UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

EXPLORATION DE LA COMPRÉHENSION CONCEPTUELLE ET PROCESSUELLE DES FONCTIONS : LES IDÉES D'EMMA ET MATHIEU

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

VINCENT LIMOGES

DÉCEMBRE 2022

REMERCIEMENTS

Les premiers mots de ce travail iront à mon équipe de direction, Monsieur Fernando Hitt et Monsieur Denis Tanguay. Merci pour la source inépuisable de connaissances que vous formez. Ce travail ne serait pas celui-ci sans votre disponibilité, votre intérêt et vos bons conseils. Vos questions, toujours posées au bon moment, m'ont permis d'avancer à pas de géant. Merci !

Ensuite, je voudrais remercier Monsieur Luis Saldanha avec qui j'ai aussi beaucoup appris. À plusieurs reprises, tu m'as permis de recentrer mon projet sur ce qui m'intéresse réellement.

Je voudrais aussi remercier Monsieur Daniel Courchesne. Merci pour l'intérêt que tu as porté envers mon projet. Cet intérêt a souvent alimenté le mien.

Merci aussi à Emma et à Mathieu d'avoir participé à ce projet comme acteurs de première ligne. Vos idées sont fantastiques, tout comme l'ont été nos échanges.

Je tiens à remercier ma famille pour son support, mes amis pour les discussions qui ne devraient jamais finir et le volet Alternatif, un volet de (mon) cœur.

Finalement, merci à toi, celui qui a écouté plus qu'attentivement mes idées farfelues, mes pensées dites à haute voix et mes innombrables questions. Merci, Simon, d'avoir été l'oreille la plus attentive qui soit.

Je remercie beaucoup de gens, car je pense que l'on apprend d'eux ; et qu'y a-t-il de plus beau que d'apprendre ?

Les grandes personnes ne comprennent jamais

rien toutes seules, et c’est fatiguant,

pour les enfants, de toujours

et toujours leur donner

des explications.

Antoine de Saint-Exupéry – Le Petit Prince

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

La communauté de recherche en didactique des mathématiques a déjà soulevé que le raisonnement covariationnel est tout aussi nécessaire à l'appropriation du concept de fonction que le sont les représentations. Dans le Programme de Formation de l'École Québécoise (PFEQ), on ne retrouve pas textuellement la locution *raisonnement covariationnel*. Par contre, le travail fait sur les représentations est immense ! Lors de mon passage au secondaire, ai-je travaillé autant les représentations que le raisonnement covariationnel ?

Puisque la machine à retourner dans le temps n'existe pas et que ma scolarité du secondaire est terminée, je peux, avec ce projet de maîtrise, explorer les idées d'Emma et Mathieu, deux élèves de cinquième secondaire du volet Alternatif de la Polyvalente Ste-Thérèse, et approfondir avec eux la question du raisonnement covariationnel. Lors d'un *Design Experiment* se déroulant sur quatre séances, Emma et Mathieu tentent de représenter différentes relations établies entre deux variables d'une situation donnée. Toutefois, afin de se détacher des tâches usuelles que l'on peut rencontrer dans les manuels scolaires, je leur propose des tâches aux contextes géométriques.

La perspective socioculturelle engagée dans ce projet d'exploration permet d'orienter l'attention sur la coconstruction des idées de la dyade. L'analyse de cette coconstruction est réalisée à l'aide d'une combinaison de différents cadres théoriques portant sur les thèmes sous-jacents à la notion de fonction, notamment les représentations et le raisonnement convariationnel. Le résultat prend la forme d'un récit relatant des évènements saillants du *Design Experiment*.

Ce mémoire montre l'importance de la covariation entre variables comme prélude au concept de fonction. Le récit qu'il contient ouvre une fenêtre sur la compréhension d'Emma et Mathieu en ce qui a trait des relations entre variables. Ce projet d'exploration contribue à la recherche en didactique des mathématiques par les nombreux questionnements qu'il soulève.

Mots clés : Didactique des mathématiques ; Design Experiment ; Fonctions ; Raisonnement covariationnel ; Représentations ; Contextes géométriques.

INTRODUCTION

En 2018, je terminais mon baccalauréat à l'UQÀM en enseignement des mathématiques au secondaire. J'ai beaucoup apprécié ma formation mais j'avais encore beaucoup de questions. J'ai donc décidé de poursuivre à la maîtrise en didactique des mathématiques afin de bonifier ma formation initiale. C'est ainsi que j'ai découvert l'univers de la recherche en didactique des mathématiques. En me lançant dans ce projet, j'avais envie d'exploration. J'avais envie de retourner dans la tête d'un jeune élève du secondaire. Un projet sans stress, sans prétention. Une simple exploration qui pourra susciter l'intérêt en ce qui concerne les fonctions.

En mars 2020, le gouvernement Legault instaure un confinement afin de ralentir la propagation du Coronavirus. Ce faisant, l'expérimentation est mise sur la glace. Puisque les écoles sont désormais fermées, l'entièreté du système scolaire passe en mode virtuelle. Compte tenu de la perspective engagée dans ce projet de recherche, il apparaissait incongru de faire l'expérimentation en ligne et non en « vrai ».

Alors nous voici en 2021, j'enseigne au volet Alternatif de la Polyvalente Sainte-Thérèse et parmi les finissantes et les finissants de ce programme se trouvent deux jeunes fantastiques, qui m'ont permis d'en apprendre davantage sur les fonctions.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

Ce chapitre a pour objectif de présenter la source de mon questionnement ainsi que les visées générales de mon projet de recherche. Pour ce faire, je commencerai par un bref historique de mon parcours scolaire et de mon apprentissage du concept de fonction. Ensuite, je présenterai les attentes du Programme de Formation de l'École Québécoise (PFEQ) afin de faire ressortir les concepts sous-jacents à celui des fonctions qui sont travaillés au secondaire. Puis, pour situer mon projet parmi les écrits scientifiques de la communauté de recherche en didactique des mathématiques, je ferai un survol de ce qui a été fait et dit en ce qui concerne l'apprentissage des fonctions au secondaire. Finalement, je présenterai l'objectif général de ce projet.

1.1 Mon apprentissage des fonctions

En 2011, lorsque je terminais mon parcours au secondaire, j'avais une très grande facilité avec le concept de fonction. Peut-être parce que l'étude des fonctions a toujours été la branche des mathématiques qui m'a le plus intéressé ! À l'école où j'ai fait mon secondaire, l'autoapprentissage est mis en avant afin de développer l'autonomie des élèves. Ce faisant, les manuels scolaires sont souvent sollicités pour permettre à l'élève d'approfondir les notions. Pour ma part, c'est avec la collection *Point de Vue* que j'ai complété mon deuxième cycle du secondaire.

Un problème type de cette collection de manuels commençait par une mise en situation discursive. Ensuite, l'essentiel du travail consistait à formuler l'équation ou l'expression algébrique qui permet de modéliser la situation et d'en tracer, par la suite, la représentation graphique. Le problème se terminait quelquefois par une série de questions d'interprétation graphique. Lorsque la représentation algébrique initiait l'exercice, on demandait soit d'effectuer quelques manipulations afin d'obtenir une autre expression algébrique, soit d'en tracer la représentation graphique.

Lors de ma formation initiale à l'UQAM en enseignement des mathématiques au secondaire, j'ai suivi le cours *Didactique de la variable et des fonctions*. Ce cours m'a permis de mieux comprendre les différents aspects sous-jacents à l'enseignement et à l'apprentissage du concept de fonction. Plusieurs thèmes, notamment les représentations, la modélisation, la variable et la covariation, sont travaillés dans le cadre de ce cours. Dans l'optique de réfléchir sur ces thèmes, différentes tâches de modélisation nous ont été proposées. Les tâches dont le contexte était géométrique ont suscité beaucoup d'intérêt chez moi. Ces tâches avaient essentiellement toutes le même squelette.

Tout d'abord, la situation est présentée dynamiquement à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique (comme GeoGebra). Puis, en observant la situation, on identifie les éléments qui varient. On sélectionne ensuite deux de ces éléments variables et on exprime leur relation par la représentation de notre choix. Finalement, on répond à quelques questions d'interprétation qui portent sur le contexte géométrique.

Il s'agissait là d'un type de tâches dont le début différait beaucoup des tâches que j'accomplissais au secondaire. En effet, au lieu de commencer par la modélisation d'une mise en situation discursive, on demandait de modéliser une situation de géométrie dynamique qui n'était présentée qu'avec très peu de texte. Lors de la réalisation de ces tâches, le travail me semblait d'une tout autre nature que celui que j'accomplissais au secondaire. L'aspect de modélisation d'une situation de géométrie dynamique apportait une autre dimension d'interprétation des variables en jeu. L'aspect visuel de la situation permettait de suivre la variation de deux quantités simultanément. Avec ces tâches, j'ai découvert un aspect dynamique dans les relations entre variables et par extension, dans le concept de fonction. Je réalise maintenant que lors de mon parcours au secondaire, je n'ai pas développé le concept de fonction dans sa totalité. En effet, je maîtrisais les représentations liées à ce concept, mais pas son aspect dynamique.

Ce projet veut donc explorer la conceptualisation des fonctions chez les élèves du secondaire en orientant l'attention sur les aspects relationnel et dynamique des fonctions. Pour ce faire, commençons par cibler les concepts et processus liés à la fonction et qui sont prescrits par le PFEQ.

1.2 Concepts sous-jacents aux fonctions

Le Programme de Formation de l'École Québécoise (PFEQ) prévoit une évolution du concept de fonction à travers cinq années. Tout d'abord, la dépendance est abordée par les suites de nombre en première secondaire. Ensuite, pour développer le sens de la proportionnalité, l'élève de deuxième secondaire s'approprie les concepts de taux et de rapport, ce qui le mène à développer le concept relations directement proportionnelle ou inversement proportionnelle. Lors de cet apprentissage, l'élève est confronté à différentes représentations, notamment la représentation graphique, la représentation algébrique, la table de valeurs et le texte (ou représentation discursive). À travers ces représentations, l'élève est en mesure de reconnaître une situation de proportionnalité liée aux notions de variation directe et variation inverse.

En troisième secondaire, l'élève aborde le concept de relation de dépendance entre variables. Pour conceptualiser cette relation, l'élève établit une distinction entre la variable dépendante et la variable indépendante. Il est désormais capable d'établir un lien de causalité entre deux variables. Par la suite, l'élève de troisième secondaire s'approprie le concept de fonction. Le premier type de fonctions introduit au secondaire est celui de la fonction polynomiale du premier degré (ou fonction affine). Au cours de cette année, le PFEQ prescrit que l'élève soit en mesure de modéliser le type de situations qui donne lieu à ces fonctions, et de passer d'une représentation à une autre. Plusieurs éléments symboliques sont aussi introduits dont la notation $f(x)$, pour désigner l'image, par la fonction f, d'un élément variable quelconque x dans le domaine (avec bien sûr d'autres lettres possibles). Un travail similaire à lieu avec la fonction inversement proportionnelle.

Par la suite, en quatrième secondaire, l'élève explore des relations fonctionnelles différentes de la relation polynomiale du premier degré. Dans la séquence *Sciences naturelles*, le travail fait sur la fonction polynomiale du second degré et sur la fonction « partie entière » amène l'élève à la rencontre des paramètres. Il développera des techniques lui permettant de passer d'une représentation à une autre. Finalement, l'élève de quatrième secondaire de la séquence Sciences naturelles construira sa capacité à caractériser des fonctions en décrivant, par exemple, le domaine d'une fonction ou les points remarquables, notamment les zéros d'une fonction, parfois aussi les maximums et les minimums.

L'étude des fonctions se complète en cinquième secondaire lorsque l'élève explore les autres fonctions dont l'abord est prévu par le programme : valeur absolue, racine carrée, fonctions rationnelles, exponentielles et logarithmiques, trigonométriques, fonctions composées, fonctions définies par parties. Ainsi, à la fin de son parcours, l'élève est en mesure d'analyser une fonction, de la transformer en différentes représentations et d'interpréter les informations découlant de ces différentes représentations.

En terminant son secondaire, l'élève a développé plusieurs outils. À la lumière de ce qui précède, on peut conclure qu'un travail considérable est réalisé autour de la construction et de l'interprétation des représentations. D'un autre côté, le raisonnement covariationnel n'est jamais explicitement cité dans le PFEQ. Pourtant, la communauté de recherche en didactique des mathématiques est pratiquement unanime (Carlson et coll., 2002 ; Hitt et Morasse 2009 ; Moore 2014 ; Thompson et Carlson 2017) : le raisonnement covariationnel est fondamental en mathématiques et notamment, dans le développement du concept de fonction. Est-ce ce qui manquait à ma conceptualisation des fonctions lors de mon passage au secondaire ?

1.3 La recherche en didactique des mathématiques

À la suite de ce résumé, en ce qui a trait à la fonction dans le PFEQ, on constate que le concept de fonction se bâtit à partir de divers autres concepts, sur lesquels plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques se sont penchés. Dans le but de situer ce projet de recherche, il est nécessaire de faire ressortir les travaux de didactique des mathématiques qui sont relatifs aux fonctions, notamment ceux qui traitent de covariation et de représentations.

1.3.1 La covariation

En 1998, Luis Saldanha et Patrick Thompson se penchent sur le raisonnement covariationnel. Lors d'un Teaching Experiment réalisé avec un étudiant de huitième année (13-14 ans), les chercheurs émettent une hypothèse :

> « We hypothesize that students' engagement in tasks which require them to track two sources of information simultaneously are propitious for their envisioning graphs as composed of points, each of which record the simultaneous state of two quantities that covary continuously » [1] (Saldanha & Thompson, 1998, p. 1).

Considérer la variation simultanée de deux quantités est un travail cognitif plutôt complexe. À travers la résolution d'un problème nécessitant une représentation graphique, les auteurs concluent, entre autres, que « […] *understanding graphs as representing a continuum of states of covarying quantities is nontrivial* […] »[2] (Ibid., p. 7).

Cette capacité à considérer la variation simultanée de deux quantités a aussi été explorée par Marilyn Carlson. L'auteure propose un cadre théorique décrivant le

---

[1] « Nous faisons l'hypothèse que l'engagement des élèves dans des tâches qui requièrent d'eux de suivre deux sources d'information simultanément est propice à les amener à concevoir le graphique comme un ensemble de points, chacun rendant compte de l'état simultané des deux quantités qui covarient en continu. » [Notre traduction].

[2] « […] comprendre un graphique comme représentant un continuum d'états de covariation entre deux quantités n'est pas trivial. » [Notre traduction].

raisonnement covariationnel (Carlson et coll., 2002). Ce cadre théorique permet de situer un individu sur une échelle de cinq niveaux représentant chacun une image de l'évolution du raisonnement covariationnel. Ainsi, lors d'une expérimentation réalisée auprès d'étudiants de niveau collégial (18 à 19 ans), Carlson décrit leur raisonnement en termes de comportements. Cette expérimentation a permis, entre autres, de constater que les participants *« had difficulty constructing images of a continuously changing rate* […] *»*[3] (Carlson et coll., 2002, p. 372).

Valériane Passaro présente, en 2007, son mémoire de maîtrise intitulé *Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélé par une analyse des représentations spontanées d'élèves du premier cycle du secondaire*. Ce mémoire a pour objectif d'identifier les difficultés rencontrées chez les élèves quant au concept de covariation et de proposer différentes avenues pour les minimiser. Passaro met donc à l'épreuve une séquence d'enseignement destinée à des élèves de deuxième secondaire afin de répondre à ces objectifs. Ce travail a permis à Passaro d'observer l'évolution, dans la compréhension des élèves, du concept de covariation par l'intermédiaire des représentations.

À la lumière de ce qui précède, on comprend que la recherche autour de la covariation et du raisonnement covariationnel alimente beaucoup de questions en didactique des mathématiques. Carlson souligne aussi :

---

[3] « […] avaient de la difficulté à construire des images d'un taux continuellement changeant. » [Notre traduction].

> « Recent investigations of college students' understandings of functions have documented that even academically talented undergraduate students have difficulty modeling functional relationships of situations involving the rate of change of one variable as it continuously varies in a dependency relationship with another variable »[4] (Carlson et coll., 2002).

Le raisonnement covariationnel est trop peu travaillé chez les élèves et cela affecte leur compréhension du concept de fonction. Toutefois, comme soulevée plus tôt, la covariation n'est pas l'unique concept clé dans l'élaboration du concept de fonction. Les représentations jouent un rôle tout aussi important.

1.3.2 Les représentations

En 1983, Claude Janvier présente quelques exemples qui relatent des difficultés qu'ont les élèves lorsqu'ils tentent de passer d'une schématisation à une autre (Janvier, 1983). Janvier (1998) s'est aussi questionné sur les obstacles épistémologiques que pourraient rencontrer les élèves aux prises avec de telles tâches. Dans son article, Janvier définit un obstacle épistémologique comme une connaissance *a priori* bien construite, mais mal utilisée, ou mal adaptée à des contextes plus complexes que ceux où elle s'est initialement construite. L'obstacle épistémologique qui est présenté dans cet article est celui que Janvier nomme *chronicle* (*chronique* en français). Il s'agit d'inclure le temps comme élément implicite d'interprétation pour qualifier la variation entre deux autres variables, même quand le temps n'est pas pertinent à la situation. Cet obstacle épistémologique émerge principalement dans le travail d'interprétation des graphiques. En effet, on entend régulièrement un vocabulaire relatif à la vitesse et au temps quand des élèves

---

[4] « De récentes recherches sur la compréhension des fonctions chez des élèves de niveau collégial ont montré que même les étudiants de premier cycle talentueux sur le plan académique ont du mal à modéliser les relations fonctionnelles des situations impliquant le taux de variation d'une variable quand il varie continuellement dans une relation de dépendance avec une autre variable. » [Notre traduction].

cherchent à rendre compte, par exemple, qu'une pente est plus abrupte qu'une autre. Or, cet obstacle épistémologique, tel que le constate Janvier, influence grandement le travail sur les fonctions. Il a entre autres pour effet de porter l'élève à considérer systématiquement toute fonction comme dépendant du temps, à interpréter tout graphique comme une courbe « se déployant dans le temps », ou à confondre l'allure de la représentation graphique avec le contexte de la situation[5].

En 1986, Régine Douady présente la *dialectique outil-objet*, outil conceptuel de la psychologie cognitive, dont elle explore l'utilité à travers l'analyse d'expérimentations avec des élèves du primaire. Afin de retracer ce mécanisme d'intériorisation des connaissances, Douady propose différentes tâches faisant appel à des contextes géométriques comme situations initiales. Dans cet article, Douady montre également que les changements de cadre permettent aux élèves de faire évoluer leur compréhension d'un certain objet mathématique. *« Disons qu'un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associés à ces objets et ces relations »* (Douady, 1986, p. 11) ; on peut penser par exemple à l'utilisation du cadre algébrique pour la résolution d'un problème posé dans le cadre géométrique.

Un peu plus tard, Raymond Duval (1988) propose de faire intervenir la théorie des représentations sémiotiques en didactique, en modifiant les notions

---

[5] *The microbe culture*. Dans ce problème, les élèves interprète la représentation graphique comme retraçant l'évolution dans le temps de la taille d'une bactérie selon la température. Or, il s'agit plutôt de plusieurs bactéries observées à différentes températures. (Voir Janvier 1998).

exprimées par Douady, en restreignant la notion générale de cadre et en fournissant la notion plus circonscrite de registre de représentations[6] (en tant que partie ou tout d'un système formel de signes, par exemple l'algèbre). Ses idées sur les changements de registres rejoignent celles de Douady, selon lesquelles les changements de cadres facilitent l'apprentissage d'un objet mathématique. En effet, selon Duval, il est nécessaire de travailler dans différents registres de représentation pour que l'appropriation d'un concept soit complète. De plus, Duval présente et catégorise différentes activités mentales qui sont mises en œuvre lors de manipulations de représentations.

En 2019, Sarah Dufour dépose sa thèse doctorale intitulée *Des processus de compréhension sous l'angle des représentations : Un Teaching Experiment autour de la dérivée.* Dans cette thèse, qui a beaucoup influencé mon travail, Dufour fait une analyse des processus de compréhension du concept de dérivée en termes de représentations sémiotiques. Ce travail a pour assises la théorie des registres de représentations sémiotiques de Duval. Toutefois, l'auteure a dû revoir la définition de représentation telle que proposée par Duval, en adoptant un cadre théorique qui inclut les représentations institutionnelles (liées à la notion de registre) et les représentations non institutionnelles (généralement liées aux processus de modélisation mathématique). C'est la notion de représentations fonctionnelles de Hitt (2003, 2006) qui permet ce changement. Dufour propose, en conclusion, différents modèles de processus de compréhension conceptuelle.

[6] Plusieurs éléments de précisions seront apportés à la définition de registre au prochain chapitre.

Fernando Hitt (2003, 2006) soulève l'aspect fonctionnel des représentations. Le terme « fonctionnel » désigne ici le caractère d'une représentation relevant de son fonctionnement dans le développement d'un concept chez un individu. On peut dire que la représentation « fonctionne » et « aide » au sein même du raisonnement. Pour Hitt, la représentation fonctionnelle est l'idée qu'un individu se fait intuitivement lors de la résolution d'un problème. La représentation fonctionnelle *spontanée* est l'extériorisation de cette idée intuitive, de cette représentation fonctionnelle, une extériorisation dont le résultat est une représentation produite librement, naturellement, intuitivement. Les représentations fonctionnelles spontanées peuvent coïncider avec des représentations sémiotiques institutionnelles, ou non.

À partir de maintenant, pour alléger l'écriture, j'utiliserai l'expression « représentations spontanées » pour référer au concept de « représentations fonctionnelles spontanées ».

Hitt (2003, 2006) montre que les représentations spontanées sont très porteuses de sens pour l'élève qui les construit. Dans une recherche menée en collaboration avec Quiroz (2019), les deux chercheurs ont fixé comme objectif de mieux comprendre et de retracer l'évolution des représentations, à partir des représentations non institutionnelles jusqu'aux représentations institutionnelles. Pour ce faire, ils ont proposé, à des élèves de troisième secondaire, cinq situations d'investigations qui favorisent la production de représentations spontanées. Cette expérimentation a permis aux chercheurs de constater une évolution significative, des représentations non institutionnelles vers les représentations institutionnelles.

En somme, plusieurs travaux de recherche portant sur l'apprentissage des concepts sous-jacents à celui de fonction ont été réalisés. Le concept de covariation n'est pas une activité mentale aisée, tout comme la construction, la manipulation et l'interprétation de représentations d'une relation entre deux variables. Toutefois, je pose comme hypothèse de travail que l'appropriation de ces deux sous-concepts est nécessaire à une élaboration riche du concept de fonction.

1.4 Mes objectifs de recherche

À la lumière de ce qui précède et des nombreuses références données dans les travaux dont je viens de discuter, il devrait être clair que les recherches en didactique des mathématiques portant sur le concept de fonction sont abondantes. Ces recherches soulèvent des questions importantes et proposent plusieurs angles pour observer l'apprentissage des fonctions. Parmi ces recherches, on compte notamment un travail réfléchi sur les représentations et sur le raisonnement covariationnel. Ce survol de la littérature m'a permis de constater qu'au secondaire, je n'ai pas réellement travaillé l'aspect relationnel, en lien avec l'aspect dynamique, du concept de fonction. Ma conceptualisation des fonctions était essentiellement ancrée dans la construction, l'interprétation et la manipulation de diverses représentations.

C'est donc en gardant en tête les recherches effectuées sur la covariation et les représentations que j'explorerai les raisonnements déployés par des élèves lors de la résolution de tâches portant sur les fonctions. Ainsi, je pourrai mieux comprendre la complémentarité du raisonnement covariationnel et du recours aux représentations sémiotiques dans la construction du concept de fonction.

Conséquemment, l'objectif général de ce mémoire est d'explorer la conceptualisation de la notion de fonction chez des élèves du secondaire, en orientant l'attention sur l'aspect relationnel et dynamique des fonctions. Cette exploration se fera avec deux élèves travaillant en équipe afin de favoriser chez eux la communication et le partage d'idées (voir par ex. Webb, 1991), ce qui alimentera l'analyse des séances. Je discuterai de leur conceptualisation en termes de représentations produites, d'activités cognitives relatives aux représentations et au raisonnement covariationnel. Le prochain chapitre présentera la théorie qui me permettra d'atteindre cet objectif.

CHAPITRE II

CADRE THÉORIQUE

L'objectif de ce projet est d'explorer la compréhension conceptuelle de la notion de fonction chez deux élèves de cinquième secondaire qui suivent la séquence *Sciences naturelles*. Afin de favoriser l'émergence et provoquer la formulation, l'expression des idées des participants, j'ai décidé d'élaborer une suite de problèmes qu'ils devront résoudre en équipe. Ainsi, j'explorerai la coconstruction de ces idées, idées qui vont promouvoir le développement du concept de fonction chez les participants. De ce fait, j'ancre ce projet de recherche dans une perspective socioculturelle puisque je considérerai principalement les interactions entre les deux élèves participants. Plusieurs éléments sont donc à préciser et c'est dans ce chapitre que je les présenterai.

Je débuterai par faire la liste des acquis, en lien avec la notion de fonction, qu'un élève de cinquième secondaire de la séquence Sciences naturelles devrait posséder en fin de parcours. À l'aide de cette liste, je séparerai le concept de fonction en deux thèmes ; les relations et les représentations, que j'aborderai respectivement en deuxième et en troisième partie de ce chapitre. Ensuite, je présenterai les difficultés qu'ont les élèves, et terminerai avec les objectifs de recherche.

2.1 La fonction chez les élèves

Afin d'établir le portrait d'un élève type de cinquième secondaire, qui suit la séquence Sciences naturelles, je me référerai au Programme de Formation de l'École Québécoise (PFEQ) ainsi qu'à quelques collections de manuels scolaires.

2.1.1 Évolution de la notion de fonction dans le Programme de Formation de l'École Québécoise (PFEQ)

Comme soulevé dans le premier chapitre, les élèves de deuxième cycle du secondaire (3^{e}, 4^{e} et 5^{e}) travaillent de façon importante la modélisation et développent ainsi leur propre conceptualisation de la notion de fonction. Le PFEQ prescrit plusieurs concepts et processus que l'élève de troisième secondaire doit maîtriser, notamment modéliser une relation entre deux variables. On peut lire : *« Dès la première année du* [deuxième] *cycle, il apprend à passer d'un registre de représentation à un autre sans restriction »* (PFEQ, p. 56). Aussi, l'élève de troisième secondaire amorce une réflexion sur les relations en établissant une distinction entre la variable dépendante et la variable indépendante. Il y est donc proposé que l'élève développe une conceptualisation de la notion de fonction où se conjugueraient une compréhension processuelle liée à la construction et à la manipulation de représentations, et une compréhension conceptuelle plutôt liée à l'aspect relationnel de la fonction.

Toutefois, les deux dernières années du cycle sont moins centrées sur l'aspect relationnel de la fonction. Dès que l'élève est en mesure de distinguer la variable dépendante de la variable indépendante, l'aspect relationnel est mis de côté et le travail sur les représentations prend toute la place. Les exigences du PFEQ pour les deux dernières années du cycle portent essentiellement sur la manipulation d'expressions algébriques, l'analyse graphique, l'interprétation des paramètres ou encore, les liens entre la représentation graphique et la représentation algébrique, mais rien en rapport avec l'aspect relationnel de la fonction. En fait, la relation est plutôt implicite, et est approchée davantage en termes de représentations qu'en termes de variation de quantités.

Ainsi, l'élève est introduit au concept de fonction par l'entremise de situations de proportionnalité dans lesquelles il établit un lien de dépendance. Il se dirigera ensuite vers la manipulation des représentations en délaissant, peu à peu, le concept même de ce qu'est une fonction, c'est-à-dire une relation entre deux quantités.

2.1.2 Évolution de la notion de fonction dans les manuels scolaires

Dans la plupart des manuels scolaires, on peut reconnaître cette transition d'une compréhension conceptuelle et processuelle à une compréhension uniquement processuelle. Par exemple, dans le manuel *Point de Vue* (sec. 3), de façon générale, les exercices portant sur les relations linéaires débutent en demandant d'identifier les deux variables en jeu et de distinguer la variable indépendante de la variable dépendante. On ne demande que très rarement aux élèves d'expliciter la relation entre les deux quantités discursivement, à l'écrit. Ensuite, dans la même collection, en quatrième secondaire, séquence Sciences naturelles, aucun exercice ne demande de distinguer les deux variables explicitement ou encore, d'en verbaliser la variation.

Voici deux exemples :

La table de valeurs ci-contre met en relation le nombre de kilomètres parcourus par une automobile et certaines quantités de carburant consommé.

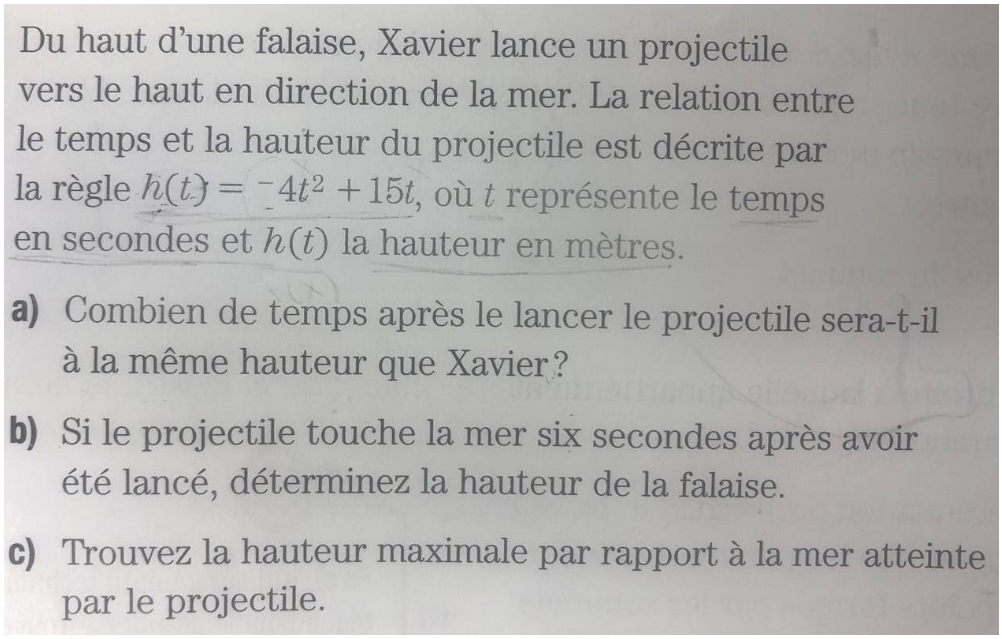
a) Identifie la variable dépendante et la variable indépendante.

b) Si x représente la variable indépendante et y, la variable dépendante, exprime la règle de cette relation.

c) Cette relation est-elle croissante ou décroissante ?

Figure 2.1. Point De Vue, 2e cycle, 1re année, vol. 1, p. 94, n°3.

Pour cet exercice, l'élève doit d'abord identifier les variables dépendante et indépendante, puis construire une représentation algébrique à l'aide d'une table de valeurs. Ce saut rapide vers l'algèbre enraye la possibilité de verbaliser la variation de la relation. Par exemple : « *Lorsque le nombre de kilomètres parcourus augmente, la quantité de carburant consommé augmente aussi puisque j'en ai besoin pour avancer.* » On peut répondre à la question c) par une verbalisation de la relation. Bien sûr, il n'est pas exclu de penser que dans l'esprit des auteurs du manuel, cette demande peut venir de l'enseignant.



Du haut d'une falaise, Xavier lance un projectile vers le haut en direction de la mer. La relation entre le temps et la hauteur du projectile est décrite par la règle $h(t) = {}^{-}4t^2 + 15t$, où t représente le temps en secondes et $h(t)$ la hauteur en mètres.

a) Combien de temps après le lancer le projectile sera-t-il à la même hauteur que Xavier ?

b) Si le projectile touche la mer six secondes après avoir été lancé, déterminez la hauteur de la falaise.

c) Trouvez la hauteur maximale par rapport à la mer atteinte par le projectile.

Figure 2.2. Point De Vue, 2e cycle, 2e année, Sciences naturelles, p. 87, n°1.

Ce problème illustre le point que je veux mettre en évidence. La tâche demandée à l'élève est procédurale. Le contexte vient concrétiser les unités significatives de la représentation algébrique mais il aurait également pu servir à comprendre la variation de la relation ainsi que la direction[7] de la relation de dépendance. De la troisième vers la quatrième secondaire, le travail tend à se limiter aux procédures.

---

[7] J'utiliserai le terme « direction » pour parler de la hiérarchie entre deux variables, à savoir laquelle des deux dépend de l'autre. Ce thème sera traité un peu plus loin.

On peut constater que l'aspect relationnel est rapidement mis de côté dans l'apprentissage des fonctions, autant dans le PFEQ que dans les manuels scolaires. Or, il s'agit de l'essence même de ce concept mathématique. Cette courte observation permet d'interroger l'organisation, la réorientation à l'intérieur de la proposition séquentielle du PFEQ en ce qui a trait au concept de fonction. Tout d'abord, il est proposé que l'élève développe une compréhension conceptuelle et processuelle puis, qu'il ne développe que sa compréhension processuelle.

2.1.3 Compréhension conceptuelle et processuelle

À la lumière de ce qui précède, on peut distinguer deux thèmes centraux dans l'apprentissage de la notion de fonction. Tout d'abord, l'élève du secondaire doit être en mesure de raisonner sur la variation de la relation entre deux variables dans le but de développer sa compréhension conceptuelle de la fonction. Aussi, on saisit le rôle important des représentations et de leurs manipulations. L'élève du secondaire doit être en mesure de construire et d'interpréter les divers modes de représentation de la fonction, développant ainsi sa compréhension processuelle.

Or, sachant que les représentations servent à illustrer la relation entre deux quantités variables, il devient donc indispensable pour l'élève de développer une compréhension conceptuelle *et* processuelle de la notion de fonction. Les prochaines sections porteront d'abord sur les relations et ensuite sur les représentations, afin de mieux comprendre le travail cognitif qu'on voudrait voir déployé par l'élève.

2.2 Relation entre variables

Comme soulevé, une fonction est tout d'abord une relation. Évaluer les variations de deux quantités simultanément est un travail cognitif plutôt complexe, qui demande un raisonnement particulier. Ce travail de coordination débute essentiellement en troisième secondaire, lorsque l'élève explore les relations de dépendance. Dans cette section, je présenterai les différentes conceptualisations des relations de dépendance dans les manuels scolaires, ainsi que le raisonnement covariationnel (Carlson et coll., 2002), sous un angle socioculturel.

2.2.1 La relation entre deux variables dans les manuels scolaires

Dans la plupart des manuels scolaires, les fonctions sont tout d'abord présentées comme étant un certain type de relations entre deux valeurs variables. Toutefois, d'une collection à l'autre, cette relation est caractérisée différemment au gré des définitions proposées.

