

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

PROBLÈME D'OPTIMISATION DE DE FINETTI POUR DES STRATÉGIES  
ABSOLUMENT CONTINUES DONT LE TAUX EST BORNÉ  
LINÉAIREMENT

MÉMOIRE  
PRÉSENTÉ  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR  
NAKITA RAO

JANVIER 2023

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.04-2020). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

Les mots ne peuvent exprimer ma gratitude envers mes directeurs de recherche Clarence Simard et Jean-François Renaud pour leur patience, leur disponibilité et surtout leurs judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Leurs enseignements me suivront dans mes projets et ma carrière.

Je remercie également toute l'équipe pédagogique de l'UQAM et les intervenants professionnels responsables de ma formation, pour avoir assuré la partie théorique de celle-ci.

Je suis également reconnaissante à ma partenaire d'étude de longue date, Rosemary Marabella, pour son aide initiale dans le processus de candidature qui a lancé cette aventure, tout le temps passé à étudier et réviser ensemble, et son soutien moral.

Enfin, je m'en voudrais de ne pas mentionner ma famille et mes amis :

*Deepest thanks to my mother Satyavathi Rao who has always supported me in all of my academic endeavours. Even when the subject matter was outside of her expertise, she would listen to me explain my thoughts with patience and understanding. Her questions always pushed me to explain the subject in finer detail. Finally, my partner Benjamin Mao who has kept my spirits and motivation high during this process by reminding me to take care of myself with breaks and time spent with those closest to me.*

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES . . . . .	iv
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	v
RÉSUMÉ . . . . .	vi
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I MODÈLE ET PROBLÈME D'OPTIMISATION . . . . .	4
1.1 Lemme de vérification . . . . .	6
1.2 L'équation Hamilton-Jacobi-Bellman . . . . .	8
CHAPITRE II PROBLÈME PRINCIPAL : TAUX BORNÉ PAR UNE FONCTION AFFINE . . . . .	10
2.1 Quelques propriétés d'un processus Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	11
2.2 Fonction de performance d'une stratégie affine . . . . .	13
2.3 Valeur de la barrière optimale . . . . .	26
2.4 Solution optimale . . . . .	32
2.5 Preuve de l'optimalité de la stratégie $u_{b^*}$ . . . . .	33
2.6 Consolidation des solutions . . . . .	35
CHAPITRE III ANALYSES NUMÉRIQUES . . . . .	42
3.1 Optimalité de la barrière . . . . .	42
3.2 Effet des paramètres $S$ et $K$ sur la valeur $b^*$ . . . . .	46
3.3 Impact sur la barrière optimale . . . . .	48
3.4 Comparaison des solutions . . . . .	52
CONCLUSION . . . . .	57
APPENDICE A . . . . .	59
RÉFÉRENCES . . . . .	65

## LISTE DES FIGURES

Figure		Page
2.1	Illustration de la dynamique du processus approximatif $X^{(n)}$ . . .	21
3.1	Comparaison des trajectoires et dividendes cumulatifs du processus $X^b$ en utilisant des stratégies affines et affines différées optimales et sous-optimales . . . . .	44
3.2	Fonction de performance $J(x, u_b)$ en fonction de $b$ sous condition de positivité . . . . .	45
3.3	Valeur de la barrière optimale $b^*$ en fonction de $K$ et $S$ . . . . .	46
3.4	Fonction de performance $J(x, u_{b^*})$ en fonction des paramètres $K$ et $S$	47
3.5	Comparaison des trajectoires du processus $X^{b^*}$ sous stratégie affine différée optimale selon leur niveau de moyenne asymptotique . . .	49
3.6	Comparaison des dividendes cumulatifs actualisés du processus $X^{b^*}$ sous stratégie affine différée optimale selon leur niveau de moyenne asymptotique . . . . .	50
3.7	Comparaison des trajectoires et dividendes cumulatifs actualisés du processus $X^{b^*}$ sous stratégies affine et affine différée optimales . .	51
3.8	Valeur de la barrière optimale $b^*$ en fonction de $\sigma, \mu, q$ . . . . .	53
3.9	Comparaison des dividendes cumulatifs actualisés du processus $X^{b^*}$ selon des stratégies bornées par les 3 cas de fonctions linéaires continues avec grande valeur d'ordonnée à l'origine . . . . .	55
3.10	Comparaison des dividendes cumulatifs actualisés du processus $X^{b^*}$ selon des stratégies bornées par les 3 cas de fonctions linéaires continues avec petite valeur d'ordonnée à l'origine . . . . .	56

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
A.1 Variations sur les valeurs des paramètres $\sigma, q, \mu, S, K, m$ forçant $b^* = 0$ . . . . .	59

## RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous résolvons un problème d'optimisation des paiements de dividende, similaire à celui étudié initialement par (De Finetti, 1957), et généralisant ceux étudiés ensuite par (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995) et (Renaud et Simard, 2021). En maximisant la valeur actuelle des dividendes distribués, nous constatons que la solution optimale est une stratégie « bang-bang ». Nous donnons des formes explicites pour la barrière optimale et la fonction valeur optimale. Enfin, nous démontrons que notre problème englobe les problèmes étudiés par (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995) et (Renaud et Simard, 2021).

mots-clés : contrôle stochastique ; théorie de la ruine ; optimisation de dividendes ; mouvement brownien ; processus Ornstein-Uhlenbeck.

## INTRODUCTION

À l'origine un problème d'intérêt dans le domaine des mathématiques actuarielles, la question de savoir évaluer le risque s'est avérée d'un grand intérêt dans plusieurs champs d'études. En effet, nous pouvons examiner ce même problème du point de vue de la finance corporative, où le niveau de capital d'une entreprise est utilisé comme indicateur pour prendre des décisions tout en minimisant sa probabilité de ruine. En 1944, (Von Neumann et Morgenstern, 2007) ont d'abord développé un premier modèle maximisant l'utilité du capital d'une entreprise. Toutefois, Bruno de Finetti avait remarqué que ce critère ne prenait pas en compte la rentabilité à long terme des entreprises. Ainsi, (De Finetti, 1957) a proposé un modèle stochastique et a ajouté des paiements aux actionnaires prélevés à même le surplus, appelés dividendes, comme moyen d'exploiter le montant excédentaire. Il reste que si l'on déduit du surplus un montant trop élevé, la ruine peut survenir plus rapidement, tandis que, si l'on choisit un montant trop conservateur, nous risquons de décevoir les actionnaires. Nous sommes alors intéressés par la stratégie qui maximisera l'espérance des dividendes payés jusqu'à la ruine, ce qu'on appellera une stratégie optimale.

Le problème présenté ci-dessus relève des problèmes de contrôle optimal, car nous pouvons définir des politiques d'admissibilité pour ensuite étudier le problème en maximisant une fonction de performance. De plus, notons que le problème peut être simplifié en le décomposant en sous-problèmes plus simples de manière récursive, car les décisions de distribuer des dividendes s'étendent sur plusieurs points de temps. Enfin, l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) donne à notre pro-

blème une condition suffisante d'optimalité, par rapport à laquelle notre solution peut ensuite être vérifiée.

Restreinte que par des conditions mathématiques et un certain minimum d'applicabilité, on s'aperçoit que certaines stratégies sont étudiées plus que d'autres. En premier lieu, nous avons la stratégie à bandes, où le surplus de la firme est divisé en régions délimitées par des niveaux tel que l'on ne paie alternativement aucun dividende ou assez pour pousser le surplus sous le niveau auquel il se trouve (Avanzi, 2009). Si l'on paie qu'une partie du surplus sans nécessairement le pousser sous le niveau, nous appelons cette stratégie une stratégie à seuils multiples. Pour ces deux types de stratégies, nous avons un cas particulier où le surplus n'est divisé qu'en deux régions et ne contient qu'un seul niveau de séparation. Alors le cas particulier de la stratégie à bandes est appelé barrière et celle à seuils multiples est appelée à seuil. En fait, (De Finetti, 1957) a initialement proposé la stratégie barrière et a démontré que celle-ci est optimale pour son problème. Suivant cette étude, (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995) se sont intéressés à une adaptation de ce problème et considèrent des stratégies admissibles absolument continues avec un taux borné par une constante  $S$ . Ils ont trouvé que la stratégie optimale du problème est de type « bang-bang », où, au lieu de payer une portion quelconque du surplus suivant une stratégie à seuil, on paie un montant maximal. En particulier, ils trouvent la barrière optimale en utilisant des techniques de solutions d'équation différentielle pour résoudre leur problème. Développant sur l'idée de borner le taux, (Renaud et Simard, 2021) considèrent aussi des stratégies absolument continues, mais dont le taux est borné par une proportion du niveau actuel du surplus. Trouvant que la stratégie optimale du problème est aussi une stratégie « bang-bang », (Renaud et Simard, 2021) ont obtenu, par méthodes de solution d'équations stochastiques, que le processus optimal se comporte comme un processus Ornstein-Uhlenbeck au-dessus de la barrière optimale.

En s'inspirant de ces deux problèmes, ce mémoire vise à généraliser le problème de (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995) et (Renaud et Simard, 2021) en considérant une borne affine pour le taux de paiement. Pour ce faire, au Chapitre 1, nous définissons d'abord le problème et donnons quelques notions préalables. Au Chapitre 2, la barrière et la fonction valeur explicites sont données, et nous démontrons que la stratégie optimale est non seulement aussi une stratégie « bang-bang », mais qu'elle inclut les stratégies optimales données par (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995) et (Renaud et Simard, 2021). Au Chapitre 3, nous donnons nos résultats et analyses numériques. Finalement, nous concluons avec une discussion sur les contraintes du modèle et pistes de recherches futures possibles.

## CHAPITRE I

### MODÈLE ET PROBLÈME D'OPTIMISATION

Dans ce chapitre, nous allons présenter le modèle et énoncer le problème d'optimisation sous sa forme la plus générale. Nous définissons d'abord la famille de stratégies admissibles et terminons en présentant le Lemme de vérification qui sera au cœur de la justification de notre solution.

En particulier, nous pouvons formuler le problème de la manière suivante. Sur un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ , soit  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  un processus stochastique modélisant le capital d'une firme sur l'intervalle de temps  $[0, \infty)$ . On choisit un mouvement brownien avec dérive  $\mu \in \mathbb{R}$  et volatilité  $\sigma > 0$ , c'est-à-dire  $dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$ , où  $X_0 = x \geq 0$  et  $B = \{B_t, t \geq 0\}$  est un mouvement brownien standard. Supposons de plus que le montant cumulé des dividendes est donné par le processus  $L^h = \{L_t^h, t \geq 0\}$ , où  $L_0^h = 0$  et  $h$  est la stratégie dictant comment payer ces dividendes. On définit le surplus après versement des dividendes, le processus contrôlé, par  $X^h = \{X_t^h, t \geq 0\}$  où  $X_t^h = X_t - L_t^h$ . En d'autres mots, l'évolution du capital de la firme suivant la stratégie  $h$  est décrite par

$$dX_t^h = dX_t - dL_t^h.$$

Comme mentionné dans l'introduction, nous sommes intéressés par une modification du problème de dividende classique de Bruno de Finetti, où le maximum

qu'une entreprise est prête à payer à ses actionnaires est pris en considération. Le problème proposé considère alors des stratégies absolument continues avec un taux borné par une fonction affine de l'état du système. Plus précisément, une stratégie sera dite admissible si elle est caractérisée par une fonction  $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ , telle que  $0 \leq u(x) \leq f(x)$ , où  $u(x) \in \mathcal{C}^1$  et  $f(x)$  est une fonction mesurable donnée, et pour laquelle le processus contrôlé est donné par :

$$dX_t^u = (\mu - u(X_t^u)) dt + \sigma dB_t.$$

En d'autres mots,  $L_t^u = \int_0^t u(X_s^u) ds$ . On note la famille des stratégies admissibles bornées par  $f$  par  $\Pi^f$ .

Rappelons que le but du problème est de trouver la stratégie telle que l'espérance des paiements de dividendes jusqu'à la ruine est maximisée. On définit le temps de ruine pour une stratégie  $u$  par  $\sigma^u = \inf\{t > 0 : X_t^u < 0\}$ . Pour un taux d'escompte  $q \geq 0$  donné et une valeur initiale  $X_0^u = X_0 = x$ , nous voulons maximiser l'espérance de la valeur du cumul de dividendes actualisée. En actualisant les dividendes distribués, nous nous assurons de capter les différentes situations et risques dans le taux d'escompte. Nous appelons la fonction à maximiser la fonction de performance  $J(x, u)$ , qui est associée à une stratégie  $u \in \Pi^f$ , et la définissons par

$$J(x, u) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\sigma^u} e^{-qt} u(X_t^u) dt \right], \quad x \geq 0. \quad (1.1)$$

Parmi toutes les stratégies  $u \in \Pi^f$  et leurs fonctions de performance respectives, on définit la fonction de performance maximale, que nous appelons fonction valeur, comme  $v(x) := \sup_{u \in \Pi^f} J(x, u)$ . Nous aimerions démontrer l'existence d'une stratégie optimale  $u_* \in \Pi^f$ , c'est-à-dire une stratégie telle que  $v(x) = J(x, u_*)$ , pour tout  $x$ .

### 1.1 Lemme de vérification

Dans cette section, nous démontrons qu'une condition suffisante pour démontrer l'optimalité d'une stratégie est que sa fonction valeur satisfasse à l'équation HJB.

**Lemme 1.4.1** *Supposons qu'une stratégie  $\hat{u} \in \Pi^f$  est telle que sa fonction valeur  $\hat{v}(x) = J(x, \hat{u})$  est deux fois continûment différentiable, strictement positive et, pour tout  $x > 0$ , satisfait à l'équation HJB suivante :*

$$-q\hat{v}(x) + \mu\hat{v}'(x) + \frac{\sigma^2}{2}\hat{v}''(x) + \sup_{0 \leq \alpha \leq f(x)} \alpha(1 - \hat{v}'(x)) = 0. \quad (1.2)$$

Alors,  $\hat{u}$  est une stratégie optimale.

*Preuve.* Choisissons une stratégie  $u \in \Pi^f$ . En appliquant le Lemme d'Itô à  $e^{-qt}\hat{v}(X_t^u)$ , on obtient

$$\begin{aligned} d(e^{-qt}\hat{v}(X_t^u)) &= \left[ -qe^{-qt}\hat{v}(X_t^u) + (\mu - u(X_t^u))e^{-qt}\hat{v}'(X_t^u) + \frac{\sigma^2}{2}e^{-qt}\hat{v}''(X_t^u) \right] dt \\ &\quad + \sigma e^{-qt}\hat{v}'(X_t^u) dB_t. \end{aligned}$$

Entre autres, si  $X_0^u = x > 0$ , alors

$$\begin{aligned} e^{-q(t \wedge \sigma^u)}\hat{v}(X_{t \wedge \sigma^u}^u) &= \hat{v}(x) + \int_0^{t \wedge \sigma^u} e^{-qs}(-q\hat{v}(X_s^u) \\ &\quad + (\mu - u(X_s^u))\hat{v}'(X_s^u) + \frac{\sigma^2}{2}\hat{v}''(X_s^u)) ds \\ &\quad + \int_0^{t \wedge \sigma^u} \sigma e^{-qs}\hat{v}'(X_s^u) dB_s. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Définissons la suite de temps d'arrêt  $\{\tau_n\}$  par  $\tau_n = \inf\{t > 0 : X_t^u > n\}$ . Puisque  $\hat{v}'$  est continue, il existe  $K_n \in \mathbb{R}$  telle que  $|\hat{v}'(X_s^u)| < K_n$  pour tout  $s \in [0, \tau_n \wedge \sigma^u]$ .

On trouve que

$$\mathbb{E}_x \left[ \left( \int_0^{t \wedge \sigma^u \wedge \tau_n} \sigma e^{-qs}\hat{v}'(X_s^u) dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{t \wedge \sigma^u \wedge \tau_n} \sigma^2 e^{-2qs}\hat{v}'(X_s^u)^2 ds \right] \leq \sigma^2 K_n^2 t,$$

car  $e^{-qs} \in (0, 1)$  et  $t \wedge \sigma^u \wedge \tau_n \leq t$ . Nous avons donc que  $t \mapsto \int_0^{t \wedge \sigma^u \wedge \tau_n} \sigma e^{-qs} \hat{v}'(X_s^u) dB_s$  est une martingale dans  $\mathcal{L}^2$  pour chaque  $n$ . De plus, puisque  $\tau_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \infty$ , nous avons aussi que

$$\int_0^{t \wedge \sigma^u \wedge \tau_n} \sigma e^{-qs} \hat{v}'(X_s^u) dB_s \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \int_0^{t \wedge \sigma^u} \sigma e^{-qs} \hat{v}'(X_s^u) dB_s.$$

Puisque la convergence presque sûre nous donne la convergence en distribution, nous pouvons conclure que

$$\mathbb{E}_x \left[ \int_0^{t \wedge \sigma^u} \sigma e^{-qs} \hat{v}'(X_s^u) dB_s \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{t \wedge \sigma^u \wedge \tau_n} \sigma e^{-qs} \hat{v}'(X_s^u) dB_s \right] = 0.$$

Ajoutons et enlevons  $\int_0^{t \wedge \sigma^u} e^{-qs} u(X_s^u) ds$  à l'équation (2.15) et prenons l'espérance, afin d'obtenir

$$\begin{aligned} \hat{v}(x) &= \mathbb{E}_x \left[ e^{-q(t \wedge \sigma^u)} \hat{v}(X_{t \wedge \sigma^u}^u) \right] + \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{t \wedge \sigma^u} e^{-qs} u(X_s^u) ds \right] \\ &\quad - \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{t \wedge \sigma^u} e^{-qs} \left( -q\hat{v}(X_s^u) + (\mu - u(X_s^u))\hat{v}'(X_s^u) + \frac{\sigma^2}{2}\hat{v}''(X_s^u) + u(X_s^u) \right) ds \right]. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que la fonction  $\hat{v}$  satisfait à l'équation HJB (1.2), c'est-à-dire que

$$-q\hat{v}(x) + \mu\hat{v}'(x) + \frac{\sigma^2}{2}\hat{v}''(x) + \sup_{0 \leq \alpha \leq f(x)} \alpha(1 - \hat{v}'(x)) = 0, \quad x > 0,$$

alors on peut conclure que

$$\int_0^{t \wedge \sigma^u} e^{-qs} \left( -q\hat{v}(X_s^u) + (\mu - u(X_s^u))\hat{v}'(X_s^u) + \frac{\sigma^2}{2}\hat{v}''(X_s^u) + u(X_s^u) \right) ds \leq 0,$$

pour tout  $t$  et pour toute stratégie  $u$ . Donc

$$\hat{v}(x) \geq \mathbb{E}_x \left[ e^{-q(t \wedge \sigma^u)} \hat{v}(X_{t \wedge \sigma^u}^u) \right] + \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{t \wedge \sigma^u} e^{-qs} u(X_s^u) ds \right].$$

Par hypothèse,  $\hat{v}(x) \geq 0$  et donc

$$\hat{v}(x) \geq \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{t \wedge \sigma^u} e^{-qs} u(X_s^u) ds \right].$$

Prenons la limite lorsque  $t$  tend vers l'infini. On trouve que  $t \wedge \sigma^u$  tend vers  $\sigma^u$  sur l'événement  $\{\sigma^u < \infty\}$ . Par convergence monotone,

$$\hat{v}(x) \geq \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\sigma^u} e^{-qs} u(X_s^u) ds \right] = J(x, u).$$

Entre autres, on peut conclure que, pour tout  $u \in \Pi^f$ ,  $\hat{v}(x) \geq J(x, u)$ , pour  $x > 0$ . Donc,  $\hat{v}(x) \geq v(x)$ , pour tout  $x > 0$ , et  $\hat{u}$  est une stratégie optimale.  $\square$

## 1.2 L'équation Hamilton-Jacobi-Bellman

L'équation HJB apparaissant dans le Lemme de vérification nous donne non seulement une condition d'optimalité, mais aussi un bon point de départ pour déterminer la forme de la fonction valeur optimale et la stratégie optimale qui y est associée. Notamment, cela nous permettra de nous restreindre à une sous-famille de stratégies, sans perte de généralité. Dans ce qui suit, nous inspectons l'équation HJB de plus près pour y saisir des caractéristiques clés de la solution.

