

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

IMPACT D'UN MODÈLE DE COVARIANCE D'ERREUR DE PRÉVISION BASÉ SUR
LES FONCTIONS DE SENSIBILITÉ DANS UN 3D-VAR

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN SCIENCES DE L'ATMOSPHÈRE

PAR
CRISTINA LUPU

JANVIER 2006

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Mes remerciements et sentiments de gratitude s'adressent au Dr. Pierre Gauthier, professeur associé au Département des Sciences de la Terre et de l'atmosphère de l'Université du Québec à Montréal et directeur du projet. J'ai bénéficié de son support, de ses bons conseils scientifiques et de ses encouragements tout au long de ce projet. Merci à lui, de m'avoir ouvert une fenêtre sur le monde de l'assimilation de données et pour l'opportunité donnée de poursuivre la recherche dans ce domaine.

Mes sincères remerciements vont également au Dr. Peter Zwack, professeur du Département des Sciences de la Terre et de l'atmosphère de l'Université du Québec à Montréal, qui en agissant à titre de co-directeur a fortement enrichi ma formation.

J'aimerais remercier professeurs, collègues et amis du Département des Sciences de la Terre et de l'atmosphère de l'UQAM. Un merci particulier à Jean-François Caron pour sa coopération et ses suggestions et également à Christian Pagé pour son aide précieuse dans le domaine informatique.

Merci également au Dr. Stéphane Laroche de la Division d'assimilation de données et de météorologie satellitaire du Service Météorologique du Canada pour ses conseils et sa bienveillance et au Service Informatique à Dorval pour leur coopération.

J'exprime ma reconnaissance aux membres de ma famille qui, de près ou de loin, ont rendu plus facile la réalisation de ce travail.

Cette étude a été rendue possible grâce au financement de la Fondation canadienne pour les sciences du climat et de l'atmosphère (FCSCA).

Au-delà des mots, MERCI à tous.

TABLE DES MATIERES

LISTE DES FIGURES	v
LISTE DES TABLEAUX	xi
LISTE DES SIGLES ET ACRONYMES	xii
LISTE DES SYMBOLES	xiii
RÉSUMÉ.....	xvii
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I	
CADRE THÉORIQUE	7
1.1 Description du problème d'assimilation de données.....	8
1.1.1 Méthodes d'estimation statistique en assimilation de données.....	9
1.1.2 Le 3D-Var	11
1.1.3 Le 3D-Var incrémental	12
1.1.4 Modélisation multivariée de la matrice de covariance d'erreurs de prévision.....	15
1.2 Revue des études de sensibilités.....	18
1.2.1 Application du modèle adjoint aux expériences de sensibilité	18
1.2.2 Analyse de sensibilité <i>a posteriori</i>	20
1.2.3 Analyse de sensibilité <i>a priori</i>	22
CHAPITRE II	
L'ASSIMILATION ADAPTATIVE : UTILISATION DES ANALYSES DE SENSIBILITÉ COMME FONCTIONS DE STRUCTURE LOCALES	26
2.1 Assimilation adaptative 3D-Var.....	26
2.1.1 Première approche au 3D-Var adapté.....	27
2.1.2 Deuxième approche 3D-Var adapté.....	32
2.2 Génération du 3D-Var adapté à partir du 3D-Var	36
2.3 Le lien entre les deux approches au 3D-Var adapté.....	38
2.4 Application de la méthode adaptative à un problème 1D.....	40
2.4.1 Formulation théorique.....	40
2.4.2 Cadre expérimental	44

2.4.3	Présentation de résultats.....	45
2.4.4	Discussions	54
CHAPITRE III		
IMPACT DU 3D-VAR ADAPTÉ DANS UNE ÉTUDE DE CAS MÉTÉOROLOGIQUE... 55		
3.1	Expériences à une seule observation	55
3.1.1	Expérience à une observation et représentation des covariances d'erreur de prévision.....	56
3.1.2	Cadre expérimental	58
3.1.3	Variations effectives	63
3.2	Assimilation de données réelles : cas du 27 janvier 2003	65
3.2.1	Présentation du cas étudié.....	65
3.2.2	Fonctions de sensibilité <i>a posteriori</i> : trois définitions.....	67
3.2.3	Discussion	100
CONCLUSION		
102		
ANNEXE A		
TRANSFORMATION DE HOUSEHOLDER		
107		
ANNEXE B		
CALCUL DE LA MATRICE $\tilde{\mathbf{I}}^{-1}$ PAR LA MÉTHODE DE CHOLESKI		
111		
ANNEXE C		
CAS LIMITES DE L'APPROCHE PROPOSÉE PAR HELLO ET BOUTTIER.....		
113		
ANNEXE D		
RELATION DE SHERMAN - MORRISON.....		
115		
BIBLIOGRAPHIE		
117		