Dans le manuel *Intersection* (sec. 4-SN, p. 14), on peut lire la définition suivante : *« Une fonction est une relation pour laquelle tout élément de l'ensemble de départ est associé à au plus un élément de l'ensemble d'arrivée. »* Dès le départ, on présente la fonction comme étant une relation. Cette relation est ensuite caractérisée par une association entre deux éléments provenant de deux ensembles distincts. Les termes *départ* et *arrivée* sous-entendent qu'il y a un état initial et un état final dans la relation. Par l'intermédiaire du concept d'ensemble, cette définition propose une conceptualisation des fonctions comme une association d'un premier élément et d'un second, ce dernier étant l'état transformé du premier. Ainsi, la fonction est conceptualisée comme une relation de transformation. Cette conceptualisation est souvent illustrée à l'aide de diagrammes ensemblistes, tels que celui-ci :

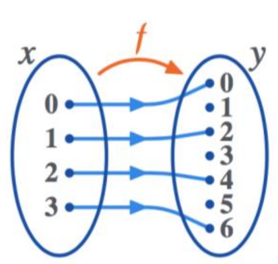


Figure 2.3. Représentation ensembliste de la fonction.[8]

Le manuel *Vision* (sec. 3, vol. 1, p. 66) propose la définition suivante : *« Une relation entre deux variables est dite fonctionnelle, ou tout simplement une fonction, lorsque à chaque valeur de la variable indépendante est associée au plus une valeur de la variable dépendante. »* Tout comme soulevé dans la définition précédente, la fonction est tout d'abord présentée comme une relation. Toutefois, ici, on ne fait pas appel au concept d'ensemble explicitement. On caractérise plutôt la relation comme une relation de dépendance. L'emploi des termes *variables dépendantes* et *variables indépendantes* illustre clairement le lien de corrélation qui caractérise la relation. La variable dépendante est caractérisée par le changement provoqué via celui que l'on suppose à la variable indépendante. La fonction est ici conceptualisée comme une relation de dépendance. Dans le manuel *Point de vue* (sec. 3, vol. 2, p. 762), on peut lire :

> Une fonction (souvent notée f) est une relation qui fait correspondre à chaque valeur de la variable indépendante au plus une valeur de la variable dépendante. Cette correspondance s'exprime par un processus opératoire appelé "la règle de correspondance".

[8] Récupérée de https://lexique.netmath.ca/fonction/

Encore une fois, la fonction est avant tout présentée comme une relation. Semblablement au manuel Vision, l'emploi des termes *variables dépendantes* et *variables indépendantes* permet de caractériser la relation par un lien de dépendance. Cependant, on souligne que *« Cette correspondance s'exprime par un processus opératoire appelé "la règle de correspondance". »* Ici, il est sous-entendu que la relation de dépendance s'exprime par une expression algébrique. Il s'agit d'un élément commun avec la définition proposée dans *Scénario* , où l'on peut lire :

> Une fonction est une relation qui fait correspondre à chaque valeur de la variable indépendante une ou aucune valeur de la variable dépendante. Cette correspondance se traduit par une équation ou une règle. (Scénario sec. 4, tome 1, 436, p. 20)

Ainsi, selon ces deux dernières définitions, la fonction est conceptualisée comme une règle de correspondance qui représente une relation de dépendance entre deux variables, relation qui s'exprime à l'aide d'expressions algébriques.

Dans ces différentes définitions de « fonction », nous identifions un élément commun : une fonction est une relation particulière, c'est-à-dire une association ou règle de correspondance entre deux ensembles, qui associe aux éléments du premier *au plus* un élément du deuxième. Toutefois, on constate que du point de vue de la conceptualisation sous-jacente, cette relation change de nature selon la définition proposée. En effet, à partir des manuels précédemment cités, il est possible de faire ressortir trois différentes conceptualisations des fonctions :

(1) la fonction est une relation vue comme une transformation,

(2) la fonction est une relation de dépendance,

(3) la fonction est une relation exprimée à travers une expression algébrique ou règle.

La relation de dépendance est celle qui permet d'amorcer une réflexion sur le concept de fonction et c'est en troisième secondaire que les élèves apprennent à distinguer la variable dépendante de la variable indépendante. Cette capacité à distinguer ces deux variables se développe par l'entremise d'exercices qui ont le même squelette : on propose une situation discursive dans laquelle deux quantités varient et on demande d'identifier la variable dépendante et la variable indépendante. Voici un exemple :

On calcule la paye d'un employé en considérant le nombre d'heures travaillées et son salaire horaire. Quelles sont les variables dépendante et indépendante dans cette situation ?

La réponse attendue est que la paye dépend du nombre d'heures travaillées. En effet, plus le nombre d'heures travaillées augmente, plus la paye augmente. Il s'agit de la relation de dépendance qui semble la plus naturelle. Or, la relation inverse entre ces deux quantités est aussi mathématiquement correcte : plus la paye augmente, plus le nombre d'heures travaillées augmente. Toutefois, la dernière formulation de la relation de dépendance semble moins naturelle, moins intuitive. Un élève pourrait arguer que ce n'est pas forcément le cas, que si la paye augmente c'est peut-être dû à un bonus quelconque et qu'au contraire, si le nombre d'heures travaillées augmente alors forcément, la paye augmente. Ainsi, cette relation, bien que mathématiquement correcte, semble moins naturelle. Dans le cadre de ce projet de recherche, j'utiliserai la locution *relation de dépendance non naturelle* pour faire référence à de telles situations. Voici un autre exemple :

On considère la hauteur du niveau de l'eau dans une bouteille et la quantité d'eau qu'elle contient. Quelles sont les variables dépendante et indépendante dans cette situation ?

La relation de dépendance naturelle pourrait être formulée ainsi : *« la hauteur du niveau de l'eau dans la bouteille dépend de la quantité d'eau qu'elle contient »* tandis que la relation de dépendance non naturelle pourrait être formulée comme suit : *« la quantité d'eau contenue dépend de la hauteur du niveau de l'eau dans la bouteille. »* La relation de dépendance naturelle est donc celle qui semble la plus intuitive dans le contexte, contrairement à la relation de dépendance non naturelle. Sauf qu'on voit bien avec cet exemple que la distinction n'est pas toujours nette, elle l'est ici certainement moins que dans l'exemple précédent. Dans une expérimentation empirique, elle peut dépendre des variables sur lesquelles l'expérimentateur a un contrôle. Pensons à un expérimentateur qui ferait varier la quantité d'eau qu'il verse dans le récipient et qui mesurerait la hauteur obtenue. Dans ce cas on aurait tendance à dire que la quantité d'eau est la variable indépendante (celle qu'on porte en abscisse) et la hauteur la variable dépendante (en ordonnée).

À partir d'ici, il est donc tout à fait légitime de se demander s'il existe des contextes dans lesquels la relation de dépendance est naturelle dans les deux directions. Prenons le contexte suivant comme exemple :

Un piéton se promène dans la rue. On considère la relation entre la distance séparant le piéton de sa maison et la distance séparant le piéton de l'épicerie. Quelles sont les variables dépendante et indépendante dans cette situation ?

Dans ce contexte, on peut tout aussi bien dire *« la distance entre le piéton et l'épicerie dépend de la distance entre le piéton et sa maison »* que *« la distance entre le piéton et sa maison dépend de la distance entre le piéton et l'épicerie »*. Ici, il n'y a pas de relation de dépendance non naturelle. Les deux formulations présentent une relation de dépendance naturelle. J'emploierai la locution *relation de dépendance partagée* pour faire référence à de telles situations.

En somme, la relation de dépendance se subdivise en 3 types : la relation de dépendance naturelle, la relation de dépendance non naturelle et la relation de dépendance partagée. La direction de la relation de dépendance sera un thème abordé lors de l'expérimentation.

2.2.2 Le raisonnement covariationnel

Pour Carlson (Carlson et coll., 2002), constater une relation de dépendance entre deux quantités est la première action mentale (MA) à réaliser pour initier un raisonnement covariationnel, qu'elle définit ainsi :

> « […] we define covariational reasoning to be the cognitive activities involved in coordinating two varying quantities while attending to the ways in which they change in relation to each other » (p. 354).

Selon Carlson, le raisonnement covariationnel s'échelonne sur cinq actions mentales qui sont chacune associées à certains comportements. Le tableau 2.1 (Carlson et coll., 2002. p. 357) présente ces associations.

Tableau 2.1. Mental Actions of the Covariation Framework (Carlson et coll., 2002, p. 357)

MA	Description of mental action	Behaviors
Mental Action 1 (MA1)	Coordinating the value of one variable with changes in the other	• Labeling the axes with verbal indications of coordinating the two variables (e.g., *y* changes with changes in *x*)
Mental Action 2 (MA2)	Coordinating the direction of change of one variable with changes in the other variable	• Constructing an increasing straight line • Verbalizing an awareness of the direction of change of the output while considering changes in the input
Mental Action 3 (MA3)	Coordinating the amount of change of one variable with changes in the other variable	• Plotting points/constructing secant lines • Verbalizing an awareness of the amount of change of the output while considering changes in the input
Mental Action 4 (MA4)	Coordinating the average rate-of-change of the function with uniform increments of change in the input variable.	• Constructing contiguous secant lines for the domain • Verbalizing an awareness of the rate-of-change of the output (with respect to the input) while considering uniform increments of the input
Mental Action 5 (MA5)	Coordinating the instanta-neous rate-of-change of the function with continuous changes in the independent variable for the entire domain of the function	• Constructing a smooth curve with clear indications of concavity changes • Verbalizing an awareness of the instantaneous changes in the rate-of-change for the entire domain of the function (direction of concavities and inflection points are correct)

Ces actions mentales permettent de situer un individu sur une échelle de 5 niveaux, chacun décrivant le stade de développement d'une « image mentale » du raisonnement covariationnel. Toutefois, se situer au niveau 5 (L5), par exemple, fait référence à la capacité d'effectuer les actions mentales MA1 jusqu'à MA5. Si un individu est en mesure d'accomplir les action mentale MA1 jusqu'à MA3, il sera situé au niveau L3. Le tableau 2.2 décrit ces cinq niveaux de développement du raisonnement covariationnel en contexte graphique.

Tableau 2.2. Levels of the Covariation Framework (Carlson et al., 2002, p. 358)

Level 1 (L1). Coordination. At the coordination level, the images of covariation can support the mental action of coordinating the change of one variable with changes in the other variable (MA1).
Level 2 (L2). Direction. At the direction level, the images of covariation can support the mental actions of coordinating the direction of change of one variable with changes in the other variable. The mental actions MA1 and MA2 are BOTH supported by Level 2 image.
Level 3 (L3). Quantitative Coordination. At the quantitative coordination level, the images of covariation can support the mental actions of coordinating the amount of change in one variable with changes in the other variable. The mental actions MA1, MA2 and MA3 are supported by Level 3 image.
Level 4 (L4). Average Rate. At the average rate level, the images of covariation can support the mental actions of coordinating the average rate-of-change of the function with uniform changes in the input variable. The average rate-of-change can be unpacked to coordinate the amount of change of the output variable with changes in the input variable. The mental actions MA1 through MA4 are supported by Level 4 image.

Level 5 (L5). Instantaneous Rate.

At the instantaneous rate level, the images of covariation can support the mental actions of coordinating the instantaneous rate-of-change of the function with continuous changes in the input variable. This level includes an awareness that the instantaneous rate-of-change resulted from smaller and smaller refinements of the average rate-of-change. It also includes awareness that the inflection point is where the rate-of-change changes from increasing to decreasing, or decreasing to increasing. The mental actions MA1 through MA5 are supported by L5 image.

Le cadre théorique présenté par Carlson (2002) s'inscrit dans une épistémologie constructiviste (la théorie APOS[9]). Or, il est important de rappeler que ce projet de recherche s'aligne sur une perspective socioculturelle. Ainsi, l'objet d'analyse est la coconstruction du concept de fonction par les deux élèves. Pour ce faire, je dois concentrer mon analyse sur les verbalisations des élèves et sur leurs échanges.

Une coconstruction qui se situe au niveau L1 démontre la capacité à reconnaître une relation entre deux variables, sans toutefois avoir la capacité à la qualifier. On peut s'attendre à une distinction entre les variables dépendante et indépendante et à une verbalisation de la relation de dépendance (naturelle

[9] Théorie qui s'inspire fortement de la notion d'abstraction réfléchissante de Piaget. Selon la théorie APOS, la construction de concepts se fait en quatre étapes : Action, Process, Object, Scheme (les termes anglais).

probablement), mais sans une caractérisation de la croissance des variables. Par exemple : *« Si le nombre d'heures travaillées change, alors le salaire change aussi. »*

Ensuite, une coconstruction qui se situe au niveau L2 démontre la capacité à coordonner, en termes de croissance, la variation d'une variable par rapport à l'autre. On peut s'attendre à une verbalisation de la relation de dépendance naturelle qui soit sensible à la croissance des variables. Par exemple : *« Si le nombre d'heures travaillées augmente, alors le salaire augmente aussi. »*

Une coconstruction qui se situe au niveau L3 démontre la capacité à coordonner, en termes d'amplitude relative, la variation d'une variable par rapport à l'autre. On peut s'attendre à une verbalisation qui suggère une compréhension de la coordination des deux variations en termes de leurs quantités. Par exemple : *« Si le nombre d'heures travaillées augmente de* 3 *heures, alors le salaire augmente de* 36 $. *»*

Une coconstruction qui se situe au niveau L4 suppose la compréhension que pour un intervalle fixe en abscisse d'une fonction affine, la variation en ordonnée est en fait le taux moyen de variation de la fonction sur l'intervalle. Dans le cas d'autres fonctions, une coconstruction qui démontre une telle compréhension pourrait proposer une verbalisation telle que celle-ci : *« Pour chaque minute de la première heure, la distance parcourue a augmenté en moyenne de 2 mètres. »*

Finalement, une coconstruction qui se situe au niveau L5 démontre une sensibilité à la notion de taux de variation instantané (ou « ponctuel »), quand le taux de variation change de point en point dans le domaine. On peut s'attendre alors à une verbalisation de la variation du taux de variation. Par exemple : *« Sur cet intervalle, le taux de variation augmente, puis diminue. »* Cette compréhension permet de rendre compte de fonctions non affines, dont le taux de variation varie de point en point, et des notions connexes de concavité de la courbe et de points d'inflexion.

La synchronisation des tableaux 2.1 et 2.2 est importante, car on pourrait se méprendre sur le niveau de développement du raisonnement covariationnel. En effet, on pourrait observer une verbalisation associée à l'action mentale MA5 et penser que l'individu est de niveau L5 alors que ce n'est pas le cas. Par exemple, une verbalisation qui explicite l'orientation de la concavité de la courbe peut ne pas être liée à une sensibilité à la nature changeante du taux de variation. On pourrait entendre une verbalisation de l'orientation de la croissance des variables individuellement. Par exemple : *« La concavité de la courbe est vers le bas puisque la variable dépendante décroît alors que la variable indépendante croît. »* Cette verbalisation n'est pas en lien avec le taux de variation, mais plutôt en lien avec la variation de chacune des deux variables prise individuellement. Elle amène d'ailleurs celui qui la propose à donner un argument non valable puisqu'une fonction décroissante — *la variable dépendante décroît quand la variable indépendante croît* — peut très bien avoir un graphique incurvé vers le haut.

Coordonner les variations de deux quantités de façon dynamique est une action mentale difficile à réaliser. Un élève pourra éventuellement organiser sa compréhension du phénomène observé en créant des points de repère. Ce faisant, il construira d'abord des points sur la représentation graphique. Il est alors possible qu'on assiste à une démarche de linéarisation. La démarche de linéarisation se manifeste via la tendance qu'ont les élèves à relier les points d'un graphique par des segments de droites, ou plus généralement à considérer que toute courbe est formée localement (si on « s'approche » suffisamment) par des segments de droite. Cette tendance témoigne de la difficulté à déterminer de façon continue la direction de la covariation entre les deux variables. Cette difficulté peut aussi être observée lorsque l'élève doit déterminer le sens de la concavité d'une courbe dans un graphique.

Avec une perspective socioculturelle, j'utiliserai le cadre théorique que propose Carlson (Carlson et coll., 2002) dans le but d'explorer la *coconstruction conceptuelle* de la notion de fonction chez deux élèves du secondaire. Ainsi, la communication entre les deux élèves sera un des éléments centraux de ce projet de recherche. C'est à travers différents problèmes et en portant attention aux échanges entre les participants que je caractériserai leur coconstruction à l'aide des niveaux du raisonnement covariationnel (Tableau 2.2). Comme je le présenterai plus loin (voir Chapitre III), les problèmes que je propose dans le cadre de cette exploration auront tous un contexte géométrique. Via la visualisation de la variation des différentes variables, rendue possible par le contexte géométrique et le recours à un logiciel de géométrie dynamique, les élèves auront peut-être plus de facilité à initier un raisonnement covariationnel.

En somme, la compréhension conceptuelle de la notion de fonction s'initie par une réflexion sur la relation de dépendance entre deux quantités. Cette réflexion permet d'amorcer le développement du raisonnement covariationnel chez les élèves. Sous le thème des relations, trois aspects seront traités : la définition de fonction que la dyade emploie, la direction de la relation de dépendance et le raisonnement covariationnel.

On comprend que suivre la variation de deux quantités simultanément s'avère un travail cognitif difficile. Pour faciliter ce travail, il est souvent bien utile de représenter la relation. Mais comment représenter une relation entre deux quantités ?

2.3 Les représentations

En mathématiques, il est important de distinguer le représentant du représenté. Le cercle, par exemple, est un objet mathématique. La représentation d'un cercle peut avoir différentes formes. Sur le site internet Alloprof, on peut lire la définition suivante : *« Le cercle est la ligne courbe et fermée dont tous les points sont situés à égale distance d'un point intérieur appelé centre. »* On peut ainsi représenter un cercle par le tracé d'une courbe respectant la définition tout juste énoncée. Toutefois, il ne s'agit pas de la seule représentation possible de cet objet mathématique. On peut tout aussi bien représenter le même cercle par son équation algébrique ou encore, en utilisant ses mains. L'énoncé de la définition donné plus haut peut être vu comme une représentation du cercle (dans le registre « discursif »). Ainsi, pour donner accès à un objet mathématique, il faut le faire en termes de ses représentations.

Au secondaire, plusieurs objets mathématiques sont présentés aux élèves, notamment la fonction. Ce concept mathématique n'est pas un objet aussi tangible que le cercle dans l'entendement des élèves. En conséquence, il devient inévitable de recourir à des représentations variées pour le travailler, en discuter et progressivement en donner un accès plus « concret ». Dans le cadre de ce projet de recherche, une perspective socioculturelle est engagée. Ainsi, afin de considérer la grande diversité des représentations qui pourraient être réalisées lors de l'expérimentation, je ferai appel à plusieurs théories portant sur les représentations. Tout d'abord je définirai le terme *représentation*, pour ensuite expliciter la catégorisation que j'utiliserai dans l'analyse des productions écrites. Finalement, je présenterai les diverses formes de travail cognitif liées aux représentations.

2.3.1 Définitions de « représentation[10] »

À ce stade, il est normal de se demander ce qu'est une représentation. Duval (1993) répond à cette question en proposant la définition suivante : *« Les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement »* (Duval, 1993, p. 38). Implicitement, cette définition vient tout d'abord distinguer les représentations sémiotiques externes à l'individu des représentations internes à l'individu (mentales). Dans le cadre de ce projet, j'emploierai l'expression *représentations sémiotiques* pour signifier toute représentation extériorisée soit verbalement, soit à l'écrit ou encore par les gestes. La théorie des registres de représentations sémiotiques de Duval permet, entre autres, de catégoriser les représentations sémiotiques. Ce caractère intrinsèque à une représentation, à savoir l'appartenance ou non à tel ou tel registre, est un élément qui est externe à l'individu, qu'il soit celui qui décode la représentation ou celui qui la produit. Cela étant, le registre de représentation est un élément qui influe sur la façon dont l'individu va décoder la représentation.

---

[10] Dans tout ce qui suit, chaque fois que j'utiliserai le mot « représentation » seul, sans préciser, il faudra partout comprendre ce mot comme un raccourci pour la locution « représentation sémiotique ».

Le cadre théorique que propose Duval est fortement lié à l'abstraction empirique et l'abstraction réfléchissante développées par Piaget, c'est donc un cadre constructiviste. Duval précise : « *Si on appelle sémiosis l'appréhension, ou la production, d'une représentation sémiotique, et noésis l'appréhension conceptuelle d'un objet, il faut affirmer que la noésis est inséparable de la sémiosis* » (Duval, 1993, p. 39). Selon l'auteur, les représentations sémiotiques ne sont que partielles de ce qu'elles représentent. C'est pourquoi il devient nécessaire de manipuler les différentes représentations sémiotiques pour construire une compréhension complète d'un concept. [11]

> *« La coordination de plusieurs registres de représentation sémiotique apparaît fondamentale pour une appréhension conceptuelle des objets : il faut que l'objet ne soit pas confondu avec ses représentations et qu'il soit reconnu dans chacune de ses représentations possibles. C'est à ces deux conditions qu'une représentation fonctionne véritablement comme représentation c'est-à-dire qu'elle donne accès à l'objet représenté. »* (Ibid., p. 40).

Une représentation sémiotique est une extériorisation des représentations internes. Cependant, l'auteur mentionne que le rôle des représentations sémiotiques ne s'arrête pas là et qu'elles ne sont pas uniquement une façon de communiquer les représentations internes (Duval, 1993, p. 38). Lorsqu'on extériorise une représentation interne à l'aide d'une représentation sémiotique, on vient aussi modifier la représentation interne. En effet, la représentation interne est un amalgame d'idées propres à un individu. L'extériorisation de cet amalgame d'idées devient une représentation sémiotique. Il ne s'agit donc plus d'un amalgame d'idées, mais plutôt d'une certaine « manifestation » extérieure, d'une certaine « empreinte » à laquelle on

[11] Nous y reviendrons à la section 2.3.3.

attribuera une signification. Ensuite, cette représentation sémiotique s'ajoute à l'amalgame d'idées et vient modifier la représentation interne de l'objet chez l'individu. Dans une perspective socioculturelle, le décodeur est aussi influencé par les significations que d'anciens décodeurs, ou ses interlocuteurs du moment, ont prêté ou prêtent à la représentation. Ainsi, les représentations sémiotiques permettent aussi de développer les représentations internes – et donc le concept travaillé – justement par le moyen de cette extériorisation et des rétroactions qu'elle engendre.

La définition de représentation sémiotique proposée par Duval véhicule plusieurs caractéristiques. En effet, une représentation sémiotique s'inscrit dans un certain lexique de symboles et un fonctionnement (ou syntaxe) spécifiques. Par exemple, la représentation graphique d'une fonction doit inclure la figuration d'un axe vertical et d'un axe horizontal, dont l'intersection sera l'origine du plan cartésien. Autre exemple, une représentation discursive (par exemple une définition) aura une lettre majuscule en début de phrase et un point en fin de phrase. Une représentation sémiotique fait donc partie d'un système de représentations érigé autour d'un ensemble de conventions symboliques et de fonctionnement.

Toutefois, si une représentation ne respecte pas les contraintes de signifiance des symboles et les contraintes de fonctionnement du système de représentations dont elle devrait normalement faire partie, elle ne sera pas considérée comme une représentation sémiotique. Ainsi, une représentation sémiotique qui répond à la définition de Duval devra être une représentation institutionnelle, c'est-à-dire une représentation qui répond aux conventions établies par l'institution, mathématique, scolaire ou autre, dont certaines se retrouvent dans les manuels et dont d'autres restent implicites, relèvent d'un usage conventionnel qui s'est stabilisé avec le temps sans nécessairement avoir été explicité (comme « réserver les dernières lettres de l'alphabet aux inconnues »). C'est donc dire qu'une représentation non institutionnelle n'est pas un élément d'un système formel et donc, ne fait pas partie d'un *registre*.

Tout en partageant avec Duval le point de vue que les représentations sont nécessaires à l'apprentissage d'un concept, Janvier (1983) propose de concevoir une représentation comme une illustration à laquelle on donne un sens. Selon cette conceptualisation d'une représentation, on peut affirmer qu'un graphique est une représentation. En effet, on donne du sens à cette représentation en signifiant qu'elle illustre une relation. Janvier appuie cette conceptualisation d'une représentation en proposant différentes illustrations tirées de Swan (1982). En voici deux exemples :

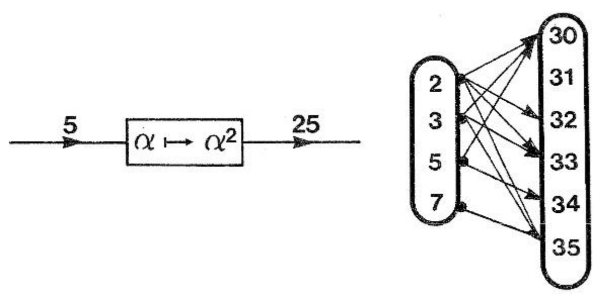


Figure 2.4. Illustrations d'une relation.[12]

La première illustration représente une fonction qui transforme toute quantité α en son carré. La seconde représente une série d'associations entre les éléments d'un premier ensemble et les éléments d'un second ensemble.

[12] Tirées de Janvier 1983.

La définition de Janvier laisse une grande place au sens. C'est le fait de donner du sens à une illustration qui lui donne le statut de représentation. Ainsi, la langue naturelle est omniprésente lorsqu'on tente de donner du sens à une représentation. Janvier souligne même que :

> Les aspects verbaux ou langagiers sont aussi prédominants. En effet, le langage parlé sert d'intermédiaire entre ces éléments [symboles écrits, objets réels et images mentales] et sert d'« accès » à ces éléments (par exemple, le symbole écrit ne prenant pas son sens complet sans sa contrepartie verbale) » (Janvier, 1983, p. 22).

De plus, un texte est une représentation à laquelle on donne un sens. De ce fait, la langue véhicule aussi des représentations – tout comme le pense Duval. Il sera donc important de rester sensible aux discours des élèves lors de l'expérimentation, afin de mieux saisir le sens qu'ils attribueront à leurs représentations.

Toutefois, les représentations proposées par Janvier (1982) sont des représentations institutionnelles. Les idées de Janvier [13] n'ont pu aboutir à une perspective qui engloberait les représentations non institutionnelles.

Dans l'optique de répondre à ce projet de recherche, les représentations non institutionnelles doivent aussi être considérées, car les élèves participants ne produiront pas forcément que des représentations institutionnelles. De plus, la

[13] Claude Janvier est décédé le 16 juin 1998. Son travail sur les représentations ne s'est pas achevé et la question des représentations non institutionnelles n'a pas été traitée.

perspective engagée dans le cadre de ce projet de recherche est celle du socioculturalisme. Ainsi, je dois élargir la définition de représentations afin d'y inclure ces éventuelles représentations non institutionnelles. C'est le concept de représentations fonctionnelles et de représentations fonctionnelles spontanées (Hitt, 2006) qui me permettra d'aller dans ce sens.

Dans une expérimentation réalisée avec des étudiants universitaires autour du concept d'infini, Hitt (2006) développe deux concepts : les représentations fonctionnelles et les représentations spontanées[14]. Le terme « fonctionnel » désigne le caractère d'une représentation relevant de son fonctionnement dans le développement du concept chez un individu. Il s'agit de caractériser la représentation en termes d'opérationnalisation dans la résolution d'un problème. La représentation fonctionnelle est l'idée qu'un individu a intuitivement lors de la résolution d'un problème. La représentation spontanée est l'extériorisation de cette idée intuitive, de cette représentation fonctionnelle. Une extériorisation dont le résultat est une représentation produite librement, naturellement, intuitivement. Il s'agit d'une représentation sémiotique externe, mais qui ne s'inscrit pas nécessairement dans un « registre » bien défini.

Les représentations spontanées ne sont pas forcément institutionnelles. Hitt caractérise les représentations spontanées comme un outil intuitif permettant aux élèves de construire leur conceptualisation d'une notion. La production de

[14] Tel que mentionné au Chapitre I, l'utilisation de l'expression « représentation spontanée » réfère à la locution originale « représentation fonctionnelle spontanée ».

représentations spontanées permet à l'élève de raffiner ses idées pour éventuellement, sous une approche socioculturelle de l'apprentissage (travail collaboratif dans la construction des connaissances), et avec l'aide de l'enseignant, tendre vers des représentations institutionnelles. Dans l'expérimentation de Hitt (2006), les représentations spontanées produites par les participants ont permis de mieux saisir leurs différentes compréhensions du concept d'infini.

Les représentations spontanées sont donc tout aussi importantes pour ce projet de recherche. En effet, non seulement elles informent sur le processus d'institutionnalisation, mais elles informent aussi sur le développement de la modélisation mathématique et l'articulation des concepts au sein d'une conceptualisation chez un élève. Dans Hitt (2003, p. 60), l'auteur soulève *« l'importance que revêt une analyse globale des représentations sémiotiques dans laquelle il nous semble essentiel de ne pas séparer la production de celles-ci de la structure interne qui les a fait naître. »* C'est donc en ce sens que le projet ira.

Ainsi, le terme « représentation » prendra trois formes dans le cadre de ce projet de recherche :

(1) représentations fonctionnelles,

(2) représentations spontanées institutionnelles et

(3) représentations spontanées non institutionnelles.

La prochaine section présentera la catégorisation de ces différentes représentations.

2.3.2 Catégorisation d'une représentation

L'objectif de ce projet est d'explorer la compréhension des fonctions chez deux élèves du secondaire en orientant la réflexion sur l'aspect relationnel de ce concept. Afin de répondre à cet objectif et de faciliter le travail d'analyse, il devient pertinent de catégoriser les représentations spontanées. Différentes catégorisations sont proposées dans la littérature. J'en ferai donc un résumé dans le but d'élaborer ma propre catégorisation de représentations spontanées, afin de mieux caractériser les productions des élèves.

Tout d'abord, Régine Douady (Douady, 1986) propose de distinguer les différentes branches des mathématiques par l'entremise de cadres.

> Le mot "cadre" est à prendre au sens usuel qu'il a quand on parle de cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre géométrique [...]. Disons qu'un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations » (Douady, 1986, p. 11).

Les représentations ne sont pas les seuls éléments d'un cadre. Prenons le cadre des fonctions en exemple. Ce cadre inclut les multiples représentations des fonctions, mais aussi les relations entre les représentations (par ex. algébrique graphique) et plusieurs images mentales associées à la notion de fonction. Néanmoins, Douady souligne que *« deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée »* (Ibid.). En effet, le cadre algébrique fait usage des variables, tout comme le cadre des fonctions. Ainsi, les cadres favorisent entre autres le recours à certains registres de représentations, selon le contexte d'utilisation de la représentation. Dans ce projet, on peut s'attendre à ce que les élèves travaillent dans le cadre de la géométrie et dans le cadre des fonctions.

Ensuite, Duval (1993) propose de catégoriser les représentations sémiotiques à l'intérieur de registres. Un registre de représentations sémiotiques est un système sémiotique qui permet l'accomplissement de trois activités cognitives auxquelles nous reviendrons à la prochaine section. Contrairement à ce qu'il pourrait en être dans ce que propose Douady, cette catégorisation permet de faire le tri dans les représentations indépendamment de leur contexte d'utilisation. Par exemple, la représentation graphique de données statistiques pourra être considérée comme relevant du même registre de représentations sémiotiques que le graphique d'une fonction.

Comme mentionné dans la section précédente, les représentations non institutionnelles sont aussi importantes à considérer dans le cadre de ce projet de recherche. Donc, les représentations spontanées engloberont deux catégories, soit les représentations institutionnelles et non institutionnelles.

Ainsi, pour ce projet de recherche, je catégoriserai d'abord les représentations spontanées en ciblant le cadre dans lequel elles se situent, c'est-à-dire leur contexte d'utilisation. Ensuite, deux catégories seront considérées selon que la représentation spontanée est conforme, ou non, aux institutions (mathématiques ou scolaires) : représentations spontanées institutionnelles et représentations spontanées non institutionnelles. Si la représentation spontanée est institutionnelle, elle sera ensuite associée à un registre de représentations sémiotiques. La figure 2.5 montre l'organisation de la catégorisation que j'utiliserai dans le cadre de ce projet de recherche.

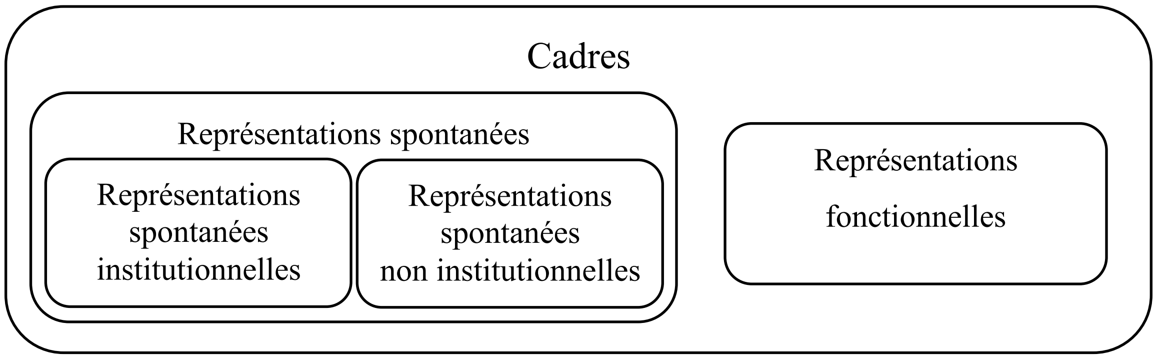


Figure 2.5. Catégorisation des représentations.

Maintenant que les représentations sont catégorisées et définies, nous pouvons étudier le travail cognitif qu'un individu réalise en travaillant avec les représentations.

2.3.3 Travail cognitif

L'exploration de la compréhension conceptuelle de la notion de fonction doit aussi se faire par l'observation de la production et de la manipulation de représentations spontanées. En effet, la production et la manipulation de représentations spontanées informent sur la compréhension conceptuelle de la notion de fonction, car c'est avec elles que le concept se développe. Le sens qui est accordé aux représentations spontanées me permettra de mieux caractériser la coconstruction de la compréhension conceptuelle chez les élèves. Or, la production et la manipulation de représentations spontanées nécessitent un grand travail cognitif et c'est dans cette section que j'en discuterai.

Dans son article, Douady (1986) présente le changement de cadres comme *« un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème »* (Douady, 1986, p. 11). En effet, le changement de cadre peut se faire en établissant une correspondance, partielle ou totale, entre les éléments de deux cadres. Cette correspondance permet de reformuler le problème dans un autre cadre et ensuite, d'y formuler de nouvelles questions. De plus, *«* […] *les traductions d'un cadre dans un autre aboutissent souvent* […] *à l'enrichissement du cadre origine et des cadres auxiliaires de travail »* (Douady, 1986, p. 11). En effet, les éléments qui seront engagés dans la résolution pourraient accéder, dans le cours de cette résolution, à un domaine d'application plus élargi et apporter de ce fait de nouvelles idées. Des outils propres au cadre « d'arrivée », absents du cadre « de départ », peuvent être mis à contribution pour résoudre. Ainsi, les tâches que je proposerai permettront minimalement de travailler dans le cadre de la géométrie et dans le cadre des fonctions.