En effet, remarquons qu'on peut aussi écrire l'équation (1.2) de la façon suivante : pour  $x > 0$ ,

$$\begin{cases} \frac{\sigma^2}{2} \hat{v}''(x) + \mu \hat{v}'(x) - q \hat{v}(x) = 0, & \text{si } \hat{v}'(x) \geq 1, \\ \frac{\sigma^2}{2} \hat{v}''(x) + \mu \hat{v}'(x) - q \hat{v}(x) + f(x)(1 - \hat{v}'(x)) = 0, & \text{si } \hat{v}'(x) < 1. \end{cases} \quad (1.4)$$

Dans un premier temps, lorsque  $\hat{v}'(x) \geq 1$ , l'équation (1.4) nous dit que, si nous voulons maximiser l'espérance des dividendes, il vaut mieux ne rien payer. Sinon, l'équation est maximisée lorsque le montant maximal pouvant être payé est distribué en dividendes. En effet, écrite de cette façon-ci, nous constatons que l'équation HJB se sépare en deux instances d'optimalité, correspondant à un taux nul ou au taux maximal.

Ceci fait penser à la famille des stratégies « bang-bang ». De plus, puisque cette

même famille de stratégies s'est révélée optimale pour les problèmes desquels nous nous inspirons, nous soupçonnons que celle-ci soit un bon point de départ.

En particulier, soit la famille  $\Pi_b^f = \{u_b(x) := f(x)\mathbb{I}_{\{x>b\}} : b \geq 0\}$  décrivant l'ensemble des stratégies admissibles bornées par la fonction  $f$  et étant affectées par une barrière positive  $b$ . Nous notons que ces stratégies satisfont aux conditions d'admissibilité, car  $0 \leq u_b(x) \leq f(x)$  pour tout  $x \geq 0$ . Donc, nous pouvons déduire que  $\Pi_b^f \subseteq \Pi^f$ .

Ainsi, ayant le Lemme de vérification en main, nous pouvons procéder à la résolution de notre problème principal.

## CHAPITRE II

### PROBLÈME PRINCIPAL: TAUX BORNÉ PAR UNE FONCTION AFFINE

Dans ce chapitre, nous présentons une solution au problème présenté au Chapitre 1 lorsque  $f(x) = Kx + S$ , où  $K$  et  $S$  sont des constantes positives fixées. Remarquons que  $f(x) = f_K(x) + f_S(x)$ , où  $f_K(x) = Kx$  est la borne utilisée par (Renaud et Simard, 2021) et  $f_S(x) = S$  est la borne utilisée par (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995). Cette manière de définir  $f$  nous permet de regrouper les deux bornes utilisées et d'élargir le cadre du problème. Ainsi, l'équation HJB (1.4) devient alors

$$\begin{cases} \frac{\sigma^2}{2} \hat{v}''(x) + \mu \hat{v}'(x) - q \hat{v}(x) = 0, & \text{si } \hat{v}'(x) \geq 1 \quad (2.1) \\ \frac{\sigma^2}{2} \hat{v}''(x) + \mu \hat{v}'(x) - q \hat{v}(x) + (Kx + S)(1 - \hat{v}'(x)) = 0, & \text{si } \hat{v}'(x) < 1 \quad (2.2) \end{cases}$$

et la famille de stratégies admissibles considérée pour le modèle, que nous nommons « stratégie affine différée » avec taux  $S$  et  $K$  lorsque la barrière  $b > 0$  et « stratégie affine » avec taux  $S$  et  $K$  lorsque la barrière  $b = 0$ , est  $\Pi_b^{S,K} = \{u_b(x) := (Kx + S)\mathbb{I}_{\{x > b\}} : b \geq 0\}$ . Le processus contrôlé issu de l'application d'une telle stratégie est donc donné par

$$dX_t^b = (\mu - (KX_t^b + S)\mathbb{I}_{\{X_t^b > b\}}) dt + \sigma dB_t. \quad (2.3)$$

Fixant  $b \geq 0$ , la stratégie  $u_b \in \Pi_b^{S,K}$  nous dit que le taux de paiement de dividendes est donné par  $(KX_t^b + S)\mathbb{I}_{\{X_t^b > b\}}$ , où  $K, S \geq 0$ . En d'autres mots, sous la barrière,

le processus contrôlé se comporte comme le mouvement brownien avec dérive  $X$ , tandis que, au-dessus de la barrière, le processus se comporte comme le processus Ornstein-Uhlenbeck :

$$dX_t^b = ((\mu - S\mathbb{I}_{\{X_t^b > b\}}) - KX_t^b\mathbb{I}_{\{X_t^b > b\}}) dt + \sigma dB_t.$$

## 2.1 Quelques propriétés d'un processus Ornstein-Uhlenbeck

Avant de résoudre notre problème, nous discutons ici des caractéristiques d'un processus Ornstein-Uhlenbeck qui seront utiles. En particulier, soit un espace de probabilité filtré  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \{\tilde{\mathcal{F}}_t, t \geq 0\}, \tilde{\mathbb{P}})$  et  $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t, t \geq 0\}$  un mouvement brownien avec dérive  $\mu \in \mathbb{R}$  et volatilité  $\sigma > 0$  tel que

$$d\tilde{X}_t = \mu dt + \sigma d\tilde{B}_t,$$

où  $\tilde{B} = \{\tilde{B}_t, t \geq 0\}$  est un mouvement brownien standard. Considérons aussi le processus de diffusion Ornstein-Uhlenbeck  $\tilde{U} = \{\tilde{U}_t, t \geq 0\}$  donné par

$$d\tilde{U}_t = (\mu - M\tilde{U}_t) dt + \sigma d\tilde{B}_t,$$

où  $M \geq 0$ . On note que si  $M = 0$ , alors  $\tilde{U} = \tilde{X}$ .

**Propriété 2.1.1** *L'espérance d'un processus de diffusion Ornstein-Uhlenbeck, avec valeur initiale  $\tilde{U}_0 = x$  et valeur  $M > 0$ , est donnée par : pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$\mathbb{E}_x[\tilde{U}_t] = xe^{-Mt} + \frac{\mu}{M}(1 - e^{-Mt}). \quad (2.4)$$

*Preuve.* En appliquant le Lemme d'Itô à la fonction  $(t, x) \mapsto \frac{1}{M}e^{Mt}x$  et au processus  $(t, \tilde{U}_t)$ , on obtient

$$d\left(\frac{1}{M}e^{Mt}\tilde{U}_t\right) = \frac{\mu}{M}e^{Mt} dt + \frac{\sigma}{M}e^{Mt} d\tilde{B}_t.$$

Entre autres, si  $\tilde{U}_0 = x$ , alors

$$e^{Mt}\tilde{U}_t = x + \int_0^t \frac{\mu}{M} e^{Ms} ds + \frac{\sigma}{M} \int_0^t e^{Ms} d\tilde{B}_s.$$

En isolant  $\tilde{U}_t$  et en calculant l'intégrale déterministe, on trouve

$$\tilde{U}_t = xe^{-Mt} + \frac{\mu}{M} (1 - e^{-Mt}) + \frac{\sigma}{M} e^{-Mt} \int_0^t e^{Ms} d\tilde{B}_s.$$

Finalement, en prenant l'espérance, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x [\tilde{U}_t] &= xe^{-Mt} + \frac{\mu}{M} (1 - e^{-Mt}) + \frac{\sigma}{M} e^{-Mt} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^t e^{Ms} d\tilde{B}_s \right] \\ &= xe^{-Mt} + \frac{\mu}{M} (1 - e^{-Mt}). \quad \square \end{aligned}$$

Lorsque  $M = 0$ , définissons le temps de premier passage  $\tilde{\tau}_a^{(0)} = \inf\{t : \tilde{U}_t = a\}$ , pour  $a \in \mathbb{R}$ . Alors, pour  $q > 0$  et  $0 \leq x \leq a$ , il est connu, par (Borodin et Salminen, 2002), que

$$\mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tilde{\tau}_a^{(0)}} \mathbb{I}_{\{\tilde{\tau}_a^{(0)} < \tilde{\tau}_0^{(0)}\}} \right] = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(a)}, \quad (2.5)$$

où, pour tout  $x > 0$ ,

$$W^{(q)}(x) = \frac{2e^{-\frac{\mu x}{\sigma^2}} \sinh\left(\frac{\sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}x}{\sigma^2}\right)}{\sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}}$$

est une fonction deux fois dérivable et, pour tout  $x \leq 0$ ,  $W^{(q)}(x) = 0$ . Toujours pour  $M = 0$  et  $q > 0$ , lorsque  $x > a$ , il est connu par (Borodin et Salminen, 2002) que

$$\mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tilde{\tau}_a^{(0)}} \mathbb{I}_{\{\tilde{\tau}_a^{(0)} < \infty\}} \right] = \frac{H_0^{(q)}(x)}{H_0^{(q)}(a)}, \quad (2.6)$$

où

$$H_0^{(q)}(x) = e^{-\frac{1}{\sigma^2}(\mu + \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2})x}. \quad (2.7)$$

Dans le cas  $M > 0$ , définissons le temps de premier passage  $\tilde{\tau}_a = \inf\{t : \tilde{U}_t = a\}$ , pour  $a \in \mathbb{R}$ . On sait par (Borodin et Salminen, 2002), que  $\tilde{\tau}_a$  est fini presque sûrement et, pour  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$  et  $x < a$ , que

$$\mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tilde{\tau}_a} \mathbb{I}_{\{\tilde{\tau}_a < \infty\}} \right] = \frac{e^{\frac{Mx^2}{2}} D_{-q/M} \left( -x\sqrt{2M} \right)}{e^{\frac{Ma^2}{2}} D_{-q/M} \left( -a\sqrt{2M} \right)},$$

où, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $\lambda > 0$ ,

$$D_{-\lambda}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-xt - \frac{t^2}{2}} dt}{\Gamma(\lambda)}.$$

D'autre part, pour  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  et  $x \geq a$ ,

$$\mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tilde{\tau}_a} \mathbb{I}_{\{\tilde{\tau}_a < \infty\}} \right] = \frac{H_M^{(q)}(x)}{H_M^{(q)}(a)}, \quad (2.8)$$

où

$$H_M^{(q)}(x) = e^{\frac{M(x - \frac{\mu}{M})^2}{2\sigma^2}} D_{-q/M} \left( \left( \frac{x - \frac{\mu}{M}}{\sigma} \right) \sqrt{2M} \right)$$

est une fonction deux fois dérivable.

Par (Renaud et Simard, 2021), nous avons les identités

$$H_M^{(q)}(x) = \left( \frac{q}{M} + 1 \right) H_M^{(q+2M)}(x) + \frac{\sqrt{2M}}{\sigma} \left( x - \frac{\mu}{M} \right) H_M^{(q+M)}(x), \quad (2.9)$$

$$H_M^{(q)}(x) = -\frac{q\sqrt{2M}}{M\sigma} H_M^{(q+M)}(x). \quad (2.10)$$

Finalement, lorsque la dérive est affectée par une constante  $G \in \mathbb{R}$ , nous écrivons

$$H_{G,M}^{(q)}(x) = e^{\frac{M(x - \frac{\mu+G}{M})^2}{2\sigma^2}} D_{-q/M} \left( \left( \frac{x - \frac{\mu+G}{M}}{\sigma} \right) \sqrt{2M} \right) \quad (2.11)$$

## 2.2 Fonction de performance d'une stratégie affine

Considérons maintenant la fonction de performance d'une stratégie affine/ affine différée arbitraire. Trouvant l'expression explicite de celle-ci, nous pourrons ensuite

identifier la meilleure stratégie de ce type. Comme annoncé précédemment, nous terminerons en montrant, via le Lemme de vérification, qu'il s'agit en fait de la meilleure stratégie admissible.

**Proposition 2.2.1** *Pour  $b \geq 0$  et  $K > 0$ , la fonction de performance de la stratégie  $u_b$  avec valeur initiale  $X_0^b = x$  est donnée par*

$$J(x, u_b) = \begin{cases} \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)} J(b, u_b), & 0 \leq x \leq b, \\ \frac{K}{q+K} \left( x + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) + \left[ J(b, u_b) - \frac{K}{q+K} \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right] \frac{H_{S,K}^{(q)}(x)}{H_{S,K}^{(q)}(b)}, & x > b, \end{cases}$$

*Preuve.* Définissons le temps d'arrêt  $\tau_b = \inf\{s > 0 : X_s^b = b\}$ . Fixons une valeur initiale  $x > b$ . On remarque que  $\sigma^b \geq \tau_b$  presque sûrement par continuité de processus  $X^b$ . Nous avons donc

$$\int_0^{\sigma^b} e^{-qr} u_b(X_r^b) dr = \int_0^{\tau_b} e^{-qr} u_b(X_r^b) dr + \int_{\tau_b}^{\sigma^b} e^{-qr} u_b(X_r^b) dr \quad (2.12)$$

où

$$\begin{aligned} \int_{\tau_b}^{\sigma^b} e^{-qr} u_b(X_r^b) dr &= \int_{\tau_b}^{\sigma^b} e^{-q\tau_b} e^{-q(r-\tau_b)} u_b(X_r^b) dr \\ &= e^{-q\tau_b} \int_0^{\sigma^b - \tau_b} e^{-qr} u_b(X_{r+\tau_b}^b) dr \\ &= e^{-q\tau_b} \int_0^{\infty} e^{-qr} u_b(X_{r+\tau_b}^b) \mathbb{I}_{\{r < \sigma^b - \tau_b\}} dr. \end{aligned}$$

Rappelons que le processus  $X^b$  se comporte comme un processus Ornstein-Uhlenbeck au-dessus de la barrière. Nous savons aussi qu'un processus Ornstein-Uhlenbeck est une diffusion récurrente (Borodin et Salminen, 2002). En d'autres mots,  $\tau_b$  est fini presque sûrement. Entre autres, par le Théorème des espérances emboîtées,

$$\mathbb{E}_x \left[ \int_{\tau_b}^{\sigma^b} e^{-qr} u_b(X_r^b) dr \right] = \mathbb{E}_x \left[ \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tau_b} \int_0^{\infty} e^{-qr} u_b(X_{r+\tau_b}^b) \mathbb{I}_{\{r < \sigma^b - \tau_b\}} dr \mathbb{I}_{\{\tau_b < \infty\}} \mid \mathcal{F}_{\tau_b} \right] \right].$$

De plus, puisque  $e^{-q\tau_b}\mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}}$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_{\tau_b}$ -mesurable, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left[ \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tau_b} \int_0^\infty e^{-qr} u_b(X_{r+\tau_b}^b) \mathbb{I}_{\{r<\sigma^b-\tau_b\}} dr \mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}} \mid \mathcal{F}_{\tau_b} \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^\infty e^{-qr} u_b(X_{r+\tau_b}^b) \mathbb{I}_{\{r<\sigma^b-\tau_b\}} dr \mid \mathcal{F}_{\tau_b} \right] \right]. \end{aligned}$$

La propriété forte de Markov nous dit que, pour un temps d'arrêt  $\tau_b$ , si  $F$  est une fonction borélienne de  $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}_+$ , alors

$$\mathbb{E}_x \left[ \mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}} F((X_{r+\tau_b}^b)_{r \geq 0}) \mid \mathcal{F}_{\tau_b} \right] = \mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}} \mathbb{E}_{X_{\tau_b}^b} \left[ F((X_r^b)_{r \geq 0}) \right]. \quad (2.13)$$

Par (Øksendal, 2003), nous savons que la diffusion  $X^b$  vérifie la propriété forte de Markov avec la fonction  $F$  donnée par

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-qz} u_b(y(z)) \mathbb{I}_{\{z < \inf\{s>0: y(s)=0\}\}} dz,$$

où  $y = (y(z))_{z \geq 0} \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , c'est-à-dire  $y$  est une fonction continue de  $[0, \infty)$  dans  $\mathbb{R}$ .

Alors, par la propriété forte de Markov,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^\infty e^{-qr} u_b(X_{r+\tau_b}^b) \mathbb{I}_{\{r<\sigma^b-\tau_b\}} dr \mid \mathcal{F}_{\tau_b} \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}} \mathbb{E}_{X_{\tau_b}^b} \left[ \int_0^\infty e^{-qr} u_b(X_r^b) \mathbb{I}_{\{r<\sigma^b\}} dr \right] \right]. \end{aligned}$$

Puisque  $X_{\tau_b}^b = b$  presque sûrement par continuité du processus  $X^b$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}} \mathbb{E}_{X_{\tau_b}^b} \left[ \int_0^\infty e^{-qr} u_b(X_r^b) \mathbb{I}_{\{r<\sigma^b\}} dr \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}} \mathbb{E}_b \left[ \int_0^{\sigma^b} e^{-qr} u_b(X_r^b) dr \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}} J(b, u_b) \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b<\infty\}} \right] J(b, u_b). \end{aligned}$$

Alors,

$$J(x, u_b) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau_b} e^{-qr} u_b(X_r^b) ds \right] + \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b < \infty\}} \right] J(b, u_b). \quad (2.14)$$

Puisque notre processus se comporte comme un processus Ornstein-Uhlenbeck jusqu'au temps  $\tau_b$ , on a que notre processus est égal en distribution au processus

$$dY_r = (\mu - S - KY_r) dr + \sigma dB_r, \quad Y_0 = x$$

avec

$$\kappa_b = \inf\{r > 0 : Y_r = b\}.$$

Nous avons alors que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau_b} e^{-qr} u_b(X_r^b) dr \right] &= \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\kappa_b} e^{-qr} (KY_r + S) dr \right] \\ &= K \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\kappa_b} e^{-qr} Y_r dr \right] + S \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\kappa_b} e^{-qr} dr \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Comme  $x > b$  et les trajectoires de  $X^b$  sont dans la région au-dessus de  $b$ , remarquons que  $X^b$  agit comme  $Y$  sur  $[0, \tau_b)$ .