LISTE DES FIGURES

Figure	Page	
1.1	Incréments d'analyse du vent (vecteurs) et du géopotential (contours) pour l'observation du vent localisée dans le point (45°N, 180°E) à 250 hPa assimilée avec le 3D-Var opérationnel au CMC dans la partie a), et respective, en b) la coupe verticale zonale à 45°N de l'incrément d'analyse du vent (contours). (tiré de : Buehner, 2004).....	17
1.2	Aperçu de l'algorithme d'analyse de sensibilité du CMC (d'après : Laroche <i>et al.</i> , 2002).....	24
1.3	Analyse de sensibilité <i>a posteriori</i> calculée avec l'algorithme du CMC pour une prévision manquée sur la côte est de l'Amérique du Nord, le 27 janvier 2003 à 12 UTC. En a) le champ de température de la fonction de sensibilité sur tout le globe proche de 900 hPa (intervalle 0.2°C); b) plan rapproché de la fonction de sensibilité pour le même champ de température (intervalle 0.2°C) dans la région entourée par le cadre en 1.3-a; c) la coupe verticale pour le champ de température de la fonction de sensibilité le long de la flèche en 1.3-b.....	25
2.1	a) L'incrément d'analyse obtenu avec un 1D-Var sans modification (trait plein), la fonction de sensibilité (en pointillés) et les deux observations assimilées (marquées d'un x). b) Comparaison des analyses obtenues avec le 1D-Var standard et le 1D-Var modifié pour $\sigma=1$: l'incrément d'analyse obtenu avec un 1D-Var sans modification (trait plein), l'incrément d'analyse obtenu avec un 1D-Var adapté (en pointillés) et les deux observations assimilées (marquées d'un x).....	46
2.2	Impact de la valeur de σ sur l'analyse dans un 1D-Var modifié. L'incrément d'analyse obtenue avec un 1D-Var adapté est représenté en trait plein en considérant $\sigma=2$ dans la partie a) et $\sigma=10$ dans la partie b). En pointillés est indiqué la fonction de sensibilité et les deux observations sont marquées d'un x.....	47
2.3	Impact de la valeur de σ_0 sur l'analyse dans un 1D-Var modifié. En trait plein est représenté l'incrément d'analyse obtenu avec un 1D-Var adapté en posant $\sigma=10$ et en variant σ_0 : a) $\sigma_0=2$ respectif b) $\sigma_0=0.5$. En pointillés est indiqué la fonction de sensibilité et les observations sont marquées d'un x.....	47

- 2.4 Analyse avec un 1D-Var modifié : les incréments d'analyse obtenus en considérant différentes valeurs de σ_o et de σ . En a) $\sigma_o = 1$ et $\sigma = 2$, respectif en b) $\sigma_o = 1$ et $\sigma = 10$. Dans les parties c) et d) on a considéré $\sigma_o = 0.1$ et les mêmes valeurs pour le paramètre σ (égal à 2 respectif à 10). En pointillés est indiqué la fonction de sensibilité et les observations sont marquées d'un x..... 50
- 2.5 Les changements de l'incrément de l'analyse induites par une valeur de $\sigma = 30$ dans un 1D-Var modifié ($\sigma_o = 0.1$; $\sigma_b = 1$). Dans la partie a), l'état analysé obtenu après 18 itérations et en b) l'état analysé obtenu après 37 itérations. La fonction de sensibilité est en pointillés et les deux observations sont marquées d'un x..... 51
- 2.6 Les états analysés obtenus en employant le 1D-Var et 1D-Var modifié. En a) l'analyse sans modification est représenté en trait plein, la fonction de sensibilité est en pointillés et les observations sont marquées d'un x. Dans la partie b) l'analyse sans modification en trait plein, en pointillés l'analyse obtenue avec un 1D-Var adapté pour $\sigma = 1$ et les observations assimilées sont marquées d'un x. Les états analysés adaptés sont tracés en considérant que $\sigma_o = \sigma_b = 1$ et pour différentes valeurs de σ : c) $\sigma = 2$; d) $\sigma = 10$. Dans les figures e) et f) on a l'impact de la valeur de σ_o sur l'analyse dans un 1D-Var adapté : e) $\sigma_o = 2$; f) $\sigma_o = 0.5$ pour $\sigma = 10$ 52
- 2.7 Les états analysés obtenus en employant les deux méthodes définissant le 1D-Var adapté. En trait plein est représenté l'incrément d'analyse obtenu avec le 1D-Var adapté proposé par Hello et Bouttier, en pointillés est donné l'incrément d'analyse obtenu avec la deuxième approche du 1D-Var adapté et les deux observations assimilées sont marquées d'un x. Pour $\sigma_o = \sigma_b = 1$, différentes valeurs de σ_1 et de σ sont considères : a) $\sigma_1 = 1$; $\sigma = 1.27$; b) $\sigma_1 = 2$; $\sigma = 2.56$; c) $\sigma_1 = 5$; $\sigma = 6.39$; d) $\sigma_1 = 10$; $\sigma = 12.79$ 53
- 3.1 Incréments d'analyse résultant de l'assimilation d'une seule donnée de température située dans la zone sensible au point (38°N, 295°E, 900 hPa) pour le 3D-Var adapté, lorsque $\sigma^2 = 1$; (a) champs de température (couleurs, intervalle 0.1°C) et de vent (vecteurs) proches de 900 hPa, (b) coupe verticale de l'incrément d'analyse de la température..... 60

