopédagogie gravite autour de celui d'enseignement et sa « contribution à l'accompagnement de l'élève soit par une intervention directe auprès de ce dernier, soit par du soutien à l'enseignant » (Ministère de l'Éducation, 2003, p. 17) est essentielle au travail de l'équipe-cycle. Si la prescription de ce service par le ministère de l'Éducation n'est plus à défendre, la forme spécifique qu'il prendra n'est cependant pas précisée. Ainsi, le service peut être offert de différentes façons.

Le ministère de l'Éducation donne des exemples de la variété des formats que peut prendre la collaboration de l'orthopédagogue à la différenciation de l'enseignement présentés par Lise Saint-Laurent lors de la conférence *La différenciation de l'enseignement* (Ministère de l'Éducation, 2003). Le rôle et les actions de l'orthopédagogue peuvent porter sur la consultation collaborative (par l'identification des objectifs individualisés et la suggestion d'interventions), l'enseignement coopératif (par l'enseignement de stratégies), les activités d'apprentissage coopératif, l'enseignement en petits groupes ou individuel (à l'intérieur ou à l'extérieur de la classe), les ateliers pour les parents, l'organisation et la supervision du tutorat, l'adaptation du matériel et l'évaluation (par l'observation en classe ou des questionnaires métacognitifs) (Ministère de l'Éducation, 2003, p. 45).

Le service d'orthopédagogie est aussi offert différemment selon l'ordre d'enseignement (primaire ou secondaire) :

Au primaire, l'orthopédagogie est l'un des principaux services donnés aux élèves qui ont des difficultés d'apprentissage. Bien qu'il existe des modèles de consultation collaborative dans différents milieux, les interventions de l'orthopédagogue semblent se faire majoritairement à l'extérieur de la classe. La situation tend cependant à évoluer. De plus en plus de nouvelles façons d'intervenir sont explorées.

Au secondaire, peu d'élèves bénéficient de l'orthopédagogie. Le modèle de regroupement en cheminements particuliers de formation est très souvent privilégié. Cette façon d'organiser les services, à partir de catégories, est cependant de plus en plus remise en question. (Ministère de l'Éducation, 2003, p. 7)

Si les élèves en difficulté au primaire sont généralement intégrés aux classes régulières et qu'ils bénéficient d'un suivi en orthopédagogie, ces modalités sont plutôt inversées au secondaire. La majorité des élèves du secondaire intègrent plutôt une classe de cheminement particulier et ils ne dispensent plus des services d'orthopédagogie (Ministère de l'Éducation, 2003).

Comme ce type d'intervention est moins utilisé au secondaire, les recherches qui s'inscrivent dans ce contexte se font plus rares et les orthopédagogues tendent vers le même modèle d'intervention qu'au primaire, soit des séances d'intervention en petits groupes à l'extérieur de la classe. Les élèves en difficulté qui fréquentent des classes d'adaptation scolaire auront donc plus rarement accès à des services d'orthopédagogie. Un rapport de recherche de l'Université de Sherbrooke rapporte que 56% de 134 orthopédagogues interrogés disent intervenir au primaire, 27% au préscolaire et seulement 17% au secondaire (Granger *et al.*, 2021). Ces orthopédagogues relèvent des insatisfactions quant à leur rôle et leurs fonctions, plus particulièrement concernant entre autres l'organisation des services et le manque de temps. L'organisation des services les insatisfait, notamment par les besoins importants et l'impossibilité d'y répondre adéquatement et par l'incompréhension entourant leur rôle, leurs fonctions, leurs compétences et leur apport. À cette insatisfaction, s'ajoute le manque de temps dû à un ratio orthopédagogues-élèves déséquilibré compte tenu du grand nombre d'élèves ciblés, de demandes d'évaluation au détriment de l'intervention et de tâches cléricales, comme la rédaction de bilans, de plans de rééducation et de rapports d'évaluation diagnostique qui alourdissent la tâche et deviennent des contraintes importantes. L'orthopédagogie a donc peu de temps et de moyens d'intervenir, et c'est plus particulièrement le cas au secondaire. Parmi leurs objets d'évaluation et d'intervention, il est possible de constater que la lecture et l'écriture sont les processus sur lesquels les orthopédagogues interviennent le plus, suivis des interventions en lien avec les outils d'aide technologie en soutien à l'apprentissage des élèves, puis des processus en mathématiques (Granger *et al.*, 2021). Au secondaire, les élèves n'apprennent plus à lire et à écrire, mais doivent être en mesure de lire et d'écrire pour développer les compétences prescrites par le ministère. Ainsi, les interventions des orthopédagogues au secondaire servent souvent à initier les élèves aux outils technologiques leur

permettant de pallier certaines difficultés en lecture et en écriture afin de démontrer leurs compétences. Les orthopédagogues se retrouvent alors avec moins de moyens d’agir pour intervenir en mathématiques auprès de leurs élèves du secondaire. De plus, Giroux (2017) relève un désinvestissement des interventions orthopédagogiques en mathématiques dans les dernières années et une place moindre à la spécificité du savoir mathématique.

Au cours des quinze dernières années, des efforts importants ont été consacrés dans le milieu scolaire et plus particulièrement en orthopédagogie, au soutien à l’apprentissage en lecture/écriture (Giroux et Ste-Marie, 2015). En contrepartie, les mathématiques ont été soit désinvesties, plusieurs orthopédagogues n’interviennent pas ou peu en mathématiques, soit investies par le biais de la lecture puisque les élèves faibles en mathématiques le sont principalement au regard de leur faible compétence à résoudre des situations problèmes qui est souvent associée à des difficultés de lecture des énoncés de problème. Une telle pratique fait cependant peu de place à une prise en compte de la spécificité des mathématiques pour saisir ce qui caractérise les pratiques mathématiques de l’élève et pour organiser un soutien approprié à l’apprentissage de contenus mathématiques visés par le programme. (Giroux, 2017, p. 4)

Un tel contexte offre peu de moyens aux orthopédagogues pour favoriser l’apprentissage, épistémologiquement complexe, de la notion d’équivalence d’expressions algébriques des élèves en difficulté d’apprentissage.

1.2 Problème

Alors que le ministère de l’Éducation du Québec demande la mise en place de dispositifs d’intervention spécialisés en français et en mathématiques pour viser la réussite éducative des élèves, les dispositifs d’intervention en mathématiques au secondaire restent très flous et le passage de l’arithmétique à l’algèbre demeure une difficulté majeure, surtout pour les élèves en difficulté d’apprentissage. Les élèves doivent développer leur pensée algébrique à travers l’articulation des dimensions sémantique et syntaxique dans un contexte où les orthopédagogues n’ont que peu de moyens d’intervenir.

Kieran (1989) donne une vue synthétique d’un grand nombre d’études et conclut qu’il existe des preuves indubitables qui indiquent que les élèves sont capables d’utiliser avec succès des manipulations algébriques, sans pouvoir aller beaucoup plus loin. (Arcavi *et al.*, 1990, p. 62).

En effet, lorsque l'enseignement de l'algèbre consiste à apprendre les expressions algébriques, les manipulations formelles, puis la maîtrise des lois de la langue algébrique, « [...] beaucoup d'élèves ne voient pas en l'algèbre un outil qui puisse leur permettre d'exprimer des généralisations et des processus de justification mathématiques et ce, même lorsqu'ils sont capables de maîtriser totalement les techniques algébriques. » (Arcavi *et al.*, 1990, p. 61) De plus, Lee et Wheeler (1987 dans Arcavi *et al.*, 1990) remarquent que près de la moitié des élèves qui utilisent l'algèbre comme processus de preuve ne comprennent pas tout à fait son sens et que les expressions algébriques produites ne sont utilisées que pour engendrer des exemples numériques. Schliemann (2002) relève d'ailleurs que, même si des outils mathématiques pertinents à l'apprentissage sont mis à la disposition des élèves, les élèves doivent tout de même être guidés pour les explorer afin de favoriser une compréhension profonde des principes mathématiques qui sous-tendent les règles procédurales.

Actuellement, il n'y a que très peu d'études concernant les situations d'enseignement favorisant la mise en relation des dimensions sémantique et syntaxique dans l'apprentissage de la notion d'équivalence d'expressions algébriques en contexte d'interventions orthopédagogiques. Le concept d'équivalence d'expressions algébriques est pourtant fondamental pour la compréhension du travail algébrique à développer au premier cycle du secondaire, plus particulièrement pour le traitement et la transformation des expressions algébriques (opérateur algébrique), ainsi que pour la construction du sens de la constitution de la pensée algébrique.

1.3 Objectif de recherche

La problématique décrite nous amène donc à nous questionner sur le rôle des dimensions sémantique et syntaxique dans la compréhension de la notion d'équivalence d'expressions algébriques chez les élèves en difficulté d'apprentissage. Plus précisément, il sera question d'analyser le rôle que peut jouer cette articulation dans l'apprentissage de la notion d'équivalence d'expressions algébriques des élèves en difficulté d'apprentissage dans le contexte d'interventions orthopédagogiques. On s'intéressera au processus d'apprentissage des élèves pour explorer de quelle façon les interactions didactiques contribuent à la construction de leur savoir algébrique, mais aussi pour analyser de quelle manière l'articulation des dimensions sémantique et syntaxique

intervient dans la compréhension et l'apprentissage de la notion d'équivalence d'expressions algébriques.

CHAPITRE 2

CADRE THÉORIQUE

Afin d'explorer le processus d'apprentissage de la notion d'équivalence d'expressions algébriques des élèves en difficulté, il importe de comprendre l'approche qui nous permet d'expliquer ces difficultés d'apprentissage.

2.1 Hypothèses explicatives relatives à la notion de difficultés d'apprentissage

Les difficultés d'apprentissage des élèves ont été interprétées par plusieurs domaines qui ont tenté de les expliquer selon leur perspective. Nous présenterons les interprétations neuropsychologiques, sociales et, plus spécifiquement, didactiques de ces difficultés.

2.1.1 Approche neuropsychologique

La neuropsychologie et la psychologie cognitive centrent leurs études sur les caractéristiques spécifiques de l'élève. Selon cette perspective biologique axée sur la cognition des élèves, les difficultés d'apprentissage seraient expliquées par des déficits cognitifs, et les troubles spécifiques d'apprentissage seraient associés à des dysfonctions cognitives, à des atteintes neurologiques (Laplante *et al.*, 2011).

Par exemple, selon l'hypothèse cognitive, le trouble spécifique d'apprentissage en mathématique, la dyscalculie, relèverait de déficits cognitifs dont l'atteinte neurologique classerait ce diagnostic comme étant un trouble mental dans le *DSM-IV* (Giroux, 2014). L'expertise mentaliste proposerait donc des méthodes d'enseignements spécialisées, axées sur l'enseignement de stratégies cognitives et métacognitives auprès de ces élèves.

Krosebergen et Van Luit mettent en évidence, dans une méta-analyse, la prégnance de l'hypothèse du déficit cognitif chez les élèves en difficulté en mathématique et rappellent le caractère hétérogène de ces élèves :

In general, these students have memory deficits leading to difficulties in the acquisition and remembering of math knowledge. Moreover, they often show inadequate use of strategies for solving math tasks, caused by problems with the acquisition and the

application of both cognitive and metacognitive strategies. Because of these problems, they also show deficits in generalization and transfer of learned knowledge to new and unknown tasks... (Kroesbergen & Van Luit, 2003, p. 97)

Giroux (2013) ajoute les conséquences de cette vision des difficultés sur les méthodes d'enseignement.

L'hypothèse du déficit propre à la psychologie cognitive et la neuropsychologie génère deux perspectives sur le rapport entre caractéristiques des élèves et situations d'apprentissage : soit ce sont les caractéristiques spécifiques des élèves en difficulté qui handicapent l'apprentissage en situation d'enseignement, soit ce sont les situations d'enseignement qui handicapent l'apprentissage des élèves en difficulté. (Giroux, 2013, p. 62)

Selon la perspective adoptée, les interventions auront pour but de combler un manque qui serait propre à l'élève, ou d'adapter les situations d'apprentissage aux besoins spécifiques de ce dernier. L'expertise mentaliste encourage, dans cette optique, un enseignement de plus en plus individualisé, personnalisé selon les caractéristiques particulières des élèves.

Si la diversité des modes de représentation est perçue comme importante pour permettre les apprentissages, certains modes de représentation peuvent aussi engendrer des difficultés. En effet, il est mentionné que les élèves en difficulté d'apprentissage ou ayant un trouble d'apprentissage ont des difficultés avec les symboles mathématiques. [...] Il semble toutefois important d'ajouter que ces difficultés sont majoritairement attribuées à une condition particulière de l'élève et non à la nature spécifique des objets mathématiques ou à la spécificité de certains modes de représentation sémiotique, malgré le fait que les concepts mathématiques eux-mêmes peuvent être à la source des difficultés (obstacles épistémologiques). Le rôle du symbolisme mathématique dans la constitution même des objets mathématiques n'est presque pas mentionné. (Bergeron, 2017, p. 117-118)

L'hypothèse des causes neuropsychologiques des difficultés d'apprentissage a une grande influence sur les politiques et les pratiques éducatives (Giroux, 2013). Roiné (2009) montre que l'institution scolaire exerce une pression sur les chercheurs et les enseignants pour développer des dispositifs adaptés aux caractéristiques cognitives des élèves. Selon lui, cette idéologie mentaliste mène à la persistance des inégalités scolaires en créant des inégalités face aux apprentissages.

La thèse montre que la persistance des inégalités scolaires, malgré les nombreuses tentatives pour réguler ce phénomène depuis les années 1960, s'explique en partie par

l'idéologie mentaliste, dominant le discours scolaire, en tant qu'arrière-plan symbolique sur lequel s'ancrent les pratiques enseignantes. (Giroux, 2013, p. 63)

Dans les dernières années, les hypothèses psychologiques et neurobiologiques ont pris de l'expansion dans l'explication des difficultés scolaires et ont mené à une individualisation de l'échec (Morel, 2014). Alors que, dans les années 1960 et 1970, l'échec scolaire était un phénomène social associé aux enfants des classes populaires, le phénomène est redéfini à la fin des années 1980 par une approche qui considère que les difficultés propres à chacun peuvent être surmontées grâce à des aides particulières, ce qui a eu un impact sur la médicalisation. Morel (2014, p. 19) identifie et définit le phénomène de médicalisation comme suit :

[...] processus qui conduit un élève en difficulté dans le cadre scolaire à être appréhendé en tant qu'individu nécessitant des « soins » et à consulter des professionnels qui, dans leur grande majorité, appartiennent aux professions médicales ou qui, n'appartenant pas à ces professions, voire contestant les approches médicales dominantes, exercent néanmoins dans des établissements des secteurs médico-social ou sanitaire sous tutelle médicale.

Il propose que « l'appropriation et [...] la mobilisation des savoirs médico-psychologiques par des individus différents selon leur rapport à l'élève en difficulté (un parent ou un professionnel) ou selon leur profession (un enseignant ou un médecin) » (Morel, 2014, p. 22) contribuent à cette médicalisation de l'échec scolaire. Traitant « l'échec scolaire comme la somme des défaillances individuelles imputables à des causes médico-psychologiques » (Morel, 2014, p. 20), les médecins des disciplines médico-psychologiques élargissent leur domaine d'intervention à l'échec scolaire en s'intéressant aux déterminants et aux traitements individuels par la production de diagnostics et de traitements construits à partir des critères scolaires (dyslexie, dysorthographe, dyscalculie).

« Pour résumer, l'idéologie mentaliste considère l'apprentissage des élèves comme relevant d'une appropriation (individuelle) et non comme relevant d'une genèse et donc d'une acculturation (collective). » (Roiné, 2015, p. 10) En effet, l'approche cognitiviste ne considère pas l'apport de la culture dans son modèle explicatif de la connaissance (Bergeron, 2017).

2.1.2 Approche sociale

Du point de vue des sociologues, les difficultés d'apprentissage seraient plutôt expliquées par les structures sociales et les mécanismes institutionnels. Ils s'intéressent aux inégalités créées par le système scolaire et imprégnées des différences entre les classes sociales, les plus défavorisées ayant moins de chances de réussite que les plus favorisées. Cette perspective amène à questionner les différents groupes qui composent la société, et ainsi, qui composent les classes des écoles. Les différences sont étudiées à travers l'angle de la culture, certaines cultures considérées plus déficientes que d'autres, desquelles les élèves arriveraient à l'école avec des manques culturels à combler par le système éducatif. Ce seraient les caractéristiques sociales qui expliqueraient les difficultés d'apprentissage des élèves.

« Un regard dirigé vers les structures sociales est tourné vers l'extérieur et relève d'une épistémologie centrée sur les mécanismes institutionnels déterminants dans le profil d'un individu. » (Giroux, 2013, p. 61)

Selon Roiné (2015), l'État a expliqué les échecs scolaires en attribuant les difficultés des élèves à des causes extérieures à l'institution scolaire en cherchant des explications psychologiques et sociologiques plutôt qu'en remettant en question la fabrication culturelle mise en place au sein des établissements.

En postulant que « les enfants des classes populaires manquent des moyens culturels, des conditions de vie correctes qui leur permettraient de réussir à l'école, ce qui les handicaperait dans leur développement psychologique par des retards linguistiques et intellectuels » (Sicot, op. cit., p. 276), on déclare opérer une distinction de nature psychologique entre les enfants de familles pauvres et les autres. En bref, ce sont en grande partie les spécificités individuelles des sujets qui sont censées expliquer leurs difficultés scolaires. (Roiné, 2015, p. 3-4)

Des paramètres autres que scolaires contribuent plus fortement à se constituer comme variables prédictives des signalements et des orientations : l'appartenance sociale et l'implantation géographique. Les signalements des élèves en difficulté semblent donc davantage dépendre de variables non-scolaires que des résultats scolaires stricto sensu (Roiné, 2011). (Roiné, 2015, p. 10)

Roiné (2015) explique que les élèves en difficulté seraient le résultat d'un double processus dans lequel l'institution met en place des structures spécifiques qui créent des différences entre les personnes et légitimise l'organisation de ces structures par des connaissances et des classifications sociales. Ainsi, plus un élève serait étiqueté « en difficulté », plus il risquerait de le devenir par le « traitement » spécial qu'il recevrait.

Si des élèves présentant des difficultés scolaires graves et persistantes échouent les mêmes types d'épreuves que les autres élèves, c'est que ces épreuves sont beaucoup plus difficiles (Roiné, 2015). Ainsi, une attention particulière devrait être accordée au milieu didactique, qui occupe une place déterminante dans la réussite de tous les élèves aux évaluations, alors que les différences entre les élèves ayant des difficultés marquées et les élèves suivant le cheminement régulier sont de degré plutôt que de nature.

Comme les difficultés des deux catégories d'élèves sont de la même nature, mais qu'elles diffèrent en termes de degré, nous nous intéresserons à la construction des connaissances mathématiques et à l'étude des caractéristiques spécifiques du savoir pour analyser le processus d'apprentissage des élèves.

2.1.3 Approche didactique

La perspective didactique est celle qui prend en considération les caractéristiques spécifiques des savoirs, « les conditions de diffusion des savoirs et le fonctionnement des systèmes et des dispositifs didactiques » (Giroux, 2013, p. 60).

Dans ce courant didactique, les difficultés d'apprentissage ne sont pas étudiées sous l'angle strict de dysfonctionnements propres à l'élève, du fait qu'on considère qu'elles sont liées aux conditions d'enseignement dans lesquelles elles se manifestent. (Giroux, 2014, p. 35)

Notre travail de recherche s'inscrit dans cette approche didactique qui, en rupture avec les hypothèses cognitives, s'intéresse davantage au contenu du savoir et accorde une place moindre aux « déficits » qui caractérisent les élèves en difficulté (Giroux, 2013). La didactique s'intéresse à la relation enseignant-élève-savoir, plaçant ces trois pôles du triangle didactique dans un milieu particulier. L'adaptation de l'enseignement aux caractéristiques de l'élève en difficulté étant

insuffisante, la thèse didactique étudie la spécificité du contenu d'enseignement, en d'autres mots, la spécificité du savoir enseigné, et les interactions didactiques (Giroux, 2014).

Les interactions didactiques relèvent de l'ensemble des interactions entre enseignement et apprentissage par rapport à un objet de savoir spécifique visé (Giroux, 2014). Elles ont habituellement lieu entre l'enseignant et les élèves, mais peuvent aussi avoir lieu entre les élèves. Ces interactions sont analysées sous l'angle du contrat didactique, concept fondamental en didactique pour expliquer les difficultés d'apprentissage des élèves.

Giroux analyse aussi les interactions didactiques en faisant référence à la sémiotique de Peirce. La sémiotique est le processus par lequel une signification est attribuée à un objet dans un contexte donné (Evaert-Desmedt, 1990; Peirce, 1978). Le contexte sera ici celui de la situation d'enseignement-apprentissage en mathématique.

Une situation d'enseignement/apprentissage vise à faire surgir une nouvelle signification, à connaître un objet, à avancer dans le savoir. Autrement dit, elle vise à un processus interprétatif qui vient altérer, bonifier le signe de départ (ou autrement dit, les connaissances antérieures). Nous considérons ainsi la situation d'enseignement/apprentissage comme un lieu de production et de reproduction de signes qui assure la transmission et l'acquisition des savoirs mathématiques. (Giroux, 2008, p. 24-25)

« Dans la situation effective, les sémiotiques sont des chaînes d'interprétants qui se manifestent par la trame des interactions entre les protagonistes (acteur/milieu). » (Giroux, 2008, p. 26) Brousseau (1991) décrit la situation effective comme étant définie dans le temps et l'espace et dont l'enjeu effectif se réalise. C'est donc dans un milieu et un contexte donné que l'interprétant et l'actant agissent. La chaîne d'interactions entre les interprétants sera considérée sémiotique. La théorie des situations didactiques propose des situations dans lesquelles le milieu donne une rétroaction sur les actions que l'élève pose et le contraint à adapter ses connaissances. L'élève agit donc sur la situation en prenant des décisions, en faisant des choix, en fonction des contraintes que la situation lui impose. Le milieu offre ensuite une rétroaction à l'élève par des signes qu'il interprète.

Dans le contexte d'une activité mathématique, la situation évoluera au fil des interprétations du savoir mathématique de l'élève et de l'enseignante. Cette chaîne d'interactions sera marquée de décalages entre les interprétations mathématiques des enseignants et des élèves, interprétations

déterminées par la tâche et les interactions (Conne, 1992, 1999, 2003; Deblois, 2006). Ces décalages auront pour effet d'alimenter le processus de recherche d'un contrat didactique. Cependant, si les écarts sont trop importants, ils pourraient affecter l'investissement cognitif et mathématique de l'élève. Le pilotage de la situation et les phénomènes didactiques créés participeront donc à favoriser, ou nuire, l'investissement cognitif et mathématique de l'élève et la construction du sens en jeu. La situation d'enseignement-apprentissage aura pour but ultime de réduire ces décalages de sorte que les protagonistes reconnaissent et partagent des significations communes qui s'inscrivent dans la pratique mathématique culturellement définie (Giroux, 2013).

Il faut savoir que les choix didactiques des enseignants ne vont pas toujours dans le sens de cette approche didactique et qu'ils tiennent compte des contraintes institutionnelles imposées (Giroux, 2013). À ce sujet, plusieurs études montrent que

la recherche d'une situation adaptée à l'élève dit en difficulté se réalise souvent en minorant le potentiel mathématique des élèves et en négligeant l'importance des propriétés didactiques nécessaires (relatives au savoir visé) à la progression de leurs connaissances mathématiques (Giroux, 2014, p. 38).

Si l'adaptation d'une situation se fait souvent en sous-estimant le potentiel mathématique des élèves en adaptation scolaire et en délaissant des propriétés didactiques relatives au savoir, il ne serait pas juste de faire porter ce fardeau aux enseignants, alors qu'ils doivent jongler avec des contraintes institutionnelles qui leur demandent d'adapter leur enseignement aux besoins et caractéristiques particulières des élèves en difficulté (Giroux, 2014). L'attention des enseignants n'est donc plus tournée vers la spécificité du contenu à enseigner, mais devient plutôt dirigée vers les déficits et les besoins de l'élève qui affectent sa réussite (Giroux, 2014).

Bien que les enseignants soient contraints à adapter leur enseignement aux déficits dits cognitifs et individuels relevant du domaine neuropsychologique, il en demeure que c'est l'approche didactique qui donne des moyens aux enseignants de faire progresser les apprentissages de leurs élèves. C'est donc à travers l'étude des interactions des acteurs dans une situation didactique que nous explorerons les significations et les interprétations du savoir algébrique des élèves.

Guy Brousseau a été l'un des premiers à s'intéresser explicitement à la didactique des mathématiques. Il a développé la théorie des situations didactiques (TSD), théorie dans laquelle nous nous inscrirons. Certains de ses concepts fondamentaux seront utiles et pertinents pour construire nos situations d'enseignement-apprentissage, pour animer nos séances et pour analyser les productions des élèves. La section qui suit présentera certains concepts que nous jugeons essentiels à notre recherche et dont nous tiendrons compte lors de la construction des tâches et des analyses.

2.2 Certains concepts de la théorie des situations didactiques

La théorie des situations didactiques (TSD) de Guy Brousseau (1997) occupe une place importante au sein des recherches françaises sur l'enseignement des mathématiques depuis les années 70 (Brousseau, 2009). Elle s'intéresse aux conditions qui favorisent l'enseignement et l'apprentissage, en d'autres termes, la transmission sociale de savoirs en mathématiques (Giroux, 2014), et propose l'organisation d'une genèse artificielle permettant de donner du sens aux savoirs à enseigner.

Cette genèse est soutenue par l'aménagement d'une situation d'enseignement, encadrée par les processus de dévolution et d'institutionnalisation d'un savoir qui sont sous le contrôle de l'enseignement, et portée par une intention didactique précise (Brousseau, 1997). (Giroux, 2014, p. 35)

La dévolution est un processus par lequel l'enseignant fait entrer l'élève dans une situation d'apprentissage, sans lui dévoiler le savoir qu'il veut lui transmettre. Le savoir sera éventuellement institutionnalisé par l'enseignant en liant les apprentissages que l'élève aura faits aux savoirs reconnus par l'institution. Dans cette optique, les conditions d'enseignement deviennent une variable fondamentale pour expliquer les apprentissages des élèves ainsi que leurs difficultés. Les concepts fondamentaux de la théorie de situations didactiques qui guideront notre travail seront notamment les concepts de situation didactique, de variable didactique, de dévolution, d'institutionnalisation et de contrat didactique. Ils seront surtout importants pour le choix et l'élaboration des situations d'apprentissage à présenter aux élèves et utiles aux moments de la réflexion et de la mise en œuvre des situations d'apprentissage. Ces concepts guideront l'animation des interventions orthopédagogiques.

2.2.1 Construction du sens et situation didactique

Nous partons de l'hypothèse que la construction du sens des contenus mathématiques à enseigner est un élément essentiel à l'apprentissage des mathématiques. Cette construction se développe à travers les expériences vécues par les élèves dans diverses situations d'enseignement.

Nous admettons donc que la constitution du sens, tel que nous l'entendons, implique une interaction constante de l'élève avec des situations problématiques, interactions dialectiques (car le sujet anticipe, finalise ses actions) où il engage des connaissances antérieures, les soumet à révision, les modifie, les complète ou les rejette pour former des conceptions nouvelles. L'objet principal de la didactique est justement d'étudier les conditions que doivent remplir les situations ou les problèmes proposés à l'élève pour favoriser l'apparition, le fonctionnement et le rejet de ces conceptions successives. (Brousseau, 1998b, p. 120)

C'est à travers les situations, définies comme « l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve l'élève, les relations qui l'unissent à son milieu, l'ensemble des données qui caractérisent une action ou une évolution » (Brousseau, 1998b, p. 279) que les élèves construiront le sens des objets de savoirs ciblés. Ces situations permettent à l'enseignant de dévoluer un savoir à l'élève afin qu'il reconnaisse la pertinence de la connaissance en jeu pour résoudre le problème mathématique. La reconnaissance de cette pertinence, autrement dit de l'utilité de la connaissance dans le contexte de la ou des situations proposées, participe à la construction du sens du savoir à enseigner. Brousseau distingue la situation didactique de la situation adidactique.

2.2.1.1 Situation didactique

Brousseau définit la situation didactique comme « une situation où se manifeste directement ou indirectement une volonté d'enseigner, un enseignant » (1998b, p. 281). C'est l'ensemble des interactions de l'élève avec les problèmes que l'enseignant lui pose, en d'autres mots, l'ensemble des relations maître-élève-savoir.

La situation didactique se caractérise généralement par « une séance ayant pour objet l'enseignement à un élève d'une connaissance déterminée » (Brousseau, 2009, p. 33). L'enseignant tente de faire dévoluer un savoir à l'élève en lui communiquant, ou non, des informations, des questions, des méthodes d'apprentissage, etc. L'élève, quant à lui, interagit avec son environnement et tente de résoudre le problème.

L'intentionnalité d'enseignement d'une situation lui attribue un caractère didactique qui se manifeste par la mise en place de conditions dans la situation permettant l'action des élèves et la reconnaissance de l'utilité sociale des connaissances produites.

L'intention d'étudier le rapport entre l'activité individuelle de sujets et les normes du système culturel justifie l'appel à la notion de « situation didactique ». En effet, une des caractéristiques fondamentales des situations didactiques est celle qui consiste à souligner l'intentionnalité de communication des savoirs culturels. En partant des connaissances sous forme de texte de savoir, la théorie de situations cherche les conditions dans lesquelles ces savoirs pourraient jouer un rôle dans l'action des sujets. Les situations deviennent alors supports, cadres et moteurs des apprentissages (Conne, Favre et Giroux, 2005). (Barallobres, 2007, p. 39)

La situation didactique prend donc appui sur l'intentionnalité de l'enseignant de transmettre un savoir culturellement reconnu et sur les conditions qu'il va mettre en place pour créer une situation pertinente pour l'apprentissage visé. En effet, Brousseau proposait, depuis 1980 déjà, « d'agir au niveau des situations d'apprentissage, d'en manipuler les caractéristiques pour obtenir les changements d'attitudes souhaités » (Giroux, 2014, p. 39).

Toute situation didactique, au sens de Brousseau, contient une situation adidactique ou, au moins, certaines phases d'adidacticité fondamentales pour la construction du sens des savoirs à enseigner.

2.2.1.2 Situation adidactique

Pour Brousseau (1998b), l'acquisition d'une connaissance ne sera faite que lorsque l'élève sera en mesure de l'utiliser dans un contexte sans intention didactique et sans intention d'enseignement, autrement dit, dans une situation non didactique.

Les situations adidactiques « simulent » au sein de la relation didactique, les situations non didactiques. Autrement dit, certaines phases des situations didactiques sont organisées de sorte que l'élève puisse développer un travail autonome, en interaction avec un milieu construit à telle fin. C'est en s'adaptant aux contraintes du milieu que l'élève développera des connaissances. Ainsi, lorsque l'enseignant parvient à réduire les traces des intentions didactiques dans une situation d'enseignement, nous sommes en présence des phases d'adidacticité. L'intention d'enseigner reste présente et spécifique au savoir, mais ne devrait plus paraître à l'élève. Ces situations impliquent

moins d'interventions directes de l'enseignant dans le but de provoquer « l'interaction la plus indépendante et la plus féconde possible » (Brousseau, 1998b, p. 60) de l'élève avec le milieu.

En ce sens, la situation adidactique est celle qui est dépourvue, autant que possible, d'indication intentionnelle explicite. L'enseignant n'intervient pas directement sur la connaissance qu'on souhaite que l'élève acquière, afin que l'élève puisse prendre des décisions et puisse reconnaître par lui-même la pertinence d'une stratégie choisie. On cherche à ce que l'élève agisse en fonction des contraintes de la situation, dépourvue le plus possible des attentes de l'enseignant.

Les situations « adidactiques » sont les situations d'apprentissage dans lesquelles le maître a réussi à faire disparaître sa volonté, ses interventions, en tant que renseignements déterminants de ce que l'élève va faire : ce sont celles qui fonctionnent sans l'intervention du maître au niveau des connaissances. (Brousseau, 1998b, p. 311)

L'élaboration de situations didactiques et adidactiques requiert la mise en place de contraintes qui se matérialisent par le choix des variables didactiques de la situation.

2.2.2 Variables didactiques

Les variables didactiques sont les éléments de la situation qui peuvent être modifiés par l'enseignant et qui auront un impact sur les stratégies que les élèves choisiront d'utiliser pour répondre au problème. « Les variables didactiques sont celles qui influent sur l'apprentissage et dont l'enseignant peut choisir la valeur [...] ». » (Brousseau, 1998b, p. 105) La manipulation des variables didactiques par l'enseignant provoque des changements de stratégies chez les élèves. Leur manipulation réfléchie pourra permettre une évolution des stratégies des élèves et une progression dans l'apprentissage visé.

Dans le contexte d'analyses de situations d'apprentissage de la multiplication, Constantin et Coulange ont analysé différentes variables didactiques afin de comprendre comment elles peuvent « occasionner des complexifications, des adaptations de techniques de calcul et des extensions des technologies en jeu en lien avec la distributivité » (2017, p. 20). Pour donner certains exemples de variables didactiques, dans les tâches proposées de leur recherche, elles se sont intéressées à l'impact que pouvaient avoir le nombre de chiffres, la position du facteur, le type de décomposition (additive ou soustractive) et la nature du facteur sur l'apprentissage de la multiplication des élèves.

Coppé (2020), dans son étude de la progression sur les équations d'élèves avec les programmes de calcul, va dans le même sens en avançant l'idée qu'il est possible de changer la nature de la solution et de favoriser une stratégie plutôt qu'une autre en choisissant certaines variables didactiques.

La pertinence du choix des variables didactiques peut être évaluée en fonction de leur possibilité de faire évoluer les stratégies des élèves vers d'autres plus élaborées (en utilisant implicitement ou explicitement la connaissance visée) ou, au moins, de mettre en évidence la non-pertinence des stratégies employées par les élèves pour répondre à la tâche mathématique (établissement de conditions d'ignorance).

Dans notre cas, le choix des variables didactiques sera fait en fonction des possibilités de faire évoluer les stratégies des élèves vers la mobilisation d'une pensée algébrique pour résoudre une situation didactique qui impliquera la transformation d'expressions algébriques afin que les élèves construisent du sens à la notion d'équivalence d'expressions algébriques.

2.2.3 Dévolution

Dans le contexte de la TSD, les élèves construisent du sens et apprennent lorsqu'ils sont responsables de leur action au sein d'une situation didactique. La remise de cette responsabilité aux élèves est appelée « dévolution ».

« La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (adidactique) ou d'un problème et accepte lui même les conséquences de ce transfert. » (Brousseau, 1998b, p. 303) Cet acte s'inscrit dans la TSD, qui place l'élève dans un contexte particulier, au sein d'une situation adidactique, en lui transférant la responsabilité de s'engager dans la résolution du problème. C'est un moyen didactique de faire entrer l'élève dans le jeu proposé et d'y faire un apprentissage, de le faire entrer dans le contrat didactique (Brousseau, 2009).

Le maître y occupe une position importante dans laquelle il doit permettre la dévolution d'une situation pertinente à l'apprentissage d'un objet de savoir par l'élève sans communiquer la

connaissance en jeu. En d'autres mots, il doit transmettre le savoir en question, sans toutefois le dévoiler.

Le processus de dévolution « consiste à renvoyer l'élève à un rapport avec un milieu dont le professeur peut s'exclure, du moins en partie (situation a-didactique) » (Brousseau, 2009, p. 1). Ce milieu doit pouvoir offrir des rétroactions aux élèves et, ainsi, favoriser leur autonomie (Giroux, 2013). La dévolution s'opère lorsque l'élève arrive à établir les relations qui existent entre ses stratégies et les résultats obtenus par ses actions sur le milieu. En reconnaissant le caractère utile de la connaissance, l'élève pourra alors contrôler la situation.

Lorsque la dévolution ne s'opère pas, alors l'enseignant doit remanier la situation en faisant en sorte que, par ses interventions, l'élève puisse élaborer une réponse, peut-être provisoire. Dans certains cas, il devra même justifier sa proposition inefficace, car il est de sa responsabilité, et même de son obligation, d'aider son apprenant (Brousseau, 1998b).

Dans le cas spécifique des élèves en difficulté, ceux-ci n'acceptent pas facilement de s'engager dans des situations sur lesquels ils savent qu'ils n'auront pas de contrôle aux premières tentatives. Giroux (2013) explique que la mise en place d'un dispositif didactique n'est pas suffisante pour engager les élèves dans une situation.

Giroux propose donc, surtout pour les élèves en difficulté, de favoriser un type de dévolution où l'enseignant, par ses interventions et un accompagnement calibré, participe activement à leur processus d'autonomie. Elle explique qu'en tenant compte des connaissances opératoires des élèves, celles qui leur permettent d'agir sur la situation, l'enseignant sera en mesure de laisser les élèves face à des choix qui leur permettront d'être autonomes dans la production de leurs connaissances et de contrôler la situation mathématique en question.

Ainsi, un choix judicieux des variables didactiques, justifié par les connaissances effectives des élèves, favorisera la dévolution du savoir aux élèves en difficulté qui n'acceptent pas facilement de s'engager dans une situation.

Dans le cadre de cette recherche, nous construirons des situations didactiques (dans le sens de la TSD) destinées à l'apprentissage de la notion d'équivalence d'expressions algébriques permettant d'articuler les dimensions sémantique et syntaxique.

Le choix des variables didactiques est fondamental pour la construction de milieux favorisant le contrôle des situations. Le rôle de l'enseignant est fondamental et se situe au sein d'un processus dialectique dévolution-institutionnalisation.

2.2.4 Institutionnalisation

Si le concept d'institutionnalisation est apparu en 1986, ce moment était pourtant considéré, trois ans plus tôt, indispensable pour aboutir à l'apprentissage (Brousseau, 1998b).

[Les enseignants] doivent prendre acte de ce que les élèves ont fait, décrire ce qui s'est passé et ce qui a un rapport avec la connaissance visée, donner un statut aux événements de la classe, comme résultat des élèves et comme résultat de l'enseignant, assumer un objet d'enseignement, l'identifier, rapprocher ces productions des connaissances des autres (culturelles, ou programme), indiquer qu'elles peuvent resservir. [...] Cette activité est incontournable : on ne peut pas réduire l'enseignement à l'organisation d'apprentissages. (Brousseau, 1998b, p. 311)

L'enseignant doit prendre compte des apprentissages des élèves et les situer relativement au savoir reconnu. Il doit établir ce qui est acceptable, valable, à retenir et ce qui ne l'est pas.

Dans l'institutionnalisation, [le maître] définit les rapports que peuvent avoir les comportements ou les productions « libres » de l'élève avec le savoir culturel ou scientifique et avec le projet didactique : il donne une lecture de ces activités et leur donne un statut. (Brousseau, 1998b, p. 92)

Lorsque l'élève reconnaît l'objet de connaissance et que l'enseignant reconnaît l'apprentissage de l'élève, il devient question d'institutionnalisation. L'institutionnalisation se caractérise par cette double reconnaissance dans laquelle « on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir » (Brousseau, 1998b, p. 282).

Une fois construite et validée, la nouvelle connaissance va faire partie du répertoire didactique de la classe. Après cette dernière dialectique, la connaissance est étiquetée

comme quelque chose que tous les élèves sont censés savoir et peuvent appliquer.
(Gibel & Blanquart-Henry, 2017, p. 46)

Si l'élève apprend lorsqu'il acquiert une nouvelle connaissance et parvient à l'utiliser dans un contexte approprié, l'institutionnalisation va plus loin en faisant le lien entre la connaissance produite par l'élève et le savoir reconnu par la communauté de mathématiciens. Le répertoire de connaissance est transformé par l'ajout ou la modification d'une connaissance.

Selon Giroux (2013), l'institutionnalisation peut être favorisée par l'élargissement du caractère d'utilité des connaissances. En effet, si « chaque situation marque une forme d'utilité différente de la connaissance » (Giroux, 2013, p. 77), alors elle propose d' « assurer une variété des situations mathématiques et de leurs supports » (Giroux, 2013, p. 77).

Au-delà des phases d'institutionnalisation, Giroux (2013) affirme que, dans le contexte d'adaptation scolaire, des institutionnalisations partielles peuvent être nécessaires pour donner des repères contextualisés aux élèves afin de poursuivre l'apprentissage en situation. Elles pourraient notamment faire le lien entre ce qui a déjà été produit par les élèves dans une situation et ce qui est attendu dans la situation. Ces moments d'institutionnalisation partielle peuvent donner accès à une structure interne, une cohérence dans les régularités mathématiques à identifier. La considération de phases d'institutionnalisation faisant le lien entre ce que les élèves produisent et les exigences de la situation dans laquelle ils se trouvent pourrait permettre aux élèves de reconnaître plus facilement l'utilité des connaissances utilisées et de s'approcher de la reconnaissance du savoir en question, surtout dans le cas où une situation est interrompue dans le temps et se poursuit à un autre moment.

2.2.5 Contrat didactique

Un autre élément fondamental de la TSD est le contrat didactique, un des concepts les plus importants de la théorie de Brousseau. Il « joue [...] un rôle central dans l'analyse et la construction des situations pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques » (Brousseau, 1998b, p. 295) et permet d'interpréter les productions et les comportements des élèves selon leur relation avec l'enseignant et le savoir.

Ainsi la notion de contrat didactique est apparue comme une nécessité théorique imposée par l'effort pour comprendre les dysfonctionnements profonds dans les processus d'apprentissage. Elle fait le lien entre situations adidactiques et situations didactiques, et met en lumière le processus de dévolution, en même temps qu'elle prépare l'avènement du concept d'institutionnalisation. (Brousseau, 1998b, p. 296)

Ce contrat, tout à fait implicite, est essentiel et omniprésent ; dès que l'élève est à l'école, il sait qu'il y est pour apprendre et que l'enseignant y est pour lui enseigner. Le contrat didactique s'intéresse particulièrement à la spécificité du contenu, soit « la connaissance mathématique visée » (Brousseau, 1998b, p. 61). Ainsi, les interactions enseignement-apprentissage seront au cœur de nos analyses en ce qui concerne le savoir (Giroux, 2014).