Dans la théorie des registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993), Duval identifie trois activités cognitives. Elles caractérisent un registre de représentations sémiotiques comme faisant partie d'un système de signes, avec ses contraintes et ses modes opératoires. Ces activités favorisent en outre l'apprentissage d'un concept : (a) la formation d'une représentation identifiable dans un registre donné, (b) le traitement d'une représentation à l'intérieur d'un registre donné, (c) la conversion d'une représentation d'un registre à un autre (Duval, 1993, p. 40).

La première activité cognitive (a) met en évidence le fait que les représentations sémiotiques issues d'un registre donné doivent respecter des conventions « d'écriture » (écriture à prendre ici dans un sens très large) pour être identifiables. Une représentation identifiable respecte donc l'ensemble des règles de conformité au registre dont elle fait partie. Toutefois, cette *« formation implique une sélection de traits et de données dans le contenu à représenter »* (Duval, 1993, p. 40). Cette sélection est donc relative à la représentation choisie, car toutes les représentations ne donnent pas accès aux mêmes informations ou à l'ensemble des informations. Ainsi, la première activité cognitive concerne essentiellement la formation d'une représentation sémiotique selon des règles de conformité qui permettent qu'elle soit reconnaissable. *« À ce titre la formation d'une représentation pourrait être comparée à l'accomplissement d'une tâche de description »* (Ibid.).

La seconde activité cognitive (b) qu'un registre de représentation doit permettre est celle du traitement.

> Le traitement d'une représentation est la transformation de cette représentation dans le registre même où elle a été formée. Le traitement est une transformation interne à un registre. (Duval, 1993, p. 40)

Par exemple, la transformation d'une équation polynomiale du second degré sous sa forme générale vers sa forme canonique est un traitement. La reformulation d'une phrase est aussi un traitement. Il est aussi important de souligner que chaque registre de représentations sémiotiques aura ses propres règles de traitement, sa propre « syntaxe », tout comme il a ses propres règles de conformité. En effet, le passage entre la forme générale et la forme canonique d'une équation polynomiale du second degré ne fait pas appel au même ensemble de règles que la reformulation d'une phrase. On parlera de distributivité, d'associativité, de commutativité et non pas de conjugaison, d'accord ou de grammaire.

Duval mentionne « [… que] *toute représentation est cognitivement partielle par rapport à ce qu'elle représente et que d'un registre à un autre, ce ne sont pas les mêmes aspects du contenu d'une situation qui sont représentés* » (Duval, 1993, p. 49). C'est pourquoi il signale que la coordination des registres de représentations est absolument nécessaire pour la construction des objets/concepts mathématiques. C'est donc ici que la conversion (c) joue un rôle crucial dans le développement du concept de fonction. « *La conversion d'une représentation est la transformation de cette représentation en une représentation d'un autre registre* [...] » (Duval, 1993, p. 40). Contrairement au traitement, la conversion établit des liaisons entre les différents registres de représentations sémiotiques permettant ainsi, selon l'auteur, de développer une meilleure compréhension :

> La coordination de plusieurs registres de représentation sémiotique apparaît fondamentale […] : il faut que l'objet ne soit pas confondu avec ses représentations et qu'il soit reconnu dans chacune de ses représentations possibles. (Duval, 1993, p. 40)

Pour réaliser la conversion d'une représentation d'un registre à un autre, il est nécessaire de cibler certains éléments de la représentation initiale. Duval emploie deux termes spécifiques qui permettent de distinguer ces éléments clés dans les différentes représentations. Tout d'abord, les *variables visuelles* sont des éléments signifiants dans une représentation graphique. L'ordonnée à l'origine, l'abscisse à l'origine ou encore l'allure générale de la courbe sont des variables visuelles. Ensuite, les *unités significatives* sont des éléments signifiants dans une représentation algébrique. L'exposant, le symbole de racine carrée ou le symbole de valeur absolue sont des unités significatives. Quoi qu'il en soit, les variables visuelles et les unités significatives sont des éléments clés des représentations qui découlent du respect des règles de conformité à l'intérieur d'un registre de représentations sémiotiques donné. Ainsi, la conversion nécessite la capacité à coordonner les unités significatives et les variables visuelles.

En somme, ce qui caractérise les registres de représentations sémiotiques, c'est la possibilité de réaliser trois activités cognitives. Tout d'abord, (a) *la formation d'une représentation identifiable* fait ressortir la structure interne d'un registre de représentations sémiotiques en exposant la nécessité des règles de conformité. Ensuite, (b) *le traitement d'une représentation* fait aussi ressortir la structure interne d'un registre de représentations sémiotiques. Toutefois, ce sont les règles de fonctionnement de ce registre qui sont mises en avant. Et alors que la première activité est relativement statique, c'est la deuxième qui permet de faire évoluer le travail à faire sur les objets mathématiques en cause. Finalement, (c) *la conversion d'une représentation* permet d'établir des liens entre les différents registres de représentations sémiotiques afin de développer chez l'élève une vue d'ensemble du concept. Rappelons à cet effet que *« la coordination de plusieurs registres apparaît fondamentale pour une appréhension conceptuelle des objets »* (Ibid., p. 40), et c'est cette coordination que les activités de conversion favorisent.

Duval (1988) interroge plusieurs élèves et fait ressortir différentes difficultés qui ont trait à la conversion d'une représentation graphique en une représentation algébrique. Il expose ces difficultés en soulevant une coordination faible des variables visuelles et des unités significatives.

Le manque de coordination entre les représentations génère différents défis pour les apprenants. Effectivement, Janvier (1983) reprend l'exemple de Clement et Kaput (1979) : *« Dans un collège, il y a six fois plus d'élèves que de professeurs »*. Cet énoncé est souvent converti dans le registre algébrique comme ceci : $6E = P$. Ici, Janvier soulève deux difficultés. Premièrement, *« $6E = P$ »* est une association directe entre les mots du texte et des symboles, association qui se fait en suivant l'ordre dans lequel les mots se présentent. Il y a une difficulté au niveau du transfert. Deuxièmement, Janvier souligne *« le glissement de sens du "E" qui devient "étudiants" plutôt que "nombre d'étudiants" »* (Janvier, 1983, p. 25). Il s'agit d'une difficulté liée au sens des lettres. Ainsi, le manque de coordination entre les représentations (ici entre le registre de la langue naturelle et le registre symbolico-algébrique) devient une source d'erreurs non négligeable.

Dans ce même article (Janvier, 1983), Janvier soulève plusieurs difficultés qu'ont les élèves, notamment en ce qui concerne les représentations graphiques. En effet, leur interprétation des représentations graphiques émerge du contexte dans lequel elles sont présentées. Dans l'épreuve de la piste de course (Janvier, 1978), on demande à l'élève le nombre de virages que comporte cette piste. *« La réponse est fréquemment "9", car la forme du graphique "contamine" la représentation mentale qu'il se fait de cette piste »* (Janvier, 1983, p. 26).

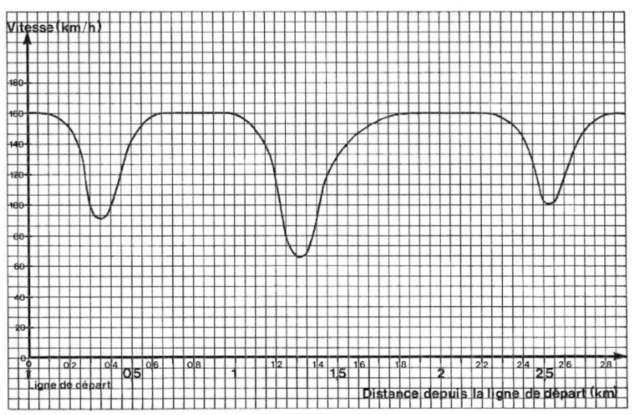


Figure 2.6. Représentation graphique de l'épreuve de la piste de course.[15]

[15] Tirée de Janvier 1983.

Janvier (1993, 1998) rend aussi compte d'une difficulté qu'il nomme « chronique ». La chronique est un obstacle épistémologique qui se manifeste par la propension qu'ont les apprenants à plonger une situation, où le temps n'est pas à considérer, dans un repère temporel. Un exemple typique pourrait être la dilatation d'une barre de métal selon la température (1993). Le phénomène de chronique pourrait se traduire par un séquençage temporel du phénomène observé. Or, il faut comprendre que le temps n'est pas l'une des deux variables étudiées. Dans cet exemple, la chronique peut aider, car elle permet de visualiser le phénomène. Toutefois, Janvier (1998) montre que la chronique n'aide pas toujours en proposant l'exemple de *The Microbe Culture*[16].

2.4 Objectifs de recherche

Finalement, pour répondre à l'objectif de ce projet de recherche, je discuterai des résolutions des élèves en termes d'activités cognitives (construction, traitement et conversion de représentations et changement de cadres) liées aux représentations spontanées produites par les participants et en termes de relations (définition d'une fonction, nature des relations de dépendance et covariation). Ainsi, je serai mieux outillé pour décrire la coconstruction de la compréhension conceptuelle et processuelle des fonctions chez les élèves de la dyade. Je peux désormais formuler plus précisément quelques questions de recherche qui me permettront d'explorer la compréhension conceptuelle de la notion de fonction chez deux élèves de cinquième secondaire qui suivent la séquence Sciences naturelles :

[16] Voir section 1.3.2.

1. À quel vocabulaire les élèves de la dyade ont-ils recours dans leurs verbalisations des relations ?
2. Comment la dyade interprète-t-elle la relation de dépendance ?
3. Comment la dyade utilise-t-elle cette relation dans un contexte de résolution de problèmes ?
4. À quel niveau du raisonnement covariationnel se situent les élèves de la dyade ?
5. Quelles sont les représentations utilisées dans la résolution des problèmes ?
6. Quel est le sens attribué aux représentations produites ?
7. Quelles activités cognitives reliées aux représentations sont mises en œuvre dans la résolution des problèmes ?
8. Comment évolue le raisonnement covariationnel chez chaque élève, en tant que produit du travail de collaboration dans la dyade ?
9. Comment la dyade interprète-t-elle la direction des relations de dépendance et comment celles-ci influencent-elles la compréhension (processuelle et conceptuelle) ?

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

L'objectif de ce projet est d'explorer la coconstruction conceptuelle de la fonction chez deux participants. Le *Teaching Experiment* (Steffe & Thompson, 2000) est une méthodologie qui favorise la formulation et l'émergence des idées des participants. Cette approche tient ses origines du constructivisme piagétien, une approche centrée sur l'individu, et consiste principalement en une série d'entrevues entre le chercheur et l'élève. Puisque j'ancre ce projet d'exploration dans une perspective socioculturelle, c'est plutôt l'adaptation de Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer et Schauble (2003) qui sera ma référence principale. En effet, ces auteurs proposent le « *Design Experiment* » (DE). « *One-on-one (teacher-experimenter and student) design experiments in which a research team conducts a series of teaching sessions with a small number of students* (Cobb & Steffe, 1983 ; Steffe & Thompson, 2000) ». Sous cette perspective, on analyse l'interaction des élèves et l'évolution (ou même plus précisément la 'coévolution') de leurs idées. Il s'agira donc bien de coconstruction.

La polyvalence de cette méthodologie permet d'explorer différentes facettes de l'enseignement et de l'apprentissage. Moore (2014), par exemple, a réalisé un TE autour de la notion d'angle et, à travers plusieurs tâches, a guidé l'élève participant vers une conceptualisation de la mesure d'angle comme un rapport entre deux quantités. Tout récemment, Dufour (2019) a utilisé le DE pour modéliser les processus de compréhension conceptuelle de la notion de dérivée chez des étudiants du cégep. L'opérationnalisation de ces deux expérimentations diffère sur plusieurs aspects, notamment l'intention de l'enseignement, les tâches proposées et le nombre de participants.

Précédemment, j'ai mis en évidence la perspective socioculturelle que j'adopte dans ce projet de recherche. Aiguillé par cette perspective, j'ai décidé de travailler avec une équipe de deux élèves. Le travail d'équipe rend l'expérimentation plus naturelle et facilite l'expression des idées (Webb, 1991). Les interactions entre les participants ont comme finalité de faire se déployer des raisonnements et de mettre en évidence les outils mathématiques utilisés dans le but de résoudre les tâches proposées. L'interaction directe entre le chercheur et l'élève a comme finalité de permettre au chercheur la construction d'un modèle d'apprentissage d'un concept mathématique (Steffe, 1991; Steffe & Thompson, 2000). Dans notre cas, c'est la coconstruction des savoirs liés aux concepts (mathématiques) de covariation et de fonction qui nous intéresse, et sa modélisation dans un milieu d'apprentissage collaboratif. Les échanges qui auront lieu lors de l'expérimentation deviendront d'importantes sources de données qui alimenteront mes réflexions. Ainsi, avec une lunette socioculturelle, je réaliserai un *Design Experiment* qui me permettra d'explorer la coconstruction conceptuelle de la fonction. Je présenterai d'abord l'opérationnalisation du DE, pour terminer avec les problèmes qui seront proposés aux élèves.

3.1 Opérationnalisation du DE

Dans cette section, je propose une discussion en quatre volets sur l'opérationnalisation du DE. Le premier portera sur les acteurs qui participeront à l'expérimentation. Pour le second, je détaillerai les outils qui me permettront de construire un premier portrait des participants. Le troisième volet portera sur les outils de collecte. Finalement, dans le dernier volet, je présenterai le cadre d'analyse des données.

3.1.1 Les acteurs

Il y a trois rôles dans ce DE : le chercheur-enseignant, le témoin et les participants. Commençons par le rôle que je tiendrai, celui de chercheur-enseignant. Le côté chercheur de mon rôle explore la coconstruction à l'aide des outils théoriques développés dans le Chapitre II. Ce côté couvre également la formulation de questions orientées par l'objectif de recherche, c'est-à-dire les questions reliées aux problèmes et les questions d'approfondissement. Le côté enseignant, bien qu'il implique naturellement de rester à l'affût des idées et des raisonnements des élèves, demande surtout de guider la dyade à travers une réflexion sur l'aspect conceptuel de la fonction. L'enseignant alimente les discussions en posant des questions plutôt ouvertes, qui favorisent l'expression des idées. Par exemple : « *Qu'en pensez-vous ?* », « *Pouvez-vous expliquer ce que vous avez écrit ?* », « *À quoi ça vous fait penser ?* ». Les questions que pose l'enseignant ont aussi pour objectif de stimuler les discussions entre les deux participants. Des questions comme « *Que penses-tu de son explication ?* », « *Voudrais-tu ajouter quelque chose ?* » peuvent stimuler les discussions en ralliant, en opposant ou en contrastant les idées des participants. L'enseignant est donc aussi responsable du climat dans lequel se déroulera le DE, et cherche à susciter des échanges aussi riches que possible.

Pour cette expérimentation, le rôle du témoin sera rempli par M. Daniel Courchesne, un collègue enseignant. M. Courchesne a complété sa formation initiale en adaptation scolaire et occupe actuellement un poste d'enseignant de mathématiques au volet Alternatif de la Polyvalente Ste-Thérèse[17]. Dans un DE, le témoin permet d'apporter un second regard sur la séance. Sans interagir avec les participants, le témoin prend des notes sur ce qu'il constate du travail mathématique des élèves (interprétation d'une question, réponse surprenante, raisonnement clé, utilisation d'un outil conceptuel, interaction particulière entre les participants…). À la fin de la séance, le chercheur-enseignant discute avec le témoin afin de dégager une vue d'ensemble sur ce qui s'est produit lors de l'expérimentation. Il permet donc au chercheur-enseignant de compléter sa vision de l'expérimentation. Étant moi-même nouvel enseignant, les connaissances pratiques de M. Courchesne viendront compléter mes connaissances plutôt théoriques de l'enseignement des mathématiques.

Emma et Mathieu[18] sont deux élèves de cinquième secondaire qui suivent la séquence Sciences naturelles au volet Alternatif de la polyvalente Ste-Thérèse. Ces deux élèves ont été pigés au hasard parmi un groupe de finissants volontaires, et sont bien au fait que la participation à ce projet n'apporte aucune compensation, monétaire ou autre (du point de vue de l'évaluation dans le cours, par exemple). Toutefois, la

---

[17] Le lecteur peut se référer au Chapitre I afin d'en apprendre davantage sur le volet Alternatif de la polyvalente Ste-Thérèse.

[18] Il s'agit de noms fictifs.

participation à ce projet approfondira les connaissances mathématiques des participants.

3.1.2 Portrait initial

Avant que le travail d'équipe ne commence, les participants devront remplir individuellement le questionnaire initial (voir Annexe A). Ce questionnaire a pour objectif d'établir un portrait initial de la compréhension de la fonction pour chaque participant, en termes de relations et de représentations. Cet outil me permettra d'énoncer des pistes d'exploration, de déceler des conceptions erronées et de positionner certains de leurs acquis dans le programme de formation de l'école québécoise (PFEQ).

Le questionnaire initial se divise en trois parties : Les fonctions, Les représentations, Les relations. Pour la partie *Les fonctions*, je questionne les idées spontanées en lien avec ce concept. L'objectif est d'avoir une idée de ce à quoi est attaché le concept de fonction chez les participants. Les symboles et les mots qui seront employés mettront en lumière ce qu'il leur semble important de mentionner lorsqu'on décrit une fonction. Par exemple, voici la toute première question : *Représente ce qui te vient à l'esprit lorsque tu entends ou lis le mot « fonction » dans un contexte mathématique.* Un participant pourrait esquisser un graphique et indiquer qu'à chaque valeur en abscisse est associée au plus une valeur en ordonnée. L'autre participant pourrait simplement écrire une équation algébrique qui représente une fonction qu'il connaît bien, par exemple $f(x)=x^2$. Il s'agit d'une question très ouverte, tout comme celles du reste du questionnaire.

La partie *Les représentations* s'intéresse à la signification accordée aux différentes représentations des fonctions. Les participants rencontreront, dans l'ordre, des représentations algébriques, des représentations graphiques, des tables de valeurs ainsi que deux représentations institutionnelles non usuelles[19]. Les participants devront simplement écrire ce qu'ils peuvent dire de chaque représentation, ce qui leur vient à l'esprit. Par exemple, devant l'équation $f(x) = a(x - h)^2 + k$, un participant pourrait identifier la fonction polynomiale du second degré sous sa forme canonique. Un autre participant pourrait nommer les différents paramètres et décrire l'impact de leur variation dans une représentation graphique.

Dans cette même partie, on pourra peut-être déceler différentes conceptions erronées chez les participants. Par exemple, un participant pourrait affirmer que la représentation graphique ci-dessous (Figure 3.1) ne représente pas une fonction puisqu'elle ne peut être associée à une seule équation.

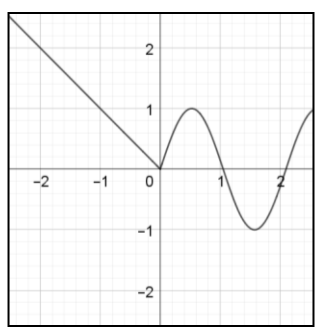


Figure 3.1. Représentation graphique d'une fonction continue définie par parties.

[19] Voir figure 2.4.

La partie *Les relations* s'intéresse aux relations de dépendances naturelles, non naturelles et partagées. Puisque l'idée de dépendance est déjà bien saisie depuis la troisième secondaire, il devient intéressant de la requestionner en fin de parcours. C'est donc à travers 4 contextes que les participants devront distinguer la variable dépendante de la variable indépendante. Par exemple, *« On s'intéresse à la relation entre le nombre de volontaires pour repeindre une salle de classe et le temps nécessaire à l'accomplissement de la tâche. »* Ce contexte permet également de confronter la conception erronée qui veut que le temps soit toujours la variable indépendante.

Les liens que les participants peuvent établir entre les représentations et les relations ne sont pas explicitement explorés dans le questionnaire initial. En effet, ces éventuels liens seront davantage explorés lors de la résolution des problèmes prévus pour le DE.

Le questionnaire initial, grâce notamment aux questions très ouvertes, me permet donc d'explorer en surface les connaissances que les participants déploient spontanément. De ceci, j'établirai un portrait de la dyade qui me permettra de mieux comprendre les différents éléments qui seront discutés lors de la résolution des problèmes : signification des représentations, nature des relations, conceptions erronées, etc.

3.1.3 Outils de collecte

L'exploration de la compréhension conceptuelle se fera par l'entremise de problèmes qui ont pour objectif d'interroger la conceptualisation de la notion de fonction chez la dyade et de la guider vers une conceptualisation qui remet l'aspect relationnel au centre. Ainsi, l'enseignement devient un outil de collecte de données au sens où il permet de générer des discussions autour des tâches proposées. Ces discussions seront filmées pour être ensuite analysées. Les productions écrites de la dyade seront également analysées. De plus, une discussion avec le témoin aura lieu à la fin de chaque séance pour partager nos observations.

3.1.4 Cadre d'analyse

Le DE sera guidé par les tâches et par les sujets qui seront discutés entre les participants et moi-même. Ainsi, l'analyse de ce DE sera attachée à un récit qui relate les événements marquants des quatres séances. Chacun de ces événements sera analysé en triangulant les sources d'informations : les verbatims des séances, les productions écrites et les discussions avec le témoin. Le cadre théorique construit au Chapitre II servira de base théorique. La catégorisation des représentations élaborée au deuxième chapitre ainsi que les niveaux du raisonnement covariationnel de Carlson me permettront de décrire la coconstruction conceptuelle de la notion de fonction chez les deux participants.

3.2 Les problèmes

Les problèmes sélectionnés pour cette expérimentation proviennent de différentes recherches en didactique des mathématiques, dans lesquelles l'utilisation qu'on en faisait était variée. Mon choix s'est arrêté sur ces problèmes parce qu'ils présentent tous un contexte géométrique qui favorise une visualisation dynamique de la relation de variation entre deux quantités.

La séquence de problèmes suit une trajectoire de convergence des idées. Ainsi, les premiers problèmes favorisent la pensée divergente de par leur nature ouverte. Les problèmes subséquents sont progressivement plus fermés, faisant ainsi converger les idées à travers leur résolution. Cette évolution se traduit par l'ajout de consignes et de contraintes entre les problèmes. La séquence de problèmes tente également de faire évoluer l'idée de relation qui sous-tend le concept de fonction. L'idée de relation, qui sera d'abord sujette à exploration, deviendra outil de validation puis, outil de résolution de problèmes.

Chaque problème se subdivise en trois phases. Tout d'abord la phase *introduction* consiste à familiariser les élèves avec le problème. Dans cette phase, les membres de la dyade sont d'abord amenés à lire l'énoncé puis à en discuter, afin d'en exposer leur compréhension. La dyade identifie aussi les différentes quantités susceptibles de varier dans la situation. Cette phase est similaire pour chaque problème.

Ensuite dans la phase *relation*, on demande aux élèves de verbaliser la variation des différentes quantités et relations en jeu. Cette verbalisation se fera par l'intermédiaire d'une discussion semi-dirigée. La phase *relation* a toujours le même squelette : on observe la variation d'une seule variable, puis on fait varier l'autre, et finalement les deux simultanément.

En dernier lieu, dans la phase *représentation*, on demande aux élèves de représenter la relation verbalisée. Cette phase est différente pour chaque problème, car les contraintes et les objectifs changent. Les sous-sections suivantes présenteront les quatre problèmes que la dyade devra résoudre : *La Piste de Course, Distances, Les Carrés* et *Maximum*. J'en ferai de brèves descriptions et exposerai les éventuels apports à l'exploration.

3.2.1 Premier problème – La piste de course

Piste de course

Des amis décident de participer à une course de voitures téléguidées. Ils décident de tracer le circuit que la voiture devra suivre en s'imposant deux contraintes :

1. Le circuit doit être fermé et ne comporter aucun croisement ;
2. La personne avec la télécommande devra se tenir à l'intérieur du circuit.

Dans l'encadré ci-dessous, et en respectant les deux contraintes, tracez à main levée un circuit de l'allure de votre choix et positionnez la personne avec la télécommande.

Figure 3.2. Énoncé de la situation *La piste de course*.

Ce premier problème est une adaptation de la tâche de la piste de course présentée par Janvier (1978), et réaménagée par Passaro (2007) ainsi que par Hitt et González-Martín (2015). Un objectif de ce problème est de favoriser le développement de la pensée divergente chez les élèves. J'ai donc modifié la tâche pour élargir les possibilités de résolution. La pensée divergente sera favorisée lors de l'élaboration du circuit et lors de la construction de la représentation. Débuter le DE avec cette tâche me permettra d'explorer les premières idées qu'ont les élèves par rapport au concept de relation.

Dans ce problème, la dyade est amenée à construire une piste de course respectant certaines contraintes. J'identifie deux types de circuits : le circuit géométrique et le circuit complexe. Dans le cas du circuit géométrique, il pourrait s'agir d'un carré, d'un cercle, d'un triangle, d'un rectangle, d'un polygone régulier ou d'une combinaison de ces différentes formes, par exemple la forme d'un cornet de crème glacée, d'une étoile, etc. Dans un circuit complexe, aucune forme reconnaissable n'est produite. Dans les deux cas, les circuits seront réalisés à main levée.

Ensuite, la dyade identifie les quantités variables de la situation. À ce stade, plusieurs variables peuvent être identifiées par la dyade. Le chercheur-enseignant se permettra donc d'intervenir pour demander un choix de variables parmi les variables de « distances » possibles : (a) la distance parcourue par la voiture, (b) la distance à vol d'oiseau entre la voiture et le point de départ et (c) la distance entre la voiture et le contrôleur.

Lors de la phase relation, le chercheur-enseignant pilote la réflexion de la dyade vers la variation des variables identifiées. La réflexion est axée sur la variation du premier choix de variable, puis du second et finalement de façon simultanée. Ici, le choix des variables influencera la verbalisation de la relation (dépendance naturelle, non naturelle, partagée). Le tableau suivant présente les différentes relations de dépendance entre les variables du contexte.

Tableau 3.1. Variables en jeu dans la situation *La piste de course*.

		Variable dépendante		
		Distance parcourue	Distance Voiture-Contrôleur	Distance Voiture-Départ
Variable indépendante	Distance parcourue		Dépendance naturelle	Dépendance naturelle
	Distance Voiture-Contrôleur	Dépendance non naturelle		Dépendance partagée
	Distance Voiture-Départ	Dépendance non naturelle	Dépendance partagée	

La phase *représentation* demande aux élèves de construire une représentation exprimant la relation entre les deux quantités variables. Il s'agit du deuxième instant où la pensée divergente est favorisée. Toutefois, plusieurs types de représentation seront évités par les élèves. L'usage de l'algèbre étant plus complexe selon le type de circuit choisi, les élèves devront représenter la relation autrement, le cas échéant. Aussi, si les distances ne sont pas quantifiées, la table de valeur est inopérante. De plus, les élèves ne sont pas intuitivement portés à utiliser les mots pour représenter quelque chose dans un contexte de résolution de problèmes mathématiques. Ainsi, la représentation graphique sera fort probablement le choix de la dyade. Toutefois, rappelons la possibilité de la construction d'une représentation spontanée non institutionnelle (voir Hitt et Quiroz, 2019).

Dans le cas de la construction d'une représentation graphique, les élèves procéderont point par point en reportant les différentes distances prises à l'aide d'un compas, ou autrement. Deux choses peuvent se produire. Tout d'abord, on peut assister au phénomène de linéarisation, c'est-à-dire la tendance qu'ont les élèves à relier les points dans un plan cartésien par des segments de droite. Ensuite, le second phénomène auquel il sera possible d'assister est l'émergence de chronique. Les élèves pourront, entre autres, recourir à une verbalisation de la relation entre les deux variables pour surmonter ces deux prochains défis. Cette verbalisation permettra de situer la dyade sur les niveaux du raisonnement covariationnel (Carlson et coll., 2002).

3.2.2 Deuxième problème – Distances

Distances

Une voiture se déplace le long d'une route. Deux villes, VilleA et VilleB, sont situées de part et d'autre de cette route.

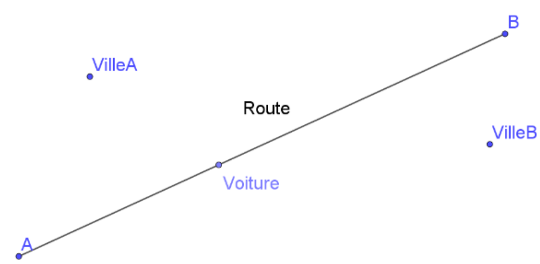


Figure 3.3. Énoncé de la situation *Distances*.

Tiré de Saldanha et Thompson (1998), ce contexte de problème a pour objectif de faire travailler le raisonnement covariationnel sous un angle quantitatif. La suite de cette tâche permet de faire réfléchir aux problèmes des représentations graphiques pour des relations qui ne sont pas des fonctions.

Dans le cadre du DE, cette tâche permet de faire tranquillement converger les idées vers la relation entre deux variables. Dans cette séance, le chercheur-enseignant imposera le choix des deux variables, soit la distance entre la voiture et la ville A et la distance entre la voiture et la ville B. La dyade explorera, avec l'enseignant-chercheur, les différentes directions de la relation de dépendance qui lie ces deux distances. Le problème *Distances* favorise les échanges entre les participants et l'enseignant-chercheur, car il se réalise en grande partie à l'oral. Une seconde partie sera ensuite complétée à l'écrit.

L'objectif de cette deuxième tâche est d'explorer la direction de la relation de dépendance qui, telle qu'expliquée au chapitre précédent[20], se décline en trois cas possibles. Ici, la relation entre la distance de la voiture à la ville A et la distance de la voiture à la ville B est une relation de dépendance partagée puisque la relation semble naturelle dans les deux directions. La première partie de cette tâche est donc de discuter de la direction de la relation de dépendance et la seconde partie, de la représenter. Pour les mêmes raisons qu'au problème de la piste de course, les élèves seront portés à construire une représentation graphique de la relation. Afin de produire une représentation graphique, il suffirait, par exemple, de quantifier les distances questionnées (à l'aide d'une règle graduée ou de jalons) et de les reporter dans un plan cartésien.

---

[20] Section 2.2.1.

Voici un exemple de solution soutenu par la présentation Geogebra du chercheur-enseignant, commençant arbitrairement à l'extrémité A et se terminant à l'extrémité B. Sur la gauche de la Figure 3.4 (Graphique), on voit la situation proposée à la dyade avec quelques ajouts. D'abord, la voiture est reliée à chacune des deux villes par des segments pointillés. Les mesures de ces segments y sont inscrites et sont notées VA et VB. Ensuite, le point P désigne la position de la voiture sur la route où VA est à son minimum et le point Q, la position de la voiture sur la route où VB est à son minimum. Ce sont bien sûr les pieds des deux perpendiculaires abaissées, respectivement, de VilleA et VilleB sur le segment AB. Sur la droite (Graphique 2), R est le point de coordonnées (VA ; VB). Il rend compte de l'état simultané de ces deux mesures.