3.2	Résultats de l'assimilation du 3D-Var adapté d'une seule donnée de température située dans la zone sensible au point (38°N, 295°E, 900 hPa). Incréments d'analyse de température (couleurs, intervalle 0.1°C) et de vent (vecteurs) proches du 900 hPa pour : a) $\sigma = 100$; c) $\sigma = 250$; b), d) coupes verticales correspondantes des incréments d'analyse de température pour les deux valeurs de σ spécifiées : b) $\sigma = 1$ et d) $\sigma = 100$	61
3.3	Incréments d'analyse résultant de l'assimilation d'une seule donnée de température située loin de la zone sensible au point (12°N, 205°E, 900 hPa) pour le 3D-Var adapté. Champs de température (couleurs, intervalle 0.1°C) et de vent (vecteurs) au niveau de 900 hPa pour : a) $\sigma = 1$; c) $\sigma = 100$. Coupes verticales correspondantes de l'incrément d'analyse de température pour les valeurs du σ spécifiées : b) $\sigma = 1$ et d) $\sigma = 100$	62
3.4	Champ de pression au niveau moyen de la mer (intervalle de contour 4 hPa) le 28 janvier 2003 à 12 UTC issu de : a) l'analyse de vérification ; b) de la prévision à 24-h du modèle global canadien.....	66
3.5	Fonction de sensibilité globale valide le 27 janvier 2003 à 12 UTC : a) corrections initiales de température à 700 hPa sur l'hémisphère Nord ; b) plan rapproché de ces mêmes corrections initiales (intervalle de contour 0.2°C) ; c) coupe verticale le long de la flèche en b).....	72
3.6	Impact de l'utilisation d'une fonction de sensibilité globale sur l'analyse 3D-Var : a) différence entre l'incrément de température à 700 hPa du 3D-Var adapté ($\sigma = 100$) et l'incrément de température du 3D-Var standard à 700 hPa, valide le 27 janvier 2003 à 12 UTC ; b) plan rapproché de la différence en a); c) coupe verticale dans la différence des incréments d'analyse de température (3D-Var adapté - 3D-Var standard) le long de la flèche en b).....	73
3.7	Différence relative entre l'écart aux observations (J_o) : a) de l'analyse de sensibilité et b) de l'analyse 3D-Var adapté par rapport à l'analyse opérationnelle à 12 UTC le 27 janvier 2003 pour différents types des données d'observation. Une valeur négative signifie que l'analyse est plus proche des observations tandis qu'une valeur positive indique que l'analyse est plus loin des observations que l'analyse opérationnelle. L'analyse du 3D-Var adapté utilise une fonction de sensibilité globale et $\sigma = 100$	74
3.8	Distributions de l'erreur de prévision à a) 24-h, b) 48-h pour une intégration basée sur l'analyse du 3D-Var opérationnel. Cette figure montre une valeur intégrée à la verticale au-dessus des Maritimes canadiennes (intervalle de contour 10 J/kg). Ces valeurs correspondent à l'intégration du modèle GEM à partir de l'analyse opérationnelle valide le 27 janvier 2003 à 12 UTC.....	75