Dans une situation d'enseignement préparée et réalisée par un maître, l'élève a en général pour tâche de résoudre le problème (mathématique) qui lui est présenté, mais l'accès à cette tâche se fait à travers une interprétation des questions posées, des informations fournies, des contraintes imposées qui sont constantes de la façon d'enseigner du maître. Ces habitudes (spécifiques) du maître attendues par l'élève et les comportements de l'élève attendus par le maître, *c'est le contrat didactique*. (Brousseau, 1980, p. 181)

Le rôle et les responsabilités des deux protagonistes sont ainsi déterminés dans l'activité mathématique. « Alors que l'enseignant cherche à engager l'élève dans une activité mathématique sans qu'il lui soit possible de révéler les termes précis de ce qui est attendu, l'activité mathématique de l'élève se déploie en cherchant à produire ce qui est implicitement attendu » (Giroux, 2014, p. 37). C'est le paradoxe sur lequel s'appuie le concept de contrat. L'étude du cas de Gaël a mis en lumière que ces conditions paradoxales des situations didactiques rendent « à la fois nécessaire et impossible à tenir tout *contrat didactique* effectif » (Brousseau, 2009, p. 3). En faisant signe à l'élève d'agir d'une certaine façon pour comprendre et apprendre une notion, les conditions didactiques seront nécessairement affectées et nuiront à la construction du sens de la notion visée : « si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir » (Brousseau, 2010, p. 9).

C'est un simulacre de contrat, une illusion, intenable et nécessairement rompue, mais une fiction nécessaire pour permettre aux deux protagonistes, l'enseignant et l'apprenant, d'engager et de mener à son terme la dialectique didactique. (Brousseau, 2009, p. 1)

La recherche d'un équilibre, à travers les échanges, peut toutefois mener à un éventuel évanouissement du savoir. Fondamental pour l'étude de fonctionnements didactiques, le concept de contrat didactique permet aussi la compréhension des difficultés d'apprentissage sous l'angle de la TSD. Puisque l'ensemble des comportements du maître attendus par l'élève, et inversement, régissent le rapport de l'élève à l'objet d'enseignement et aux situations didactiques, alors il devient pertinent de s'y intéresser pour comprendre les échecs desdits élèves.

Si le contrat didactique permet à certains élèves d'entrer dans la situation en jeu, ne pourrait-il pas, à l'inverse, en empêcher d'autres d'y accéder? C'est d'ailleurs à partir de l'étude de cas d'élèves en échecs électifs en mathématiques que le concept de contrat didactique émerge (Giroux, 2013). Ce concept nous permettra non seulement de comprendre les difficultés des élèves, mais aussi d'identifier certains phénomènes d'enseignement qui pourraient avoir un impact sur leur apprentissage.

2.2.5.1 Effet de contrats

En étudiant les relations maître-élève-savoir dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, Brousseau a noté des phénomènes propres à l'enseignement des mathématiques auprès d'élèves en difficulté comme des effets de contrat didactique.

Les effets de contrat sont liés aux contextes familiaux et scolaires qui structurent une sorte d'habitus scolaire spécifique se traduisant par une plus ou moins grande flexibilité dans l'usage des règles enseignées. (Roiné, 2010, p. 79)

L'histoire scolaire des élèves les positionnera différemment face aux implicats du contrat, ce qui facilitera ou complexifiera leur apprentissage. Pour réaliser une étude du processus d'apprentissage de la notion d'équivalence d'expressions algébriques auprès d'élèves en difficulté, il importe de tenir compte de ces effets de contrats, notamment lors de l'animation des interventions orthopédagogiques, mais aussi dans l'analyse des interactions didactiques qui s'ensuit. Brousseau donne de nombreux exemples d'effets de contrat.

Un premier effet de contrat didactique est l'effet Topaze, qui a lieu lorsque l'enseignant veut enseigner à l'élève et obtenir un certain comportement de sa part, mais que l'élève refuse son rôle

d'apprenant. Il arrive donc que l'enseignant modifie la situation pour obtenir le comportement attendu « au meilleur prix ». Il y a une négociation implicite des conditions dans lesquelles l'élève trouvera la réponse. Dans ce contexte, l'élève attend de se faire proposer un contrat qui lui exige le moins d'effort possible. L'enseignant, quant à lui, tente de maintenir le sens de la connaissance à acquérir en changeant les conditions de la situation proposée, « [...] le maître choisit les questions auxquelles [la réponse déterminée] peut être donnée » (Brousseau, 1998b, p. 52). L'effet Topaze apparaît lorsque les connaissances visées sont modifiées.

Cette expression caractérise l'une des issues de cette gestion considérée comme un échec au moins provisoire : le professeur obtient de l'élève qu'il donne la réponse souhaitée à la question qu'il a posée mais en fait, il le fait en remplaçant « surnoisement » la question initiale par une autre qui ne lui est pas du tout équivalente (elle est beaucoup plus fermée). Cette réponse est produite à l'aide de connaissances triviales, sans rapport avec celles que la question était supposé activer. Le professeur dissimule ainsi formellement le fait qu'il donne la réponse à l'élève pour sortir d'une situation sans issue et poursuivre la relation didactique. (Brousseau, 2009, p. 11-12)

Le contrat didactique précise les significations profondes de l'action. C'est le résultat des actions répétées du contrat qui influencent le sens qu'un enfant donne à une situation et qui influence les activités d'un enfant dans un processus donné, il s'agira ici d'un apprentissage. En modifiant la situation, son sens ne sera plus le même, le contrat didactique se verra modifié et l'élève n'accordera pas le même sens à ses apprentissages (Brousseau, 2009). Comme nous nous intéressons entre autres à la dimension sémantique de l'apprentissage de la notion d'équivalence d'expressions algébriques, nous porterons une attention particulière à cet effet de contrat qui pourrait altérer le sens de l'apprentissage en question.

Un professeur qui « simplifie sa tâche en faisant en sorte que l'élève obtienne la bonne réponse par une banale lecture des questions du professeur et non par une authentique activité mathématique spécifique sur la structure proposée » (Brousseau, 1998b, p. 356) serait un exemple d'effet Topaze.

Dans le même ordre d'idée, lorsqu'un enseignant évite un débat de connaissance ou évite de constater l'échec de son élève et accepte une production d'élève en lui attribuant une valeur fausse, il s'agit d'une forme d'effet Topaze, que l'on qualifie d'effet Jourdain. Une bonne réponse obtenue par un agissement banal est encouragée par l'enseignant, qui traduit l'obtention du bon résultat par

la compréhension d'une notion, en l'expliquant par un discours savant plutôt qu'en reconnaissant que la connaissance n'a pas de sens pour l'élève. On identifie un effet Jourdain, par exemple, lorsque « l'élève obtient la bonne réponse par une banale reconnaissance et le professeur atteste la valeur de cette activité par un discours mathématique et épistémologique savants » (Brousseau, 1998b, p. 356).

Cet effet de contrat nous rappelle qu'une bonne réponse n'est pas toujours le résultat d'une compréhension juste et profonde d'une notion ; elle peut aussi être faussement ou banalement obtenue.

Un effet Topaze peut aussi se produire par l'usage abusif d'analogies. Si les analogies permettent aux élèves de résoudre des problèmes en leur trouvant des similitudes, leur usage abusif peut aussi nuire à l'apprentissage en question. Lorsque les élèves ne s'engagent pas dans la situation d'enseignement, lorsqu'ils échouent dans leurs apprentissages, il arrive que l'enseignant propose la solution et que les élèves se voient recommencer l'apprentissage avec quelques variables modifiées. Plusieurs élèves cherchent alors, lors ces nouvelles situations, des indices, des signes que l'enseignant a produit de manière implicite pour obtenir la première réponse. Ils cherchent des analogies entre les problèmes qui leur ont été proposés en transférant des techniques, des algorithmes, des modes de faire, sans une implication spécifique dans le problème en question. Les élèves peuvent être tentés d'éviter un travail de recontextualisation et de redécontextualisation en appliquant des procédés qui leur économiseraient la connaissance spécifique de la notion. « Ils obtiennent la solution par une lecture des indications didactiques et non pas un investissement du problème. » (Brousseau, 1998b, p. 55)

Cet effet de contrat doit surtout être pris en considération lors de la planification des situations. Les situations didactiques seront réfléchies de sorte qu'elles soient suffisamment variées pour être intéressantes sur le plan didactique. Elles ne devront pas permettre aux élèves d'économiser la connaissance en jeu, mais impliqueront plutôt un réel engagement de leur part dans la recherche de solution.

Si l'usage abusif d'analogies peut mener les élèves à produire des réponses erronées, il peut aussi les mener à la bonne réponse (effet Diénès). La généralisation d'une méthode dans des situations dont la structure fondamentale est très similaire peut permettre à des élèves d'obtenir une bonne réponse à un problème, sans qu'ils ne cherchent réellement à résoudre la situation en jeu. Il est possible d'identifier un effet Diénès lorsque l'élève reconnaît des similitudes impertinentes entre les différents types de structures des situations et généralise une règle inutile à la construction du savoir sans comprendre le sens de l'apprentissage à faire.

Par son « processus psychodynamique » Diénès propose un modèle d'apprentissage fondé sur la reconnaissance des similitudes entre des « jeux structurés » puis sur la schématisation et la formalisation de ces « généralisations » guidées. (Brousseau, 1998b, p. 66)

Sa méthode didactique prend appui sur la généralisation de structures et peut mener à une confusion entre la structure de la situation, de la tâche, de la connaissance et du processus intellectuel. Diénès propose une « méthode de présentation de savoirs favorisant la mémorisation » (Brousseau, 1998b, p. 67) dans laquelle les généralisations ne sont pas toujours celles espérées, les plus pertinentes. « Dans tous les cas, les méthodes d'enseignement de Diénès permettraient d'obtenir des résultats, mais pour des raisons différentes de celles avancées dans la théorie qui les accompagnait. » (Brousseau, 1998b, p. 68) Ce phénomène tend à atténuer le contrôle que l'élève a sur le problème, ne permet plus la dévolution du problème et peut mener l'enseignant à lui faire deviner la règle à généraliser pour éviter que le jeu devienne un exercice d'application d'une règle enseignée.

L'effet Diénès rappelle le « principe de variabilité » où les variables qui ne modifient pas la situation mathématique sont au premier plan, prennent une place importante et changent d'un exercice à l'autre, alors que les variables pertinentes à la situation, celles qui sont en lien avec les conditions spécifiques du contenu, ne sont pas prises en considération et restent identiques.

Ainsi, peut-on réellement dire qu'un élève a acquis une connaissance lorsqu'il produit une réponse par généralisation d'une structure qui n'est pas liée au savoir si on ne tient pas compte de la spécificité du contenu ?

Sarrazy (1996) constate, comme Brousseau, des différences de contrat dans les classes régulières et en adaptation scolaire et introduit la notion de « sensibilité au contrat didactique » qui permet d'étudier les différentes réactions des élèves.

Sarrazy a étudié la sensibilité des élèves au contrat didactique par les « différences de positionnements des élèves à l'égard des implicats mobilisés au sein du contrat didactique » (2002, p. 2). En d'autres termes, certains élèves sont plus sensibles aux attentes implicites de l'enseignant et « décodent » des implicats de la relation didactique.

Cette plus grande sensibilité repose sur un principe d'accommodation dans lequel l'enfant se plie aux exigences et aux règles plus facilement :

l'enfant doit se plier aux exigences familiales ou sociétales en fonction d'un système de règles qui lui est imposé et sur lequel il ne semble pas avoir d'action possible – du moins « officiellement » (Sarrazy, 2002, p. 11).

Cependant, le style d'enseignement peut modifier cette sensibilité par un type de contrat didactique plus « dévoluant » et moins « institutionnalisant » (Giroux, 2013).

Sarrazy montre que ce phénomène est spécifique aux mathématiques ; cette sensibilité au contrat didactique ne serait donc pas liée aux compétences langagières des élèves.

Dans cette optique, nous retenons que certains élèves s'engagent dans les tâches mathématiques proposées plus aisément que d'autres, selon le type de contrat didactique proposé, et que la relation élève-enseignant-savoir doit être au cœur de nos interprétations didactiques pour mieux comprendre le processus d'apprentissage des élèves.

2.3 Les difficultés d'apprentissage en mathématiques

La théorie de Brousseau nous apporte plusieurs éléments d'analyse pour notre étude de l'apprentissage des mathématiques auprès d'élèves en difficulté. Dans cette section, nous expliciterons la compréhension des difficultés d'apprentissage selon la théorie de Brousseau et nous présenterons d'autres phénomènes d'enseignement reconnus comme étant spécifiques au domaine de l'adaptation scolaire, en exposant de quelle façon ces phénomènes peuvent constituer

des obstacles didactiques involontaires et entrainer des difficultés d'apprentissage. Finalement, nous nous intéresserons à la spécificité du contenu du savoir relatif à la notion d'équivalence en algèbre dans le contexte du développement de la pensée algébrique.

2.3.1 Les difficultés d'apprentissage selon la TSD

La construction des connaissances des élèves se réalise au sein des interactions élève-milieu-enseignant lorsqu'ils acceptent la responsabilité de s'engager dans une situation didactique. Autrement, un refus d'engagement ne permettra pas à l'élève d'entrer dans un « conflit des savoirs ».

Plusieurs stratégies d'évitement de ce « conflit de savoirs » ont été identifiées, dont l'évitement de type hystéroïde, correspondant au comportement de Gaël (apprenant en échec électif). Brousseau interprète les causes de son comportement d'évitement lorsqu'il est confronté à une situation conflictuelle avec ledit savoir afin d'intervenir sur la situation :

Il était possible de proposer des explications psychologiques à ce comportement, mais elles ne donnaient pas de moyen de corriger les évitements, et elles centraient l'intérêt des chercheurs sur une caractéristique de l'enfant ou sur ses compétences, au lieu de rester au niveau des comportements et des conditions qui le provoquaient ou qui pouvaient le modifier. Ces comportements manifestent le refus, conscient ou non, de la part de l'enfant, d'accepter sa part de responsabilité dans l'acte de décider en situation didactique et donc d'apprendre, face à un adulte. (Brousseau, 2009, p. 1)

Il poursuit :

Une approche classique des enfants en difficulté consiste à identifier les erreurs ou les fautes qu'ils commettent et si elles se répètent, à les interpréter comme des anomalies du développement de l'élève, ou comme des carences dans leurs acquisitions auxquelles il convient de remédier parce « qu'elles vont rendre l'enfant incapable à accéder aux mathématiques ». [...] L'approche que nous tentons ici est très différente, il s'agit d'agir au niveau des situations d'apprentissage, d'en manipuler les caractéristiques pour obtenir les changements d'attitudes souhaités. Nous utilisons pour cela la théorie des situations. Cette théorie prend en compte, comme objet principal, les conditions du milieu qui rendent nécessaires et plausibles les comportements des sujets et les manifestations des connaissances. (Brousseau, 2009, p. 9)

En agissant sur les conditions du milieu, sur les contraintes d'une situation, sur des variables didactiques, Brousseau montre que l'élève pourra accepter sa part de responsabilité et s'engager dans une situation d'apprentissage. Les difficultés d'apprentissage ne seraient, en ce sens, non pas inhérentes aux élèves, mais dépendraient plutôt des conditions de la situation proposée.

Selon Brousseau (1998a), pour qu'un élève apprenne une notion, celle-ci doit être liée à d'autres notions et ce sont ces liens qui construiront son sens. Elle sera jugée « apprise » lorsqu'elle deviendra utilisée et utilisable, lorsqu'elle permettra de résoudre un problème, de répondre à des contraintes. C'est donc par la résolution de problèmes que les élèves accorderont un sens à une notion. Si son utilisation permet au sujet de résoudre des problèmes dans un domaine d'action pendant un certain temps, cet apprentissage deviendra un appui, mais aussi un obstacle à la résolution de problèmes ultérieurs, dont les contraintes seront différentes. En effet, lorsque cette connaissance n'est plus adaptée à une situation, elle devient un obstacle, qui se manifeste, s'observe sous la forme d'une erreur commise. Brousseau avance donc qu'un obstacle est en soi une connaissance « fausse, voire incomplète » (Brousseau, 1998b, p. 135), mais connaissance tout de même, qui empêche de donner du sens à une situation. Le didacticien fait la différence entre obstacle et difficulté. Selon lui, « c'est parmi les « difficultés » qu'il faut chercher les indices d'un obstacle » (Brousseau, 1998b, p. 135). Brousseau caractérise l'obstacle par quatre conditions : il s'agit d'une connaissance (1), ayant un domaine de « validité » (2), qui résiste et réapparaît (3), et qui est constitutif du savoir (au sens où il laisse des traces dans le système de connaissances) (4). Les obstacles à l'apprentissage seraient d'origine ontogénique, didactique ou épistémologique. On dira des obstacles d'origine ontogénique qu'ils sont relatifs au développement de l'élève, notamment à ses limites neurophysiologiques, des obstacles d'origine didactique qu'ils se rapportent au système éducatif, aux choix didactiques et aux méthodes d'enseignement, et des obstacles d'origine épistémologique qu'ils sont ceux qui constituent l'objet de savoir, qui traversent l'histoire des concepts en question, qui sont « intrinsèques aux connaissances » (Brousseau, 1998a, p. 8). C'est donc, plus particulièrement, à travers cette perspective que nous concevons les difficultés d'apprentissage en mathématique des élèves.

2.3.2 Phénomènes d'enseignement spécifiques à l'adaptation scolaire

Il est sans surprise que les élèves considérés en difficulté d'apprentissage, que nous avons décrits, sont identifiés de la sorte pour leur parcours scolaire marqué par l'échec. Favre (2004) distingue trois composantes de l'échec : l'échec préalable, l'échec effectif et l'échec potentiel. Les échecs préalables sont ceux qui n'ont pas permis aux élèves de poursuivre leur éducation dans la classe régulière car l'enseignement reçu n'a pas pu être mené à son terme. Les échecs préalables renvoient aux difficultés antérieures que l'élève a vécues. L'échec effectif décrit les « difficultés manifestées par les élèves dans la situation d'enseignement » (Favre, 2004, p. 114) et l'échec potentiel renvoie aux difficultés possibles que l'enseignant anticipe. Non seulement le parcours des élèves en difficulté d'apprentissage est marqué par l'échec, mais l'enseignement qui leur est destiné aussi. Favre explique que puisque l'enseignement ordinaire n'a pas permis aux élèves de réussir, alors les enseignants sont contraints à employer de nouvelles méthodes (Favre, 2004). Nous avons d'ailleurs énoncé dans le premier chapitre que l'enseignement auprès d'élèves en difficulté est caractérisé par des injonctions institutionnelles.

Les enseignants sont tenus « d'adapter leurs interventions aux besoins et aux caractéristiques des élèves présentant des difficultés » (Giroux, 2014, p. 38) ce qui a des effets sur la spécificité du contenu d'enseignement.

Pour enseigner auprès d'élèves en difficulté, les professeurs sont ainsi placés devant une injonction paradoxale dans la mesure où, premièrement, les prescriptions dont ils sont les destinataires (une expertise mentaliste) ne leur donnent aucun moyen d'agir et en second lieu, dans la mesure où ils ne peuvent concrètement agir selon les règles d'une raison d'agir qui ne prend pas en compte leur implication dans le monde pratique. (Roiné, 2015, p. 6)

C'est dans ce contexte particulier, où tous les élèves qui sont sous la responsabilité de l'enseignant sont reconnus en difficulté et que les enseignants doivent agir différemment, qu'apparaissent certains phénomènes d'enseignement qui ont été étudiés comme étant spécifiques au domaine de l'adaptation scolaire. On y compte le temps didactique ralenti, la logique de l'adaptation, le morcellement des objets de savoir, la cécité didactique et l'effet pharmakéia. Ces phénomènes sont spécifiques à l'adaptation scolaire dans la mesure où :

Ils témoignent de la manière dont les contenus d'enseignement sont affectés, transformés par des intentions d'enseignement adapté à une catégorie d'élèves pour lesquels l'enseignement ordinaire, avec ses méthodes, aurait échoué. (Giroux, 2013, p. 64)

Nous décrivons ces phénomènes dans cette section afin de mieux comprendre ce qui caractérise l'enseignement auprès d'élèves en difficulté et les impacts qu'ils peuvent avoir sur les apprentissages des élèves. Nous croyons en l'importance de les reconnaître pour éviter ces effets d'enseignement, mais aussi pour en tenir compte dans l'analyse du processus d'apprentissage des élèves dans le cas où ces phénomènes d'enseignement se présenteraient.

2.3.2.1 Temps didactique ralenti : centration sur le repérage et le traitement de l'erreur et surcharge de la mémoire didactique

Giroux (2013) fait état de plusieurs phénomènes d'enseignement concernant le domaine de l'adaptation scolaire. Parmi ceux-ci, elle rapporte que la centration sur le repérage et le traitement de l'erreur ralentissent le temps didactique.

L'enseignante cherche à repérer toutes les difficultés et erreurs rencontrées par les élèves pour les traiter à chaud. Favre (1997) et Giroux (2004) ou encore plus récemment, Toullec-Théry (2006) montrent que cette centration sur le repérage et le traitement de l'erreur mène souvent à la dissolution, l'évanouissement du savoir en jeu. (Giroux, 2013, p. 64)

Lorsque l'enseignant s'attend à des erreurs de la part de l'élève identifié en difficulté, ce processus dirige alors les efforts d'enseignement à leur identification afin de les corriger. Le temps didactique d'enseignement est modifié par des moments plus longs dédiés aux erreurs, généralement ignorées ou moins traitées dans les classes régulières, qui mettent plutôt l'accent sur les bonnes réponses des élèves.

Cherel (2005) montre aussi le phénomène de surcharge de la mémoire didactique qui se traduit par « le maintien de la coexistence de faits didactiques sur un même objet (termes, méthodes, référence à des matériels divers) qui compromet les changements de statuts de connaissances (Brousseau et Centeno, 1991) » (Giroux, 2013, p. 64). Les élèves, plutôt que de faire évoluer leurs connaissances au fil de leurs apprentissages, gardent en mémoire tout ce qui leur a été transmis. Autrement dit, les dispositifs d'enseignement ne favoriseraient pas les processus de décontextualisation

nécessaires permettant de reconnaître l'utilité des connaissances hors des situations spécifiques au sein desquelles elles ont été construites.

Malgré le fait que ces phénomènes ne sont pas nécessairement spécifiques à l'adaptation scolaire, ils ne peuvent pas être ignorés lors de l'interprétation des difficultés des élèves. Les élèves de l'adaptation scolaire poursuivent leur parcours scolaire au sein des dispositifs qui affectent les rapports aux savoirs qu'ils élaborent.

2.3.2.2 Logique de l'adaptation scolaire : économie du savoir et algorithmisation des objets de savoirs

La progression du temps didactique est aussi marquée par l'économie du savoir et l'algorithmisation des objets de savoirs (René de Cotret & Giroux, 2003).

Dans le domaine de l'adaptation scolaire particulièrement, on remarque que certains savoirs ne sont pas traités au profit de savoirs jugés plus essentiels. Les contenus du programme de formation jugés prioritaires sont choisis au détriment de ceux jugés « moins importants » ou « trop difficiles ».

Conne (2003) a analysé la situation d'un autre angle. Il relève un surinvestissement des savoirs dans l'enseignement auprès d'élèves dits en difficulté.

[La sélection d'objets de savoirs jugés prioritaires] permet d'étirer le temps d'enseignement consacré aux objets de savoirs considérés essentiels selon des formes de travail relativement routinières et fortement algorithmisées. (Giroux, 2013, p. 64)

Cherel relève par exemple que « les objets de savoirs liés à la numération et les opérations additives sont surinvestis par rapport à la géométrie et la mesure » (Giroux, 2013, p. 64) dans la classe spéciale.

On remarque aussi que la présentation de l'enseignant est davantage dirigée vers la règle qui permettra de résoudre les problèmes. La prévalence de l'exposé de la règle est appelée algorithmisation des objets de savoirs.

Cela s'illustre d'une part, par un exposé qui tend plus directement vers la règle qui permettra de résoudre les problèmes et, d'autre part, par le découpage du savoir en unités temporelles plus étanches ou ne s'appuyant pas sur ce qui a été vu. Le contenu de l'exposé tend donc à se réduire à la désignation des objets suffisants pour produire le plus « facilement » possible des réponses correctes, tout en laissant une trace de la progression de l'enseignement et de l'apprentissage. (René de Cotret & Giroux, 2003, p. 166)

Nous pouvons lier ce phénomène d'enseignement à une conduite considérée typique des élèves en difficulté en situation de mathématique identifiée en 1993 par Perrin-Glorian : le refuge dans les algorithmes. Elle explique que si les élèves en difficulté se réfugient dans les algorithmes, ce serait parce qu'ils seraient « plus sécurisants et moins fatigants » (Perrin-Glorian, 1993, p. 44). Giroux (2014) envisage une manière de contourner ces conduites à travers l'élaboration de situations où la dévolution déjoue ces conduites et dans lesquelles les situations offrent une rétroaction plus rapide.

Ces deux marqueurs (économie du savoir et algorithmisation des objets de savoirs) dénotent non seulement un ralentissement du temps didactique, mais caractérisent aussi un « contrat didactique spécifique aux enseignants en adaptation scolaire » (Roiné, 2010, p. 5). Ce type de contrat est, entre autres, le résultat des injonctions ministérielles qui demandent aux enseignants d'adapter leurs enseignements aux caractéristiques des élèves (Roiné, 2010). L'enseignant cherche alors à combler le déficit de ses élèves au lieu de tenir compte de la spécificité du contenu à enseigner. C'est ce que Giroux décrit comme la logique de l'adaptation.

2.3.2.3 Morcellement des objets de savoir

Giroux a étudié un autre phénomène qui peut mener à l'évanouissement du savoir : le morcellement des objets de savoir. Ce phénomène se traduit par le « découpage d'une tâche en plusieurs sous-tâches » (Giroux, 2014, p. 37) : l'objet d'enseignement final est vu comme l'addition de plusieurs parties plus élémentaires. Ce faisant, la complexité de l'objet global, son sens et l'enjeu mathématique sont perdus. L'hypothèse qui sous-tend ce phénomène serait qu'apprendre chaque partie isolée et morcelée du savoir donne accès à la complexité de l'objet global. Cependant, en réduisant le savoir à l'apprentissage de plusieurs petits objets, nous pouvons nous attendre à une perte de sens.

2.3.2.4 Cécité didactique d'enseignants en adaptation scolaire

Roiné (2009), pour sa part, a identifié un autre phénomène qu'il a nommé « cécité didactique ». Giroux le décrit comme étant, pour les enseignants, un « point aveugle dans la conception des leçons et leur pilotage » (2013, p. 81).

L'idéologie psychologisante qui prévaut dans l'institution scolaire rendrait d'une certaine manière les enseignants « aveugles » aux propriétés didactiques pouvant être à l'origine des erreurs ou difficultés des élèves. Les difficultés rencontrées par les élèves sont interprétées par les enseignants dans l'optique des caractéristiques cognitives supposées des élèves, et ce, sans intégrer une analyse des conditions didactiques sous lesquelles elles se sont manifestées. (Giroux, 2014, p. 37)

Cette ignorance semble être associée à une certaine « cécité didactique » ; à savoir l'impossibilité pour les enseignants de considérer les paramètres (didactiques et situationnels) sur lesquels ils pourraient effectivement agir pour aider leurs élèves. L'aide est considérée en soi ; non interrogée didactiquement, elle contribue à compliquer le travail des élèves au point que celui-ci devienne incertain. (Roiné, 2018, p. 105)

Ce phénomène révèle la prégnance de la psychologie cognitive en tant que cadre théorique de référence pour l'intervention auprès des élèves en difficulté. Cette prise de position, non justifiée théoriquement, a un impact sur la nature des dispositifs d'intervention mis en place pour l'enseignement des savoirs spécifiques, d'où l'importance de la prise en compte des conditions didactiques pour l'interprétation des conduites des élèves.

2.3.2.5 Effet pharmakéia

Dans le but de faciliter les conditions d'apprentissage des élèves en difficulté, des dispositifs pédagogiques sont généralement mis en place. Dans le contexte de l'adaptation scolaire, ces dispositifs passent de moyens à objets mêmes d'apprentissage. L'objectif d'apprentissage passe donc de la compréhension d'un concept ou d'une notion à une « bonne » utilisation d'un outil permettant d'exécuter ou de reproduire une certaine procédure. « Dans ce sens, les possibilités de décision, de justification et d'identification de la connaissance sont compromises pour les élèves. » (Roiné, 2015, p. 11) En effet, l'élaboration de connaissances requiert, dans le contexte de notre posture épistémologique, des interactions des élèves avec un milieu didactique propice à l'apprentissage de certains savoirs spécifiques permettant la prise de décisions. Ces interactions

collaborent à la reconnaissance de l'utilité des connaissances au sein des situations d'enseignement élaborées. L'effet décrit par Roiné met en évidence un remplacement de l'enjeu d'enseignement : les interactions didactiques sont remplacées par l'étude du dispositif pédagogique.

L'effet recherché est perdu, et les conditions de l'apprentissage sont complexifiées. Roiné nomme ce phénomène « effet *pharmakéia* » puisque l'intention de favoriser l'apprentissage se trouve à nuire à l'élève. Ce « phénomène par lequel les dispositifs d'aide produisent l'effet contraire à celui qui est recherché » (Giroux, 2013, p. 81) peut être considéré comme un sous-effet de cécité didactique.

Mary relève d'autres phénomènes dans l'analyse d'une intervention individuelle comme des effets de contrat :

la centration de l'élève sur l'intervenante, la centration sur l'énoncé du problème et la naissance d'un malentendu, la centration de l'intervenante sur le manque d'autonomie de l'élève et un glissement métacognitif, une impasse ou un questionnement sans réponse (2003, p. 107).

Bien que notre recherche porte sur les processus d'apprentissage des élèves et que nous n'analyserons pas l'acte d'enseignement en soi, la prise en considération de ces phénomènes nous paraît justifiée dans le sens où leur compréhension pourra améliorer la mise en place des situations d'enseignement-apprentissage et permettre une meilleure compréhension des difficultés des élèves.

2.3.3 Spécificité du savoir algébrique

Dans cette section, nous étudierons la spécificité de contenu de savoir algébrique afin de mieux comprendre les difficultés des élèves dans l'apprentissage de l'équivalence d'expressions algébriques. Pour ce faire, nous présenterons les principales ruptures épistémologiques qui existent dans le rapport arithmétique-algèbre et aborderons les concepts de sens, de dénotation et d'équivalence ainsi que certains aspects du rapport sémantique/syntaxique caractérisant le développement des élèves lors de l'apprentissage de l'algèbre.

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, qu'il n'existe pas de définition de la pensée algébrique unanime pour les chercheurs. Cependant, certains d'entre eux proposent des caractéristiques qui la distinguent de la pensée arithmétique.

Radford décrit la pensée algébrique à l'aide de trois caractéristiques :

- (1) indeterminacy: the problem involves not-known numbers (unknowns, variables, parameters, etc.);
- (2) denotation: the indeterminate numbers involved in the problem have to be named or symbolized. [...] One can use alphanumeric signs - but not necessarily. [...];
- (3) analyticity: the indeterminate quantities are treated as if they were known numbers (2014, p. 260).

Arcavi en ajoute une quatrième, soit « An ability to manipulate and also to 'read through' symbolic expressions as two complementary aspects in solving algebraic problems » (2005, p. 43). Il évoque ainsi l'importance, à la fois, de se détacher du sens des expressions symboliques pour effectuer un travail syntaxique efficace, mais aussi d'accorder du sens aux expressions symboliques pour interpréter le résultat des manipulations.

Squalli (2015) précise que la pensée algébrique est une manière de penser une activité mathématique :

Sur le plan opératoire, la pensée algébrique se déploie au moyen d'un ensemble de raisonnements particuliers et de manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (par exemple, une tendance à voir l'égalité comme une relation d'équivalence, une tendance à laisser les opérations en suspens ; une tendance à symboliser et à opérer sur des symboles ; une tendance à avoir une vision structurale (voir par exemple une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul). (Squalli, 2015, p. 347)

On peut donc constater que la construction du savoir algébrique scolaire s'effectue au sein d'un ensemble de ruptures entre le savoir arithmétique et le savoir algébrique à élaborer.

2.3.3.1 Ruptures arithmétique-algèbre

La pensée algébrique se construit en opposition avec certaines formes caractérisant le travail arithmétique et qui pourraient représenter des obstacles à l'apprentissage des élèves, plus

particulièrement chez les élèves en difficulté. On compte, parmi les obstacles conceptuels à franchir pour maîtriser l’algèbre (Demonty, 2013), la nature des raisonnements, le sens des expressions et des symboles, la double approche des expressions et le statut accordé à l’écrit.

2.3.3.1.1 Nature des raisonnements (valeurs connues → relations)

Le passage de l’arithmétique à l’algèbre implique un changement quant à la nature du raisonnement nécessaire à la résolution des problèmes mathématiques.

L’algèbre représente une rupture par rapport à l’arithmétique puisqu’elle constitue un détour formel : l’arithmétique consiste à choisir de manière intuitive les inconnues intermédiaires ainsi que les données et les opérations à utiliser pour les calculer, tandis que l’algèbre consiste à extraire des relations sans s’engager dans un calcul, puis à traiter de manière quasi-automatique, sans souci du sens, les équations ainsi obtenues.

En outre, l’algèbre demande le plus souvent qu’on manipule des nombres inconnus, ce qui est contre-intuitif : l’élève répugne à raisonner et à opérer sur des nombres inconnus ou sur des nombres quelconques. (Vergnaud, 1988, p. 195)

Le raisonnement arithmétique est fondé sur des données connues d’une situation afin de trouver une valeur inconnue. Il suffit de déterminer les données et les opérations nécessaires pour trouver l’information recherchée en faisant un calcul à la fois et en produisant une solution « pas à pas » (Barallobres, 2020). Chaque « pas », en d’autres mots chaque calcul, est porteur de sens dans la situation et produit une réponse intermédiaire, soit une donnée utile pour le calcul suivant. En algèbre, il faut plutôt s’appuyer sur les relations qui existent entre des valeurs connues et inconnues, renoncer au sens du contexte et des calculs, utiliser un traitement algébrique formel basé sur les propriétés des opérations pour résoudre un problème et recontextualiser le résultat pour lui donner du sens. Ainsi, les « pas » intermédiaires entre l’explicitation des relations entre les données et l’expression finale perdent leur sens contextuel. En arithmétique, on raisonne à partir de données connues, tandis qu’en algèbre, on raisonne à partir des relations entre les données, qu’elles soient connues ou pas.

La résolution d’équations est un exemple paradigmatique de l’écart existant entre le raisonnement arithmétique et le raisonnement algébrique. Filloy et Rojano (1989) ont étudié la coupure du statut de l’égalité dans la résolution d’équations et font le même constat par rapport à la nature du raisonnement utilisé. Un raisonnement arithmétique permettant de résoudre une équation de type

$x + a = b$, $ax = b$ ou $ax + b = c$ opère sur les données connues en inversant les opérations à faire, tandis qu'un raisonnement algébrique associé à la résolution d'équations du type $ax + b = cx + d$ ou $a(bx + c) + d = e(fx + g) + h$ opère sur des inconnues à travers l'utilisation de propriétés de sorte à conserver l'ensemble solution. Il n'y a alors nul autre choix que d'opérer avec une quantité inconnue en la soustrayant des deux côtés du signe d'égalité (Vergnaud, 1988).

Ce changement dans la nature du raisonnement est une difficulté pour les élèves qui cherchent à réinvestir leurs connaissances arithmétiques pour résoudre des situations algébriques.

2.3.3.1.2 Évolution du statut des objets et des symboles

Selon Kieran (1992), le statut des objets, comme les signes d'égalité, les signes d'opérations et les lettres comptent parmi les ruptures entre l'arithmétique et l'algèbre. Même s'ils étaient déjà utilisés en arithmétique, leur statut change et ils obtiennent un nouveau sens dans la pensée algébrique.

Statut du signe d'égalité

L'interprétation du signe égal fait partie des changements importants qui marquent une évolution entre la pensée arithmétique et la pensée algébrique. Le symbole d'égalité a un double statut, parfois annonçant un résultat (surtout en arithmétique), d'autres fois désignant une relation d'équivalence entre deux expressions (fondamentalement en algèbre). Grugeon-Allys et Pilet (2017) considèrent le statut de l'égalité comme un critère pour l'entrée dans l'algèbre.

Un manque de travail sur l'égalité comme relation d'équivalence peut être un obstacle à l'entrée dans l'algèbre, voire être un vecteur d'inégalités scolaires si l'institution le laisse implicite et à la charge des élèves (Castela, 2008; Rochex et Crinon, 2011). Le statut de l'égalité mobilisé par l'élève est un critère pertinent pour évaluer les potentialités d'arrimage de l'arithmétique à l'algèbre. (Grugeon-Allys & Pilet, 2017, p. 115)

La nature du signe d'égalité en algèbre, en tant que relation, favorise la compréhension du caractère structural des expressions algébriques (Grugeon-Allys & Pilet, 2017), alors qu'il est plutôt traité comme un symbole procédural en arithmétique (Kieran *et al.*, 2016). L'égalité doit aussi être utilisée au sens d'équivalence lorsqu'une expression est transformée à partir de propriétés (Grugeon-Allys & Pilet, 2017).

Vergnaud fait valoir qu'en algèbre, le signe d'égalité représente « l'existence d'une relation symétrique et transitive » (1988, p. 190). Kieran (2016) va dans le même sens en ajoutant la propriété de réflexivité.

This equality-equivalence aspect of algebra (see Kieran 1989, 1997) requires sound knowledge of the properties of equality: the reflexive (the same is equal to the same), the symmetric (equality of the left and right sides of each equation), and the transitive (if $a = b$ and $b = c$, then $a = c$). (Kieran *et al.*, 2016, p. 28)

Dans une réponse comme $23 + 32 = 55 - 15 = 40$, production élémentaire d'un élève qui utiliserait le signe d'égalité pour annoncer un résultat, Vergnaud rapporte que « la symétrie et la transitivité sont violées » (1988, p. 190). Selon lui, il faut présenter aux élèves des situations qui permettent de comprendre et de respecter ces deux critères au même moment que l'introduction aux règles syntaxiques qui permettent de conserver l'égalité.

Statut des symboles et le sens des expressions

D'ailleurs, le sens des expressions composées de symboles opératoires évolue aussi dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre. Dans le cadre de l'arithmétique, la présence de signes opératoires dans une expression numérique (par exemple $5 + 6$) est perçue comme une réponse qui n'est pas « finie » (la réponse est 11) ; pourtant en algèbre, l'expression $x + 3$ peut être autant la description d'un processus opératoire (ajouter 3 à une inconnue) que la réponse à un calcul algébrique (par exemple la somme de $2x + 6$ et $-x - 3$). Davis (1975) l'aborde comme le dilemme *process-product*, Collis (1974) l'a étudié comme l'*acceptance of lack of closure* et Chevallard (1989) fait référence à une règle de simplification qui demanderait de finir les calculs.

En arithmétique, une chaîne de nombres et d'opérations ne sont pas considérées comme des objets, mais comme des procédures pour produire une réponse. Dans les pratiques algébriques, les symboles écrits font sens, indépendamment des procédures qu'ils représentent dans la résolution de problèmes. (Barallobres, 2005, p. 161)

Le sens des expressions et des symboles varie selon le contexte dans lequel on se situe (Sfard, 1991). On passe alors d'une vision dynamique à une vision statique. Dans l'approche dynamique, les expressions et symboles sont traités comme des procédures à effectuer. De chaque côté du

symbole d'égalité seraient perçus l'opération à effectuer, et de l'autre la réponse. Dans l'approche statique, le signe d'égalité indique plutôt une équivalence à traiter comme un objet en soi.

Pour donner pleinement sens aux transformations algébriques, les élèves doivent élargir leurs conceptions à propos des symboles, qui doivent être considérés tantôt de manière dynamique, tantôt de manière statique (Vlassis, 2005). (Demonty, 2013, p. 53)

Pour développer un sens du symbole, Arcavi (2005) suggère que les élèves doivent développer une habileté à manipuler et à « lire à travers » les expressions symboliques pour résoudre des problèmes algébriques, ces deux habiletés étant complémentaires. En effet, une lecture des symboles doit être effectuée avant de sauter à la manipulation des expressions pour qu'elle ait du sens et les manipulations doivent avoir pour but la lecture d'une nouvelle expression pour que les transformations soient pertinentes.

Dans la caractérisation du sens du symbole qu'Arcavi (2005) fait, il explique aussi l'importance de réaliser que les symboles peuvent avoir des rôles différents selon leur contexte d'utilisation et de développer un sentiment intuitif qui distingue leurs différences. Le statut de la lettre en est un bon exemple, la lettre obtenant différents rôles selon le contexte dans lequel elle est utilisée.

Statut des lettres

Non seulement le statut de la lettre évolue dans le passage de la pensée arithmétique à la pensée algébrique, elle peut aussi avoir différents rôles dans chacun des champs. Dans le premier champ, la lettre est utilisée pour désigner « une dimension (longueur, largeur, hauteur, etc.) dans les formules de calcul de périmètres, d'aires, ou bien pour désigner des objets géométriques simples (points, droites, cercles, angles) » (Germi, 1997, p. 62), c'est un outil de désignation. La lettre peut faire référence à une unité de mesure (m pour mètre), à des figures géométriques (triangle ABC), à des points géométriques (point C) ou encore à des objets physiques ($5p$ pour cinq pommes) ou mathématiques (l'abréviation h pour la hauteur) (Janvier, 1996). Dans le champ algébrique, elle désigne plutôt un nombre manquant, inconnu dans une équation, ou une variable. Lorsque la lettre est utilisée en tant qu'inconnue, elle désigne une valeur fixe qui n'est pas connue dans le contexte où deux expressions algébriques seraient équivalentes, tandis que la variable est une quantité qui varie (en fonction d'une autre). Janvier (1996), Collis (1972) et Filloy et Rojano (1989) distinguent

l'utilisation de la lettre comme inconnue dans l'arithmétique et l'algèbre, en affirmant que si un élève doit trouver la hauteur h , l'utilisation de la lettre ne suffit pas pour qualifier son usage d'algébrique.