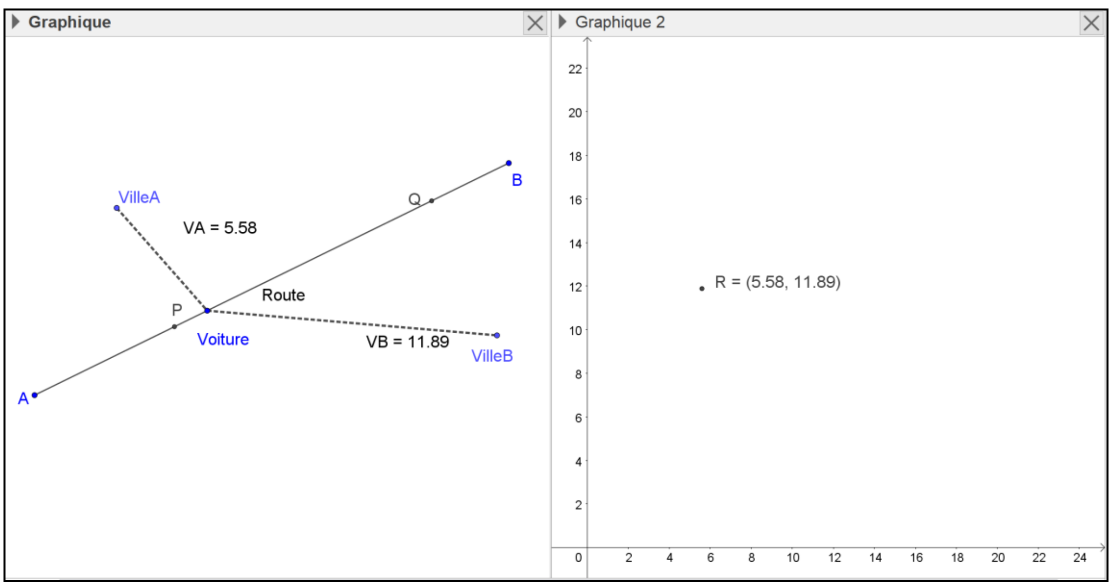
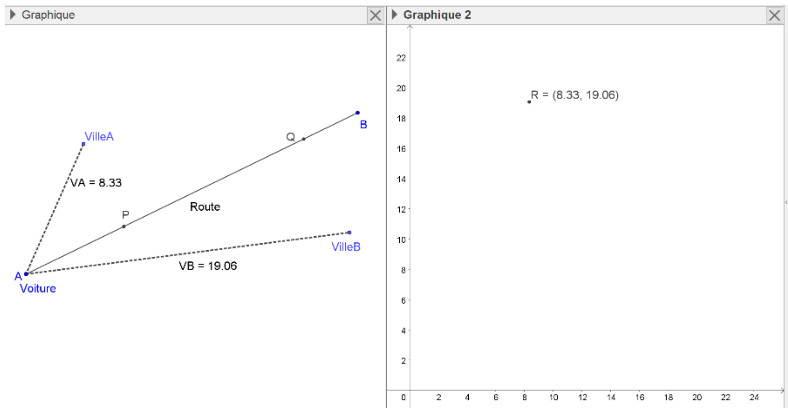
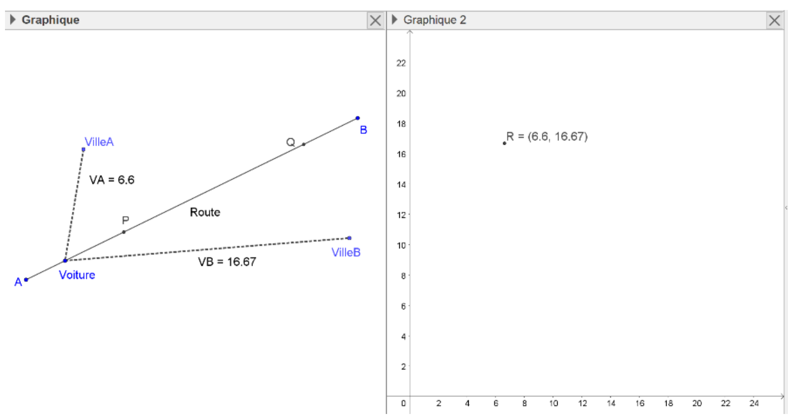
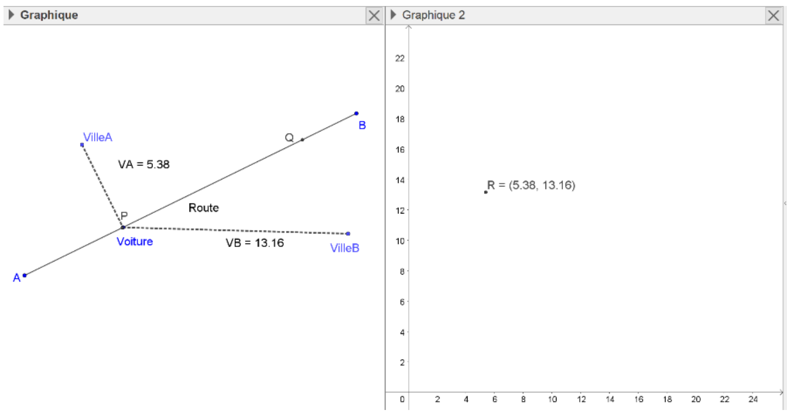
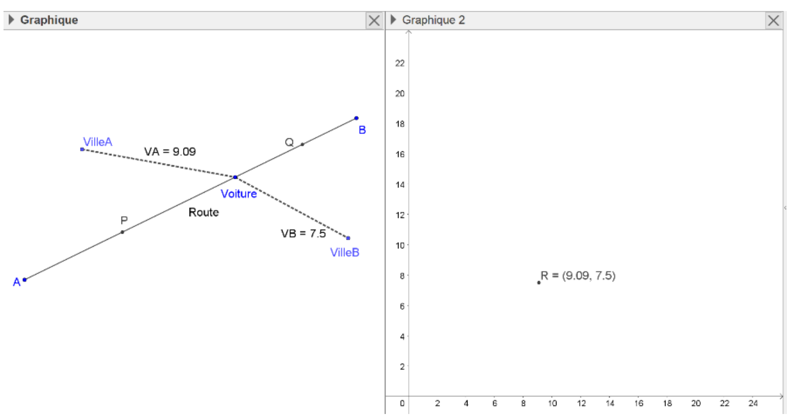
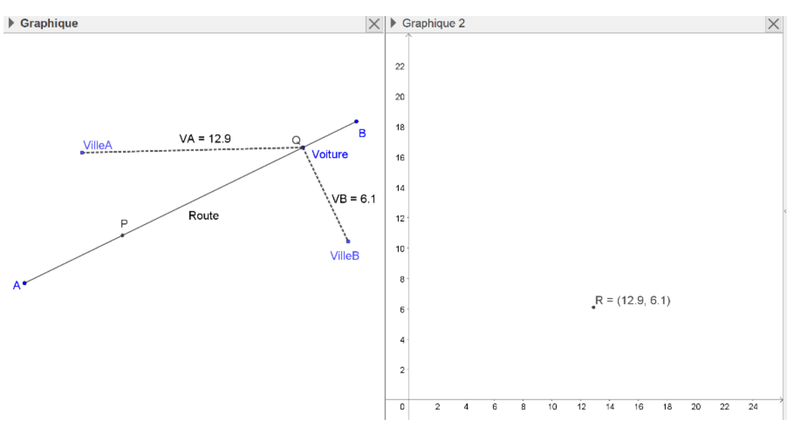
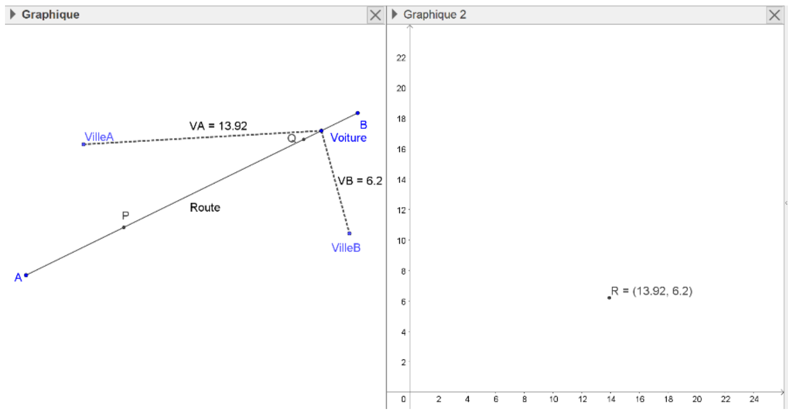
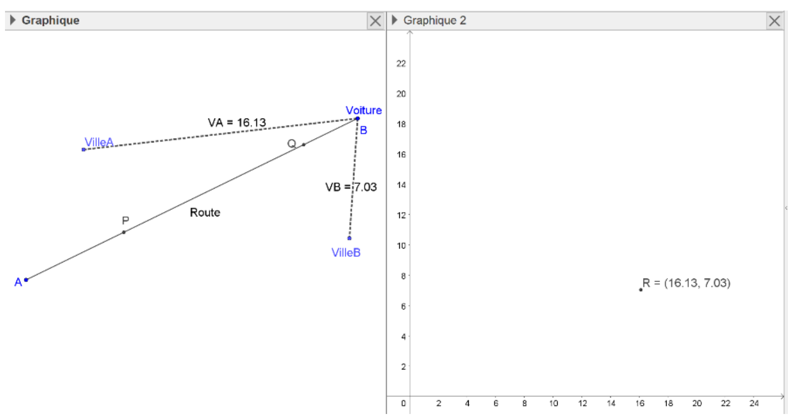
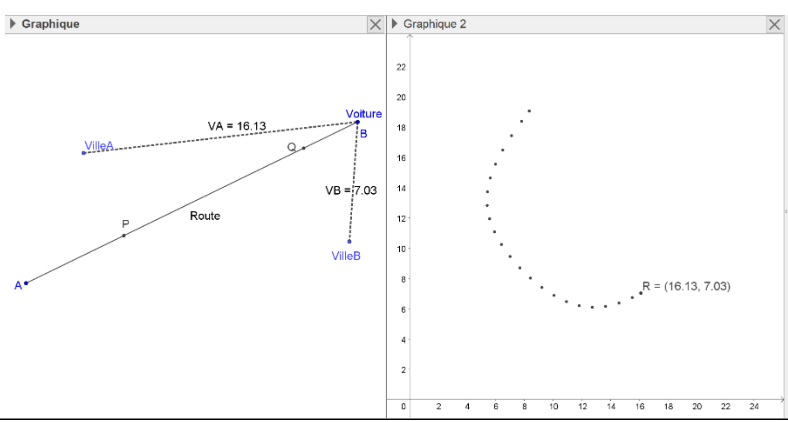


Figure 3.4. Présentation Geogebra du chercheur-enseignant.

Tableau 3.2. Exemple de procédure pour construire une représentation graphique de la relation VB (axe vertical) selon VA (axe horizontal).

<table>
<tr><td colspan="2">1. Au point A.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>À cette extrémité de la route, VB est à son maximum et le point R ne se situe pas sur un axe.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Du point A au point P.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Le déplacement de la voiture du point A au point P engendre une diminution de VA et VB.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">3. Au point P.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Sur le point P, VA est à son minimum mais pas VB.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Du point P au point Q.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Le déplacement de la voiture du point P au point Q engendre une augmentation de VA et une diminution de VB.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Au point Q.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Sur le point Q, VB est à son minimum mais pas VA.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">6. Du point Q au point B.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Le déplacement de la voiture du point Q au point B engendre une augmentation de VA et de VB.</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Au point B.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>À cette extrémité de la route, VA est à son maximum.</td></tr>
<tr><td colspan="2">8. Représentation graphique de quelques points de la relation VB selon VA</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Les points ont été construits à partir de la fonction « Trace » du logiciel Geogebra.</td></tr>
</table>

Sur le segment AB, il y a de chaque côté du point P des points qui sont à égales distances de la Ville A mais qui ne sont pas à égales distances de la Ville B ; et de même, de chaque côté du point Q, des points qui sont à égales distances de la Ville B mais qui ne sont pas à égales distances de la Ville A. Ainsi, VB ne peut être fonction de VA et VA être fonction de VB. Il s'agit donc d'une relation non fonctionnelle.

En somme, cette seconde tâche proposée aux membres de la dyade me permet d'explorer leur compréhension de la direction de la relation de dépendance et leur conceptualisation de la représentation graphique.

On retrouve souvent des relations de dépendance partagée dans les contextes de géométrie. Par exemple, dans le problème des carrés, qui est le prochain problème présenté, les élèves pourraient décider de mettre en relation les aires des deux carrés. Dire : *« Plus l'aire du carré 1 augmente, plus l'aire du carré 2 diminue »* ou dire *« Plus l'aire du carré 2 diminue, plus l'aire du carré 1 augmente »*, dans les deux cas, l'orientation de la relation de dépendance semble naturelle. Il s'agirait donc d'une relation de dépendance partagée.

3.2.3 Troisième problème – Les carrés

Les carrés

Sur un segment AB, on a pris un point C (point libre) et on a construit deux carrés (ACDE et CBFG) comme le montre la figure. Si l'on déplace le point C le long du segment AB, on obtient différents carrés. Pour fixer les idées, supposons que le segment AB mesure 10 unités.

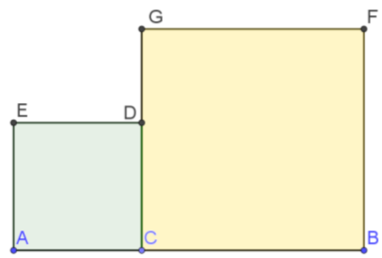


Figure 3.5. Énoncé de la situation *Les carrés*.

J'ai rencontré ce problème en 2016 lors de mon cours de didactique de la variable et des fonctions (voir aussi Hitt et González-Martín, 2015). C'est ce problème qui m'a permis de voir l'aspect dynamique des fonctions. Utiliser cette tâche comme troisième problème à proposer me permet de faire converger les idées des participants, contrairement à ce qu'il en est pour la tâche de la piste de course. Les idées y sont plus dirigées, car non seulement la dyade ne crée pas la figure mais aussi, le registre de représentation est spécifié. Néanmoins, la tâche demeure un problème ouvert pour une simple raison : le choix des deux variables à observer revient aux élèves. Les résultats de ce choix auront un impact important sur les représentations graphiques et sur le sens qui leur sera attribué. À la suite de la comparaison de deux représentations graphique (l'une estimée à partir de la relation entre les deux variables et l'autre réalisée par la conversion d'une représentation algébrique), la relation entre deux variables deviendra un outil de validation.

En observant la situation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique (Geogebra), la dyade devra tout d'abord établir la liste des variables. Trois catégories de variables sont possibles : (1) distances, (2) aires et (3) périmètres. De même que dans le problème précédent, la dyade explore la relation entre les deux variables qu'elle aura choisies par l'entremise d'une conversation semi-dirigée. Le tableau suivant présente les différentes relations de dépendance entre les variables du contexte.

Tableau 3.3. Variables en jeu dans la situation *Les carrés*.

		Variable dépendante		
		Distance	Périmètre	Aire
Variable indépendante	Distance	Dépendance partagée	Dépendance naturelle	Dépendance naturelle
	Périmètre	Dépendance non naturelle	Dépendance partagée[21]	Dépendance partagée
	Aire	Dépendance non naturelle	Dépendance partagée	Dépendance partagée

Lors de la phase « représentation », la dyade devra esquisser un graphique en se basant sur la figure et sur la relation entre les deux variables sélectionnées. Ensuite, la dyade devra élaborer une représentation algébrique de cette relation. La simplicité de la figure géométrique proposée dans la situation rend la modélisation algébrique

[21] Ce cas peut se produire si la dyade met en relation le périmètre d'un carré avec le périmètre de l'autre carré.

relativement accessible. De plus, la mesure du segment AB est quantifiée. Ceci permettra aux élèves d'exprimer une variable selon cette quantité fixe.

La dyade effectuera ensuite une conversion (Duval, 1988) de la représentation algébrique vers une représentation graphique. Ici, les élèves peuvent procéder de deux façons. (1) En employant un raisonnement associatif entre les unités significatives de la représentation algébrique et les variables visuelles de la représentation graphique (Duval 1988) ; ou (2), en construisant une table de valeurs représentant plusieurs couples de coordonnées qui seront ensuite reportés dans le plan cartésien. Il sera aussi intéressant d'observer les liens que les élèves feront entre la représentation graphique et la figure géométrique. Tout ce travail permettra d'explorer les activités cognitives ainsi que les changements de cadres et de registres qui seront mis en œuvre. Finalement, la dyade devra comparer l'esquisse graphique avec le graphique final, ce qui permettra d'utiliser la relation comme un outil de validation.

3.2.4 Quatrième problème – Maximum

Maximum

Le segment DE mesure 10 unités et le segment DA mesure 6 unités. Le point B est n'importe où sur le segment DE. De B, on élève la perpendiculaire à AB. Elle croise la verticale qui passe par E au point F. (Autrement dit ΔABF est rectangle en B, peu importe la position de B). Quelle position de B sur DE maximise l'aire du triangle rectangle ABF ?

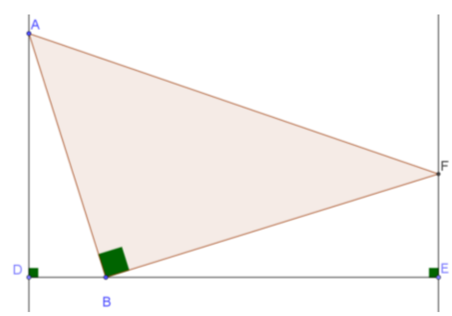


Figure 3.6. Énoncé de la situation *Maximum*.

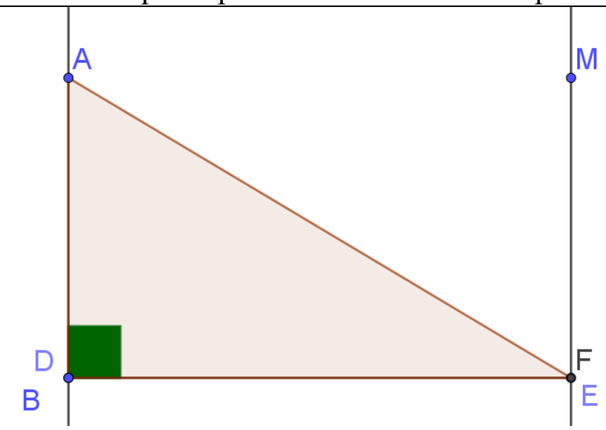
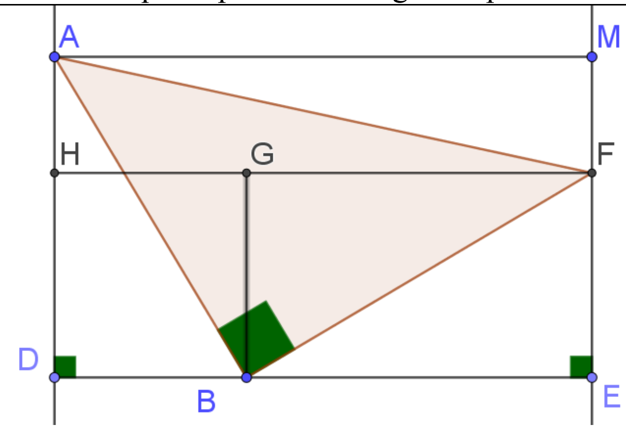
Pour cette tâche, il s'agit plutôt d'un problème fermé. La résolution sera restreinte par le choix des représentations et par le choix des variables, ce qui positionne cette tâche à l'autre extrémité de la trajectoire de convergence des idées.

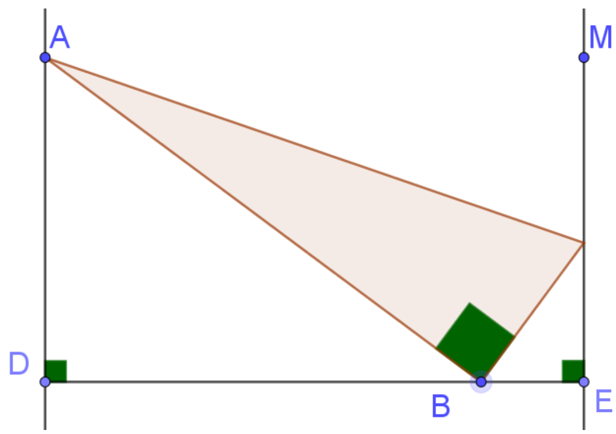
La résolution algébrique de ce problème nécessite de comprendre que ΔABD et ΔBFE sont semblables. Si les élèves ne s'en rendent pas compte, ils ne pourront qu'émettre des suppositions en proposant des valeurs arbitraires. Ainsi, l'utilisation de l'algèbre peut devenir un grand défi.

L'utilisation d'une représentation graphique est aussi difficile, car contrairement à ce qu'il en est dans le problème de la piste de course, on ne met pas en relation deux longueurs de segments, mais plutôt une longueur avec une aire. Ainsi, le report de mesure dans un graphique est impossible, à moins de convertir une aire en mesure (de longueur) de façon purement numérique. Le même problème se pose pour l'utilisation de la table de valeurs : les données numériques ne sont disponibles pour la construire que si l'élève donne des valeurs arbitraires à une des variables et calcule la valeur correspondante pour l'autre. Ainsi, les élèves pourraient se voir à court de représentations.

Toutefois, lors de la phase *relation*, les élèves auront verbalisé la relation de variation entre la longueur du segment DB et l'aire du triangle ΔABF. La présentation avec Geogebra et la possibilité de déformer la figure (le « *dragging* » de GeoGebra) leur permettra de soutenir cette verbalisation. L'objectif est donc d'orienter la réflexion des élèves vers la relation de variation afin qu'ils puissent résoudre le problème. On peut découper la situation en 3 temps (le point M n'est pas sur la copie des élèves).

Tableau 3.4. Exemple de solution pour le problème *Maximum*.

<table>
<tr><td colspan="2">1. Lorsque le point B coïncide avec le point D.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Dans cette position, la longueur du segment DB est nulle, l'aire de ΔABF est de 30 unités carrés et occupe la moitié du rectangle ADEM.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Lorsque le point B s'éloigne du point D.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>On peut voir que l'aire de ΔABF diminue grâce au dynamisme qu'apporte Geogebra et parce qu'elle n'occupe pas la moitié du rectangle ADEM (moins de la moitié de AMFH, moins de la moitié de DHGB et la moitié de BGFE).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">3. Lorsque le point B se rapproche du point E.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Passé l’étape 2, il est clair que l’aire de ΔABF diminue jusqu’à devenir nulle. Ainsi, on comprend que l’aire de ΔABF ne fait que diminuer. Donc, l’aire initiale était l’aire la plus grande. On peut donc conclure que l’aire de ΔABF est maximale lorsque le point B est sur le point D.</td></tr>
</table>

En somme, ce problème me permettra non seulement de comprendre l’interprétation que font les élèves de la relation mais aussi, de voir s’ils peuvent utiliser cette relation comme outil de résolution. Les verbalisations exprimant la relation entre les deux variables fourniront de précieuses données.

3.3 Ouverture vers l’analyse

L’objectif de ce projet de recherche est d’explorer la coconstruction conceptuelle de la notion de fonction – en termes de représentations et de relations – chez deux élèves de cinquième secondaire qui suivent la séquence Sciences naturelles. Ce troisième chapitre m’a permis d’expliquer le *comment* de ce projet. Somme toute, ce n’est rien de trop compliqué. Je vais proposer quatre problèmes lors d’un DE, présenter les différentes péripéties des séances dans un récit descriptif et les analyser en termes de relation et de représentation, telles que définis dans le deuxième chapitre. Le prochain chapitre sera donc constitué de ce récit annoncé.

Le questionnaire initial ouvrira l'analyse en proposant un portrait de la dyade. La première tâche, au début de la trajectoire de convergence des idées, amorcera l'exploration par l'entremise d'une réflexion sur l'idée de relation entre deux variables. La deuxième tâche poursuivra cette réflexion et questionnera davantage la notion de relation partagée. La troisième tâche fera converger les idées en lien avec la notion de relation, afin de développer un outil de validation. La quatrième tâche transformera ce nouvel outil en un outil de résolution de problèmes.

CHAPITRE IV

ANALYSE

Emma et Mathieu (noms fictifs) sont deux jeunes finissants au volet Alternatif de la polyvalente Ste-Thérèse. Cette exploration de leurs idées, souvent complémentaires, m'a permis de comprendre les multiples nuances qui se cachent sous la notion de fonction. Le récit qui suit présentera différents événements clés du *Design Experiment* de façon chronologique, commençant par un retour sur le questionnaire initial et allant de la première à la quatrième séance. Progressivement, différents thèmes émergeront de ce récit. Ils formeront les pistes d'exploration et de réflexion principales.

4.1 Le questionnaire initial

Tel que décrit au chapitre précédent, le questionnaire initial est composé de trois sections intitulées ; *Les fonctions*, *Les représentations* et *Les relations*. Les idées des participants se rejoignent à plusieurs reprises – même si le questionnaire a été rempli individuellement – dès la première partie du questionnaire initial. Ensemble, les deux élèves de la dyade soulèvent différents aspects des fonctions.

4.1.1 Première partie – Les fonctions

L'usage de représentations algébriques et graphiques attire l'attention sur la complémentarité des deux participants. En effet, l'un d'eux a écrit différentes expressions algébriques et l'autre a réalisé une représentation graphique d'une fonction affine. Néanmoins, la notation « *f(x)* » apparaît sur les deux copies. Sur la copie d'Emma, on peut lire « *variable dépendante* » et « *variable indépendante* », signifiant ainsi que l'idée de dépendance entre deux variables lui est familière. Différents mots clés exprimant des façons de caractériser les fonctions, tels que « *domaine* », « *codomaine* », « *zéros* », « *variation* », « *signe* », apparaissent également sur la copie d'Emma. De son côté, Mathieu écrit les mots « *évolution* », « *croissance* », « *décroissance* » et « *relation* », laissant penser que Mathieu a une perspective (plus) dynamique de la notion de fonction.

Lorsqu'Emma définit dans ses mots ce qu'est une fonction, elle utilise une comparaison entre les relations et les fonctions. On peut lire : « *Une fonction est une relation entre deux variables. Il y a seulement une valeur de x pour 1 seul y.* » L'idée de relation fait partie de la définition d'Emma, mais pas celle de dépendance. La condition qu'Emma énonce afin de distinguer une fonction d'une relation est inexacte. S'il n'y a qu'une seule valeur de x pour un seul y, cela impliquerait que la relation $f(x)=x^2$ ne serait pas celle d'une fonction. Emma sait qu'il y a une condition qui ressemble à ce qu'elle a écrit, mais n'a pas su l'énoncer correctement.

C'est Mathieu qui fait ressortir l'idée de dépendance dans sa définition d'une fonction. On peut lire : « *Se caractérise d'une relation entre deux variables dont la valeur d'une des deux dépend de l'autre.* » Mathieu met également en lumière un aspect dynamique des fonctions en utilisant un terme soulignant une évolution : « *Une relation entre deux variables (x, y) qui* ***évolue*** *selon le changement de la variable x* » (les caractères gras sont de nous).

En somme, dès la première partie du questionnaire, on constate que l'intuition des deux élèves semble s'appuyer sur l'usage de représentations variées et que la dyade partage les idées de relation et de dépendance entre deux variables. Emma apporte plusieurs éléments techniques tels que la distinction entre relation et fonction ainsi que les caractéristiques des fonctions. Quant à Mathieu, il apporte l'aspect dynamique des fonctions en énonçant l'idée d'évolution.

4.1.2 Deuxième partie – Les représentations

Le premier réflexe partagé est d'identifier le type de fonctions à partir des représentations. Dans le cas des représentations algébriques, Emma et Mathieu indiquent également la forme d'écriture de la fonction. Sur la copie d'Emma par exemple, on peut lire : « *Elle est sous la forme canonique fonction de 2e degré (parabole)* » Le deuxième réflexe partagé est d'utiliser le graphique comme représentation intermédiaire pour identifier le type de fonction à partir d'une table de valeurs. Chacun d'eux apporte quelque chose de plus.

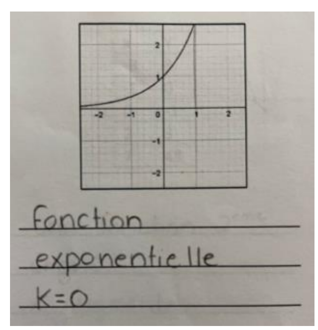


Figure 4.1. Une réponse d'Emma au questionnaire initial.

Emma associe les paramètres aux symboles algébriques usuels. À partir de la représentation graphique d'une fonction, elle exprime la valeur d'un paramètre de la représentation algébrique de cette même fonction. En faisant cela, Emma réalise la conversion d'une variable visuelle (Duval 1988) du registre graphique en une unité significative du registre algébrique.

De plus, Emma décrit la variation des quantités inscrites dans une table de valeurs. On peut lire : « *x augmente, y diminue jusqu'à* -1 *et augmente ensuite* ». Cette formulation montre qu'Emma est capable de l'action mentale MA2 *«Verbalizing an awareness of the direction of change of the output while considering changes in the input »* (Carlson et coll., 2002. p. 357).

Sur sa copie, Mathieu caractérise les fonctions à partir des représentations graphiques et algébriques. Par exemple, on peut lire « *n'a pas de zéros* » ou encore, « *l'asymptote est de zéro* ». Il utilise également les termes « *croissance* » et « *décroissance* ». En observant les tables de valeurs, Mathieu écrit : « *La valeur de y ne croît ni ne décroît de façon constante* », ce qui laisse penser que Mathieu est sensible à la variation des quantités et qu'il est probablement en mesure de compléter l'action mentale MA3 *« Verbalizing an awareness of the amount of change of the output while considering changes in the input »* (Carlson et coll., 2002. p. 357).

En somme, la dyade est pleinement capable d'identifier le type de fonctions à partir d'une représentation donnée, avec ou sans représentation intermédiaire. Pendant que Mathieu réfléchit sur la croissance et la décroissance des quantités, Emma ajoute plusieurs détails techniques à partir des représentations. En référence à notre cadre théorique, nous pouvons observer qu'Emma et Mathieu sont capables de repérer les variables visuelles (Duval 1988, 1995) des représentations graphiques et réaliser une conversion vers la représentation algébrique en associant chaque variable visuelle de la représentation graphique à l'unité significative correspondante de la représentation algébrique. De plus, les deux élèves sont capables de caractériser la variation des quantités dans différentes représentations à l'aide de différentes actions mentales (Carlson et coll., 2002).

4.1.3 Troisième partie – Les relations

Emma et Mathieu utilisent différents raisonnements afin de déterminer la direction de la relation de dépendance entre deux variables. Mathieu utilise des expressions algébriques mettant en relation les deux variables en cause. Il écrit que « *Pour calculer la circonférence d'un cercle il faut le rayon donc ($C=2\pi r$). On peut donc réécrire le calcul pour la trouver de cette façon ($f(x)=2\pi x$)* ». Mathieu commence par la conversion d'une phrase du registre discursif vers le registre algébrique et complète ensuite avec un traitement dans le registre algébrique (Duval, 1993). Maintenant qu'il associe la circonférence du cercle au symbole $f(x)$ et le rayon du cercle au symbole x, Mathieu conclut que la circonférence dépend du rayon.

De son côté, Emma utilise des verbalisations clés telles que « *Si le rayon augmente, la circonférence augmente elle aussi* » lui permettant de déterminer la direction naturelle de la relation de dépendance. Au troisième contexte[22], Emma écrit que « *les variables sont pareilles donc il n'y a pas de variable qui dépend une de l'autre.* » L'absence de dépendance ne semble inquiéter ni Emma ni Mathieu. De plus, la dyade ne voit aucun problème lorsqu'arrive l'occasion de poser le temps comme variable dépendante.

---

[22] Un piéton se promène dans la rue. On considère la relation entre la distance séparant le piéton de sa maison et la distance séparant le piéton de l'épicerie.

Le questionnaire initial me permet d'établir un portrait global de la compréhension des élèves de la dyade. Spontanément, les participants recourent aux représentations pour exprimer ce qu'est une fonction. Les représentations algébriques et graphiques sont prédominantes. Lorsque vient le temps de travailler avec des représentations, la dyade commence par identifier le type de fonctions représenté soit en utilisant des représentations intermédiaires, soit en interprétant des unités significatives ou des variables visuelles (Duval 1988). Emma et Mathieu apportent séparément plusieurs détails importants. Emma dirige son attention vers les paramètres et les aspects techniques. Elle oriente la direction des relations en utilisant des verbalisations clés. Mathieu dirige son attention vers la croissance et la décroissance des relations. Il détermine la direction des relations en utilisant des représentations algébriques.

À partir de ces constats et en me référant au deuxième chapitre de ce projet[23], il semble important de soulever la grande compréhension processuelle d'Emma qui fait régulièrement référence aux représentations, incluant les représentations discursives. Quant à Mathieu, je constate des réflexes processuels similaires à ceux d'Emma (par exemple l'identification de type de fonctions à partir d'une représentation). Il apporte régulièrement des idées de variation de quantités et de dynamisme, faisant preuve d'une compréhension conceptuelle encore à caractériser.

[23] Section 2.1.3.

Je rappelle au lecteur que le socioculturalisme est la position épistémologique engagée dans ce projet. Comme théories locales, nous faisons appel au cadre théorique constructiviste de Duval sur les registres de représentations, et à celui de Carlson sur les activités mentales liées à la covariation entre variables. Ceci permet de mieux expliquer les réponses des élèves soit d'un point de vue individuel, soit d'un point de vue du travail en équipe. Ce faisant, même si une distinction est faite entre les idées d'Emma et Mathieu, elles seront considérées comme un tout coconstruit. Dans les dialogues qui seront retranscrits plus bas, E désignera l'élève Emma, M l'élève Mathieu, V désignera l'expérimentateur (V pour Vincent) et D désignera le témoin (D pour Daniel).

4.2 Première séance – La piste de course

Nous sommes au début de l'expérimentation. Le témoin (D) est prêt, la dyade est prête, je (V) suis fébrile. Emma (E) nous lit l'énoncé de la situation et avec Mathieu (M), reformule les deux contraintes. Spontanément, ils tracent un cercle avec leur doigt afin d'illustrer un circuit possible. Avec un stylo, Mathieu trace le circuit géométrique en forme de cercle. Ils positionnent le début du circuit au bas du cercle et le contrôleur au centre.

Les séances ont toutes la même structure. Avant de commencer à réfléchir sur les relations, il est important d'identifier les variables. Ce travail a été plus laborieux que prévu. J'ai donc dès le départ clarifié ce qui était entendu par « variable » : « *Quand je te parle d'une variable, c'est une quantité qui va évoluer à travers la situation* ». Emma et Mathieu identifient les variables prévues soient (1) la distance entre la voiture et le contrôleur, (2) la distance parcourue par la voiture sur la piste, (3) la distance à vol d'oiseau de la voiture au départ, (4) la vitesse, (5) le temps ; et une imprévue, (6) le nombre de tours. La distance parcourue et la distance entre la voiture et le contrôleur sont les variables choisies. La première variable mise sous la loupe est la distance parcourue par la voiture sur la piste.

1	V	Alors, ma première question. Toujours en gardant en tête que la voiture circule sur la piste, comment est-ce que la quantité « distance parcourue » évolue dans la situation ?
2	E	Par le nombre de tours que l'auto fait. Plus il fait de tours, plus la distance parcourue augmente.
3	M	Donc, un peu la circonférence fois le nombre de tours.
4	E	Ouais, c'est un peu ça.

Spontanément, Emma établit une relation de dépendance naturelle entre la distance parcourue et le nombre de tours que fait la voiture (ligne 2). Comme dans le questionnaire initial, Emma utilise une verbalisation clé pour diriger une relation de dépendance. À l'aide de cette verbalisation, Emma explique la variation de la distance parcourue selon le nombre de tours. Elle exprime la croissance d'une quantité à l'aide d'une relation de dépendance naturelle. De son côté, Mathieu propose une expression algébrique pour calculer la distance parcourue selon le nombre de tours, mais il énonce cette expression en mots (nous parlerons donc d'un registre algébrico-discursif). Il emploie spontanément une représentation algébrico-discursive pour mettre en évidence la relation de dépendance naturelle. Ainsi, Emma et Mathieu décrivent la variation de la distance parcourue à l'aide d'une relation de dépendance naturelle qu'ils représentent respectivement à l'aide d'une représentation discursive et d'une représentation algébrico-discursive.

La deuxième variable d'intérêt est la distance entre la voiture et le contrôleur. La dyade a rapidement justifié la constance de cette quantité par une caractéristique du cercle, soit que le rayon est toujours de même mesure. Toutefois, Emma identifie deux façons de faire varier cette quantité :

1	V	Alors, la distance entre le contrôleur et la voiture n'augmente pas et ne diminue pas.
2	E	Non, c'est ça. Il faudrait que ça soit le contrôleur qui change de place pour qu'elle augmente ou qu'on agrandisse le parcours (Emma fait un cercle avec ses mains et les sépare pour montrer un circuit géométrique circulaire plus grand) donc là, la distance serait différente.
3	V	D'accord, et si on prend un cercle qui est plus grand (reprenant la gestuelle d'Emma), est-ce qu'il va y avoir une variation dans la distance entre la voiture et le contrôleur ?
4	M	Non.
5	E	Non, ça va rester la même chose, mais la distance va être juste plus grande. Mais ça reste qu'elle va être constante, elle ne changera pas si l'auto tourne. C'est le même rayon.

6	V	Ok, je comprends, parfait. Maintenant, j'aimerais faire du pouce sur le deuxième point que tu as soulevé : qu'est-ce qui arrive si le contrôleur n'est pas exactement au centre du cercle ?
7	M	Ben, il va grandir dépendamment de... admettons qu'il soit là [au bas du cercle, toujours à l'intérieur], alors ça va grandir à partir de là et ça va rapetisser ici.
8	E	Oui, ça va augmenter et ça va diminuer.

À la ligne 7, Mathieu positionne son pouce sur le contrôleur (qui n'est plus au centre) et son index sur le circuit[24], le faisant glisser tout autour de celui-ci. Il accompagne sa gestuelle d'une description de la variation de la distance entre le contrôleur et la voiture. Mathieu partage le circuit en deux : là où la variable croît, et là où elle décroît. Ainsi, le raisonnement est basé sur la position de la voiture et non pas sur la distance parcourue par celle-ci (par exemple : *plus la distance parcourue augmente, plus la distance entre la voiture et le contrôleur diminue*). Emma seconde l'idée de Mathieu en caractérisant également le changement de cette variable en termes d'augmentation et de diminution selon la position de la voiture. Emma et Mathieu ne verbalisent pas de relation de dépendance pour caractériser la variation de la distance entre la voiture et le contrôleur. En effet, ils discutent plutôt de la direction de la variation de la quantité de façon « isolée » en utilisant la représentation du circuit.

---

[24] Voir figure 4.2.

Un point important dans cet extrait est l'idée d'Emma : qu'arrive-t-il si le contrôleur n'est pas exactement au centre du cercle ? Cette question, que j'ai relancée à la dyade, fait la promotion d'un processus dynamique mental de la situation, selon leurs réponses. Les élèves construisent une image mentale dynamique de la situation et de la covariation entre les variables en jeu (Carlson et coll., 2002 ; Hitt 2003). C'est la force des contextes géométriques : permettre de visualiser la variation d'une quantité de façon dynamique. De plus, le contexte géométrique permet de segmenter le circuit et, par déboulement, de segmenter la variation de la quantité (croissante ou décroissante). La gestuelle, facilitant la compréhension de la situation, se base sur la représentation du circuit. La force des contextes géométriques ressortira à plusieurs autres moments dans le DE.