Nous pouvons écrire

$$\mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\kappa_b} e^{-qr} Y_r dr \right] = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\infty} e^{-qr} Y_r dr \right] - \mathbb{E}_x \left[ \int_{\kappa_b}^{\infty} e^{-qr} Y_r dr \right].$$

Puisque  $Y$  est une diffusion récurrente, nous savons que  $\kappa_b < \infty$  presque sûrement.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[ \int_{\kappa_b}^{\infty} e^{-qr} Y_r dr \right] &= \mathbb{E}_x \left[ \int_{\kappa_b}^{\infty} e^{-qr} Y_r dr \mathbb{I}_{\{\kappa_b < \infty\}} \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ \mathbb{E}_x \left[ \int_{\kappa_b}^{\infty} e^{-qr} Y_r dt \mathbb{I}_{\{\kappa_b < \infty\}} \mid \mathcal{F}_{\kappa_b} \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\kappa_b} \mathbb{I}_{\{\kappa_b < \infty\}} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\infty} e^{-qr} Y_{r+\kappa_b} dt \mid \mathcal{F}_{\kappa_b} \right] \right]. \end{aligned}$$

La diffusion  $Y$  vérifie la propriété forte de Markov et donc, tout comme à l'énoncé (2.13) avec maintenant le temps d'arrêt  $\kappa_b$  et la fonction borélienne  $F$  donnée par

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-qz} y(z) dz,$$

où  $y = (y(z))_{z \geq 0} \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[ \int_{\kappa_b}^\infty e^{-qr} Y_r dr \right] &= \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\kappa_b} \mathbb{I}_{\{\kappa_b < \infty\}} \mathbb{E}_b \left[ \int_0^\infty e^{-qr} Y_r dt \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\kappa_b} \mathbb{I}_{\{\kappa_b < \infty\}} \right] \mathbb{E}_b \left[ \int_0^\infty e^{-qr} Y_r dr \right]. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire

$$\mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\kappa_b} e^{-qr} Y_r dr \right] = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^\infty e^{-qr} Y_r dr \right] - \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\kappa_b} \mathbb{I}_{\{\kappa_b < \infty\}} \right] \mathbb{E}_b \left[ \int_0^\infty e^{-qr} Y_r dr \right]. \quad (2.16)$$

Par l'équation (2.4), on sait que, pour tout  $r \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}_x [Y_r] = x e^{-Kr} + \frac{\mu - S}{K} (1 - e^{-Kr}).$$

Donc, l'espérance étant finie, nous utilisons le Théorème de Fubini pour changer l'ordre de l'espérance et de l'intégrale. Nous pouvons alors conclure que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^\infty e^{-qr} Y_r dr \right] &= \int_0^\infty e^{-qr} \mathbb{E}_x [Y_r] dr \\ &= \frac{x}{q+K} + \frac{\mu - S}{qK} - \frac{\mu - S}{K(q+K)} \\ &= \frac{1}{q+K} \left( x + \frac{\mu - S}{q} \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Nous pouvons réécrire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\kappa_b} e^{-qr} dr \right] &= \mathbb{E}_x \left[ \frac{1}{q} (1 - e^{-q\kappa_b}) \right] \\ &= \frac{1}{q} (1 - \mathbb{E}_x [e^{-q\kappa_b}]). \end{aligned}$$

En utilisant les équations (2.8), (2.14), (2.15), (2.16), (2.17), on réécrit la fonction de performance, pour  $x > b$ ,

$$J(x, u_b) = \frac{K}{q+K} \left( x + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) + \left[ J(b, u_b) - \frac{K}{q+K} \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right] \frac{H_{S,K}^{(q)}(x)}{H_{S,K}^{(q)}(b)}.$$

Fixons maintenant une valeur initiale  $0 < x < b$ . Puisque  $u_b(y) = 0$ , si  $y < b$ ,

$$\begin{aligned} J(x, u_b) &= \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\sigma^b} e^{-qr} u_b(X_r^b) dr \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\sigma^b} e^{-qr} u_b(X_r^b) dr \mathbb{I}_{\{\sigma^b > \tau_b\}} \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau_b} e^{-qr} u_b(X_r^b) dr \mathbb{I}_{\{\sigma^b > \tau_b\}} \right] + \mathbb{E}_x \left[ \int_{\tau_b}^{\sigma^b} e^{-qr} u_b(X_r^b) dr \mathbb{I}_{\{\sigma^b > \tau_b\}} \right]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Toutefois, puisque  $x < b$ , notre processus ne paie pas de dividendes jusqu'à ce qu'il franchisse la barrière  $b$  et donc le premier terme est nul. Entre autres,

$$\begin{aligned} J(x, u_b) &= \mathbb{E}_x \left[ \int_{\tau_b}^{\sigma^b} e^{-qr} u_b(X_r^b) dr \mathbb{I}_{\{\tau_b < \sigma^b\}} \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ \mathbb{E}_x \left[ \int_{\tau_b}^{\sigma^b} e^{-qr} u_b(X_r^b) dt \mathbb{I}_{\{\tau_b < \sigma^b\}} \mid \mathcal{F}_{\tau_b} \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b < \sigma^b\}} \mathbb{E}_x \left[ \int_{\tau_b}^{\sigma^b} e^{-q(r-\tau_b)} u_b(X_r^b) dr \mid \mathcal{F}_{\tau_b} \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b < \sigma^b\}} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\infty} e^{-qr} u_b(X_{r+\tau_b}^b) \mathbb{I}_{\{r < \sigma^b - \tau_b\}} dr \mid \mathcal{F}_{\tau_b} \right] \right]. \end{aligned}$$

Encore une fois, par la propriété forte de Markov donnée à l'énoncé (2.13),

$$\begin{aligned} J(x, u_b) &= \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b < \sigma^b\}} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\infty} e^{-qr} u_b(X_{r+\tau_b}^b) \mathbb{I}_{\{r < \sigma^b - \tau_b\}} dr \mid \mathcal{F}_{\tau_b} \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b < \sigma^b\}} \mathbb{E}_b \left[ \int_0^{\sigma^b} e^{-qr} u_b(X_r^b) dr \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b < \sigma^b\}} J(b, u_b) \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b < \sigma^b\}} \right] J(b, u_b). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Notons ici que la fonction borélienne  $F$  de ce cas est

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-qz} u_b(y(z)) \mathbb{I}_{\{z < \inf\{s > 0 : y(s) = 0\}\}} dz,$$

où  $y = (y(z))_{z \geq 0} \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ .

Par l'équation (2.5), nous pouvons conclure que

$$J(x, u_b) = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)} J(b, u_b).$$

En mettant tout ensemble, on obtient

$$J(x, u_b) = \begin{cases} \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)} J(b, u_b), & 0 \leq x \leq b, \\ \frac{K}{q+K} \left( x + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) + \left[ J(b, u_b) - \frac{K}{q+K} \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right] \frac{H_{S,K}^{(q)}(x)}{H_{S,K}^{(q)}(b)}, & x > b. \end{cases}$$

Finalement, pour avoir la continuité en  $b$ , nous voulons avoir

$$\lim_{x \rightarrow b^-} J(x, u_b) = \lim_{x \rightarrow b^+} J(x, u_b) = J(b, u_b).$$

Rappelons que  $W^{(q)}$  et  $H^{(q)}$  sont des fonctions continues. Alors, dans un premier temps,

$$\lim_{x \rightarrow b^-} J(x, u_b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)} J(b, u_b) = J(b, u_b).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b^+} J(x, u_b) &= \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{K}{q+K} \left( x + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) + \left[ J(b, u_b) - \frac{K}{q+K} \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \right] \frac{H_{S,K}^{(q)}(x)}{H_{S,K}^{(q)}(b)} \\ &= \frac{K}{q+K} \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) + J(b, u_b) - \frac{K}{q+K} \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \\ &= J(b, u_b). \end{aligned}$$

Nous pouvons donc confirmer la continuité en  $b$ .  $\square$

Nous voulons maintenant trouver la valeur de  $J(b, u_b)$ . Pour ce faire, nous approximerons la fonction valeur par une suite de fonctions. Fixons  $n \geq 1$  et considérons

la stratégie telle que les dividendes sont payés à un taux continu  $Kx + S$  à partir de la barrière  $b$  et jusqu'à ce que le niveau  $b - \frac{1}{n}$  soit atteint. Les paiements reprennent lorsque le niveau  $b$  est atteint de nouveau. Nous donnons à la Figure 2.1 une illustration d'un tel processus approximatif. Nous définissons ce processus contrôlé approximatif par :

$$\begin{aligned}
dX_t^{(n)} &= \sum_{i=1}^{\infty} dV_t^{T_i^{(n)}, b - \frac{1}{n}} \mathbb{I}_{\{T_i^{(n)} \leq t < S_{i+1}^{(n)}\}} + \sum_{i=2}^{\infty} dU_t^{S_i^{(n)}, b} \mathbb{I}_{\{S_i^{(n)} \leq t < T_i^{(n)}\}} \\
&\quad + dU_t^{S_1^{(n)}, b} \mathbb{I}_{\{S_1^{(n)} \leq t < T_1^{(n)}\}} \mathbb{I}_{\{0 \leq x < b\}} + dV_t^{0, x} \mathbb{I}_{\{0 \leq t < S_1^{(n)}\}} \mathbb{I}_{\{0 \leq x < b\}} \\
&\quad + dU_t^{0, x} \mathbb{I}_{\{0 \leq t < T_1^{(n)}\}} \mathbb{I}_{\{x \geq b\}},
\end{aligned} \tag{2.20}$$

où

$$\begin{aligned}
X_0^{(n)} &= x, \\
dV_t^{j, x} &= \mu dt + \sigma dB_t, \quad V_j^{j, x} = x, t \geq j \\
dU_t^{j, x} &= (\mu - S - KU_t^{j, x}) dt + \sigma dB_t, \quad U_j^{j, x} = x, t \geq j
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
S_1^{(n)} &= \inf\{t \geq 0 : X_t^{(n)} > b\}, \\
T_i^{(n)} &= \inf\left\{t > S_i^{(n)} : X_t^{(n)} < b - \frac{1}{n}\right\}, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots \\
S_i^{(n)} &= \inf\{t > T_{i-1}^{(n)} : X_t^{(n)} > b\}, \quad i = 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

Notons similairement le contrôle par

$$dL_t^{(n)} = \sum_{i=2}^{\infty} U_t^{S_i^{(n)}, b} \mathbb{I}_{\{S_i^{(n)} \leq t < T_i^{(n)}\}} dt + U_t^{S_1^{(n)}, b} \mathbb{I}_{\{S_1^{(n)} \leq t < T_1^{(n)}\}} dt \mathbb{I}_{\{0 \leq x < b\}} + U_t^{0, x} \mathbb{I}_{\{0 \leq t < T_1^{(n)}\}} dt \mathbb{I}_{\{x \geq b\}}$$

et le temps de ruine par  $\sigma^n = \inf\{t > 0 : X_t^{(n)} < 0\}$ .

**Lemme 2.2.1** *Pour  $X_0^{(n)} = X_0 = x$ ,  $\mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\sigma^n} e^{-qt} dL_t^{(n)} \right]$  converge vers  $J(x, u_b)$  quand  $n$  tend vers l'infini.*

### Illustration de la dynamique du processus approximatif

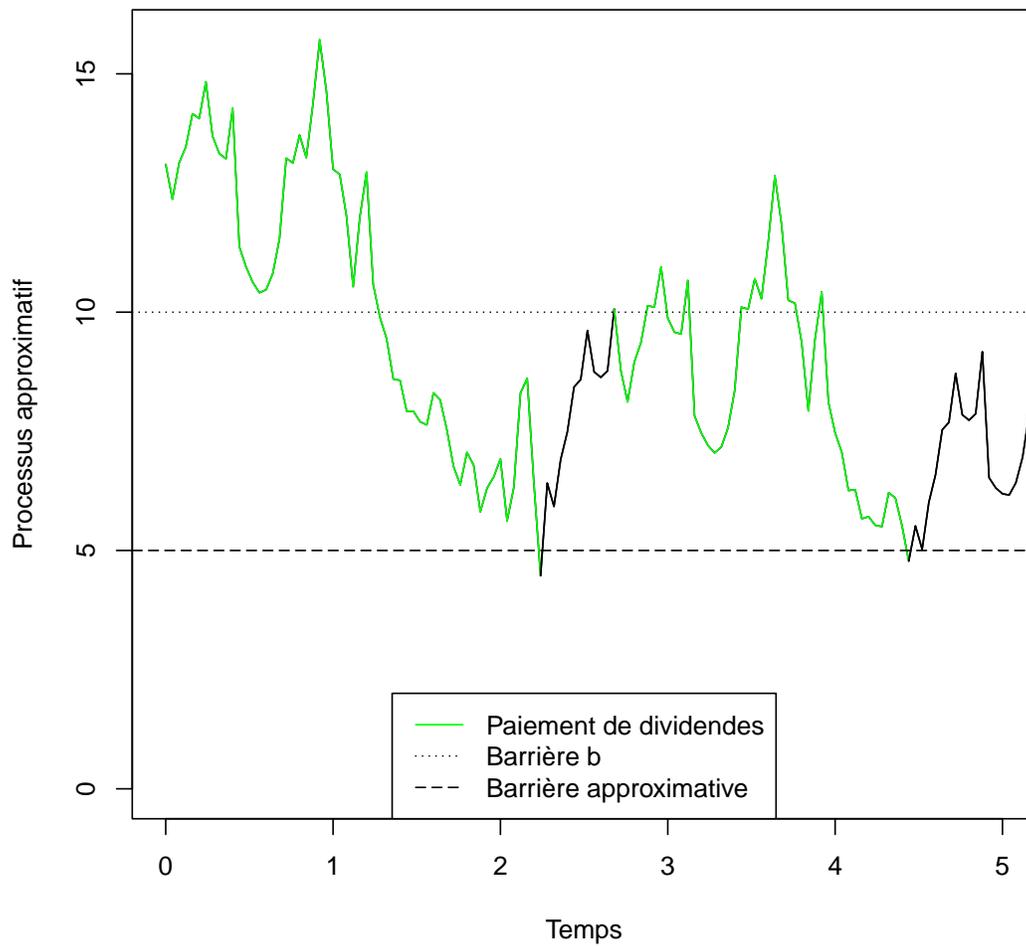


FIGURE 2.1 Illustration de la dynamique du processus approximatif  $X^{(n)}$ . Paramètres :  $x = 13.1$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\sigma = 4.5$ ,  $q = 0.25$ ,  $K = 0.45$ ,  $S = 0.1$ ,  $b = 10$  et  $n = 0.2$ .

*Preuve.* Par (Renaud et Simard, 2021), nous savons que le processus  $X^b$  donné en (2.3) existe. Par la définition de la suite de processus  $\{X^{(n)}\}$  on a que  $X_t^{(n)} \leq X_t^{(n+1)} \leq X_t^b$  pour tout  $t > 0$  presque sûrement et pour tout  $n$ . Aussi, l'équation différentielle stochastique des processus  $X^{(n)}$  et  $X^b$  peuvent différer seulement sur  $\bigcup_{i \geq 1} (T_i^{(n)}, S_i^{(n)})$ . Cependant,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{i \geq 1} (T_i^{(n)}, S_i^{(n)}) = \emptyset$$

presque sûrement. On obtient que la suite  $\{X^{(n)}\}$  converge de façon monotone vers  $X^b$  presque sûrement. Conséquemment, la suite des processus de contrôle  $\{L^{(n)}\}$  converge et par la convergence monotone on obtient le résultat.  $\square$

Le prochain résultat nous donne la fonction de performance explicite lorsque la valeur initiale du processus contrôlé est au même niveau que la barrière.

**Proposition 2.2.2** *Pour une barrière  $b \geq 0$ , la fonction de performance avec valeur initiale  $X_0^b = b$  est donnée par*

$$J(b, u_b) = \frac{\frac{K}{q+K} \left( 1 - \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \frac{H_{S,K}^{(q)'(b)}}{H_{S,K}^{(q)}(b)} \right)}{\frac{W^{(q)'(b)}}{W^{(q)}(b)} - \frac{H_K^{(q)'(b)}}{H_K^{(q)}(b)}}.$$

*Preuve.* Soit  $\Phi^n(x) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\sigma^n} e^{-qt} dL_t^{(n)} \right]$ . Alors, par l'équation (2.14) et pour

$n > \frac{1}{b}$ ,

$$\begin{aligned}
\Phi^n(b) &= \mathbb{E}_b \left[ \int_0^{\sigma^n} e^{-qt} dL_t^{(n)} \mathbb{I}_{\{\tau_{b-\frac{1}{n}} < \sigma^n\}} \right] \\
&= K \mathbb{E}_b \left[ \int_0^{\tau_{b-\frac{1}{n}}} e^{-qt} X_t^b dt \mathbb{I}_{\{\tau_{b-\frac{1}{n}} < \sigma^n\}} \right] + S \mathbb{E}_b \left[ \int_0^{\tau_{b-\frac{1}{n}}} e^{-qt} dt \mathbb{I}_{\{\tau_{b-\frac{1}{n}} < \sigma^n\}} \right] \\
&\quad + \mathbb{E}_b \left[ \int_{\tau_{b-\frac{1}{n}}}^{\sigma^n} e^{-qt} (K X_t^b + S) dt \mathbb{I}_{\{\tau_{b-\frac{1}{n}} < \sigma^n\}} \right] \\
&= K \mathbb{E}_b \left[ \int_0^{\tau_{b-\frac{1}{n}}} e^{-qt} X_t^b dt \mathbb{I}_{\{\tau_{b-\frac{1}{n}} < \sigma^n\}} \right] + S \mathbb{E}_b \left[ \int_0^{\tau_{b-\frac{1}{n}}} e^{-qt} dt \mathbb{I}_{\{\tau_{b-\frac{1}{n}} < \sigma^n\}} \right] \\
&\quad + \mathbb{E}_b \left[ e^{-q\tau_{b-\frac{1}{n}}} \mathbb{I}_{\{\tau_{b-\frac{1}{n}} < \infty\}} \right] \Phi^n \left( b - \frac{1}{n} \right).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

D'un autre côté, pour  $\Phi^n(b - \frac{1}{n})$ , on se retrouve dans la situation où la valeur initiale est égale à la barrière. On utilise alors un raisonnement similaire à celui utilisé pour l'équation (2.19) pour trouver

$$\Phi^n \left( b - \frac{1}{n} \right) = \mathbb{E}_{b-\frac{1}{n}} \left[ e^{-q\tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b < \sigma^b\}} \right] \Phi^n(b). \tag{2.22}$$

En remplaçant la valeur de  $\Phi^n(b - \frac{1}{n})$  de l'équation (2.21) par celle de l'équation (2.22) et en isolant  $\Phi^n(b)$ , on trouve

$$\Phi^n(b) = \frac{K \mathbb{E}_b \left[ \int_0^{\tau_{b-\frac{1}{n}}} e^{-qt} X_t^b dt \mathbb{I}_{\{\tau_{b-\frac{1}{n}} < \sigma^n\}} \right] + S \mathbb{E}_b \left[ \int_0^{\tau_{b-\frac{1}{n}}} e^{-qt} dt \mathbb{I}_{\{\tau_{b-\frac{1}{n}} < \sigma^n\}} \right]}{1 - \mathbb{E}_b \left[ e^{-q\tau_{b-\frac{1}{n}}} \mathbb{I}_{\{\tau_{b-\frac{1}{n}} < \infty\}} \right] \mathbb{E}_{b-\frac{1}{n}} \left[ e^{-q\tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b < \tau_0\}} \right]}. \tag{2.23}$$

Par la Proposition 2.2.1, on sait que

$$\begin{aligned}
&K \mathbb{E}_b \left[ \int_0^{\tau_{b-\frac{1}{n}}} e^{-qt} X_t^b dt \mathbb{I}_{\{\tau_{b-\frac{1}{n}} < \sigma^n\}} \right] \\
&= \frac{K}{q+K} \left( b + \frac{\mu - S}{q} \right) - \frac{K}{q+K} \left[ \left( b - \frac{1}{n} \right) + \frac{\mu - S}{q} \right] \frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)}(b - \frac{1}{n})}
\end{aligned}$$

et

$$S \mathbb{E}_b \left[ \int_0^{\tau_{b-\frac{1}{n}}} e^{-qt} dt \mathbb{I}_{\{\tau_{b-\frac{1}{n}} < \sigma^n\}} \right] = \frac{S}{q} \left( 1 - \frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)}(b - \frac{1}{n})} \right).$$

Par l'équation (2.5), nous avons

$$\mathbb{E}_{b-\frac{1}{n}} \left[ e^{-q\tau_b} \mathbb{I}_{\{\tau_b < \tau_0\}} \right] = \frac{W^{(q)}(b - \frac{1}{n})}{W^{(q)}(b)}$$

et, par l'équation (2.8),

$$\mathbb{E}_b \left[ e^{-q\tau_{b-\frac{1}{n}}} \mathbb{I}_{\{\tau_{b-\frac{1}{n}} < \infty\}} \right] = \frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)}(b - \frac{1}{n})}.$$

En divisant par  $\frac{1}{n}$  et faisant tendre  $n$  vers l'infini, le numérateur de l'équation (2.23) devient

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{K}{q+K} \left( b + \frac{\mu-S}{q} \right) - \frac{K}{q+K} \left( b + \frac{\mu-S}{q} - \frac{1}{n} \right) \frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)}(b-\frac{1}{n})} + \frac{S}{q} \left( 1 - \frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)}(b-\frac{1}{n})} \right)}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{K}{q+K} \left( b + \frac{\mu-S}{q} \right)}{\frac{1}{n}} - \frac{\frac{K}{q+K} \left( b + \frac{\mu-S}{q} \right) \frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)}(b-\frac{1}{n})}}{\frac{1}{n}} + \frac{\frac{K}{q+K} \frac{1}{n} \frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)}(b-\frac{1}{n})}}{\frac{1}{n}} \\ & \quad + \frac{\frac{S}{q} \left( 1 - \frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)}(b-\frac{1}{n})} \right)}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{K}{q+K} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)}(b-\frac{1}{n})} + \left( \frac{K}{q+K} \left( b + \frac{\mu-S}{q} \right) + \frac{S}{q} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)}(b-\frac{1}{n})}}{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Puisque  $H_{S,K}^{(q)}$  est  $\mathcal{C}^1$ , le numérateur de l'équation (2.23) est alors

$$\begin{aligned} & \frac{K}{q+K} - \left( \frac{K}{q+K} \left( b + \frac{\mu-S}{q} \right) + \frac{S}{q} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_{S,K}^{(q)}(b) - H_{S,K}^{(q)}(b - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n} H_{S,K}^{(q)}(b - \frac{1}{n})} \\ &= \frac{K}{q+K} - \left( \frac{K}{q+K} \left( b + \frac{\mu-S}{q} \right) + \frac{S}{q} \right) \frac{H_{S,K}^{(q)'}(b)}{H_{S,K}^{(q)}(b)} \\ &= \frac{K}{q+K} \left( 1 - \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \frac{H_{S,K}^{(q)'}(b)}{H_{S,K}^{(q)}(b)} \right). \end{aligned}$$