In other words, this chapter assumes that an algebraic (mental) use of letters corresponds minimally to the ability (and willingness) on the part of the student to imagine that a letter stands for a number that has to be discovered and to the competence of the student to perform the required "arithmetical" calculations on those numbers. Collis has, in fact, judiciously pointed out that the use of algebraic operations (arithmetic operations on letters as unknowns) requires that the solver carry out his operations even though the results obtained after each intermediary operation do not appear in closed form or as a single symbol or symbolic entity. (Janvier, 1996, p. 226)

En ce sens, l'équation $3m + 2m = 5m$ ne permettrait pas d'éliminer l'hypothèse que l'élève ait pu utiliser un raisonnement arithmétique pour trouver la somme. En revanche, si l'élève est en mesure de montrer qu'il utilise la lettre comme une inconnue en l'interprétant comme une inconnue et en lui accordant ce sens, alors nous pourrions être convaincus que la lettre est utilisée selon son interprétation algébrique, d'où l'importance d'observer les processus de résolution de problème des élèves selon Janvier (1996). Par exemple, si Rose a trois fois plus de bonbons que Marie, que Jean a deux fois plus de bonbons que Marie et, qu'ensemble, Rose et Jean ont 50 bonbons, alors un élève pourrait déterminer le nombre de bonbons qu'a Marie. En faisant un travail algébrique, l'élève pourrait déterminer, parce que $3m + 2m = 50$, la valeur de m , soit 10. La lettre aurait donc le statut d'inconnue au sens algébrique.

La lettre peut aussi obtenir le statut d'indéterminée lorsqu'elle n'est plus pensée comme un nombre. Par exemple, dans la formule $A = bxh$, A est la valeur indéterminée de l'aire, b , de la base et h , de la hauteur. La lettre obtient ce statut lorsqu'elle représente un nombre quelconque pour établir une relation entre des données ou une identité.

Dans le cadre fonctionnel, la lettre peut faire référence à un ensemble connu de nombres, soit une variable. La variable désigne alors « un nombre indéterminé appartenant à un ensemble déterminé de nombres – un intervalle » (Germi, 1997, p. 63). Germi distingue les variables dépendantes et indépendantes dans la définition de fonctions, la variable dépendante étant une quantité, une valeur

qui dépend d'une autre, soit la variable indépendante : « les changements de l'une induisent les changements de l'autre » (Germi, 1997, p. 61).

La lettre est considérée en tant que paramètre lorsque la lettre représente un nombre quelconque, mais supposé connu par rapport à d'autres lettres (qui ont le statut de variable, d'inconnue, d'indéterminée), comme dans la formule $y = ax + b$, où a et b sont des paramètres et x et y sont des variables. La lettre comme paramètre est utilisée dans des contextes où sa valeur est connue. Elle peut prendre différentes valeurs, mais n'en aura qu'une seule à la fois.

Ces différents statuts de la lettre peuvent représenter des obstacles épistémologiques à l'apprentissage du symbolisme algébrique et engendrer des difficultés à résoudre une situation aux élèves. Janvier explicite de quelle façon cette rupture peut être source de difficultés dans le domaine algébrique :

For instance, if 2 boys and 5 girls are abbreviated by 2b and 5g the same way 5 grams and 7 meters are often abridged to "5g" and "7m," then introducing a letter to denote a variable or unknown number clashes with the use of letters to stand for a unit or an individual. (Janvier, 1996, p. 231)

Plus récemment, de nouveaux statuts de la lettre ont été proposés à partir des interprétations des élèves. On y compte la lettre ignorée, lorsque l'élève ne tient pas compte de sa présence dans son calcul ($3m + 2 = 5m$) (Bourdier-Savioz, 2008), et la lettre évaluée, lorsque les élèves attribuent une valeur numérique à la lettre dans une expression pour obtenir un résultat numérique (Vlassis & Demonty, 2002).

2.3.3.1.3 Caractère procédural et structural

Parmi les sauts conceptuels que les élèves doivent faire pour « appréhender pleinement l'algèbre », Demonty (2013) aborde la difficulté des élèves à traiter les expressions algébriques selon une vision à la fois procédurale et structurale. La vision procédurale étant prédominante au primaire, les élèves ont tendance à s'appuyer sur le « principe d'achèvement des calculs » pour traiter les expressions numériques. « Selon ce «principe», l'expression «4 + 8» ne saurait, en calcul numérique, figurer comme réponse, le calcul, à ce stade, étant «inachevé». » (Chevallard, 1984, p. 73) Lorsque les élèves réécrivent une expression numérique pour faire apparaître une « information monstrative

pertinente » (Chevallard, 1984), c'est plutôt l'approche structurale qui est sollicitée. « Selon Sfar (1991), les notions mathématiques peuvent être conçues comme des processus (procédural) ou comme des objets (structural), ces deux caractères cohabitent lors de l'activité mathématique. » (Squalli, Oliveira, *et al.*, 2020, p. 76)

La flexibilité entre le caractère procédural et structural des expressions sera un critère pertinent pour analyser l'entrée des élèves dans l'algèbre (Grugeon-Allys & Pilet, 2017).

2.3.3.1.4 Statut accordé à l'écrit

Un autre obstacle conceptuel à la maîtrise de l'algèbre, selon Demonty (2013), est que le statut accordé à l'écrit n'est plus le même en arithmétique et en algèbre. Si les calculs, en arithmétique, sont notés pour conserver une trace des opérations effectuées, accordant un pouvoir essentiellement désignatif au langage numérique (Chevallard, 1984), ils deviennent un outil de preuve dans le domaine algébrique. Les calculs ne désignent plus seulement le résultat d'opérations, mais montrent une information de plus. Le passage d'une expression algébrique à une autre permettra alors de faire apparaître une information pertinente puisque deux expressions équivalentes désignent la même chose, mais ne montrent pas la même chose. L'algèbre permettra donc de mieux conserver l'information monstrative (Barallobres, 2005). D'ailleurs, l'écriture algébrique permet non seulement d'exprimer des formules et d'opérer avec ces formules, mais elle permet aussi « de généraliser la démarche de résolution à toute une famille de problèmes (Harper, 1996) » (Demonty, 2013, p. 53) et ainsi de « trouver la solution de tous les problèmes du même genre » (Barallobres, 2005, p. 12).

À travers l'écriture et la manipulation d'expressions algébriques apparaissent des expressions algébriques équivalentes. Pour mieux comprendre notre étude du processus d'apprentissage de la notion d'équivalence d'expressions algébriques, il importe donc de s'intéresser aux notions de sens et de dénotation.

2.3.3.2 Sens, dénotation et équivalence d'expressions algébriques

La capacité à raisonner en passant d'une écriture à une autre, tout en s'assurant de conserver la même valeur de l'expression (Grugeon-Allys & Pilet, 2017) joue un rôle essentiel dans la transition

entre l'arithmétique et l'algèbre. Le sens et la dénotation prennent alors une place fondamentale dans le travail sur l'équivalence d'expressions algébriques.

La notion de dénotation d'une expression algébrique a été définie par Drouhard (1992) en référence à la distinction établie par Frege (1971) entre sens (Sinn) et dénotation (Bedeutung). Par exemple, les expressions numériques $47+14$, $47+3+11$, $50+11$ mettent en jeu des signes différents, mais réfèrent à un même nombre (61), leur dénotation. En revanche, les expressions n'ont pas le même sens puisqu'elles ne relèvent pas du même point de vue et vont donner lieu à des stratégies efficaces de calcul et la mobilisation de propriétés opératoires. (Grugeon-Allys & Pilet, 2017, p. 116)

Ainsi, $34 + 30$ et $60 + 4$, ou encore $2x + 1$ et $x + (x + 1)$ ont la même dénotation, mais un sens différent. Cette réécriture s'appuie sur le sens des expressions et sur les propriétés des opérations et des nombres tout en faisant appel à la relation d'équivalence (Grugeon-Allys & Pilet, 2017).

Sackur, Drouhard, Maurel et Pécal (1997) reprennent la distinction établie par Frege (1971) entre sens et dénotation d'une expression algébrique. Ces auteurs soutiennent que modifier le sens tout en conservant la dénotation des expressions et des équations est une des caractéristiques fondamentales du travail dans le langage algébrique et ce qui lui donne de la puissance. Le fait que différentes écritures avec la même dénotation aient des sens différents est appuyé sur une propriété fondamentale du langage algébrique, soit la possibilité d'extraire des informations à partir de l'écriture d'une expression (la valeur monstrative selon Chevallard). (Squalli, Oliveira, *et al.*, 2020, p. 100)

C'est l'utilisation pertinente de règles algébriques, la dimension syntaxique, qui permet de conserver la dénotation d'une expression. Lorsque les élèves travaillent sur l'équivalence d'expressions, les auteurs décrivent une rupture de sens, qui peut aussi être interprétée comme la construction d'un autre sens. Selon Radford (2003a), les élèves ne reconnaissent pas que $(n + 1) + n$ et $(n + n) + 1$ ont la même dénotation, que les expressions réfèrent au même objet. De la même façon, il montre que lorsque les élèves représentent la relation entre certaines quantités et produisent l'expression $(x + 2) + (x + 5) + x$, ceux-ci peuvent refuser de regrouper les termes similaires de l'expression produite (Radford, 2003b) en restant collés au contexte. Ainsi, $3x + 7$ ne serait pas une réponse acceptable pour ces derniers à cause d'une rupture avec le sens original.

Si Frege (1971) distingue le sens et la dénotation, Chevallard (1984), quant à lui, fait référence à la valeur désignative et la valeur monstrative des expressions. La valeur désignative est l'objet auquel renvoient des écritures numériques ou algébriques. Par exemple, les expressions notées $(n + 1) + n$ et $(n + n) + 1$ ont la même dénotation, soit $2n + 1$. Des écritures équivalentes désignent un même nombre, un même objet. Ces écritures ont aussi une valeur monstrative puisqu' « elles ne donnent pas les mêmes informations ou propriétés » (Squalli, Oliveira, *et al.*, 2020, p. 76). Des expressions équivalentes, écrites différemment pourront donc donner des informations différentes, tout en ayant la même dénotation, ce qui peut jouer sur le contrôle du sens dans un problème contextualisé.

Pour Arzarello, Bazzini et Chiappini (2001), le sens d'une expression algébrique dépend du domaine de connaissances où elle habite (sens contextualisé). La potentialité de l'algèbre consiste dans les multiples sens qui sont incorporés par la même formule et/ou qui peuvent être obtenus par des manipulations syntaxiques. Le «drame» didactique réside, pour les auteurs, dans le déséquilibre entre sens, dénotation et expressions : le statut des signes algébriques devient obscur pour les étudiants (plus encore lorsque ce statut est changé selon une « convenance » didactique !). Dans l'enseignement actuel de l'algèbre, l'introduction d'artefacts didactiques pour «concrétiser» des objets mathématiques (tuiles, jetons, etc.) renforce ce déséquilibre : la notion de dénotation est pratiquement ignorée; les interactions entre sens et dénotation n'ont pas de sens dans ce cadre. (Barallobres, 2005, p. 66)

L'enseignement de l'équivalence des expressions algébriques requiert ainsi la mise en œuvre (souvent implicite) des concepts de sens et de dénotation.

Lemoine, Conne et Brun (1993) considèrent le langage symbolique comme un « outil de pensée et d'action ». La rupture de sens expliquée ci-haut, qui est en fait la construction d'un autre sens, doit donc se construire au niveau symbolique pour accéder à la manipulation algébrique (Barallobres, 2005).

Selon Balacheff (2001), un certain sens d'une économie de la pratique permettrait d'expliquer pourquoi les élèves seraient prêts à abandonner le sens initial d'une expression pour le manipuler dans le domaine syntaxique et développer un nouveau signifié, distinct du sens initial.

Deux expressions algébriques, écrites différemment, seront donc dites équivalentes lorsqu'il sera possible, par des transformations mathématiques pertinentes, appuyées sur les propriétés des opérations, de passer d'une écriture à une autre. Un travail sur l'équivalence d'expressions algébriques exige donc la transformation d'une expression algébrique en une autre, transformation qui devra être validée par l'utilisation des propriétés spécifiques des opérations.

2.3.3.3 Activités de généralisation

Certains types de tâches sont reconnus pour faire un travail sur l'équivalence d'expressions algébriques, notamment les activités de généralisation de motifs, qui visent non seulement l'identification et l'expression d'une régularité, mais qui ont aussi le potentiel de travailler la comparaison d'expressions algébriques à travers des manipulations syntaxiques et l'utilisation de différents outils sémiotiques.

Vlassis, Demonty et Squalli (2017) proposent que les activités de généralisation permettent de travailler le sens de l'égalité et des opérations avant même le secondaire. Plusieurs auteurs (Coppé, 2020; Kieran *et al.*, 2016; Lee, 1996; Radford, 2014; Squalli, 2015) vont dans le même sens en octroyant une place de choix à ces activités pour favoriser l'entrée des élèves dans la pensée algébrique. Les activités de généralisation permettent aussi, au secondaire, d'utiliser des techniques algébriques et d'utiliser une indéterminée pour exprimer la généralité. L'expression de la généralité est habituellement formulée par un langage non conventionnel, mais qui se développe au fil des activités pour que les élèves utilisent un langage conventionnel (Vlassis *et al.*, 2017). Les activités de généralisation permettent aussi de comprendre l'intérêt de mobiliser des variables et des formules (Coppé, 2020).

Radford (2006, 2008) caractérise la généralisation à partir de l'aspect phénoménologique et sémiotique. Il distingue trois types de raisonnements, soit l'induction naïve, la généralisation arithmétique et la généralisation algébrique. Les deux premiers types de raisonnements s'inscrivent dans la pensée arithmétique et sont symbolisés par des calculs, des phrases, des substituts symboliques et des annotations écrites sur un dessin. Le dernier, la généralisation algébrique, s'inscrit dans le domaine algébrique et peut prendre la forme d'une généralisation factuelle, contextuelle ou symbolique. La généralisation factuelle symbolise l'inconnue par un nombre,

l'indéterminée n'est donc pas nommée, mais à ce stade l'élève envisage des cas potentiels en identifiant des actions sur des nombres. Par exemple, un élève qui exprime sa généralisation par « on doit faire $4 + 1 = 5$ et après on doit faire $5 \cdot 4 = 20$ » (Vlassis *et al.*, 2017, p. 148) symbolise l'inconnue par 4. D'ailleurs, de nombreux auteurs (Mary, Squalli, & Schmidt, 2014; Radford, 2014; Squalli, 2015; Vlassis *et al.*, 2017) estiment que le recours aux lettres n'est pas nécessaire pour produire des généralités algébriques. La généralisation contextuelle symbolise l'inconnue par substitut symbolique en conservant l'ordre des opérations produites dans la situation, par exemple $(x + 1) \cdot 4$. La généralisation symbolique est, quant à elle, celle qui est détachée du contexte de la situation et dont l'écriture mathématique est conventionnelle, $4(x + 1)$ par exemple. Radford (2008) distingue la généralisation arithmétique et la généralisation algébrique principalement par l'utilisation du motif à généraliser ; dans la généralisation arithmétique, le motif sert à déterminer des cas rapprochés à celui-ci du motif, tandis que dans la généralisation algébrique il est plutôt utilisé pour déduire des cas éloignés du cas présenté, qu'il ne serait pas possible de déduire arithmétiquement. Par exemple, à partir d'une séquence de figures (figures 1, 2 et 3), il serait possible de trouver la figure 100 algébriquement.

Generalizing a pattern algebraically rests on the capability of grasping a commonality noticed on some particulars (say $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$); extending or generalizing this commonality to all subsequent terms ($p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \dots$), and being able to use the commonality to provide a direct expression of any term of the sequence. (Radford, 2008, p. 84)

Ce faisant, la généralisation de motifs favoriserait le passage à une pensée algébrique, solliciterait l'expression de régularités à partir de quantités indéterminées, variables, et permettrait de faire un travail sur le sens de l'équivalence en impliquant des techniques algébriques et différents outils sémiotiques selon le contexte.

2.3.3.4 Rapport sémantique-syntaxique

Comme la TSD « considère l'évolution de la stratégie d'un élève dans une situation donnée comme le critère servant à l'évaluation d'un apprentissage » (Barrier, 2008, p. 35), nous prendrons appui sur le rapport sémantique/syntaxique pour analyser ces stratégies et étudier l'apprentissage de l'équivalence des expressions algébriques. Chevallard (1984, 1989) et Grugeon (1997) font partie des auteurs qui considèrent l'articulation de ces dimensions nécessaire pour l'apprentissage de

l'algèbre élémentaire. « Grugeon a montré que la compétence algébrique s'évalue par les capacités techniques renvoyant à la dimension syntaxique et par les capacités mettant en jeu l'interprétation, le sens et la dénotation et faisant appel à la dimension sémantique. » (Kouki, 2017, p. 45) Comme Chevallard, nous emploierons les termes de syntaxe et de sémantique au sens de la logique mathématique.

Ainsi, si la dimension syntaxique renvoie à « l'aspect formel du langage logique ou d'une langue formelle » (Kouki, 2017, p. 47), elle fera référence, dans le domaine mathématique, aux signes utilisés pour former et transformer des expressions, algébriques par exemple. Les signes (symboles, parenthèses, lettres) sont combinés selon des règles syntaxiques qui créent le langage mathématique.

La dimension sémantique concerne l'interprétation et le sens donné aux signes et aux expressions employés. Elle permet, par exemple, d'interpréter les symboles utilisés et les formules produites dans le contexte particulier de production. « Étant donné un langage formalisé, la sémantique logique étudie les interprétations possibles des symboles utilisés ainsi que les relations entre les diverses interprétations des formules utilisées. » (Kouki, 2017, p. 49)

La résolution de tâches mathématiques sollicite donc les dimensions sémantique et syntaxique et Kouki (2017) propose que le contexte dans lequel la tâche s'inscrit aura une influence sur les techniques utilisées pour leur résolution. Barallobres souligne d'ailleurs que « l'algèbre est un instrument qui a ses « normes » ou « règles » qui déterminent son fonctionnement, qui permettent, par exemple, de contrôler la validité mathématique du travail au niveau du modèle » (2005, p. 16) ce qui justifie l'étude des dimensions sémantique et syntaxique de l'apprentissage de l'algèbre.

2.3.3.5 Les difficultés des élèves dans le domaine algébrique

Comme explicité plus tôt, le passage de l'arithmétique à l'algèbre est caractérisé par de nombreux obstacles conceptuels. Nombreux sont les auteurs qui ont étudié ces obstacles qui posent des difficultés aux élèves dans leur apprentissage de l'algèbre. Demonty (2013) en relève plusieurs, dont la modélisation mathématique de problèmes. Chevallard décrit le processus de modélisation en trois étapes :

1. On définit le système que l'on entend étudier, en en précisant les «aspects» pertinents par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système, soit l'ensemble des variables par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il nous apparaît. Nous désignerons ces variables par les lettres x, y, z, a, b, c , etc., nous réservant de revenir sur la question - majeure - que soulève cet usage un peu plus loin.
2. On construit alors le modèle à proprement parler en établissant un certain nombre de relations, IR, IR', IR'' , etc., entre les variables prises en compte dans la première étape, le modèle du système à étudier étant l'ensemble de ces relations.
3. On «travaille» le modèle ainsi obtenu, dans le but de produire des connaissances relatives au système étudié, connaissances qui prennent la forme de nouvelles relations entre les variables du système. (Chevallard, 1989, p. 53)

Le défi que pose cette modélisation peut être confondu avec la simple traduction d'un énoncé mathématique en écriture symbolique du problème, mais la modélisation fait appel à un processus plus complexe qui nécessite plusieurs étapes et une compréhension plus approfondie de la situation-problème (Demonty, 2013).

Radford (2003b) traite de ces écritures symboliques en parlant de *narrative symbolique*. L'histoire du problème est racontée en symboles mathématiques et on ne s'intéresse plus aux personnages de l'histoire, mais plutôt aux relations qui lient les éléments du problème. On peut alors se demander de quelle façon les élèves attribuent un sens à ces expressions symboliques produites pour désigner les relations d'une situation. Les auteurs (Demonty, 2013; Oliveira *et al.*, 2017) notent la difficulté des élèves à passer d'un langage courant (énoncé d'un problème) à un langage symbolique (écriture symbolique des expressions algébriques) exprimant les relations fondamentales.

Selon Oliveira *et al.* (2017), les élèves ont de la difficulté à reconnaître les relations entre les objets, ce qui pose un obstacle à la mise en équation des relations dans la résolution de problèmes. Lorsqu'elles ne sont pas identifiées ou ne sont pas comprises, de mauvaises relations sont dégagées. On constate ici une difficulté à passer d'un langage naturel à une interprétation mathématique. « L'explicitation des relations pourrait favoriser un certain contrôle sur l'interprétation du problème » (Oliveira *et al.*, 2017, p. 172).

Pour Bednarz et Charbonneau (1992), la procédure algébrique est caractérisée par

le type d'engagement dans le problème, la distance prise lors du traitement des grandeurs et des contextes, la considération de certaines règles générales de

manipulation qui guident la résolution, la désémantisation du langage, le type de réflexion sur le nombre et les opérations et le caractère analytique du raisonnement et de la recherche d'un procédé général (Oliveira *et al.*, 2017, p. 159).

La construction et la manipulation de l'égalité sont aussi des difficultés pour les élèves (Oliveira *et al.*, 2017). Une mauvaise compréhension du sens de l'égalité ne leur permettra pas de mettre en équation les relations adéquatement.

Les élèves peuvent aussi avoir des difficultés à opérer sur les relations dégagées du problème. Certains emploieront encore des procédures arithmétiques, qu'ils connaissent mieux et qui sont porteuses de sens. Cette façon de procéder les oblige cependant à garder en mémoire les relations du problème.

Barallobres (2005, p. 11) rapporte les « difficultés rencontrées par les élèves dans l'interprétation d'écritures algébriques et dans la représentation algébrique de problèmes », mais aussi « les difficultés des élèves à sortir du contexte de référence (en particulier par rapport au contrôle) » (2005, p. 18) signalées par Lins (2000) et Arzarello, Bazzini et Chiappini (2000).

Barallobres identifie aussi des « difficultés des élèves par rapport aux différents niveaux des connaissances impliquées dans cette étape (identification, articulation et écriture de relations, transformations d'écritures, reconnaissance du caractère « explicatif » de certaines de ces articulations et transformations) » (2005, p. 232), ainsi que des difficultés liées à « la généralisation de la méthode et l'écriture symbolique » (2005, p. 275).

L'entrée dans la problématique des écritures pose à chaque moment des difficultés qui provoquent des bifurcations de la situation que le milieu originel ne peut pas nécessairement accueillir. Les lettres apparaissent davantage comme des « moyens de traduction » des relations déjà établies que comme des éléments d'un langage opérationnel qui permet d'identifier les dites relations. Comme Radford (2003) l'a explicité, les symboles algébriques sont une représentation des actions : « enlever 1 à d » est un acte lié au contexte du problème, à la question d'exprimer le prédécesseur de d dans la séquence proposée. Opérer avec ces écritures, comme le professeur le propose, exige un détachement du contexte pour entrer dans un problème syntaxique. (Barallobres, 2005, p. 287)

Ainsi, compte tenu de la spécificité du savoir algébrique et des difficultés des élèves à traiter l'équivalence d'expressions algébriques, et plus particulièrement à articuler les dimensions sémantique et syntaxique, il importa d'analyser la pertinence de certaines situations didactiques élaborées dans le but de favoriser l'articulation de ces deux dimensions.

2.4 Objectifs spécifiques

Afin d'analyser le rôle que peut jouer l'articulation des dimensions sémantique et syntaxique dans l'apprentissage *de la notion d'équivalence d'expressions algébriques des élèves en difficulté* d'apprentissage dans un contexte d'intervention orthopédagogique, nous nous intéresserons plus particulièrement à l'étude de certains concepts évoqués dans ce chapitre. Nous établissons donc deux objectifs spécifiques à notre recherche :

- Explorer la nature des interactions didactiques et des difficultés des élèves autour du thème de l'équivalence d'expressions algébriques ;
- Comprendre les choix didactiques qui favorisent le développement de la pensée algébrique.

CHAPITRE 3

MÉTHODOLOGIE

Afin d'analyser le développement de la pensée algébrique des élèves en difficulté de deuxième secondaire lors de l'apprentissage de la notion d'équivalence d'expressions algébriques, nous avons mené trois séances d'intervention orthopédagogique d'une durée de 45 minutes auprès de deux groupes de quatre élèves en difficulté d'apprentissage au sein d'une école spécialisée située à Montréal.

Les séances ont été menées à la troisième étape de l'année scolaire et ont été réalisées en petits groupes afin de favoriser les interactions entre les élèves. Les situations d'enseignement-apprentissage ont été choisies de sorte qu'elles permettent à l'orthopédagogue de dévoluer le savoir aux élèves et qu'elles offrent un milieu d'apprentissage dont le potentiel est didactiquement intéressant. Les entretiens ont été transcrits et analysés dans le but d'explorer le rôle des dimensions sémantique et syntaxique dans la compréhension de la notion d'équivalence d'expressions algébriques auprès de ces élèves.

Dans ce chapitre, nous présenterons des éléments de l'ingénierie didactique et de la recherche collaborative qui ont inspiré la mise en place de la recherche. Nous décrirons ensuite notre échantillonnage, le déroulement de la collecte de données, ainsi que les trois situations choisies. Nous terminerons le chapitre par les considérations éthiques.

3.1 Ingénierie didactique

Une première étape de notre méthodologie de recherche s'appuie sur l'ingénierie didactique d'Artigue, caractérisée par « un schéma expérimental basé sur des «réalisations didactiques» en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement » (Artigue, 1988, p. 285-286). Cette méthodologie se situe dans le registre des études de cas, ses modes de validation sont essentiellement internes et ses objectifs peuvent être variés (Artigue, 1988). Dans notre cas, il ne s'agirait pas d'une séquence complète d'enseignement, mais d'un ensemble de situations organisées de manière à pouvoir être considérées comme une « partie » d'une séquence d'enseignement.

Cette méthodologie se décline en quatre phases. D'abord, des analyses préalables sont faites, concernant les contenus d'enseignement visés, l'enseignement usuel et ses effets, et le champ de contraintes relevant des caractéristiques du savoir, des connaissances disponibles chez les apprenants et des caractéristiques du système d'enseignement. Évidemment, les objectifs spécifiques de l'enseignement sont aussi pris en compte.

Ensuite, à partir de cette analyse préliminaire, le chercheur peut s'attarder à la conception et à l'analyse *a priori* des situations.

Traditionnellement, cette analyse qui comporte une partie descriptive et une partie prédictive est une analyse centrée sur les caractéristiques d'une situation a-didactique que l'on a voulu constituer et dont on va chercher à faire la dévolution aux élèves:

— on décrit les choix effectués [...] et les caractéristiques de la situation a-didactique qui en découlent,

— on analyse quel peut être l'enjeu de cette situation pour l'élève, en fonction en particulier des possibilités d'action, de choix, de décision, de contrôle et de validation dont il dispose, [...],

— on prévoit des champs de comportements possibles et on essaie de montrer en quoi l'analyse effectuée permet de contrôler leur sens et d'assurer en particulier que les comportements attendus, s'ils interviennent, résulteront bien de la mise en œuvre de la connaissance visée par l'apprentissage. (Artigue, 1988, p. 294)

L'analyse de chaque situation spécifique nous amène à poser des questions telles « quel est le problème à résoudre ? », « qu'est-ce que l'élève doit savoir pour entrer dans le jeu et pour le gagner ? », « quel contrôle l'élève a-t-il sur son action ? ».

S'ensuit la phase d'expérimentation, lors de laquelle les données sont collectées, puis la phase d'analyse *a posteriori*. Cette dernière phase s'appuie sur les données collectées (observations et productions d'élèves), données qui peuvent être complétées par des questionnaires et des entretiens.

Notre recherche est inspirée de cette méthodologie principalement pour la mise en œuvre des phases d'analyses préalables (réalisées dans le cadre théorique), d'analyse *a priori* des situations (que nous ferons dans ce chapitre) et finalement d'expérimentation et d'analyse *a posteriori* (données que nous présenterons dans le chapitre suivant).

3.2 Recherche collaborative

Notre démarche de recherche adoptera aussi certains éléments caractérisant la recherche collaborative. La recherche collaborative est née au Québec d'une double préoccupation : celle de rapprocher le monde de la recherche et le monde des pratiques professionnelles et celle de mieux comprendre les pratiques en contribuant à la formation des enseignants (Bednarz, 2015). Ce courant de recherche, qui s'inscrit dans les recherches participatives, est donc aussi un dispositif de formation professionnelle. Contrairement à la recherche-action, la visée de la recherche collaborative n'est pas le changement de pratique, mais plutôt une meilleure compréhension des pratiques, et la construction d'un nouveau savoir lié à la pratique par le croisement du regard des chercheurs et des praticiens (Bednarz, 2015).

Bien que l'intention principale de la recherche collaborative ne soit pas les modifications des pratiques d'enseignement, l'élaboration de situations doit tenir compte à la fois des intérêts du chercheur et de ceux du praticien afin de répondre à leurs préoccupations et intérêts singuliers (Bednarz, 2015).

Au moment de la co-opération, autrement dit de la co-construction, il s'agira de créer un espace de collecte de données pour le chercheur, mais aussi un espace de questionnement pour le praticien (Bednarz, 2015). Le processus de co-construction est un élément central de cette démarche collaborative.

Dans la démarche, ce processus de co-construction prend place dans une activité réflexive aménagée, une zone interprétative partagée entre chercheurs et praticiens où les argumentations et les ressources des uns et des autres sont mobilisés, où les praticiens en collaboration avec des chercheurs viennent éclairer un certain objet lié à cette pratique. (Bednarz, 2015, p. 174)

Puis, il sera question de double fécondité et de double retombée pour la co-production qui permettra, sur le plan scientifique, de développer de nouveaux savoirs, et sur le plan de la pratique, de mieux comprendre la pratique dans le but de l'améliorer, permettant entre autres aux praticiens de s'engager dans la diffusion du savoir produit par un partage de connaissances avec d'autres enseignants ou futurs enseignants (Bednarz, 2015).

Rôle du chercheur et des praticiens

En tant que chercheurs, nous nous ferons interprètes de la parole des praticiens, nous participerons à la construction du sens et régulerons des interactions dans la phase d'analyse réflexive, sans toutefois tomber dans une posture d'expert ou de formateur (Bednarz, 2015). Les praticiens, quant à eux, seront reconnus pour leur compétence différente, soit leur expertise en contexte. « Ils participent à un espace de réflexion, ils investiguent un certain objet de leur pratique et y trouvent un intérêt en tant qu'enseignants. » (Bednarz, 2015, p. 177)

Ainsi, nous travaillerons en collaboration avec l'orthopédagogue des élèves de deuxième année du secondaire de l'école afin de croiser nos perspectives sur la manière d'aborder la question de l'apprentissage de l'équivalence des expressions algébriques.

La collaboration des praticiens sera essentielle autant dans la construction des situations d'enseignement-apprentissage que dans leur mise en place et leur analyse. Les praticiens pourront apporter des informations précieuses sur des connaissances des élèves en lien avec l'enseignement donné en classe préalablement à notre expérimentation. Le projet pourra ainsi favoriser un échange et des interactions qui pourraient permettre à l'orthopédagogue de porter un autre regard sur les difficultés de leurs élèves et repenser les moyens d'aborder ces difficultés. En effet, ce courant de recherche a des retombées sur le développement professionnel des enseignants par le questionnement que suscitent les interactions chercheurs-praticiens.

Même si les analyses préalables du contenu d'apprentissage ont été réalisées avant la rencontre de l'orthopédagogue, les premières rencontres avec l'orthopédagogue nous ont permis d'échanger sur le sujet. La chercheuse a alors pu présenter les éléments théoriques jugés les plus importants et la praticienne a pu partager son expertise en contexte d'enseignement et des informations importantes sur le travail qui a déjà été fait avec les élèves.

3.3 Échantillonnage

3.3.1 Sélection des participants

L'échantillon de deux groupes de quatre élèves a été fait à partir de groupes naturels. Ces groupements de travail étaient déjà formés par l'orthopédagogue, en concertation avec

l'enseignante de la classe à partir des besoins des élèves comme elles ont l'habitude de le faire. En effet, il arrive régulièrement que l'orthopédagogue retire un groupe d'élèves ayant le plus de difficultés pour travailler dans son bureau. Ces groupes sont habituellement évolutifs et flexibles, ce qui signifie qu'il peut y avoir des changements à travers le temps. Cette première sélection de participants aurait donc pu être révisée en cours de route par l'inclusion, mais aussi l'exclusion de certains participants, mais ça n'a pas été le cas.

Le projet a été présenté aux élèves par l'orthopédagogue et la chercheuse afin de favoriser l'établissement d'un lien de confiance dans les deux classes dont les enseignants avaient accepté de participer au projet. Il s'agissait d'une première rencontre pour les élèves avec la chercheuse et l'occasion pour eux de poser des questions. L'orthopédagogue avait préalablement parlé du projet aux élèves faisant partie de son groupe en mathématique lors d'une séance d'orthopédagogie. Une feuille d'informations a été transmise aux parents des élèves vus par l'orthopédagogue en mathématiques et dont l'enseignante avait accepté de participer au projet afin d'obtenir leur consentement et l'assentiment de leur enfant. Les huit élèves invités à participer à cette recherche ont accepté d'en faire partie avec le consentement de leurs parents et ont remis les formulaires à leur orthopédagogue avant le début de la collecte de données.

3.3.2 Description des participants

L'échantillon est donc composé de deux groupes de quatre élèves en difficulté d'apprentissage ($n = 8$). Les participants de notre étude sont des élèves francophones âgés de 13 à 15 ans suivant le programme de la deuxième année du premier cycle du secondaire en mathématique dans une école spécialisée pour élèves rencontrant des difficultés graves d'apprentissage. Ces élèves présentent un potentiel intellectuel moyen ou supérieur à la norme et manifestent des difficultés d'apprentissage notamment par une évaluation en neuropsychologie qui confirme un ou plusieurs troubles spécifiques de l'apprentissage ou en ayant deux ans de retard sur le programme prescrit du ministère dans la langue d'enseignement ou en mathématique.

3.4 Collecte de données

La collecte de données s'est faite par l'entremise d'observations et de matériel écrit. Nous avons observé les interactions entre les élèves, entre les élèves et l'orthopédagogue, mais aussi entre les

élèves et leur environnement. La chercheuse a pris des notes pendant les activités d'enseignement, mais avait aussi accès à l'enregistrement vidéo des séances afin d'analyser les échanges de manière plus spécifique. Pour ce qui est du matériel écrit, nous avons collecté les feuilles de travail des élèves afin d'analyser leurs productions. Elles pouvaient prendre la forme de schémas et dessins, de calculs ou encore de textes.

La collecte de données a été réalisée en personne, ce qui permettait d'avoir un plus grand contrôle sur la situation. Ainsi, il était possible pour nous de remarquer des éléments qui n'auraient pas été perceptibles dans l'enregistrement vidéo. Nos observations (qualitatives) étaient notées dans un tableau pendant le déroulement des séances.

3.4.1 Milieu et déroulement de la collecte

L'expérimentation s'est déroulée dans une école spécialisée à Montréal. Elle a eu lieu sur les heures de cours, aux moments où il était prévu que l'orthopédagogue intervienne dans les groupes choisis. Les séances ont été réalisées aux mois de mai et juin 2022 et avaient une durée de 45 minutes, le temps d'une période régulière selon l'horaire habituel des élèves. Nous nous sommes joints à l'orthopédagogue au moment où elle retirait les groupes d'élèves de leur classe pour travailler dans son bureau. L'orthopédagogue devait animer les séances d'intervention, mais nous décrirons dans le chapitre suivant les raisons pour lesquelles la chercheuse a finalement animé les séances.

Plusieurs rencontres étaient prévues avec l'orthopédagogue, avant, pendant et après la collecte de données. Avant d'entamer les séances avec les élèves, l'orthopédagogue et la chercheuse ont travaillé de concert pour préparer les situations d'enseignement-apprentissage. Ces rencontres nous ont permis de discuter des variables didactiques importantes des situations (déjà élaborées) et d'anticiper les conduites des élèves pour prévoir des relances appropriées. Certaines modifications en ce qui a trait au vocabulaire utilisé et à la formulation des phrases ont été apportées pour rendre les situations les plus accessibles possibles aux élèves, sans changer l'enjeu de la situation. Pendant la collecte de données, des rencontres étaient prévues au besoin, au cas où des modifications devaient être apportées quant à la planification et à l'organisation des séances en fonction des productions des élèves. Finalement, des rencontres à la fin de la collecte de données étaient prévues pour analyser, de façon globale, les productions des élèves et avoir les impressions de

l'orthopédagogue concernant le déroulement, ce qui a été fait, ce qu'il s'est passé et ce qu'elle a remarqué.

3.4.2 Outils de collecte : les situations d'enseignement-apprentissage

Quatre situations ont été sélectionnées par la chercheuse et l'orthopédagogue dans le but de travailler sur la notion d'équivalence d'expressions algébriques. « Les carreaux hachurés », « Les tuiles du plancher » et « Paul et Lucie » sont celles qui ont été jugées comme les plus pertinentes pour travailler le concept mathématique en question. Les situations sont didactiques dans le sens où elles portent une intention didactique bien précise et ont pour but l'évolution des stratégies des élèves grâce à un certain contrôle des variables didactiques.

Les sections qui suivent présenteront les différentes situations à travers une description des tâches à accomplir dans les différentes phases des situations, et à travers une analyse *a priori* des variables didactiques qui offrent la potentialité d'enjeux relatifs à l'équivalence d'expressions algébriques. Un travail important a été fait avec l'orthopédagogue concernant les conduites anticipées et les relances à prévoir. Ce travail sera décrit de manière assez fine pour la situation des carreaux hachurés, puisque c'est sur cette situation que nous avons le plus travaillé. Pour les deux autres situations, nous ne laisserons que certaines traces du travail réalisé avec l'orthopédagogue.

3.4.2.1 Les carreaux hachurés

La situation « Les carreaux hachurés » est une adaptation de l'activité tirée de Denis (1997), qui a été étudiée par plusieurs auteurs, aussi appelée « Germaine, la couturière » (Vlassis & Demonty, 2002), « Manufacturier » (Bednarz, 2005), « Carré bordé » (Vlassis *et al.*, 2017).

3.4.2.1.1 Description de la situation : Parties et tâches

L'objectif de la situation « Les carreaux hachurés » est de formuler une méthode générale de calcul pour trouver le nombre de carreaux hachurés pour n'importe quel carré (voir les figures ci-dessous). La situation se décline en trois phases. D'abord, les élèves sont invités à chercher le nombre de carreaux hachurés dans une figure donnée, puis dans des carrés similaires, mais qui ont 67 et 865 carreaux sur le côté. Cette première phase est cruciale, car elle crée des conditions pour le passage d'une stratégie de dénombrement à une stratégie plus évoluée basée sur de processus de

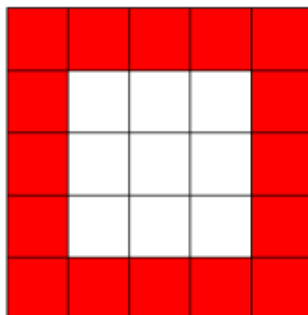
généralisation. Ensuite, la situation exige de décrire la méthode utilisée pour calculer le nombre de carreaux hachurés pour n'importe quel carré de structure similaire. Finalement, les élèves doivent écrire une formule (expression algébrique) qui permet de calculer le nombre de carreaux hachurés pour tous les carrés, si x est la quantité de carreaux hachurés sur un côté du carré. Le fait de pouvoir compter le nombre de petits carreaux de manières différentes donne lieu à la production d'expressions algébriques diverses qui seront ensuite analysées pour mettre en évidence leur équivalence.

Il est à noter que les carreaux hachurés sont rouges sur le document qui a été fourni aux élèves.

Voici la situation telle que présentée aux élèves :

Figure 3.1 Document de l'élève - Les carreaux hachurés (page 1)

Les carreaux hachurés



Phase 1

- a. Cherchez le nombre de carreaux hachurés dans la figure donnée.

- b. Cherchez le nombre de carreaux hachurés dans un carré similaire à celui-ci, mais qui a 67 carreaux sur le côté.

- c. Cherchez le nombre de carreaux hachurés dans un carré similaire à celui de la figure, mais qui a 865 carreaux sur le côté.

Figure 3.2 Document de l'élève - Les carreaux hachurés (page 2)

Phase 2

Vous venez d'utiliser une méthode pour calculer le nombre de carreaux hachurés lorsque le côté du carré compte 865 carreaux. Maintenant, vous allez décrire cette méthode, en une ou plusieurs étapes, pour qu'elle permette de calculer le nombre de carreaux hachurés pour n'importe quel carré construit sur le même modèle.



Phase 3

On cherche maintenant à écrire une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux hachurés pour tous les carrés. Pour cela, on appelle « x » la quantité de petits carreaux sur le côté du carré.