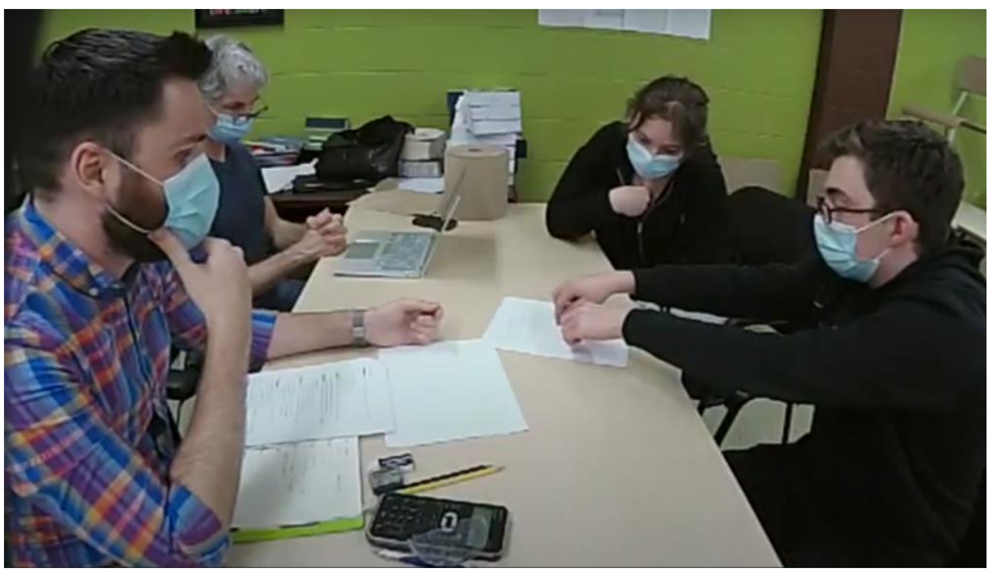


Figure 4.2. Vue d'ensemble du moment où Mathieu utilise ses doigts pour soutenir sa verbalisation.

À la suite de cet échange, je propose de poursuivre la réflexion et demande aux élèves de la dyade de visualiser la situation dans leur tête.

1	V	Imaginez ces deux quantités évoluer simultanément dans la situation. Ça vous dit quoi ? Qu'est-ce que vous avez en tête ?
2	E	Mon image à moi c'est que l'auto fait le parcours, le cercle, puis il y a le contrôleur qui reste là, qui ne bouge pas. Alors ça reste que la distance entre l'auto et le contrôleur reste constante et la distance parcourue de l'auto augmente.
3	V	Et de façon simultanée, qu'est-ce qu'on peut dire ? Quand on va regarder les deux quantités en même temps.
4	M	Pendant que la distance parcourue grandit continuellement (traçant une ligne avec sa main partant d'en bas à gauche vers en haut à droite), la distance entre le contrôleur et l'auto reste la même (faisant une ligne horizontale de gauche à droite avec sa main). (Figure 4.3)

Emma décrit la variation des deux quantités séparément et n'établit pas de relation entre les deux variables. La réponse de Mathieu peut sembler plus sensible à l'éventualité d'une relation lorsqu'il utilise la locution « *pendant que* », mais sa gestuelle (Figure 4.3) montre qu'en fait, Mathieu exprime lui aussi les variations des deux quantités séparément.

Figure 4.3. Gestuelle de Mathieu qui soutient sa verbalisation.

En effet, lorsque Mathieu trace une diagonale (pour exprimer la croissance de la distance parcourue) et une horizontale (pour exprimer la constance de la distance entre la voiture et le contrôleur) avec sa main, il fait référence à deux représentations graphiques distinctes. De ceci découlent deux questions :

a) Pourquoi la dyade réfléchit-elle aux variables séparément ?
b) Est-ce que de façon implicite, la dyade fait référence à la variable temps comme variable indépendante et la variable distance parcourue comme variable dépendante ? Et avec la distance entre la voiture et le contrôleur comme variable dépendante ?[25]

Une des réflexions proposées dans ce projet de recherche est la direction[26] que l'on donne aux relations de dépendance. Je propose donc à la dyade de questionner la direction de la relation à partir de la verbalisation de Mathieu (même s'il réfléchit aux variables séparément). Voici ce qu'ils en pensent.

1	V	Ce que vous m'avez dit c'est que « quand la distance parcourue augmente, la distance entre la voiture et le contrôleur reste la même ». Est-ce qu'on pourrait prendre cette relation dans l'autre sens ? Est-ce qu'on pourrait dire « quand la distance entre la voiture et le contrôleur reste la même, la distance parcourue augmente » ?

[25] Janvier (1993) fait référence à ceci (point b), c'est-à-dire d'inclure le temps dans l'explication d'une situation ou d'un phénomène.

[26] Voir note de bas de page 7 (p. 19) et Section 2.2.1.

2	M	Ben, j'imagine. Le fait que la distance entre le contrôleur et la voiture augmente ou non ça ne va pas influencer la distance parcourue.
3	E	Donc ils ne sont pas en relation, c'est ça que ça veut dire ?
4	V	Qu'est-ce que tu veux dire ?
5	E	Ben, ce n'est pas une variable dépendante et une variable indépendante ; l'autre ne dépend pas de l'autre.
6	V	Et voudrais-tu me dire quelle variable ne dépend pas de laquelle ?
7	E	La distance parcourue ne dépend pas de la distance entre la voiture et le contrôleur.
8	V	D'accord, et avec cette idée-là, est-ce qu'on est capable de voir la relation dans l'autre sens ?
9	M	Ben non, parce que ça ne change pas que la distance entre la voiture et le contrôleur ne dépend pas de la distance parcourue. C'est plus la position dans la piste qui a une influence, admettons que le contrôleur ne soit pas dans le milieu.

Il est intéressant de voir que Mathieu a une notion de fonction où les « variables doivent varier ». Dans l'histoire des mathématiques[27], c'est Bernoulli (1718) qui a donné la première définition de fonction :

[27] Notes du cours MAT3225, version 2020.

> On appelle fonction d'une variable une quantité composée de n'importe quelle forme par cette variable et par des constantes.
>
> Après, Euler (1748, p. 1-2) a précisé cette notion :
>
> 1. Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur.
>
> 2. Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.
>
> 3. Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.
>
> 4. Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.
>
> 5. Une fonction d'une variable est donc aussi une quantité variable.[28]

Tout semble indiquer que Mathieu a une notion de fonction analogue à ce qui est sous-tendu par le point 5 de la définition d'Euler. Quand on change la position du contrôleur pour le placer ailleurs qu'au centre du cercle, la relation de dépendance devient plus claire pour Emma et Mathieu.

---

[28] Un autre point intéressant du point de vue de la définition d'Euler, c'est qu'implicitement le temps est présent : « *1. Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve* toujours *la même valeur.* » (Les caractères romains sont de nous).

La relation de dépendance naturelle est que la distance entre le contrôleur et la voiture dépend de la distance parcourue. C'est la relation précédemment exprimée par Mathieu. Au début, il ne semble pas avoir de difficultés à inverser l'orientation de la relation, car pour lui, les variables n'ont pas d'incidence l'une sur l'autre. De cette idée, Emma déduit que s'il n'y a pas de dépendance entre les variables, alors il n'y a pas de relation. Mathieu rectifie sa réponse et affirme que la relation ne peut pas être orientée dans le sens non naturel, car il n'y a pas de dépendance. Toutefois, comme Emma, Mathieu a répondu que la circonférence dépend du rayon dans son questionnaire initial, donc les deux affirmations de Mathieu peuvent paraître contradictoires puisque celui-ci exprime une relation dans un sens quand le contrôleur serait au centre mais dans l'autre sens quand le contrôleur serait ailleurs.

La direction de la relation semble être influencée par le contexte. En effet, dans le questionnaire initial, la réflexion sur la dépendance entre le rayon et la circonférence d'un cercle est purement géométrique. Il est plus naturel de verbaliser la circonférence du cercle selon son rayon. « *Si le rayon augmente, la circonférence augmente elle aussi* », c'est ce que l'on peut lire sur la copie d'Emma. Dans le cadre de ce problème, il est plus naturel de verbaliser la distance entre le contrôleur et la voiture (rayon) selon la distance parcourue (circonférence). La direction de la relation de dépendance est donc teintée par le contexte.

On comprend également que pour les élèves de la dyade, l'idée de dépendance est très importante dans la définition de ce qu'est une relation. Il est difficile pour eux d'établir une relation entre ces deux quantités, car elles ne sont pas dans une relation de cause à effet. Ceci peut expliquer pourquoi la dyade réfléchit aux variables séparément.

La dernière phase de cette première séance a pour objectif de représenter la relation entre la distance parcourue et la distance entre le contrôleur et la voiture. Or, comme le montre le prochain extrait, il est difficile pour la dyade de représenter cette relation.

1	V	Là, on vient de parler d'une relation entre deux quantités. On vient de parler de la relation entre la distance parcourue et la distance entre le contrôleur et la voiture. Ce que je vous demande de faire, c'est de me représenter cette relation, de la façon que vous voulez.
2	M	J'essaie de trouver une manière que… Parce que là, ça ne peut pas vraiment… Parce qu'il n'y a aucune variable qui est dépendante de l'autre.
3	E	Ouais, pas de relation, pas de… ça ne marche pas.
4	M	Elles ne peuvent pas évoluer en même temps, en dépendant l'une de l'autre.
5	V	Ok, je comprends ce que tu veux dire.
6	E	Le truc, c'est que, moi ce que je pense dans ma tête, c'est que mettons que s'il y en a un qui augmente, l'autre va pas augmenter aussi, il ne va pas diminuer, il n'y a comme rien qui marche ensemble. Admettons, ça pourrait ne pas être une fonction, dans ma tête je pense à un graphique, mais ça ne marche pas dans cette situation-là.

7	V	Qu'est-ce qui fait que ça ne fonctionne pas ?
8	E	Ben parce qu'ils n'ont pas de relation, il n'y a pas de variable dépendante ou indépendante, donc là ça ne marche pas ensemble, c'est pour ça.

Comme prévu, la dyade tente de représenter cette situation (contrôleur au centre du cercle) à l'aide d'une représentation graphique. Toutefois, il est clair que la dyade éprouve certaines difficultés. Aux lignes 2 et 4, Mathieu soulève que l'absence de dépendance pose problème. Emma ajoute à la ligne 8 que cette absence de dépendance implique une absence de relation entre les deux variables. Ce faisant, la création d'une représentation devient difficile pour la dyade.

Dans le cas où le contrôleur est au centre, on pourrait relier les affirmations de la dyade à la définition d'Euler. Pour Euler, il faut exclure les fonctions constantes de ce qu'on entend être une fonction : « *5. Une fonction d'une variable est donc aussi une quantité variable.* » En fait, Euler a donné des exemples de « fonctions apparentes » (Figure 4.4). Ce problème dans l'histoire des idées mathématiques émerge dans la classe avec des élèves au secondaire.

de la formule $\sqrt{(9 - zz)}$. Au reſte, il n'eſt pas rare de rencontrer des expreſſions qui ne ſont que des fonctions apparentes ; car, quelque valeur qu'on donne à la variable, elles conſervent toujours la même valeur, comme z^0 ; 1^z ; $\frac{aa - az}{a - z}$. Ces expreſſions, ſous la forme apparente de fonctions de variables, ſont réellement des quantités conſtantes.

Figure 4.4. Euler, L. (1796). *Introduction à l'analyse infinitésimale.*

Lorsque le contrôleur n'est pas au centre, Mathieu visualise facilement la distance entre la voiture et le contrôleur varier selon la position de la voiture sur la piste. Cette visualisation n'est pas directe si c'est la distance parcourue qui est considérée. Dans ce cas, Mathieu conçoit la situation en deux temps : la distance entre la voiture et le contrôleur selon la position de la voiture et ensuite, la position de la voiture selon la distance parcourue. Comme si Mathieu tentait en vain de coordonner la composition de deux fonctions.

Au vu de cette difficulté (et n'en saisissant pas encore la source), je demande à la dyade s'il n'y aurait pas un autre moyen de représenter cette relation. Mathieu propose de faire un graphique à une seule dimension.

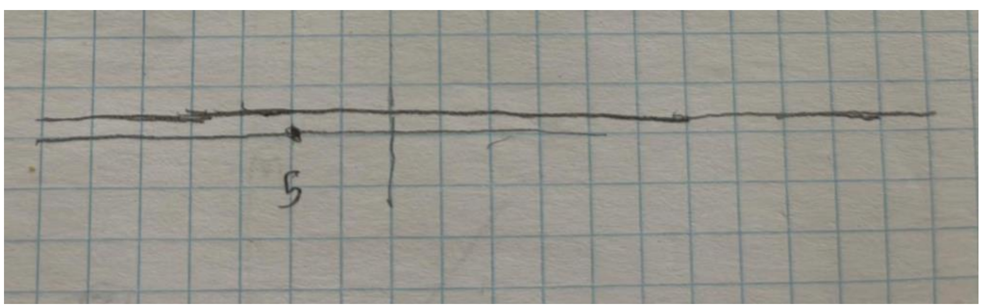


Figure 4.5. Représentation spontanée non institutionnelle de Mathieu.

Dans cette représentation spontanée, Mathieu trace un segment de droite représentant une droite numérique (ou « *un graphique à une dimension* »). Le « 5 » qui y est inscrit est une valeur arbitraire que Mathieu a posée pour quantifier la distance entre le contrôleur et la voiture. Le point qui est positionné au-dessus du « 5 » représente la constance de la variable. Le segment de droite qui est au-dessus de la droite numérique représente la croissance de la distance parcourue. Je demande à

Mathieu selon quelle variable la distance parcourue évolue dans sa représentation. Sans hésitation, il me répond le temps et souligne qu'il ne s'agit pas d'une des deux variables identifiées dans la situation.

De son côté, Emma continue de travailler avec les représentations graphiques et me demande :

1	E	Est-ce que ça pourrait être deux choses différentes ? Admettons dans le graphique, qu'il y ait deux fonctions ? Ou est-ce qu'il faut que ça soit ensemble ? Comprends-tu ce que je veux dire ?
2	V	Oui, oui.
3	E	Parce que oui c'est selon le temps la plupart du temps. Comme ton *x*, la plupart du temps c'est le temps, mais nous dans notre tête, on est là et ça ne marche pas. Deux distances ensemble, ça ne marche pas.

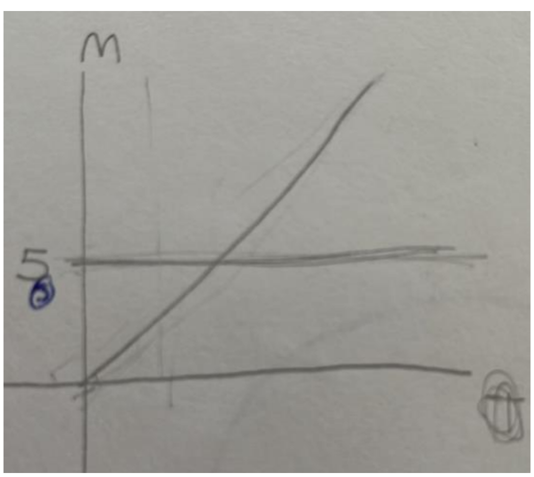


Figure 4.6. Représentation graphique spontanée institutionnelle d'Emma.

La production d'Emma est une représentation graphique qui illustre les deux variables questionnées en fonction du temps. On peut y voir la croissance de la distance parcourue et la constance de la distance entre le contrôleur et la voiture. Mathieu produit la même représentation.

1	M	C'est comme ce que je disais tantôt, ce serait deux fonctions différentes, qui ne sont pas dépendantes.
2	E	Donc ça serait deux graphiques différents ? Parce que s'ils ne sont pas en relation, on ne peut pas les mettre dans le même graphique.
3	V	Et supposons qu'on les met en relation et qu'on essaie de représenter ça.
4	E	Plus le temps avance, il [la distance entre le contrôleur et la voiture, on peut penser que « il » désigne le contrôleur] va rester constant. Donc même si on avance, on avance, ben il va toujours être le même. Tandis que la distance parcourue de l'auto, plus le temps avance, ben plus l'auto bouge, plus la distance parcourue augmente.

Dans cet extrait, on peut lire qu'Emma propose de scinder la relation (distance voiture-contrôleur selon distance parcourue) en deux autres relations. Elle suggère d'abord de regarder la dépendance de la distance parcourue selon le temps. Cette relation fonctionnelle n'est pas directe : « […] plus le temps avance, ben plus l'auto bouge, plus la distance parcourue augmente. » Emma semble, tout comme Mathieu, devoir coordonner la composition de deux fonctions : la position de la voiture selon le temps et la distance parcourue selon la position de la voiture. Ensuite, Emma développe une deuxième relation : la distance entre la voiture et le contrôleur selon le temps, une relation directe. Ainsi, les deux variables initiales sont chacune définies selon une relation de cause à effet dont le temps est la cause.

En somme, les deux élèves de la dyade tentent de coordonner différentes compositions de fonctions. D'un côté, la composition permet à Mathieu d'établir une relation indirecte entre la distance voiture-contrôleur et la distance parcourue puisqu'il ne fait pas le pont entre la distance parcourue et la position de la voiture sur la piste (peut-être parce qu'il n'y a pas de jalons numériques qui permettraient de chiffrer la position sur la piste). D'un autre côté, la composition d'Emma permet d'ancrer la situation dans un repère temporel, ce qui semble aider Emma à verbaliser la variation des deux quantités séparément. Cela engendre toutefois une grande difficulté à construire une représentation graphique illustrant la relation entre la distance voiture-contrôleur et la distance parcourue.

N'ayant pas encore saisi ces problèmes, je leur demande :

1	V	Moi, ce que j'ai envie de vous poser comme question c'est : Qu'est-ce qui fait en sorte qu'on ne peut pas mettre ces deux quantités-là [distance parcourue et distance voiture-contrôleur] en relation ?
2	M	(Sans hésiter) Ben il me semble qu'une variable indépendante t'as pas vraiment le contrôle dessus. C'est l'autre qui va faire en sorte que l'autre a le contrôle sur l'autre. Genre, admettons, la valeur x a le contrôle sur la valeur y. Tant qu'il n'y a pas une valeur qui va définir par quoi, admettons, que tu vas multiplier, diviser ou additionner la variable y, tu ne peux pas vraiment faire un truc en relation.
3	E	Effectivement, parce qu'il n'y en pas une qui dépend de l'autre. Comme le temps – ben il peut y avoir autre chose que le temps, c'est juste que nous la plupart du temps c'est le temps. C'est souvent ça.

Encore une fois dans cet extrait, on peut comparer la conception des deux élèves avec la définition de Bernoulli et Euler. Dans les deux cas, leur définition fait appel à la construction d'une expression algébrique. Selon la définition de Bernoulli : « *On appelle fonction d'une variable une quantité composée de n'importe quelle forme par cette variable et par des constantes* » et Mathieu dit : « *Genre, admettons, la valeur x a le contrôle sur la valeur y. Tant qu'il n'y a pas une valeur qui va définir par quoi, admettons, que tu vas multiplier, diviser ou additionner la variable y, tu ne peux pas vraiment faire un truc en relation.* » Pour Mathieu, une fonction doit être déterminée par une expression algébrique qui comporte la variable, des constantes et les opérations usuelles.

Il est clair, désormais, que l'idée de dépendance est au centre de leur définition de relation. Si une variable n'a pas d'incidence sur l'autre variable, alors il n'y a pas de relation. Puisque les deux élèves ne voient pas de relation, ils éprouvent une grande difficulté lorsque vient le temps de concevoir une représentation. Pour pallier cette difficulté, Emma plonge la situation dans un repère temporel, scinde la relation en deux sous-relations et coordonne une composition de fonctions se ramenant au temps. Mathieu tente de coordonner une composition de fonctions reliant la distance parcourue et la distance voiture-contrôleur par une troisième variable, la position de la voiture. Cette solution provient du fait que les deux variables entretiennent séparément une relation de dépendance avec le temps, ouvrant ainsi la possibilité de concevoir une représentation.

Est-ce que la dyade conçoit le graphique
comme une courbe se déployant dans le temps ?

Lors de l'expérimentation, je ne constatais pas du tout cette difficulté. Ainsi, pour faire avancer les réflexions, j'ai proposé de prendre l'idée qu'Emma avait suggérée plus tôt dans la séance, c'est-à-dire de positionner le contrôleur ailleurs qu'au centre du cercle, mais toujours à l'intérieur de celui-ci. Mathieu exprime la variation de la distance entre le contrôleur et la voiture en traçant une vague dans les airs. Ensuite, il trace cette vague sur la feuille et explique que la valeur en « y » est la distance questionnée et la valeur en « x » est le temps. Encore une fois, l'expression de la variation de la distance entre le contrôleur et la voiture est représentée et interprétée selon le temps. Je décide donc d'orienter la réflexion sur la représentation de Mathieu.

1	V	Qu'est-ce qui nous dit qu'on descend comme une courbe et qu'on ne fait pas, par exemple, une ligne brisée ?
2	M	J'ai de la misère à le mettre dans mes mots. C'est parce que ça ne va pas arrêter abruptement de rétrécir la distance, ça va… La distance va réduire de plus en plus mais de plus en plus lentement. Et ça réaugmente de plus en plus vite. C'est pour ça que ça fait comme une courbe, comme ça.
3	E	Mais ça marche aussi avec les lignes brisées.
4	V	Donc ça marche ici aussi. D'abord, qu'est-ce qui fait la différence entre ligne brisée et ligne courbe ? Ça serait lequel des deux qu'on devrait utiliser pour représenter la variation de cette quantité-là ?
5	M	Honnêtement, maintenant que…

6	E	Avoue ein ?!
7	M	Je doute un peu, là.
8	E	Moi je le mettrais en ligne brisée parce que je pense que quand tu fais une ligne courbe, tu diminues, mais tu augmentes tout de suite.
9	M	Genre comme ça ? C'est une courbe, mais ça augmente tout de suite. Pas juste une courbe parfaite si on peut dire. Deux courbes, mais ça finit en pointe.
10	V	Un peu comme un mélange entre un V et un U.
11	M	Ouais.

La proposition d'utiliser une ligne brisée fait beaucoup hésiter la dyade. Afin de les amener à prendre une décision entre les deux représentations, je leur propose d'imaginer un segment qui relie le contrôleur à la voiture et leur demande d'imaginer le changement dans la longueur de ce segment. Emma utilise une gestuelle pour représenter ce qu'elle s'imagine de la situation. En traçant un cercle avec une main, elle illustre le changement de la longueur du segment avec l'autre, soulevant ainsi la croissance et la décroissance de cette quantité.

Encore une fois nous pouvons faire une analyse des observations de la dyade en termes de la notion de fonction d'Euler. Pour Euler la notion de continuité était liée à ce que la courbe représentée dans le plan n'ait pas de changement de direction net et ne peut être définie par plus d'une expression algébrique (ou par parties). Dans ces cas, il concevait les fonctions comme discontinues. Le doute de la dyade pour la ligne brisée, c'est comme un changement de direction net et non d'un mouvement fluide. Cette interprétation est plus fondée avec l'extrait suivant :

1	V	Alors vous avez une décision à prendre. Laquelle [parmi les deux représentations] vous semble la plus cohérente pour représenter la situation? Est-ce que ce serait la ligne brisée ou la ligne courbe ?
2	M	Moi j'aurais dit la ligne courbe.
3	E	Je ne sais pas.
4	V	Ok. Imagine encore la situation, juste pour t'aider à faire ton choix. Imagine encore la distance entre la voiture qui circule sur le circuit et le contrôleur. Fais-toi une image dans ta tête.
5	E	Ça serait vraiment ça (pointant la ligne courbe) parce que là (pointant la ligne brisée) il y aurait eu un arrêt.
6	M	C'est comme s'il avait soudainement, genre très abruptement, réduit la distance.
7	E	Ouais, tandis que là, ça tourne mais ça commence vraiment à diminuer et on le voit. Tandis que là…
8	V	Ok je comprends. Dans le fond, ici, tu me dis que – je vais reprendre le mot que tu as dit tantôt – c'est plus « *smooth* ». L'aspect *smooth* dans le changement de la distance.

Finalement, la dyade arrête son choix sur la ligne courbe. Pour Emma et Mathieu, je pense que le contexte devient un outil très important. En effet, non seulement il l'utilise pour verbaliser le changement dans les deux quantités questionnées, mais il permet également de visualiser ces changements. C'est le dynamisme de la situation qui permet à Emma de dire que le changement dans la variation de la distance entre le contrôleur et la voiture est *smooth*.

Débuter le DE avec cette tâche a pour objectif d'explorer les premières idées de la dyade. Cette première séance me permet de comprendre que la notion de dépendance entre deux variables est au cœur de leur conceptualisation d'une relation. À plusieurs reprises, on constate que l'absence de lien de cause à effet entre les deux variables choisies implique une absence de relation. Ce faisant, la dyade exprime la variation des deux quantités séparément, à l'aide du contexte dynamique. Or, le dynamisme de la situation engendre une description de la variation des quantités selon le temps – déjà une habitude qu'a la dyade – ou selon une autre variable ayant un impact ; par exemple la variable « position sur la piste ». Ce glissement peut également s'expliquer par la présence d'un lien de cause à effet entre les variables et le temps, facilitant la création d'une relation et d'une représentation graphique, interprétée comme une courbe se déployant dans le temps.

En résumé, nous pouvons constater que la conception de fonction des deux élèves sous-tend que :

a) Une fonction doit être déterminée par une expression algébrique qui comporte la variable, des constantes et les opérations usuelles.

b) Une fonction est nécessairement une relation de dépendance (ou de cause à effet).
c) Le temps est un outil d'interprétation.
d) Le temps est une variable qui est toujours (au moins implicitement) présente dans l'idée de *variation*.
e) Le pont entre « position sur la piste » et « distance parcourue » n'est pas trivial.
f) La composition de fonction aide à l'interprétation puisqu'elle se rapproche du phénomène de cause à effet et qu'elle permet de mettre le temps en évidence dans une situation.
g) Les élèves de la dyade ont souvent rencontré le temps comme variable indépendante.
h) La fonction constante pose problème à la dyade.

Nous pouvons résumer cette section en disant que la conception des deux élèves est similaire à celle d'Euler, et selon le cadre théorique de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau 1956/1983, 1998), si un obstacle cognitif est repéré dans la classe de mathématiques et dans l'histoire des mathématiques et qu'il est constitutif de la genèse même du concept, cela signifie qu'on a affaire à un obstacle épistémologique. Selon Brousseau, il faut chercher des tâches qui permettent aux élèves de surmonter l'obstacle cognitif, et c'est exactement ce que nous proposons aux deux élèves. Si on cherche à promouvoir la réflexion, on a plus de chances de guider les élèves vers une réussite (voir par exemple le casse-tête de Brousseau lié à un obstacle épistémologique au sujet de la proportionnalité).

Dans le prochain problème, les deux variables ne sont pas en relation de cause à effet. Est-ce que la dyade pourra en représenter la relation ? Le temps sera-t-il employé comme outil pour caractériser les variations ? Et est-ce que la composition sera également employée ?

4.3 Deuxième séance – Distances

Acte deux, prise un : Emma nous fait la lecture de l'énoncé. Elle décrit ce qu'elle comprend de la situation pendant que Mathieu réfléchit déjà aux questions que je m'apprête à poser. Avant de débuter, je propose à l'équipe d'observer une représentation dynamique de la situation réalisée à l'aide de Geogebra. Puis, en conservant la même structure, j'ouvre l'exploration en identifiant les deux variables[29] qui seront questionnées aujourd'hui : la distance entre la voiture et la ville A (VA[30]) et la distance entre la voiture et la ville B (VB[29]). Plus tard, la dyade construira une représentation de la situation.

Distances

Une voiture se déplace le long d'une route. Deux villes, VilleA et VilleB, sont situées de part et d'autre de cette route.

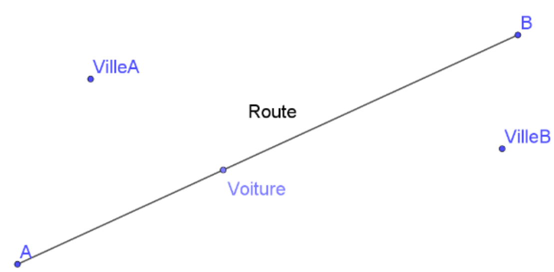


Figure 4.7. Énoncé de la situation *Distances*.

[29] Ce deuxième problème marque aussi l'évolution dans la trajectoire de convergence des idées. La dyade ne peut pas choisir les variables, mais elle pourra choisir la façon de représenter ses idées.

[30] Il s'agit d'un raccourci plutôt pratique qu'Emma suggère plus tard dans la séance.

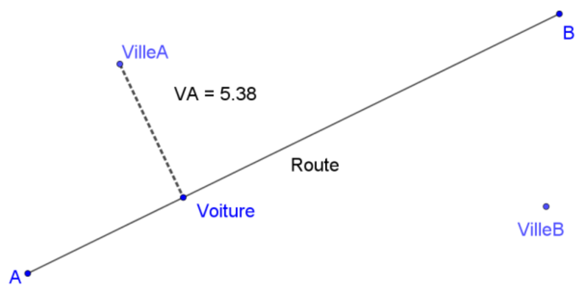


Figure 4.8. Position de la voiture où VA est à son minimum.

Mathieu décrit la variation de VA en partageant le segment AB en deux : là où VA diminue et là où VA augmente. Ce partage est effectué en considérant la position de la voiture où VA est à son minimum. Il suppose un sens privilégié de parcours (et donc par la bande, un déroulement dans le temps), du point A vers le point B.

Emma seconde l'idée de Mathieu et ajoute que VA dépend de la position de la voiture sur AB. Ensuite, ils utilisent un raisonnement analogue lorsqu'ils décrivent la variation de VB. Lors de ses explications, Mathieu trace dans les airs une courbe qui a la forme d'un crochet. Encore une fois, cette gestuelle laisse à penser que Mathieu exprime dans un graphique le changement de VA selon le temps.

L'étape suivante est d'imaginer les deux distances (VA et VB) varier simultanément pour ensuite représenter leur relation[31]. Emma tente de verbaliser la relation entre les deux quantités mais elle les décrit séparément et selon la position de

[31] La dyade n'est pas au fait qu'il s'agit d'une relation non fonctionnelle.

la voiture. Mathieu saisit son crayon et commence à construire une représentation graphique.

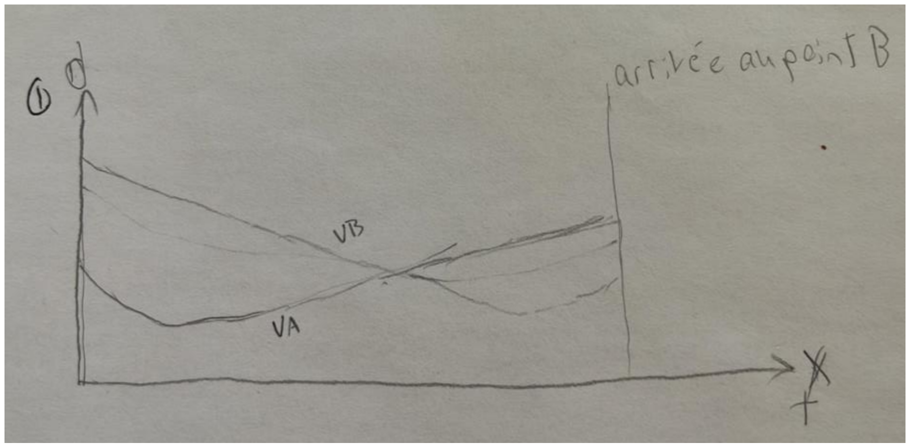


Figure 4.9. Représentation graphique spontanée institutionnelle de Mathieu.

Après qu'il ait complété sa représentation, je lui demande d'en identifier les deux axes : les distances en y et le temps en x. Ainsi, ni Emma, ni Mathieu n'expriment de relation entre les deux variables. Tous deux recourent à des variables externes, c'est-à-dire la position de la voiture ou le temps. Emma se rend compte de la situation et me demande :

1	E	Ok, mais quand tu dis « les deux variables », là. Les deux variables sont dans le graphique. Donc il y en a un en y et il y en a un autre en x.
2	V	Oui, on peut faire ça.
3	E	(S'adressant à Mathieu) Tu mettrais lequel en x et tu mettrais lequel en y ?
4	M	Ben je ferais exactement le même graphique (pointant sa représentation), ici ça

		serait la longueur du segment et ça…
5	E	(S'adressant à Vincent) Quand tu dis « deux variables », là… Je ne suis pas sûre de comprendre.
6	V	Ici, la relation qu'on veut observer c'est la distance entre la voiture et la ville A en relation avec la distance entre la voiture et la ville B.
7	E	Donc le temps n'a pas rapport là-dedans. VA, il va diminuer, diminuer, mais admettons quand lui [VA] va augmenter le VB va encore diminuer. Donc là c'est une relation entre les deux. Mais je ne suis pas capable de la mettre dans un graphique.

Dans cet extrait, Emma se détache de la variable *temps*. C'est ce qu'elle démontre lorsqu'elle se questionne sur le choix des axes (ligne 3) et lorsqu'elle tente de verbaliser une relation de variation (ligne 7). Toutefois, ça ne semble pas être le cas de Mathieu : il conserve l'idée de représenter l'évolution des deux distances selon le temps. Peu après, Emma réfléchit à voix basse :

1	E	Les deux grandissent en même temps, mais il y en a un qui augmente pendant que l'autre diminue. Après, il augmente encore mais les deux augmentent. Donc c'est diminue, diminue, augmente, diminue, diminue, augmente, augmente. Ouin, non…
2	V	Reparle-moi de ça. Qu'est-ce que tu viens de dire ?
3	E	(Traçant sur la feuille) Ben il y a un moment que, genre, les deux ils diminuent mais je ne sais pas comment le mettre en graphique. Les deux diminuent. À un moment donné, il y en a un qui augmente, mais l'autre reste à diminuer et euh… C'est parce

		que je ne suis pas capable de les mettre ensemble. Je ne suis pas capable de faire la relation ensemble. Ok je vais les faire séparées.

Emma trace les axes d'un graphique et, tout en verbalisant la variation de chacune des distances séparément, elle trace deux courbes. Entre temps, le témoin me propose de demander à Emma d'identifier les axes de sa représentation graphique spontanée. Sachant très bien ce qui cloche, Emma identifie l'axe vertical par un *D*, signifiant *distance* et l'axe horizontal par un *T*, signifiant *temps*.

1	E	Je sais où tu t'en vas, mais je ne suis pas capable de l'expliquer, tu comprends ?
2	V	Ok, mais essaye de m'en parler alors.
3	E	C'est qu'il y a une relation entre les deux mais je ne sais pas comment l'expliquer. Il y a un moment où le VA augmente et le VB diminue. C'est ça la relation que tu veux qu'on essaie, mais graphiquement, je ne suis pas capable.
4	V	Parle en moi en mots alors.
5	E	Au début, mettons qu'on part à 0. Les deux diminuent. À un moment donné, le VA va être au plus petit pendant un moment et il va commencer à grandir, à s'allonger. Tandis que VB va continuer à diminuer et plus loin, va commencer à augmenter.