3.9	Erreur de prévision pour les prévisions issues de l'analyse du 3D-Var adapté intégrée à la verticale au-dessus des Maritimes canadiennes à : a) 24-h, b) 48-h (intervalle de contour 10 J/kg). Différence des patrons de l'erreur de prévision (3D-Var adapté - Opérationnel) pour la prévision issue de l'analyse du 3D-Var adapté et l'analyse opérationnelle à une échéance de c) 24-h, d) 48-h. L'analyse 3D-Var adapté utilise une valeur de $\sigma = 100$ et une fonction de sensibilité globale.....	76
3.10	Comme en 3.9 mais pour l'analyse de sensibilité.....	77
3.11	Énergie (totale) des erreurs de prévision (prévision moins analyse de référence pour l'hémisphère Nord extratropical) pour l'intégration du modèle GEM à partir de l'analyse opérationnelle (en rouge, ligne pleine), de l'analyse adaptative (en bleu, ▲) et de l'analyse de sensibilité (en noir, ●) valides le 27 janvier 2003 à 12 UTC : a) les prévisions jusqu'à deux jours d'échéance ; b) les prévisions jusqu'à cinq jours d'échéance. L'analyse 3D-Var adapté ($\sigma = 100$) et l'analyse de sensibilité considèrent la fonction de sensibilité globale.....	78
3.12	Représentation de la région localisée employée pour définir une fonction de sensibilité localisée. La zone entourée par les lignes pleines est le domaine géographique où les erreurs d'analyse résultant du calcul de sensibilité du CMC agissent pour réduire l'erreur de prévision des différentes variables.....	82
3.13	Première fonction de sensibilité locale valide le 27 janvier 2003 à 12 UTC : a) les corrections initiales de la température à 700 hPa sur l'hémisphère Nord b) les corrections initiales de la température à 700 hPa en plan rapproché encadré dans la partie a) (intervalle 0.2°C) ; c) coupe verticale dans les corrections initiales de la température le long de la flèche en b).....	83
3.14	Impact de l'utilisation d'une fonction de sensibilité locale sur l'analyse 3D-Var : a) différence entre l'incrément de température à 700 hPa du 3D-Var adapté ($\sigma = 100$) et l'incrément de température standard à 700 hPa, valides le 27 janvier 2003 à 12 UTC ; b) plan rapproché de la différence en a) ; c) coupe verticale dans la différence des incréments d'analyse de température (3D-Var adapté moins 3D-Var standard) le long de la flèche en b).....	84
3.15	Différence relative entre l'écart aux observations (J_o) : a) de l'analyse de sensibilité et b) de l'analyse 3D-Var adapté par rapport à l'analyse opérationnelle le 27 janvier 2003 à 12 UTC pour différents types des données d'observation. Une valeur négative signifie que l'analyse est plus proche des observations tandis que une valeur positive indique que l'analyse est plus loin des observations que l'analyse opérationnelle. L'analyse 3D-Var adapté considère la fonction de sensibilité locale et $\sigma = 100$	85