3.4.2.1.2 Analyse didactique de la situation

Premièrement, le **nombre de carreaux sur le côté du carré** est une variable didactique importante de la situation des carreaux hachurés puisque, à travers celle-ci, l'orthopédagogue peut favoriser la modification des stratégies mises en place par les élèves dans la résolution du problème présenté. En effet, s'il est possible de trouver le nombre de carreaux hachurés d'un carré ayant 5 carreaux sur le côté par le dénombrement, cette stratégie devient inefficace lorsque nous cherchons le nombre de carreaux hachurés pour un carré ayant 865 carreaux sur le côté. Donner un grand nombre de carreaux sur le côté met en évidence l'inefficacité du dénombrement et favorise la recherche d'autres stratégies. Dans la situation proposée, les élèves doivent trouver le nombre de carreaux hachurés pour des carrés ayant 5, 67 et 865 carreaux sur le côté.

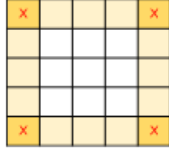
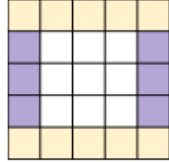
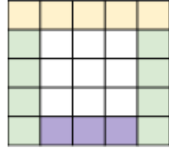
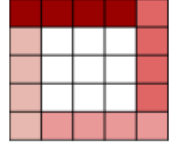
Rappelons qu'il est normal et même attendu que les élèves dénombrent les carreaux hachurés à la première question considérant que le dessin est un support visuel et que le nombre de carreaux est, à ce stade, encore réduit.

Plusieurs exemplaires du dessin proposé à la phase *1a* étaient mis à la disposition des élèves s'ils voulaient dessiner dessus. Ce support visuel disparaît dès la deuxième question, alors que le carré ayant 67 carreaux sur le côté n'est pas représenté.

Deuxièmement, s'ils dénombrèrent les carreaux hachurés en *a*, les élèves devaient nécessairement faire d'autres calculs en *b* et *c*. La **répétition de la consigne** (consignes *1a*, *1b* et *1c*) a pour finalité l'identification d'une certaine régularité dans leur méthode de calcul, dans le but de généraliser la méthode pour un nombre quelconque de carreaux sur le côté.

Dans cette situation, au moins **quatre stratégies équivalentes** sont possibles pour trouver le nombre de carreaux hachurés dans un carré construit sur le même modèle présenté. Les différentes écritures, qui renvoient toutes au même objet mathématique, peuvent être validées à partir de descriptions des modes de production ou encore par des transformations algébriques.

Tableau 3.1 Les quatre stratégies anticipées

<p>①</p> $4x - 4$	
<p>②</p> $2x + 2(x - 2)$	
<p>③</p> $x + 2(x - 1) + (x - 2)$	
<p>④</p> $4(x - 1)$	

Le tableau ci-dessus présente les quatre stratégies anticipées. D'abord, il serait possible de multiplier le nombre de carreaux d'un côté par 4, puis d'enlever les quatre coins comptés deux fois : $4x - 4$. Ensuite, il serait possible de compter deux côtés complets (lignes horizontales) et d'enlever les deux carreaux déjà comptés dans les lignes verticales : $2x + 2(x - 2)$. Puis, nous pourrions compter une ligne complète, enlever un carreau à deux côtés et enlever deux carreaux au dernier côté : $x + 2(x - 1) + (x - 2)$. Finalement, nous pourrions enlever un à chaque côté pour ne pas compter les coins en double : $4(x - 1)$.

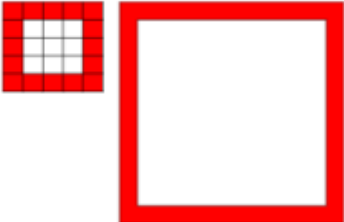
La dernière variable didactique importante dans la mise en place de la situation est le **nombre d'élèves par groupe**. Elle s'applique à toutes les situations que nous animerons puisque nous travaillerons toujours avec quatre élèves, s'il n'y a pas d'absents, pour susciter le débat. Dans le cadre de notre recherche, le débat mathématique occupera une place importante puisque la négociation des différentes méthodes valides sera liée à la construction du rapport sémantique-syntaxique. En effet, les élèves pourront relever différentes méthodes valides, sans qu'elles ne soient écrites de la même façon.

3.4.2.1.3 Travail avec l'orthopédagogue : conduites anticipées et relances

Lors de nos rencontres avec l'orthopédagogue, nos discussions menaient à des ententes sur le déroulement et l'animation des situations. Afin de relancer les élèves selon leurs stratégies utilisées, nous avons construit un schéma, qui avait aussi pour but d'établir des paramètres communs pour l'animation des séances.

Voici un exemple de schéma qui a été préparé pour la phase *Ib*, lorsque les élèves doivent trouver le nombre de carreaux hachurés pour un carré ayant 67 carreaux sur le côté. La première colonne relève les différentes conduites anticipées des élèves et la deuxième colonne réfère à la relance prévue pour chaque conduite.

Tableau 3.2 Schéma d'enseignement pour la phase 1b

<p>①</p> $4 \cdot 67 - 4$ $= 268 - 4$ $= 264$	<p>Bonne réponse : 264 carreaux</p> <p>À ce stade, les élèves ne produisent pas encore d'expression algébrique. Ils calculent à partir de leur stratégie.</p>
<p>②</p> $67 + 67 + 65 + 65$ $= 2 \cdot 67 + 2 \cdot 65$ $= 134 + 130$ $= 264$	
<p>③</p> $67 + 66 + 66 + 65$ $= 67 + 2 \cdot 66 + 65$ $= 67 + 132 + 65$ $= 264$	
<p>④</p> $4 \cdot 66$ $= 264$	
<p>Les élèves ne savent pas quoi faire. Ils ne comprennent pas ce qu'on veut dire par "carré similaire".</p>	<p>Proposer une image pour qu'ils voient ce qu'on veut dire par "carré similaire".</p> 
<p>Les élèves ne proposent rien pour 67 carreaux.</p>	<p>Proposer un carré qui a 20 carreaux sur le côté.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Qu'est-ce que vous avez fait dans le cas a. ? <ul style="list-style-type: none"> - J'ai compté. - Êtes-vous d'accord que compter un à un c'est plus long et difficile ? <ul style="list-style-type: none"> - Oui. - Pourquoi? <ul style="list-style-type: none"> - On n'a pas tous les carreaux pour compter. - Donc il faut trouver une autre manière.
<p>Recours au dessin.</p>	<p>Augmenter la quantité de carreaux sur le côté.</p>
<p>Les élèves dessinent le carré avec le grand nombre de carreaux.</p>	<p>Exemple : proposer 1000 carreaux sur le côté.</p>
<p>Les élèves font $4 \cdot 67$ sans argumenter.</p>	<p>Demander si cette méthode fonctionne avec le carré qui a 5 carreaux sur le côté ($4 \cdot 5 \neq 16$). Certains carreaux seront comptés deux fois.</p>

Les quatre premières rangées du schéma renvoient aux quatre méthodes appropriées prévues précédemment (Tableau 3.1). Les quatre méthodes sont numérotées de sorte à les associer efficacement à la stratégie utilisée. Si certains élèves ne comprenaient pas la consigne, il a été établi que l'orthopédagogue pourrait reformuler la consigne ou proposer en image un plus grand carré dont seuls les carreaux en bordure de la figure sont hachurés. Dans ce cas, les délimitations des carreaux ne devront pas apparaître puisque le carré ne devra pas permettre aux élèves de compter le nombre de carreaux, et ne servira qu'à préciser la consigne.

Voici un extrait des échanges que nous avons eu avec l'orthopédagogue concernant les relances prévues pour trouver une méthode de calcul. O désigne l'orthopédagogue et C, la chercheuse.

Extrait de rencontre chercheuse-orthopédagogue

C : Pour la phase *Ia*, c'est tout à fait approprié que les élèves dénombrent parce qu'il [n'] y en a pas beaucoup, il y a juste 5 carreaux sur le côté. Donc dans ce cas-là, c'est normal que leur stratégie soit de dénombrer, de compter avec leur crayon. Ce qui arrive c'est qu'après ça, la situation va les contraindre et ne va plus leur permettre de dénombrer. Donc si on arrive avec 67 carreaux, et qu'ils veulent encore les dénombrer et les compter, on pourra faire un exemple avec 1000 carreaux, pour vraiment, sans dire qu'on ne veut pas qu'ils dessinent, mais que la situation ... soit contraignante.

O : ... force une autre stratégie.

C : C'est ça exactement. [...] S'ils n'[y] arrivent pas avec 67, on peut y aller avec 20. Puis encore une fois si avec 20 ils veulent le dessiner, bien là on augmente à 40 ou... tu vois ce que je veux dire ?

O : Parfait.

Si les élèves ne parvenaient pas à faire le saut de 5 à 67 carreaux sur le côté, nous pouvions diminuer le nombre de carreaux sur le côté en proposant un modèle intermédiaire de 20 ou 40 carreaux, ou amener les élèves à remarquer qu'ils doivent trouver une méthode alternative au dénombrement. À l'inverse, il faudrait augmenter le nombre de carreaux sur le côté du carré si les élèves recouraient toujours au dessin pour compter les carreaux, en proposant, par exemple, un modèle de 1000 carreaux sur le côté. Il était aussi possible d'utiliser le cas de 1000 carreaux sur le côté dans l'éventualité où la phase 2 devait être réalisée lors d'une deuxième séance et qu'un rappel des calculs et des stratégies proposés à la première séance était nécessaire. Finalement, si les élèves produisaient une méthode inadéquate et que leurs pairs l'acceptaient sans argumenter, nous avons prévu de demander au groupe de valider leur méthode en l'appliquant au premier carré de cinq

carreaux sur le côté. De cette façon, les élèves pourraient constater, par exemple, que multiplier le nombre de carreaux sur le côté par 4 n'est pas une méthode valide pour trouver le nombre de carreaux hachurés.

Si, au terme de l'activité des carreaux hachurés, une seule formule n'apparaissait, nous avions prévu une phase supplémentaire, qui ne se trouve pas dans la situation présentée aux élèves, qui permettrait de susciter le débat au sein du groupe en confrontant la formule trouvée à des formules « d'élèves d'une autre classe ». À partir des quatre stratégies possibles présentées plus tôt (Tableau 3.1), soient « $4x - 4$ », « $2x + 2(x - 2)$ », « $x + 2(x - 1) + (x - 2)$ » et « $4(x - 1)$ », les élèves auraient à débattre la validité des formules présentées, et ainsi à discuter de l'équivalence de ces expressions algébriques.

En discutant avec l'orthopédagogue, nous avons aussi pensé, dans le cas où les élèves auraient trouvé une seule stratégie, leur demander de comparer deux méthodes décrites en mots (méthodes que d'autres élèves auraient pu produire à la phase 2) pour déterminer si elles étaient équivalentes.

Extrait de rencontre chercheuse-orthopédagogue

C : [...] Donc la possibilité c'était qu'on garde notre groupe de 4, puis qu'on amène un message [s'il n'y a pas de confrontation entre différentes méthodes]. Qu'on dise « dans un groupe hier...

O : ... ils ont fait ça.

C : ils ont fait ça », puis « est-ce que c'est valide? ». Ça, ça serait vraiment à la toute fin de la situation 1. Donc la phase 1 ils font des tests, ils essaient de trouver leur façon de faire, phase 2 ils décrivent en mots, et phase 3 là ils produisent leur expression algébrique. Donc là ça serait de voir [si] on donne un message qui a été écrit dans l'autre groupe ou [si] on donne une formule algébrique sans l'explication de comment ils en sont arrivés là.

O : Les deux peuvent être le *fun*, mais considérant qu'ils ont déjà travaillé l'algèbre je pense que je donnerai la formule. [...] Ils en ont vu des expressions algébriques, ils ont travaillé plus sur ça [que sur l'expression en mots d'une méthode générale]. Peut-être que, même s'ils [n'] ont pas tout le temps le sens, parce qu'ils ont appris à l'appliquer, [je crois que l'expression algébrique] doit être plus facile à valider que juste un message. [...] Ils vont aller chercher des trucs.

Nous avons cependant choisi de nous centrer sur les expressions algébriques, considérant, entre autres, que les élèves allaient comparer deux méthodes décrites en mots dans la situation « Paul et Lucie ».

Selon l'orthopédagogue, les élèves ont appris des « trucs » pour transformer des expressions algébriques qui leur permettront d'établir l'équivalence. Nous avons pu relever, lors d'un autre échange, que les « trucs » enseignés pouvaient induire les élèves en erreur. En présentant à l'orthopédagogue un exercice d'ordre strictement mathématique, où les élèves doivent montrer comment transformer l'expression $(x + 9) \cdot 10 - 45$ pour qu'elle devienne $10x + 45$, l'orthopédagogue a mentionné que les élèves sont habitués à traiter un coefficient placé avant la parenthèse et qu'ils auraient développé l'automatisme de distribuer ce coefficient aux termes dans la parenthèse. L'orthopédagogue s'est alors questionnée à savoir si les élèves auraient le même « réflexe » si le coefficient était placé après.

Extrait de rencontre chercheuse-orthopédagogue

O : Mais ça tu vois ils seraient supposés d'être capables de le faire. [Ce sont] des choses qu'ils savent.

C : Est-ce que ça fait longtemps qu'ils l'ont travaillé ?

O : Non, ils ont fait des documents de révision sur ça depuis 2-3 semaines. Mais c'est bon que ce soit comme ça parce que des fois ils sont habitués de voir le 10 devant la parenthèse, collé sur la parenthèse. Donc des fois, dès que tu la déplaces, c'est comme si pour eux, ce n'est plus la même chose. Ça fait que moi je trouve ça correct qu'il soit déplacé juste pour que ça force un peu le raisonnement et que ce [ne] soit pas juste un automatisme : « Ah il est en avant, je distribue ».

L'exercice discuté n'a pas été retenu pour nos interventions, mais la position du coefficient sera traitée dans la version modifiée de l'activité des tuiles du plancher, que nous présenterons ultérieurement.

3.4.2.2 Les tuiles du plancher

Dans cette section, nous décrirons l'activité des tuiles du plancher et ferons son analyse *a priori*, suivie d'un survol du travail fait avec l'orthopédagogue.

3.4.2.2.1 Description de la situation : Parties et tâches

L'objectif de la situation « Les tuiles du plancher » est de trouver une méthode générale pour calculer le nombre de tuiles blanches nécessaires pour un nombre quelconque de tuiles grises (voir les figures ci-dessous). Cette activité se décline en deux phases.

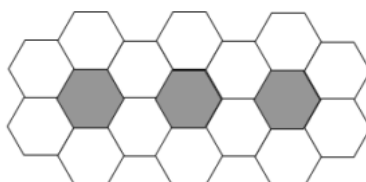
À la première phase, les élèves doivent trouver une méthode pour trouver le nombre de tuiles blanches nécessaires pour 35 tuiles grises et 679 tuiles grises selon un modèle de tuiles hexagonales. Le modèle est présenté par une figure qui compte 3 tuiles grises et 14 tuiles blanches. À la deuxième phase, les élèves doivent trouver une formule pour calculer le nombre de tuiles blanches pour un nombre quelconque de tuiles grises.

Voici la situation telle que présentée aux élèves :

Figure 3.3 Document de l'élève - Les tuiles du plancher (page 1)

Les tuiles du plancher

On veut décorer un plancher avec des tuiles. Autour de chaque tuile grise, on met des tuiles blanches comme on voit dans le dessin.



Phase 1

- a. De combien de tuiles blanches a-t-on besoin si l'on utilise 35 tuiles grises?

- b. Et si on met 679 tuiles grises? Justifiez.

Figure 3.4 Document de l'élève - Les tuiles du plancher (page 2)

Phase 2

Trouvez une formule pour calculer le nombre de tuiles blanches nécessaires pour un nombre quelconque de tuiles grises. Justifiez.



3.4.2.2.2 Analyse didactique de la situation

Une première variable didactique pour la situation des tuiles du plancher est le **nombre de tuiles grises** proposé. Ce nombre peut être réduit ou augmenté pour contraindre les élèves à trouver une méthode de calcul qui permettra de trouver le nombre de tuiles blanches. En effet, il sera très long de dessiner 35 tuiles grises et leurs 142 tuiles blanches. Cette variable aura un impact d'autant plus important sur les stratégies des élèves à l'énoncé *Ib*, puisqu'ils doivent trouver le nombre de tuiles blanches nécessaires pour un plancher de 679 tuiles grises.

Tout comme dans la situation des carreaux hachurés, les **consignes *Ia* et *Ib* ont la même structure** afin de créer une répétition de calculs similaires qui pourrait favoriser l'identification d'une structure dans les calculs et, en même temps, permettre aux élèves de généraliser leur méthode pour un nombre quelconque de tuiles grises.

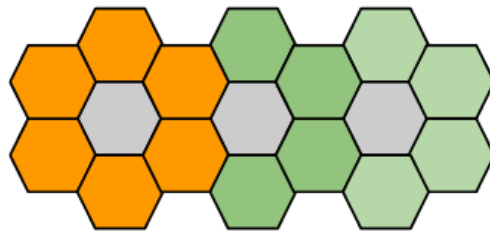
Le contexte de cette situation fait une fois de plus appel à un dessin. Ici, la figure proposée est construite à partir d'hexagones, une figure géométrique connue des élèves, qui permet une **disposition de tuiles** plus complexe que le carré. En effet, le nombre de côtés de l'hexagone permet de créer un modèle plus élaboré. Ainsi, dans le modèle proposé, chaque tuile grise est entourée de six tuiles blanches, dont deux sont communes à la tuile grise voisine.

Le modèle représenté est composé de trois tuiles grises afin de voir son caractère répétitif. Ce modèle permet d'analyser la structure des tuiles en montrant les liens qui unissent les tuiles grises

(deux tuiles blanches sont communes à deux tuiles grises), mais aussi en montrant que chaque tuile grise est entourée de six tuiles blanches.

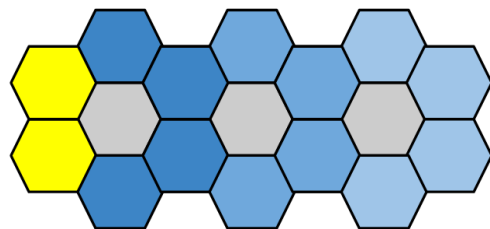
Pour cette activité, il existe au moins **trois formules possibles** pour calculer le nombre de tuiles blanches nécessaires pour un nombre quelconque de tuiles grises. Premièrement, il est possible de compter six tuiles blanches autour de la première tuile grise (représentées en orange dans la figure suivante), et quatre tuiles blanches pour le reste des tuiles grises (représentées en vert), ce qui conduirait à l'expression algébrique $6 + 4(x - 1)$.

Figure 3.5 Première méthode



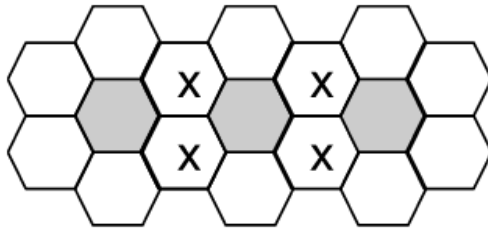
Deuxièmement, il est possible de compter les deux premières tuiles blanches pour commencer (représentées en jaune), puis d'ajouter quatre tuiles blanches pour chaque tuile grise (représentées en bleu), et d'obtenir l'expression générale $2 + 4x$.

Figure 3.6 Deuxième méthode



Troisièmement, nous pouvons compter six tuiles blanches par tuile grise et enlever deux tuiles blanches pour chaque tuile grise, sauf une : $6x - 2(x - 1)$.

Figure 3.7 Troisième méthode



Cette stratégie a été anticipée par l'orthopédagogue qui croyait que les élèves utiliseraient la soustraction, pour éviter de compter des tuiles en double, comme la stratégie 1 des carreaux hachurés (Tableau 3.1) avait été utilisée dans les groupes.

Extrait de rencontre chercheuse-orthopédagogue

O : Moi j'ai l'impression qu'ils vont peut-être passer par la soustraction encore, comme on a fait aujourd'hui, qu'ils vont peut-être aller faire 3 fois 6, puis après ça ils vont trouver [qu'] il y en a deux qui sont là deux fois, ça fait que 3 fois 6 moins 4.

C : 3 fois 6 ? 1, 2, 3... Ah, 1, 2, mais ça [ne] fonctionnera pas.

O : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 4, 5, 6, puis après ça ils font moins 1, 2, 3, 4.

[...] J'essaie d'anticiper, étant donné que là aujourd'hui ils sont passés par la soustraction en enlevant les quatre coins, là ils pensent qu'ils ont compris. Ça fait que là ils vont se dire « bien là c'est la même affaire, mais c'est une forme différente ». Ça fait qu'ils vont encore passer par la soustraction en se disant que ça marchait hier.

C : Oui, mais là qu'est-ce qu'ils vont soustraire ? Ils vont soustraire les deux qui sont en commun ?

O : Oui, comme ces deux-là ici, puis ces deux-là ici.

C : Ces deux-là ils vont se répéter une fois de moins que le nombre de tuiles grises.

[...]

O : Ah, ça fait que c'est $x - 1$.

C : C'est ça. Donc elle serait bonne, c'est une bonne technique d'utiliser la soustraction.

Ça serait approprié, il faut juste qu'ils trouvent [ce] qu'on soustrait.

O : C'est ça.

[...]

C : OK, bien je vais rajouter la tienne, alors ça serait quoi en expression algébrique ?

O : Ça serait $6 \cdot x - 2 \cdot (x - 1)$.

C : Donc là, si on fait nos transformations, ça ferait $6x - 2(x - 1)$, donc là ça ferait $4x + 2$.

Les trois formules présentées, $6 + 4(x - 1)$, $2 + 4x$ et $6x - 2(x - 1)$, sont valides et équivalentes même si elles sont écrites différemment, car elles ont toutes la même dénotation ; autrement dit, certaines transformations algébriques permettent d'exprimer toutes les formules avec la même expression algébrique. La situation a donc le potentiel de montrer que différentes formules peuvent

désigner un même objet. Ces différentes possibilités de formules permettront aux élèves de discuter de la notion d'équivalence en transformant leur formule pour arriver à une autre formule équivalente.

3.4.2.2.3 Travail avec l'orthopédagogue : conduites anticipées et relances

Pour cette situation, nous avons choisi de présenter seulement certains éléments du travail fait avec l'orthopédagogue, soient les relances prévues pour les difficultés les plus anticipées.

D'abord, contrairement à la situation précédente, nous n'avons pas prévu demander aux élèves de déterminer le nombre de tuiles blanches dans le dessin proposé puisque nous avons intérêt à observer la manière dont ils confrontent un processus de généralisation déjà implicite dans la consigne.

Cependant, si les élèves ne parvenaient pas à répondre à la première question, qui demande de trouver le nombre de tuiles blanches pour un modèle de plancher ayant 35 tuiles grises, alors nous pouvions leur demander de trouver le nombre de tuiles blanches pour le modèle de 3 tuiles grises représenté. Si ces informations implicites n'étaient pas suffisantes pour que les élèves s'engagent dans la situation, alors nous pouvions proposer un cas intermédiaire de 10 tuiles grises. En agissant sur cette variable didactique, il est possible de les faire entrer dans la situation sans perdre son enjeu. Ce faisant, nous cherchons à observer la manière dont les élèves font face à une situation qui requiert un certain niveau de généralisation sans leur proposer, dans la consigne, un schéma progressif (comme dans le cas des carreaux hachurés) qui va du plus simple ou plus complexe.

Si, dans le processus de résolution, les élèves multipliaient le nombre de tuiles grises par 6, en pensant qu'il y a 6 tuiles blanches par tuile grise, cette méthode de calcul serait erronée puisque certaines tuiles blanches sont communes à deux tuiles grises. Le dessin joue ici un rôle de référence pour la validation de la méthode proposée ($3 \times 6 = 18 \neq 14$). En multipliant les 3 tuiles grises par 6, les élèves obtiendraient 18, tandis qu'ils ne compteraient que 14 tuiles blanches sur le dessin. D'ailleurs, toutes les propositions de méthode peuvent être vérifiées à partir de ce cas, dont les valeurs des deux variables sont connues. Observons ainsi que le dessin joue un rôle important dans la vérification des méthodes trouvées, même s'il ne peut pas être un moyen de validation.

Puis, si des difficultés relatives à l'expression d'une méthode en formule survenaient, nous avons envisagé l'ajout d'une phase intermédiaire qui ressemblera à la phase 2 de la situation des carreaux hachurés. En effet, plutôt que de passer à l'écriture algébrique tout de suite après avoir développé une méthode de calcul, les élèves pourraient généraliser leur calcul par l'expression de leur méthode en mots. La relance pourrait donc être la suivante :

Vous venez de trouver une méthode pour calculer le nombre de tuiles blanches pour 35 tuiles grises et 679 tuiles grises. Pouvez-vous décrire cette méthode pour qu'elle permette de calculer le nombre de tuiles blanches pour n'importe quel nombre de tuiles grises ?

Cette étape intermédiaire pourrait potentiellement favoriser le passage à l'écriture algébrique.

3.4.2.3 Paul et Lucie

3.4.2.3.1 Description de la situation : Parties et tâches

Dans la troisième situation sélectionnée, « Paul et Lucie », deux personnages choisissent un même nombre de départ quelconque sur lequel ils opèrent en faisant des calculs différents sur celui-ci. Les calculs des deux personnages sont décrits en mots et Lucie veut obtenir un résultat final supérieur à celui de Paul. Les élèves doivent donc trouver un nombre de départ qui permettra à Lucie d'atteindre son objectif. Cependant, les procédures des deux personnages vont toujours donner le même résultat. Autrement dit, pour n'importe quelle valeur initiale, on arrive à la même solution, même en faisant différentes procédures de calculs. Les différentes procédures donnent lieu à des écritures algébriques différentes, mais ces expressions restent équivalentes.

Voici la situation telle que présentée aux élèves :

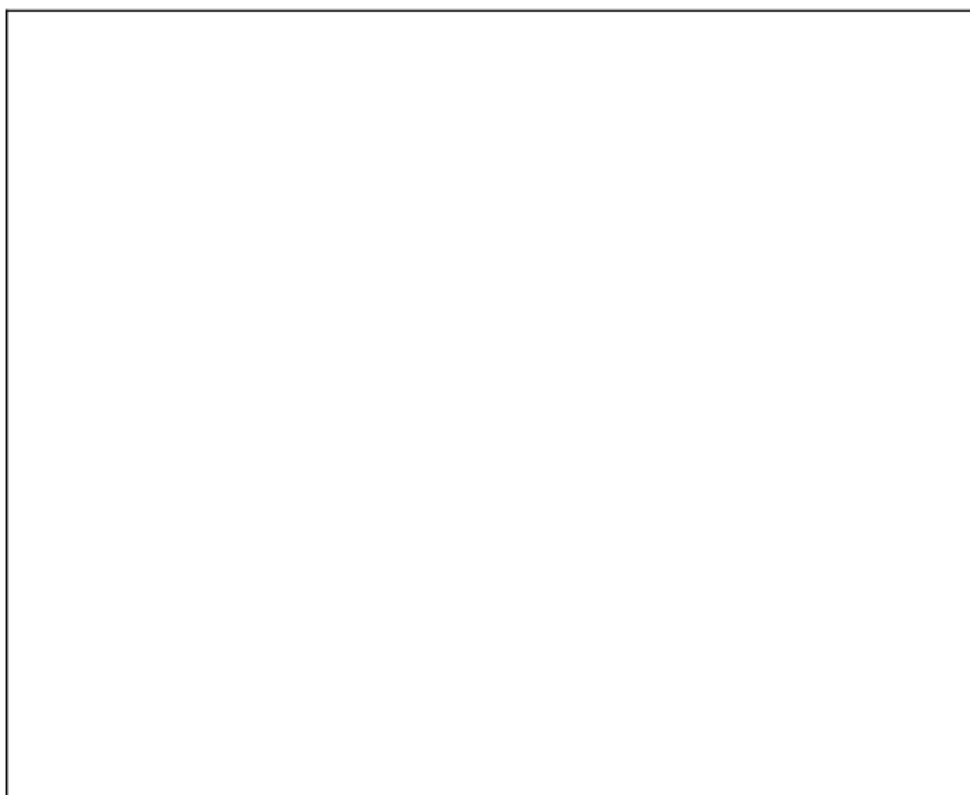
Figure 3.8 Document de l'élève - Paul et Lucie

Paul et Lucie

Paul et Lucie choisissent un même nombre de départ mais ensuite, ils font des calculs différents avec lui.

- Paul multiplie le nombre choisi par 2 et additionne 1. Ensuite, il multiplie le résultat obtenu par 3.
- Lucie additionne 1 au nombre choisi, multiplie le résultat de cette addition par 6 et finalement enlève 3 au dernier résultat.

Lucie veut obtenir comme résultat final un nombre plus grand que celui de Paul. Quel nombre de départ devrait-elle choisir ?



3.4.2.3.2 Analyse didactique de la situation

Dans cette situation, il est important que les deux personnages travaillent à partir du **même nombre de départ** et qu'ils fassent des **calculs différents** sur celui-ci. La proposition de calculs différents peut donner l'impression aux élèves que les personnages obtiendront des résultats finaux différents. Ces différents calculs se traduiront par différentes expressions algébriques. Par exemple, les calculs

de Paul peuvent s'exprimer par l'expression $3 \cdot (2x + 1)$ et les calculs de Lucie par l'expression $6 \cdot (x + 1) - 3$. Une fois ces expressions algébriques transformées, il est possible d'obtenir $6x + 3$ dans les deux cas, ce qui permettra d'établir l'équivalence des calculs des personnages et devrait permettre aux élèves de constater qu'aucune valeur de départ ne donnera deux solutions différentes à Paul et Lucie.

La situation met en scène **deux personnages**, ce qui implique que les élèves auront deux expressions algébriques à comparer. En principe, il s'agit d'effectuer des calculs sur des nombres particuliers. La répétition du jeu avec des nombres particuliers a pour objectif de créer une certaine surprise. En effet, comme nous l'avons déjà dit, les élèves présupposent que des calculs différents devraient produire des résultats différents. Cette hypothèse implicite se voit contredite par la répétition du jeu : à chaque fois, si les calculs ont bien été faits, les deux personnages obtiennent le même résultat. Comment alors expliquer ce phénomène ?

L'écriture intervient ici comme un moyen de conserver des traces des opérations effectuées afin de pouvoir les comparer. Ensuite, en exprimant ces calculs par des écritures algébriques, les élèves pourront mieux conserver l'information monstrative et montrer que les deux méthodes auront toujours le même résultat.

En établissant que **x fait référence au nombre de départ**, les élèves pourront produire une expression algébrique qui représentera les calculs de chaque personnage. Des transformations syntaxiques favoriseront ensuite la comparaison des deux expressions.

Comme les élèves avaient déjà réalisé des problèmes similaires à cette situation, l'orthopédagogue semblait penser que les élèves parviendraient à établir algébriquement l'équivalence des méthodes de calculs en établissant les formules $3 \cdot (2x + 1)$ et $6 \cdot (x + 1) - 3$, même s'il n'est pas explicitement demandé aux élèves de passer par cette écriture, et en les transformant de sorte à obtenir, dans les deux cas, l'expression réduite $6x + 3$.

Nous nous étions aussi imaginées que les élèves pourraient tenter, par essais et erreurs, de trouver un nombre qui permettrait à Lucie d'obtenir un résultat supérieur à celui de Paul. Toutefois, cette

stratégie ne serait pas algébrique et ne permettrait pas de prouver l'équivalence des deux programmes de calcul.

Bref, des choix didactiques réfléchis ont été faits avec l'orthopédagogue afin d'analyser l'articulation des dimensions sémantique et syntaxique dans le travail des élèves. On y compte entre autres le choix de passer d'un nombre réduit à un nombre élevé de carreaux hachurés et de tuiles grises au début des deux premières situations pour exiger la généralisation d'une méthode de calcul. Cette grande différence entre les nombres nécessitera le passage d'un raisonnement axé sur une valeur connue (raisonnement arithmétique) à un raisonnement qui s'appuie sur les relations entre les nombres et qui implique le traitement d'un nombre inconnu (raisonnement algébrique). Cette contrainte importante a non seulement pour but que les élèves passent d'un raisonnement arithmétique à un raisonnement algébrique, mais aussi que les élèves donnent du sens à leur méthode afin qu'ils accordent du sens à l'expression algébrique qui y sera associée. Ces situations sont appuyées d'un dessin pour permettre aux élèves de faire un retour au concret notamment dans le cas où ils douteraient de la validité de leur expression algébrique ; les élèves auront donc la possibilité de valider les méthodes appropriées ou encore de rejeter celles qui seront erronées. Aussi, le choix de demander aux élèves de décrire leur méthode en mots vise à favoriser la reconnaissance des relations entre les nombres et à faciliter l'écriture algébrique. Le statut des symboles, des lettres et de l'écrit pourra alors être analysé. De plus, la variété des méthodes de calcul possibles offre la possibilité aux élèves d'aboutir à des réponses qui peuvent paraître différentes dans leur écriture (sens différent, mais même dénotation), ce qui confrontera probablement les élèves, habitués à chercher la bonne réponse, à savoir laquelle est la bonne. La notion d'équivalence des expressions apparaîtra alors. Le caractère procédural et structural des expressions apparaîtra surtout dans la situation « Paul et Lucie » dans laquelle les élèves devront travailler à partir d'une procédure pour finalement montrer une nouvelle information en traitant l'expression de la procédure comme un objet en soi.

Les situations choisies ont donc le potentiel de donner du sens aux expressions, elles sollicitent des transformations syntaxiques et ont le potentiel de montrer que des écritures différentes peuvent renvoyer à un même objet. Il sera alors question des concepts de sens, de dénotation et d'équivalence.

3.5 Interprétation des données

L'interprétation des données recueillies se fera selon une méthodologie qualitative/interprétative. Pour mieux comprendre le sens attribué aux apprentissages par les différents acteurs de la relation didactique, nous tiendrons compte du « caractère évolutif du déroulement de la recherche et le caractère interprétatif de l'analyse des données » (Savoie-Zajc, 2018, p. 192). Deux facteurs justifient cette méthodologie : la proximité de notre problématique de recherche aux problématiques que les professionnels rencontrent sur le terrain et l'interactivité essentielle des individus entre eux et avec leur environnement (Savoie-Zajc, 2018). Les interactions didactiques seront au centre de l'analyse qui suivra et nous permettront de mettre en évidence les obstacles que les élèves rencontreront, mais aussi les choix didactiques qui favoriseront leur apprentissage. Les échanges entre les élèves et leur orthopédagogue ainsi que les échanges entre les élèves à propos du savoir en jeu seront analysés. Pour bien comprendre les enjeux de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre auprès d'élèves en difficulté, la recherche se déroulera dans le milieu naturel des participants, soit à l'école, dans le bureau de l'orthopédagogue.

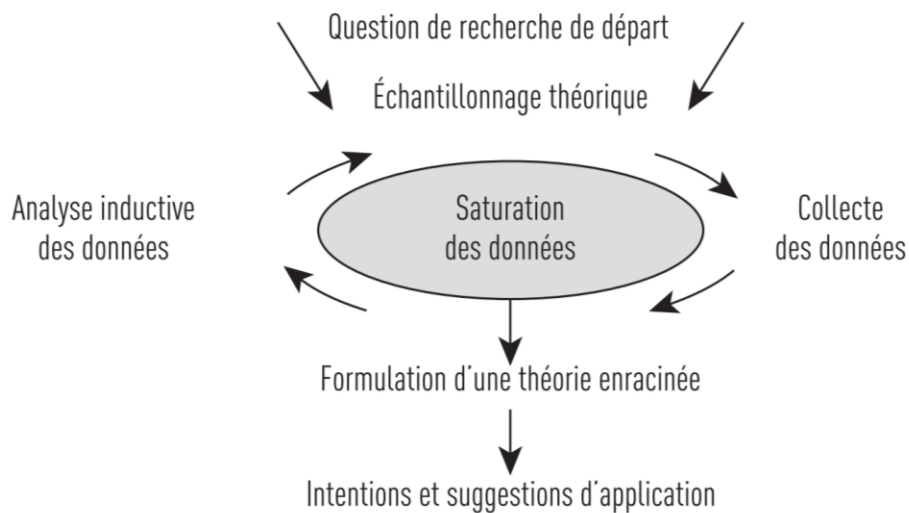
Le savoir produit est donc vu comme enraciné dans une culture, un contexte et une temporalité. [...] Le savoir produit est aussi vu comme dynamique et temporaire, dans la mesure où il continue d'évoluer. Le savoir est également contextuel, car les milieux de vie des participants colorent et orientent les résultats. (Savoie-Zajc, 2018, p. 193)

Notre question de recherche se précisera graduellement à travers un processus cyclique qui se décline en trois étapes : l'échantillonnage théorique, la collecte de données et l'analyse inductive des données.

Ce cycle itératif entre la collecte et l'analyse des données se poursuit jusqu'à ce que le chercheur n'apprenne plus rien de nouveau – les données se répètent, les discours des nouveaux participants n'ajoutent plus à la compréhension des expériences déjà recueillies. C'est un signe de saturation des données. (Savoie-Zajc, 2018, p. 197)

Lincoln et Guba proposent un modèle, repris par Savoie-Zajc (2018, p. 196) pour représenter ce processus par un schéma.

Figure 3.9 La démarche de recherche qualitative/interprétative



Des rencontres chercheuse-orthopédagogue entre les séances d'intervention nous ont permis, au fil de la collecte de données, de préciser notre objet d'étude et d'apporter des modifications aux situations prévues à partir d'une analyse des productions des élèves lors des séances précédentes.

L'activité des élèves sera analysée à partir de certaines caractéristiques de la pensée algébrique que nous avons décrites plus tôt. Il sera question de la nature de leur raisonnement, du statut qu'ils attribueront au signe d'égalité, aux symboles, aux expressions et aux lettres, à leur flexibilité à traiter du caractère procédural et structural, au statut qu'ils accordent à l'écrit, au sens et à la dénotation des expressions algébriques équivalentes et à l'articulation des dimensions sémantique et syntaxique dans la réalisation des activités proposées. Les ostensifs gestuels, discursifs, graphiques et scripturaux, ainsi que leur manipulation (Chevallard, 1994) seront observés afin d'analyser la progression des élèves dans le domaine algébrique.

3.6 Considérations éthiques

En ce qui a trait aux règles déontologiques, nous avons d'abord obtenu un certificat d'approbation éthique du Comité d'éthique de la recherche avec des êtres humains (numéro 2022-4769) qui atteste la conformité du projet de recherche aux pratiques habituelles et aux normes de l'UQAM. Nous avons ensuite obtenu le consentement du comité de gestion de l'école qui inclut la direction générale de l'école, du premier cycle du secondaire et des services pédagogiques. Ces derniers ont

sollicité la responsable du cours de mathématique du premier cycle du secondaire (aussi orthopédagogue en mathématique pour les élèves de deuxième année du secondaire) et la directrice du centre d'expertise de l'école. À partir de l'ouverture du personnel enseignant à participer à notre recherche, l'orthopédagogue a pu identifier les classes avec lesquelles nous avons travaillé.

Les critères d'inclusion et d'exclusion étaient larges puisque l'école avec laquelle nous avons travaillé est une école spécialisée pour les élèves ayant des difficultés graves d'apprentissage. Il suffisait donc qu'ils suivent des cours de mathématique correspondant au premier cycle du secondaire pour qu'ils soient considérés comme des participants admissibles à notre étude. Évidemment, le consentement des parents a été obtenu ainsi que l'assentiment des participants.

En ce qui a trait à la confidentialité, les élèves sont protégés par l'anonymat et toutes les données sont conservées de manière confidentielle. Pour ce faire, un numéro a été attribué à chaque participant afin qu'on ne puisse pas les reconnaître. Le sigle des élèves débutera par E pour élève, puis sera suivi de A ou B pour le groupe, et un chiffre entre 1 et 4 pour les désigner au sein de leur groupe. Ainsi, EA1, EA2, EA3 et EA4 sont les élèves faisant partie du groupe A. Dans les verbatims, l'orthopédagogue sera identifiée par O et la chercheuse par C. Les séances d'orthopédagogie ont été filmées afin de rédiger un verbatim qui a servi à l'analyse des résultats, mais les enregistrements n'ont servi qu'à cette étude et ont ensuite été détruits.

Les participants pouvaient retirer leur consentement à tout moment et leurs productions ont été remises à l'orthopédagogue.

En résumé, notre expérimentation s'appuyait sur les quatre phases de la méthodologie de l'ingénierie didactique et était inspirée des principes de la recherche collaborative. Deux groupes de quatre élèves en difficulté ont été formés par l'orthopédagogue pour participer à la collecte de données, en tenant compte des considérations éthiques énoncées. La collecte s'est déroulée sur trois séances, lors desquelles trois situations d'enseignement-apprentissage, pertinentes pour l'enseignement de la notion d'équivalence d'expressions algébriques selon notre analyse *a priori*, ont été animées. Dans le chapitre suivant, nous analyserons les données selon une méthodologie qualitative/interprétative afin d'*explorer la nature des interactions didactiques et des difficultés*

des élèves à propos de la notion d'équivalence d'expressions algébriques et de comprendre les choix didactiques qui favorisent le développement de la pensée algébrique.

CHAPITRE 4

ANALYSE DES RÉSULTATS

Dans ce chapitre, nous décrirons d’abord l’organisation des trois situations lors des trois séances que nous avons avec chaque groupe et nous présenterons la manière dont nous avons animé les séances. Nous ferons ensuite l’analyse des résultats pour chacune des situations en relevant les principaux thèmes abordés dans les différentes phases des activités. Les analyses descriptives et qualitatives qui suivent permettront de mieux comprendre les enjeux dans l’apprentissage de la notion d’équivalence d’expressions algébriques des élèves en difficulté d’apprentissage. Nous analyserons les résultats par situation.

Les situations « Les carreaux hachurés », « Les tuiles du plancher » et « Paul et Lucie » ont été présentées aux élèves des groupes A et B. Les élèves avaient accès à leurs calculatrice, crayon et gomme à effacer et nous leur fournissions les documents de travail. Les séances de 45 minutes avaient lieu le même jour pour les deux groupes, mais à des périodes différentes. Le tableau qui suit présente les activités réalisées lors de chaque séance pour chaque groupe.