Similairement, on trouve pour le dénominateur de l'équation (2.23)

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{W^{(q)}(b - \frac{1}{n})}{W^{(q)}(b)} \frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)}(b - \frac{1}{n})}}{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{W^{(q)}(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_{S,K}^{(q)}(b - \frac{1}{n}) - W^{(q)}(b - \frac{1}{n})H_{S,K}^{(q)}(b)}{\frac{1}{n}H_{S,K}^{(q)}(b - \frac{1}{n})} \\
&= \frac{1}{W^{(q)}(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_{S,K}^{(q)}(b) [W^{(q)}(b) - W^{(q)}(b - \frac{1}{n})]}{\frac{1}{n}H_{S,K}^{(q)}(b - \frac{1}{n})} \\
&\quad - \frac{1}{W^{(q)}(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W^{(q)}(b) [H_{S,K}^{(q)}(b) - H_{S,K}^{(q)}(b - \frac{1}{n})]}{\frac{1}{n}H_{S,K}^{(q)}(b - \frac{1}{n})} \\
&= \frac{W^{(q)'}(b)}{W^{(q)}(b)} - \frac{H_{S,K}^{(q)'}(b)}{H_{S,K}^{(q)}(b)}.
\end{aligned}$$

En particulier, nous avons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n(b) = \frac{\frac{K}{q+K} \left( 1 - \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \frac{H_{S,K}^{(q)'}(b)}{H_{S,K}^{(q)}(b)} \right)}{\frac{W^{(q)'}(b)}{W^{(q)}(b)} - \frac{H_{S,K}^{(q)'}(b)}{H_{S,K}^{(q)}(b)}}.$$

Par le Lemme 2.2.1, la limite de  $\Phi^n(b)$  est égale à  $J(b, u_b)$ .  $\square$

En remplaçant  $J(b, u_b)$  par sa valeur explicite, nous avons alors que la fonction de performance de la stratégie  $u_b$  est donnée par

$$J(x, u_b) = \begin{cases} \frac{K}{q+K} C_b W^{(q)}(x), & 0 \leq x \leq b, \\ \frac{K}{q+K} \left( x + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} + D_b H_{S,K}^{(q)}(x) \right), & x > b, \end{cases} \quad (2.24)$$

où

$$C_b = \frac{H_{S,K}^{(q)}(b) - \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) H_{S,K}^{(q)'}(b)}{W^{(q)'}(b) H_{S,K}^{(q)}(b) - W^{(q)}(b) H_{S,K}^{(q)'}(b)}$$

et

$$D_b = \frac{W^{(q)}(b) - \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) W^{(q)'}(b)}{W^{(q)'}(b) H_{S,K}^{(q)}(b) - W^{(q)}(b) H_{S,K}^{(q)'}(b)}.$$

### 2.3 Valeur de la barrière optimale

Afin d'appliquer le Lemme de vérification (Lemme 1.1.1), nous devons vérifier que la fonction  $J(x, u_b)$  est deux fois continûment dérivable. Nous savons que  $J(x, u_b)$  est deux fois continûment dérivable sur  $(0, \infty) \setminus \{b\}$ .

En effet, en dérivant la fonction valeur donnée à la Proposition 2.2.1 et puisque  $W^{(q)}$  et  $H_{S,K}^{(q)}$  sont  $C^2$ , nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow b^-} J'(x, u_b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{J(b, u_b)}{W^{(q)}(b)} W^{(q)'}(x) = \frac{J(b, u_b)}{W^{(q)}(b)} W^{(q)'}(b)$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b^+} J'(x, u_b) &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{K}{q+K} + \frac{J(b, u_b)}{H_{S,K}^{(q)}(b)} H_{S,K}^{(q)'}(x) - \frac{K}{q+K} \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \frac{H_{S,K}^{(q)'}(x)}{H_{S,K}^{(q)}(b)} \\ &= \frac{K}{q+K} + \frac{J(b, u_b)}{H_{S,K}^{(q)}(b)} H_{S,K}^{(q)'}(b) - \frac{K}{q+K} \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) \frac{H_{S,K}^{(q)'}(b)}{H_{S,K}^{(q)}(b)}. \end{aligned}$$

Par la Proposition 2.2.2, nous avons que, pour tout  $b > 0$ ,

$$J'(b, u_b) = \lim_{x \rightarrow b^-} J'(x, u_b) = \lim_{x \rightarrow b^+} J'(x, u_b)$$

et donc la fonction valeur est  $C^1$ .

En dérivant l'équation (2.24) deux fois, nous obtenons

$$J''(x, u_b) = \begin{cases} \frac{K}{q+K} C_b W^{(q)''}(x), & 0 < x < b \\ \frac{K}{q+K} D_b H_{S,K}^{(q)''}(x), & x > b. \end{cases}$$

Nous voulons trouver la valeur de la barrière  $b^*$  telle que

$$J''(b, u_b) = \lim_{x \rightarrow b^-} J''(x, u_b) = \lim_{x \rightarrow b^+} J''(x, u_b).$$

On voit que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} J''(x, u_b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{K}{q+K} C_b W^{(q)''}(x) = \frac{K}{q+K} C_b W^{(q)''}(b).$$

et

$$\lim_{x \rightarrow b^+} J''(x, u_b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{K}{q + K} D_b H_{S,K}^{(q)''}(x) = \frac{K}{q + K} D_b H_{S,K}^{(q)''}(b).$$

La valeur de  $b^*$  devrait donc être une solution à l'équation

$$H_{S,K}^{(q)''}(b) = \frac{C_b}{D_b} W^{(q)''}(b). \quad (2.25)$$

Il est facile de vérifier que la fonction  $W^{(q)}$  satisfait à l'équation différentielle ordinaire (2.1) et donc nous pouvons écrire

$$W^{(q)''}(x) = \frac{2}{\sigma^2} \left( qW^{(q)}(x) - \mu W^{(q)'}(x) \right).$$

Nous savons aussi, d'après (Renaud et Simard, 2021), que la fonction  $H_K^{(q)}$  satisfait à l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{\sigma^2}{2} g''(x) + (\mu - Kx)g'(x) - qg(x) = 0.$$

Nous pouvons alors déduire que  $H_{K,S}^{(q)}(x)$  satisfait à l'équation différentielle ordinaire (2.2). Nous avons donc

$$H_{S,K}^{(q)''}(x) = \frac{2}{\sigma^2} \left( (Kx - (\mu - S))H_{S,K}^{(q)'}(x) + qH_{S,K}^{(q)}(x) \right).$$

Alors, l'équation (2.25) peut être réécrite de la façon suivante :

$$KbH_{S,K}^{(q)'}(b) - (\mu - S)H_{S,K}^{(q)'}(b) + qH_{S,K}^{(q)}(b) = \frac{C_b}{D_b} \left( qW^{(q)}(b) - \mu W^{(q)'}(b) \right).$$

En remplaçant les valeurs de  $C_b$  et  $D_b$  par leur expression respective telle que donnée en (2.24), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{C_b}{D_b} &= \frac{H_{S,K}^{(q)}(b) - \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) H_{S,K}^{(q)'}(b)}{W^{(q)'}(b)H_{S,K}^{(q)}(b) - W^{(q)}(b)H_{S,K}^{(q)'}(b)} \left( \frac{W^{(q)}(b) - \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) W^{(q)'}(b)}{W^{(q)'}(b)H_{S,K}^{(q)}(b) - W^{(q)}(b)H_{S,K}^{(q)'}(b)} \right)^{-1} \\ &= \frac{H_{S,K}^{(q)}(b) - \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) H_{S,K}^{(q)'}(b)}{W^{(q)}(b) - \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) W^{(q)'}(b)}. \end{aligned}$$

L'équation (2.25) est donc équivalente à

$$\begin{aligned} & \left( KbH_{S,K}^{(q)'}(b) - (\mu - S)H_{S,K}^{(q)'}(b) + qH_{S,K}^{(q)}(b) \right) \left( W^{(q)}(b) - \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) W^{(q)'}(b) \right) \\ &= \left( H_{S,K}^{(q)}(b) - \left( b + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} \right) H_{S,K}^{(q)'}(b) \right) \left( qW^{(q)}(b) - \mu W^{(q)'}(b) \right). \end{aligned}$$

En simplifiant, on obtient

$$(K + q) \left( \frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)'}(b)} - \frac{\mu}{q} \right) + K \left( \frac{\mu - S}{K} - b \right) - q \frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)'}(b)} = 0. \quad (2.26)$$

Le prochain résultat donne des conditions pour l'existence et l'unicité de la barrière optimale  $b^*$  qui est solution de l'équation (2.26).

**Proposition 2.3.2** *Si  $\frac{K\mu + Sq}{q^2} > \frac{-H_{S,K}^{(q)}(0)}{H_{S,K}^{(q)'}(0)}$ , alors il existe une unique solution  $b^* \in (0, c^*)$  à l'équation (2.26), où  $c^* = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}} \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}}{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}} \right)$ .*

*Preuve.* Définissons

$$f(b) = (K + q) \left( \frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)'}(b)} - \frac{\mu}{q} \right), \quad g(b) = K \left( \frac{\mu - S}{K} - b \right), \quad h(b) = -q \frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)'}(b)}.$$

La fonction  $z(b) := f(b) + g(b) + h(b)$  est continue. Nous voulons utiliser le Théorème des valeurs intermédiaires pour démontrer qu'il existe un  $b^*$  tel que  $z(b^*) = 0$ .

Plus précisément, nous allons montrer que  $z(0) < 0$  et  $z(c^*) > 0$ .

Premièrement, rappelons que, pour  $x > 0$ ,

$$W^{(q)}(x) = \frac{2}{\sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}} e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x} \sinh \left( \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} x \right)$$

et, pour  $x \leq 0$ ,  $W^{(q)}(x) = 0$ . Nous trouvons donc que, pour  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} W^{(q)'}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}} e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x} \cosh \left( \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} x \right) \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}} \frac{\mu}{\sigma^2} e^{-\frac{\mu}{\sigma^2}x} \sinh \left( \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} x \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sigma^2} e^{-\frac{\mu}{\sigma^2} x} \cosh\left(\frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} x\right) - \frac{2\mu}{\sigma^2 \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}} e^{-\frac{\mu}{\sigma^2} x} \sinh\left(\frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} x\right).$$

Alors, pour  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)'}(x)} &= \frac{\sigma^2 \sinh\left(\frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} x\right)}{\sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} \cosh\left(\frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} x\right) - \mu \sinh\left(\frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} x\right)} \\ &= \frac{\sigma^2 \sinh\left(\frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} x\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} x\right) \left(\sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} \frac{\cosh\left(\frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} x\right)}{\sinh\left(\frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} x\right)} - \mu\right)} \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} \coth\left(\frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} x\right) - \mu}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

En utilisant la définition de  $c^*$ , nous trouvons que

$$\begin{aligned} \frac{W^{(q)}(c^*)}{W^{(q)'}(c^*)} &= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} \coth\left(\frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} \frac{\sigma^2}{\sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}} \ln\left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}}{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}}\right)\right) - \mu} \\ &= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} \coth\left(\ln\left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}}{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}}\right)\right) - \mu}. \end{aligned}$$

Puisque  $\coth(\ln(x)) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ , on a

$$\coth\left(\ln\left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}}{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}}\right)\right) = \frac{\mu^2 + q\sigma^2}{\mu \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}}.$$

On retrouve alors

$$\frac{W^{(q)}(c^*)}{W^{(q)'}(c^*)} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} \frac{\mu^2 + q\sigma^2}{\mu \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}} - \mu} = \frac{\sigma^2}{\frac{\mu^2 + q\sigma^2}{\mu} - \mu} = \frac{\mu\sigma^2}{\mu^2 + q\sigma^2 - \mu^2} = \frac{\mu\sigma^2}{q\sigma^2} = \frac{\mu}{q}.$$

Donc,  $f(c^*) = 0$  et

$$z(c^*) = f(c^*) + g(c^*) + h(c^*) = \mu - S - Kc^* - q \frac{H_{S,K}^{(q)}(c^*)}{H_{S,K}^{(q)'}(c^*)}.$$

Par les équations (2.9) et (2.10), nous trouvons

$$\begin{aligned}
q \frac{H_{S,K}^{(q)}(x)}{H^{(q)'}(x)} &= q \frac{\left(\frac{q}{K} + 1\right) H_{S,K}^{(q+2K)}(x) + \frac{\sqrt{2K}}{\sigma} \left(x - \frac{\mu-S}{K}\right) H_{S,K}^{(q+K)}(x)}{-\frac{q\sqrt{2K}}{K\sigma} H_{S,K}^{(q+K)}(x)} \\
&= -\frac{K\sigma}{\sqrt{2K}} \left(\frac{q}{K} + 1\right) \frac{H_{S,K}^{(q+2K)}(x)}{H_{S,K}^{(q+K)}(x)} - K \left(x - \frac{\mu-S}{K}\right) \\
&= \mu - S - Kx - \frac{K\sigma}{\sqrt{2K}} \left(\frac{q}{K} + 1\right) \frac{H_{S,K}^{(q+2K)}(x)}{H_{S,K}^{(q+K)}(x)} \\
&= g(x) - \frac{K\sigma}{\sqrt{2K}} \left(\frac{q}{K} + 1\right) \frac{H_{S,K}^{(q+2K)}(x)}{H_{S,K}^{(q+K)}(x)}.
\end{aligned}$$

Pour tout  $x \geq 0$ ,  $H_{S,K}^{(q+2K)}(x)$  et  $H_{S,K}^{(q+K)}(x)$  sont positives. Nous pouvons alors conclure que

$$q \frac{H_{S,K}^{(q)}(x)}{H_{S,K}^{(q)'}(x)} < g(x), \quad (2.28)$$

pour tout  $x \geq 0$ . Nous avons alors que

$$z(c^*) = f(c^*) + g(c^*) + h(c^*) = \mu - S - Kc^* - q \frac{H_{S,K}^{(q)}(c^*)}{H_{S,K}^{(q)'}(c^*)}.$$

Par l'équation (2.28),

$$z(c^*) = \mu - S - Kc^* - q \frac{H_{S,K}^{(q)}(c^*)}{H_{S,K}^{(q)'}(c^*)} > \mu - S - Kc^* - g(c^*)$$

et donc, puisque  $\mu - S - Kc^* - g(c^*) = 0$ , nous pouvons conclure que  $z(c^*) > 0$ .

Nous savons que

$$z(0) = f(0) + g(0) + h(0) = -(K+q) \frac{\mu}{q} + \mu - S - q \frac{H_{S,K}^{(q)}(0)}{H_{S,K}^{(q)'}(0)}.$$

Donc, sous l'hypothèse que  $q \frac{H_{S,K}^{(q)}(0)}{H_{S,K}^{(q)'}(0)} > f(0) + g(0)$ , nous avons que  $z(0) < 0$ .

Remarquons qu'il est possible que  $q \frac{H_{S,K}^{(q)}(0)}{H_{S,K}^{(q)'}(0)} \leq f(0) + g(0)$ . Dans ce cas, nous avons que  $z(0) \leq 0$  et donc  $b^* = 0$  est la valeur de la barrière optimale.

Supposons maintenant qu'il existe deux solutions  $0 < b_1 < b_2 < c^*$  à l'équation (2.26). Alors, par le Théorème de Rolle, sur l'intervalle  $(b_1, b_2)$ , il existe une valeur  $a$  tel que  $f'(a) + g'(a) - h'(a) = 0$ .

D'abord, nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{dh}{db} &= q \left( \frac{(H_{S,K}^{(q)'})^2 - H_{S,K}^{(q)}(b)H_{S,K}^{(q)''}(b)}{(H_{S,K}^{(q)'})^2} \right) \\ &= q \left( 1 - \frac{H_{S,K}^{(q)}(b)H_{S,K}^{(q)''}(b)}{(H_{S,K}^{(q)'})^2} \right). \end{aligned}$$

Puisque  $H_{S,K}^{(q)}(b)$  est convexe et  $H_{S,K}^{(q)}(0) > 0$ , pour toute valeur  $b \in (0, c^*)$  nous avons que  $\frac{H_{S,K}^{(q)}(b)H_{S,K}^{(q)''}(b)}{(H_{S,K}^{(q)'})^2} > 0$  et donc

$$q \left( 1 - \frac{H_{S,K}^{(q)}(b)H_{S,K}^{(q)''}(b)}{(H_{S,K}^{(q)'})^2} \right) < q.$$

Ensuite, nous avons que

$$\begin{aligned} \frac{dh}{db} &= \frac{df}{db} + \frac{dg}{db} \\ &= (K + q) \frac{(W^{(q)'})^2 - W^{(q)}(b)W^{(q)''}(b)}{(W^{(q)'})^2} - K \\ &= (K + q) \left( 1 - \frac{W^{(q)}(b)W^{(q)''}(b)}{(W^{(q)'})^2} \right) - K \\ &= K + q - (K + q) \frac{W^{(q)}(b)W^{(q)''}(b)}{(W^{(q)'})^2} - K \\ &= q - (K + q) \frac{W^{(q)}(b)W^{(q)''}(b)}{(W^{(q)'})^2}. \end{aligned}$$

Puisque  $W^{(q)}(b) > 0$  et  $W^{(q)''}(b) < 0$  sur  $(0, c^*)$ , nous avons que  $\frac{W^{(q)}(b)W^{(q)''}(b)}{(W^{(q)'})^2} < 0$  et donc

$$q - (K + q) \frac{W^{(q)}(b)W^{(q)''}(b)}{(W^{(q)'})^2} > q.$$

Ainsi,  $\frac{dh}{db} > q$  et nous trouvons alors que, sur l'intervalle  $(b_1, b_2)$ ,

$$f'(a) + g'(a) - h'(a) = q - (K + q) \frac{W^{(q)}(a)W^{(q)''}(a)}{(W^{(q)'}(a))^2} - q \left( 1 - \frac{H_{S,K}^{(q)}(a)H_{S,K}^{(q)''}(a)}{(H_{S,K}^{(q)'}(a))^2} \right)$$

est différent de zéro. Donc, il ne peut exister qu'une seule valeur  $b^*$  satisfaisant à l'équation (2.26).  $\square$

#### 2.4 Solution optimale

Nous allons maintenant simplifier l'expression de  $J(x, u_{b^*})$ .