Emma décrit les variations des deux distances séparément et les coordonne autour d'un temps implicite qui marque l'évolution de la situation : « *Au début, … à un moment donné, … pendant un moment, … tandis que (dans le sens de "en même* *temps que")* ». Elle segmente la situation à l'aide de repères qui identifient les changements de variations. Le temps apparaît en abscisse dans sa représentation graphique spontanée. Emma souligne à plusieurs reprises qui lui est difficile de représenter la relation entre VA et VB à l'aide d'une représentation graphique.

Qu'est-ce qui empêche la dyade de produire une représentation graphique illustrant VA selon VB, ou VB selon VA ?

1	V	Là, on vient de parler de la relation, mais sans le temps. Qu'est-ce qui rend la chose difficile de mettre ça dans un graphique ? Qu'est-ce qui te bloque ?
2	E	C'est de les mettre ensemble.
3	M	De un, c'est des données de même unité si on peut dire. C'est toutes des distances. La distance entre la ville A et la voiture ne dépend pas de… Parce qu'habituellement, dans une fonction, il y en a un qui dépend de l'autre. Je ne sais pas si on peut dire ça dans tous les cas dans un graphique mais en tout cas, faudrait qu'il y en ait un qui fasse changer l'autre.
4	V	Qu'est-ce que tu veux dire par là ?
5	M	Faudrait qu'il y ait un segment qui fasse changer l'autre pour les mettre en relation.
6	V	Et si je disais : « Si je fais diminuer la distance entre la voiture et la ville A, est-ce

		que ça a un impact sur la distance entre la voiture et la ville B ? »
7	M	Admettons que VA augmentait, ben là ça force la voiture à bouger si on veut que ça [VA] augmente, parce que tu ne peux pas vraiment déplacer une ville ! Donc là, ça forcerait aussi la distance entre la voiture et la ville B à réduire. C'est la position de la voiture qui va vraiment influencer la distance. Donc si on définit le segment entre la voiture et la ville A comme étant le facteur qui va faire bouger la voiture, ben là effectivement la distance entre la voiture et la ville B va dépendre de VA. Donc si la voiture doit rester sur AB et que la ville A ne peut pas bouger, la distance VA va affecter la position de la voiture.

Pour Mathieu, la nature des deux variables pose problème. Dans sa conceptualisation d'une relation, il octroie une grande importance à l'idée de dépendance réelle et non arbitraire. *Comment une distance pourrait avoir une incidence sur une autre distance ?* Puisqu'il ne conçoit pas de relation de dépendance naturelle entre VA et VB, Mathieu identifie la source de la variation des quantités : la position de la voiture.

Maintenant qu'il tient une relation de dépendance, Mathieu en questionne la direction. Il exprime la relation entre VA et VB par l'intermédiaire de la position de la voiture, qui crée une relation de dépendance avec les deux distances. VA influence la position de la voiture et la position de la voiture influence VB. Par transitivité, Mathieu conclut que VA influence VB : *« Donc si on définit le segment entre la voiture et la ville A* [comme] *étant le facteur qui va faire bouger la voiture, ben là, effectivement, la distance entre la voiture et la ville B va dépendre de VA. »*

La relation de dépendance naturelle est importante dans la définition de Mathieu, à tel point qu'il sent le besoin d'en baliser le contexte pour donner un aspect plus concret, plus réel, à la relation. En effet, afin de retrouver une dépendance entre les deux variables identifiées, Mathieu souligne que la voiture ne quitte pas le segment AB et que les villes ne peuvent être déplacées. Ayant spécifié ces deux aspects, la relation « VB dépend de VA » semble plus réelle.

Le problème est de représenter la relation entre VA et VB dans un graphique. Quelle variable devrait aller sur l'axe horizontal et quelle variable devrait aller sur l'axe vertical ? Je propose donc à la dyade d'essayer de nouveau, en indiquant qu'ils ne sont pas obligés d'utiliser un graphique. C'est alors que Mathieu propose spontanément d'utiliser une table de valeurs.

1	M	On peut le faire avec des données, une table de valeurs.
2	V	Ok, et là on serait capable de représenter la relation entre VA et VB ? Tout à coup il y a une relation [sans l'intermédiaire de la position de la voiture] ?
3	E	Non, non vraiment pas…
3	M	Non, c'est plus euh…. Ouin…
4	V	Parce que tu me dis qu'on pourrait faire une table de valeurs si on avait, mettons,

		les longueurs. Après ça, est-ce qu'on pourrait placer ça dans un graphique ?
5	M	Techniquement oui… Dans ma tête, ça peut se placer dans un graphique, mais je sais pas si …

Mathieu comprend qu'il est possible de représenter la relation entre VA et VB, il comprend le processus, mais il vit tout de même un blocage. Ce blocage se situe dans l'opposition de deux idées. D'une part, Mathieu comprend la procédure sous-jacente à la production d'une représentation graphique à partir d'une table de valeurs. D'autre part, Mathieu établit une relation « indirecte » (faisant intervenir la position de la voiture) entre les deux variables. Il travaille donc avec trois variables.

6	E	… Mais c'est parce qu'on sait pas c'est quoi la sorte de fonction. Parce que tu sais, la fonction ressemble à quoi, là ? Elle ressemble à une vague ? Elle ressemble à une ligne brisée ? Elle ressemble à quoi ?
7	V	Et si je te posais la question, tu dirais quoi ? Est-ce que ça serait des vagues ou des lignes brisées ?
8	E	(À Mathieu) Toi tu mettrais quoi ?

À ce moment-là, Mathieu tente une nouvelle représentation. Il explique que pour une même augmentation de la distance entre le point A et la voiture, on peut reproduire les différentes longueurs du segment VA à la verticale. Une fois les différentes mesures prises et alignées verticalement, il suffit de relier les extrémités des segments pour créer une courbe. Ici, Mathieu est capable de créer une représentation graphique sans avoir recours à une expression algébrique ni à une table de valeurs. Le travail est étroitement lié à des processus plus souvent rencontrés en géométrie. Toutefois, l'idée de Mathieu met en relation une nouvelle variable. En effet, il exprime une relation de dépendance naturelle selon laquelle VA dépend de la distance entre le point A et la voiture. Voilà une relation de *dépendance* satisfaisante ! Mais il ne s'agit toujours pas de la relation entre VA et VB et elle implique implicitement une chronique dans la mesure où le parcours est alors conçu avec un point de *départ* A et un point d'*arrivée* B.

Plus tôt dans la conversation, Emma et Mathieu ont tous deux soulevé que la nature des variables posait problème. Cependant, Mathieu ne semble pas éprouver de difficultés à relier la *distance* entre le point A et la voiture et la *distance* VA. J'en conclus donc que la nature des variables n'est pas un réel problème dans la réalisation d'une représentation graphique.

Il y a un lien à établir entre les multiples variables qui ont émergé de la situation. Lorsque VA est mise en relation avec VB, la dyade soulève une difficulté relative à la nature des variables, et a des difficultés à construire un graphique. Lorsque VA est mise en relation avec le temps, tout semble bien aller. Ils sont en mesure de construire un graphique représentant adéquatement la relation. Il en va de même pour la relation entre VA et la distance entre le point A et la voiture.

Dans le cas où l'on observe la croissance de VA selon le temps, la variable indépendante (le temps) ne fait que croître. C'est la même chose lorsqu'on observe la croissance de VA selon selon la distance du point A à la voiture (variable indépendante) : la variable indépendante ne fait qu'augmenter.

Toutefois, lorsqu'on observe la variation de VA selon VB, on constate deux différences importantes. D'abord, cette relation n'implique pas de variable indépendante, ce qui pose un grand défi à la dyade pour qui la notion de dépendance est centrale à la notion de fonction. Ensuite, il y a plus d'une valeur de VB à associer aux valeurs de VA et plus d'une valeur de VA à associer aux valeurs de VB, qualifiant ainsi les relations VA selon VB et VB selon VA de relations non fonctionnelles.

En fait, ils ne se sont jamais rendu compte du fait que la relation VA selon VB n'est pas fonctionnelle. Dans leur idée, il faut une relation de dépendance. Puisqu'ils n'en ont pas (absence d'une variable indépendante), ils construisent des représentations graphiques d'autres relations qui sont fonctionnelles (par ex. VA selon le temps). Ainsi, la représentation graphique de la relation VA selon VB n'a pas été réalisée et puisque la dyade a besoin d'une représentation graphique pour déterminer si une relation est fonctionnelle ou non[32], l'aspect non fonctionnel de la relation leur est passé sous le nez.

---

[32] Ils distinguent les relations non fonctionnelles en déterminant, sur le graphique, des valeurs en *x* auxquelles plus d'une valeur en *y* sont associées.

J'en comprends que du point de vue processuel, il est difficile pour la dyade de construire une représentation graphique d'une relation non fonctionnelle (même si l'idée de Mathieu concernant le report de plusieurs mesures peut fonctionner). De plus, une difficulté cognitive additionnelle survient lors de la construction d'une représentation graphique. En effet, aucun des deux intervalles de valeurs de VA et de VB commence à 0. Si cela avait été le cas, on aurait compris que l'une des deux villes (sinon les deux) serait *sur* la route.

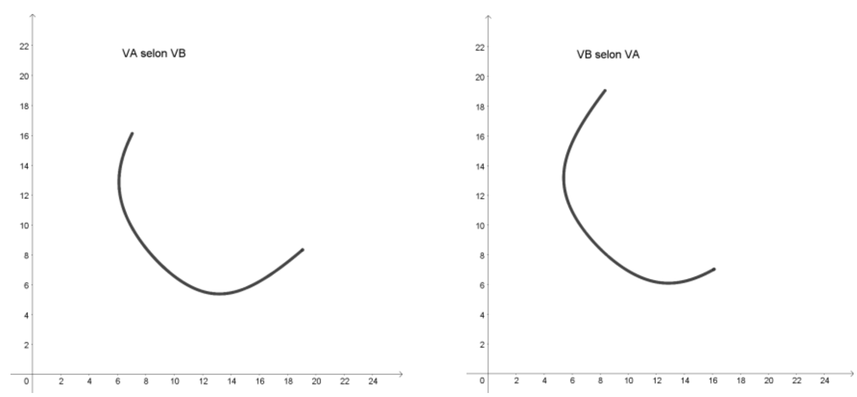


Figure 4.10. Représentation graphique des relations VA selon VB et VB selon VA.

À ce moment, je ne réalisais pas cette difficulté qu'engendre la relation non fonctionnelle – ou l'absence d'une variable indépendante. J'ai donc relancé l'équipe sur la question de la nature des variables.

1	V	[…] alors, on mettrait une distance (VA) par rapport à une autre distance (entre le point A et la voiture). Et là ça fonctionne ?

2	M	Oui.
3	V	Mais cette distance-là (VA) avec cette distance-là (VB) ça ne fonctionne pas. On ne peut pas les mettre en relation ? Qu'est-ce qui fait la différence ?
4	M	Parce qu'ils (VA et VB) dépendent les deux de la même affaire.
5	V	Ils dépendent de quoi ?
6	E,M	De la position de la voiture.
7	V	Donc c'est la position de la voiture [mesurée comme la distance du point A à la voiture] qui déterminerait les longueurs des deux segments et on ne peut pas mettre ces deux segments-là en relation parce qu'ils dépendent de la position de la voiture. Est-ce que je comprends votre idée ?
8	M	Oui, on peut les représenter simultanément [selon le temps ou selon la distance entre le point A et la voiture], mais je ne sais pas si on peut les mettre en relation.

La construction d'une représentation graphique de la relation entre VA et VB est freinée par une autre difficulté conceptuelle. En effet, la difficulté provient de la relation en tant que telle. Puisque cette relation n'est pas une relation de dépendance directe, la dyade scinde la relation en deux : VA selon la position de la voiture (ou le temps) et VB selon la position de la voiture (ou le temps). Ces deux relations de dépendance naturelles sont plus signifiantes pour la dyade que la relation de dépendance partagée entre VA et VB. Il faut signaler que si l'on n'a pas une relation de cause à effet, la construction d'une relation non fonctionnelle semble moins évidente, et dans cette situation, ce manque de cause à effet – ou l'absence d'une variable indépendante – a provoqué un blocage chez Emma et Mathieu.

Cette séance me permet de répondre partiellement à cette question posée plus tôt : *Qu'est-ce qui empêche la dyade de produire une représentation graphique illustrant VA selon VB ?* Deux difficultés semblent émerger : la variation des deux variables et la relation de dépendance partagée (ou absence de variable indépendante).

Lorsque Mathieu a mis en relation VA avec la distance entre le point A et la voiture (la « position » de la voiture), j'ai bien compris que la nature des variables n'était pas un réel défi. En effet, il s'agit plutôt de la variation des quantités.

Dans ce contexte, le temps et la distance entre le point A et la voiture sont deux variables indépendantes qui ne font que croître lorsque la voiture se déplace vers l'extrémité B. Quand vient le temps de mettre en relation VA et VB, deux variables qui croissent et décroissent selon la position de la voiture, la dyade scinde le problème de deux façons. Elle établit la relation entre VA et le temps et la relation entre VB et le temps, ou la dyade établit la relation entre VA et la distance entre le point A et la voiture et la relation entre VB et la distance entre le point A et la voiture. Cette procédure permet de comprendre que la dyade conceptualise davantage l'idée de relation fonctionnelle, une relation où il y a la possibilité d'identifier (ou choisir) une variable indépendante et d'examiner la croissance ou décroissance de la variable dépendante quand on fait croître la variable indépendante. L'introduction du temps ou de la position est une façon de se doter d'une variable indépendante et de pouvoir aborder la question de la croissance. En effet, quand il n'y a pas de variable indépendante, la question de la croissance devient très difficile à opérationnaliser, à moins de découper en petits intervalles où la relation peut être ramenée à une relation fonctionnelle.

L'usage d'une troisième variable (ou variable intermédiaire) aide à concrétiser la relation entre VA et VB mais elle pose problème lorsque vient le temps de la représenter graphiquement. L'introduction du temps ou de la position de la voiture est une façon de se doter d'une variable indépendante, chose manquante à la relation entre VA et VB. On peut rapprocher cette introduction (du temps ou de la position de la voiture) à l'introduction d'un paramètre dans une équation non fonctionnelle, servant de liant entre les deux variables.

Ainsi, les relations de dépendance partagée semblent assurément moins intuitives dû à un manque de sens, dû à leur aspect arbitraire et dans ce cas-ci, dû à l'absence de variable indépendante.

En conclusion :

a) Les élèves de la dyade ne peuvent représenter une relation de dépendance partagée puisque l'idée de dépendance fait partie de leur définition de fonction et qu'il n'y a pas de variable indépendante. Ils utilisent une variable externe à titre de variable indépendante pour développer deux relations de dépendance (naturelle ou non naturelle), écartant ainsi l'aspect arbitraire de la relation de dépendance partagée. Spontanément, cette variable externe est le temps mais quand, par effet de contrat, ils se rendent compte qu'on leur demande d'exclure le temps, ils imaginent une variable de substitution qui serait « la position », sans toutefois préciser que cette position serait mesurée comme la distance du point de départ A à la voiture.

b) Les élèves de la dyade sont plus familiers avec les relations fonctionnelles qu'avec les relations non fonctionnelles.

c) Travailler avec deux variables de même nature n'est pas une réelle source de problème, il s'agit plutôt de travailler avec deux variables qui croissent et décroissent en phase ou non. Ou encore de travailler avec deux variables dont aucune n'est indépendante et de concevoir la notion de croissance (ou décroissance) quand il n'y a pas de variable indépendante.

d) Une difficulté à prendre en compte est de préciser l'ensemble de variation de VA et l'ensemble de variation de VB.

Les difficultés de la dyade face à une relation non fonctionnelle et le problème de déterminer l'ensemble de variation pour chaque variable diminueront avec l'activité suivante.

4.4 Troisième séance – Les carrés

Emma et Mathieu achèvent leur secondaire dans le contexte pandémique de mars 2021. Je ressens leur fatigue et les masques cachent nos sourires. Une routine semble s'être installée lorsqu'Emma nous lit l'énoncé. Le logiciel Geogebra aide la dyade à visualiser le dynamisme de la situation *Les carrés*.

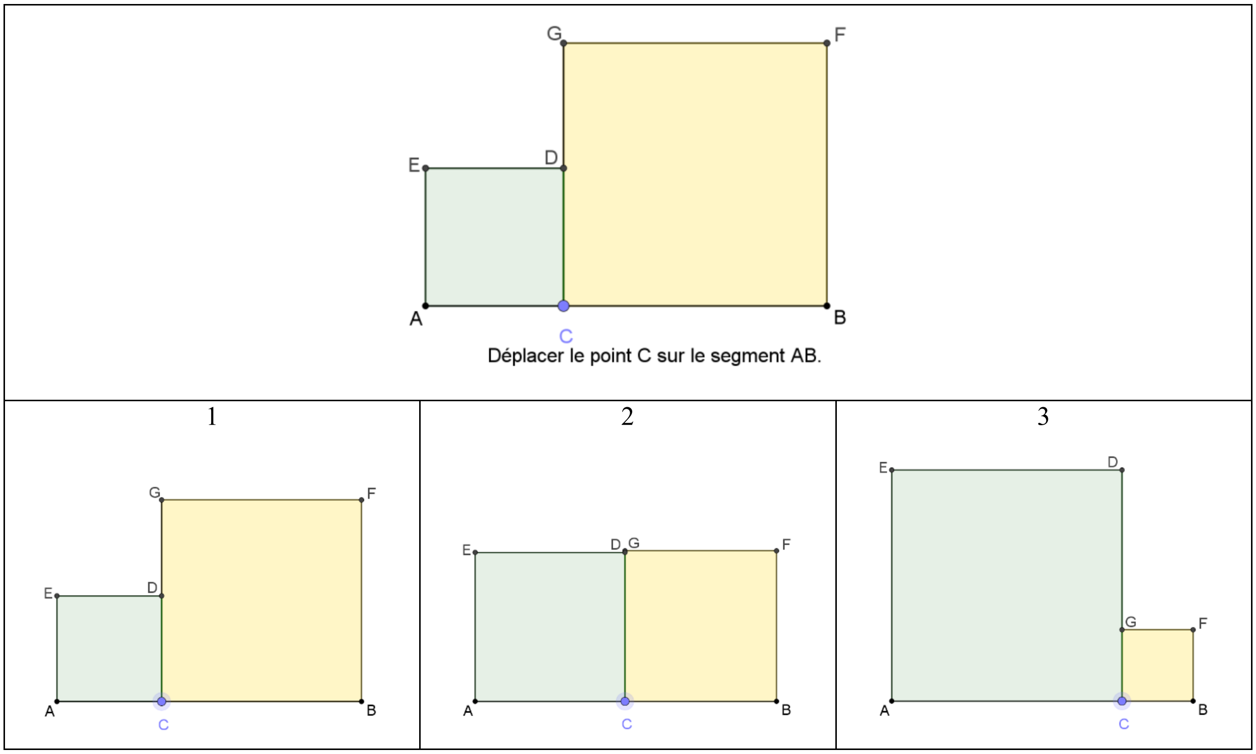


Figure 4.11. Différentes positions du point C sur le segment AB.

Dès le départ, Emma suppose la position du point C qui permettrait d'obtenir une isométrie entre les deux carrés (Figure 4.11.2). De plus, elle verbalise une relation entre la position du point C et l'aire des deux carrés.

1	E	Plus tu déplaces le point C vers [le point] A, le carré AEDC [ACDE] rapetisse et plus tu ramènes le point C vers [le point] B, plus lui [le carré CBFG] il rapetisse.

Il s'agit plutôt de deux relations entre trois variables. D'abord, entre la position du point C et l'aire du carré ACDE et ensuite, entre la position du point C et l'aire du carré CBFG. Dans les deux cas, il s'agit de relation de dépendance naturelle.

De plus, les variables indépendantes sont toutes deux décroissantes dans la verbalisation d'Emma. Mathieu ajoute :

1	M	Pendant que le segment AC augmente… Plus ça prend de place [le carré ACDE], moins l'autre carré va prendre de place. […] Ça va monter et ça va être l'inverse pour l'autre. Peu importe où tu le montes [le point C sur AB], le changement va être à peu près inverse.

Peu après, Mathieu verbalise une relation de dépendance partagée entre l'aire des deux carrés. Il verbalise la relation dans un sens, c'est-à-dire lorsque le carré ACDE augmente et fait ressortir l'inverse[33] dans la variation de l'aire des deux carrés. Son raisonnement débute par le changement de la longueur du segment AC, laissant à penser qu'encore une fois, Mathieu a ciblé l'élément de la situation qui serait responsable de la variation de l'aire des deux carrés.

Je pense qu'il est pertinent de soulever que comparativement aux deux premières séances, l'explication de leur compréhension ne se limite pas à une simulation de la situation, ils verbalisent des relations entre différentes quantités variables.

[33] Ici, Mathieu entend l'inverse de la variation, c'est-à-dire *croissant* et *décroissant*. Il ne faut pas comprendre le terme *inverse* au sens de x et $\frac{1}{x}$.

Contrairement au problème *Distances*, l'ouverture de ce problème réside dans le choix des variables. Après avoir énoncé la plupart d'entre-elles, la dyade choisit le rapport entre les deux aires comme première variable, c'est-à-dire le rapport entre l'aire du carré ACDE et l'aire du carré CBFG, qu'ils identifient par la lettre *R*. Ainsi, *R = Aire carré ACDE/Aire carré CBFG*.

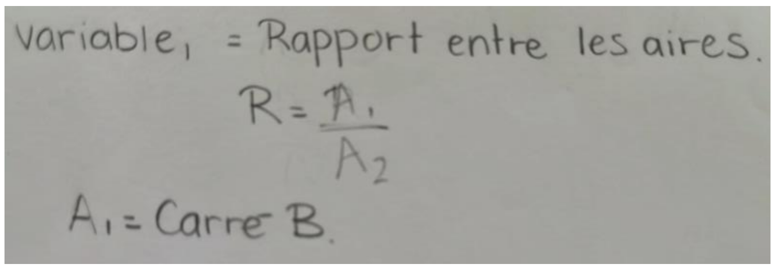


Figure 4.12. Représentation algébrique spontanée institutionnelle d'Emma.

Je suis le plan de la séance et leur demande :

1	V	Notre variable, c'est le rapport entre les deux [aires]. C'est ça la variable. Comment est-ce qu'elle évolue dans la situation ? Quand je déplace [le point] C, comment est-ce qu'elle change, qu'elle varie ?
2	M	Veux-tu dire *« c'est quoi qui la fait varier »* ou juste *« la façon dont elle varie»* ?
3	V	La façon dont elle varie.
4	M	Ok.
5	E	Plus il se rapproche d'un bord, il y en a un qui grossit, mais si tu vas là [de l'autre bord], l'autre grossit. C'est pas proportionnel le truc, mais c'est comme la même

		chose des deux bords, mais pas le même carré. Comprends-tu ce que je veux dire ?
6	V	Euh, ben j'ai quelques questions. Quand tu dis que c'est la même chose des deux bords, tu veux dire des deux bords du milieu de AB ?
7	E	Oui. Ben comme, les carrés font la même chose. Ils grossissent et ils rapetissent.

Emma comprend la symétrie de la situation, c'est-à-dire l'« *inverse* » que Mathieu tentait également de verbaliser plus tôt. Comme tout à l'heure, Emma décrit la situation en verbalisant deux relations mais cette fois-ci, les variables dépendantes (les aires) sont croissantes. Je pense que pour Emma, la situation débute lorsque le point C est au milieu du segment AB. Son idée est de montrer que ce qui se passe pour un carré lorsque le point C va vers le point B, est la même chose que ce qui se passe pour l'autre carré lorsque le point C va vers le point A. Ainsi, Emma utilise deux relations pour décrire la situation : L'aire du carré ACDE selon la position du point C (à partir du milieu du segment AB) et l'aire du carré CBFG selon la position du point C (à partir du milieu du segment AB). Emma en est à s'approprier la situation et non à discuter de la variable *R*.

1	M	Dans le fond le rapport… Dans la partie où le carré bleu [ACDE] est plus petit que le carré jaune [CBFG], ça diminuerait jusqu'à atteindre 0 parce que quand ils seront les deux pareils, le rapport va être de 0… Non, de 1 ! Oui, de 1. Parce que s'ils sont pareils, l'aire est donc pareille, donc quelque chose divisé par la même chose ça donne toujours 1.

Mathieu discute de la variable *R* mais est confus à propos du sens du rapport puisqu'il affirme que le rapport va rapetisser. Si l'aire du carré ACDE augmente et l'aire du carré CBFG diminue, alors le rapport augmente. Mathieu semble avoir basé sa réflexion sur le rapport inverse[34]. Horsmis cette étourderie, le raisonnement de Mathieu est adéquat. Néanmoins, la dyade ne discute pas de la variable *R* telle qu'elle l'a définie. Je leur rappelle donc que la variable est le rapport entre l'aire du carré ACDE et l'aire du carré CBFG.

Mathieu poursuit la réflexion en observant ce qu'il advient de *R* lorsque le point C est sur le point A.

1	M	Étant donné que quand ça [le point C] atteint le point A, le carré bleu [ACDE] est comme si c'était à 0, le carré jaune est infiniment plus grand. Parce que 0 c'est rien et techniquement, même si tu le multiplies par n'importe quoi, tu ne vas jamais atteindre l'aire du carré jaune [CBFG]. Donc techniquement, le rapport est infini…?
2	V	Le rapport est infini quand le point C est sur le A parce que l'aire du carré bleu va être de 0 ?
3	M	Ouais.

[34] Ici comprendre l'inverse comme $\frac{1}{x}$.

Mathieu a déjà énoncé que lorsque les deux carrés sont de même aire, le rapport est de 1 en justifiant que « […] *quelque chose divisé par la même chose ça donne toujours 1* » et en soutenant son explication par une gestuelle (Figure 4.13). Ceci montre que Mathieu utilise la représentation algébrique (Figure 4.12) pour se faire une idée de la valeur du rapport entre les deux aires. Quand Mathieu affirme que le rapport sera infini, c'est qu'il affirme qu'il est impossible de multiplier l'aire nulle du carré ACDE pour obtenir l'aire du carré CBFG. Le raisonnement de Mathieu est adéquat, mais il le base encore sur le rapport inverse.

Figure 4.13. Gestuelle de Mathieu qui soutient sa verbalisation.

À la suite de quoi Emma renchérit que le phénomène se produit aussi lorsque le point C est sur le point B. Emma raisonne sur la variable R et non plus sur les aires séparément. L'idée de rapport semble lui être plus nette. De plus, cette idée, qui ne sonne pas fausse aux oreilles de Mathieu, semble le faire douter. Emma explique :

1	E	Ça veut dire le contraire aussi ? Ben pas le contraire, mais que si tu mets là [C sur B] ça veut dire que… mais rien ne se divise par 0.
2	V	Si on met le point C carrément au point B, on va avoir juste un gros carré bleu. Notre carré bleu c'est notre numérateur.
2	E	Oui, et le rapport va être de 0. Ben en fait, il va être « erreur » mais… Parce qu'admettons que l'aire du 2 qui est lui [pointant le carré CBFG] qui va être 0 et là ça va être A_1 qui va avoir une aire [non nulle] mais divisée par 0, ça ne fonctionne

		pas, parce qu'il n'y a rien qui se divise par 0.

Emma et Mathieu comprennent très bien la situation, mais l'un d'eux inverse le rapport *R*. La dyade discute de la valeur de *R* pour trois cas de la situation : lorsque C est sur A, lorsque C est sur B et lorsque C est au milieu de AB. Dans leurs verbalisations respectives, ils font tous deux mention d'un cas différent de la situation où le rapport serait indéfini, mais aucun d'eux ne voit l'incohérence. Je décide de laisser cette confusion en suspens et demande à la dyade de choisir la deuxième variable.

Malgré le scénario de la séance, la dyade avait déjà fait ce choix. En effet, au début de la séance, lorsque chacun d'eux exprimait ce qu'il comprenait de la situation, la position du point C était perçue comme le premier domino d'une série de causes à effet. Toutefois, les élèves de la dyade n'établissent pas de lien entre la position du point C et la distance entre les points A et C. Ce lien a été sujet de discussion à deux reprises.

Plus tôt dans la séance.		
1	M	La position du C, c'est parce que c'est très « vague ».
2	V	Pourquoi c'est vague ? Parce qu'on n'a pas de plan cartésien pour le positionner ?
3	M	Ouais.

4	V	Ok, et est-ce qu'on aurait une façon de parler de la position du point C sans plan cartésien ?
5	E	Ben mettons, on sait que AB est égal à 10 unités…
6	M	Ben en fraction… Je ne sais pas… Ouais, en fraction !
7	E	Ben mettons que c'est 10, tu pourrais séparer 10 en fractions…
8	V	Ok, il serait par exemple à la moitié ou au quart…
9	E	La moitié, ça serait 5.
10	V	Ok je comprends. Donc on pourrait en parler en fraction du segment AB ou comme tu m'as dit s'il est à la moitié, il est à 5, mais 5 à partir de où ?
11	E	De la moitié.
12	V	À partir de la moitié ?
13	E	Ouais ben, entre A et B c'est 10, donc si C est au milieu ça va être 5 [pointant le point B] 10, [pointant le point A] 0.
14	V	Ok je comprends !
Au moment de faire le choix de la deuxième variable.		
1	E	Moi je dis la position de C.
2	V	Ok. La position de C par rapport à quoi ?

3	E	Selon la longueur du segment AB ?
4	M	Honnêtement, moi je le mettrais en fractions.
5	V	En fraction de quoi ?
6	M	En fraction sur 1, le 1 représentant le segment AB. Donc une fraction de 10 unités.
7	E	Comme un dixième, deux dixièmes, trois dixièmes… ?
8	M	Ouais.
9	V	Alors si on est à un dixième du segment qui vaut 10 unités, ça veut dire quoi ?
10	M	Ça veut dire que tout le carré est 1 dixième de fois plus… chaque côté est un dixième de AB donc l'aire serait de 1 centième.
11	V	Mais c'est quoi le dixième de 10 ?
12	M	C'est 1 centième.
13	E	C'est une partie du segment AB.
14	M	C'est 1.
15	V	Oui, c'est 1. À partir de où ? C'est 1 unité, oui, mais à partir de quel point ? Nous on est en train de se questionner par rapport à la position du point C. On a besoin de reposer la position du point C sur quelque chose de fixe dans la figure. Ce qui est fixe, c'est le segment AB. Vous m'avez parlé de faire des portions du segment AB.

16	M	Ok, ouais, la fraction pourrait être n'importe où sur le segment AB.
17	V	Oui ! Est-ce qu'on pourrait rattacher sa position avec un point dans la figure par exemple ?
18	M	Ben le point A ou B.
19	E	Ben je dirais le point A parce que tu sais, on lit de gauche à droite !
20	V	C'est intuitif, j'aime ça ! Alors là, notre variable c'est quoi ?
21	M	C'est la taille du segment AC.
22	E	Ouais !

Emma et Mathieu quantifient instinctivement la position du point C en fraction du segment AB. Toutefois, il semble difficile de rattacher cette fraction du segment AB à une des extrémités afin d'établir un lien entre la position du point C et la longueur du segment AC (ou BC). Il y a une conversion ou un changement de cadre qui est difficile à faire.

Maintenant le deuxième choix de variable fait, je leur demande comment varie la longueur du segment AC. Mathieu répond que tant que le point C se dirige vers le point B, la longueur du segment AC augmente. Afin d'exprimer la variation de la taille du segment AC, Mathieu verbalise une relation de dépendance naturelle entre la position du point C et la longueur du segment AC. Il identifie encore une fois l'élément qui fait varier la situation, c'est-à-dire la position du point C. Il s'agit d'un raisonnement que Mathieu a déjà utilisé lorsqu'il voulait exprimer la distance entre la voiture et le point A selon la position de la voiture[35]. Mathieu compose des fonctions définies selon la position du point C sur AB (avant même la distance entre A et C), le premier domino de la série de causes à effet.

À l'aide de la présentation Geogebra, j'active l'animation et le point C se déplace du point A vers le point B, répétant quelquefois cet aller simple. La suite de la réflexion porte sur la variation simultanée des deux quantités.

1	V	Je veux qu'on garde en tête les deux quantités. On a dit que le segment AC ne fait qu'augmenter et on a parlé aussi du rapport (*R*). Prenez le temps d'observer la situation. Là, la question que vous êtes en train de vous poser c'est comment est-ce que les deux quantités varient simultanément ? Qu'est-ce qui se passe pendant que l'une fait quelque chose ?
2	M	Moi j'y ai déjà réfléchi parce que je la sentais venir ! [Mathieu saisit une feuille et commence une représentation graphique (voir Figure 4.14)] Ça serait comme une espèce de parabole sauf qu'il y aurait deux asymptotes. La première asymptote serait le zéro, parce que ça ne peut pas aller en dessous de zéro. Et le deuxième serait 10 étant donné que le segment fait 10.
3	V	Ok. Peux-tu nous parler un peu de ce que tu as représenté ici en termes des deux variables.

[35] Section 4.3 Deuxième séance - Distances

4	M	Dans le fond, ça [pointe l'axe horizontal] c'est la valeur de AC et ça [pointe l'axe vertical] c'est le rapport. Jusqu'à 5 [en *x*], ça serait le sommet si on veut, en (5, 1).
5	V	Pourquoi à 5 ?
6	M	Parce qu'à 5, c'est le milieu des deux et dans le fond, les deux carrés sont égaux. Donc le rapport ne sera jamais plus petit que ça.
7	V	Et là, tu l'as positionné à 1 [en *y*] ?
8	M	Oui parce que ça peut pas aller en dessous de 0 dans cette situation-là.

La représentation spontanée de Mathieu est une représentation graphique en forme de U (orientée vers le haut) dont le sommet est situé en (5, 1). Une asymptote est tracée en $x = 10$ et une autre confondue avec l'axe vertical. Mathieu semble utiliser le concept d'asymptote pour limiter le domaine de la fonction. D'abord, il est vrai que le phénomène est asymptotique en $x=0$. Cependant, ce n'est pas parce que le segment AB fait 10 unités, mais plutôt parce que le rapport R tend vers l'infini lorsque x tend vers 10. Ensuite, le phénomène n'est pas asymptotique en $x=0$. Il s'agit plutôt du 'début' du domaine, car la longueur de AC est supérieure ou égale à 0. Mathieu a également tracé une droite d'équation $y = 1$ afin de représenter que le rapport ne peut pas être inférieur à 1.