Tableau 4.1 Organisation des trois situations sélectionnées

Séance	Groupe A	Groupe B
1	<u>Carreaux hachurés</u> EA4 absente	<u>Carreaux hachurés</u>
2	<u>Carreaux hachurés (suite)</u>	<u>Tuiles du plancher (phase 1)</u> EB1 absente
3	<u>Tuiles du plancher v2 et Paul et Lucie</u>	<u>Tuiles du plancher v2 et Paul et Lucie</u>

Les élèves du groupe A ont eu besoin de deux séances pour réaliser la première activité, tandis qu’une seule séance avait suffi pour le groupe B, ce qui justifie une organisation quelque peu différente pour chacun des groupes. Les élèves du groupe B ont donc pu commencer l’activité des tuiles du plancher dès la deuxième séance, mais n’ont qu’eu le temps de faire la phase 1 de l’activité, ce qui nous a fait prendre conscience que la situation gagnerait à être davantage axée sur la notion d’équivalence d’expressions algébriques et moins sur la production d’expressions algébriques.

C'est donc cette deuxième version de la situation « Les tuiles du plancher », suivie de la situation « Paul et Lucie », qui a été présentée aux deux groupes lors de leurs troisièmes séances.

Il est à noter que deux participantes, de groupes différents, se sont absentes une fois : l'élève A4 à la première séance, et l'élève B1 à la deuxième séance.

Pour ce qui est de l'animation des situations, la première séance de chaque groupe a été menée par l'orthopédagogue. La chercheuse occupait donc une posture d'observatrice participante. Elle a participé à quelques occasions seulement, lorsque sollicitée par l'orthopédagogue, pour la soutenir dans l'animation de la situation. En s'interrogeant à nouveau sur le choix d'animatrice et après avoir échangé avec le directeur de recherche et l'orthopédagogue, il a été convenu que la chercheuse allait assurer l'animation des séances suivantes. L'animation était initialement assurée par l'orthopédagogue pour sa forte relation avec les élèves, sa connaissance des forces et des faiblesses de chacun et les interactions plus naturelles avec elle qui nous auraient permis une observation plus naturaliste. Cependant, nous avons rapidement identifié certaines difficultés dans la gestion des situations proposées (possiblement par le manque de familiarité de l'orthopédagogue au regard des situations utilisées) qui pouvaient compromettre l'objet de notre recherche. La connaissance des forces et des faiblesses des élèves s'est trouvée être un effet contraignant puisque l'anticipation des réponses des élèves, plutôt que les contraintes spécifiques de la situation, semblait guider le développement de la gestion de la situation avec quelques traces d'enseignement explicite, approche très encouragée à l'école. L'orthopédagogue nous a fait part de sa difficulté à se détacher de cette approche, tout en partageant son intérêt et son ouverture à nos propositions avec nous.

Dans les sections suivantes, nous présenterons les productions des élèves concernant les situations d'enseignement-apprentissage. Nous présenterons certaines difficultés rencontrées par les élèves et les stratégies d'intervention destinées à favoriser leur apprentissage de l'équivalence d'expressions algébriques.

4.1 Les carreaux hachurés

La situation des carreaux hachurés sera analysée à travers trois grands thèmes qui reflètent les trois phases de la situation : d'abord, le passage d'une stratégie de dénombrement à une stratégie de calcul à la phase 1, ensuite, l'expression d'une méthode à la phase 2, puis, l'écriture algébrique à la phase 3. Finalement, nous traiterons de la discussion sur l'équivalence d'expressions algébriques.

4.1.1 Phase 1 : Le passage d'une stratégie de dénombrement à une stratégie de calcul

La première phase débute par une tâche très simple dans laquelle les élèves devaient trouver le nombre de carreaux hachurés sur la figure donnée. Tous ont compté 16 carreaux hachurés sur la figure, sauf un élève qui en avait compté 17 par erreur. Les élèves ont utilisé une stratégie de dénombrement pour répondre à la tâche, comme prévu.

Dans le groupe A, l'orthopédagogue a demandé aux élèves de trouver une autre façon de compter le nombre de carreaux hachurés, sans les dénombrer. Cette étape n'était pas prévue dans le schéma d'enseignement puisqu'aucune des variables didactiques de la situation ne justifie l'utilisation d'une stratégie alternative.

Groupe A

O : OK là j'aimerais ça que tu vérifies ta réponse, en trouvant une autre façon de les compter, qui n'est pas nécessairement juste en les comptant un à un comme tu viens de faire. Comment tu pourrais faire autrement ?

EA2 : Ah non ça [ne] marche pas.

O : Quoi ? Qu'est-ce que tu pensais faire ?

EA2 : Bien 5×5 , mais c'est parce qu'il y en a au milieu, ça fait que ça [ne] marche pas. Ah ! 5×5 , 20, moins les trucs au milieu. Non ?

O : Qu'est-ce que vous en pensez ?

EA1 : $5 \times 5 - 20$.

EA2 : $20 - 9$.

EA1 : Ça donne 5.

EA2 : $20 - 9$, non ça [ne] marche pas...

O : Bien on peut l'essayer, écris-le, 5×5 ça fait combien, puis si tu enlèves ceux au milieu ça fait combien. Là le but c'est de les essayer.

EA2 : Ah non je sais qu'est-ce que ça donne, je me suis trompée, laisse faire.

(...)

EA2 : Ouais, ça marche. (...) $25 - 9$.

O : Ok.

EA2 : Ça donne 16.

Ici, EA2 propose une stratégie inattendue, qui n'avait pas été anticipée dans l'analyse *a priori*, mais tout aussi appropriée, qui consiste à trouver le nombre de carreaux au total et y soustraire le nombre de carreaux blancs pour trouver le nombre de carreaux hachurés. Dans le cas de cet exercice, il suffisait effectivement de faire $5 \times 5 = 25$, puis $25 - 9 = 16$. Grâce au support visuel, l'élève a pu trouver le nombre de carreaux blancs en les dénombrant.

Pour la séance avec le groupe B, la chercheuse a rappelé à l'orthopédagogue que les élèves n'avaient pas à trouver des stratégies différentes à la phase *Ia* et qu'il suffisait qu'ils dénombrent les carreaux hachurés pour répondre à la question et pour passer à la suivante. L'orthopédagogue n'a donc pas demandé au groupe B de trouver d'autres façons de compter le nombre de carreaux hachurés. Toutefois, lorsque les élèves ont répondu à la question *a* et que l'orthopédagogue a annoncé la question suivante, un élève a voulu intervenir pour proposer une autre stratégie possible pour la question *a* qui lui aurait permis d'obtenir son résultat de 16 carreaux hachurés, maintenant connu.

Groupe B

EB2 : Sinon tu as juste à faire 5×4 .

O : OK, ça fait quoi 5×4 ?

EB3 et EB4 : Ça fait 20.

EB2 : OK d'abord... (EB2 compte les carreaux de la dernière rangée du carré.)

EB4 : Ça fait 25.

O : 5×4 ça fait 20, pas 25.

EB4 : Non, mais qu'est-ce qu'il va dire ça fait 25. (EB4 anticipait que EB2 allait proposer 5×5 .)

O : OK bien qu'est-ce qu'il va dire ?

EB4 : 5×5 .

EB1 : Comment tu sais ce qu'il va dire ?

EB4 : Parce que je sais, il les comptait.

[...]

O : Tu veux dire qu'il y en a cinq ici ? (O pointe la première rangée.)

EB2 : Oui, bien il y en a cinq là, puis bien... Il y a quatre carrés là, euh... il y a quatre lignes. (Il fait référence aux quatre côtés puisqu'il fait un geste arrondi avec sa main comme s'il faisait le périmètre du carré.)

O : OK donc 5×4 , mais ça fait 20.

EB2 : Ouais... Problème, problème

EB1 : 5×5 c'est pour savoir tout.

[...]

O : OK, si tu fais 5×5 tu aurais vraiment tous les carreaux.

L'élève B2 proposait de passer par une stratégie de calcul où il aurait multiplié 5 carreaux par 4 côtés, mais il s'est aperçu qu'il n'obtenait pas la bonne réponse (20 plutôt que 16), sans comprendre pourquoi. Sa camarade, l'élève B1, a, quant à elle, attribué du sens au calcul de l'élève B4 (5×5) et reconnaissait que cette démarche n'était pas appropriée puisqu'elle permettrait de trouver le nombre total de carreaux dans la figure. L'orthopédagogue a confirmé les propos de l'élève B1 et est passée à l'énoncé de la question *b*, sachant qu'il sera possible de revenir sur les propos tenus des élèves en *a* pour valider les méthodes de calcul qu'ils proposeront en *b*.

À la question *b*, aucun support visuel n'est proposé. Les élèves peuvent « s'imaginer » la figure, se faire une représentation mentale de ce à quoi elle ressemblerait à partir du modèle proposé. Rappelons que le nombre de carreaux sur le côté du carré (67) a été choisi dans le but de contraindre cette stratégie de dénombrement et favoriser le passage à une stratégie de calcul.

Les consignes de l'exercice *b* ont été données de la même façon aux deux groupes. Comme les élèves des deux groupes ne semblaient pas comprendre qu'il y avait 67 carreaux sur chaque côté du carré, l'orthopédagogue a passé son doigt sur chaque côté du carré de la phase *1a*, toujours affiché au tableau, en répétant « 67, 67, 67, 67 ». En précisant la consigne de la sorte, l'indication de l'orthopédagogue a donné lieu aux mêmes stratégies de calcul dans les deux groupes, soient $67 + 67 + 67 + 67$ et 67×4 , bien que les élèves du groupe B aient constaté que la stratégie de multiplier le nombre de carreaux sur le côté par quatre côtés ne fonctionnait pas lors de la phase *1a*.

Groupe B

O : [...] Le *b*, donc cherchez le nombre de carreaux hachurés dans un carré similaire à celui-là, mais qui aurait 67 carreaux sur un côté. (EB1 fait un bruit d'incompréhension.) Ça fait que tantôt lui dans le dessin tu en as 5 (O pointe la première rangée.), mais imagine que c'est 67. (O continue à passer sur la première rangée avec sa main en faisant des allers-retours.) 67, 67, 67, 67. (O fait le tour du carré.) Ça fait combien de carreaux rouges ça ?

EB3 : Sur juste un coté ? (EB3 veut savoir si on cherche le nombre de carreaux sur un côté, alors qu'on cherche le nombre de carreaux hachurés.)

O : Oui, sur un côté c'est 67.

EB4 : Mais nous on veut les quatre côtés.

EB1 : Mais c'est ça tu vas faire plus. $67 + 67 + 67 + 67$.

[...]

EB2 : Moi [aussi] j'ai fait $67 + 67 + 67 + 67$.

EB3 : Il y a la multiplication hein qui existe !

EB4 : Ouais, fois 4 !

EB2 : Ouais, mais si je fais ça, l'autre fois ça [n'] avait pas marché. (La stratégie avait été mise en échec, mais sans comprendre pourquoi...)

Le groupe A a aussi évoqué cette stratégie à la question *b*.

Groupe A

O : Ça fait qu'imaginer que tu as quelque chose qui ressemble à ça, tu as le contour qui est tout rouge comme ça, l'intérieur est blanc, mais tu as 67 carreaux sur chaque côté. (O passe son doigt sur chaque côté comme si elle montrait le périmètre.)

EA2 : Sur chaque ?

O : 67, 67, 67, 67 (en passant sa main sur chaque côté). Qu'est-ce que tu pourrais faire pour savoir le nombre de carreaux rouges que ça fait ?

EA2 : 67×4 .

(...)

O : 67×4 , il y en a tu qui ont d'autres idées ?

EA2 : Tu fais $67 + 67 + 67 + 67$.

Nous pouvons ici penser que la reformulation de la consigne par l'orthopédagogue (répéter « 67, 67, 67, 67 ») et son geste (passer son doigt sur chaque côté en faisant le périmètre du carré) ont eu un impact sur la stratégie des élèves. La répétition dans le geste et la parole de l'orthopédagogue pourrait avoir favorisé l'émergence de cette stratégie d'addition répétée « $67 + 67 + 67 + 67$ ».

L'orthopédagogue a reconnu une difficulté dans la stratégie proposée, mais a choisi de la laisser en suspens : elle ne l'a ni approuvée, ni remise en question, mais a plutôt cherché à solliciter la participation des autres élèves pour voir si d'autres stratégies émergeraient et remettraient en question cette première proposition.

Dans le groupe B, puisque les élèves ne négociaient pas et ne remettaient pas en question la validité de leur stratégie ($67 + 67 + 67 + 67$ et 67×4), nous avons constaté qu'ils ne parviendraient pas à la faire évoluer.

L'orthopédagogue est donc intervenue en faisant un retour au cas précédent, plus petit, de 5 carreaux sur le côté pour mettre en évidence la difficulté à multiplier le nombre de carreaux sur le

côté par 4. Pour relever ce qui ne fonctionne pas, l'orthopédagogue a noté l'algorithme « $5 \cdot 4 = 20$ » au tableau et a fait remarquer aux élèves qu'ils avaient auparavant obtenu 16 carreaux hachurés. Les élèves semblaient accepter leur réponse $67 \times 4 = 268$, malgré la reconnaissance d'un problème, en évoquant la « magie » : ils ne proposaient pas de raison qui puisse le justifier, ni de solution à ce problème. La chercheuse est alors intervenue dans le but de discuter de la contradiction produite par les deux résultats différents.

Groupe B

O : Dans les deux cas, ça donne combien ?

EB1 et EB2 : 268 !

O (à EB2) : Tantôt là, quand tu as suggéré de faire fois 4, tout le monde s'est comme un peu moqué en disant « Mais non, ça ne marche pas ». Parce que quand tu avais fait 5×4 ça t'avait donné...

EB3 : 20. (O écrit $5 \cdot 4 = 20$ au tableau.)

O : Puis quand vous aviez compté, ça vous avait donné...

EB3 : 16.

O : Ça fait que ça [ne] marchait pas tantôt de faire fois 4.

EB2 : Ouais, c'est ça qui est bizarre...

EB4 : Tantôt ça [ne] marchait pas, là ça marche. (En faisant référence au carré de 5 carreaux de tantôt et maintenant au carré de 67 carreaux sur le côté.)

EB2 : Magie !

EB4 : La magie de Noël.

EB1 : Il y a un problème.

O : Oui, il y a un problème.

EB2 : Problème, problème.

[...]

C : Mais pourquoi ça fait 20, ça [ne] fait pas 16 ? Vous l'avez compté, c'est supposé donner 16.

EB2 : Parce que c'est la vie.

EB1 : Parce que si nous on compte, peut-être si on fait comme 67 de chaque côté, ça va faire comme moins aussi, ça [ne] va pas toujours marcher?

EB4 : On a oublié quatre carreaux en comptant.

EB2 : Ah non, peut-être parce que c'est un nombre impair ?

EB1 : Peut-être qu'on a *skip* un ?

EB2 : Je [ne] sais pas.

EB4 : Quand on fait fois 4... Si on compte tout, ça donne 20. En comptant tous les bords.

EB3 : Est-ce qu'il faut faire moins 4 après ?

O : Après quoi ?

EB3 : Après qu'on ait calculé 5×4 .

O : Ok ça fait que tu veux dire que tu ferais comme $20 - 4$?

EB3 : Ouais.

O : Ça donne quoi $20 - 4$?

EB3 : 16.

O : Êtes-vous surs ?

EB4 et EB1 confirment.

O : Ça fait que toi tu as suggéré moins 4. Pourquoi tu suggères moins 4 ?

EB3 : Bien parce que 16... il y en a juste 16 puis [il] faut rajouter un carreau à chaque coin (EB3 pointe les quatre coins.) pour que ça donne 20 carrés rouges.

La différence de quatre a été évoquée par l'élève B4 qui tentait de comprendre quel était le problème de calcul : « On a oublié quatre carreaux en comptant. » En suggérant que l'écart de quatre soit un oubli, l'élève B4 ne semblait pas accorder de sens à ces quatre carreaux « oubliés ». Pour justifier la soustraction de 4, l'élève B3 fait l'opération inverse : à partir de la bonne réponse connue grâce au dessin, soit 16, il ajoute 4 carreaux pour arriver à 20 et y associe du sens en faisant référence aux 4 coins. Il semblerait que les élèves arrivent à enlever 4 en se basant strictement sur le calcul numérique, sans expliciter que le fait d'avoir compté deux fois les carreaux dans les coins justifiait ce calcul ($20 - 4$). Cette proposition de calcul fonctionne et est appropriée, mais n'est pas justifiée par le contexte.

Le groupe A, quant à lui, a fait d'autres tentatives de calculs avant que l'orthopédaogogue n'intervienne sur la stratégie initiale de la multiplication par 4. Par exemple, l'élève A2 qui proposait la stratégie géométrique consistant à soustraire le nombre de carreaux blancs au nombre total de carreaux à la phase *1a* a proposé 67×67 , puis l'a rapidement invalidée. Ce premier calcul est pertinent dans la mesure où l'élève parviendrait à développer son idée jusqu'au bout : pour obtenir le nombre de carreaux blancs, elle devra soustraire 2 au nombre de carreaux sur le côté et multiplier ce nombre par lui-même pour ensuite soustraire le nombre de carreaux blancs au nombre total de carreaux.

Groupe A

O : Autre chose ?

EA2 : Ah 67... Ah non ça [ne] marche pas.

O : Qu'est-ce qui [ne] marche pas ?

EA2 : Tu m'avais dit à un moment donné on pouvait faire genre 67 fois le nombre en haut, 67×67 , mais ça [ne] va pas marcher.

EA1 : 67 à la quatre.

O à EA2 : Si tu fais 67×67 , là tu vas avoir tout ton carré.

EA2 : Ça [ne] marche pas. (...) À la quatre...

O : À la quatre ça ferait $67 \times 67 \times 67 \times 67$.

EA1 : Je me rappelle même plus comment faire sur la calculatrice.

L'élève A1 a proposé 67^4 , développé comme $67 \times 67 \times 67 \times 67$ par l'orthopédagogue. Cette stratégie n'a cependant pas été plus approfondie par les élèves, probablement, parce qu'ils ne pouvaient y rattacher de sens.

Plusieurs stratégies ont donc été relevées dans le groupe A : « 67×4 ou $67 + 67 + 67 + 67$ », « 67×67 » et « 67^4 ». Seules les deux dernières avaient été invalidées. La chercheuse a alors dû intervenir sur la validité de la première stratégie, restée en suspens, pour que les élèves reconnaissent qu'elle n'est pas adéquate.

Groupe A

C : Est-ce que tantôt ça fonctionnait quand on faisait 5×4 ?

EA2 : Ouais. Euh non, non.

O : Tantôt quand on faisait 5×4 .

EA2 : Bien non, ça [ne] marche pas parce que c'est 5×5 . Attend quoi ?

O : Ça fait quoi 5×4 ?

EA2 : Ça donne 20.

O : Ok.

EA2 : 5×5 ça donne 25.

O : Avais-tu 20 ou 25 carrés rouges tantôt ?

EA2 : 25, c'est juste que je me suis trompée.

EA1 : 16.

O : Il n'y en avait pas 20 ni 25, il y en avait 16. Bien vu.

EA2 : C'est parce que tu enlèves le nombre de carrés blancs. Tu enlèves moins 9.

O : Ah, moins 9 ! Donc $25 - 9$.

EA2 : Ça donne 16.

Cette intervention permet de déterminer l'invalidité de la stratégie 5×4 . Cependant, aucune explication n'est donnée concernant les raisons de cette invalidité.

Après avoir explicité que $5 \times 4 = 20$, que $5 \times 5 = 25$ et que ses deux calculs ne permettent pas d'obtenir la bonne réponse de 16 carreaux hachurés au premier exercice, l'élève A2 propose d'utiliser la multiplication des carreaux sur un côté par 4 à l'intérieur d'une autre stratégie. Elle pense trouver le nombre de carreaux rouges en soustrayant le nombre de carreaux blancs au nombre total de carreaux dans la figure.

Groupe A

O : Ok ça fait que là si on revient à celui de 67 carreaux, maintenant qu'on sait ce qui a fonctionné dans l'autre, qu'est-ce qu'on pourrait faire avec les 67 carreaux ?

EA2 : 67...

EA1 : 67×67 .

EA2 : Moins le nombre au milieu. Il faut trouver le nombre au milieu de carreaux blancs.

O : On le sais-tu ?

EA2 : Non. Ah non je sais, je sais, je sais...

EA2 se met au travail et semble savoir comment faire. Les autres élèves attendent.

[...]

EA2 : Il y a 4221 carrés blancs, mais ça [ne] marche pas. Non ça [ne] marche pas.

O : Comment tu as trouvé ça ?

EA2 : J'ai fait 67×67 ça fait que [...] ça m'a donné 4489, puis après ça j'ai fait ça moins le nombre de carrés rouges.

O : Mais comment tu sais qu'il y avait 268 carrés rouges ?

EA2 : Parce que j'ai fait 67×4 .

O : OK, mais tantôt quand on faisait fois 4, quand on avait les 5 carreaux, ça faisait tu 16 ?

EA2 : Non. Mais j'ai fait $67 + 67 + 67 + 67$, puis ça m'a donné la même réponse. Ça fait que ça marche.

L'élève A2 multiplie 67 par lui-même pour trouver le nombre total de carreaux, mais ne connaît pas le nombre de carreaux blancs à soustraire. Pour le trouver, elle croit bon de soustraire le nombre de carreaux rouges qu'elle pensait avoir trouvé ($67 \times 4 = 268$) au nombre total de carreaux ($67 \times 67 = 4489$). Elle calcule alors $4489 - 268 = 4221$.

Nous pouvons penser que l'élève n'a pas « lu à travers l'expression » (Arcavi, 2005) pour opérer. Il semblerait que les manipulations de l'élève soient réalisées plutôt intuitivement et que l'élève perd de vue l'enjeu du problème, car en cherchant le nombre de carreaux blancs, l'élève utilise le nombre de carreaux hachurés dans un calcul intermédiaire. La stratégie de l'élève semble dépourvue de sens. De plus, l'élève ne soustrait pas le nombre de carreaux blancs au nombre total de carreaux. Comme il avait déjà été établi que la multiplication du nombre de carreaux sur le côté par 4 ne permettait pas de trouver le nombre de carreaux rouges, l'orthopédagogue a priorisé une intervention centrée sur la manière inadéquate de trouver le nombre de carreaux rouges ($67 \times 4 = 268$).

Un second retour au cas *a* a été fait par l'orthopédagogue pour penser le cas *b*, sans succès. L'élève A2 ne parvient toujours pas à invalider les stratégies 67×4 et $67 + 67 + 67 + 67$. Le passage du

cas a (5 carreaux sur le côté) au cas b (67 carreaux sur le côté) semblait être une grande difficulté pour cette élève.

De plus, l'élève valide sa réponse ($67 \times 4 = 268$) en la comparant à un calcul équivalent ($67 + 67 + 67 + 67 = 268$). Cela porte à croire que la résolution de la partie a dépendait du support visuel et qu'une fois celui-ci retiré, la stratégie ne pouvait pas être généralisée. Le grand nombre de carreaux et l'absence de support visuel posaient ici une difficulté à l'élève, qui devait résoudre un problème similaire au cas a , mais dans des conditions qui complexifiaient la tâche.

La stratégie géométrique qui consiste à soustraire les carreaux blancs au milieu n'avait pas été anticipée dans notre analyse *a priori*. L'orthopédagogue est intervenue auprès de l'élève A2 pour lui montrer qu'en multipliant le nombre de carreaux sur le côté par 4, comme elle l'avait proposé initialement, les coins seraient comptés deux fois. Observons que cette intervention est centrée sur le calcul du nombre de carreaux sur les côtés (comme demandé dans la consigne) sans tenir compte que, pour l'élève, ce calcul n'était qu'un pas intermédiaire pour l'utilisation d'une autre stratégie. L'orthopédagogue évite ainsi le travail sur la nouvelle stratégie proposée par l'élève et oriente la discussion vers celle qui lui convient didactiquement. Pour ce faire, elle a noté au tableau $5 \times 4 = 20$ et a fait le périmètre du carré avec son crayon en répétant « tu prends ça, tu prends ça, tu prends ça, tu prends ça ».

Groupe A

O : Tantôt quand on faisait celui avec les côtés, avec 5 carreaux sur le côté, c'est quoi tu avais dit qu'on devait faire ? Tu avais dit 5×4 ?

EA2 : Ouais, parce qu'il y a quatre côtés.

O : Il y a quatre côtés et ça, ça donne 20. (Elle note $5 \times 4 = 20$ au tableau.)

EA2 : Ah non ! [...]

O : Sauf que là on sait qu'il y en a 16.

EA2 : Noooooon !

O : Donc qu'est-ce qui arrive quand tu fais 5×4 ? (O fait le périmètre en pointant avec son crayon.) Tu prends ça, tu prends ça, tu prends ça, tu prends ça.

EA2 : Mais c'est parce que fallait trouver le total qui est de... Ah je [ne] comprends plus... Ça donne 29, moins... Ah, mais je [ne] comprends pas...

O : Comment ça se fait que quand tu fais 5×4 ça fait 20 (O encercle 20.), alors que quand tu les comptes un par un, tu sais que c'est 16 ? (O encercle 16.) C'est quoi le problème ?

EA2 : Ah, on recompte chaque côté. On recompte chaque côté. Les coins là. On les recompte à chaque fois.

O : Ceux-là ? (O encadre les carreaux aux quatre coins.)

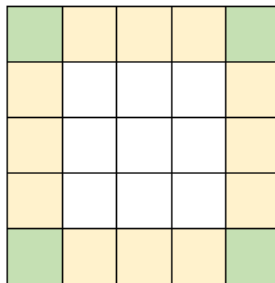
EA2 : Ouais parce qu'on fait une ligne de 5 (O pointe au tableau avec son crayon la ligne du bas.), une ligne de 5 (O pointe une autre ligne.), une ligne de 5 (O pointe une autre ligne.), une ligne de 5 (O pointe une autre ligne.), ça fait qu'on recompte à chaque fois les coins, puis ça ça fait que ça me donne 20.

O : Ça t'en donne de plus parce que c'est compté plus qu'une fois la même affaire. [...] Ça serait quoi à ce moment-là la solution à ça ? Parce que c'est vrai qu'avec le 67, tu [ne] peux pas les compter un par un : tu [ne] l'as pas le dessin. Mais [EA2] est sur la bonne voie ici, elle dit : il y en a 4 comme ça là, 4 côtés, mais ça m'en fait un peu de trop parce qu'il y en a qui sont comptés deux fois.

EA2 : Tu dois prendre les 3 au milieu. 3 au milieu, 3 au milieu, 3 au milieu. Rajouter 4, parce que tu as quatre côtés, comme ça tu [ne] les comptes pas.

L'élève A2 a remarqué qu'en multipliant par 4, les coins sont comptés deux fois. Plutôt que de soustraire les quatre coins comptés en double, l'élève propose une autre stratégie : compter les carreaux des quatre côtés sans les coins, puis ajouter les quatre coins. L'élève explique sa stratégie en faisant des gestes avec ses doigts qui laissent penser que les « 3 au milieu » auxquels elle fait référence sont placés dans différentes directions. Ce geste confirme qu'elle propose de compter les trois carreaux au milieu de chaque côté du carré (représentés en jaune dans la figure qui suit) et de « rajouter 4, parce que tu as quatre [coins] » (représentés en vert).

Figure 4.1 Stratégie proposée par l'élève A2



Cette stratégie peut se traduire par l'expression $(x - 2) + (x - 2) + (x - 2) + (x - 2) + 4$ ou encore $4(x - 2) + 4$.

Puisque cette stratégie n'avait pas été anticipée dans l'analyse *a priori*, l'orthopédagogue n'y a pas accordé d'importance et a plutôt guidé l'élève, qui venait de trouver que les coins étaient comptés

en double, vers la stratégie $4x - 4$. Encore une fois, l'analyse *a priori* de la situation semble conditionner le travail de l'orthopédagogue dans le sens d'écartier toute stratégie non prévue.

L'orthopédagogue revient ainsi sur une des stratégies prévues et explique qu'il est possible de multiplier les 5 carreaux rouges par 4 côtés et de soustraire les 4 coins pour obtenir la bonne réponse de 16 carreaux rouges :

Là si je récapitule, pour le petit carré on a trouvé un truc. On savait que si on prenait nos 5 carreaux rouges, que je le multipliais par 4 côtés, ça donnait 20. Puis là on pouvait prendre ça, puis, tu as dit tantôt « bien on va enlever les 4 coins », moins les 4 coins... ça donne 16.

L'orthopédagogue note au tableau :

$$5 \square \cdot 4 \text{ côtés} = 20$$

$$20 - 4 \text{ coins} = 16$$

L'élève A2 a alors compris que pour le cas *b*, « tu ferais la même affaire [...] tu additionnes toutes les 67, puis tu enlèves 4 », comme elle le fait à droite de la figure ci-dessous.

Figure 4.2 Démarche de l'élève A2

b. Cherchez le nombre de carreaux hachurés dans un carré similaire à celui-ci, mais qui a 67 carreaux sur le côté.

c. Cherchez le nombre de carreaux hachurés dans un carré similaire à celui de la figure, mais qui a 865 carreaux sur le côté.

À la question *b*, l'élève A2 faisait $67 + 67 + 67 + 67$ et enlevait 4, tandis que, dans le cas *c*, elle multipliait le nombre de carreaux sur le côté par 4 et enlevait 4. L'élève A2 utilise donc deux écritures différentes pour noter sa méthode de calcul.

La connaissance de l'addition répétée comme un sens de la multiplication permet aux élèves de reconnaître l'équivalence entre $67 + 67 + 67 + 67$ et 67×4 . Cette connaissance se manifeste à d'autres moments, notamment à la phase 2. L'équivalence de l'addition répétée 4 fois et la multiplication par 4 est donc explicitée.

À la question *c*, les élèves de groupe B ont fait leurs démarches individuellement. Deux élèves ont obtenu 3456 et deux autres ont obtenu 3460 ; ces deux derniers se sont rapidement aperçus qu'ils avaient oublié d'enlever 4.

4.1.2 Phase 2 : Le passage à l'expression d'une méthode générale

Une fois la méthode de calcul trouvée, les élèves devaient l'écrire en construisant un texte. La phase 2 de la situation des carreaux hachurés avait l'intention d'aider les élèves à généraliser leurs calculs de sorte à produire, à la phase 3, une formule de calcul qui permette de trouver le nombre de carreaux hachurés pour n'importe quel carré construit sur le même modèle.

Dans le groupe A, les élèves A1 et A3 ne semblaient pas comprendre ce que l'élève A2 proposait à la première phase. L'élève A2 travaillait de façon autonome sur sa feuille à la phase 2. Seul l'élève A3 semblait être passif, comme s'il attendait qu'on lui donne la réponse. L'orthopédaogogue a alors perçu une difficulté dans l'avancement de la situation et a décidé d'intervenir auprès de l'élève A3, pendant que les deux autres élèves travaillaient individuellement. Pour faire avancer la situation, elle l'a questionné sur ce qui a été fait à la phase précédente :

Groupe A

O : Tu sais, ce qu'on faisait tantôt, c'était quoi le premier calcul que vous avez fait ?

(Silence.)

EA3 : Compter les carreaux.

O : Lesquels ? Toutes ?

EA3 : Non (...) je sais pas trop.

O : Elle faisait des plus, plus, plus. Toi tu faisais quelque chose de plus efficace.

EA3 : Ah, multiplication !

O : Ouais, ok, ça fait que c'est quoi comme multiplication que tu as fait?
 EA3 rapproche sa feuille pour trouver l'information.
 O : Tu as fait quoi multiplié par quoi?
 EA3 : 865×4 . (EA3 a trouvé la multiplication sur sa feuille sans y rattacher du sens. On cherchait ici à noter en message la première étape pour expliquer comment trouver le nombre de carreaux hachurés. Il aurait fallu dire qu'on a multiplié le nombre de carreaux d'un côté par 4.)
 O : OK, et pourquoi tu avais choisi 865 ?
 EA3 : Parce que c'était le nombre de carreaux sur le côté.
 O : Puis si c'était 25 carreaux, tu aurais fait quoi?
 EA3 : 25×4 .
 O : OK, ça fait que dans le fond c'est quoi qu'on multiplie par 4 ?
 EA3 : Ah parce qu'un côté, c'est le nombre qu'ils disent. (Il fait référence à la consigne.)
 [...]
 O : Ça serait quoi ton autre étape après ?
 EA3 : Moins 4.
 O : Qu'est-ce que tu fais moins 4 ?
 EA3 : La réponse de ça (en faisant référence à la première étape). $3460 - 4$.

Dans l'extrait ci-dessus, on remarque des indices d'un effet de contrat (effet Topaze) lorsque l'élève attend de se faire proposer un contrat qui exige le moins d'effort. L'élève identifie finalement les calculs effectués dans le dernier problème résolu sur sa feuille. Cependant, l'identification de ce calcul ne permet pas à l'orthopédagogue d'identifier les connaissances de l'élève concernant la méthode générale. En faisant un retour à la phase 1 et en proposant un nouveau cas (25 carreaux sur le côté), l'orthopédagogue a l'intention de vérifier la généralité de la méthode de calcul utilisée. Cependant, des doutes persistent par rapport au sens élaboré autour de ce calcul : est-il associé à la compréhension de la manière d'effectuer le comptage ou s'agit-il d'un effet de contrat didactique?

Dans le groupe B, les élèves ne semblaient pas comprendre la consigne. L'orthopédagogue a donc expliqué ce qui était demandé :

Groupe B

O : Vous avez essayé une méthode là, vous avez fait quelque chose pour trouver le nombre de carreaux rouges à partir de 865 sur un côté. C'est quoi les étapes que vous avez faites pour le trouver, c'est quoi vos calculs ?
 EB1 : Bien on a fait fois 4, puis après on a fait moins.

L'élève B1 reconnaissait une méthode générale, « on fait fois 4, puis après on a fait moins », mais ne faisait pas référence au « nombre de carreaux sur le côté », comme si elle tenait pour acquis que l'on opérât sur la seule donnée connue, sans y attribuer de référent. Aussi, elle ne précise pas le nombre à soustraire dans la méthode. L'orthopédagogue a demandé aux élèves d'écrire leur méthode en phrases sur leur feuille. Les élèves ont travaillé individuellement, puis ont comparé leurs réponses.

Groupe B

EB1 : Étape 1, trouve le nombre de tous les carreaux sur le côté, fois 4, est égal à 3460. Après étape 2, on fait moins 4 pour les carrés qui sont utilisés deux fois, qui donne 3456.

EB2 : Ce qu'il faut faire c'est prendre le 865, prendre le côté, le multiplier par le nombre de côtés que tu as et vu que c'est 4, il faut faire moins 4 parce que sinon tu double des carrés.

O : Est-ce que c'est toujours moins 4 peu importe ton nombre de carrés ?

EB2 : Non, ça peut être une forme géométrique ou je [ne] sais pas quoi, peut-être que ça peut être 40. (EB2 pense à d'autres polygones.)

EB1 : Oui !

O : OK, mais mettons que c'est toujours un carré.

EB1 : Oui oui, parce qu'il y a juste quatre côtés.

EB4 : Ça reste 4.

EB2 : Non non, ça dépend, est-ce que c'est toute la même mesure ?

EB1 : N'importe quel carré il y a toujours 4 côtés, même s'il y a 1000 carrés entre, il y a toujours 4 côtés. (EB1 veut dire qu'il y a toujours 4 coins.)

O trace cinq traits horizontaux et verticaux pour augmenter le nombre de carreaux dans le carré et encercle les coins pour appuyer les propos de l'élève B1.

EB2 : Ah ok il y a toujours quatre coins.

On peut donc penser que l'élève B2 voulait généraliser sa méthode pour trouver le nombre de carreaux hachurés pour n'importe quelle figure géométrique. Cependant, nous cherchions une méthode qui permettrait de trouver le nombre de carreaux hachurés pour n'importe quel carré. L'intervention de l'orthopédagogue avait donc l'intention de recentrer la discussion sur la figure en question.

Les élèves B3 et B4, quant à eux, n'ont pas produit de méthode générale à la phase 2. Ils ont plutôt retranscrit les deux étapes de calcul réalisées à la phase 1c en les numérotant (voir Figure 4.3 et Figure 4.4).

Figure 4.3 Production de l'élève B3 à la phase 2

① Au début, il faut calculer 865 fois 4 = 3460
 ② il faut faire 3460 - 4 = 3456
 résultat obtenu
 J'ai soustrait 3100 - 4 = 3456

L'orthopédaogogue a demandé à l'élève B4 d'utiliser des mots dans chacune de ses étapes. L'élève ajoute donc qu'il « fai[t] fois 4 » et doit « ensuit[e] fair[e] moins 4 pour trouver ce résultat ».

Figure 4.4 Production de l'élève B4 à la phase 2

① 865 * 4 = 3460 fois 4
 ② 3400 - 4 = 3456
 résultat
 trouver le résultat

Le « nombre de carreaux sur un côté » n'est donc pas adressé : les élèves ne semblent pas ressentir le besoin de désigner de manière spécifique le terme général. Ils réfèrent au nombre de carreaux sur le côté par l'intermédiaire de sa valeur dans le dernier cas, soit 865 carreaux sur le côté, ce qui relève d'une généralisation factuelle.

C'est aussi ce que l'élève A3 avait fait dans le groupe A.

Figure 4.5 Production de l'élève A3 à la phase 2

1. Multiplier le chiffre 865 par 4
 2. Soustraire la réponse à 4

Puisque les élèves sont restés fixés sur le cas de 865 carreaux, l'orthopédaogogue a perçu une difficulté à exprimer une méthode générale qui conviendra pour n'importe quel carré. Elle est donc intervenue en demandant aux élèves du groupe B ce qu'ils feraient avec un carré ayant 2860 carreaux sur le côté, puis a augmenté le nombre de carreaux à un million. Tous les élèves étaient

d'accord pour faire « fois 4, moins 4 ». La chercheuse et l'orthopédagogue sont donc intervenues pour amener les élèves à préciser leur méthode et à produire une généralisation contextuelle.

Groupe B

O : Puis mettons que j'avais 2860 petits carreaux sur un côté, tu suggérerais quoi ?

EB3 : Bien la même affaire, fois 4, moins 4.

[...]

O : Puis si tu avais un million de petits carreaux sur un côté?

EB3 : Même affaire.

O : C'est quoi qui est la même affaire ?

EB4 : Moins 4.

EB3 : Non.

EB4 : Fois 4.

C : Qu'est-ce que tu transformerais dans ton message pour que ton message soit valide peu importe le nombre de carreaux sur un côté ?

EB2 : Fois 4, moins 4.

[...]

O : Quoi fois 4 ?

EB4 : Le nombre de carreaux du début.

L'élève B4 fait référence au « nombre de carreaux du début » ; on voit la difficulté à préciser le fait qu'il s'agit du nombre de carreaux sur le côté (la variable de la situation).

La généralisation a semblé d'autant plus complexe pour l'élève A1 qui venait de trouver une nouvelle stratégie de calcul.

$$67 - 2 = 65$$

$$67 \times 67 = 4489$$

$$65 \times 65 = 4225$$

$$4489 - 4225 = 264$$

Il explique sa stratégie :

Groupe A

EA1 : Je vais t'expliquer comment je me suis rendu là. Au premier il y a 5 ici (pointe sur le dessin avec son crayon en traçant la première colonne), puis j'ai dit que ça c'était 67 (en repassant avec son crayon), puis moi j'ai trouvé combien de carrés il y a en dedans, donc j'ai fait moins 2 parce qu'ici il y a deux choses qui bloquent les trois à l'intérieur.

O : Qu'est-ce que tu veux dire ? Viens me montrer. J'aime ça, c'est logique ton affaire.
EA1 : Ça (pointe la première colonne de carrés rouges) moins ça (pointe la première rangée). Parce que ça c'est avec ça, puis ça c'est avec ça (voulant dire que le premier carreau de la colonne est aussi le premier carreau de la rangée, et le dernier carreau de la colonne est aussi le premier carreau de la dernière rangée) puis il y a juste 3 ici (pointe les 3 carreaux blancs de la deuxième colonne), et si tu fais 3 fois ça (fais un trait en forme de « L » rayant les 3 carreaux blancs de la deuxième colonne et les 3 carreaux blancs de l'avant-dernière rangée), ça donne 9, puis il y a 9 carreaux là-dedans (en pointant les carreaux blancs au milieu).

Il explique ensuite que 4489 représente « le nombre de carreaux en tout », et que 4225 représente « le nombre de carreaux qu'on a besoin d'enlever ». Ainsi, pour justifier son raisonnement, il s'appuie sur ce que représente la réponse de chaque calcul.

Groupe A

EA1 : Comme, si tu sais le nombre de carré sur l'extérieur, comme ça dit la ligne c'est combien (fait une ligne verticale avec sa main), mais si tu [ne] sais pas ça, tu sais l'intérieur, tu ajoutes 2, mais si tu sais, tu fais moins 2. (EA1 est aussi capable de raisonner à partir du nombre de carreaux blancs sur le côté.)

O : OK, ça fait que si on sait le nombre de carrés à l'extérieur, on fait quoi comme calcul ?

EA1 : Moins 2.

O : On fait le nombre de carrés à l'extérieur...

EA1 : Juste écrire, je [ne] sais pas, 800 quelque chose moins 2...

O : Moins 2 (elle écrit au tableau), sur un côté, moins 2. OK, puis après on fait quoi ?

EA1 : Tu fais le nombre que tu as trouvé, le nombre de comme la ligne (fait un geste de ligne verticale avec la main) fois le nombre, je [ne] sais pas... comme 865×865 .

O : On le multiplie par lui-même.

EA1 approuve : Hmmm, ça c'est le total.

O : C'est le produit, ouais.

EA1 : Puis après tu fais le nombre moins 2 fois le nombre que tu as soustrait.