Pour ce faire, nous voulons identifier  $C_{b^*}$  et  $D_{b^*}$ . Tout d'abord, nous avons que

$$\begin{aligned} C_b &= \frac{H_{S,K}^{(q)}(b) - \left(b + \frac{\mu-S}{q} + \frac{S}{K}\right) H_{S,K}^{(q)'}(b)}{W^{(q)'}(b)H_{S,K}^{(q)}(b) - W^{(q)}(b)H_{S,K}^{(q)'}(b)} \\ &= \frac{H_{S,K}^{(q)'}(b) \frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)'}(b)} - \left(b + \frac{\mu-S}{q} + \frac{S}{K}\right)}{W^{(q)'}(b)H_{S,K}^{(q)'}(b) \frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)'}(b)} - \frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)'}(b)}} \\ &= \frac{1}{W^{(q)'}(b)} \left( \frac{\frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)'}(b)} - \left(b + \frac{\mu-S}{q} + \frac{S}{K}\right) + \frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)'}(b)} - \frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)'}(b)}}{\frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)'}(b)} - \frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)'}(b)}} \right) \\ &= \frac{1}{W^{(q)'}(b)} \left( \frac{\frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)'}(b)} - \left(b + \frac{\mu-S}{q} + \frac{S}{K}\right)}{\frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)'}(b)} - \frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)'}(b)}} + 1 \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D_b &= \frac{W^{(q)}(b) - \left(b + \frac{\mu-S}{q} + \frac{S}{K}\right) W^{(q)'}(b)}{W^{(q)'}(b)H_{S,K}^{(q)}(b) - W^{(q)}(b)H_{S,K}^{(q)'}(b)} \\
&= \frac{W^{(q)'}(b)}{W^{(q)'}(b)H_{S,K}^{(q)'}(b)} \frac{\frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)'}(b)} - \left(b + \frac{\mu-S}{q} + \frac{S}{K}\right)}{\frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)'}(b)} - \frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)'}(b)}} \\
&= \frac{1}{H_{S,K}^{(q)'}(b)} \frac{\frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)'}(b)} - \left(b + \frac{\mu-S}{q} + \frac{S}{K}\right)}{\frac{H_{S,K}^{(q)}(b)}{H_{S,K}^{(q)'}(b)} - \frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)'}(b)}}.
\end{aligned}$$

Conséquemment,

$$C_{b^*} = \frac{q + K}{KW^{(q)'}(b^*)}$$

et

$$D_{b^*} = \frac{\frac{q}{K}}{H_{S,K}^{(q)'}(b^*)}$$

et, donc,

$$J(x, u_{b^*}) = \begin{cases} \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)'}(b^*)}, & 0 \leq x \leq b^*, \\ \frac{K}{q+K} \left( x + \frac{\mu}{q} + \frac{1}{K} \left( S + q \frac{H_{S,K}^{(q)}(x)}{H_{S,K}^{(q)'}(b^*)} \right) \right), & x > b^*. \end{cases}$$

## 2.5 Preuve de l'optimalité de la stratégie $u_{b^*}$

Finalement, nous allons montrer que la stratégie  $u_{b^*}$  est optimale pour le problème en utilisant le Lemme de vérification.

D'un côté, on a

$$\frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{W^{(q)''}(x)}{W^{(q)'}(b^*)} \right) + \mu \left( \frac{W^{(q)'}(x)}{W^{(q)'}(b^*)} \right) - q \left( \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)'}(b^*)} \right) = 0$$

et de l'autre, on a

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{K}{q+K} D_{b^*} H_{S,K}^{(q)''}(x) \right) + (\mu - S - Kx) \left( \frac{K}{q+K} (1 + D_{b^*} H_{S,K}^{(q)'}(x)) \right) \\ - q \left( \frac{K}{q+K} \left( x + \frac{\mu}{q} + \frac{S}{K} + D_{b^*} H_{S,K}^{(q)}(x) \right) \right) + Kx + S = 0. \end{aligned}$$

Rappelons que

$$H_{S,K}^{(q)''}(x) = \frac{2}{\sigma^2} \left( (Kx - (\mu - S)) H_{S,K}^{(q)'}(x) + q H_{S,K}^{(q)}(x) \right).$$

En remplaçant  $H_{S,K}^{(q)''}(x)$ , plusieurs termes s'annulent et nous trouvons

$$Kx \left( 1 - \frac{K}{q+K} - \frac{q}{q+K} \right) + S \left( 1 - \frac{K}{q+K} - \frac{q}{q+K} \right) = 0.$$

Il est alors évident que l'équation est satisfaite, puisque  $1 - \frac{K}{q+K} - \frac{q}{q+K} = 0$ .

Donc, la fonction  $J(\cdot, u_{b^*})$  satisfait au Lemme de vérification et la stratégie optimale du problème est donnée par la stratégie affine/affine différée avec barrière optimale  $b^*$  satisfaisant à l'équation (2.26).

**Théorème 2.5.1** *Fixons  $q > 0$ ,  $S \geq 0$  et  $K > 0$ . Alors :*

1. Si  $\frac{K\mu + Sq}{q^2} \leq \frac{-H_{S,K}^{(q)}(0)}{H_{S,K}^{(q)'}(0)}$ , la stratégie affine  $u_0$  est optimale et la fonction valeur optimale est donnée par

$$v(x) = J(x, u_0) = \frac{K}{q+K} \left( x + \frac{\mu}{q} + \frac{1}{K} \left( S + q \frac{H_{S,K}^{(q)}(x)}{H_{S,K}^{(q)'}(0)} \right) \right).$$

2. Si  $\frac{K\mu + Sq}{q^2} > \frac{-H_{S,K}^{(q)}(0)}{H_{S,K}^{(q)'}(0)}$ , la stratégie affine différée  $u_{b^*}$  est optimale et la fonction valeur optimale est donnée par

$$v(x) = J(x, u_{b^*}) = \begin{cases} \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)'}(b^*)}, & 0 \leq x \leq b^*, \\ \frac{K}{q+K} \left( x + \frac{\mu}{q} + \frac{1}{K} \left( S + q \frac{H_{S,K}^{(q)}(x)}{H_{S,K}^{(q)'}(b^*)} \right) \right), & x \geq b^*. \end{cases}$$

## 2.6 Consolidation des solutions

Ayant la solution de notre problème en main, nous comparons celle-ci avec celles obtenues par (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995) et (Renaud et Simard, 2021). En particulier, nous voyons que notre barrière optimale, notée pour cette section par  $b_{S,K}^*$ , se réduit aux barrières optimales de (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995)  $b_S^*$  et (Renaud et Simard, 2021)  $b_K^*$  lorsque  $K = 0$  et  $S = 0$ , respectivement.

**Corollaire 2.6.1** *La barrière optimale  $b_{S,K}^* = b_K^*$  lorsque  $S = 0$ .*

*Preuve.* Lorsque  $M = 0$ , l'équation (2.11) se réduit à

$$H_{0,K}^{(q)}(x) = e^{\frac{\kappa\left(x - \frac{\mu-0}{K}\right)^2}{2\sigma^2}} D_{-q/K} \left( \left( \frac{x - \frac{\mu-0}{K}}{\sigma} \right) \sqrt{2K} \right) = H_K^{(q)}(x).$$

Donc, par l'équation (2.26), nous retrouvons que la barrière optimale  $b_K^*$  du cas  $f(x) = Kx$  doit satisfaire à l'équation

$$(K + q) \left( \frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)'}(b)} - \frac{\mu}{q} \right) + K \left( \frac{\mu}{K} - b \right) - q \frac{H_K^{(q)}(b)}{H_K^{(q)'}(b)} = 0,$$

ce qui correspond à l'équation de la barrière optimale de (Renaud et Simard, 2021)

$$\frac{K}{q} = \frac{\frac{H_K^{(q)}(b)}{H_K^{(q)'}(b)} - \frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)'}(b)}}{\frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)'}(b)} - \left( b + \frac{\mu}{q} \right)}. \quad \square$$

**Corollaire 2.6.2** *La barrière optimale  $b_{S,K}^* = b_S^*$  lorsque  $K = 0$ .*

*Preuve.* Fixons une valeur initiale  $x > b$ . Pour  $a \in \mathbb{R}$ , nous avons le temps d'arrêt  $\tau_a^{(0)} = \inf\{t > 0 : X_t^b = a\}$ . Donc

$$\int_0^{\sigma^b} e^{-qt} u_b(X_t^b) dt = \int_0^{\tau_b^{(0)}} e^{-qt} u_b(X_t^b) dt + \int_{\tau_b^{(0)}}^{\sigma^b} e^{-qt} u_b(X_t^b) dt.$$

Nous savons par la Proposition 2.2.1 que

$$J(x, u_b) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau_b^{(0)}} e^{-qt} u_b(X_t^b) dt \right] + \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\tau_b^{(0)}} \mathbb{I}_{\{\tau_b^{(0)} < \infty\}} \right] J(b, u_b).$$

Ainsi, nous avons

$$\mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\tau_b^{(0)}} e^{-qt} u_b(X_t^b) dt \right] = S \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\kappa_b^{(0)}} e^{-qt} dt \right],$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\kappa_b^{(0)}} e^{-qt} dt \right] &= \mathbb{E}_x \left[ \frac{1}{q} (1 - e^{-q\kappa_b^{(0)}}) \right] \\ &= \frac{1}{q} \left( 1 - \mathbb{E}_x \left[ e^{-q\kappa_b^{(0)}} \right] \right). \end{aligned}$$

Par l'équation (2.6), on a, pour  $x > b$ ,

$$J(x, u_b) = \frac{S}{q} + \left( J(b, u_b) - \frac{S}{q} \right) \frac{H_0^{(q)}(x)}{H_0^{(q)}(b)}.$$

Nous pouvons donc conclure que

$$J(x, u_b) = \begin{cases} \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(b)} J(b, u_b), & 0 \leq x < b, \\ \frac{S}{q} + \left( J(b, u_b) - \frac{S}{q} \right) \frac{H_0^{(q)}(x)}{H_0^{(q)}(b)}, & x > b. \end{cases}$$

Le processus approximatif donné à l'équation (2.20) reste valide lorsque  $K = 0$  et donc l'équation (2.21) devient

$$\begin{aligned} \Phi^n(b) &= \mathbb{E}_b \left[ \int_0^{\sigma^n} e^{-qt} dL_t^{(n)} \right] \\ &= S \mathbb{E}_b \left[ \int_0^{\tau_{b-\frac{1}{n}}^{(0)}} e^{-qt} dt \mathbb{I}_{\{\tau_{b-\frac{1}{n}}^{(0)} < \sigma^n\}} \right] + \mathbb{E}_b \left[ \int_{\tau_{b-\frac{1}{n}}^{(0)}}^{\sigma^n} e^{-qt} u_b(X_t^b) dt \mathbb{I}_{\{\tau_{b-\frac{1}{n}}^{(0)} < \sigma^n\}} \right] \\ &= S \mathbb{E}_b \left[ \int_0^{\tau_{b-\frac{1}{n}}^{(0)}} e^{-qt} dt \mathbb{I}_{\{\tau_{b-\frac{1}{n}}^{(0)} < \sigma^n\}} \right] + \mathbb{E}_b \left[ e^{-q\tau_{b-\frac{1}{n}}^{(0)}} \mathbb{I}_{\{\tau_{b-\frac{1}{n}}^{(0)} < \infty\}} \right] \Phi^n \left( b - \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

D'un autre côté, pour  $\Phi^n(b - \frac{1}{n})$ , on se retrouve dans la situation où la valeur initiale se retrouve égale à la barrière. L'équation (2.22) reste donc inchangée et on a

$$\Phi^n\left(b - \frac{1}{n}\right) = \mathbb{E}_{b - \frac{1}{n}} \left[ e^{-q\tau_b^{(0)}} \mathbb{I}_{\{\tau_b^{(0)} < \tau_0^{(0)}\}} \right] \Phi^n(b).$$

En suivant la démarche utilisée pour trouver l'équation (2.23), on trouve

$$\Phi^n(b) = \frac{S \mathbb{E}_b \left[ \int_0^{\tau_{b - \frac{1}{n}}^{(0)}} e^{-qt} dt \mathbb{I}_{\{\tau_{b - \frac{1}{n}}^{(0)} < \sigma^n\}} \right]}{1 - \mathbb{E}_b \left[ e^{-q\tau_{b - \frac{1}{n}}^{(0)}} \mathbb{I}_{\{\tau_{b - \frac{1}{n}}^{(0)} < \infty\}} \right] \mathbb{E}_{b - \frac{1}{n}} \left[ e^{-q\tau_b^{(0)}} \mathbb{I}_{\{\tau_b^{(0)} < \tau_0^{(0)}\}} \right]}. \quad (2.29)$$

On sait que

$$S \mathbb{E}_b \left[ \int_0^{\tau_{b - \frac{1}{n}}^{(0)}} e^{-qt} dt \mathbb{I}_{\{\tau_{b - \frac{1}{n}}^{(0)} < \sigma^n\}} \right] = \frac{S}{q} \left( 1 - \frac{H_0^{(q)}(b)}{H_0^{(q)}(b - \frac{1}{n})} \right).$$

Par l'équation (2.5), nous avons

$$\mathbb{E}_{b - \frac{1}{n}} \left[ e^{-q\tau_b^{(0)}} \mathbb{I}_{\{\tau_b^{(0)} < \tau_0^{(0)}\}} \right] = \frac{W^{(q)}(b - \frac{1}{n})}{W^{(q)}(b)}$$

et, par l'équation (2.6),

$$\mathbb{E}_b \left[ e^{-q\tau_{b - \frac{1}{n}}^{(0)}} \mathbb{I}_{\{\tau_{b - \frac{1}{n}}^{(0)} < \infty\}} \right] = \frac{H_0^{(q)}(b)}{H_0^{(q)}(b - \frac{1}{n})}.$$

En divisant par  $\frac{1}{n}$  et en laissant  $n$  tendre vers l'infini, le numérateur de l'équation (2.29) devient

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{S}{q} \left( 1 - \frac{H_0^{(q)}(b)}{H_0^{(q)}(b - \frac{1}{n})} \right)}{\frac{1}{n}} &= \frac{S}{q} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{H_0^{(q)}(b)}{H_0^{(q)}(b - \frac{1}{n})}}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{-S}{q} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_0^{(q)}(b - \frac{1}{n}) - H_0^{(q)}(b)}{\frac{-1}{n} H_0^{(q)}(b - \frac{1}{n})} \\ &= \frac{-S H_0^{(q)'}(b)}{q H_0^{(q)}(b)}. \end{aligned}$$

Similairement, on trouve pour le dénominateur de l'équation (2.29)

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{W^{(q)}(b - \frac{1}{n})}{W^{(q)}(b)} \frac{H_0^{(q)}(b)}{H_0^{(q)}(b - \frac{1}{n})}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W^{(q)}(b)H_0^{(q)}(b - \frac{1}{n}) - W^{(q)}(b - \frac{1}{n})H_0^{(q)}(b)}{\frac{1}{n}W^{(q)}(b)H_0^{(q)}(b - \frac{1}{n})} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W^{(q)}(b - \frac{1}{n})H_0^{(q)}(b) - W^{(q)}(b)H_0^{(q)}(b - \frac{1}{n}) + W^{(q)}(b)H_0^{(q)}(b) - W^{(q)}(b)H_0^{(q)}(b)}{\frac{-1}{n}W^{(q)}(b)H_0^{(q)}(b - \frac{1}{n})} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[ W^{(q)}(b - \frac{1}{n})H_0^{(q)}(b) - W^{(q)}(b)H_0^{(q)}(b) \right] - \left[ W^{(q)}(b)H_0^{(q)}(b - \frac{1}{n}) - W^{(q)}(b)H_0^{(q)}(b) \right]}{\frac{-1}{n}W^{(q)}(b)H_0^{(q)}(b - \frac{1}{n})} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_0^{(q)}(b) \left[ W^{(q)}(b - \frac{1}{n}) - W^{(q)}(b) \right]}{\frac{-1}{n}W^{(q)}(b)H_0^{(q)}(b - \frac{1}{n})} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W^{(q)}(b) \left[ H_0^{(q)}(b - \frac{1}{n}) - H_0^{(q)}(b) \right]}{\frac{-1}{n}W^{(q)}(b)H_0^{(q)}(b - \frac{1}{n})} \\
&= \frac{W^{(q)'}(b)}{W^{(q)}(b)} - \frac{H_0^{(q)'}(b)}{H_0^{(q)}(b)}.
\end{aligned}$$

On retrouve alors la limite de l'équation (2.23)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n(b) = \frac{\frac{-S}{q} \frac{H_0^{(q)'}(b)}{H_0^{(q)}(b)}}{\frac{W^{(q)'}(b)}{W^{(q)}(b)} - \frac{H_0^{(q)'}(b)}{H_0^{(q)}(b)}}.$$

Nous avons alors que la fonction de performance est donnée par

$$J(x, u_b) = \begin{cases} \frac{-S}{q} P_b W^{(q)}(x), & 0 \leq x \leq b, \\ \frac{S}{q} \left( 1 - Q_b H_0^{(q)}(x) \right), & x > b, \end{cases} \quad (2.30)$$

où

$$P_b = \frac{H_0^{(q)'}(b)}{W^{(q)'}(b)H_0^{(q)}(b) - W^{(q)}(b)H_0^{(q)'}(b)}$$

et

$$Q_b = \frac{W^{(q)'}(b)}{W^{(q)'}(b)H_0^{(q)}(b) - W^{(q)}(b)H_0^{(q)'}(b)}.$$

Tout comme à la Section 2.3, en prévision du Lemme de vérification (Lemme 1.1.1), nous devons vérifier que la fonction  $J(x, u_b)$  est deux fois continûment dérivables. Nous savons que  $J(x, u_b)$  est continue et deux fois continûment dérivables

sur  $(0, \infty) \setminus \{b\}$ . Pour nos besoins, il est suffisant de montrer que

$$J''(b, u_b) = \lim_{x \rightarrow b^-} J''(x, u_b) = \lim_{x \rightarrow b^+} J''(x, u_b).$$

D'après l'équation (2.30),

$$J''(x, u_b) = \begin{cases} \frac{-S}{q} P_b W^{(q)''}(x), & 0 < x < b \\ \frac{-S}{q} Q_b H_0^{(q)''}(x), & x > b. \end{cases}$$

Puisque  $W^{(q)}$  et  $H_0^{(q)}$  sont toutes les deux  $C^2$ , on voit que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} J''(x, u_b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{-S}{q} P_b W^{(q)''}(x) = \frac{-S}{q} P_b W^{(q)''}(b).$$

et

$$\lim_{x \rightarrow b^+} J''(x, u_b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{-S}{q} Q_b H_0^{(q)''}(x) = \frac{-S}{q} Q_b H_0^{(q)''}(b).$$

La valeur de la barrière optimale  $b^*$  est donc la solution à l'équation

$$H_0^{(q)''}(b) = \frac{P_b}{Q_b} W^{(q)''}(b). \quad (2.31)$$

Puisque la fonction  $W^{(q)}$  satisfait à l'équation différentielle ordinaire (2.2), nous pouvons écrire

$$W^{(q)''}(x) = \frac{2}{\sigma^2} \left( qW^{(q)}(x) - \mu W^{(q)'}(x) \right).$$

De plus, la fonction  $H_0^{(q)}(x)$  satisfait à l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{\sigma^2}{2} g''(x) + (\mu - S)g'(x) - qg(x) = 0.$$

Nous pouvons déduire que  $H_0^{(q)}(x)$  satisfait à l'équation différentielle ordinaire (2.2) avec  $K = 0$ . Nous avons aussi

$$H_0^{(q)''}(x) = \frac{2}{\sigma^2} \left( (S - \mu)H_0^{(q)'}(x) + qH_0^{(q)}(x) \right).$$

Alors, l'équation (2.31) peut être réécrite de la façon suivante :

$$qH_0^{(q)}(b) - (\mu - S)H_0^{(q)'}(b) = \frac{P_b}{Q_b} \left( qW^{(q)}(b) - \mu W^{(q)'}(b) \right).$$

En remplaçant les valeurs de  $P_b$  et  $Q_b$  par leur expression respective, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{P_b}{Q_b} &= \frac{H_0^{(q)'}(b)}{W^{(q)'}(b)H_0^{(q)}(b) - W^{(q)}(b)H_0^{(q)'}(b)} \left( \frac{W^{(q)'}(b)}{W^{(q)'}(b)H_0^{(q)}(b) - W^{(q)}(b)H_0^{(q)'}(b)} \right)^{-1} \\ &= \frac{H_0^{(q)'}(b)}{W^{(q)'}(b)}. \end{aligned}$$

L'équation (2.31) est donc équivalente à

$$W^{(q)'}(b) \left( qH_0^{(q)}(b) - (\mu - S)H_0^{(q)'}(b) \right) = H_0^{(q)'}(b) \left( qW^{(q)}(b) - \mu W^{(q)'}(b) \right).$$