3.16	Distribution de l'erreur de prévision intégrée à la verticale au-dessus des Maritimes canadiennes à 24-h et à 48-h d'échéance. Prévisions issues du 3D-Var adapté avec $\sigma = 100$ à a) 24-h, b) 48-h. Prévisions issues de l'analyse de sensibilité avec fonction de sensibilité localisée à c) 24-h, d) 48-h.....	86
3.17	Les différences des patrons de l'énergie de l'erreur de prévision à 24-h respectives à 48-h d'échéances. En 3.17-a et b sont les différences entre les valeurs obtenus à partir de l'analyse du 3D-Var adapté et du celle du 3D-Var opérationnel à un jour respectif deux jours d'échéances. En 3.17-c et d sont les différences entre les valeurs obtenus à partir de l'analyse de sensibilité et du celle opérationnelle au mêmes échéances comme en a et b. L'analyse adapté ($\sigma = 100$) et l'analyse de sensibilité considèrent la première fonction de sensibilité locale.....	87
3.18	Énergie (totale) des erreurs de prévision (prévision moins analyse de référence pour l'hémisphère Nord extratropical) pour l'intégration du modèle GEM à partir de l'analyse opérationnelle (en rouge, ligne pleine), de l'analyse adaptative (en bleu, ▲) et de l'analyse de sensibilité (en noir, ●) valides le 27 janvier 2003 à 12 UTC : a) les prévisions jusqu'à deux jours d'échéance ; b) les prévisions jusqu'à cinq jours d'échéance. L'analyse 3D-Var adapté ($\sigma = 100$) et l'analyse de sensibilité considèrent première fonction de sensibilité locale.....	88
3.19	Aperçu de l'algorithme d'analyse de sensibilité du CMC employé dans la détermination des fonctions de sensibilité localisées. La chaîne des opérations réalisées pour le calcul de la deuxième fonction de sensibilité. Les corrections à l'analyse initiale du 26 janvier 2003 à 12 UTC sont d'abord identifiées et ensuite la différence entre deux prévisions à 24-h réalisées à partir de l'analyse de sensibilité et de l'analyse opérationnelle du 26 janvier 2003 à 12 UTC identifie la deuxième fonction de sensibilité locale valide le 27 janvier 2003 à 12 UTC.....	93
3.20	Deuxième fonction de sensibilité locale valide à 12 UTC le 27 janvier 2003 : a) les corrections initiales de la température à 700 hPa sur l'hémisphère Nord; b) les corrections initiales de la température à 700 hPa en plan rapproché (intervalle 0.3°C); c) coupe verticale dans les corrections initiales de la température le long de la flèche en b).....	94
3.21	Impact de l'utilisation de la deuxième fonction de sensibilité locale sur l'analyse 3D-Var : a) la différence entre l'incrément de température à 700 hPa du 3D-Var adapté ($\sigma = 100$) et l'incrément de température standard à 700 hPa utilisé dans le 3D-Var, valides à 12 UTC le 27 janvier 2003; b) plan rapproché de la différence en a) ; c) la coupe verticale dans la différence des incréments d'analyse de température (3D-Var adapté moins 3D-Var standard) le long de la flèche en b).....	95

3.22	Différence relative entre l'écart aux observations (J_θ) : a) de l'analyse de sensibilité et b) de l'analyse 3D-Var adapté par rapport à l'analyse opérationnelle à 12 UTC le 27 janvier 2003 pour différents types des données d'observation. L'analyse 3D-Var adapté considère la deuxième fonction de sensibilité locale et $\sigma = 100$	96
3.23	Comme la figure 3.16 mais pour le deuxième type de fonction de sensibilité localisée. Distribution de l'erreur de prévision intégrée à la verticale au-dessus des Maritimes canadiennes à 24-h et à 48-h d'échéance. Prévisions issues du 3D-Var adapté avec $\sigma = 100$ à a) 24-h, b) 48-h. Prévisions issues de l'analyse de sensibilité à c) 24-h, d) 48-h.....	97
3.24	Les différences des patrons de l'énergie de l'erreur de prévision à 24-h respectives à 48-h d'échéances. En 3.24-a et b sont les différences entre les valeurs obtenus à partir de l'analyse du 3D-Var adapté et du celle du 3D-Var opérationnel à un jour respectif deux jour d'échéance. En 3.24-c et d sont les différences entre les valeurs obtenus à partir de l'analyse de sensibilité et du celle opérationnelle au mêmes échéances comme en a et b. Les analyses 3D-Var adapté ($\sigma = 100$) et celle de sensibilité considèrent la deuxième fonction de sensibilité locale.....	98
3.25	Erreurs de prévision totale sur l'hémisphère Nord extratropical. Prévisions issues de l'analyse opérationnelle (en rouge, ligne pleine), de l'analyse adaptative (en bleu, ▲) et de l'analyse de sensibilité (en noir, ●) valides le 27 janvier 2003 à 12 UTC : a) les prévisions jusqu'à deux jours d'échéance ; b) les prévisions jusqu'à cinq jours d'échéance. L'analyse 3D-Var adapté ($\sigma = 100$) et l'analyse de sensibilité considèrent la deuxième fonction de sensibilité locale.....	99
A.1	Représentation géométrique de l'algorithme de Householder.....	110

LISTE DES TABLEAUX

Tableau		Page
3.1	Expériences d'assimilation 3D-Var et 3D-Var adapté d'une seule observation de température à 900 hPa localisée dans la zone sensible (38°N, 295°E) et loin de celle-ci (12°N, 205°E).....	64

LISTE DES SIGLES ET ACRONYMES

AIREP	Manual Aircraft Reports
AMV	Atmospheric Motion Vectors
ATOVS	Advanced TIROS Operational Vertical Sounder
CMC	Centre Météorologique Canadien
FASTEX	Fronts and Atlantic Storm-Track Experiment
GEM	Global Environnemental Multi-échelle
NATREC	North Atlantic THORPEX Regional Campaign
NMC	National Meteorological Centre
RAOB	Radiosonde Observations
RRKF	Reduced-Rank Kalman Filter
UTC	Coordinated universal time
1D-VAR	Méthode d'assimilation variationnelle unidimensionnelle
3D-VAR	Méthode d'assimilation variationnelle tridimensionnelle