[...]

EA1 : Après le total des deux tota[ux] moins, puis ça donne la réponse. (Ici, EA1 veut soustraire les deux résultats obtenus, mais formule sa pensée avec difficulté.)

Dans cet extrait l'élève A1 fait référence à différents nombres : le nombre de carreaux sur le côté, le nombre total de carreaux, le nombre de carreaux sur le côté du carré blanc, le nombre de carreaux blancs et le nombre de carreaux hachurés. Il avait de la difficulté à exprimer clairement chacun de ses calculs de façon généralisée et s'appuyait, lui aussi, sur un nombre connu tiré du cas de 865 carreaux sur le côté. Même si l'élève A1 s'appuyait sur un cas particulier pour s'expliquer, nous

pouvons remarquer qu'il maîtrisait sa stratégie et qu'il serait en mesure de l'utiliser pour n'importe quel carré.

Lors de cette deuxième phase, nous avons donc pu identifier deux difficultés majeures : la difficulté à généraliser le calcul (reconnaitre les opérations à faire sans utiliser d'exemples) et la difficulté à faire référence à la variable « nombre de carreaux sur le côté ». Ces difficultés ont cependant pu être surmontées grâce aux retours au cas précédent, et les élèves ont pu prouver leur compréhension en généralisant leur calcul à des cas beaucoup plus éloignés du premier, ce qui justifie la pertinence d'avoir fait varier le nombre de carreaux sur le côté du carré.

4.1.3 Phase 3 : Le passage à l'écriture algébrique

La troisième phase de la situation des carreaux hachurés consistait à trouver une formule qui permettrait de calculer le nombre de carreaux hachurés pour n'importe quel carré. Lors de cette phase, les élèves ont eu de la difficulté à exprimer leur méthode en utilisant des variables. La lettre x était utilisée par certains élèves pour désigner différents objets. La transformation des expressions s'est aussi avérée difficile, notamment pour l'expression comportant des exposants.

Dans le groupe A, la phase 3 s'est déroulée à la deuxième séance ; c'est donc la chercheuse qui a animé l'activité. L'élève A2 ne semblait pas comprendre la consigne et posait plusieurs questions concernant ce qui était attendu à cette phase. La chercheuse a donc précisé que l'objectif était de trouver une formule mathématique dans laquelle x représenterait le nombre de carreaux sur le côté et serait valide pour n'importe quel nombre de carreaux sur le côté. L'extrait qui suit montre que l'élève A2 ne savait pas comment désigner la réponse inconnue à son premier calcul autrement que par la lettre x . L'élève A2 a finalement trouvé une expression, équivalente par la commutativité de la multiplication, à inscrire comme « total » à son premier calcul.

Groupe A

C : Donc comment est-ce que tu écrirais ça en formule ?

EA2 : En formule mathématique ? <Oui.> Avec des chiffres ? <Avec des chiffres.> Je prends quel numéro pour pouvoir faire l'exemple ?

C : Tu prends un x , parce que là on ne sait pas on aura combien de carreaux sur le côté.

EA2 : Hein ! Donc le côté ça va être le x .

C : Oui, le nombre de carreaux sur le côté ça va être le x .

[...]

EA2 : Puis est-ce que le total ici je peux faire comme si c'était le x ou non ?

[...]

EA2 : Parce que si on prend le total de l'étape 1, ça veut dire qu'il faut un total ici. Mais est-ce que notre total ça peut être le x puis comme... vu qu'on [ne] sait pas c'est quoi la valeur du x ... Ah non ça va être... Ah attends ! Ça fait que ça va être x . (...) Ah ok attend.

L'élève A2 a noté :

$$\textcircled{1} x \cdot 4 = 4x$$

$$\textcircled{2} 4x - 4 =$$

Elle a ensuite expliqué le questionnement qu'elle a eu en ce qui a trait à sa première étape.

Groupe A

C : Très bien.

EA2 : C'est bien ?

C : Bien oui, c'est ce que tu faisais tantôt. Tu remplaçais ton x par tes différentes quantités.

EA2 : Oui, mais c'est juste ça ça m'a comme mélangée ici.

C : Pourquoi ça t'a mélangée ?

EA2 : Parce qu'on dirait que je me disais genre « ah, mais là il faut un total, ça fait qu'est-ce que mon total c'est juste x ou $4x$? », mais c'est $4x$ mon total.

C : Es-tu sûre ?

EA2 : Je pense que ouais.

C : Donc là tu l'as écrit en plusieurs étapes, mais ça serait quoi ta formule finale ?

EA2 : Ma formule finale ?

C : Oui, c'est quoi ta formule qu'on pourrait réutiliser pour trouver pour n'importe quel carré ?

EA2 : C'est $4x - 4$.

Dans le besoin de cette élève de donner une réponse à chaque calcul, nous pouvons apercevoir des traces de raisonnement arithmétique très liées au caractère procédural des expressions. Lorsque l'élève A2 pensait noter $x \cdot 4 = x$, avant de noter $x \cdot 4$ comme $4x$, on identifie des traces d'un raisonnement arithmétique : la nécessité d'exprimer « le résultat de $x \cdot 4$ » par une lettre. Ensuite, l'élève A2 a pu identifier que l'expression $4x - 4$ représentait sa formule finale.

L'élève A1 a aussi noté sa méthode en plusieurs étapes et a désigné la réponse à chaque calcul par la lettre x : $x \cdot x = x$, $x - 2 = x$, $x - 2 \cdot x - 2 = x$ et $x - x = x$.

Groupe A

C : $x - x$. Qu'est ce qui arrive si tu fais $x - x$?

EA3 : On soustrait un inconnu avec un inconnu.

EA1 : Zéro.

C : Avec la même quantité, ça va toujours te donner zéro.

EA1 : Mais c'est parce que ça c'est le 865, après ça c'est le 863. (EA1 pointe chaque x .)

Malgré le fait que certaines écritures produites sont valides d'un point de vue mathématique, elles ne sont pas pertinentes pour la situation en question. En effet, exprimer la formule avec plusieurs lettres lorsqu'on peut en utiliser une seule n'aide pas à la résolution du problème. La chercheuse a accompagné de manière soutenue l'élève pour qu'il parvienne à produire une expression algébrique qui représenterait sa stratégie, en utilisant une seule lettre. Les écritures algébriques que l'élève produisait ont donc beaucoup évolué et ont été transformées plusieurs fois, à partir de la rétroaction et des commentaires de la chercheuse. La rétroaction offerte s'appuyait sur les connaissances que l'élève avait pour mettre en échec certaines écritures. Par exemple, l'élève savait que $x - x$ ne pouvait pas être égal à x , parce qu'un nombre moins lui-même sera toujours égal à zéro. Cette connaissance rendait l'expression initiale invalide et pouvait alors être corrigée par l'élève.

Si l'élève A2 a désigné la réponse de son premier calcul par une expression équivalente (par commutativité) et l'élève A4 a identifié la réponse de chaque étape de calcul par une lettre différente, l'élève A1 a trouvé une autre façon de « nommer » son résultat en notant « $x - 2 \cdot x - 2 = nb \text{ carré rouge}$ ». Plusieurs erreurs ont été commises dans la démarche de cet élève, par exemple, les parenthèses pour $(x - 2) \cdot (x - 2)$ ont été omises et la réponse représente le nombre de carreaux blancs plutôt que les rouges.

Le tableau qui suit montre l'évolution des écritures de l'élève pour finalement obtenir l'expression $x^2 - (x - 2)^2$.

Tableau 4.2 Évolution de l'écriture algébrique de l'élève A1

$x \cdot x = x$		est devenu		$x \cdot x = x^2$
$x - 2 = x$				
et	sont devenus	$x - 2 \cdot x - 2$	est devenu	$x - 2 \cdot x - 2$
$x \cdot x = x$		$= x$		$= \textit{nb de carré rouge}$
$2(x - 2) - 2(x)$	est devenu	$x - 2^2 - x^2$	est devenu	$x^2 - (x - 2)^2$

Dans le groupe B, la phase 3 s'est déroulée lors de la première séance, avec l'orthopédagogue. Comme les élèves avaient de la difficulté à s'engager dans la tâche, l'orthopédagogue a reformulé la consigne en utilisant, entre autres, le terme « équation mathématique » plutôt que « formule ». Elle a aussi fait référence à la variable x en utilisant le terme « inconnu[e] ». Ces aspects pourraient avoir créé une confusion chez les élèves.

Groupe B

O : [...] Ça fait qu'en gros, tantôt tu m'as écrit ta méthode en mots, là j'aimerais que tu m'écrives ta méthode en formule, en équation mathématique, en utilisant x . Tu te rappelles quand on a travaillé l'algèbre que x représente un inconnu.

EB4 : C'est quoi l'inconnu là ?

EB2 : C'est la réponse.

O : Si ton x représente un inconnu, dans une équation mathématique, ça serait quoi en fonction des méthodes que vous m'avez données ?

EB4 : Les carrés blancs ?

EB1 : Non, elle cherche juste les rouges.

EB2 : On [ne] l'a pas. On n'a pas le nombre de carrés.

O : On [ne] le connaît pas.

EB2 : Ça fait que bien c'est le x .

O : Qu'est-ce que tu suggères comme équation mathématique à ce moment-là ?

EB3 demande de répéter la consigne.

O : Trouve-moi une équation algébrique qui pourrait m'expliquer comment trouver le nombre de carreaux rouges total, peu importe le nombre de petits carreaux rouges sur le côté.

EB1 : x fois...

O : On l'a fait avec 25 (on l'avait fait avec 5 et non 25), on l'a fait avec 67, on l'a fait avec 865, peu importe avec combien, vous m'avez expliqué en mots que c'est tout le temps la même chose. Comment tu peux le mettre en équation algébrique avec un x ?

L'utilisation du terme « équation » est ici inappropriée, puisque les élèves devaient plutôt trouver une « expression algébrique ». Cependant, il semblerait que ce terme est habituellement utilisé dans les classes pour identifier ce type d'expressions.

Dans l'extrait du protocole, on remarque la difficulté rencontrée par les élèves concernant le statut des lettres. Pour certains, il s'agit d'une inconnue, et dans ce sens, les élèves associent « inconnue » à « résultat cherché ».

Le groupe B s'entendait davantage sur l'écriture algébrique.

Groupe B

EB2 : [...] On fait la même affaire, mais au lieu de 865 c'est un x .

C : Donc tu l'écrirais comment ?

EB4 : $865x$.

EB2 : x fois 4.

O et C lui demandent de l'écrire sur sa feuille.

EB2 : Mais x fois 4 c'est $4x$ non ?

EB3 : Ouais.

EB1 : $4x$ c'est un côté, après tu fais fois 4 non ? Non, non, non.

EB2 : Moi j'ai écrit, il faut le mettre entre parenthèses, $4x - 5$.

EB3 et EB4 s'étonnent du « moins 5 ». EB2 se corrige pour « moins 4 » en se justifiant qu'il se « mélange depuis tantôt ». EB2 affirme donc « $4x - 4$ ».

EB4 : C'est zéro.

EB3 et EB1 s'opposent. EB4 réalise qu'il s'est trompé « parce qu'il faut faire fois ».

L'élève B2 a rapidement trouvé la formule appropriée, qui a fait consensus auprès de ses pairs : $4x - 4$. Il était d'ailleurs le seul à avoir noté un message en une seule phrase plutôt qu'en plusieurs étapes à la phase 2. Notons que l'élève B2 semble avoir certaines connaissances liées aux écritures algébriques et à l'utilisation implicite des propriétés des opérations.

Une fois les expressions algébriques identifiées, la chercheuse a noté les expressions trouvées au tableau, soient $x^2 - (x - 2)^2$ et $4x - 4$ dans le groupe A.

L'élève A1, qui avait proposé de soustraire le nombre de carreaux blancs au nombre total de carreaux, a pensé trouver « une autre façon de le faire » en proposant de transformer $x^2 - (x - 2)^2$ en $x^2 - x^2(-2)$:

Parce que tu fais « x à la deux » puis après, quand c'est la fin de la parenthèse, tu fais « moins 2 » à la fin. x à la deux puis ça donne le nombre, on [ne] sait pas c'est quoi, [donc] ça c'est x à la deux moins 2. Donc à la fin de ça c'est moins 2.

Pour justifier la raison pour laquelle il sortait 2 de la parenthèse dans l'expression originale, l'élève utilisait un exemple en proposant un carré de 12 carreaux sur le côté. Il expliquait que le nombre de carreaux blancs à soustraire serait $12^2 - 2$, ce qui est faux puisqu'il aurait plutôt fallu faire $(12 - 2)^2$.

C'est dans le contexte où l'élève a proposé de transformer son expression en une autre, qui se voulait simplifiée, que les élèves ont transformé les expressions, même si la consigne ne demandait que de produire une formule. Ces tentatives de transformations nous ont permis de relever certaines difficultés syntaxiques.

L'élève A1 a rencontré des difficultés lorsqu'il tentait de réduire l'expression $(x - 2)^2$. En développant $(x - 2)^2$, il aurait obtenu $(x - 2) \cdot (x - 2)$ et aurait pu, par une double distributivité, transformer son expression de sorte à avoir $x^2 - 2x - 2x + 4$, qui serait alors devenue le trinôme carré parfait $x^2 - 4x + 4$ en regroupant les termes semblables. Puisque l'expression initiale était $x^2 - (x - 2)^2$, l'expression devient $x^2 - (x^2 - 4x + 4)$. Il faudra transformer l'expression par la distributivité pour enlever la parenthèse, ce qui donne $x^2 - x^2 + 4x - 4$, et regrouper les termes semblables pour obtenir $4x - 4$, soit la même formule que l'élève A2.

Figure 4.7 Production de l'élève A2 à la phase 3

Phase 3

On cherche maintenant à écrire une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux hachurés pour tous les carrés. Pour cela, on appelle « x » la quantité de petits carreaux sur le côté du carré.

$x \cdot x = x^2$
 $x - 2 = x$
 $(x-2)(x-2) = \text{NB l'année dernière}$
 $x - x = x$
 $2(x-2) + 2(x)$
 $x^2 - (x-2)^2$
 $x^2 = x^2 - 4$

L'élève A4 a tenté de transformer « $x^2 - (x - 2)^2$ » autrement. Elle a transformé x^2 en $2x$, et $(x - 2)^2$ en $x \cdot 2$, qui est ensuite devenu $2x$. Elle termine en faisant $2x - 2x = x$. Dans cette démarche, toutes les transformations sont erronées.

$$\begin{aligned}
 x^2 - (x - 2)^2 &= \\
 2x - x \cdot 2 & \\
 2x - 2x &= x
 \end{aligned}$$

Elle a fait une autre tentative où elle a transformé $(x - 2)^2$ en $4x$.

$$\begin{aligned}
 x^2 - (x - 2)^2 &= \\
 2x - x^2 \cdot 2 &= -4x \\
 2x - 4x &= -2x
 \end{aligned}$$

Finalement, l'élève A2 a proposé « $x + x - 2$ à la deux ou à la quatre », ne sachant pas si elle pouvait additionner les exposants. L'élève A4 a suggéré de mettre l'exposant deux, tandis que l'élève A1 préférerait conserver l'expression initiale qu'il avait trouvée, ne voyant pas l'avantage de transformer son expression.

Groupe A

EA2 : [Ce n'] est pas bon parce qu'il faut que tu multiplies, parce qu'après tu vas augmenter... J'essaie de [ne] pas trop suivre cette explication parce que sinon ça me mélange avec mon explication. Mais je pense que [il ne] fallait pas qu'elle multiplie parce que sinon ça va augmenter le nombre de carrés hachurés.

C : Là elle est en train de transformer l'expression, elle essaie de faire $x - 2$, de le mettre exposant 2.

EA2 : Ça va augmenter le résultat, ça va faire tout le total exposant 2.

C : Mais dans la formule à [EA1] est-ce qu'on faisait exposant 2?

EA2 : Ouais.

C : Donc est-ce que ça devrait donner le même résultat ?

EA2 : Ah ouais.

C : Pourquoi ?

EA2 : Bien parce que, argh... je [ne] sais pas.

C : [EA1] est-ce que ça donne le même résultat si on transforme l'expression $x - 2$ exposant 2?

EA1 : Moi j'ai fait $x^2 - (x - 2)^2$.

C : Donc $x^2 - (x - 2)^2$, ça c'est notre formule. On veut la transformer pour trouver comment on pourrait écrire $(x - 2)^2$ plus simplement.

EA2 : Tu fais $x + x$, puis cette étape-là moins 2, et après tu fais ça à la deux ou à la quatre.

C : $x + x$.

EA2 : Ça donne x .

EA4 : $2x$!

EA2 : Ouais $2x$ puis là tu vas faire moins 2, après là $2x$, à la deux ou à la quatre, parce qu'il y a 2 à la deux, mais je sais qu'on [ne] peut pas additionner les exposants...

EA4 : Moi je laisserai 2, puis après ça je ferai un autre 2. Ah non laisse faire, je le laisse comme ça parce qu'on l'a déjà utilisé.

C : [EA1] es-tu d'accord?

EA1 : Ça c'est parfait pour moi. (EA1 fait référence à sa formule initiale.)

La cloche sonne.

Bref, les exposants dans l'expression $x^2 - (x - 2)^2$ ont été une difficulté majeure, qui a empêché les élèves de transformer l'expression de sorte à obtenir $4x - 4$, mais les échanges entre les élèves et avec la chercheuse et l'orthopédaogogue ont permis de faire évoluer les écritures des élèves et de faire un travail syntaxique.

4.1.4 La discussion de l'équivalence

Dans le groupe A, même si deux formules ont été proposées, soient $x^2 - (x - 2)^2$ et $4x - 4$, la difficulté à transformer l'expression contenant des exposants a empêché les élèves de voir qu'une fois réduite, ils obtiendraient $4x - 4$. En effet, même si des tentatives de transformations

syntaxiques ont été faites, elles ne permettaient pas aux élèves de reconnaître l'équivalence des deux expressions produites. Chaque élève préférait garder sa formule initiale et ne s'intéressait pas à celle de l'autre de peur de « se mélanger ». L'élève A1 l'a même exprimé : « Ça c'est parfait pour moi. » Cette rigidité a eu pour effet que les élèves sont restés accrochés au sens initial de leur formule. Si la chercheuse avait expliqué que $(x - 2)^2 = x^2 + 4x - 4$, les élèves auraient possiblement réussi à réduire la formule et à établir l'équivalence des deux formules. Le manque de temps n'a pas permis à la chercheuse d'intervenir de cette façon. L'équivalence a donc été établie à partir du sens donné aux formules proposées dans le contexte de la figure proposée. L'équivalence n'a pas pu être discutée à partir des transformations syntaxiques comme il a été fait dans le groupe B.

Dans le groupe B, une seule formule a été produite par les élèves, soit $4x - 4$. Comme l'objet de notre recherche est de traiter l'équivalence d'expressions algébriques, nous avons réalisé la phase supplémentaire, prévue dans l'analyse *a priori* dans l'éventualité où un groupe ne produisait qu'une seule formule. Cette phase supplémentaire consistait à demander au groupe si des formules « proposées par d'autres élèves » étaient valides.

L'orthopédagogue a d'abord demandé aux élèves si la formule $4(x - 1)$, qu'elle a notée au tableau, permettait de trouver le nombre de carreaux hachurés.

Groupe B

EB2 : Bien là il faut faire 4 fois x ...

EB4 : C'est la même affaire.

EB2 : ... puis là 4 fois 1, ça fait que là...

EB1 : 4 fois -1

EB1 : Attend ça donne $4x$, (EB1 calcule sur la calculatrice.) est égal à -4 , so $4x - 4$.

EB2 : Ouais $4x - 4$.

EB4 : Ouais.

O : Puis vous, vous aviez suggéré quoi ?

EB4 (vérifie sa feuille) : On a suggéré $4x - 4$.

EB2 : Ouais ! Nous on a mis $4x - 4$.

Les transformations algébriques simples ont rapidement permis aux élèves d'établir la relation d'équivalence entre les deux expressions.

Une autre expression fut proposée aux élèves : $2x + 2(x - 2)$. L'orthopédagogue a, une fois de plus, noté la formule au tableau.

Groupe B

O : Est-ce que ça, ça fonctionne ?

EB1 : Non...

EB2 : $2x + 2$

EB1 : Mais d'abord tu dois faire ce qu'il y a dans la parenthèse.

EB2 : OK bien là il faudra faire $2x$ puis là ça va donner $2x - 2$.

EB1 : Non ça [ne] marche pas.

EB2 : Non, $2x - 4$ (O écrit au tableau $2x + 2x - 4$), puis là bien ça donne $4x \dots 4x - 2$.

O écrit $4x - 4$.

EB3 : Mais pourquoi moins 4 ?

EB4 : C'est la même affaire que tantôt.

EB2 : Oui oui, c'est bon.

EB1 : Tu fais fois, tu fais 2 fois - 2. (Calcule à la calculatrice) C'est ça, moins 4.

EB2 : Ça donne $2x - 4$, puis là on additionne $2x + 2x$, 4, puis ça donne $2x - 4$ (voulait dire $4x - 4$).

Dans cet extrait, l'élève B2 veut rapidement effectuer la première opération ($2x + 2$) pour réduire l'expression. Observons qu'il s'agit du même élève qui avait précédemment identifié l'équivalence $x \cdot 4 = 4x$ et qui avait certaines connaissances concernant la manipulation d'expressions algébriques simples. L'élève B1 l'a corrigé en lui rappelant la priorité des opérations. L'élève B2 a alors compris qu'il devait d'abord distribuer son coefficient 2 aux éléments dans la parenthèse de sorte à transformer $2(x - 2)$ en $2x - 4$ et ajouter le premier terme, soit $2x$. Grâce à l'associativité, il a transformé $2x + 2x - 4$ en $4x - 4$.

L'élève B3 est cependant resté incertain.

Groupe B

EB3 : Mais pourquoi il [n'] y a pas de égal à la réponse ?

O : Parce qu'on [ne] le sait pas en fait.

C : Bien tu peux le faire, où est-ce que tu mettrais ton égal ?

EB3 : Après le $4x - 4$.

C : Tu mettrais quoi ? Tu mettrais égal...

EB3 : Je [ne] sais pas qu'est-ce que je mettrais.

Cet élève avait d'ailleurs proposé de remplacer x par 865 un peu plus tôt et de faire « moins 1 et fois 4 ». On peut penser que la demande de l'orthopédagogue de produire une équation mathématique ait pu induire l'élève à penser à la présence d'un signe d'égalité.

Dans cette première situation, à la première phase, nous avons relevé différentes stratégies (de dénombrement et de calculs) qui ont été analysées et avons établi que les élèves reconnaissaient l'équivalence entre l'addition répétée 4 fois et la multiplication par 4. Certaines stratégies ont été mises en échec et d'autres ont été validées à travers les explications et les justifications des élèves et la recherche de sens.

La deuxième phase consistait en la généralisation d'une méthode pour trouver le nombre de carreaux hachurés de n'importe quel carré similaire. Plusieurs difficultés ont été identifiées dans cette étape, surtout en ce qui concerne l'expression d'une formule générale. Le passage à une écriture algébrique s'est donc fait avec difficulté, surtout au moment d'introduire les lettres, principalement parce que la notion de variable requiert un travail spécifique au sein d'un ensemble de situations didactiques.

À la troisième phase, les élèves ont pu passer à l'écriture algébrique de leur méthode avec plus ou moins de difficulté, mais certains n'ont pas accepté de transformer les expressions, de peur d'une perte de sens.

4.2 Les tuiles du plancher

La situation des tuiles du plancher telle que préparée dans la méthodologie a été réalisée dans le groupe B lors de leur deuxième séance, alors que les élèves du groupe A travaillaient toujours sur la situation des carreaux hachurés. Les élèves du groupe B ont eu le temps de faire la première phase seulement de la situation des tuiles du plancher. Dans cette section, nous analyserons d'abord ce que les élèves du groupe B ont fait lors de la deuxième séance, lorsque la situation initiale des tuiles du plancher leur a été présentée. Nous présenterons ensuite les modifications qui ont été apportées à la situation par l'orthopédagogue et la chercheuse, pour finalement présenter ce que les élèves des deux groupes ont fait à la séance 3, lorsque la version modifiée leur a été proposée.

4.2.1 Phase 1 de la situation initiale : L'identification d'une méthode générale de calcul

La première phase de la situation des tuiles du plancher demandait aux élèves du groupe B de trouver le nombre de tuiles blanches nécessaire pour un modèle de plancher ayant 35 tuiles grises, puis 679 tuiles grises. Pour ce faire, les élèves devaient trouver une régularité dans la figure qui leur était présentée.

Chacun des trois élèves présents lors de cette activité a proposé une stratégie de calcul différente. Premièrement, l'élève B2 a remarqué que chaque tuile grise était entourée de six tuiles blanches et que deux d'entre elles étaient communes à deux tuiles grises. Il a donc multiplié 35 par 6, ce qui a donné 210, puis 35 par 2, ce qui a donné 70 tuiles communes pour soustraire 70 à 210 et a obtenu 140 tuiles blanches. Cette stratégie renvoie à la troisième méthode possible, anticipée dans l'analyse *a priori* (Figure 3.7). Cependant, les deux tuiles blanches communes à deux tuiles grises se répétaient une fois de moins que le nombre de tuiles grises. L'élève aurait donc dû multiplier 34 par 2 plutôt que 35 par 2 pour trouver le nombre de tuiles blanches comptées en double. La réponse de l'élève est alors erronée, car il y a 142 tuiles blanches.

Un deuxième élève, l'élève B4, a multiplié 35 par 14, parce qu'il a compté 14 tuiles blanches sur le dessin. L'élève B2 a tenté de corriger cette stratégie en proposant de diviser 35 tuiles grises par 3 tuiles grises, ce qui donne un rapport de $11, \bar{6}$, et a multiplié 14 tuiles blanches par $11, \bar{6}$ pour trouver $163, \bar{3}$, qu'il a arrondi à 163 tuiles blanches. Il est à noter que notre collecte de données s'est déroulée au moment de l'année où les élèves apprenaient la notion de rapport de similitude en classe, ce qui peut expliquer cette proposition. Malgré les stratégies erronées, la chercheuse n'est pas intervenue auprès des élèves, car ils argumentaient très bien leurs différentes stratégies entre eux ; le débat entre les élèves s'est poursuivi.

En faisant appel à la notion de rapport, le troisième élève, l'élève B3, a proposé une stratégie similaire : il a multiplié les 3 tuiles grises par 12 pour se rapprocher de 35 tuiles grises, mais s'est rendu compte qu'il obtenait 36, soit 1 tuile grise de plus que 35. Il a alors multiplié 35 par 12 et soustrait 1, ce qui lui a donné 419.

L'élève B2 est intervenu pour contredire l'élève B3. Il lui a expliqué que si on multiplie 35 tuiles grises par 6 tuiles blanches, sachant que certaines seront comptées en trop, on obtient 210 tuiles blanches. Il paraissait donc impossible, pour l'élève B2 que la réponse soit de 419, puisque, selon son calcul, la réponse devait nécessairement être inférieure à 210.

Groupe B

EB2 : Bien moi je pense que c'est pas bon parce que juste quand on fait 35×6 ça donne moins que 400.

EB3 : Pourquoi fois 6 ?

EB2 : Parce qu'exemple dans lui il y en a 6, dans un carré gris il y en a 6, et il y a 35 tuiles grises donc tu fais 35×6 parce qu'autour d'un carré gris bien il y en a 6, tu comprends ?

EB3 : Oui, mais les tuiles qui séparent, ici il y en a six oui, mais là-dedans il y en a quatre.

EB2 : Ouais, mais c'est ça justement, ça fait que si on fait ça, « fois 6 », ça donne 210.

Puis toi, ta réponse c'était quoi ?

EB3 : 419.

EB2 : C'est ça, puis là on en a en trop donc, moi je pense que c'est trop parce qu'exemple on aurait mis 6 [tuiles blanches par tuile grise], mais là il faut en enlever. Je [ne] sais pas si tu comprends. Genre tu vois eux, exemple on fait « fois » ok, là il y en a toutes 35, mais il y en a de trop. Mais toi ta réponse c'est 400 quelque chose, puis juste si on compte pour 36 tuiles comme ça... Comme exemple ça c'est une forme, bien comme c'est trop, je [ne] sais pas comment dire.

C : Pourquoi c'est trop ?

EB2 : Parce que juste 35×6 ça donne 210, puis lui il a dit plus que ça.

C : Lui il a dit que ça serait plus que ça, puis pourquoi est-ce que ça serait trop ?

EB2 : Parce que déjà dans le 210 il en manque.

C : Qu'est-ce que tu veux dire par il en manque ?

EB3 : Mais c'est ça, il en manque... ça fait qu'il en faut plus.

EB2 : Non, pas il en manque, mais il y en a de trop je veux dire.

C : Il y en a de trop. Pourquoi il y en a de trop ?

EB2 : À cause des tuiles qu'il y a là.

C : Donc qui seraient comptées en double.

EB2 : Ouais, les tuiles qui sont comptées en double !

C : Et ça, c'est pour ça que tu n'étais pas d'accord avec lui. Parce que tu lui as dit « mais non, ça [ne] se peut pas fois 6 ». Pourquoi tu lui as dit qu'on ne pouvait pas faire fois 6 ?

EB3 : Parce que oui, ici, il y en a six, mais ici après ça, il y en a quatre et il y en a quatre. (EB3 fait un cercle autour de la première tuile grise pour montrer les six tuiles blanches et fait deux arcs de cercle pour montrer les quatre tuiles blanches pour la deuxième et troisième tuile grise. Voir Figure 4.8.)

C : Ah ok, donc toi tu proposes autre chose. Qu'est-ce que tu proposes ? Comment tu le calculerais pour 35 ?

EB2 : Non, mais moi j'ai compté les tuiles de trop, puis après je les ai enlevées.

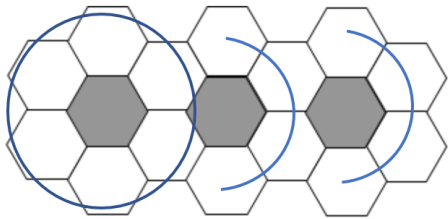
EB3 : OK donc tu as calculé ceux-là ici, et là aussi. (Il pointe les deux tuiles blanches communes à la première et deuxième tuile grise et les deux tuiles blanches communes à la deuxième et troisième tuile grise.)

EB2 : Non, mais je dis que toi ça [ne] peut pas marcher parce que juste une forme comme ça, bien c'est comme si on fait fois 35, bien ça donne 210, puis ta réponse c'est 400, puis là on n'a même pas enlevé les tuiles en double.

C : Donc toi tu penses que la réponse c'est moins que 210.

EB2 : Ouais.

Figure 4.8 Reproduction de ce que l'élève B3 a fait au tableau



Les élèves B2 et B3 ont continué leur débat en ne considérant plus les tuiles individuellement, mais plutôt par paquets de six tuiles et de quatre tuiles. Ces groupements ont facilité la discussion, sans toutefois leur permettre d'identifier une régularité et de trouver le nombre de tuiles blanches pour 35 tuiles grises. Comme les élèves restaient en désaccord et avaient de la difficulté à percevoir la régularité dans une telle figure, la chercheuse est intervenue pour faire avancer la situation.

Groupe B

EB3 : Donc ça ici c'est un bloc de 6, et ça c'est un bloc de 4, et ça aussi. Et on [ne] peut pas calculer fois 6 [tuiles blanches] pour les 3 [tuiles grises] parce que c'est juste un bloc de 6 ici, mais ici c'est une moitié.

EB2 : Mais tu peux faire... Non laisse faire, je [ne] sais pas. Il faudrait que tu comptes, comme genre tu fais fois 3, puis là tu vois combien il y en a des [paquets de] 6, et là de 4, et là de 4.

C : Tu en aurais combien de fois des [paquets de] 6 si on avait plus de tuiles grises ?

EB2 : Je [ne] sais pas.

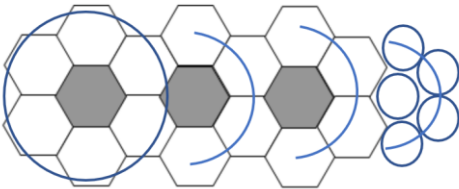
EB3 : Mais moi c'est pour ça que ce que j'ai fait, je me suis imaginé que je répétais cette figure-là 12 fois et que je faisais moins 1 parce que ça ferait 36 [tuiles grises], puis après ça que je calculerais le nombre de tuiles blanches 12 fois, mais 12 fois cette image-là.

[...]

C : Est-ce que tu peux le dessiner s'il y avait une quatrième tuile grise ? Comment est-ce que tu le dessinerais ?

La demande de la chercheuse de représenter les tuiles blanches pour une quatrième tuile grise avait pour but de montrer que les six premières tuiles blanches ne se répétaient plus (c'est la constante), mais que les quatre tuiles blanches se répèteraient autant de fois qu'on ajouterait des tuiles grises.

Figure 4.9 Reproduction de ce que l'élève B3 a fait au tableau



L'élève B3 explique que « ça te redonnerait un [paquet de] quatre » ce qui permet à la chercheuse d'établir que les paquets de quatre tuiles blanches se répètent. L'élève B3 confirme : « Ça fait que tu aurais juste un [paquet de] 6 et plusieurs [paquets de] 4. » Il n'était cependant toujours pas en mesure d'établir la relation qui existe entre le nombre de fois que les paquets de quatre tuiles blanches se répètent et le nombre de tuiles grises.

Pour compter le nombre de tuiles blanches pour 4 tuiles grises, l'élève B3 a proposé de calculer 14 tuiles blanches pour les 3 premières tuiles grises et d'ajouter 4 tuiles blanches pour la quatrième tuile grise. Même si ce calcul permettait d'obtenir la bonne réponse de 18 tuiles blanches, le calcul ne permettait cependant pas de trouver la méthode générale, c'est pourquoi la chercheuse est intervenue de nouveau.

Groupe B

C : Ça serait quoi ton calcul que tu écrirais ici pour trouver avec quatre tuiles grises? (Silence.) Tu me l'as mis avec des couleurs, mais ce serait quoi si tu me l'écris avec des chiffres?

EB3 : Juste les carrés blancs ? <Oui.> Je les compterais un par un.

C : Ici est-ce que tu les as comptés un par un ?

EB3 : Non, parce que c'est un bloc de 6.

C : OK donc ça c'est un bloc de 6. (C note 6 au-dessus de la première tuile grise.)

EB3 : Ah ok, donc $6 + 4 + 4 + 4$.

EB2 : Ah je viens de comprendre ! Mais d'abord on peut faire un bloc de 6, exemple on met juste 3 tuiles [grises], on met un bloc de 6 [tuiles blanches], et un bloc de 8 vu qu'il y a le $4 + 4$.

C : OK, et si j'ai quatre tuiles grises ?

EB2 : Ah laisse faire, c'est mieux si on compte séparément.

C : Donc tu as fait $+4 + 4 + 4$. Si j'avais cinq tuiles grises, ce serait quoi le calcul ?

EB3 : 5×4 .

C : Pourquoi ?

EB3 : Parce que les cinq tuiles qui ont été rajoutées, il y a quatre [hexagones] comme ça.

EB2 : Ouais c'est ça, ça va être encore plus 4.

C : Ça va être encore plus 4, on en rajoute un autre ?

EB2 : Ouais.

C : OK, et là pour 35 tuiles grises ?

EB2 : Ouais ouais c'est correct, il y en a une [tuile grise] que c'est six [tuiles blanches], puis les autres [tuiles grises] c'est quatre [tuiles blanches]. Ça veut dire qu'on fait 34×4 .

C : Pourquoi est-ce que tu ferais 34×4 ?

EB3 : 35.

EB2 : Non, mais c'est ça justement. Celle-là on la compte après, parce que c'est 6. Ça fait que là on fait 34×4 , ça donne 136. Plus 6.

EB4 : 142.

EB3 : Mais là on veut pour 35 tuiles, tu as fait 34.

EB2 : Mais c'est ça, tu viens de la rajouter l'autre tuile.

EB3 : Mais là tu as juste calculé les 6, pas lui au milieu. (EB3 pointe la tuile grise au milieu du paquet de six tuiles blanches.)

C : On cherche juste les tuiles blanches. S'il y en avait 35 grises, il y en aurait combien de blanches ?

EB3 : Mais il [n'] a pas calculé pour 34 tuiles ?

C à EB2 : Pourquoi est-ce que tu as mis 34 ?

EB2 : Parce que regarde...

EB3 : Mais je comprends que ça c'est un bloc de 6.

EB2 : Ça c'est les 34 qui sont des 4. Je [ne] sais pas comment expliquer. Exemple lui, il en a de plus 4, plus 4, plus 4.

EB3 : Ouais jusqu'à 35.

EB2 : Mais c'est ça mais lui, exemple que t'en vois 35, bien là il va y avoir 35 tuiles, mais à partir de là c'est 34, ça va toutes être des 4, bien lui t'en fais quoi ? [Ce n']'est pas un 4, bien c'est un 6, donc tu le rajoutes après. Puis là bien c'est 34 [ce n'] est pas 35. Tu [ne] comprends pas ?

C : Regarde [EB2], je vais t'aider à l'expliquer. Ce que tu veux dire c'est que ton 4 se répète une fois de moins que tes tuiles grises, parce que ta première tuile c'est un 6. Pour trois tuiles grises on faisait $6 + 4 + 4$, donc le 4 se répète combien de fois ?

EB2 : Deux fois, puis là bien ça continue jusqu'à 35. Puis là vu que ça continue jusqu'à 35, à partir de là il y a 34 fois les 4 [hexagones].

C : Il y a combien de paquets de quatre pour trois tuiles grises ?

EB4 : Il y en a deux.

C : Pour 3 tuiles grises, tu as 2 fois tes 4 tuiles blanches et une fois ton [paquet de] 6.

Après avoir dénombré les tuiles blanches sur la figure et, plus tard, regroupé les tuiles blanches en paquets de 6 et de 4, l'élève B2 a finalement identifié une régularité lorsque l'élève B3 a noté l'expression $6 + 4 + 4 + 4$ au-dessus de la figure de 4 tuiles grises toujours au tableau. L'identification de cette régularité lui a permis de trouver une méthode de calcul pour trouver le nombre de tuiles blanches nécessaires pour 35 tuiles grises. Il a compris qu'il devait multiplier 4 par un de moins que le nombre de tuiles grises et ajouter 6.

Alors que l'élève B4 propose de faire $6 + 4 + 4$ fois 35, l'élève B2 s'explique de nouveau :

Non ça [ne] marche pas parce que les 4 ! Comme les 34, ça c'est toutes les fois 4, ça veut dire eux, mais là si on compte 35 fois, il y en a qui vont se compter en double. Il y en a un [paquet de] 6, là on l'enlève le 6, bien là on a une tuile [grise] d'enlevée, et là bien le reste c'est toutes des [paquets de] 4 donc les 34 tuiles [grises] suivantes c'est toutes des [paquets de] 4, donc tu fais 34 tuiles [grises] fois 4 [tuiles blanches], ça donne 136, puis là bien tu fais plus 6 à cause de la dernière tuile [grise] qui est de 6, ça donne 142 tuiles, tu comprends ?

Les élèves acquiescent, mais nous pouvons remettre en question leur compréhension. Malgré les trois dernières minutes restantes à la période, l'élève B3 voulait effectuer l'exercice suivant, soit le dernier exercice de la phase 1.

Groupe B

EB3 : On l'essaie avec 679 tuiles.

C : Si on a 679 tuiles grises, combien de tuiles blanches est-ce qu'on va avoir besoin ?

EB3 : Ça va être le même calcul.

C : Fais-le sur ta feuille.

EB3 : Ça serait 34×679 .

EB2 : C'est 678×4 , ça donne 2712, plus 6, ce qui donne 2718.

[...]

C : Donc qu'est-ce qu'on retient de tout ça ? Comment est-ce que tu le calculais à chaque fois ? Est-ce que tu pourrais le trouver peu importe le nombre de tuiles grises que je te donne ?

EB2 : Oui.

C : Comment tu ferais ?

EB2 : Le même calcul tout le temps.

C : Ce serait quoi ?

La cloche sonne.

EB2 : x fois 4 plus 6.

Dans cet extrait, l'élève B3 a généralisé la structure du problème à partir de variables impertinentes à la résolution de problème. Il généralise la multiplication de 34 (un de moins que le nombre de tuiles grises au cas précédent), plutôt que la répétition des 4 tuiles blanches à chaque tuile grise ajoutée. L'élève effectue alors un calcul démuné de sens (34×679) et ne parvient pas à généraliser la méthode de calcul trouvée par l'élève B2. En multipliant par 34 comme dans le cas précédent, l'élève généralise une donnée impertinente, ce qui rappelle un effet Diénès. L'élève B2, quant à lui, a prouvé qu'il maîtrisait sa méthode de calcul et est même parvenu à produire une première hypothèse d'expression algébrique.

Lors de la première phase de cette activité, certaines interventions de la chercheuse ont permis de reconnaître des éléments de la situation qui n'étaient pas mis en jeu lors de l'activité des élèves, comme les groupements de tuiles proposés. Une fois ces groupes de tuiles identifiés, les élèves ont été en mesure de noter le nombre de tuiles correspondant à chacun des groupes. L'ajout d'une quatrième tuile grise au modèle initial a probablement aidé les élèves à identifier une régularité et à développer des pistes de généralisation, en leur permettant de dessiner de nouvelles tuiles. Cette étape intermédiaire entre la figure de 3 tuiles grises et le cas de 35 tuiles grises peut avoir favorisé la compréhension des élèves à passer à un cas plus complexe.

4.2.2 Modifications apportées à la situation des tuiles du plancher

À partir de nos observations concernant la production d'une formule dans le groupe B, nous avons choisi de modifier la situation afin qu'elle soit davantage axée sur la notion d'équivalence d'expressions algébriques.