En simplifiant, on obtient

$$\frac{S}{q} = \frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)'}(b)} - \frac{H_0^{(q)}(b)}{H_0^{(q)'}(b)}. \quad (2.32)$$

Puisque

$$\frac{W^{(q)}(b)}{W^{(q)'}(b)} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} \coth \left( \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2} b \right) - \mu} = \frac{\sigma^2}{\Delta \sigma^2 \coth(\Delta b) - \mu}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{H_0^{(q)}(b)}{H_0^{(q)'}(b)} &= \frac{e^{-\frac{1}{\sigma^2} \left( (\mu - S) + \sqrt{(\mu - S)^2 + 2q\sigma^2} \right) b}}{-\frac{1}{\sigma^2} \left( (\mu - S) + \sqrt{(\mu - S)^2 + 2q\sigma^2} \right) e^{-\frac{1}{\sigma^2} \left( (\mu - S) + \sqrt{(\mu - S)^2 + 2q\sigma^2} \right) b}} \\ &= \frac{1}{-\frac{1}{\sigma^2} \left( (\mu - S) + \sqrt{(\mu - S)^2 + 2q\sigma^2} \right)} \\ &= \frac{1}{\frac{(S - \mu)}{\sigma^2} - \frac{\sqrt{(\mu - S)^2 + 2q\sigma^2}}{\sigma^2}} \\ &= \frac{\sigma^2}{(S - \mu) - \sigma^2 \Delta_S}, \end{aligned}$$

où

$$\Delta = \frac{\sqrt{\mu^2 + 2q\sigma^2}}{\sigma^2}$$

et

$$\Delta_S = \frac{\sqrt{(\mu - S)^2 + 2q\sigma^2}}{\sigma^2},$$

l'équation (2.32) peut se réécrire

$$\frac{S}{q} = \frac{\sigma^2}{\Delta\sigma^2 \coth(\Delta b) - \mu} - \frac{\sigma^2}{(S - \mu) - \sigma^2\Delta_S}.$$

En simplifiant, nous retrouvons la valeur optimale  $b_S^*$  du cas  $f(x) = S$  obtenue par (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995), tel que  $b$  satisfait à l'équation

$$\begin{aligned} \tanh(\Delta b) &= \frac{\Delta\sigma^2 S(S - \mu) - S\Delta\Delta_S\sigma^4 + q\Delta\sigma^4}{\sigma^2 q(S - \mu) - q\Delta_S\sigma^4 + q\mu\sigma^2 + \mu S(S - \mu) - S\Delta_S\sigma^2\mu} \\ &= \frac{\Delta S(S - \mu) - S\Delta\Delta_S\sigma^2 + q\Delta\sigma^2}{\frac{\mu S(S - \mu)}{\sigma^2} - S\Delta_S\mu + q\mu + q(S - \mu) - q\Delta_S\sigma^2} \\ &= \frac{\Delta\sigma^2 \left( \frac{S(S - \mu)}{\sigma^2} - S\Delta_S + q \right)}{\mu \left( \frac{S(S - \mu)}{\sigma^2} - S\Delta_S + q \right) + q(S - \mu) - q\sigma^2\Delta_S} \\ &= \frac{\Delta\sigma^2 \left( S \left( \frac{S - \mu}{\sigma^2} - \Delta_S \right) + q \right)}{\mu \left( S \left( \frac{S - \mu}{\sigma^2} - \Delta_S \right) + q \right) + q\sigma^2 \left( \frac{S - \mu}{\sigma^2} - \Delta_S \right)} \\ &= \frac{\Delta\sigma^2 (S\rho_2 + q)}{\mu(S\rho_2 + q) + \sigma^2\rho_2q}, \end{aligned}$$

où

$$\rho_2 = \frac{S - \mu}{\sigma^2} - \Delta_S = \frac{S - \mu}{\sigma^2} - \frac{\sqrt{(\mu - S)^2 + 2q\sigma^2}}{\sigma^2}. \quad \square$$

**Remarque 2.6.1** *L'expression pour la barrière optimale  $b_S^*$  donnée par (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995) contient une faute de frappe que nous avons corrigée pour faire la comparaison ci-dessus.*

Par les deux corollaires donnés, nous pouvons confirmer que la stratégie optimale que nous avons trouvée généralise bien celles trouvées par (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995) et (Renaud et Simard, 2021).

## CHAPITRE III

### ANALYSES NUMÉRIQUES

Dans ce chapitre, nous examinons de plus près les résultats trouvés au Chapitre 2. Nous analysons les effets que le choix des paramètres  $S$  et  $K$  ont sur la valeur de la barrière optimale en simulant les processus numériquement sur  $\mathbb{R}$  avec le schéma de discrétisation d'Euler pour diffusions. L'optimisation étant sur l'espérance, les figures de trajectoires sont utilisées à titre d'exemples de trajectoires typiques et donc sont considérées comme illustration seulement. Finalement, nous considérons l'applicabilité de notre solution.

#### 3.1 Optimalité de la barrière

Rappelons que l'enjeu d'un problème de maximisation des dividendes est de trouver un équilibre entre la survie de l'entreprise et les paiements aux actionnaires. Plus précisément, nous cherchons à exploiter le surplus d'une firme afin de maximiser la valeur présente des dividendes versés aux actionnaires pour la durée de vie de cette firme. À cet effet, nous considérons, à la Figure 3.1, trois valeurs de barrière différentes. Lorsque la barrière choisie se situe au-dessus de la barrière optimale, nous voyons que la firme atteint la ruine plus tard, mais au détriment de la valeur présente des dividendes distribués. En contraste, lorsque la barrière choisie se situe sous la barrière optimale, les dividendes distribués trop rapidement

provoquent la faillite de l'entreprise plus tôt.

D'un autre côté, la barrière optimale pourrait être  $b^* = 0$ . En effet, tel que donné au Théorème 2.5.1, si

$$\frac{K\mu + Sq}{q^2} > \frac{-H_{S,K}^{(q)}(0)}{H_{S,K}^{(q)'}(0)},$$

alors la stratégie affine différée au niveau  $b^* > 0$  est optimale. Sinon, si

$$\frac{K\mu + Sq}{q^2} \leq \frac{-H_{S,K}^{(q)}(0)}{H_{S,K}^{(q)'}(0)},$$

alors la stratégie affine avec taux  $S$  et  $K$  est optimale. Nous illustrons cette distinction à la Figure 3.2, où nous effectuons un changement au niveau du facteur d'actualisation  $q$ . Entre autres, la stratégie affine est optimale lorsque le facteur d'actualisation est grand, indiquant qu'il y a un coût important lorsque la distribution de dividendes est différée. De plus, lorsque la stratégie optimale est affine, les actionnaires profitent d'un versement de dividendes continu dès le début, et ce jusqu'à la ruine de la firme. Puisque  $b^* = 0$ , nous nous retrouvons toujours au-dessus de la barrière et donc le processus contrôlé est donné par un processus Ornstein-Uhlenbeck ayant une moyenne asymptotique  $m = \frac{\mu - S}{K}$ .

Lorsque le surplus franchit la barrière optimale par le bas, la firme paie le taux de dividendes déterminé et le surplus oscillera autour de  $m$ . Il conviendrait alors, pour des implémentations plus pratiques, de retarder le paiement de dividendes lorsque le processus franchit la barrière optimale par le bas, afin que les versements de dividendes n'annulent pas toute la croissance du capital (Avanzi et Wong, 2012). En particulier, ce serait préférable d'avoir  $m > b^*$ , ce qui permettrait un paiement de dividendes plus stable et prévisible que si  $m < b^*$ .

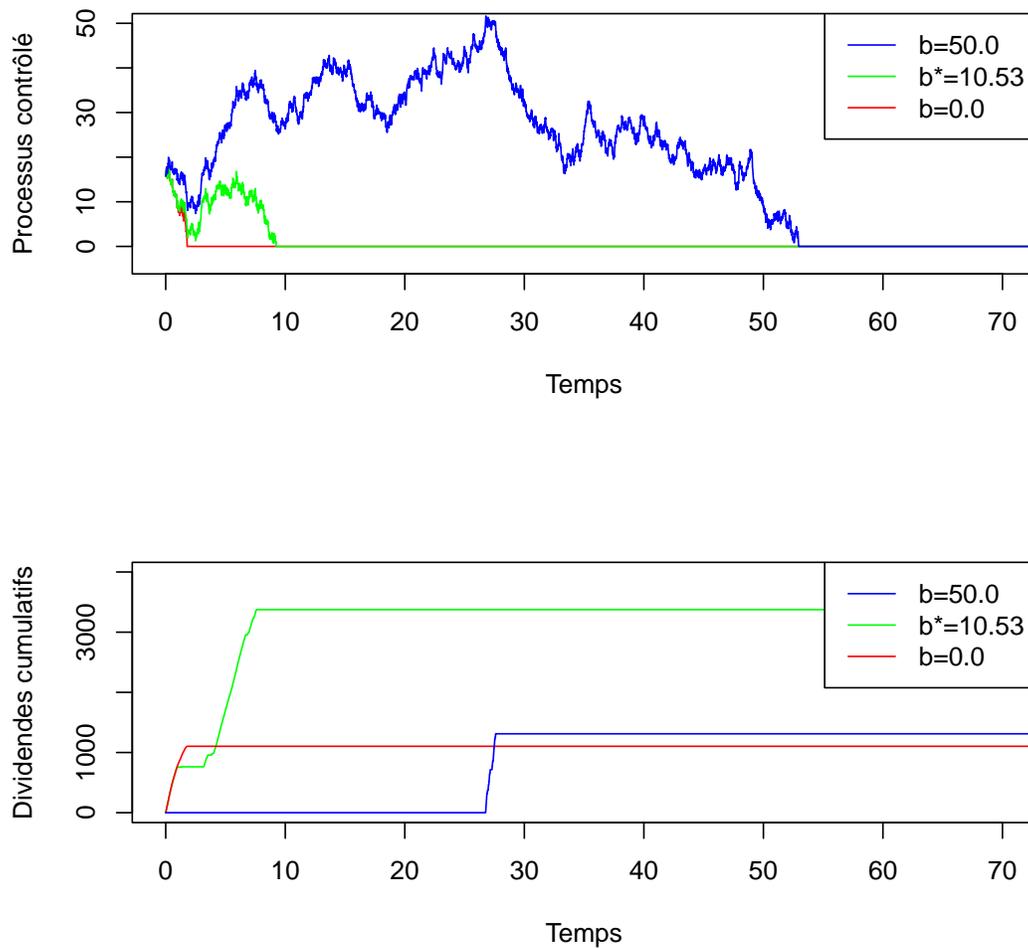


FIGURE 3.1 Graphique du haut : Simulations du processus contrôlé  $X^b$ . Graphique du bas : Simulations des dividendes cumulatifs actualisés pour la stratégie affine ( $b = 0$ ) et les stratégies affines différées ( $b > 0$ ). Paramètres :  $x = 16.0$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\sigma = 4.5$ ,  $q = 0.25$ ,  $K = 0.45$ ,  $S = 0.1$  et barrière optimale  $b^* = 10.53$ . Les niveaux des barrières sous-optimales sont  $b = 0.0$  et  $b = 50.0$ .

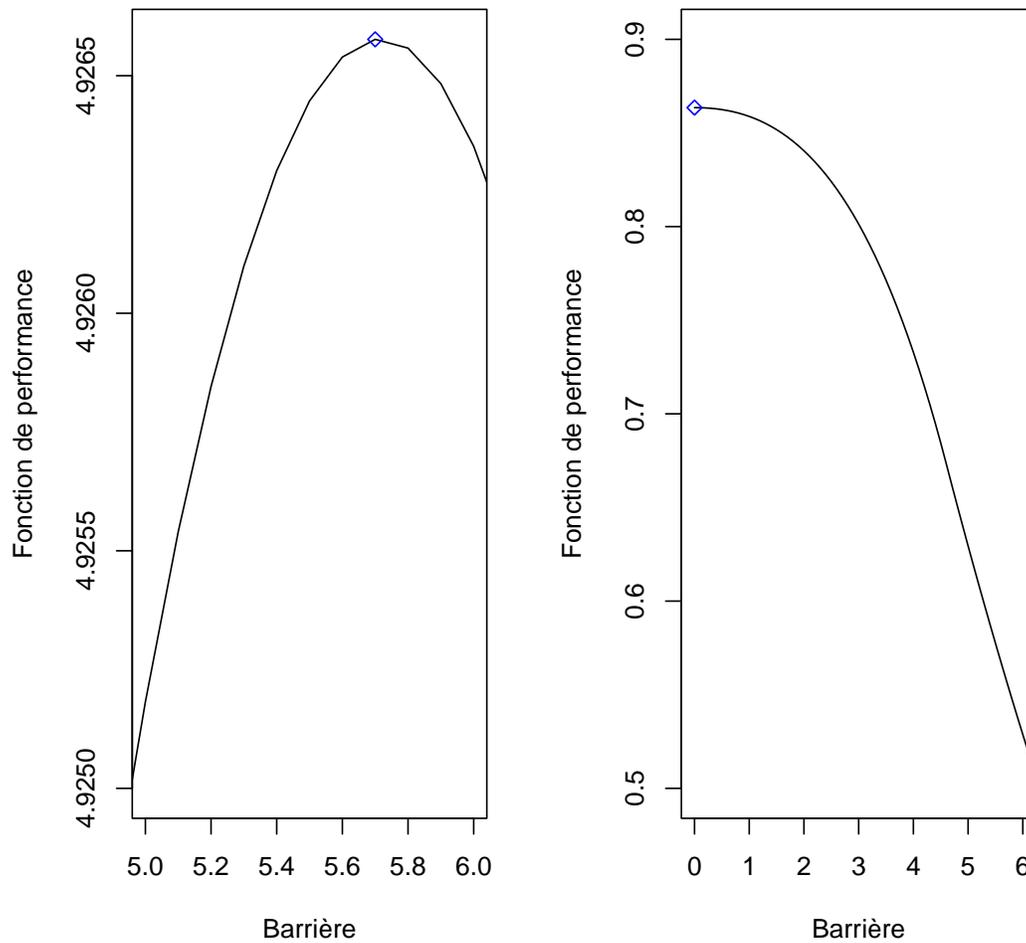


FIGURE 3.2 Fonction de performance  $J(x, u_b)$  en fonction de  $b$ . Le point indique la valeur à la barrière optimale selon l'équation (2.26). Graphique de gauche :  $x = 4.6, \mu = 0.3, \sigma = 4.5, q = 0.025, K = 0.1, S = 0.3$ . Graphique de droite :  $x = 4.6, \mu = 0.3, \sigma = 4.5, q = 0.7, K = 0.1, S = 0.3$ .

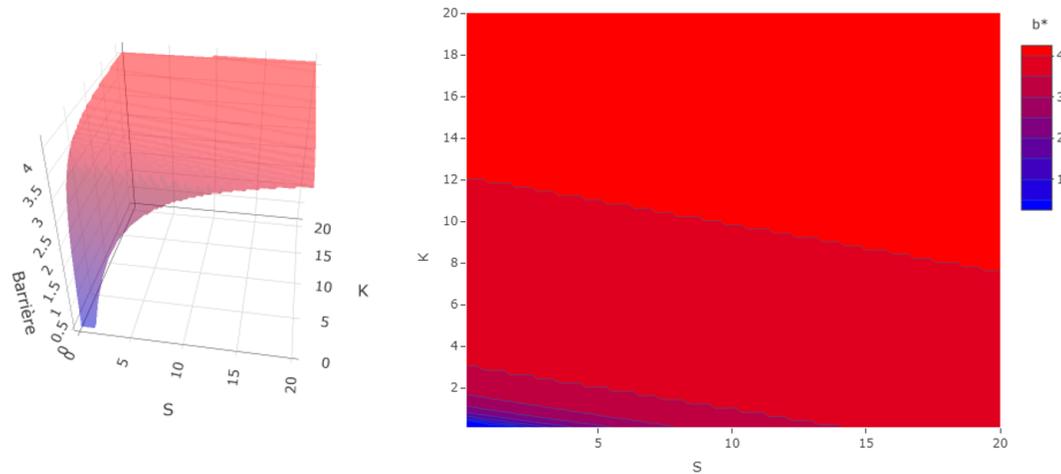


FIGURE 3.3 Valeur de la barrière optimale  $b^*$  en fonction de  $K$  et  $S$ . Paramètres :  $x = 1.0, \mu = 0.3, \sigma = 4.5, q = 0.07$ . Dans ce cas,  $c^* = 4.20$ .

### 3.2 Effet des paramètres $S$ et $K$ sur la valeur $b^*$

Nous voyons à la Figure 3.3 que la barrière optimale semble converger vers  $c^*$  lorsque  $S, K \rightarrow \infty$ . De même,  $J(x, u_{b^*})$  grandit lorsque  $S$  ou  $K$  grandit, tel qu'on le voit à la Figure 3.4. Entre autres, de grandes valeurs de  $K$  et  $S$  entraînent de grandes valeurs de la barrière optimale, qui, à leur tour, entraînent une plus grande valeur de la fonction de performance à ladite barrière optimale. Nous interprétons ceci comme quoi il faut une plus grande réserve de dividendes si les actionnaires exigent que le taux de dividendes soit plus élevé.

D'un point de vue pratique, la Figure 3.4 peut être interprétée de la façon suivante. Si une firme choisit des valeurs de  $S$  et  $K$  élevées, alors les actionnaires devront attendre plus longtemps avant de recevoir des dividendes, le temps d'accumuler une réserve suffisante. Toutefois, les dividendes versés seront alors plus élevés. Si le versement de dividendes est trop élevé, le paiement pousserait le surplus de l'entreprise sous la barrière et, n'ayant plus le stabilisateur  $m$ , le surplus devrait

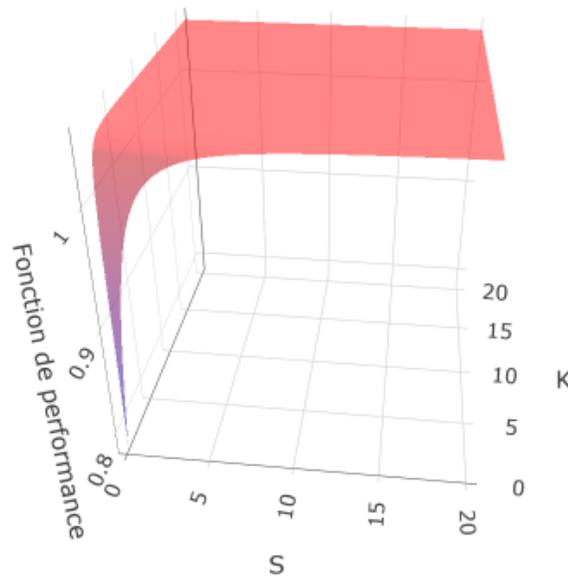


FIGURE 3.4 Fonction de performance  $J(x, u_{b^*})$  en fonction des paramètres  $K$  et  $S$ . Paramètres fixés :  $x = 1.0, \mu = 0.3, \sigma = 4.5, q = 0.07$ .

alors attendre d'être ramené à une valeur supérieure à la barrière pour reprendre le paiement des dividendes. D'un autre côté, si les valeurs de  $S$  et  $K$  sont petites, le versement étant plus petit aussi permettrait au surplus de rester au-dessus de la barrière avec une plus grande probabilité. Dans tous les cas, la valeur optimale de la barrière tient intrinsèquement compte de ces effets. Ainsi, nous pouvons conclure que des valeurs plus élevées des paramètres  $K$  et  $S$  permettent une espérance du cumul de dividendes actualisés plus importants, à condition qu'une barrière optimale soit utilisée.