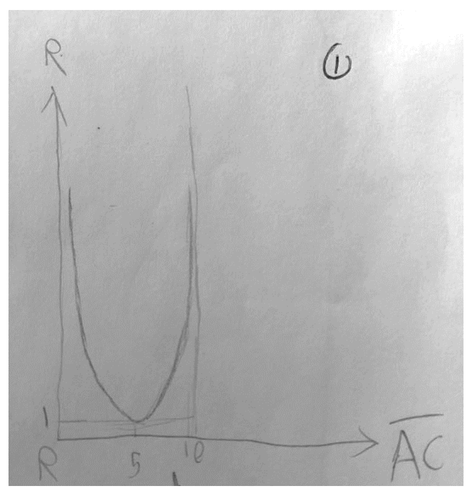
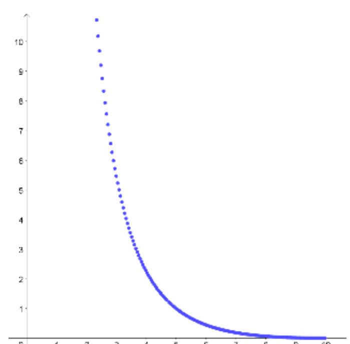
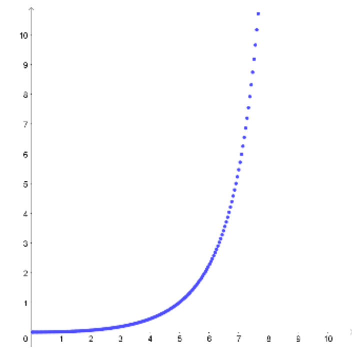
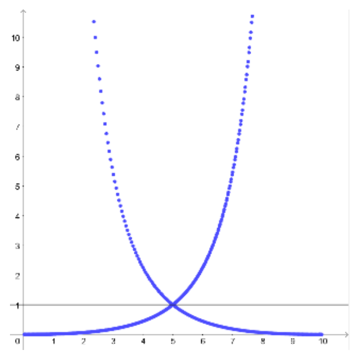
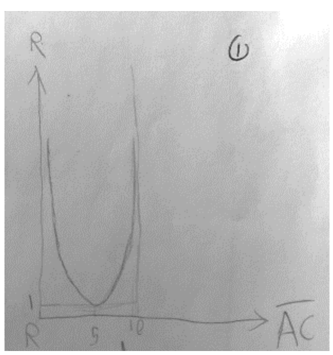


Figure 4.14. Représentation graphique spontanée institutionnelle de Mathieu.

La symétrie de la situation semble mener Mathieu à travailler avec le rapport R et le rapport inverse R^{-1}. Plus tôt dans la conversation, la dyade élaborait sur la variable R. Chacun d'eux a fait référence à un moment distinct de la situation où le rapport est infini. Cette incohérence n'a pas été soulevée par la dyade. Voilà maintenant qu'elle pose problème et induit Mathieu à utiliser le rapport R^{-1} lorsque le carré CBFG a une plus grande aire que le carré ACDE et à utiliser le rapport R lorsque le carré ACDE a une plus grande aire que le carré CBFG. De plus, puisque Mathieu affirme que le rapport ne peut être inférieur à 1, son choix de famille de fonctions se confirme. Il est également probable que Mathieu entretienne une conception qui veut que l'on divise toujours le plus grand nombre par le plus petit.

Tableau 5.1. Construction de la représentation graphique spontanée institutionnelle de Mathieu selon ses verbalisations.

1. 	Représentation graphique de la relation R^{-1} selon la mesure du segment AC.

2. 	Représentation graphique de la relation *R* selon la mesure du segment AC.
3. 	Superposition des deux relations et représentation de la droite d'équation $y = 1$.
4. 	Représentation spontanée institutionnelle de Mathieu, dans le registre graphique.

C'est lorsqu'il explique que le rapport ne peut pas être inférieur à 0 que Mathieu se rend compte que sa représentation graphique n'est pas cohérente.

1	V	Et là tu positionnes le sommet à 1 [en *y*] ?
2	M	Oui, parce que ça ne peut pas aller en dessous de 0, un rapport vraiment. Ben oui ça peut y aller, mais pas dans cette situation-là, je pense pas. Euh ben oui. Oh oups ! Ça ne fonctionne pas.
3	E	Hum dommage…
4	V	D'accord, je vais vous reposer la question. Essayer d'imaginer ces deux quantités-là varier en même temps. Parlez-moi de ça.
5	E	Simultanément, ok… Ça doit être à zéro. Ça dépend là, on avait dit A_1 [aire du carré ACDE] sur A_2 [aire du carré CBFG] et A_1 c'est le carré bleu donc le carré bleu, au début, est à 0. Donc ça commence à 0.
6	M	Je pense que ce serait plutôt ça (Figure 4.15). Comme ça et à 10. Parce que là étant donné qu'il [ACDE] est plus petit jusqu'à ce que … Parce que quelque chose de plus petit divisé par quelque chose de plus gros ça donne tout le temps en dessous de 1. Le 1 serait en quelque part, par exemple là. Le 1 c'est quand les carrés seraient égaux.
7	E	Et là il continue d'augmenter, il continue d'augmenter et il arrête. Si on ne refait pas un autre cycle.

Dans cet extrait, Emma se réfère à l'expression algébrique exprimant le rapport R, ce qui lui permet de comprendre qu'en fait, le rapport R commence à 0, chose que Mathieu n'avait pas saisie, peut-être à cause de la symétrie de la situation. Mathieu s'empare de son crayon et produit cette seconde représentation graphique (Figure 4.15).

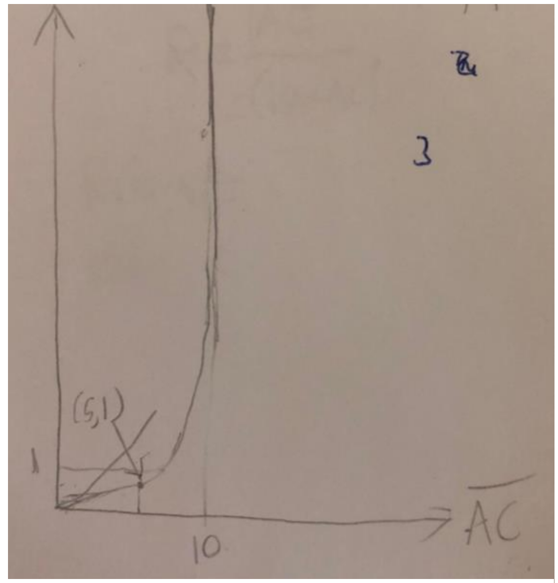


Figure 4.15. Représentation graphique spontanée institutionnelle de Mathieu.

Dans cette représentation graphique qui illustre la relation entre le rapport R et la longueur du segment AB, on remarque que la courbe commence à l'origine du plan, démêlant ainsi l'hypothèse initiale qui présentait erronément deux cas où la courbe serait asymptotique. La position où le rapport est de 1, c'est-à-dire lorsque le segment AC mesure 5 unités, est identifiée, tout comme l'est l'asymptote d'équation $x = 10$.

Emma semble convaincue par cette nouvelle représentation graphique mais se questionne quant à savoir quelle variable devrait aller sur quel axe. Dans son questionnement, elle confond les termes « *dépendant* » et « *indépendant* ». Elle en vient tout de même à la conclusion que le rapport doit aller sur l'axe vertical et que la longueur du segment AC doit aller sur l'axe horizontal. Après clarification, je comprends qu'il ne s'agissait que d'une confusion entre les termes. Néanmoins, cette question m'a permis de poursuivre vers l'étape suivante.

1	V	*y* dépendant et *x* indépendant.
2	E	Ah, ok c'est bon !
3	V	Voilà, c'est bon parfait, on a la même idée. Mais là ma question d'abord, c'est : « est-ce que ça vous semble logique d'inverser ces rôles-là ? D'inverser la dépendance ? »
4	E	Ben, pourquoi pas ?
5	V	Ok, qu'est-ce qui te permet de dire ça ?
6	E	Ben mettons que : « plus le rapport est petit, plus admettons, le segment AC va être petit ou va être plus grand. »
7	V	Ok et il n'y a rien de problématique là-dedans ?
8	E	[Hésitante] Je ne crois pas… Mais attends… Selon moi ça marche, là. Admettons ici. On avait dit plus le segment AC est grand, et là tu divises ça [aire du carré ACDE] par ça [aire du carré CBFG], ben là ça dépend, mais là c'est grand divisé par petit fait que le rapport va être grand. Donc plus le segment AC est grand, plus le rapport est grand. Ça pourrait être le contraire aussi : plus le rapport est grand plus le segment AC est grand.
9	V	Ouais très bien ! Mathieu, es-tu d'accord avec ça ?
10	M	Oui, oui !

11	V	Alors le sens de la relation, on peut l'inverser, pas de problème ?
12	M	Oui, ben moi c'est comme ça que je le représenterais.
13	V	Ok, t'arrives à faire une représentation graphique aussi, alors il n'y a aucun problème à inverser la relation, pas de soucis, ça vous va.

La dyade ne semble pas vivre d'inconfort lorsque vient le temps d'inverser la relation de dépendance. En effet, les verbalisations d'Emma sont formulées instinctivement et Mathieu propose déjà une représentation graphique de cette relation.

Pourquoi cela semble si simple d'inverser la direction de la relation dans ce contexte et si complexe dans le problème de la séance précédente ?

Lors de la première séance, j'ai constaté que le contexte influençait la direction de la relation. En effet, dans le questionnaire initial, Emma et Mathieu ont répondu que la circonférence d'un cercle dépend de la mesure de son rayon et lors de la première séance, ils ont conclu que la distance entre la voiture et le contrôleur dépend de la distance parcourue sur la piste circulaire lorsque le contrôleur est ailleurs qu'au centre de la piste. Ensuite, dans la deuxième séance, le contexte semblait trop arbitraire pour affirmer la possibilité de la relation de dépendance non naturelle. De plus, la nature de la relation accentuait le défi. La relation de dépendance partagée de la deuxième séance a rendu l'interprétation de la relation inverse très difficile. Cela semble bien différent pour la relation étudiée ici, dans la troisième séance. La situation est très épurée ; il n'y a pas de question à proprement parler et aucune mise en situation. Seule la figure est présentée dynamiquement à la dyade.

Je demande à Mathieu d'expliciter la représentation qu'il vient de produire.

1	V	Ici, tu as représenté le rapport [*R*] selon le segment AC et ici, tu représentes le segment AC selon le rapport [*R*]. Explique-moi ce que tu as fait là [pointant le graphique 2 (AC selon *R*)]
2	M	Ben selon moi, ça va augmenter et le maximum ça va être 10 mais c'est pas comme avant, le 10, il est ici [mouvement horizontal de la main signifiant une droite d'équation $y = 10$].
3	E	Mais pourquoi, ben je sais pourquoi il y a une asymptote, parce que le segment AB a une limite aussi, mais comme, on peut faire une asymptote comme ça [à l'horizontal] ? Je me questionne.
4	V	Attends un peu, pourquoi il y a une asymptote dans la situation ?
5	E	Parce que le segment AB n'est pas infini. Mais j'avoue que tu pourrais juste… Ben j'avoue, pourquoi il y a une asymptote ?
6	V	Est-ce que tu peux répondre à ça ? Dans ton graphique, tu as mis une asymptote. Pourquoi il y en a une ?
7	M	Effectivement…

8	E	Ben en fait, tu fais juste mettre une limite à ton axe ? Une fin à l'axe des x ?

La question d'Emma a fait bifurquer la conversation sur un thème intéressant. La dyade pense faussement que la nécessité d'une asymptote découle du fait que le segment AB est de 10 unités. Ils utilisent l'asymptote pour limiter le domaine de la relation. À la suite de cette question, Emma demande :

1	E	Pourquoi ça fait une courbe ?
2	V	C'est une bonne question ça, je vous relance ça !
3	M	Ben je sais pas, c'est mieux comme ça. Dans ma tête ça marchait mieux comme ça.
4	E	Avoue des fois on fait juste « ouais ça fait une courbe » ! Parce que ça reste que quand un augmente, l'autre augmente aussi. Donc ça pourrait être les deux en ligne droite. Admettons qu'on fait AC selon *R*. Tu grandis, tu grandis, mais à un moment donné, la proportion est 0 quand C est rendu sur B. Euh non, c'est « erreur », mais comment tu le fais dans un graphique « erreur » ?
5	V	Ah ben je te relance la question ! Comment est-ce qu'on fait ça dans un graphique le fait que ça divise par 0 ?
6	M	Ben moi comme j'ai dit, pour moi le carré est infiniment plus grand que 0 parce que peu importe par quoi tu le multiplies, 0, il ne va jamais atteindre l'aire.
7	V	Ok, c'est bon. Revenons à la question. Entre une droite ou une courbe, qu'est-ce qu'on choisit ?

8	E	C'est que c'est vrai que le rapport grandit pas… Je ne sais pas…
9	V	Mathieu, qu'est-ce que t'en penses ?
10	M	J'étais en train d'y réfléchir parce que justement, j'hésitais entre faire une courbe et une ligne droite. Dans ma tête, les deux marchent. Sauf que je ne sais pas comment le prouver.
11	E	Parce que mettons qu'il grossit. T'as un point là et un point là [Emma pointe différents couples sur sa représentation graphique] mais la même chose pour une courbe. T'as un point là, un point là…
12	V	Ok génial ! On va prendre une nouvelle feuille et on va se le prouver.

Dans le scénario de la séance, j'ai prévu un temps pour la réalisation d'une esquisse graphique représentant la variation de *R* selon le segment AC. À la suite de cette discussion, la dyade hésite quant au fait d'utiliser une courbe ou d'utiliser une droite. C'est donc maintenant que l'étape suivante débute. La dyade doit construire une représentation graphique de la relation *R* selon AC en utilisant une représentation algébrique. Mathieu propose l'équation suivante :

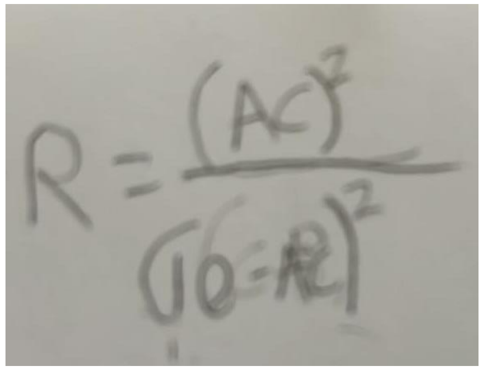


Figure 4.16. Représentation algébrique spontanée de Mathieu.[36]

À la suite de quoi, je leur demande :

1	V	À partir de cette équation-là, tracer un graphique.
2	E	Mais je ne la connais pas, je ne sais pas trop comment.
3	M	Ok mettons que tu choisis une valeur pour ton AC. Ben, admettons que t'en choisis plusieurs, on pourrait faire une espèce de nuage de points et ensuite, tracer le graphique.

La construction du graphique se fait comme Mathieu le propose. La dyade commence par tracer les axes du graphique ainsi que quelques graduations. Ensuite, la dyade calcule les différentes valeurs de *R* avec différentes valeurs de AC. Un accroc arrive mais Emma clarifie les choses :

[36] On doit y lire : $R = \frac{(m\overline{AC})^2}{(10-m\overline{AC})^2}$

1	M	Je ne le commencerais jamais à 0 exactement. Le rapport n'atteindra jamais 0 pour la même raison pour laquelle il n'atteindra jamais exactement…
2	E	Au début je pense qu'il va être à 0 parce que 0 divisé par quelque chose donne 0. 0 divisé par 10 ça donne 0. Parce qu'au début t'as un gros carré [ACDE]. Mais notre truc c'est A_1 [ACDE] divisé par A_2 [CBFG]. Donc, je pense que ça commence à 0. Là, ça serait super proche de l'axe des *x* et à un moment donné, plus tu montes vers le 10, plus ça va faire fioup ! [Mouvement de la main qui signifie une grande augmentation verticale]
3	M	Ok, ouais, je comprends.
4	E	Donc ça fait une courbe !!!
5	V	Ok génial ! C'est beau ça, fantastique ! J'ai une autre question. Qu'est-ce qui se passe à 10 ?
6	M	Selon moi, c'est l'infini.
7	E	Selon moi, c'est « erreur ».
8	M	Le rapport est pas possible. C'est pas possible de mettre un point à l'infini. Selon moi ça fait juste une ligne droite.
9	V	Et ça cette ligne droite là, c'est quoi ?
10	E	L'asymptote !!!
11	V	Alors il y en a une asymptote ! Et ça veut dire quoi qu'il y ait une asymptote ?

12	E	Que la courbe ne peut pas dépasser 10 et que le rapport est infini.
13	V	Oui c'est ça. Et elle n'y touchera jamais non plus.
14	E	Non, effectivement.

Emma a bien compris que la courbe débutait à l'origine du plan. La dyade a construit cette dernière représentation graphique à l'aide de quelques couples x et y. Emma relie ces quelques points et constate qu'un tracé courbé sera plus approprié qu'une droite. Lorsqu'elle dit « ça va faire fioup ! », elle soulève l'augmentation infinie du rapport R. La question que je leur pose par la suite les mène à comprendre que l'asymptote n'est pas présente sur la représentation graphique parce qu'elle limite le domaine, mais plutôt parce qu'elle illustre justement cette augmentation infinie du rapport.

Un point important à signaler est ce qu'Emma a affirmé : « On avait dit plus le segment AC est grand, et là tu divises ça [aire du carré ACDE] par ça [aire du carré CBFG], ben là ça dépend, mais là c'est grand divisé par petit fait que le rapport va être grand. Donc plus le segment AC est grand, plus le rapport est grand… » On voit ici une analyse de la variation, par contre, la réponse « erreur » semble plutôt liée à un résultat obtenu à travers l'utilisation d'une calculatrice ou d'un ordinateur.

Je demande à la dyade de cibler des similitudes et des différences entre les deux représentations graphiques. Emma soulève d'abord l'utilisation d'une courbe et non celle d'une droite pour représenter la relation *R* selon AC. Mathieu explicite son intuition :

1	M	L'aire, c'est tout le temps à la deux pour un carré, donc je me suis dit c'est peut-être une fonction exponentielle. Donc la courbe serait peut-être mieux.
2	V	Alors parce qu'il y a un exposant, ce ne sera pas une droite ? C'est forcément une courbe ?
3	M	Ben oui, je pense.
4	E	Moi je pense que oui.

Il y a donc un lien très fort entre l'exposant dans une représentation algébrique (unité significative) et l'aspect courbe dans la représentation graphique (variable visuelle) (Duval, 1993). Mentionnons cependant que l'exposant (constant) amène abusivement les deux élèves à invoquer une fonction exponentielle, là où il faudrait plutôt parler de fonctions polynomiales.

Ensuite, Emma pose cette question :

1	E	Le rapport dépend de la longueur de AC. Mais si on avait fait le contraire, est-ce que ça aurait donné la même chose ?
2	V	C'est une bonne question ! [Tend une feuille à Emma]

3	E	On va le faire !
4	M	Ha ! Ha ! Ha !
5	V	C'est une très bonne question !
6	E	Mais si je n'ai pas l'équation, je…
7	V	Là, tu as inversé R et AC dans ton graphique. C'est comme si tu avais inversé *x* et *y*.
8	E	Ouais c'est ça. Une réciproque genre ? C'est ça ein ?! Donc là, il faut que tu les inverses et que tu réisoles le *y*.
9	V	Il faut réisoler ton *R*, tu arrives dans le même problème que Mathieu.
10	E	Ah purée !
11	V	D'un point de vue algébrique, ça va être difficile, trouver une autre solution.
12	E	Ah ! Tu fais ça de même ! [Trace une courbe sur sa représentation graphique] Et tu continues ! Ça ne redescend jamais.
13	V	Alors ça continue toujours d'augmenter ?
14	E	Oui.
15	V	Et est-ce que ça va dépasser 10 ?
16	M	Non.

17	E	Non. Parce que t'as une asymptote.

Emma établit un lien direct entre la relation (R selon AC) et sa réciproque (AC selon R). En effet, lorsqu'elle trace la représentation graphique de la réciproque, elle le fait en se basant sur la réflexion selon la droite d'équation $y = x$. Encore une fois, l'algèbre n'a pas été la meilleure solution.

En conclusion :

a) La dyade utilise les relations pour expliquer ce qu'elle comprend d'une situation

b) La symétrie de la situation cause un défi dans l'interprétation de la variation du rapport R. Lorsque le point C est avant le milieu de AB, la dyade utilise $R^{-1} = \frac{A_{CBFG}}{A_{ACDE}}$ et lorsque le point C est passé le milieu de AB, elle utilise $R = \frac{A_{ACDE}}{A_{CBFG}}$.

c) La représentation algébrique de la variable R a aidé les élèves de la dyade à raisonner sur sa variation lorsqu'ils l'ont observée dans trois cas : lorsque C est sur A, lorsque C est au milieu de AB et lorsque C est sur B.

d) Il est encore difficile pour la dyade d'établir un lien entre la position d'un point sur un segment (ou une courbe) et la distance de ce point à un point de repère. La coordination entre le plan euclidien et le plan cartésien semble difficile à gérer.

e) La dyade exprime la variation de R selon la variation de la longueur du segment AC et la variation de la longueur du segment AC selon la position du point C. Il s'agit d'une composition de fonction qui permet de pallier la coordination, qui semble difficile, entre le plan cartésien et le plan euclidien.

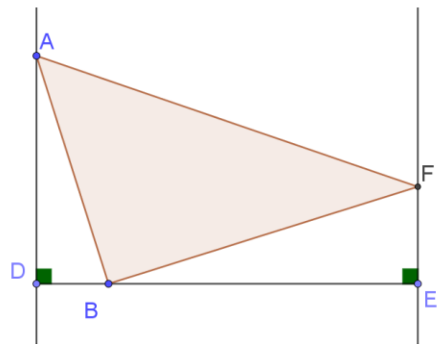
f) L’asymptote est utilisée pour limiter le domaine et non pour signifier une croissance infinie de la variable dépendante pour une augmentation finie de la variable indépendante.
g) La relation naturelle établie par la dyade peut aisément être inversée puisqu’il s’agit d’une relation non arbitraire et directe entre une variable et l’élément responsable de son changement.
h) La dyade n’éprouve pas de malaise à inverser la relation de dépendance naturelle, car l’absence de contexte implique l’absence de relation arbitraire.
i) L’exposant 2, qui vient du calcul de l’aire d’un carré, est une unité significative qui est liée à l’aspect de courbure d’une représentation graphique, une variable visuelle.
j) La construction d’une représentation graphique peut se faire à partir de la verbalisation de la relation entre les deux variables étudiées et à partir d’une représentation algébrique.
k) La dyade a utilisé la table de valeur comme représentation intermédiaire afin de produire une représentation graphique à partir de la représentation algébrique. Elle ne savait pas comment faire sans elle puisqu’elle ne connaissait pas la famille de fonctions.

4.5 Quatrième séance – Maximum

L’exploration arrive à son terme. Emma et Mathieu sont sur le point de s’engager dans la résolution du dernier problème : *Maximum*. La présentation *Geogebra* soutient la lecture d’Emma et fait ressortir le dynamisme de la situation, élément manquant de l’énoncé.

Maximum

Le segment DE mesure 10 unités et le segment DA mesure 6 unités. Le point B est n'importe où sur le segment DE. De B, on élève la perpendiculaire à AB. Elle croise la verticale qui passe par E au point F. (Autrement dit ΔABF est rectangle en B, peu importe la position de B).



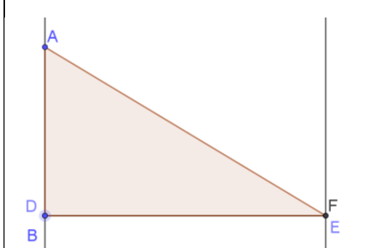
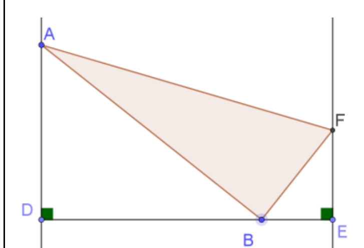
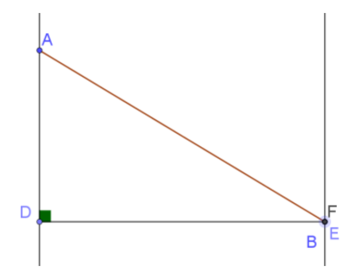
1	2	3
		

Figure 4.17. Différentes positions du point B sur le segment DE.

Les premiers constats de la dyade sont relatifs aux variations des différentes quantités. Emma soulève que l'hypoténuse AF change en longueur et Mathieu affirme que *« de D à E, le segment BF y fait que rétrécir. »* Je leur propose d'observer une variable.

1	V	La variable qu'on va sélectionner, c'est la distance entre le point D et B. Comment elle évolue dans la situation ?

2	M	Il change selon la position de B sur le segment DE.
3	V	Et il change comment ?
4	M	Plus il se rapproche de E, plus il grandit.
5	E	Il grandit et il rapetisse.
6	V	Quand est-ce qu'il rapetisse ?
7	M	Quand il s'éloigne de E et qu'il s'approche de D.
8	E	Ça dépend tu pars où et t'es où au départ.

On reconnaît cette association qui semblait difficile lors de la troisième séance[37] : la position d'un point sur un segment et la distance qui le sépare d'un repère. La dyade semble faire plus aisément l'association entre la position du point B et sa distance avec le point D. Ils apprécient la variation de la distance entre D et B à l'aide d'une relation établie avec la position du point B. Il se peut donc fort bien que pour la suite, la dyade construise une série de fonctions composées où la position du point B serait le premier domino. Je leur propose de discuter de l'aire du triangle ABF.

1	V	Comment est-ce qu'elle évolue dans la situation ?

[37] Le lecteur peut revisiter ce passage (p. 126 à 129)

2	M	Ben moi je dirais que plus ça se rapproche de E, plus l'aire est petite.
3	E	Ouais mais chek, à un moment donné, il reste pareil…Tu vois, il est là mais on dirait pas qu'il rapetisse. Ah, peut-être un peu. Jusqu'à tant que ce soit une ligne. Donc plus le point B s'approche du point E, plus l'aire diminue ?
4	M	Ouais, ben c'est ce que je pense.
5	V	Et est-ce qu'il y a des moments où vous voyez que l'aire augmente ?
6	M	Euh non, je ne pense pas.
7	E	Non, je ne pense pas. Je pense que plus le B s'approche de E, l'aire peut pas augmenter.

À ce moment, la dyade raisonne avec deux relations de dépendances naturelles distinctes. D'abord la distance DB selon la position du point B et l'aire du triangle ABF selon la position du point B. Je leur demande donc de réfléchir aux deux variables de façon simultanée.

1	V	Là j'aimerai ça que vous me parliez de la variation des deux quantités de façon simultanée. Comment est-ce que les deux quantités varient ensemble ?
2	M	Honnêtement, je ne saurais pas comment le dire.
3	E	Ok ben je peux essayer! Hum… Plus le segment DB augmente plus l'aire du triangle diminue.

4	V	Ok! C'est intéressant. (À Mathieu) Est-ce que ça t'aide un peu à formuler ton idée ?
5	M	Oui, mais je ne sais pas si c'est vraiment proportionnel. Parce qu'à partir, genre, jusqu'à environ dans le milieu, l'aire ne change pas beaucoup. Ça commence à être vraiment visible après ça.
6	E	Moi aussi j'ai remarqué ça.

Emma exprime la variation de l'aire du triangle ABF selon la distance entre les points D et B, une relation de dépendance naturelle. Toutefois, comme elle le soulignait plus tôt, cette variation ne semble pas être constante. C'est une observation que Mathieu corrobore juste ici, à la ligne 5. Le dynamisme de la présentation Geogebra permet à la dyade d'apprécier un changement dans la variation de l'aire du triangle ABF et d'accomplir l'action mentale MA3 *« Verbalizing an awareness of the amount of change of the output while considering changes in the input »* (Carlson et coll., 2002. p. 357)

Maintenant que cette relation de dépendance naturelle est énoncée, je leur demande d'explorer la relation de dépendance non naturelle.

1	V	Et est-ce qu'on peut parler de cette relation-là dans le sens inverse ? Vous avez dit que quand la distance DB augmente, l'aire semble diminuer.
2	M	Ben oui, si l'aire augmente, la taille des segments devrait augmenter donc selon moi la taille des segments du triangle devrait augmenter ce qui devrait faire en sorte que B va se retrouver de plus en plus proche de D. Dans le fond, c'est parce que si

		les segments augmentent, le segment BF va augmenter aussi et ça va le [le point B] mettre là [sur le point D]. Et dans le fond celui-là aussi il [segment AF] augmente quand il [point B] se rapproche de D.
3	V	Ok d'accord. Et est-ce que tu pourrais appliquer cette idée-là avec le segment DB ? C'est que tu me dis, que si l'aire augmente, les segments augmentent aussi; et est-ce que cette relation-là s'applique aussi avec l'aire et le segment DB ?
4	M	Non, lui, il va rapetisser.
5	V	Donc il n'y a pas de problème à dire que quand l'aire du triangle augmente, alors le segment DB rapetisse.
6	M	Ouais.

La dyade n'éprouve pas de problème à inverser la relation de dépendance. Je pense qu'encore une fois, l'organisation des relations de dépendance influence la possibilité d'inverser la direction de la relation. Dans ce problème la dyade exprime la variation de l'aire du triangle ABF selon la distance entre les points D et B et cette distance selon la position du point B sur DE. On constate limpidement l'effet domino.

À ce point de la séance, cette situation devient une situation-problème. Je demande à la dyade de conjecturer une position du point B qui maximiserait l'aire du triangle ABF.

1	E	Ben sur le point D

2	M	Moi, direct comme ça, je pense que c'est sur le point D
3	V	Ok, qu'est-ce qui vous fait dire ça ?
4	M	Dans le fond, selon moi, le DE c'est disons l'extension maximale que le segment BF peut avoir. Étant donné qu'on a dit que le segment BF rapetisse plus ça [le point B] se rapproche de E, et quand ça [point B] va se rapprocher de D ça [segment BF] va atteindre sa grandeur maximale.
5	E	Ben je pense que tous les segments, quand B est sur D, vont tous atteindre leur grandeur maximale.
6	M	Mais il y a le segment AB qui augmente plus tu l'éloignes.
7	E	Sinon, t'as un petit BF [en mettant le point B près du point E] et t'as des grands… Mais ça reste que l'aire va être plus petite parce que t'as un plus petit segment. Fait que admettons que tu fais *base fois hauteur divisée par deux,* ça va quand même être petit. Tandis que quand B est sur D, c'est toutes des grandes mesures fait que l'aire va être plus grande.
8	V	Ok, mais j'ai une question à vous poser. On a dit que le segment AB n'est pas à son maximum quand le point B est sur D. Si on déplace le point B, la hauteur [segment AB] devient plus grande. Mais la base a diminué. C'est parce que là, le dilemme, c'est que vous me dites que quand on arrive plus près du point E, la base devient plus petite donc l'aire devient forcément plus petite, mais en même temps, la hauteur augmente…
9	M	Ouais mais selon moi, c'est juste que comparé à quel point BF il diminue, versus AB qui augmente, je pense que le rapport disons entre le BF de base est beaucoup plus gros que celui entre AB.

10	V	Donc tu me dis que la diminution de la longueur de la base est comme, plus importante que l'augmentation de la hauteur et ça, ça t'amène a dire que…
11	M	Ben que peu importe si la hauteur augmente, si la longueur de la base réduit plus que la hauteur, l'aire va diminuer.

Sans l'ombre d'un doute, Emma et Mathieu affirment que lorsque le point B est sur le point D, l'aire du triangle ABF est maximale. La dyade construit une belle justification. On connaît le réflexe de se baser sur une équation pour discuter de la variation d'une quantité[38]. Ici, l'équation utilisée est $A = \frac{b \times h}{2}$. Voilà pourquoi il y a ce virage au niveau des relations. En effet, la dyade ne justifie pas son hypothèse à l'aide de la relation entre l'aire du triangle ABF et la distance entre les points D et B. Puisque la dyade utilise l'équation de l'aire d'un triangle, elle cherche plutôt à établir une ou des relations avec la longueur du segment BF (considéré comme la base du triangle ABF) et la longueur du segment AB (considéré comme la hauteur du triangle ABF). Ce faisant, deux relations émergent : la longueur du segment BF selon la position du point B et la longueur du segment AB selon la position du point B.

À la ligne 8, je dirige la réflexion vers les variations respectives de la longueur du segment BF et de la longueur du segment AB. Dans leur idée, l'aire du triangle ABF diminue, car la longueur du segment BF diminue aussi. Or, puisque la dyade

---

[38] Voir p. 80 et p. 125

raisonne avec la formule de l'aire d'un triangle, je soulève que même si la longueur du segment BF diminue, la longueur du segment AB augmente. Mathieu compare deux cas dans la situation : lorsque le point B est sur le point D et lorsque le point B est sur le point E. Il constate que le changement de longueur que subit le segment BF est plus important que le changement de longueur que subit le segment AB et que BF finit par atteindre 0. Ce faisant, le produit de leurs valeurs doit forcément diminuer.

Ce raisonnement consiste d'une part à comparer le changement respectif des segments AB et BF selon la position du point B sur DE et d'autre part, à évaluer le produit de la mesure des deux segments dans la formule de l'aire d'un triangle. L'action mentale MA3 *« Coordinating the amount of change of one variable with changes in the other variable »* est donc accessible à la dyade.

L'objectif de cette tâche était de guider la dyade dans une résolution de problème en utilisant des relations entre différentes quantités. Avant l'expérimentation, je pensais que la dyade utiliserait la relation de dépendance naturelle entre l'aire du triangle ABF et la distance entre les points D et B. En effet, puisque dans cette relation, l'aire du triangle ABF ne fait que diminuer, alors l'aire maximale serait au départ de la situation, c'est-à-dire lorsque le point B est sur le point D. Toutefois, ce n'est pas ce qui s'est passé.

La résolution de ce problème m'impressionne du fait que les relations ont été interprétées à la fois dans un cadre géométrique et dans un cadre algébrique. Dans le cadre géométrique, la présentation Geogebra facilite la visualisation non seulement des variations des quantités, mais également des relations entre elles. On le voit ! Dans le cadre algébrique, la relation prend la forme d'une expression algébrique, ce qui aide énormément à évaluer la variation de l'aire du triangle ABF.

Cette séance a certainement été la plus courte de toutes. Je pense que le travail fait lors de cette séance montre que la résolution d'un problème peut passer par l'utilisation des différentes relations en jeu dans une situation dynamique. En conclusion :

a) Il existe un nœud quand vient le temps d'associer la position d'un point sur un segment avec sa distance à un repère.
b) La dyade construit différentes structures de dépendances entre les variables. On cherche à retracer une relation de cause à effet.
c) La présentation Geogebra incite la dyade à construire les relations à partir de la position du point B.
d) La présentation Geogebra facilite la visualisation de la situation et aide lors de la justification.
e) La dyade est capable de l'action mentale MA3 (Carlson et coll., 2002).
f) L'utilisation d'expression algébrique aide à évaluer la valeur d'une quantité variable.
g) Lorsque vient le temps d'inverser la direction de la relation de dépendance, de nouvelles relations émergent.
h) L'utilisation de relations aide à résoudre le problème.

Ces constats en disent beaucoup. Je suis persuadé que plusieurs autres problèmes peuvent se résoudre par l'utilisation de différentes relations employées dans différents cadres. Nous avons été témoins de formulations verbales autour de plusieurs relations, et de l'utilisation algébrique d'une de ces relations. Je pense que globalement, la discussion suscitée a été plus riche qu'une simple résolution algébrique.