En effet, les élèves des deux groupes ont eu besoin de plus de temps qu'anticipé pour généraliser des méthodes de calculs à partir des figures proposées dans les situations « Les carreaux hachurés » et « Les tuiles du plancher » ; le groupe A n'avait que très peu abordé la notion d'équivalence d'expressions lors de la situation des carreaux hachurés et le groupe B n'a eu le temps de réaliser que la phase 1 de la situation des tuiles. Pour nous centrer davantage sur l'équivalence des expressions, nous avons choisi d'abandonner la phase 2 de la situation « Les tuiles du plancher » et d'en présenter une nouvelle version aux deux groupes d'élèves lors de la troisième séance qui se déroulait deux semaines plus tard.

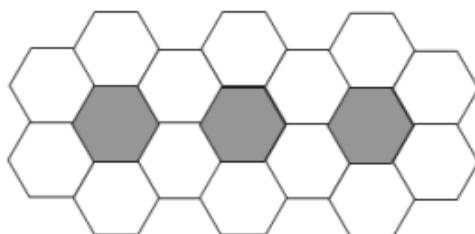
Ainsi, plutôt que demander aux élèves de trouver une formule pour calculer le nombre de tuiles blanches pour un nombre quelconque de tuiles grises, nous leur avons présenté trois formules différentes dans le but qu'ils identifient celle ou celles qui seraient pertinentes. Cette deuxième version de la situation permet ainsi de centrer l'activité sur l'équivalence des expressions algébriques. Les formules proposées étaient « $6 + (x - 1) \cdot 4$ », « $4x + 6$ » et « $6x - 2(x - 1)$ », la première et la troisième formule étant valides.

Voici la situation telle que présentée aux élèves des deux groupes à la séance 3 :

Figure 4.10 Document de l'élève – Les tuiles du plancher (version modifiée)

Les tuiles du plancher

On veut décorer un plancher avec des tuiles. Autour de chaque tuile grise, on met des tuiles blanches comme on voit dans le dessin.



Parmi ces formules, laquelle ou lesquelles sont valides pour trouver le nombre de tuiles blanches nécessaires pour un nombre quelconque de tuiles grises ?

$$6 + (x - 1) \cdot 4$$

$$4x + 6$$

$$6x - 2(x - 1)$$

La première formule renvoie à la première méthode de calcul (Figure 3.5). Le choix de placer le facteur 4 après la parenthèse a été intentionnel. En effet, les élèves ont l'habitude d'utiliser la distributivité lorsque ce facteur se situe avant la parenthèse. Ce changement de position du facteur est en lien avec l'intention de travailler les écritures algébriques. La deuxième formule, soit « $4x + 6$ », n'est pas valide. Cette formule a été choisie intentionnellement pour mettre en évidence une erreur que nous avons anticipée des élèves, soit le fait de ne pas savoir comment noter « le nombre tuiles grises sauf une ». La troisième formule, « $6x - 2(x - 1)$ », est appropriée et renvoie à la troisième méthode de calcul possible (Figure 3.7).

Nous avons anticipé que les élèves pourraient remplacer x par 3 et vérifier si la réponse correspondait au nombre de tuiles blanches sur le dessin, pour trouver les formules valides, puisqu'il y avait trois tuiles grises sur le modèle. Ils pourraient aussi tenter de trouver un lien entre la formule et le dessin, ou encore transformer les expressions algébriques. Si les élèves ne comprenaient pas à quoi fait référence la variable x , nous avons prévu leur donner l'information que x correspond au nombre de tuiles grises. Nous reconnaissons à présent que l'information sur la signification du x aurait dû être dans l'énoncé.

Si la situation se déroulait dans le temps estimé, nous avons prévu deux autres formules à proposer, soient « $2 + 4x$ », bonne formule réduite à sa plus simple expression, et « $8 + 2(x - 2)$ », mauvaise formule dont l'écriture réduite, « $2x + 4$ », ressemble beaucoup à la formule précédente.

4.2.3 Version modifiée

Lors de la troisième séance, les élèves des deux groupes ont réalisé la nouvelle version de l'activité « Les tuiles du plancher ». Dans cette section, nous présenterons certaines productions des élèves où l'on peut surtout identifier des difficultés à considérer les expressions algébriques comme des objets en soi et des difficultés à transformer les expressions à l'aide des propriétés des opérations pour conserver l'équivalence.

Dans le groupe B, puisque l'activité avait déjà été entamée, la chercheuse a rappelé la méthode trouvée pour calculer le nombre de tuiles blanches à partir du nombre de tuiles grises. Les élèves se sont rappelés qu'une méthode avait été trouvée pour calculer le nombre de tuiles blanches pour

35 tuiles grises : il fallait multiplier 34 par 4 et ajouter 6. Puisque la dernière séance s'était conclue sur la proposition de l'élève B2 (« x fois 4 plus 6 »), la chercheuse a établi que la formule algébrique qui correspondait à cette méthode trouvée était $6 + 4(x - 1)$ et l'a expliquée.

Groupe B

EB2 : On avait fait comme 6, puis là parenthèses...

EB3 : On avait fait 4×34 .

EB4 : 4×6 .

C : Voulez-vous que je vous rappelle ?

EB4, EB3 et EB2 : Oui.

C : Alors [pour] la première tuile grise, on avait toujours six tuiles blanches...

EB2 : Ouais ça je m'en souviens, c'est après moi je *bugg*.

C : ... et ensuite, pour toutes les autres, donc sauf celles-là, on avait quatre tuiles blanches. Donc on faisait, par exemple pour 35 tuiles, 6 plus 4 fois, attention pas 35, 34 parce que celle-là on l'avait déjà comptée, vous rappelez-vous ?

EB2 et EB3 : Oui, c'est ça !

C : Alors on faisait, $6 + 4(x - 1)$ (C écrit la formule au tableau.), parce qu'on ne considérait pas la première tuile. Donc c'était « $x - 1$ » parce que celle-là on l'avait déjà comptée 6. Donc toutes les autres [tuiles grises], pas la première, toutes les autres, on multipliait par quatre tuiles [blanches]. Et la première, on comptait six tuiles [blanches].

Avant de commencer le travail demandé dans la nouvelle version de la situation, l'élève B3 a, par lui-même, utilisé sa calculatrice pour isoler x comme il avait appris à le faire au début de l'année. En traitant l'expression donnée comme une équation, l'élève a obtenu une valeur de x de 2,5. La figure ci-dessous présente ses deux tentatives.

Figure 4.11 Production de l'élève B3 sur son document

$$\begin{array}{l}
 6 + 4(x - 1) \\
 6 + 4x - 4 \\
 +4 \qquad +4 \\
 \hline
 10 + 4x \\
 \hline
 4 \quad 4 \\
 \hline
 2,5 = x
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{l}
 6 + 4(x - 1) \\
 6 + 4x - 4 \\
 -4 \qquad -4 \\
 \hline
 2 + 4x - 8
 \end{array}$$

Pour expliquer ce qu'il a fait à ses pairs, l'élève B3 a reproduit au tableau la démarche qui lui a permis d'obtenir une valeur de x : « Ici j'ai fait la distributivité qui m'a donné $4x$. Et là, ici, ça m'a donné -4 , et là je réécrivais. Et là je vais aller distribuer le -4 , ça va faire $+4$. »

Figure 4.12 Production de l'élève B3 au tableau

The image shows a student's handwritten work on a board. At the top, the expression $6 + 4(x-1)$ is written in blue. Below it, the student has written $6 + 4x - 4$ in black, with a circled -4 and a plus sign written next to it. The next line shows $10 + 4x$, with a horizontal line drawn under the 10 . Below that, the student has written $2,5 = x$. There are some scribbles and corrections throughout the work.

L'élève s'engage dans un processus algorithmique associé à la résolution d'équations là où il s'agissait de transformer l'expression algébrique dans le but de vérifier l'équivalence. Encore une fois, la notion de variable est confondue avec celle d'inconnue, ce qui amène l'élève à chercher la valeur de x .

L'élève B1 a vérifié la démarche de son camarade :

Groupe B

EB1 : Il a fait 4 fois x et 4 fois -1 . Ça donne $4x$ On va juste *doublecheck*. (EB1 calcule sur la calculatrice.) Ouais ça donne -4 so ça c'est bon, ça c'est bon. Il remet le 6, ça c'est bon. Ouais, c'est correct.

C : Donc tu es d'accord que $6 + 4(x - 1)$ c'est la même chose que $6 + 4x - 4$?

EB1 : Ouais.

C : OK, ensuite $+4$, $+4$. Est-ce que vous êtes d'accord ici ?

EB1 : Mais moi j'avais mis le 4 avec le 6. (Ici, EB1 fait référence aux deux constantes : 6 et -4 .)

EB3 : Bien c'est ça que j'ai fait. (Ici, EB3 fait référence au $+4$ qu'il a mis pour « annuler » le -4 .)

C : Ah ! Le -4 ici avec le 6 ici ?

EB1 : Bien moi je les aurais mis ensemble, puis après j'aurai juste laisser...

[...]

EB1 : *So* maintenant, lui qu'est-ce qu'il a fait c'est qu'il a enlevé ça. (EB1 se retourne.)
 Il [n'] y a pas d'égal, *so* on pourrait juste les mettre ensemble. *So* moi j'aurais fait ça, comme j'aurais mis lui puis lui ensemble.
 C : Vas-y.
 EB3 : Mais il sera encore là... il faut...
 EB1 : $6 - 4$ (avec sa calculatrice) qui donne 2.
 EB3 : Mais l'affaire, parce qu'il faut mettre -4 en dessous du -4 . Et le -4 aussi au 6.
 EB1 : *What?*
 EB3 : Il faut annuler le -4 .
 [...]
 EB3 : Bien pour isoler, il faut distribuer le plus petit nombre au plus gros nombre.
 C : Est-ce que ce sera encore la même formule ? Est-ce que ce sera équivalent si on met $6 + 4x - 4$? Est-ce que ce sera égal à $10 + 4x$?
 EB3 : Je [ne] comprends pas.
 EB1 : Parce que tu vois, s'il y avait un égal ici, ça serait bon qu'est-ce que tu aurais fait, parce que tu aurais comme mis d'un bord le chose.
 EB3 : OK, ouais.
 EB1 : Mais comme, il faut juste mettre comme, j'ai plus le mot... C'est comme, mettre les genre... S'il y a des x , il faut les mettre ensemble, s'il y a des coefficients, il faut les mettre ensemble.

L'élève B1 a identifié l'erreur de l'élève B3 et l'a corrigée en inscrivant sa démarche au tableau :

Figure 4.13 Production de l'élève B1

$$\begin{array}{l}
 6 + 4(x-1) \\
 6 + 4x - 4 \\
 2 + 4x \\
 4x + 2
 \end{array}$$

Elle est parvenue à corriger l'élève B3 en transformant l'expression $6 + 4(x - 1)$ pour obtenir $4x + 2$ et en mettant en valeur qu'il n'y a pas de signe d'égalité (pas d'équation) et qu'il s'agit seulement de transformer l'expression donnée. Pourtant, le signe d'égalité aurait été approprié pour montrer que chaque expression est équivalente à celles qui la précèdent et celles

qui la suivent. La chercheuse a confirmé que ces deux expressions sont bonnes, car les transformations mathématiques (appuyées sur les propriétés des opérations) sont pertinentes.

Après avoir établi l'expression qui représente la méthode utilisée par les élèves lors de la séance 2 et réduit l'expression à sa plus simple expression, la chercheuse a demandé aux élèves de déterminer, parmi les trois formules proposées sur leur document, laquelle ou lesquelles sont valides pour trouver le nombre de tuiles blanches pour n'importe quel nombre de tuiles grises.

Dans le groupe A, les élèves n'avaient pas de formule initiale connue comme adéquate, comme le groupe B. Ils ont pourtant, eux aussi, eu de la difficulté à traiter les expressions comme des objets en soi et cherchaient à travailler à partir d'équations dans le but d'isoler x .

Groupe A

EA1 : J'essaie de trouver c'est quoi le x .

EA2 : Le x c'est les tuiles grises, ça fait que c'est 3.

EA2 va au tableau pour écrire ce qu'elle a fait.

EA4 : Il y a un truc qui me trouble là, c'est le « entre parenthèses $x...$ »

[...]

EA4 : Je [ne] comprends pas le x moi, il me faut juste le x . D'après moi, il faut juste multiplier les trucs et faire égal et puis là tu fais une ligne. C'est juste que je [ne] sais pas... J'ai envie de faire égal, tu mets un truc ici, puis là tu fais une ligne, après ça tu dois trouver tout ce que genre il y a des deux côtés pour savoir c'est quoi ton x . Après tu fais ta validation.

C : OK donc tu cherches quoi mettre de l'autre côté du [signe] égal c'est ça ?

EA4 : C'est ça... À moins que je cherche mon x , parce que si je mets mon $x...$ Bien non, il me faut mon égal en fait.

C : Est-ce que c'est le x que tu cherches ou c'est l'expression ?

EA4 : Les deux.

C : Parce que nous on veut savoir si ces expressions-là sont bonnes.

EA4 : Mais je pense [qu'elles] sont bonnes, c'est juste que je [ne] sais pas c'est quoi le x . J'ai besoin du x pour continuer à calculer parce que je [ne] vais pas avoir une réponse comme ça.

C : Donc si je te dis par exemple, pour 100 tuiles grises. Ton x , en fait, il peut être plein de nombres différents.

EA4 : Je sais, mais on [ne] peut pas faire mettons $4x + 6$ parce qu'il faut un x de l'autre côté pour ...

C : Donc $4x + 6$, est-ce que c'est une bonne formule qu'on peut utiliser pour trouver le nombre de tuiles blanches selon le nombre de tuiles grises qu'on a ?

EA4 : Oui puis non. Ah, je me suis trompée... Non, les tuiles grises c'est 3, donc c'est 3, mon x c'est 3.

C : Oui, c'est quoi le 3 ?

EA4 : Trois tuiles grises.

C : C'est le nombre de tuiles grises, effectivement. Donc votre x c'est votre nombre de tuiles grises. Et ça c'est dans les trois formules. Dans tous les cas que je vous ai donnés, le x c'est le nombre de tuiles grises.

EA4 : ... de carrés gris.

Les élèves ne semblaient pas attribuer de sens aux expressions lorsqu'elles ne comportaient pas de signe d'égalité. Comme expliqué dans la cadre théorique, la flexibilité entre le caractère procédural et structural des expressions peut nous permettre d'analyser l'entrée des élèves dans la pensée algébrique. Nous constatons cependant que les élèves semblent traiter les expressions comme des processus, comme des calculs inachevés.

Nous insistons sur le fait que la lettre x est surtout considérée comme un nombre inconnu qu'il fallait trouver en isolant x dans une équation, plutôt que comme une variable qui peut prendre différentes valeurs à l'intérieur d'un ensemble numérique. Dans cette situation, on ne fait pas varier x , mais on l'utilise plutôt comme nombre généralisé.

La collaboration entre les élèves du groupe A leur a permis d'identifier que x prenait la valeur de trois tuiles grises dans la figure présentée. La chercheuse a ensuite rappelé ce que l'élève A2 avait proposé à l'élève A1 : x représente le nombre de tuiles grises. Dans ce groupe, tous les élèves ont remplacé x par 3. Si la réponse au calcul achevé était 14, alors ils considéraient l'expression en question valide puisqu'ils avaient effectivement compté 14 tuiles blanches sur le modèle à 3 tuiles grises. Si la réponse au calcul était différente de 14, alors ils jugeaient l'expression inadéquate. La construction du sens de l'expression ne se faisait donc ni par généralisation d'un modèle, ni par transformations algébriques, mais plutôt par l'intermédiaire d'un exemple connu, en s'appuyant sur des données connues.

Des difficultés relatives à la transformation des expressions ont aussi été perçues dans le groupe A. En effet, l'élève A1 a remplacé x par 3 dans l'expression $6x - 2(x - 1)$, mais tenait tout de même à utiliser la distributivité plutôt que la priorité des opérations pour réduire l'expression. Des erreurs de symboles ont donc été commises et ont donné lieu à un résultat de 18 plutôt que 14. La

chercheuse est donc intervenue pour que l'élève A1 obtienne le même résultat que l'élève A2 et qu'il puisse reconnaître que l'expression était effectivement valide.

Groupe A

EA1 : Je [ne] comprends pas lui. Ça [lui] donne 14, ça me donne 18 à chaque fois que je le fais.

[...]

C : Ah, comment tu as fait [EA2] pour avoir 14 puis lui il a 18 ? <Euh> Tu as remplacé ton x par 3, donc 6×3 , moins 2×3 moins 1. Mais tu as fait quoi pour le trouver ? Moins 2 fois 3...

EA1 : Parce que ça, ça va comme ça. (EA1 relie 3 et 1 au coefficient 2.)

C : Ok.

EA1 : Puis après, l'autre il devient -2 .

C : Attends, -2×3 , pourquoi tu as encore -2 ici ? (...) Ok écris-le.

EA1 : Je [ne] sais pas comment tu as trouvé un x sur ta calculatrice.

C : Donc là, ici, tu distribues ton -2 à ton 3 et à ton 1.

EA1 : C'est -2 .

C : Tu garderais ton 6×3 , puis là, au lieu de mettre ton moins 2×3 , tu mettrais quoi ?

EA1 : -8 .

C : Ça, quand tu distribues ton moins 2 à ton 3, ça fait combien ?

EA1 : 6.

C : -6 . <Hmmm.> OK et ici ton -2 .

EA1 : 2.

C : Donc $+2$ ou -2 ?

EA1 : Ici c'était supposé d'être -2 .

C : Quand tu distribues ton 2 à ton 3, ici tu vas avoir un 6, et ici tu vas avoir un 2. Attention à tes symboles. C'est quoi ton symbole devant ton 6 et devant ton 2 ?

EA1 : Moins.

C : Donc là, ici tu vas avoir moins 6. Et ici le 2 ça va être un plus ou un moins ?

EA1 : Plus, voilà pourquoi j'hais les maths. C'est tellement compliqué pour rien.

Certaines erreurs sont produites au moment de faire la distributivité et la chercheuse percevait un risque que l'élève se désengage de la situation.

Figure 4.14 Production de l'élève A1 à la suite de l'intervention de la chercheuse

$$6(3) - 2(3-1)$$

$$6 \times (-6-2)$$

$$6(3) - 6 + 2 = 14$$

En remplaçant x par 3 dans les trois formules proposées, les élèves du groupe A ont pu établir que la première et la troisième formule étaient valides, car ils obtenaient un résultat de 14 tuiles blanches. Observons qu'il s'agit d'une vérification et non pas d'une validation.

L'élève A2 a fait ses démarches au tableau.

Figure 4.15 Production de l'élève A2 au tableau

$$\textcircled{1} \quad \cancel{6 + (x-1) \cdot 4}$$

$$6 + \underset{\downarrow}{(3-1)} \cdot 4 = 14$$

$$\textcircled{2} \quad 4x + 6$$

$$4 \underset{\downarrow}{(3)} + 6 = 18$$

$$\textcircled{3} \quad \cancel{6x - 2(x-1)}$$

$$6(3) - \underset{\downarrow}{2}(3-1) = 14$$

Rep: la num 1 et 3 sont correcte

x : nombre de tuiles grises

Avant de proposer de nouvelles formules à valider, la chercheuse a posé une question aux élèves :

Groupe A

C : Est-ce que la première et la dernière formule sont bonnes pour n'importe quel nombre de tuiles grises ?

EA2 : Euh... Bien non.

EA4 : Plus que [tu] as le même chiffre, plus que [tu] as de chances que ça soit la bonne réponse.

EA2 : Mais non, parce que cette formule-là est bonne pour le nombre de tuiles 14.

C : Et si j'ai 35 tuiles grises?

EA2 : On va remplacer le x par 35.

C : Et la réponse va te donner...

EA1 : Le nombre de tuiles blanches.

EA2 : Ah, ça fait que l'équation marche quand même !

L'élève A2 s'est donc aperçue, grâce à l'intervention de l'élève A1 qui référait à la réponse comme étant le nombre de tuiles blanches, que les formules valides pour trouver le nombre de tuiles blanches pour trois tuiles grises allaient aussi être valides pour d'autres valeurs de x .

Deux autres formules ont alors été proposées dans le groupe A, soient $2 + 4x$ et $8 + 2(x - 2)$. Cette fois, c'est l'élève A4 qui a fait sa démarche au tableau. Comme l'élève A2, elle a remplacé x par 3 pour trouver le résultat au calcul. Pour la cinquième formule, elle a remplacé x par 3 et a choisi d'utiliser la distributivité pour trouver son résultat, comme l'élève A1. Elle n'a cependant pas commis d'erreur de symbole en distribuant le coefficient 2 à 3 et à -2 . Nous pouvons remarquer que la distributivité a engendré des difficultés syntaxiques seulement lorsque le coefficient était négatif.

Figure 4.16 Production de l'élève A4

④ $2 + 4x$
 $2 + 4(3)$
 $2 + 12 = 14$

⑤ $8 + 2(x - 2)$
 $8 + 6 - 4 = 10$

Le groupe B n'a pas procédé de la même façon. Plutôt que de remplacer x par 3, ils ont choisi de transformer les expressions afin de les comparer à l'expression qui représentait leur méthode ($6 + 4(x - 1)$) une fois réduite, soit $2 + 4x$. Les élèves ont d'abord travaillé individuellement, puis ont comparé leurs formules. Ils ont commencé par établir unanimement que la troisième formule était valide puisqu'elle donnait $4x + 2$ une fois réduite.

Pour ce qui est de la première formule, l'élève B1 et l'élève B2 n'étaient pas d'accord. L'élève B1 soutenait que l'expression $6 + (x - 1) \cdot 4$ n'était pas valide, car elle obtenait $4x + 2$, alors que le groupe avait noté leur expression $2 + 4x$. Pour elle, ce n'était « pas la même chose », ce qui indique qu'elle ne semble pas avoir acquis le concept de commutativité. L'élève B2 l'a contredit en affirmant que l'expression était adéquate, l'élève B3 a confirmé que « c'est la même chose » et l'élève B4 a précisé que « c'est juste qu'il est inversé ». Les élèves sont alors arrivés au consensus que l'expression était valide et équivalente à leur expression initiale. Finalement, il était évident pour les élèves que la deuxième formule, $4x + 6$, n'était pas équivalente à $2 + 4x$.

La chercheuse a conclu l'activité par une certaine institutionnalisation pour que les élèves retiennent que même si des expressions étaient écrites différemment, elles pouvaient être équivalentes et renvoyer à la même quantité (le nombre de tuiles blanches dans ce cas).

Groupe A

C : Est-ce que vous pouvez me dire lesquelles des formules sont bonnes ?

EA2 : La 1, 3 et 4.

EA4 : Toutes eux qui donnent 14.

C : Et qu'est-ce qu'on pourrait dire de ces formules ?

EA1 : Ça compte les nombres blancs.

EA2 : Les tuiles blanches.

C : Donc on peut toutes les utiliser et on va toujours arriver au même nombre ?

EA2 : Mais pas eux qui [ne] marchent pas.

C : Pas celles qui [ne] fonctionnent pas, mais celles qui fonctionnent [...] sont toutes équivalentes, même si elles sont écrites différemment.

EA2 : Oui.

C : Donc elles sont équivalentes.

À la suite de cette institutionnalisation, l'élève A2 s'est tournée vers son orthopédagogue pour lui exprimer qu'elle venait de comprendre ce qu'ils avaient vu en début d'année.

Nous pouvons en conclure que, si certains traitaient les expressions comme des équations au début de la séance, cette activité a permis aux élèves de considérer les expressions algébriques comme des objets en soi. Les difficultés de transformations sont survenues lorsque les élèves voulaient isoler x dans l'expression, comme ils l'auraient fait dans une équation, et lorsqu'ils voulaient distribuer un coefficient négatif aux termes dans une parenthèse. Nous retenons aussi que les deux groupes n'ont pas réalisé l'activité de la même façon : le groupe A a remplacé x par le nombre de

tuiles grises dans la figure proposée, tandis que le groupe B a transformé les formules pour les comparer à l'expression réduite de leur méthode de calcul. La réalisation de la phase 1 de la situation initiale des tuiles du plancher pourrait donc avoir eu un impact sur la démarche des élèves du groupe B en accordant plus de sens aux opérations dans les expressions. À notre surprise, même si les élèves ont reconnu l'équivalence de certaines expressions, aucun élève n'a associé les opérations des expressions à une méthode de calcul.

4.3 Paul et Lucie

Nous avons finalement réalisé la situation « Paul et Lucie », à la suite de l'activité des tuiles, lors de la troisième séance. La situation « Paul et Lucie » demandait implicitement aux élèves de comparer deux méthodes de calculs afin de déterminer si celle de Lucie permettrait d'obtenir un résultat supérieur à celui de Paul. De façon générale, les élèves ont d'abord effectué les calculs des deux personnages en attribuant une valeur fictive au nombre de départ inconnu, en espérant que Lucie obtienne un résultat supérieur. Ils ont ensuite essayé de prouver, par l'intermédiaire de plusieurs exemples, qu'il était impossible pour les deux personnages d'obtenir des résultats différents. Après avoir fait quelques essais et erreurs, d'autres élèves ont plutôt utilisé l'écriture algébrique pour comparer les deux méthodes et pour rendre visibles certaines relations. La traduction du langage naturel en expression algébrique nous a permis de relever certaines difficultés qui peuvent s'expliquer par les ruptures arithmétique-algèbre, comme le statut de l'écrit, le statut de la lettre et le statut du signe d'égalité. Nous aborderons ensuite les difficultés à transformer les expressions pour établir et reconnaître l'équivalence.

4.3.1 Essais et erreurs (à partir de valeurs fictives)

D'abord, dans les deux groupes, des élèves ont attribué une valeur fictive au nombre de départ pour trouver le résultat de Paul et de Lucie.

Dans le groupe A, l'élève A2 a proposé 3 comme nombre de départ. Comme les calculs à partir de ce nombre ont permis aux élèves de constater que les deux personnages obtenaient le même résultat, les élèves A1 et A3 ont choisi un autre nombre de départ, soit 21, et ont, une fois de plus, obtenu le même résultat pour Paul et Lucie, soit 129. La figure qui suit présente les démarches de l'élève A3.

Figure 4.17 Production de l'élève A3

$$\begin{aligned} \text{Paul: } & 21 \cdot 2 + 1 = 43 \cdot 3 = 129 \\ \text{Lucie: } & 21 + 1 = 22 \cdot 6 - 3 = 129 \\ \text{Résultat final: } & 129 \end{aligned}$$

Les premiers essais des élèves s'inscrivent bien dans le contexte de l'arithmétique, mais certaines traces de généralisation apparaissent. En effet, l'élève A1 a affirmé avoir aussi calculé le résultat des deux personnages à partir de nombres de départ plus grands (trois millions, cinq millions et dix millions) sur sa calculatrice en se rappelant qu'à partir de cinq millions il obtenait un résultat de 30 000 003.

Dans le groupe B, les élèves ont aussi choisi des nombres de départ fictifs. L'élève B4 a choisi 100 et a obtenu un résultat de 603 à la calculatrice, en ne laissant que symboles et nombres comme traces sur sa feuille. Ses calculs lui ont permis d'établir que les deux personnages arriveraient au même résultat s'ils choisissaient 100 comme nombre de départ.

Figure 4.18 Production de l'élève B4

144

Paul et Lucie

Paul et Lucie choisissent un même nombre de départ mais ensuite, ils font des calculs différents avec lui.

603 597 +

- Paul multiplie le nombre choisi par 2 et additionne 1. Ensuite, il multiplie le résultat obtenu par 3.
- Lucie additionne 1 au nombre choisi, multiplie le résultat de cette addition par 6 et finalement enlève 3 au dernier résultat.

144

711

Lucie veut obtenir comme résultat final un nombre plus grand que celui de Paul. Quel nombre de départ devrait-elle choisir ?

= toujours =

L'élève B4 explique sa démarche :

Groupe B

EB4 : C'est ça, ça donne le même nombre.

[...]

C : Comment tu as fait [EB4] ?

EB4 : Je les ai additionnés.

C : Tu as additionné quoi ?

EB4 : $100 \times 2 + 1$.

EB3 : $100 \times 2 + 1$, ça donne 201 ça.

EB4 : Oui, fois 3 qui donne 603. Puis Lucie c'est la même affaire. $100 + 1$, 101, fois 6, [606, moins 3, 603].

C : Donc toi tu as pris comme nombre de départ 100, puis tu as fait les calculs de Paul et les calculs de Lucie, et les deux sont arrivés au même nombre ?

EB4 : Ouais !

C : Est-ce qu'il y a moyen qu'on trouve un nombre de départ qui ferait en sorte qu'on aurait des résultats différents à la fin entre Paul et Lucie ?

Comme les élèves persistaient à utiliser un raisonnement davantage arithmétique (essais et erreurs) et que la situation n'avancait pas, la chercheuse a demandé aux élèves du groupe B s'il y avait une façon de trouver un nombre de départ pour lequel les deux personnages obtiendraient des résultats différents. Cette intervention semble avoir favorisé le passage à l'écriture algébrique, puisque c'est à ce moment que les élèves du groupe B ont cherché à noter les opérations effectuées par chaque personnage, non seulement pour conserver des traces du calcul, mais pour pouvoir les comparer à l'aide d'expressions algébriques.

Dans le groupe A, la chercheuse n'a pas eu à faire cette intervention puisque les élèves ont eux-mêmes utilisé l'écriture algébrique. Nous aborderons, dans la section qui suit, ce passage à l'écriture d'expressions algébriques.

4.3.2 Production d'une écriture algébrique

Si certains élèves ont tenté de trouver des résultats différents à partir de nombres de départ fictifs, d'autres ont vu la pertinence de produire des écritures algébriques.

Une des premières difficultés rencontrées par les élèves a été celle de l'interprétation de la consigne ; pour faire avancer la situation, la chercheuse a modifié la formulation et a demandé aux élèves s'ils pouvaient trouver un nombre de départ pour lequel les deux personnages n'obtiendraient pas le même résultat. Cette intervention semble avoir aidé l'élève B2 qui a perçu

la pertinence de noter les opérations effectuées par chaque personnage. L'intervention a aussi été favorable pour l'élève B1, puisqu'au départ, cette élève ne comprenait pas que le nombre de départ soit inconnu. L'élève B1 a ainsi proposé d'identifier ce nombre par une lettre, soit x , et a ensuite proposé l'expression algébrique suivante : $(x \cdot 2 + 1) \cdot 3$.

Groupe B

EB2 : Attends, Paul, on multiplie le nombre choisi par 2 et on additionne 1. Ensuite il le multiplie. OK, puis Lucie, on additionne 1, là bien, il faut faire Paul. On fait une section exemple Paul, et Lucie, puis là x fois 3, non c'est x fois 2. x fois 2.

EB1 : C'est quoi le nombre choisi, je [ne] comprends pas.

EB2 : Le résultat de cette addition par 6.

[...]

EB1 relit la consigne pour Paul.

EB1 : Mais c'est x parce qu'on ne connaît pas le chose.

EB2 : Mais je sais, tu fais $x + 1 = x$, x fois 6.

EB1 : Non c'est x fois 2, +1, puis après fois 3.

EB2 : Ah toi tu es là, moi je suis au deuxième.

EB1 : x ... Non, c'est $2x$... Non...

EB2 : Non, mais le x ça représente le nombre que tu vas choisir.

EB1 : C'est ça !

C : Donc x c'est le nombre qu'[on] choisit au départ.

EB1 : C'est ça, après tu [multiplies par] 2, puis après tu fais plus 1. Fois 2, plus 1. Mais moi je pense qu'ils veulent mettre la parenthèse.

Pour répondre à la question que la chercheuse a posée dans le groupe B, l'élève B2 a tenté de traduire les expressions, données en langage naturel, en langage mathématique. L'écriture qui en résulte exprime les calculs dans l'ordre dans lequel ils sont donnés dans l'énoncé. On identifie alors des traces des raisonnements arithmétiques, surtout dans l'utilisation du signe égal.

Figure 4.19 Production de l'élève B2

Paul

$$x \cdot 2 + 1 = x \cdot 3$$

603

Lucie

$$x + 1 = x \cdot 6 = x \cdot 3$$

603

Par exemple, la méthode de calcul de Lucie était d'additionner 1 au nombre choisi, de multiplier le résultat par 6 et d'enlever 3 au dernier résultat. Dans l'expression proposée par l'élève B2, la lettre x représente des valeurs différentes : d'abord, le nombre de départ, ensuite, le résultat de l'addition de 1, puis, le résultat de la multiplication par 6. Nous pouvons aussi remarquer que l'élève effectue différents calculs sur la même ligne, en utilisant le signe d'égalité pour annoncer le résultat de chaque calcul plutôt que pour représenter une relation d'équivalence entre les expressions. Les expressions qui en résultent représentent des procédures effectuées (caractère désignatif du symbolique) plutôt que de nouveaux objets mathématiques soumis à des règles spécifiques.

Groupe B

EB4 : Moi ça me donne la même affaire toujours.

C : Ça te donne la même chose tout le temps [EB4] ?

EB4 : Oui.

EB1 : Et ça donne quoi ta réponse ?

EB4 : Ça varie, quel chiffre tu prends.

EB1 : x !

EB4 : Ah x !? [Je n]'ai pas mis de x .

EB3 : Il fallait mettre des x .

EB2 : Moi aussi ça donne le même nombre.

EB4 : Moi ça donne toujours genre 603... Tu prends un peu moins, ça donne 500...

EB2 : Ouais moi aussi ça donne 603... [...]

EB1 (à EB4) : Prend x ! x ! On [ne] connaît pas la valeur.

EB2 : Ça [ne] change pas si on change le nombre. On a pris 100, mais ça [ne] change pas.

C : Si je prends 35, est-ce que les deux vont avoir le même résultat?

EB2 et EB4 : Oui.

C : Si je prends 240 ?

EB2 : Oui, ils vont tous avoir le même résultat.

C : Pourquoi ?

EB2 et EB4 : Parce que c'est le même calcul.

C : Comment tu sais que c'est le même calcul ? Ils font des calculs différents.

EB4 : Mais ça donne le même résultat.

C : Comment tu sais ?

EB2 : C'est la logique. Je le sais. (EB2 montre sa feuille à C.)

C (lit la feuille de EB2) : x fois 2 plus 1 est égal à x fois 3 ? (EB2 avait noté $x \cdot 2 + 1 = x \cdot 3$)

EB2 : Ouais bien le x c'est le même nombre. Ça fois ça, plus 1, ça donne ça. Puis là ça donne je [ne] sais pas.

C : Ça donne x fois 3 ou ça donne $2x + 1$?

EB2 : Je [ne] sais pas.

C : x fois 2 plus 1...

EB2 : Je [ne] sais pas. Ça donne 201. 201×3 ça donne 603. Attends non, ouais, 100×2 , 200, plus 1, voilà puis après fois 3, ça donne 603.

EB3 : Il peut-tu le faire au tableau ? Je [ne] comprends vraiment pas.

C : Vas-y [EB2].

EB2 : C'est facile, tu fais juste la même affaire... Le nombre de départ c'est 100.

EB1 : Est-ce qu'il fallait mettre 100 ou c'est juste lui ?

C : Il a choisi 100 comme nombre, mais ça peut être un autre.

EB2 : $100 \times 2 + 1 = 201$, puis là ça dit de...

C : Ensuite il multiplie le résultat obtenu par 3.

EB2 : Puis là ça égal à 201. $201 \times 3 = 603$. Ça c'est pour Paul, voilà c'est bon. (EB2 fait un trait.) et là Lucie. Lucie c'est $100 + 1 = 101$. 101×6 ça donne 606, puis là bien moins 3, est égal à 603. Voilà.

C : Donc même s'ils font des calculs différents, ils vont toujours obtenir le même nombre ?

EB2 : Oui.

EB3 : Essaie avec 500.

EB2 : Ça va donner la même affaire.

EB4 : Essaie avec un million.

EB2 : Non ça va donner la même affaire ! C'est comme si tu prenais 60 000. Ça va donner la même affaire.

EB3 : Ça va donner 603 ?

C (précise la question de EB3) : Est-ce que ça va donner 603 à chaque fois ?

EB2 : Non ça va donner le même calcul.

C (précise la réponse de EB2) : Ça va donner le même nombre pour Paul et Lucie.

EB2 : Exactement.

Dans cet extrait, l'élève B4 fait remarquer que le résultat varie selon le nombre de départ choisi, mais que, à partir d'un même nombre de départ, « ça donne le même résultat » pour Paul et Lucie, même si leurs calculs peuvent paraître différents. L'élève B4 semble donc reconnaître l'équivalence des deux calculs à partir de ses essais et erreurs.

L'élève B2 était du même avis, même si les écritures qu'il a utilisées gardent une fonction désignative. En effet, on voit des traces des écritures arithmétiques dans l'utilisation des lettres, mais les expressions algébriques qui en résultent ne sont pas l'objet de transformation spécifique. Des erreurs d'écriture du type $x \cdot 2 + 1 = x \cdot 3$ mettent bien en évidence la difficulté concernant l'utilisation du signe d'égalité, identifiée plusieurs fois par les auteurs.

Après avoir rappelé que le nombre de départ doit être identifié par x puisqu'on ne connaît pas sa valeur, l'élève B1, qui avait oralement établi l'expression $(x \cdot 2 + 1) \cdot 3$ un peu plus tôt, soutenait

comme ses camarades que le résultat serait le même pour les deux personnages, peu importe le nombre de départ choisi. Il semblerait que l'écriture algébrique, même si elle n'est pas utilisée pour établir l'équivalence, a permis aux élèves de poser un regard différent sur le problème, et a particulièrement permis de reconnaître les relations qui existent entre le nombre de départ et le résultat de chaque personnage.

L'élève B3 a demandé à l'élève B2 de faire un autre essai en utilisant 500 comme nombre de départ, car il n'était pas convaincu de l'équivalence des deux méthodes. Ce retour à la stratégie d'essai et erreur reflète bien le fait que les expressions algébriques produites ne sont pas encore des moyens de validation.

Dans le groupe A, le signe d'égalité et les expressions symboliques ont été utilisés de manière pertinente. En effet, l'élève A1 a utilisé le signe d'égalité pour annoncer le résultat à chacun de ses calculs lorsqu'il faisait des essais et erreurs, mais a utilisé le symbole pour représenter une relation d'équivalence lorsqu'il a posé les expressions algébriques représentant les calculs de chaque personnage. Dans la figure qui suit, son raisonnement arithmétique peut être perçu dans la partie gauche et son raisonnement algébrique, dans la partie droite.

Figure 4.20 Production de l'élève A1

$3(2x+1)$
 6×3

Paul et Lucie

Paul et Lucie choisissent un même nombre de départ mais ensuite, ils font des calculs différents avec lui.

$3 \times 2 = 6 \quad 6 + 1 = 7 \quad 7 \times 3 = 21$

- Paul multiplie le nombre choisi par 2 et additionne 1. Ensuite, il multiplie le résultat obtenu par 3.

$3 + 1 = 4 \quad 4 \times 6 = 24 \quad 24 - 3 = 21$

- Lucie additionne 1 au nombre choisi, multiplie le résultat de cette addition par 6 et finalement enlève 3 au dernier résultat.

Lucie veut obtenir comme résultat final un nombre plus grand que celui de Paul. Quel nombre de départ devrait-elle choisir ?

$6(x+1)$
 $6 \times 6 - 3 = 6x + 3$

$21 \times 2 = 42 + 1 = 43 \times 3 = 129$

$21 + 1 = 22 \times 6 = 132$

$132 - 3 = 129$

Dans le groupe B, les traces écrites laissées par les élèves ne permettent pas de prouver l'équivalence des deux méthodes de calcul. L'élève B2 s'est servi de ses calculs pour conserver une trace des opérations à effectuer plutôt que pour montrer une nouvelle information. Nous avons décrit dans le cadre théorique que ce pouvoir désignatif accordé au langage numérique est davantage utilisé dans le domaine arithmétique (Chevallard, 1984). En effet, en algèbre, l'écrit a un pouvoir monstratif puisqu'il permet de rendre visibles certaines informations.

L'élève B2 a utilisé ses traces pour se rappeler les calculs à faire et ainsi montrer à ses camarades qu'à partir de 100, les deux personnages obtiendront effectivement le même résultat. En effet, il a remplacé le premier x représentant le nombre de départ (voir Figure 4.19) par 100, et les x représentant les valeurs intermédiaires par les résultats intermédiaires en question.

Figure 4.21 Production de l'élève B2 au tableau

Paul

$$(100) \cdot 2 + 1 = 201 \cdot 3 - 603$$

Lucie

$$100 + 1 = 101 \cdot 6 = 606 - 3$$

603

L'élève A2 aussi s'est servie de l'écriture d'expressions algébriques pour conserver des traces des calculs à effectuer. Elle a établi l'expression algébrique qui représente les calculs de chaque personnage et a remplacé x par le nombre qu'elle a choisi. En nous intéressant au cas où les élèves du groupe A ont choisi 3 comme nombre de départ, nous pouvons constater que ces derniers ont noté leurs calculs différemment. En effet, l'élève A1 a opéré sur le nombre 3 en suivant le langage naturel de la consigne, tandis que l'élève A2 a construit une expression algébrique pour ensuite remplacer x par 3, ce qui a changé l'ordre de l'écriture des opérations. Tous deux ont obtenu un résultat de 21.

Groupe A

EA1 : Paul et Lucie choisissent le même nombre de départ.

EA2 : Mais c'est ça, c'est 3 mon nombre de départ.

EA1 : Mais tu as dit 6 au premier.

EA2 : Non j'ai dit 3.

EA1 : OK, mais le deuxième qu'est-ce que tu as fait ?

EA2 : 6 fois...

EA1 : 6 !

EA2 : Oui, mais c'est parce que j'ai fait, j'ai comme changé le bord de la formule, je [ne] l'ai pas fait dans le même sens qu'il l'a dit. Il a dit « Lucie additionne un au nombre choisi », ça fait que $3 + 1$. « Multiplie par 6 cette addition », ça fait que j'ai fait 6 fois, entre parenthèses $3 + 1$. Puis après ils disent « finalement, enlève », [...] ça donne la même affaire...