Toujours en restreignant les valeurs des paramètres  $S, K > 0$ , si  $S \geq \mu$ , alors  $m \leq 0 < b^*$ . Donc, lorsque le processus se trouvera au-dessus de la barrière, il sera attiré par sa moyenne asymptotique et, dans ce cas-ci, aura tendance à aller vers zéro (c.à.d. la ruine). Cette dynamique continuera jusqu'à ce que le processus franchisse la barrière par-dessus. D'un autre côté, sachant que  $c^* < \frac{\mu}{q}$  (Gerber et

Shiu, 2004), nous avons que  $m > b^*$  lorsque

$$c^* < \frac{\mu}{q} \wedge \frac{\mu - S}{K}$$

ou, si et seulement si,

$$(K + q) \left( \frac{W^{(q)}\left(\frac{\mu - S}{K}\right)}{W^{(q)'}\left(\frac{\mu - S}{K}\right)} - \frac{\mu}{q} \right) > q \frac{H_{S,K}^{(q)}\left(\frac{\mu - S}{K}\right)}{H_{S,K}^{(q)'}\left(\frac{\mu - S}{K}\right)}.$$

Dans ce cas, au-dessus de la barrière, le processus aura une tendance vers  $m$  et continuera d'osciller autour de ce niveau jusqu'à ce qu'il soit poussé sous la barrière, comme démontré à la Figure 3.5. Il serait dans l'intérêt des actionnaires d'avoir  $m > b^*$  pour assurer un minimum de stabilité des paiements de dividendes. Nous en faisons l'exemple à la Figure 3.6, où nous comparons la dynamique et le cumul de dividendes actualisés selon des choix de  $S$  et  $K$  pour lesquels  $m$  est plus grand ou plus petit que la valeur de la barrière optimale.

### 3.3 Impact sur la barrière optimale

Selon le problème proposé, nous avons vu que les paramètres  $S$  et  $K$  affectent non seulement la valeur de la barrière optimale  $b^*$  et, à son tour, la valeur de la fonction de performance  $J(x, u_{b^*})$ , mais aussi le niveau de la moyenne asymptotique  $m$ . En effet,  $m$  agit comme un niveau de stabilité et entre en jeu lorsque la firme paie des dividendes à ses actionnaires. Nous avons aussi vu qu'il est possible que la valeur de la barrière optimale soit  $b^* = 0$ . Du point de vue des actionnaires, il serait donc préférable de fixer la valeur des paramètres  $S$  et  $K$  tel que  $b^* = 0$  et  $m > b^*$ , car ils profiteraient d'un versement de dividendes en continu et d'une stabilité des paiements de dividendes (à condition que  $m$  soit à un niveau assez élevé), tels qu'illustrés à la Figure 3.7. Toutefois, nous voyons au Tableau A.1 de l'Annexe A que les actionnaires devraient choisir des valeurs  $S$  et  $K$  assez conservatrices pour pouvoir forcer la valeur de  $b^* = 0$  avec  $m > 0$ . Ils sont ainsi confrontés à devoir

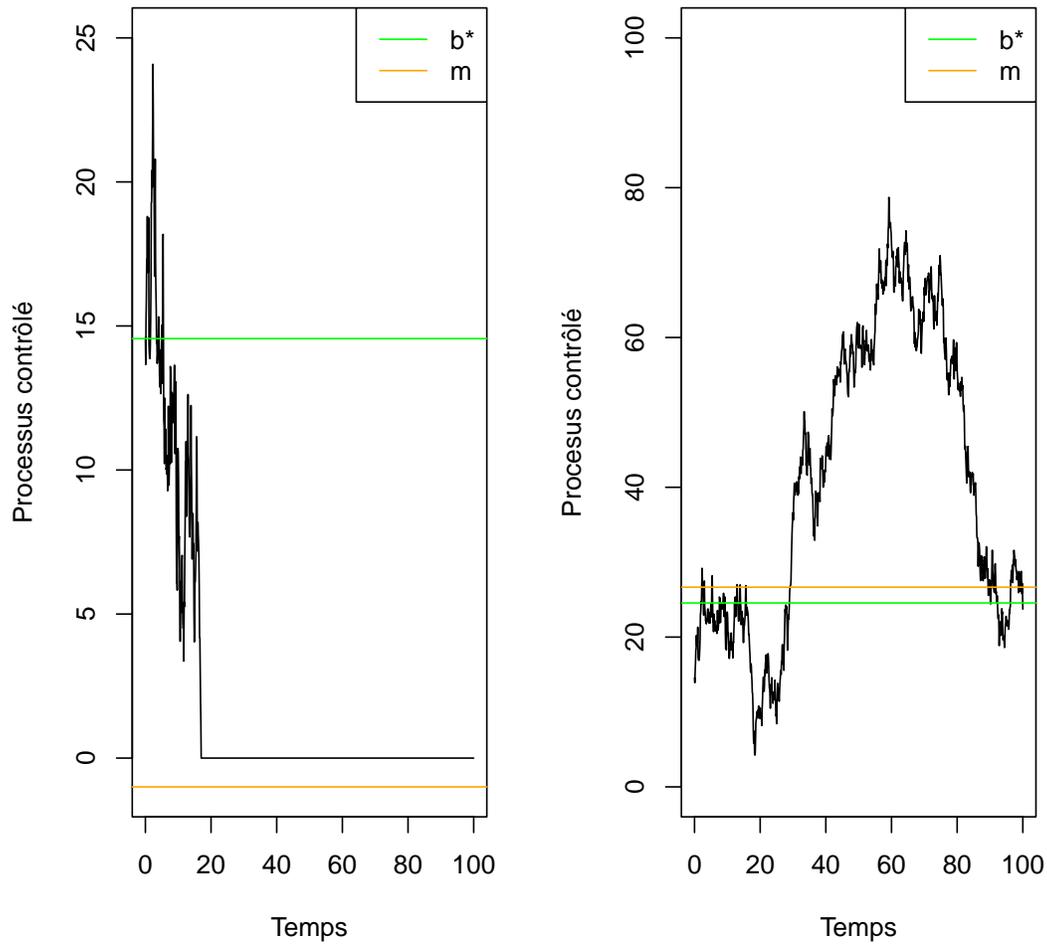


FIGURE 3.5 Simulation du processus contrôlé  $X^{b^*}$  avec variation sur le niveau de la moyenne asymptotique  $m$  par rapport au niveau de la barrière optimale. Graphique de gauche : Simulation du processus contrôlé avec  $\mu - S < Kb^*$  et paramètres  $x = 14.6, \mu = 0.3, \sigma = 4.5, q = 0.025, K = 0.1, S = 0.4$ . Graphique de droite : Simulation du processus contrôlé avec  $\mu - S > Kb^*$  et paramètres  $x = 14.6, \mu = 1.0, \sigma = 4.5, q = 0.025, K = 0.03, S = 0.2$ .

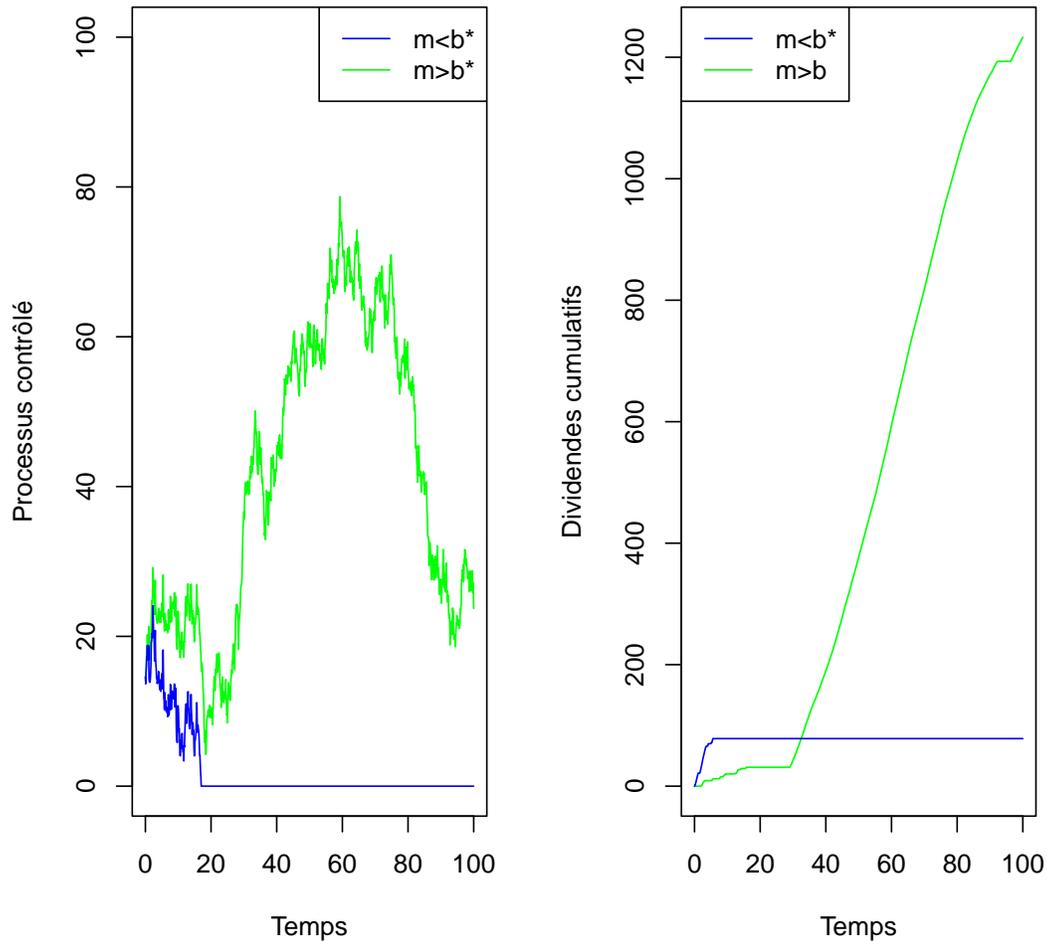


FIGURE 3.6 Simulation du processus contrôlé  $X^{b^*}$  avec variation sur le niveau de la moyenne asymptotique  $m$  par rapport au niveau de la barrière optimale. Graphique de gauche : comparaison de la dynamique du processus contrôlé. Graphique de droite : comparaison des dividendes cumulatifs actualisés. Paramètres du processus contrôlé avec  $m < b^*$  :  $x = 4.6, \mu = 0.3, \sigma = 4.5, q = 0.025, K = 0.1, S = 0.4$ . Paramètres du processus contrôlé avec  $m > b^*$  :  $x = 4.6, \mu = 1.0, \sigma = 4.5, q = 0.025, K = 0.05, S = 0.2$ .

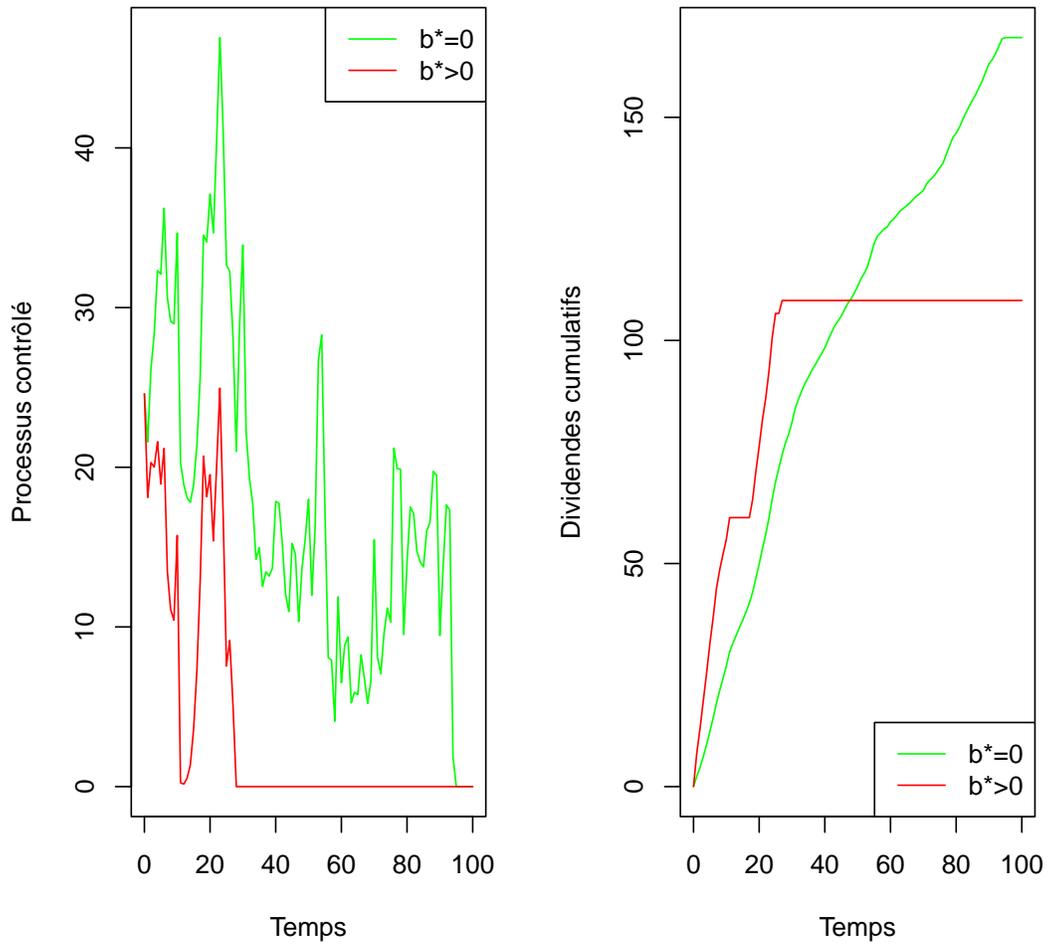


FIGURE 3.7 Simulation du processus contrôlé avec variation de  $b^*$  selon les paramètres  $S$  et  $K$ . Graphique de gauche : Simulation du processus contrôlé  $X^{b^*}$ . Graphique de droite : Simulation des dividendes cumulatifs actualisés pour la stratégie barrière à la barrière optimale. Paramètres fixés :  $x = 24.6$ ,  $\mu = 1.0$ ,  $\sigma = 4.5$ ,  $q = 0.5$ . La valeur de la barrière optimale  $b^* > 0$  est de 7.73.

faire un compromis sur la maximisation de l'espérance du cumul de dividendes s'ils veulent un taux de dividendes versé en continu.

Nous voyons à la Figure 3.8 que la barrière optimale  $b^*$  dépend aussi des paramètres  $\sigma, \mu, q$ . Tel que mentionné ci-dessus, la barrière optimale tient compte de tous les éléments ayant effet sur le surplus de la firme. Il n'est donc pas surprenant que, lorsque la volatilité et le taux d'escompte sont grands, la barrière optimale est petite. La volatilité étant un indicateur de l'ampleur de la fluctuation, il serait naturel que lorsqu'elle est très grande, les actionnaires veuillent encaisser les dividendes le plus tôt possible, car la ruine peut survenir plus rapidement. De même, le facteur d'actualisation reflétant le coût advenant la distribution des dividendes différée, il n'est pas étonnant que la stratégie optimale soit de récupérer le paiement le plus tôt possible avec une faible barrière lorsque  $q$  est grand. En contraste, la barrière optimale en fonction de  $\mu$  est croissante. Ceci nous indique que les actionnaires auraient plutôt intérêt à verser le surplus en dividende à un niveau plus bas lorsque la santé de la firme, représentée par  $\mu$ , est minime.

### 3.4 Comparaison des solutions

Finalement, nous comparons notre problème avec ceux étudiés par (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995) et (Renaud et Simard, 2021) en comparant les dividendes cumulatifs actualisés à la Figure 3.9. Chaque point sur le graphique représente la valeur actualisée des dividendes cumulatifs au dernier temps pour la simulation en question. Nous voyons que le cumul de dividendes pour les différentes bornes semble avoir les mêmes distributions. En contraste, nous pouvons voir à la Figure 3.10 que, pourvu qu'une barrière optimale soit utilisée, l'espérance du cumul des dividendes lorsque la stratégie est bornée par une constante  $0 < S < 1$  sera minime en comparaison à l'espérance du cumul de dividendes

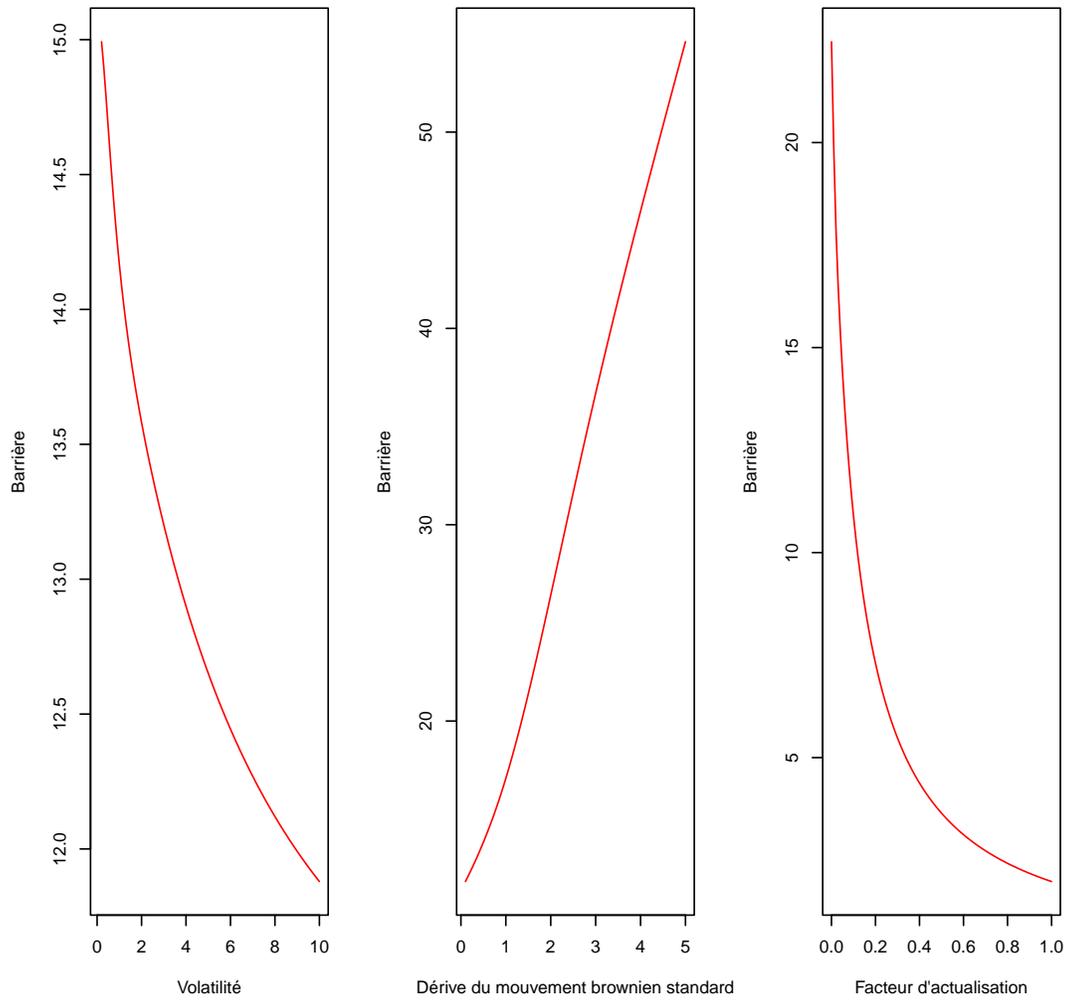


FIGURE 3.8 Valeur de la barrière optimale  $b^*$  en fonction de  $\sigma, \mu, q$ , de gauche à droite. Paramètres :  $x = 17.5, \mu = 0.3, \sigma = 4.5, q = 0.07, K = 0.1, S = 0.4$ .

lorsque la stratégie est borné par une fonction affine ou affine différée. En particulier, les stratégies bornées par des fonctions dépendantes du processus contrôlé, en comparaison à celle bornée par une constante, offrent un meilleur versement de dividendes lorsque  $0 < S < 1$ .