Tout au long de ce DE, plusieurs éléments ont fait la richesse des échanges transcrits dans ce chapitre. Plusieurs thèmes dont le temps, la direction et la structure des relations de dépendances, la définition d'une fonction, le dynamisme des contextes géométriques, le raisonnement covariationnel et les représentations sont passés sous la loupe. La coconstruction de la conpréhension conceptuelle d'Emma et Mathieu est riche de sujets de discussion. Le prochain chapitre me permettra de formuler une synthèse de cette exploration et de décrire le plus fidèlement possible les idées d'Emma et Mathieu.

CHAPITRE V

CONCLUSION(S)

Il y a quatre ans déjà, ce projet commençait à prendre forme. Cette envie de creuser plus loin m'aura guidé vers une exploration exaltante de la compréhension conceptuelle des fonctions chez Emma et Mathieu. Le *Design Experiment* est la méthodologie la plus adéquate quant à l'atteinte de cet objectif puisqu'il s'agit d'une méthodologie permettant les aléas dans un script ni trop rigide, ni trop relâché. C'est ainsi que la dyade d'élèves de cinquième secondaire a dû résoudre quatre problèmes lors d'un *Design Experiment* guidé par une perspective socioculturelle. Ceci dit, différents thèmes ont émergé autour de la notion de relation. Ce dernier chapitre me permettra d'abord de faire la synthèse de ces différents thèmes, et ensuite de conclure ce projet d'exploration en énonçant ses retombées.

5.1 Synthèse des thèmes

Il s'agit probablement de la section la plus difficile à écrire, car tant de choses se sont passées lors de cette exploration. Trois thèmes principaux émergent autour de l'idée de relation. Les contextes géométriques ouvriront cette synthèse comme premier thème pour suivre avec les représentations et conclure avec le raisonnement covariationnel.

5.1.1 Les contextes géométriques

Dans le cadre de ce DE, l'utilisation de contextes géométriques a grandement facilité la visualisation, non seulement des relations, mais aussi des variations respectives des différentes quantités. Le dynamisme qu'apportent les présentations *Geogebra* permet d'apprécier l'importance et l'amplitude de la covariation entre variables. Pensons à Emma qui soulignait, à la quatrième séance, que l'aire du triangle ABF n'avait pas une diminution régulière (MA3).

Toutefois, il est important de souligner que le logiciel de géométrie dynamique a induit la dyade en difficulté à différents moments, notamment lorsque Mathieu a construit la représentation graphique d'une fonction polynomiale du second degré, dû à la symétrie de la situation *Les carrés*[39] (voir Tableau 5).

L'usage de contextes géométriques aura fait ressortir un défi important lorsque la dyade dut associer la position d'un point et la distance entre ce point et un repère. Le changement entre le plan cartésien et le plan euclidien constitue ce défi et engendre une relation entre la même variable exprimée dans deux cadres différents.

[39] Cette situation fait penser au graphique de Janvier, où il est demandé combien il y a de tournants sur la piste de course ! (Voir Figure 2.6)

Les verbalisations de la dyade se basent sur la relation entre la position d'un point et la distance entre ce point et un repère, pour ensuite construire une série de relations de cause à effet (ou de compositions de fonctions). On peut penser à la première séance, lorsque Mathieu a établi une série de relations de cause à effet pour verbaliser la variation de la distance entre la voiture et le contrôleur – distance entre la voiture et le contrôleur selon la distance parcourue et distance parcourue selon la position de la voiture. De plus, les présentations *Geogebra* renforcent cette structuration en relations de cause à effet, de par leur dynamisme même. En effet, pour animer la présentation, il faut déplacer un certain point et c'est ce déplacement qui provoque les autres déplacements, les variations de longueurs, d'aires, de positionnement, etc.

Ce raisonnement fait ressortir l'importance qu'accorde la dyade à la notion de relation de cause à effet entre les variables. Une fois que la dyade identifie l'élément responsable des changements dans la situation — ou peut-être une façon équivalente de voir cela, d'identifier la variable la plus susceptible d'être choisie comme variable indépendante —, elle structure les différentes relations qui engendrent finalement la variation de la quantité questionnée. Voici un résumé des structures relationnelles établies par la dyade lors des quatre séances.

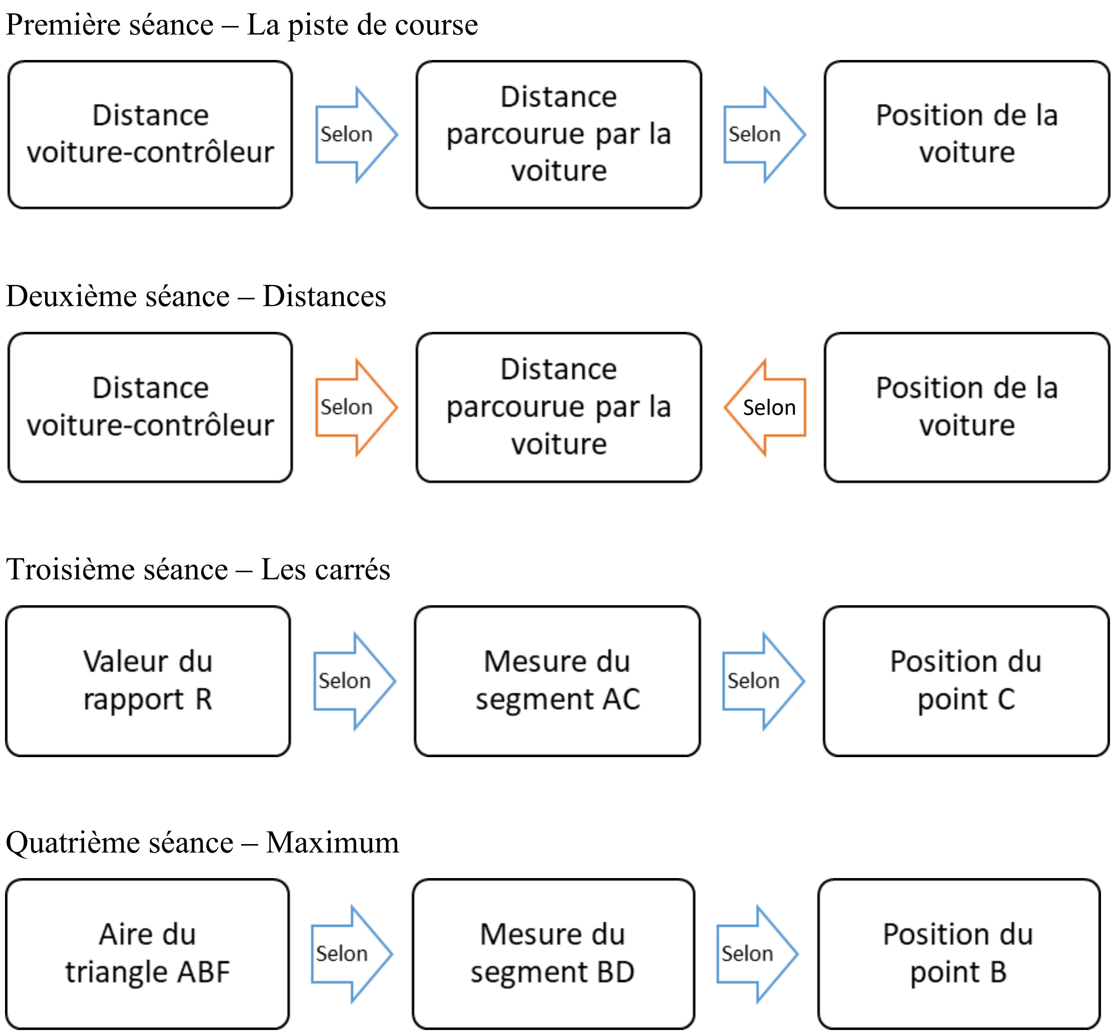


Figure 5.1. Structures relationnelles explorées lors des séances.

Considérant l’importance qu’accorde la dyade au phénomène de cause à effet, et le fait que les contextes géométriques renforcent cette importance, la dyade procède différemment lors de la deuxième séance. En effet, il n’y a pas de relation de cause à effet entre la distance de la voiture à la ville A et la distance de la voiture à la ville B puisqu'il s'agit d'une relation de dépendance partagée et d'un relation non fonctionnelle. Ce faisant, la dyade crée deux relations[40] qui se basent sur la position de la voiture, élément responsable des changements dans la situation (et candidat à être une variable indépendante).

À la suite de ce constat, la direction des relations de dépendance devient un sujet fort intéressant. En effet, lors des première, troisième et quatrième séances, la dyade n'éprouvait pas (ou peu) de difficulté à inverser la direction d'une relation de dépendance naturelle. Lors de la deuxième séance, ce n'était pas le cas. Puisque la relation entre les deux distances en question n'est pas une relation de cause à effet, dans laquelle on peut identifier une variable indépendante, la dyade éprouve des difficultés à exprimer une relation de dépendance partagée. Mathieu en est même venu à baliser le contexte et à attribuer le rôle d' « élément responsable du changement » à la distance entre la voiture et la ville A pour que la situation ait du sens. Lorsqu'il s'agit d'une série de relations de dépendance naturelle composées comme une ligne de dominos, la dyade n'éprouve que très peu de difficultés à inverser la direction de la relation de dépendance. Dans l'autre cas, la composition des relations est trop complexe pour en inverser la direction.

J'en conclus que les contextes géométriques sont délicats à manipuler. En fait, un processus de visualisation mathématique est nécessaire (mettre en relation les variables visuelles avec ses unités significatives correspondantes, selon Duval (1988)).

---

[40] Voir figure 5.1.

Toutefois, leur potentiel est très grand. Ce type de contextes favorise la composition de relations ainsi que la visualisation de la variation de différentes quantités. Il en est même venu à favoriser l'emploi d'action mental de niveau 3 (MA3, Carlson et coll., 2002, p. 357). Il ne suffirait que d'indiquer la mesure instantanée de la distance entre un point et un repère pour faciliter le passage entre les plans cartésien et euclidien.

5.1.2 Les représentations

La dyade a construit plusieurs représentations lors de ce DE mais il est évident que les verbalisations clés sont les plus fréquentes (la verbalisation est pour ainsi dire le moteur qui va promouvoir la production des autres représentations). Les verbalisations clés sont des phrases préconstruites dont il suffit à l'utilisateur d'en valider le sens. Ces verbalisations ont aidé la dyade à établir les structures relationnelles (Figure 5.1) selon la direction naturelle des relations de cause à effet. Toutefois, lorsque venait le temps d'inverser la direction de la relation de dépendance, les verbalisations clés ne fonctionnaient plus puisqu'elles énonçaient un non-sens selon le contexte. Ainsi, la dyade formulait de nouvelles relations de dépendance et les exprimait à l'aide d'une verbalisation clé, celle-ci validant la crédibilité de la nouvelle relation de dépendance dans le contexte.

Lors des deux premières séances, les problèmes étaient plongés dans une situation de la vie courante (une piste de course et une route). Les verbalisations de relations étaient soutenues par une segmentation de la situation en termes de temps ou de variation. On pouvait entendre *« pendant que »*, *« plus vite que »*, *« croissant puis décroissant »* pour ne nommer que quelques-uns de ces termes. Le temps est un facilitateur lors de la formulation d'une verbalisation clé puisqu'il marque l'évolution dans la relation de cause à effet. Il en va différemment lors des troisième et quatrième séances, où le temps ne fut même pas mentionné. Les tâches de ces dernières séances étaient décontextualisées, elles se limitaient à la figure géométrique présentée dynamiquement. Les verbalisations se basaient principalement sur la position d'un objet : *« quand il s'approche de »*, *« en allant vers »*, *« ici »*… Ainsi, la position d'un objet dans un contexte géométrique est aussi un facilitateur lors de la formulation d'une verbalisation clé puisqu'il marque l'évolution dans la relation de cause à effet. Il faut cependant préciser que la position cache souvent un aspect chronologique implicite, il y a une position de départ, une position d'arrivée, le temps se déroule entre les deux ce que les mots comme *« quand », « s'approcher de »* ou *« en allant vers »* laissent entendre implicitement.

Les représentations graphiques ont été favorisées dès la formulation des tâches[41] et ici, le temps n'est pas un facilitateur. En effet, lors de la première séance, la dyade ne construisait pas une représentation graphique de la relation entre la distance de la voiture au contrôleur selon la distance parcourue. Puisqu'elle s'expliquait la situation dans un repère temporel, elle n'établissait pas de lien de cause à effet entre les deux variables en question. Ainsi, la représentation graphique résultante était celle de deux relations : la distance de la voiture au contrôleur selon le temps et la distance parcourue selon le temps (Figure 4.6). Mathieu procède de la même façon lors de la deuxième séance (Figure 4.9).

---

[41] Voir Chapitre III

Cependant, lors de la troisième séance, la construction d'une représentation graphique n'a pas été entravée par un repère temporel[42] simplement parce que la dyade verbalisait la situation selon la position d'un point et non selon un contexte se déroulant dans le temps. Étant donné que la distance entre les points A et C peut-être traitée comme variable indépendante de la situation *Les carrés,* la dyade est en mesure de construire une représentation graphique mettant en relation les deux variables questionnées. De plus, cette distance évolue de la même façon que le temps, c'est-à-dire en suivant une augmentation constante. La dyade transpose donc la distance entre A et C dans un raisonnement qu'elle aurait employé pour construire une relation entre la variable dépendante et le temps. Ainsi, la dyade conçoit le graphique comme une courbe se déployant dans le temps (où le temps est une variable indépendante). Cela rejoint la remarque que nous avons faite précédemment, à savoir que les variables de position cachent souvent la variable « temps » comme variable indépendante implicite.

La construction de la première représentation graphique de la troisième séance a aussi soulevé un questionnement important relatif à l'allure générale de la courbe. La conclusion a été de faire une courbe plutôt qu'une série de segments de droite. Le raisonnement de la dyade débute au niveau de la figure de la situation comportant deux carrés. Ensuite, dans un cadre algébrique, la dyade énonce que l'aire d'un carré se calcule par le carré de la mesure de la longueur de son côté. Puis, parce que la dyade connaît l'allure d'une représentation graphique d'une fonction exponentielle, elle déduit que l'allure de leur représentation graphique sera similaire puisqu'il y a un

---

[42] D'autres défis ont été rencontrés.

exposant deux dans le calcul de l'aire d'un carré (les élèves semblent avoir perdu de vue ici que dans une exponentielle, l'exposant doit être variable). D'où la conclusion que nous connaissons. Ainsi, la dyade contrôle la construction de sa représentation graphique en établissant un lien entre l'aire d'un carré de la situation géométrique et une unité significative de la représentation algébrique, pour ensuite convertir l'unité significative en une variable visuelle de la représentation graphique.

La construction de la deuxième représentation graphique s'est faite dans un ordre qui ressemble davantage à ce qui est présenté dans les manuels scolaires[43], c'est-à-dire construire la représentation graphique à partir d'une représentation algébrique. Lors de ce travail, les élèves de la dyade ont utilisé la table de valeurs à titre de représentation intermédiaire, tout comme dans le questionnaire initial, puisqu'ils ne connaissaient pas la famille de la fonction en cause. J'évalue que le travail fait sur la relation a été plus riche lors de la construction de la première représentation graphique. Le travail de conversion effectué lors de la construction de la deuxième représentation graphique n'aura été qu'un outil de validation.

Les représentations algébriques ont été les moins utilisées, même s'il s'agit souvent du premier réflexe des élèves. La dyade utilise les représentations algébriques pour deux raisons, principalement : pour évaluer la valeur d'un résultat (spécialement lorsque Mathieu utilise ses mains pour représenter la fraction du

[43] Voir Chapitre II.

rapport R, voir Figure 4.13) ; pour construire une table de valeurs dans le but de construire une représentation graphique.

J'en conclus que le temps n'est pas un facilitateur pour la construction d'une représentation graphique d'une relation préalablement verbalisée dans un repère temporel. J'en conclus également que la dyade conçoit le graphique comme une courbe se déployant sur un domaine constamment croissant et qu'elle utilise les représentations algébriques de différentes façons selon le but. Aussi, pour travailler le concept de relation, il est important de favoriser l'utilisation de verbalisations pour construire des représentations graphiques. Il est aussi préférable de favoriser les relations où l'on retrouve une variable indépendante, entre autres (mais pas uniquement) si l'on veut aborder les notions de croissance et de décroissance (toujours d'une variable *par rapport à une autre* !).

5.1.3 Le raisonnement covariationnel.

Tout comme les représentations, le raisonnement covariationnel est un élément important[44] de cette exploration et a été stimulé à travers les séances. Au début de chaque séance, la dyade devait exprimer ce qu'elle constatait par rapport à une variable, puis par rapport à une autre.

[44] La littérature montre que ce concept est un élément clé pour la construction du concept de fonction (voir la liste de références de ce mémoire). Dans ce contexte, notre DE a favorisé la réflexion sur la covariation entre variables pour étayer le concept de fonction chez chaque membre de la dyade.

À chaque fois, la dyade était en mesure de constater les variations des différentes quantités questionnées. Ainsi, la dyade est capable d'action mentale 1 (MA1, Carlson et coll., 2002. p. 357).

Ensuite, la dyade devait verbaliser ce qu'elle constatait de l'évolution simultanée des deux quantités. Lors des première, troisième et quatrième séances, la dyade était en mesure de prêter une attention particulière à la croissance et à la décroissance d'une quantité selon la variation d'une autre quantité, et à décrire en mots leur observation. Lors de la deuxième séance, la structure relationnelle découlant d'une relation de dépendance partagée a compliqué les choses. De plus, les verbalisations étaient étroitement liées à la position de la voiture sur la route puisqu'il s'agit de l'élément responsable des changements. La dyade est capable d'action mentale 2 (MA2, Carlson et coll., 2002, p. 357).

C'est lors de la quatrième séance qu'Emma et Mathieu on fait preuve d'une capacité d'action mentale 3 (MA3, Carlson et coll., 2002, p. 357) en relevant que la variation de l'aire du triangle ABF n'est pas constante. En creusant plus, on comprend qu'ils sont capables de constater la quantité de changement pour chaque variable et d'affirmer que ces quantités de changement ne sont pas constantes pour chaque position du point B. Ainsi, la dyade fait preuve d'une utilisation adéquate d'une action mentale 4 (MA4, Carlson et coll., 2002, p. 357). Je conclus que la dyade se situe au niveau L4 (L4, Carlson et coll., 2002, p. 358).

Je clos cette section en faisant un autre constat. Lors de la troisième séance, la dyade utilisait la représentation algébrique du rapport entre les aires des deux carrés et la verbalisation de la relation entre ces aires pour se faire une idée de la valeur du rapport *R*. La dyade formulait son raisonnement ainsi : *« Plus l'aire du carré ACDE augmente, plus l'aire du carré CBFG diminue et donc plus le rapport R augmente. »* C'est ce genre de verbalisation qui a permis à la dyade de conclure qu'il y avait une asymptote verticale dans la représentation graphique. Cependant, le raisonnement semblait différent lors de la quatrième séance, où la dyade réfléchissait sur un produit plutôt que sur un quotient. En effet, leur raisonnement se basait sur le produit de la base par la hauteur, en négligeant la division par 2. Raisonner sur la valeur d'un produit entre deux quantités variables nécessite de connaître leur domaine de variation respectif, ainsi qu'une sensibilité à la quantité de variation d'une variable.

5.2 Les retombées de ce projet d'exploration

La problématique qui stimule ce projet est le manque de compréhension conceptuelle de la notion de fonction. Ce manque de compréhension conceptuelle est directement lié à l'idée de relation entre deux quantités et lors de ce DE, cette idée a été travaillée ardemment. Travailler la relation, c'est aussi travailler le raisonnement covariationnel puisque ce dernier se base sur l'expression d'une sensibilité aux changements d'une variable. Je pense que pour consolider la compréhension conceptuelle de la notion de fonction, il faut travailler les relations non fonctionnelles, telle celle qui a été traitée lors de la deuxième séance. Il faut également consacrer une partie du travail à la construction de représentations graphiques à partir d'une situation donnée et non pas uniquement à partir d'une représentation algébrique. Je pense que ce DE pourra aider à l'élaboration d'une séquence d'enseignement favorisant le développement du raisonnement covariationnel. Ce mémoire montre l'importance de la covariation entre variables comme prélude au concept de fonction, et donne la possibilité de réfléchir sur l'amélioration de l'organisation des manuels scolaires, où l'on devrait donner beaucoup plus d'attention à cette notion clé.

De plus, ce projet d'exploration contribue à la recherche en didactique des mathématiques de par les nombreux questionnements qu'il soulève, dans le sillage du portrait que j'y dresse de la coconstruction de la compréhension conceptuelle de la notion de fonction chez Emma et Mathieu. Je pense qu'à partir de ce portrait et des questions soulevées, la communauté de recherche en didactique des mathématiques pourra poursuivre et enrichir ces réflexions sur la notion de fonction.

5.3 Le mot de la fin

La satisfaction de conclure cette exploration est immense, tout comme le sentiment d'accomplissement qui la suit. Le raisonnement covariationnel peut être stimulé par l'intermédiaire de contextes géométriques, de verbalisations et de constructions de représentations graphiques. Je pense que ces éléments de liaisons entre registres de représentations permettent de comprendre l'aspect dynamique des relations, et que les chemins sont variés pour représenter de telles idées.

ANNEXE A

QUESTIONNAIRE INITIAL

Première partie – Fonction

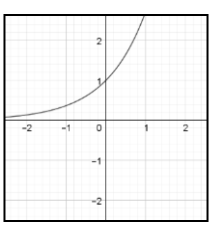
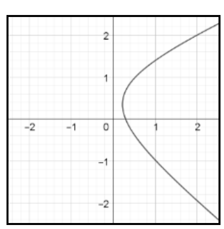
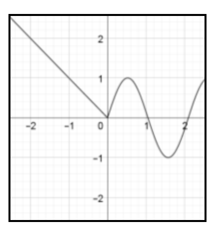
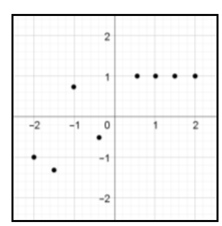
1. Dans un contexte de mathématique, qu'est-ce qui te vient à l'esprit quand tu entends ou lis le mot «fonction»? Utilise cette espace pour répondre à la question.
2. Peux-tu m'expliquer ce qu'est une fonction? Tu peux te baser sur ta réponse à la question 1 si jamais tu en as besoin.
3. Si tu avais à définir le mot fonction pour un dictionnaire de mathématique, que dirais-tu?

Deuxième partie – Représentations

1. Que peux-tu dire de ces équations algébriques?

$\boldsymbol{f(x) = a(x-h)^2 + k}$	$\boldsymbol{y = am + b}$	$\boldsymbol{f(\,)^x = 3\sqrt{7-}}$	$\boldsymbol{f(x) = 3\sqrt{0,5(x-2)} + 4}$

2. Que peux-tu dire de ces représentations graphiques?

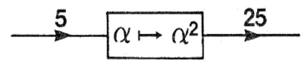
			

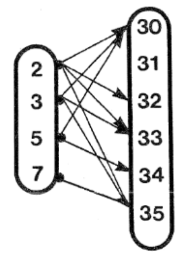
3. Que peux-tu dire de ces tables de valeurs?

x	Y
-3	8
-1	0
0	-1
2	3
7	48

X	-2	-1	1	3	6
y	-3	-6	6	2	1

4. Que peux-tu dire de ces représentations?





Troisième partie – Relations

Dans chacune des situations, il y a deux variables en jeu. On te demande de les identifier et de dire quelle variable est dépendante et quelle variable est indépendante.

1. On s'intéresse à la relation entre la circonférence d'un cercle et la mesure de son rayon.
2. On considère la relation entre la hauteur du niveau de l'eau dans une bouteille et la quantité d'eau qu'elle contient.
3. Un piéton se promène dans la rue. On considère la relation entre la distance séparant le piéton de sa maison et la distance séparant le piéton de l'épicerie.
4. On s'intéresse à la relation entre le nombre de volontaires pour repeindre une salle de classe et le temps nécessaire à l'accomplissement de la tâche.

ANNEXE B

ÉNONCÉ DU PROBLÈME – LA PISTE DE COURSE

Des amis participent à une course de voitures téléguidées. Ils décident de tracer le circuit que la voiture devra suivre en s'imposant deux contraintes :

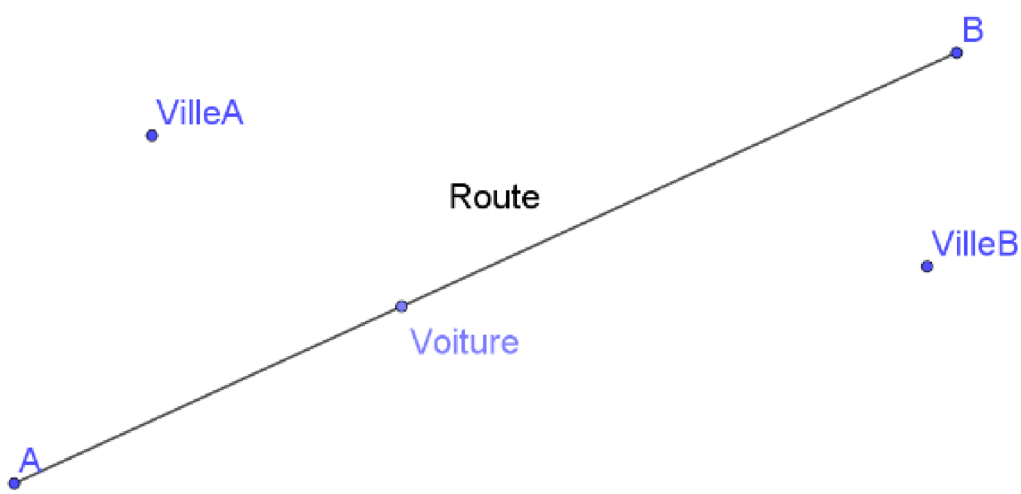
1. Le circuit doit être fermé et ne comporter aucun croisement ;
2. La personne avec la télécommande devra se tenir à l'intérieur du circuit.

Dans l'encadré ci-dessous, et en respectant les deux contraintes, tracez à main levée un circuit de l'allure de votre choix et positionnez la personne avec la télécommande.

ANNEXE C

ÉNONCÉ DU PROBLÈME – DISTANCES

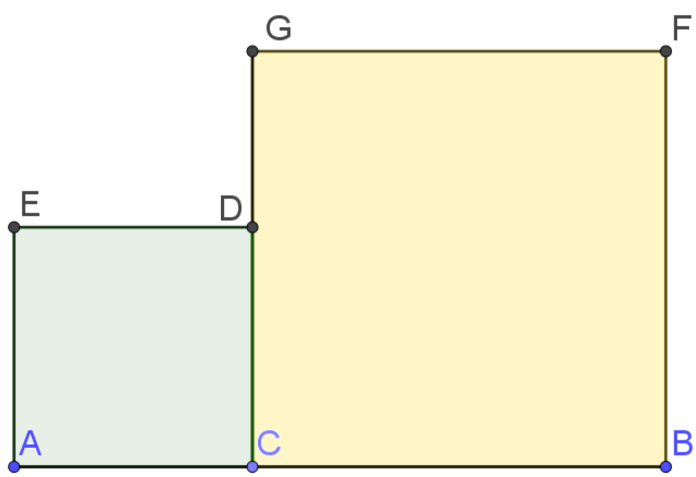
Une voiture se déplace le long d'une route. Deux villes, VilleA et VilleB, sont situées de part et d'autre de cette route.



ANNEXE D

ÉNONCÉ DU PROBLÈME – LES CARRÉS

Sur un segment AB, on a pris un point C (point libre) et on a construit deux carrés (ACDE et CBFG) comme le montre la figure. Si on déplace le point C le long du segment AB, on obtient différents carrés. Pour fixer les idées, supposons que le segment AB mesure 10 unités.

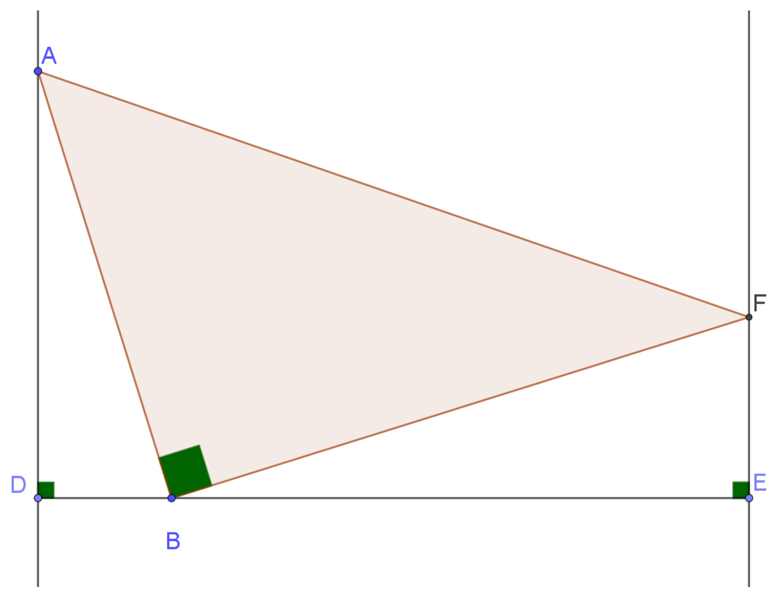


C, est un point libre sur le segment AB

ANNEXE E

ÉNONCÉ DU PROBLÈME – MAXIMUM

Le segment DE mesure 10 unités et le segment DA mesure 6 unités. Le point B est n'importe où sur le segment DE. De B, on élève la perpendiculaire à AB. Elle croise la verticale qui passe par E au point F. (Autrement dit ΔABF est rectangle en B, peu importe la position de B).



Le point B est libre sur le segment DE

RÉFÉRENCES

Alloprof. (s. d.) *Les cercles et les disques.* Alloprof. https://www.alloprof.qc.ca/fr/eleves/bv/mathematiques/les-cercles-et-les-disques-m1202

Arcavi, A. et Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International journal of computers for mathematical learning*, 5(1), 25-45.

Boucher, C., Coupal, M., Jacques, M. et Marotte, L. (2009). *Intersection mathématique : 2e cycle du secondaire, 2e année,* (Vol. A , sciences naturelles). [Manuel de l'élève]. Éditions Graficor.

Brousseau, G. (1986). Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique. CIRADE. Les éditions Agence d'Arc inc. 277-285.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Dans Bednarz N. et Garnier C. (dir.), *Construction des savoirs : obstacles et conflits*, Colloque international Obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif (1988), Université du Québec à Montréal, 41-63. Éditions Agence d'ARC.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990*. (Textes rassemblés par Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland et Virginia Warfield). Éditions La pensée sauvage.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. et Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for research in mathematics education*, 33(5), 352-378.

Carlson, M., Oehrtman, M. et Engelke, N. (2010). The precalculus concept assessment: A tool for assessing students' reasoning abilities and understandings. *Cognition and Instruction*, 28(2), 113-145.

Cobb, P. et Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for research in mathematics education*, 14(2), 83-94.

Cobb, P., Perlwitz, M. et Underwood, D. (1994). Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des sciences de l'éducation*, 20(1), 41-61.

Cobb, P. et Whitenack, J. W. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom videorecordings and transcripts. *Educational studies in mathematics*, 30(3), 213-228.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. et Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher*, 32(1), 9-13.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31.

Dufour, S. (2019). *Des processus de compréhension sous l'angle des représentations : un Teaching Experiment autour de la dérivée*. [Thèse doctorale, Université du Québec à Montréal].

Duval, R. (1988). Graphiques et équations : l'Articulation de deux registres. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 1, 235-253.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5(1), 37-65.

Duval, R. (2006). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du XXXIIe colloque COPIRELEM*, 67-89.

Euler, L. (1796). *Introduction à l'analyse infinitésimale.* Traduction française par J. B. Labey, (Publication originale de 1748). Édition Bachelier.

Guay, S. et Lemay, S. (1997). *Scénarios : 4e secondaire,* (Tome 1, 436). [Manuel de l'élève]. Éditions HRW.

Guay, S. et Van Moorhem, A. (2007). *Point de vue mathématique, 2e cycle du secondaire, 1re année* (Vol. 2). [Manuel de l'élève]. Éditions Grand Duc.

Guay, S. et Van Moorhem, A. (2008). *Point de vue mathématique, 2e cycle du secondaire, 2e année* (sciences naturelles). [Manuel de l'élève]. Éditions Grand Duc.

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 8, 255-271.

Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation*, 30(2), 329-354.

Hitt, F. (2006). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example: The concept of limit. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 253-268.

Hitt, F. et Morasse, C. (2009). Développement du concept de covariation et de fonction en 3ème secondaire dans un contexte de modélisation mathématique et de résolution de situations problèmes. *Proceedings CIEAEM*, 61, 208-216.

Hitt, F. et González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modeling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational studies in mathematics*, 88(2), 201-219.

Hitt, F. et Quiroz Rivera, S. (2019). Formation et évolution des représentations fonctionnelles-spontanées à travers un apprentissage socioculturel. *Annales de didactique et de sciences cognitives. Revue internationale de didactique des mathématiques*, 24, 75-106.

Hitt, F. (2020). *Didactique de la variable et des fonctions*. *MAT 3225* [Notes de cours et illustrations]. Université du Québec à Montréal, Département de mathématiques.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: studies and teaching experiments.* [Thèse doctorale, Nottingham University].

Janvier, C. (1983). Représentation et compréhension. Un exemple : Le concept de fonction. *Bulletin de l'association mathématique du Québec,* 3, 22-28.

Janvier, C. (1993). Les graphiques cartésiens : des traductions aux chroniques. *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle,* 1(3), 17-37.

Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior,* 17(1), 79-103.

Ledoux, A., Brosseau, B., Boivin, C., Boivin, D. et Ricard, N. (2007-2009). *Visions, 2e cycle du secondaire, 1re année* (Vol. 1). [Manuel de l'élève]. Éditions CEC.

Ministère de l'Éducation. (2007). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, 2e cycle, mathématiques*. Gouvernement du Québec.

Moore, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: A teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics,* 83(2), 225-245.

Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education,* 45(1), 102-138.

Passaro, V. (2007). *Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélé par une analyse des représentations spontanées d'élèves du premier cycle du secondaire.* [Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal].

Saldanha, L. et Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. Dans S. B. Berensah et W. N. Coulombe (ed.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America*. North Carolina State University.

Scolab. (2009-2020). *Fonction*, Netmath, lexique. https://lexique.netmath.ca/fonction/

Steffe, L. P. (1991). Operations that generate quantity. *Learning and individual differences,* 3(1), 61-82.

Steffe, L. P. et Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. Dans Kelly, A. E. et Lesh, R. A. (ed.), *Handbook of research design in mathematics and science education,* 267-306.

Thompson, A. G. et Thompson, P. W. (1996). Talking about rates conceptually, Part II: Mathematical knowledge for teaching. *Journal for research in Mathematics Education,* 27(1), 2-24.

Thompson, P. W. et Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. *Compendium for research in mathematics education,* 421-456.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 14(3), 293-305.

Webb, N. M. (1991). Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups. *Journal for Research in Mathematics Learning,* 22, 366-389.