L'orthopédagogue a proposé à l'élève A2 d'essayer avec un autre nombre départ. L'élève ne voulait pas « faire des calculs pour rien », d'où l'avantage de l'écriture algébrique de montrer une nouvelle information. L'élève a finalement choisi un autre nombre de départ, soit 5, et a obtenu un résultat de 33 pour les deux personnages.

Groupe A

EA2 : Ça [ne] marche pas. J'ai essayé avec 5 puis ça me donne 33 puis 33. C'est impossible. Parce que c'est la même, [ce n'] est pas la même équation, mais c'est que, on remplace par le même nombre. En fait, c'est la même équation, mais pas écrite de la même manière. [...] Ça fait que ça [ne] se peut juste pas. Tu [ne] peux pas avoir le même nombre.

O : Parce que ça va toujours...

EA2 : Être la même chose parce qu'on remplace par le même nombre, puis c'est la même équation, pas écrite de la même manière.

La figure qui suit présente la démarche de l'élève A2 pour trouver les résultats qu'obtiendraient Paul et Lucie s'ils choisissaient 3 ou 5 comme nombre départ. À partir de ses écritures algébriques, ces deux essais lui ont suffi pour déterminer que les deux méthodes de calculs allaient toujours donner le même résultat, même si elle n'avait pas établi que les deux expressions avaient la même dénotation. Encore une fois, aucune transformation algébrique n'est proposée pour déterminer l'équivalence.

Figure 4.22 Production de l'élève A2

Paul et Lucie choisissent un même nombre de départ mais ensuite, ils font des calculs différents avec lui.

- Paul multiplie le nombre choisi par 2 et additionne 1. Ensuite, il multiplie le résultat obtenu par 3. $x \cdot 2 \rightarrow x \cdot 2 + 1$
 $= x \cdot 2 + 1 \cdot 3 =$
 $3(x \cdot 2 + 1) = x + 1$
- Lucie additionne 1 au nombre choisi, multiplie le résultat de cette addition par 6 et finalement enlève 3 au dernier résultat. $6(x + 1)$
 $6(x + 1) - 3 =$

Lucie veut obtenir comme résultat final un nombre plus grand que celui de Paul. Quel nombre de départ devrait-elle choisir ?

Paul:

$$3(x \cdot 2 + 1) = 21$$

$$\downarrow$$

$$3(3 \cdot 2 + 1)$$

$$= 33$$

Lucie:

$$6(x + 1) - 3 = 21$$

$$\downarrow$$

$$6(3 + 1) - 3$$

$$= 33$$

La chercheuse est intervenue pour vérifier si l'élève avait perçu que les deux expressions renvoyaient à l'expression simplifiée $6x + 3$ ou si elle considérait les deux essais suffisants pour prouver l'équivalence des algorithmes.

Groupe A

C : Est-ce qu'ils vont toujours avoir la même réponse finale?

EA2 : Mais oui, parce que si on remplace par le même nombre, bien l'équation elle est équivalente.

C : Comment tu fais pour savoir qu'elle est équivalente ?

EA2 : Si on remplace un nombre... j'ai fait en remplaçant 5 et 3, ça m'a donné 33 et 33 et ça m'a prouvé que c'est équivalent.

Évidemment, l'intervention n'a pas permis de faire évoluer la situation à cette étape. L'élève confirme son raisonnement arithmétique.

4.3.3 Transformations algébriques

L'élève A4, quant à elle, a traduit le texte donné en langage naturel en expressions algébriques dans le même ordre que les opérations étaient racontées. Elle a donc obtenu l'expression $(x \cdot 2 + 1) \cdot 3$ pour Paul, comme l'élève B1, et $(x + 1)6 - 3$ pour Lucie. Nous avons remarqué que lorsque le coefficient était noté après la parenthèse, les élèves avaient plus de difficulté à transformer l'expression, et ainsi, reconnaître l'équivalence des expressions. En effet, les élèves ayant noté $(x \cdot 2 + 1) \cdot 3$ et $(x + 1)6 - 3$ ont rencontré des obstacles que ceux qui avaient noté $3(2x + 1)$ et $6(x + 1) - 3$ n'ont pas rencontrés pour arriver à l'expression simplifiée $6x + 3$.

Nous pouvons remarquer, sur la figure qui suit, que le symbole représentant la multiplication de x par 2 pourrait avoir fait obstacle à la compréhension de l'élève en la laissant croire que $x \cdot 2 + 1$ était un trinôme.

Figure 4.23 Production de l'élève A4

The image shows handwritten mathematical work by student A4. It is organized into three columns and several rows.

- Top Row:**
 - Left: $P: (x \cdot 2 + 1) \cdot 3$ with a horizontal line through it.
 - Middle: $\frac{3x \cdot 2 + 1}{4x + 1}$
 - Right: $\frac{6x}{6(-1) + 3} = \frac{4(-1) + 1}{-6 + 3} = \frac{-4 + 1}{-3} = \frac{-3}{-3}$
- Second Row:**
 - Left: $L: (x + 1)6 - 3$
 - Middle: $6x + 6 - 3$
 - Right: $6x + 3$
- Third Row:**
 - Left: $P: 3x \cdot 6 + 3$
 - Middle: $3x \cdot 9$
 - Right: $6x + 3$ and $4x + 1$ (both boxed)
- Fourth Row:**
 - Left: $6x + 2$ (boxed)
 - Middle: $4x$ and $-6x$ (both boxed)
 - Right: $\frac{2}{-2} \mid \frac{-2x}{-2}$
- Fifth Row:**
 - Left: -1 (with a downward arrow from the row above)
 - Right: x (with a downward arrow from the row above)

Après avoir établi les expressions représentant les calculs de chaque personnage, l'élève A4 a seulement multiplié x par 3 dans l'expression de Paul. Elle a ainsi obtenu l'expression $3x \cdot 2 + 1$

et a multiplié $3x$ par 2 pour obtenir, par erreur, l'expression $4x + 1$. L'élève A4 a ensuite noté ses expressions de chaque côté d'un signe d'égalité, a procédé comme si elle devait isoler x de l'équation $6x + 3 = 4x + 1$ et a obtenu que x valait -1. Elle a plus tard transformé différemment l'expression $(x \cdot 2 + 1) \cdot 3$ en distribuant le coefficient 3 comme s'il y avait trois termes dans la parenthèse, ce qui lui a donné l'expression $3x \cdot 9$, expression avec laquelle elle a produit sa nouvelle démarche au tableau. Les élèves A1 et A2 l'ont cependant corrigée en notant les coefficients devant les termes multipliés pour faciliter les transformations. L'expression $x \cdot 2$ est donc devenue $2x$ et $(x \cdot 2 + 1)3$ est devenu $3(2x + 1)$. La chercheuse est aussi intervenue, de façon plus directive, en raison du peu de temps restant à la séance.

Groupe A

EA2 : Tu fais x fois 2.

EA1 : 2.

EA2 : $2x$.

C : $2x$ c'est la même chose que x fois 2. Ensuite tu additionnes 1.

EA1 : $3x$, donc $3x$ fois 3.

C : Si tu additionnes 1, tu n'additionnes pas x , tu additionnes 1.

EA1 : $3x + 1$.

EA2 : Mais non, tu [ne] peux pas les additionner parce qu'ils [ne] sont pas semblables.

C : Ah, il n'y a pas de x ici, ça c'est une constante. (C écrit $2x + 1$ sur la feuille de EA1.)

EA1 : Après tu fais fois 3.

C : Comment tu vas le noter ?

(EA1 note $2x + 1$ entre parenthèses et ajoute 3 devant la parenthèse.)

C : Parfait. Ça c'est pour Paul.

EA1 : Oui, mais c'est parce que... (EA1 fait des traits pour distribuer 3 aux deux termes dans la parenthèse et écrit « $6x \ 3$ » sur sa feuille.) $6x, 3$.

C : $6x...$

EA1 : Plus 3.

La figure qui suit présente la démarche que l'élève A4 a réalisée au tableau et en rouge se trouvent les corrections que l'élève A1 a apportées avec l'aide de l'élève A2.

Figure 4.24 Démarche des élèves du groupe A au tableau

$$P: (x+2) \cdot 3$$

$$3x + 6 + 3$$

$$3x + 9$$

$$3(2x+1)$$

$$6x + 3$$

$$L: (x+1) \cdot 6 - 3$$

$$6x + 6 - 3$$

$$6x + 3$$

$$x+2 \quad \begin{array}{l} \hline 3x+9 \\ 6x+3 \end{array}$$

Ces transformations ont alors permis aux élèves du groupe A de constater que les deux expressions étaient équivalentes, mais surtout de le prouver algébriquement. C'est ainsi que l'élève A4 a pu s'exclamer « Ah, c'est la même chose ! »

Nous pouvons donc conclure que, malgré l'écriture d'expressions algébriques, certains élèves tiennent tout de même un raisonnement arithmétique. Malheureusement, le manque de temps ne nous a pas permis d'intervenir dans le groupe B afin de faire évoluer la situation, mais l'élève B2 semblait avoir bien compris la raison pour laquelle, peu importe le nombre choisi, les deux personnages obtiendraient le même résultat. Il a tenté d'expliquer à l'élève B3 comment les deux personnages pouvaient faire des calculs différents, mais obtenir le même résultat : « C'est comme si tu faisais $3 + 1$, ça donne 4, puis $2 + 2$, ça donne 4 aussi. C'est la même affaire. Ça va donner la même affaire. » Dans le groupe A, malgré les difficultés concernant l'opérateur algébrique, les élèves semblent reconnaître le rôle des transformations algébriques dans l'établissement de l'équivalence. Les élèves se sont détachés du sens initial des expressions pour accepter de les transformer afin de montrer une nouvelle information, soit le fait que les expressions renvoyaient à la même dénotation.

En résumé, cette recherche avait pour objectifs d'explorer la nature des interactions didactiques et des difficultés des élèves autour du thème de l'équivalence d'expressions algébriques et de comprendre les choix didactiques qui favorisent le développement de la pensée algébrique. L'analyse des interactions entre les élèves et avec l'orthopédagogue et la chercheuse à propos de

l'équivalence des expressions algébriques a permis de relever certains obstacles didactiques et épistémologiques, mais aussi d'identifier certains choix didactiques qui peuvent favoriser le développement de la pensée algébrique.

Par exemple, aux phases de généralisation des situations « Les carreaux hachurés » et « Les tuiles du plancher », le nombre élevé de carreaux sur le côté d'un carré ou de tuiles grises ont été des variables didactiques importantes pour faire évoluer le raisonnement des élèves en ce sens qu'elles rendaient nécessaire la généralisation d'une méthode de calcul. Certains élèves ont rencontré des obstacles pour reconnaître les opérations à faire dans des cas éloignés du motif présenté et où ils ne pouvaient s'appuyer sur une représentation visuelle. Ces obstacles ont pu être surmontés grâce aux échanges avec l'orthopédagogue et la chercheuse. Aussi, l'analyse de dessins a favorisé la reconnaissance des invariants dans les motifs, et les motifs ont permis de faire des retours pour valider la méthode de calcul.

Lors des phases où les élèves devaient exprimer algébriquement leur méthode de calcul, ces derniers ont rencontré des difficultés à faire référence à la variable en question, notamment à reconnaître le statut de la lettre et à la traiter comme une variable. Globalement, les élèves réalisaient des généralisations factuelles ou contextuelles. Nous pouvons aussi remarquer que la description de la méthode de calcul en phrase favorisait la reconnaissance des relations pour passer à l'écriture algébrique.

Les situations d'enseignement-apprentissage choisies ont effectivement été très pertinentes pour développer la pensée algébrique des élèves et pour faire un travail sur l'équivalence des expressions. Notons tout de même qu'un travail syntaxique sur des expressions arithmétiques pourrait permettre aux élèves d'avoir un meilleur contrôle sur les manipulations algébriques dans le but qu'ils acceptent avec plus d'aisance de transformer des expressions sans perdre le sens qui lui était rattaché. Aussi, certaines difficultés syntaxiques liées à la multiplication sont apparues, notamment pour reconnaître des termes dans une expression comportant un symbole de multiplication, pour distribuer un coefficient à des termes dans une parenthèse qui le précède et pour distribuer un coefficient négatif aux termes dans une parenthèse. Une évolution dans le statut des expressions a aussi pu être identifiée. Au terme des séances, les élèves étaient davantage en

mesure de considérer les expressions comme des objets en soi plutôt que comme des procédures à effectuer. Ils accordaient aussi plus de sens aux opérations lorsqu'ils avaient eux-mêmes identifié une méthode de calcul générale pour une situation.

Finale­ment, les élèves en difficulté étaient effectivement en mesure de se détacher du sens initial de leurs expressions, pour leur faire subir des transformations algébriques, et leur réattribuer un nouveau sens, soit l'équivalence.

CONCLUSION

L'objectif de notre recherche était d'*analyser le rôle que pouvait jouer l'articulation des dimensions sémantique et syntaxique dans l'apprentissage de la notion d'équivalence d'expressions algébriques des élèves en difficulté d'apprentissage dans le contexte d'interventions orthopédagogiques*. Pour ce faire, nous nous sommes intéressés aux difficultés des élèves dans le domaine algébrique et aux pratiques des enseignants en adaptation scolaire dans le but de mener des situations d'enseignement-apprentissage qui pourraient favoriser l'apprentissage de la notion d'équivalence d'expressions algébriques.

L'expérimentation se voulait la plus naturaliste possible, d'où l'animation des séances par l'orthopédagogue. Cependant, un changement a eu lieu en cours d'expérimentation. À partir de nos observations sur le déroulement de la première séance, différents éléments fondamentaux ont remis en question ce choix, notamment certaines difficultés rencontrées par l'orthopédagogue dans la gestion des situations qui mettaient en péril les observations que l'on souhaitait effectuer. Le manque d'habitude à gérer ce type de situations et son désir de bien faire les choses l'ont conduite à se tenir trop près de la planification proposée, ce qui semble l'avoir contrainte dans ses interventions. Lors de la première séance, la lenteur du développement des situations pourrait avoir déstabilisé l'orthopédagogue qui ne laissait pas le silence planer. Il est à noter que les séances avaient été reportées parce que le contexte scolaire a fait en sorte que l'orthopédagogue devait remplacer une enseignante dans une classe pendant quelques semaines et les contraintes en ce qui a trait à l'horaire des élèves (l'approche des examens de fin d'année) ont précipité l'expérimentation. Bien que la chercheuse ait pris le flambeau de l'animation des séances en cours d'expérimentation, nous tenons à saluer le travail de l'orthopédagogue une fois de plus, qui a généreusement accepté de vivre cette expérience avec nous et qui s'est prêtée au jeu en nous partageant honnêtement ses réflexions. Toujours dans le but de réaliser l'expérimentation la plus naturaliste possible, l'orthopédagogue est restée présente et a continué de participer à la mise en œuvre des situations, principalement dans l'analyse *a priori* des situations, dans l'anticipation des conduites des élèves selon les enseignements réalisés, ainsi que dans les interactions didactiques lors des séances.

L'analyse des résultats nous a permis de décrire les interactions didactiques et de relever certaines difficultés rencontrées par les élèves autour de trois thèmes essentiels dans le passage à la pensée algébrique, soient la généralisation, l'écriture algébrique et l'équivalence.

Les **processus de généralisation**, dans les deux premières situations, impliquaient la reconnaissance des régularités à partir de l'analyse de cas particuliers. Les interactions didactiques révèlent un effort de la part des élèves dans la recherche des invariants et des variables permettant d'exprimer les relations à identifier. La reconnaissance des invariants a été difficile pour certains élèves, notamment ce qui est compté deux fois dans le problème « Les carreaux hachurés » ou le nombre de tuiles blanches entourant la tuile grise dans « Les tuiles du plancher ». Des interventions régulières de l'orthopédagogue ou de la chercheuse, faisant partie des interactions didactiques, ont permis de faire évoluer les situations. Squalli avait déjà identifié cette difficulté à changer de perception, « à se détacher de la singularité d'une situation et à voir le général dans le particulier » (2021, p. 2). Le travail sur le cas particulier, mis sous un regard de généralité, a guidé les interventions proposées, en particulier l'orientation vers l'analyse des dessins (certains non complétés, mais faisant office d'élément de référence) comme point d'appui à la pensée et à la généralisation.

Certaines difficultés ont été repérées lors du passage à l'écriture algébrique. En principe, l'ordre de l'écriture proposée maintient l'ordre des calculs énoncés dans la consigne ou identifiés par les élèves en fonction de la méthode proposée. De plus, malgré l'identification de la structure du calcul générique à faire, les élèves proposaient de l'exprimer en utilisant des nombres particuliers : par exemple, certains élèves exprimaient leur méthode par un exemple numérique ($865 \times 4 - 4$) (généralisation factuelle selon Radford (2008)) plutôt que par une généralisation symbolique, même s'ils avaient identifié les opérations à faire (« fois 4, moins 4 »). L'utilisation des lettres pour exprimer des variables, même si elle avait déjà été objet d'enseignement, est encore une difficulté à surmonter. En fait, Vlassis, Demonty et Squalli (2017) avaient déjà explicité les difficultés des élèves à produire des formules en utilisant le symbolisme algébrique. Nous avons pu observer que la lettre est davantage utilisée comme une inconnue plutôt que comme une variable. Les élèves ont aussi utilisé différents ostensifs pour désigner des réponses inconnues à des calculs intermédiaires. L'identification de ces réponses intermédiaires, que les élèves jugeaient nécessaire, a mené à

l'utilisation de trois éléments du registre sémiotique. Une première approche a consisté à utiliser des lettres différentes pour désigner la réponse inconnue de chaque calcul. Une deuxième façon de faire a été l'utilisation d'une même lettre pour noter n'importe quelle donnée inconnue. Le troisième outil sémiotique utilisé a été de référer à l'objet en soi « en mots ou en abrégé » (Bronner & Squalli, 2021, p. 10), par exemple « nombre de carrés rouges ». Selon Bronner et Squalli (2021), la formulation d'invariants implique une description symbolique qui peut prendre différentes natures ostensives et qui, lorsqu'elle considère la description de cas potentiels, est une étape cruciale pour généraliser une situation. La confusion entourant le statut de la lettre a représenté un enjeu dont l'ampleur nous a surpris.

Nous avons aussi remarqué que la manière d'explicitier les méthodes de calcul a influencé la production de l'écriture. En effet, ceux qui ont noté leur méthode en une phrase ont pu produire une expression algébrique avec bien plus d'aisance que leurs camarades. Les autres avaient plutôt noté leur méthode en se basant sur un exemple numérique ou encore en plusieurs étapes, comme suggéré par l'orthopédagogue et enseigné à l'école, ce qui ne semble pas aider les élèves à passer à l'écriture algébrique d'une expression. Ce sont plutôt les élèves qui parviennent à relever les opérations et les relations entre les nombres qui semblent les plus favorables à exprimer leur méthode algébriquement. Le passage à une écriture algébrique pourrait alors être favorisé par l'utilisation d'un langage naturel qui met en évidence les relations entre les différents objets en jeu (comparativement à un langage séquentiel qui met en évidence les étapes de calculs).

Finalement, en ce qui concerne la notion d'**équivalence**, les difficultés majeures se situent au niveau de l'opérateur algébrique. Les aspects sémantiques qui ont aidé l'élaboration de la formule semblent faire obstacle aux transformations algébriques, surtout par la disposition des signes dans les expressions algébriques produites (par exemple, le fait de ne pas avoir le coefficient devant la variable a posé des difficultés dans l'utilisation de la distributivité). La rupture du caractère désignatif des expressions est au centre de ces difficultés.

Certaines problématiques sont liées au statut des termes et à l'usage de symboles pour indiquer les opérations : par exemple, le symbole de multiplication dans $x \cdot 2$ laissait croire aux élèves qu'il s'agissait d'un binôme, ce qui a eu des répercussions au moment de faire des opérations. Cette

difficulté à manipuler les expressions s'est aussi manifestée lorsque les élèves ont tenté de trouver la valeur de x , en créant une équation à partir de l'expression alors que ce n'était pas pertinent. On rencontre ici le statut d'inconnue pour les lettres.

Pour certains élèves, la mise en évidence de la conservation de la dénotation, malgré des transformations d'écriture, leur a permis de revoir le rapport sémantique/syntaxique surtout associé au sens représentatif des symboles. Cette difficulté à reconnaître la conservation de la dénotation en changeant le sens de l'expression a été observée de deux manières. Un premier groupe d'élèves a fait preuve d'une certaine rigidité en restant accroché à leur expression trouvée originalement. Ceux-ci préféraient conserver leur expression initiale et refusaient de la modifier même si elle ne permettait pas d'établir l'équivalence de peur de se mélanger ou, en d'autres mots, de perdre son sens. Ces derniers ont alors opté pour une stratégie sans manipulations algébriques qui consiste à remplacer la variable par une donnée connue pour vérifier si la réponse était effectivement la bonne et ainsi établir l'équivalence. Un deuxième groupe d'élèves a accepté de changer l'écriture de leur expression trouvée, mais n'a pas été en mesure de conserver sa dénotation à travers les transformations syntaxiques.

Il importe toutefois de reconnaître que cette étude n'est pas exhaustive en ce sens qu'elle ne porte que sur un nombre restreint d'élèves et qu'elle ne relève pas toutes les difficultés et tous les choix didactiques pertinents concernant le passage de la pensée arithmétique à la pensée algébrique. De plus, la sensibilité des élèves au contrat didactique pourrait avoir eu des effets sur leur engagement dans les situations qui leur ont été présentées et le fait que leur orthopédaogogue ait animé la première séance pourrait avoir créé une confusion à propos de ce qui était attendu d'eux. Il leur a donc été rappelé que ces séances ne servaient pas à leur évaluation, mais qu'elles nous permettaient de mieux comprendre comment les orthopédaogogues devraient enseigner l'algèbre pour aider les élèves à apprendre. Évidemment, les trois situations proposées ne suffisent pas pour enseigner l'équivalence d'expressions algébriques, mais nous convenons qu'elles peuvent s'ajouter aux moyens des orthopédaogogues pour intervenir auprès des élèves en difficulté au secondaire et qu'elles sont très pertinentes pour que les élèves articulent les dimensions sémantique et syntaxique dans leur apprentissage.

En conclusion, les activités réalisées nous ont effectivement permis d'explorer la nature des interactions et les difficultés rencontrées par les élèves lors du travail sur la notion d'équivalence d'expressions algébriques et de mieux comprendre les choix didactiques qui favorisent le passage au raisonnement algébrique.

BIBLIOGRAPHIE

- Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25, 42-47. JSTOR.
- Arcavi, A., Friedlander, A., & Hershkowitz, R. (1990). L'algèbre avant la lettre. *Petit x*, 24, 61-71.
- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : Quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui ? *Les dossiers des sciences de l'éducation*, 8(1), 59-72.
<https://doi.org/10.3406/dsedu.2002.1010>
- Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (2000). A Model for Analysing Algebraic Processes of Thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, R. C. Lins, & A. Bell (Éds.), *Perspectives on School Algebra* (Kluwer Academic Publishers, p. 61-81).
- Balacheff, N. (2001). Symbolic Arithmetic vs Algebra : The Core of a Didactical Dilemma. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. C. Lins, *Teaching and learning algebra* (p. 249-260). https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_14
- Barallobres, G. (2005). *Enseignement introductif de l'algèbre et validation* [Université de Montréal]. <http://hdl.handle.net/1866/16466>
- Barallobres, G. (2007). Introduction à l'algèbre par la généralisation : Problèmes didactiques soulevés. *For the Learning of Mathematics*, 27(1), 39-44.
- Barallobres, G. (2020). *L'école secondaire : Changement d'institution, changement de rapport aux connaissances mathématiques* [Manuscrit non publié].
- Barrier, T. (2008). Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques. *Éducation et didactique*, 2(3), 35-58.
<https://doi.org/10.4000/educationdidactique.350>
- Bednarz, N. (2005). Parler les mathématiques. *Vie pédagogique*, 136.
- Bednarz, N. (2015). La recherche collaborative. *Carrefours de l'éducation*, 39(1), 171-184.
<https://doi.org/10.3917/cdle.039.0171>
- Bednarz, N., & Charbonneau, L. (1992). Synthèse des discussions. *Actes du Colloque portant sur l'émergence de l'algèbre*, 111-118.

- Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (Éds.). (1996). *Approaches to algebra : Perspectives for research and teaching*. Kluwer Academic Publishers.
<http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb37547125b>
- Bergeron, L. (2017). *Étude théorique sur la référence au processus d'abstraction en mathématiques dans la noosphère du champ de l'éducation au Québec* [Université du Québec à Montréal]. <http://archipel.uqam.ca/11131/>
- Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J.-S. (2015). The Development of Children's Algebraic Thinking : The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education JRME*, 46(1), 39-87. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.1.0039>
- Booth, L. R. (1984). *Algebra : Children's strategies and errors : A report of the strategies and errors in Secondary Mathematics Project*. NFER-Nelson.
<http://www.gbv.de/dms/hbz/toc/ht002736447.pdf>
- Boudreau, C. (2012). L'enseignant en adaptation scolaire et l'orthopédagogue : Ce qui distingue l'un de l'autre. *Revue québécoise de développement pédagogique*, 160, 14-17.
- Bourdier-Savioz, F. (2008). *L'erreur n'est pas une faute : Pour une nouvelle approche des devoirs d'élèves*. L'Harmattan.
- Bronner, A., & Squalli, H. (2021). *La généralisation dans la pensée algébrique*. 3, 3-38.
- Brousseau, G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches*. <http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00483165/en/>
- Brousseau, G. (1991). L'enjeu dans une situation didactique : Conférence du 12 mars 1991 au stage de Cahors. In *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques* (IREM de Paris, Vol. 1, p. 147-163). <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PS/IPS91001/IPS91001.pdf>
- Brousseau, G. (1998a). Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield (Éds.), *Théories des situations didactiques : Didactiques des mathématiques, 1970-1990* (p. 115-160). Pensée sauvage éd. <http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb37620420h>
- Brousseau, G. (1998b). *Théories des situations didactiques : Didactiques des mathématiques, 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Éds.). Pensée sauvage éd. <http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb37620420h>
- Brousseau, G. (2009). *Le cas de Gaël revisité (1999-2009)* (p. 37). IUFM Aquitaine - Institut universitaire de formation des maîtres - Aquitaine. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00582620>

- Brousseau, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998)*. http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf
- Brousseau, G. (1997). *La théorie des situations didactiques* [Cours donné lors de l'attribution du titre de docteur honoris causa de l'Université de Montréal]. <https://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/>
- Cherel, C. (2005). *Deux élèves en difficulté s'intègrent à une classe ordinaire le temps... Des mathématiques*. Éditions Bande didactique.
- Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie : L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : Perspectives curriculaires : La notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.
- Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie : Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38.
- Chevallard, Y. (1994). Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. *Actes du Séminaire de l'Associazione Mathesis 1993-1994*, 190-200.
- Collis, K. F. (1972). *Modeling in the initiation into algebra* [Thèse doctorale non publiée].
- Collis, K. F. (1974). *Cognitive Development and Mathematics Learning*. Psychology of Mathematics Education Workshop, Chelsea College, University of London, U.K.
- Commission scolaire de la Seigneurie-des-Mille-Îles. (2018). *Classes spécialisées : Descriptions et profils*. <http://www.cssmi.qc.ca/sites/default/files/pages/2018-02/Classes%20specialisees.pdf>
- Commission scolaire Marguerite-Bourgeoys. (2010). *Guide pratique à l'intention des parents d'élèves handicapés ou avec difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA)*. <https://www.csmb.qc.ca/fr-CA/parents-eleves/~media/Files/PDF/CSMB/publications/guide-parents-ehdaa.ashx>
- Conne, F. (1992). *Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique*. *12(2)*, 221-270.
- Conne, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne. In *Le cognitif en didactique des mathématiques* (p. 31-69). Presses de l'Université de Montréal.

- Conne, F. (2003). Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. *Éducation et francophonie*, 31(2), 82-102. <https://doi.org/10.7202/1079589ar>
- Constantin, C., & Coulange, L. (2017). La multiplication et la propriété de distributivité au primaire : Une entrée dans la pensée algébrique? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 9-32. <https://doi.org/10.7202/1055726ar>
- Coppé, S. (2020). Conception collaborative de ressources pour l'enseignement de l'algèbre élémentaire : Une entrée par les programmes de calculs. In H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner, & M. Larguier, *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. (p. 22-44). Centre de recherche et d'intervention sur la réussite scolaire. <https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches>
- Davis, R. B. (1975). *Cognitive processes involved in solving simple algebraic equations*. 1(3), 7-35.
- Davydov, V. V. (2008). *Problems of Developmental Instruction : A Theoretical and Experimental Psychological Study*. Nova Science Publishers. <https://books.google.ca/books?id=r3YOAQAAMAAJ>
- Deblois, L. (2006). Influence des interprétations des productions des élèves sur les stratégies d'intervention en classe de mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, 62(3), 307-329.
- Demonty, I. (2013). Mieux comprendre les difficultés des élèves en algèbre élémentaire : Regards sur le dispositif d'évaluation externe non certificative en Fédération Wallonie-Bruxelles. *Education et Formation*, 298(01), 51-61.
- Denis, C. (1997). *Une introduction de l'algèbre en secondaire 3 : Généralisation et construction de formule* [Mémoire de maîtrise en enseignement des mathématiques]. Université du Québec à Montréal.
- Direction de l'adaptation scolaire et des services complémentaires. (2002). *Les services éducatifs complémentaires : Essentiels à la réussite*.
- Dupuis, S. (2020). La Commission royale d'enquête sur l'enseignement dans la province de Québec (Commission Parent). In *Encyclopédie Canadienne* (Historica Canada). <https://www.thecanadianencyclopedia.ca/fr/article/la-commission-royale-d-enquete-sur-l-enseignement-dans-la-province-de-quebec-commission-parent>
- Everaert-Desmedt, N. (1990). *Le processus interprétatif : Introduction à la sémiotique de Ch. S. Peirce*. Mardaga. <http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb401217874>
- Favre, J.-M. (2004). Étude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement de la multiplication dans une classe d'enseignement spécialisé. In V. Durand-Guerrier & C.

- Tisseron (Éds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2003* (p. 109-126). ARDM et IREM de Paris 7.
- Fillo, E., & Rojano, T. (1989). Solving Equations : The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.
- Frege, G. (1971). *Écrits logiques et philosophiques : Traduction et introduction de Claude Imbert*. Éditions du Seuil.
- Germi, P.-E. (1997). *Statut des lettres et notion de variable*. 45, 59-79.
- Gibel, P., & Blanquart-Henry, S. (2017). Favoriser l'appropriation des propriétés géométriques des quadrilatères à l'école primaire : Étude d'une situation d'apprentissage dans le méso-espace. *Revue des sciences de l'éducation*, 43(1), 37-84.
<https://doi.org/10.7202/1042074ar>
- Giroux, J. (2008). Conduites atypiques d'élèves du primaire en difficulté d'apprentissage. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 28(1), 9-62.
- Giroux, J. (2013). Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : Problématique et repères didactiques. *Éducation et didactique*, 7(1), 59-86. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.1573>
- Giroux, J. (2014). Les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : Historique et perspectives théoriques. In C. Mary, H. Squalli, L. Theis, & L. DeBlois (Éds.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : Regard didactique*.
<http://public.ebookcentral.proquest.com/choice/publicfullrecord.aspx?p=3296656>
- Giroux, J. (2017). *Évaluation orthopédagogique en mathématiques selon une approche didactique—Une recherche-action* (Collections de BAnQ; Rapport de recherche 2017-PO-202700; p. 65). Université du Québec à Montréal.
<https://numerique.banq.qc.ca/patrimoine/details/52327/4188885>
- Granger, N., Fontaine, M., & Moreau, A. C. (2021). *Rôle et fonctions des orthopédagogues en contexte scolaire primaire et secondaire* (p. 20). Université de Sherbrooke.
<https://www.usherbrooke.ca/gef/conseillance/role-et-fonctions-des-orthopedagogues/>
- Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 17(2), 167-210.
- Grugeon-Allys, B., & Pilet, J. (2017). Quelles connaissances et quels raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 106-130. <https://doi.org/10.7202/1055730ar>
- Janvier, C. (1996). Modeling in the initiation into algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Éds.), *Approaches to algebra : Perspectives for research and teaching* (p. 225-236). Kluwer Academic Publishers. <http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb37547125b>

- Jeannotte, D., & Corriveau, C. (2020). Étude de raisonnements mathématiques associés à la pensée algébrique chez les élèves avant l'introduction de l'algèbre. In *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire Recherches et perspectives curriculaires* (p. 111-132). CRIRES.
https://lel.crires.ulaval.ca/sites/lel/files/le_developpement_de_la_pensee_algebrique_a_le_cole_primaire_et_au_debut_du_secondaire.pdf
- Kieran, C. (1992). The learning of school algebra. In D. A. Grouws, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning : A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 390-419). Macmillan Publishing Company.
- Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early Algebra : Research into Its Nature, Its Learning, Its Teaching*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2>
- Kouki, R. (2017). *Recherches sur l'articulation des dimensions sémantique, syntaxique, sémiotique, praxéologique et épistémologique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Étude de cas : Algèbre du secondaire et développements limités au début de l'université*. [Rapport de recherche]. Université de Tunis El Manar.
- Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. H. (2003). Mathematics Interventions for Children with Special Educational Needs : A Meta-Analysis. *Remedial and Special Education, 24*(2), 97-114. <https://doi.org/10.1177/07419325030240020501>
- Laplante, L. (1998, mars). *Diagnostic de la dyslexie de développement : Y a-t-il une place pour l'orthopédagogie?* [Communication]. Congrès de l'Association québécoise pour les troubles d'apprentissage (AQETA), Montréal.
- Laplante, L., Chapleau, N., & Bébard, M. (2011). L'identification de la dyslexie développementale : Vers un modèle intégrant l'évaluation et l'intervention. In A. M. Desrochers & M.-J. Berger, *L'évaluation de la littératie*. Presses de l'Université d'Ottawa.
- L'Association des Orthopédagogues du Québec (L'ADOQ). (2018). *Le référentiel des compétences professionnelles liées à l'exercice de l'orthopédagogue au Québec* (Collections de BAnQ). <https://numerique.banq.qc.ca/patrimoine/details/52327/4297455>
- Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Éds.), *Approaches to algebra : Perspectives for research and teaching* (p. 87-106). Kluwer Academic Publishers.
<http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb37547125b>
- Legendre, R. (2005). *Dictionnaire actuel de l'éducation* (3e éd.). Guérin.
- Lemoyne, G., Conne, F., & Brun, J. (1993). Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales : Une perspective d'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherches En Didactique Des Mathématiques, 13*(3), 333-384.

- Lins, R. C. (2000). The Production of Meaning for Algebra : A Perspective Based on a Theoretical Model of Semantic Fields. In R. Sutherland, T. Rojano, R. C. Lins, & A. Bell (Éds.), *Perspectives on School Algebra* (Kluwer Academic Publishers, p. 37-60).
- Marchand, P., & Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : Une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ*, 39(4), 30-42.
- Mary, C. (2003). Interventions orthopédagogiques sous l'angle du contrat didactique. *Éducation et francophonie*, 31(2), 103-124. <https://doi.org/10.7202/1079590ar>
- Mary, C., Squalli, H., & Schmidt, S. (2014). Activité de généralisation et de justification chez des élèves en difficulté. In C. Mary, H. Squalli, L. Theis, & L. DeBlois, *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques* (p. 163-186). Presses de l'Université du Québec.
https://books.google.com/books/about/Recherches_sur_les_difficult%C3%A9s_d_enseig.html?hl=fr&id=7VonDwAAQBAJ
- Mary, C., Squalli, H., Theis, L., & DeBlois, L. (2014). *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques*. Presses de l'Université du Québec.
https://books.google.com/books/about/Recherches_sur_les_difficult%C3%A9s_d_enseig.html?hl=fr&id=7VonDwAAQBAJ
- Ministère de l'Éducation. (1999). *Une école adaptée à tous ses élèves : Plan d'action en matière d'adaptation scolaire*.
- Ministère de l'Éducation (Éd.). (2000). *Une école adaptée à tous ses élèves—Politique de l'adaptation scolaire [Ministère de l'éducation]* (Collections de BANQ).
<https://numerique.banq.qc.ca/patrimoine/details/52327/64138?docpos=2>
- Ministère de l'Éducation. (2003). *Les difficultés d'apprentissage à l'école : Cadre de référence pour guider l'intervention* (Collections de BANQ).
http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/adaptation-scolaire-services-comp/19-7051.pdf
- Ministère de l'Éducation. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise : Enseignement secondaire, premier cycle*. <http://collections.banq.qc.ca/ark:/52327/56123>
- Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. (2006). *L'organisation des services éducatifs aux élèves à risque et aux élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA)*. Ministère de l'éducation, du loisir et du sport.
- Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. (2013). *Plan d'action pour soutenir la réussite des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA) : Des conditions pour mieux réussir!*
http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/dpse/adaptation_serv_copl/PlanActionEHDAA.pdf

- Morel, S. (2014). *La médicalisation de l'échec scolaire*.
- Office des professions du Québec (Éd.). (2014). *La situation des orthopédagogues au Québec— Rapport / Groupe de travail sur le rôle des orthopédagogues dans l'évaluation des troubles d'apprentissage* (Collections de BAnQ).
<https://numerique.banq.qc.ca/patrimoine/details/52327/2395966?docpos=2>
- Oliveira, I., Rhéaume, S., & Geerts, F. (2017). Apprentissage de l'algèbre : Procédures et difficultés rencontrées lors de la résolution de problèmes. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 156-180. <https://doi.org/10.7202/1055732ar>
- Peirce, C. S. (1978). *Écrits sur le signe*. Éditions du Seuil.
<http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb34614603t>
- Perrin-Glorian, M.-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes « faibles ». *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 13(1.2), 5-118.
- Radford, L. (2003a). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs : A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02
- Radford, L. (2003b). Narratives, expressions algébriques et calcul formel : De la constitution à la transformation du sens. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 8, 191-208.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns : A semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Éds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 2-21).
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction : A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, 40(1), 83-96.
<https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0>
- Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277.
- René de Cotret, S., & Giroux, J. (2003). Le temps didactique dans trois classes de secondaire I (doubleurs, ordinaires, forts). *Éducation et francophonie*, 31(2), 155-175. Érudit.
<https://doi.org/10.7202/1079592ar>
- Roiné, C. (2009). *Cécité didactique et discours noosphériens dans les pratiques d'enseignement en SEGPA : une contribution à la question des inégalités* [Université Bordeaux-II].
<http://www.theses.fr/2009BOR21629/document>
- Roiné, C. (2010). Caractérisation des difficultés en mathématiques des élèves de Segpa. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, 52(4), 73-87.
<https://doi.org/10.3917/nras.052.0073>

- Roiné, C. (2015). La fabrication de l'élève en difficulté : Postulats et méthodes pour l'analyse d'une catégorisation dans le champ scolaire. *Éducation et socialisation. Les Cahiers du CERFEE*, 37, Article 37. <https://doi.org/10.4000/edso.1138>
- Roiné, C. (2018). Expérience, enseignement et apprentissage. *Éducation et didactique*, 12-1, Article 12-1. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.3070>
- Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Éds.), *Approaches to algebra : Perspectives for research and teaching* (p. 137-145). Kluwer Academic Publishers. <http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb37547125b>
- Sarrazy, B. (1996). *La sensibilité au contrat didactique : Rôle des arrière-plans dans la résolution de problèmes d'arithmétique au cycle trois*. Université Bordeaux-II.
- Sarrazy, B. (2002). Pratiques d'éducation familiale et sensibilité au contrat didactique dans l'enseignement des mathématiques chez des élèves de 9-10 ans. *Pratiques d'éducation familiale et sensibilité au contrat didactique dans l'enseignement des mathématiques chez des élèves de 9-10 ans*, 6(1), 103-130.
- Savoie-Zajc, L. (2018). La recherche qualitative/interprétative. In T. Karsenti & L. Savoie-Zajc, *La recherche en éducation* (4e édition, p. 191-217). Les Presses de l'Université de Montréal; JSTOR. <https://doi.org/10.2307/j.ctv69sv3w>
- Schliemann, A. D. (2002). Representational Tools and Mathematical Understanding. *The Journal of the Learning Sciences*, 11(2-3), 301-317.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics : An International Journal*, 22(1), 1-36. <https://doi.org/10.1007/BF00302715>
- Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*, 346-356. <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/ACF/ACF15122/ACF15122.pdf>
- Squalli, H. (2021). La généralisation algébrique : Un processus mathématique peu développé chez les élèves à la fin de l'école secondaire. *ITM Web of Conferences*, 39. <https://doi.org/10.1051/itmconf/20213901002>
- Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A., & Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 36-62. <https://doi.org/10.7202/1070024ar>
- Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A., & Larguier, M. (2020). *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. Centre de recherche et d'intervention sur la réussite scolaire.

[https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-
primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches](https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches)

- Tardif, M., & Lessard, C. (1992). L'Orthopédagogie en milieu scolaire : Émergence, évolution et Professionnalisation d'une nouvelle catégorie d'intervenants (1960-1990). *Historical Studies in Education / Revue d'histoire de l'éducation*, 233-267. <https://doi.org/10.32316/hsc/rhe.v4i2.970>
- Tremblay, S., Polotskaia, E., & Passaro, V. (2021). *Réflexion autour du rôle du symbolisme littéral dans le développement de la pensée algébrique au primaire*. 2, 78-109.
- Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. *Actes du Colloque franco-allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, 189-199.
- Vlassis, J., Demonty, I., & Squalli, H. (2017). Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 131-155. <https://doi.org/10.7202/1055731ar>
- Vlassis, Joëlle., & Demonty, Isabelle. (2002). *L'algèbre par des situations-problèmes au début du secondaire*. De Boeck.