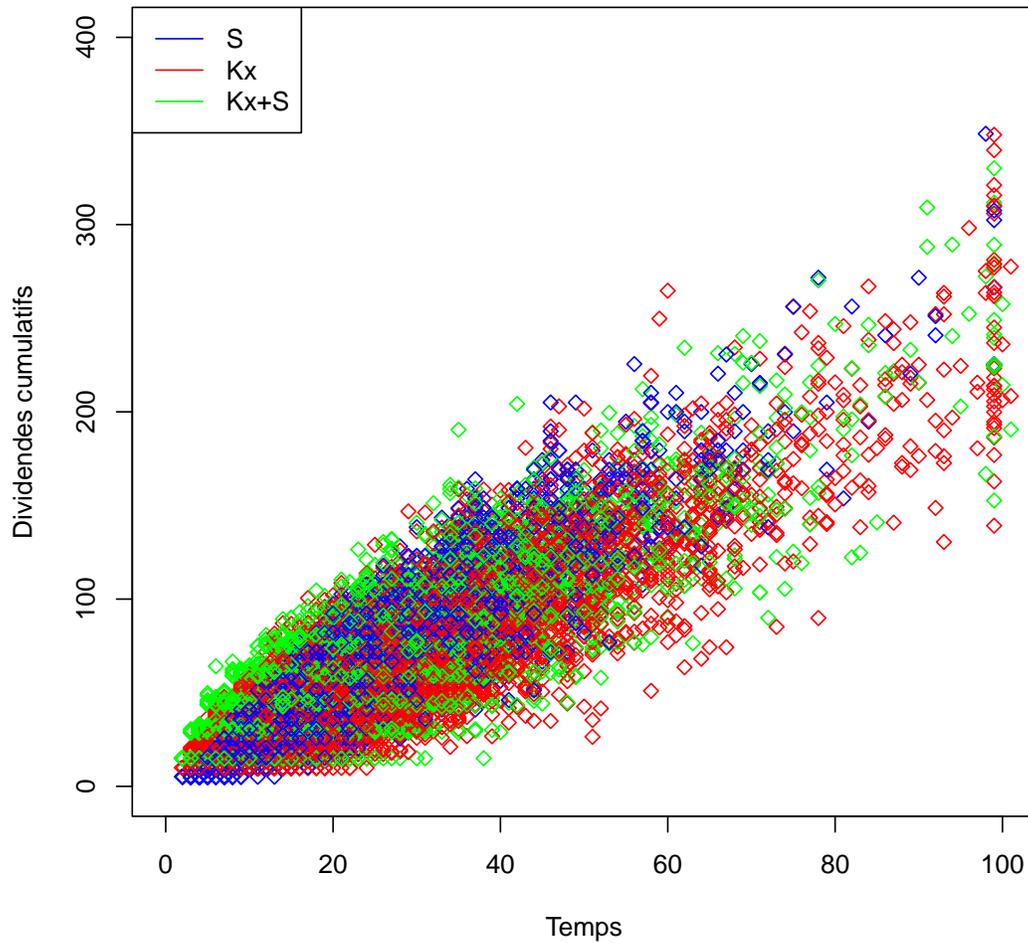


FIGURE 3.9 Simulation Monte-Carlo des dividendes cumulatifs actualisés pour la stratégie barrière à la barrière optimale avec stratégie bornée par les 3 cas de fonctions linéaires continues. Paramètres :  $x = 17.5$ ,  $\mu = 1.0$ ,  $\sigma = 4.5$ ,  $q = 0.25$ ,  $K = 0.45$ ,  $S = 4.1$ . Nombre de simulations : 10000.

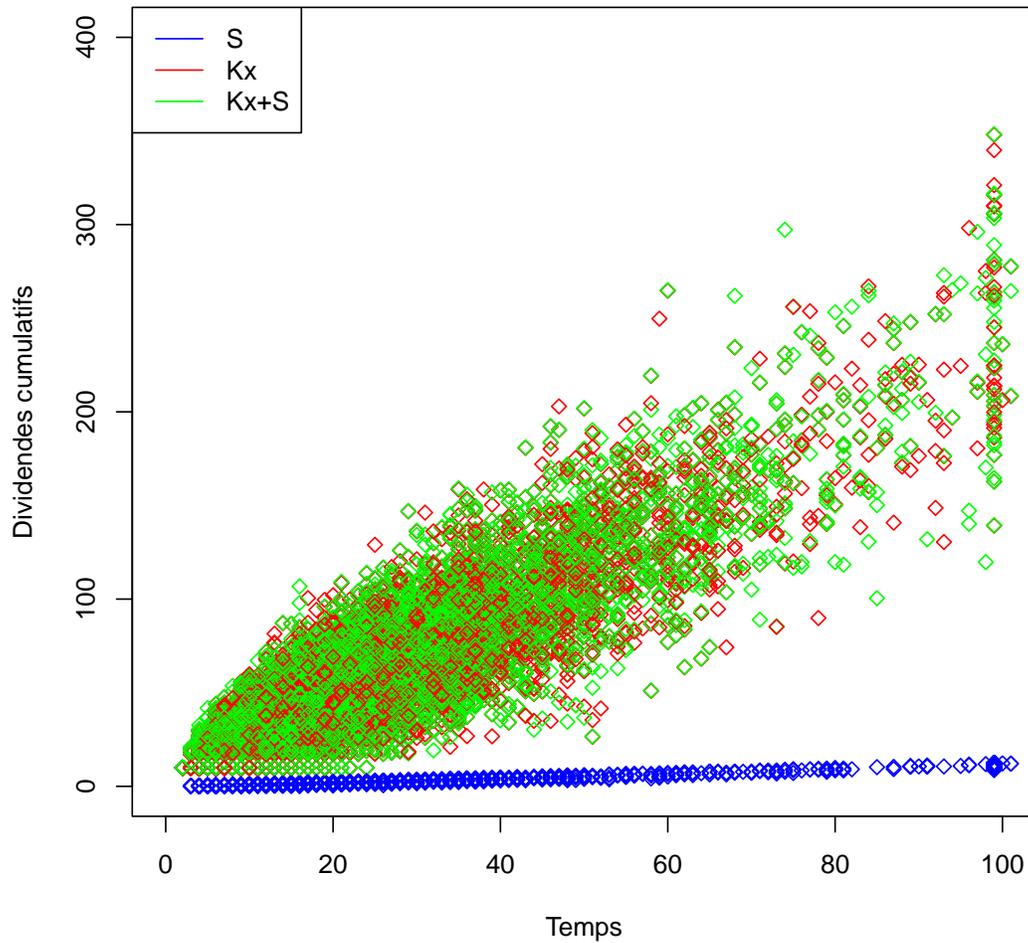


FIGURE 3.10 Simulation Monte-Carlo des dividendes cumulatifs actualisés pour la stratégie barrière à la barrière optimale avec stratégie bornée par les 3 cas de fonctions linéaires continues. Paramètres :  $x = 17.5$ ,  $\mu = 1.0$ ,  $\sigma = 4.5$ ,  $q = 0.25$ ,  $K = 0.45$ ,  $S = 0.10$ . Nombre de simulations : 10000.

## CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons repris les problèmes de contrôle stochastique étudiés par (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995) et (Renaud et Simard, 2021). Nous les avons regroupés en généralisant la borne supérieure sur le taux de paiement par  $f(x) = Kx + S$ . Tout comme ces auteurs, nous trouvons que la solution au problème est donnée par une stratégie de type « bang-bang ». Nous avons donné un résultat permettant de trouver la barrière optimale et démontré que notre solution comprend bien les solutions des sous-problèmes, où la barrière optimale de notre problème  $b_{S,K}^*$  se réduit à celle de (Jeanblanc-Picqué et Shiryaev, 1995) lorsque  $K = 0$  et à celle de (Renaud et Simard, 2021) lorsque  $S = 0$ . Tout comme pour (Renaud et Simard, 2021), nous avons que le processus contrôlé optimal se comporte comme un processus Ornstein-Uhlenbeck lorsqu'il est au-dessus de la barrière. Grâce à cela, les actionnaires bénéficient d'une stabilité de distribution de dividendes, pourvu qu'ils choisissent bien les valeurs de  $S$  et  $K$ . De plus, notre solution a été simulée et analysée numériquement dans divers contextes, à travers lesquels nous avons conclu qu'un choix de  $S$  et  $K$  élevés permet un plus grand cumul de dividendes, qu'il est possible de forcer  $b^* = 0$  via un choix judicieux de  $S$  et  $K$ , et que le choix de la famille de stratégies admissibles affines est impacté par la valeur du paramètre  $S$ .

Du point de vue des actionnaires, nous avons constaté qu'un choix de  $S$  et  $K$  tel que la moyenne asymptotique  $m > b^*$  pourrait porter avantage, car il permettrait au processus contrôlé de rester autour de  $m$  et, ainsi, rester au-dessus de la barrière. En fait, une façon d'éviter les arrêts de paiements est de forcer  $b^* = 0$  via le choix de  $S$  et  $K$ . Nous avons postulé qu'il était possible de trouver

les combinaisons  $(S, K)$  telles que  $b^* = 0$ . Nous avons constaté que, parmi ces choix, il pourrait être également important que les choix aboutissent à un niveau de stabilité  $m \gg 0$ , qui semble être possible que lorsque les valeurs de  $S$  et  $K$  sont petites. Cette préférence des actionnaires serait alors en conflit avec leur but de maximiser les dividendes, car nous avons constaté que la fonction valeur est plus élevée lorsque  $S$  et  $K$  sont élevés.

Notre solution ne pouvant pas être implémentée en pratique nous indique une difficulté des problèmes d'optimisation de stratégies de distribution de dividendes connue et importante (Avanzi *et al.*, 2016). En effet, notre solution n'est pas applicable, car elle repose sur la continuité du versement de dividendes. Ainsi, des débuts et arrêts infinis du paiement de dividendes peuvent survenir autour du niveau de la barrière optimale  $b^* > 0$  sur un intervalle de temps arbitrairement petit. De plus, même si nous pouvons adresser ce problème en forçant  $b^* = 0$  par le choix des paramètres  $S$  et  $K$  tels que nous l'avons montré, cette façon de procéder ne résout pas le noyau du problème pour les actionnaires. Ceux-ci veulent une solution pratique prenant en compte leurs préférences. Ainsi, une autre limitation à notre solution est que celle-ci ne considère pas le niveau d'aversion au risque des actionnaires. Des recherches supplémentaires sont nécessaires pour étudier l'incorporation d'autres préférences des actionnaires au modèle. Entre autres, retrouverons-nous une stratégie similaire à celle que nous avons trouvé si nous maximisons l'utilité au lieu des dividendes? Que choisirait un investisseur entre recevoir des dividendes en continu ou maximiser les dividendes s'il est averse au risque?

## APPENDICE A

TABLEAU A.1: Variations sur les valeurs des paramètres  
 $\sigma, q, \mu, S, K, m$  forçant  $b^* = 0$ .

$\sigma$	$q$	$\mu$	$S$	$K$	$m$
2.00	0.07	0.10	2.80	0.10	-27.00
2.00	0.07	0.10	2.80	0.20	-13.50
2.00	0.07	0.10	2.80	0.45	-6.00
2.00	0.07	0.10	5.00	0.10	-49.00
2.00	0.07	0.10	5.00	0.20	-24.50
2.00	0.07	0.10	5.00	0.45	-10.89
2.00	0.07	1.00	0.10	0.10	9.00
2.00	0.07	1.00	0.10	0.20	4.50
2.00	0.07	1.00	0.10	0.45	2.00
2.00	0.07	1.00	2.80	0.10	-18.00
2.00	0.07	1.00	2.80	0.20	-9.00
2.00	0.07	1.00	2.80	0.45	-4.00
2.00	0.07	1.00	5.00	0.10	-40.00
2.00	0.07	1.00	5.00	0.20	-20.00
2.00	0.07	1.00	5.00	0.45	-8.89

2.00	0.07	10.00	0.10	0.10	99.00
2.00	0.07	10.00	0.10	0.20	49.50
2.00	0.07	10.00	0.10	0.45	22.00
2.00	0.07	10.00	2.80	0.10	72.00
2.00	0.07	10.00	2.80	0.20	36.00
2.00	0.07	10.00	2.80	0.45	16.00
2.00	0.07	10.00	5.00	0.10	50.00
2.00	0.07	10.00	5.00	0.20	25.00
2.00	0.07	10.00	5.00	0.45	11.11
2.00	0.25	0.10	5.00	0.10	-49.00
2.00	0.25	0.10	5.00	0.20	-24.50
2.00	0.25	0.10	5.00	0.45	-10.89
2.00	0.25	1.00	0.10	0.10	9.00
2.00	0.25	1.00	0.10	0.20	4.50
2.00	0.25	1.00	0.10	0.45	2.00
2.00	0.25	1.00	2.80	0.10	-18.00
2.00	0.25	1.00	2.80	0.20	-9.00
2.00	0.25	1.00	2.80	0.45	-4.00
2.00	0.25	1.00	5.00	0.10	-40.00
2.00	0.25	1.00	5.00	0.20	-20.00
2.00	0.25	1.00	5.00	0.45	-8.89
2.00	0.25	10.00	0.10	0.10	99.00
2.00	0.25	10.00	0.10	0.20	49.50
2.00	0.25	10.00	0.10	0.45	22.00
2.00	0.25	10.00	2.80	0.10	72.00
2.00	0.25	10.00	2.80	0.20	36.00

2.00	0.25	10.00	2.80	0.45	16.00
2.00	0.25	10.00	5.00	0.10	50.00
2.00	0.25	10.00	5.00	0.20	25.00
2.00	0.25	10.00	5.00	0.45	11.11
2.00	0.90	1.00	2.80	0.10	-18.00
2.00	0.90	1.00	2.80	0.20	-9.00
2.00	0.90	1.00	2.80	0.45	-4.00
2.00	0.90	1.00	5.00	0.10	-40.00
2.00	0.90	1.00	5.00	0.20	-20.00
2.00	0.90	1.00	5.00	0.45	-8.89
2.00	0.90	10.00	0.10	0.10	99.00
2.00	0.90	10.00	0.10	0.20	49.50
2.00	0.90	10.00	0.10	0.45	22.00
2.00	0.90	10.00	2.80	0.10	72.00
2.00	0.90	10.00	2.80	0.20	36.00
2.00	0.90	10.00	2.80	0.45	16.00
2.00	0.90	10.00	5.00	0.10	50.00
2.00	0.90	10.00	5.00	0.20	25.00
2.00	0.90	10.00	5.00	0.45	11.11
4.50	0.07	1.00	0.10	0.10	9.00
4.50	0.07	1.00	0.10	0.20	4.50
4.50	0.07	1.00	0.10	0.45	2.00
4.50	0.07	1.00	2.80	0.10	-18.00
4.50	0.07	1.00	2.80	0.20	-9.00
4.50	0.07	1.00	2.80	0.45	-4.00
4.50	0.07	1.00	5.00	0.10	-40.00

4.50	0.07	1.00	5.00	0.20	-20.00
4.50	0.07	1.00	5.00	0.45	-8.89
4.50	0.07	10.00	0.10	0.10	99.00
4.50	0.07	10.00	0.10	0.20	49.50
4.50	0.07	10.00	0.10	0.45	22.00
4.50	0.07	10.00	2.80	0.10	72.00
4.50	0.07	10.00	2.80	0.20	36.00
4.50	0.07	10.00	2.80	0.45	16.00
4.50	0.07	10.00	5.00	0.10	50.00
4.50	0.07	10.00	5.00	0.20	25.00
4.50	0.07	10.00	5.00	0.45	11.11
4.50	0.25	1.00	0.10	0.45	2.00
4.50	0.25	1.00	2.80	0.10	-18.00
4.50	0.25	1.00	2.80	0.20	-9.00
4.50	0.25	1.00	2.80	0.45	-4.00
4.50	0.25	1.00	5.00	0.10	-40.00
4.50	0.25	1.00	5.00	0.20	-20.00
4.50	0.25	1.00	5.00	0.45	-8.89
4.50	0.25	10.00	0.10	0.10	99.00
4.50	0.25	10.00	0.10	0.20	49.50
4.50	0.25	10.00	0.10	0.45	22.00
4.50	0.25	10.00	2.80	0.10	72.00
4.50	0.25	10.00	2.80	0.20	36.00
4.50	0.25	10.00	2.80	0.45	16.00
4.50	0.25	10.00	5.00	0.10	50.00
4.50	0.25	10.00	5.00	0.20	25.00

4.50	0.25	10.00	5.00	0.45	11.11
4.50	0.90	10.00	0.10	0.10	99.00
4.50	0.90	10.00	0.10	0.20	49.50
4.50	0.90	10.00	0.10	0.45	22.00
4.50	0.90	10.00	2.80	0.10	72.00
4.50	0.90	10.00	2.80	0.20	36.00
4.50	0.90	10.00	2.80	0.45	16.00
4.50	0.90	10.00	5.00	0.10	50.00
4.50	0.90	10.00	5.00	0.20	25.00
4.50	0.90	10.00	5.00	0.45	11.11
7.00	0.07	1.00	0.10	0.10	9.00
7.00	0.07	1.00	0.10	0.20	4.50
7.00	0.07	1.00	0.10	0.45	2.00
7.00	0.07	1.00	2.80	0.10	-18.00
7.00	0.07	1.00	2.80	0.20	-9.00
7.00	0.07	1.00	2.80	0.45	-4.00
7.00	0.07	1.00	5.00	0.10	-40.00
7.00	0.07	1.00	5.00	0.20	-20.00
7.00	0.07	1.00	5.00	0.45	-8.89
7.00	0.07	10.00	0.10	0.10	99.00
7.00	0.07	10.00	0.10	0.20	49.50
7.00	0.07	10.00	0.10	0.45	22.00
7.00	0.07	10.00	2.80	0.10	72.00
7.00	0.07	10.00	2.80	0.20	36.00
7.00	0.07	10.00	2.80	0.45	16.00
7.00	0.07	10.00	5.00	0.10	50.00

7.00	0.07	10.00	5.00	0.20	25.00
7.00	0.07	10.00	5.00	0.45	11.11
7.00	0.25	1.00	5.00	0.20	-20.00
7.00	0.25	1.00	5.00	0.45	-8.89
7.00	0.25	10.00	0.10	0.10	99.00
7.00	0.25	10.00	0.10	0.20	49.50
7.00	0.25	10.00	0.10	0.45	22.00
7.00	0.25	10.00	2.80	0.10	72.00
7.00	0.25	10.00	2.80	0.20	36.00
7.00	0.25	10.00	2.80	0.45	16.00
7.00	0.25	10.00	5.00	0.10	50.00
7.00	0.25	10.00	5.00	0.20	25.00
7.00	0.25	10.00	5.00	0.45	11.11
7.00	0.90	10.00	0.10	0.20	49.50
7.00	0.90	10.00	0.10	0.45	22.00
7.00	0.90	10.00	2.80	0.10	72.00
7.00	0.90	10.00	2.80	0.20	36.00
7.00	0.90	10.00	2.80	0.45	16.00
7.00	0.90	10.00	5.00	0.10	50.00
7.00	0.90	10.00	5.00	0.20	25.00
7.00	0.90	10.00	5.00	0.45	11.11

## RÉFÉRENCES

- Avanzi, B. (2009). Strategies for dividend distribution : A review. *North American Actuarial Journal*, 13(2), 217–251.
- Avanzi, B., Tu, V. et Wong, B. (2016). A note on realistic dividends in actuarial surplus models. *Risks*, 4(4), 37.
- Avanzi, B. et Wong, B. (2012). On a mean reverting dividend strategy with Brownian motion. *Insurance : Mathematics and Economics*, 51(2), 229–238.
- Borodin, A. N. et Salminen, P. (2002). *Handbook of Brownian motion—facts and formulae* (seconde éd.). Probability and its Applications. Birkhäuser Verlag, Basel.
- De Finetti, B. (1957). Su un’impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio. Dans *Transactions of the XVth international congress of Actuaries*, volume 2, 433–443. New York.
- Gerber, H. U. et Shiu, E. S. (2004). Optimal dividends : Analysis with Brownian motion. *North American Actuarial Journal*, 8(1), 1–20.
- Jeanblanc-Picqué, M. et Shiryaev, A. N. (1995). Optimization of the flow of dividends. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 50(2), 25–460.
- Øksendal, B. (2003). Stochastic differential equations. In *Stochastic differential equations* 65–84. Springer.
- Renaud, J. F. et Simard, C. (2021). A stochastic control problem with linearly bounded control rates in a Brownian model. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 59(5), 3103–3117.
- Von Neumann, J. et Morgenstern, O. (2007). Theory of games and economic behavior. In *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press.