LISTE DES SYMBOLES

\circ	Degré
$(.)^{-1}$	Opérateur inverse
$(.)^*$	Opérateur adjoint
$(.)^T$	Opérateur de transposition
$(.)_0$	Indice relatif au moment initial
$(.)_a$	Indice relatif à l'analyse
$(.)_b$	Indice relatif à l'ébauche
$(.)_o$	Indice relatif aux observations
$(.)_s$	Indice relatif à une composante d'un vecteur parallèle à la direction de sensibilité
$(.)_{\bar{s}}$	Indice relatif à une composante d'un vecteur dans le sous-espace des vecteurs orthogonaux à la direction de sensibilité
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire
%	Pour cent
∇	Opérateur gradient d'une fonction
$\nabla \nabla^T$	Opérateur hessien d'une fonction
A	Domaine d'intégration horizontal
\mathbf{A}	Matrice de covariance d'erreurs d'analyse
\mathbf{B}	Matrice de covariance d'erreurs d'ébauche du 3D-Var
$\mathbf{b}(s)$	Colonne de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche \mathbf{B}

$\tilde{\mathbf{B}}_x$	Matrice de covariances d'erreurs d'ébauche du 3D-Var adapté
$\tilde{\mathbf{b}}(s)$	Colonne de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche $\tilde{\mathbf{B}}_x$
$\tilde{\mathbf{B}}_\chi$	Matrice de covariances d'erreurs d'ébauche du 3D-Var adapté dans l'espace du vecteur de contrôle χ
c_p	Chaleur spécifique à la pression constante pour l'air sec (J/kg)
\mathbf{C}	Opérateur qui définit une forme quadratique sur la perturbation de la variable d'état
$E[.]$	Espérance mathématique
E	Énergie de l'erreur de prévision
H	Opérateur d'observations
\mathbf{H}	Opérateur d'observations linéarisé
\mathbf{I}	Matrice identité
J	Fonction coût
J_b	Partie de la fonction coût liée à l'ébauche
J_o	Partie de la fonction coût liée aux observations
\mathbf{K}	Matrice de gain
M	Opérateur modèle de prévision
\mathbf{M}	Modèle de prévision linéarisé
P	Pression ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$)
p_s	Pression à la surface ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$)
p_r	Pression de référence ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$)
\mathbf{R}	Matrice de covariances d'erreurs d'observations
R_d	Constante spécifique pour l'air sec (J/kg)

q	Humidité spécifique (kg/kg)
S	Sous-espace
S'	Domaine d'intégration
\bar{S}	Sous-espace complémentaire à S
t	Variable temporelle
T	Température (K)
T_r	Température de référence (K)
u	Composante de la vitesse selon x (m/s)
v	Composante de la vitesse selon y (m/s)
\tilde{v}	Vecteur direction de sensibilité normalisé (dans l'espace de χ)
x	Vecteur de l'état de l'atmosphère
x_0	Vecteur d'état de l'atmosphère à l'instant initial
x_a	Vecteur analysé
$x_{a,v}$	Vecteur d'état de l'analyse de vérification
x_b	Vecteur de l'ébauche
x_t	Vecteur de l'état vrai de l'atmosphère
X	Matrice de Householder
y	Vecteur des observations
y'	Vecteur d'innovation
y_l	Vecteur direction de sensibilité (dans l'espace de δx)
\tilde{y}_l	Vecteur direction de sensibilité (dans l'espace de χ)
$\delta(\cdot)$	Opérateur de perturbation

$\delta\mathbf{x}$	Vecteur d'état incrémental
$\boldsymbol{\varepsilon}_a$	Vecteur des erreurs d'analyse
$\boldsymbol{\varepsilon}_b$	Vecteur des erreurs de l'ébauche
$\boldsymbol{\varepsilon}_m$	Vecteur des erreurs de mesure instrumentale
$\boldsymbol{\varepsilon}_o$	Vecteur des erreurs d'observations
$\boldsymbol{\varepsilon}_r$	Vecteur d'erreur de représentativité
∂	Opérateur de différentiation partielle
η	Coordonnée verticale
λ, ϕ	Longitude, latitude (rad)
Π	Vecteur ligne
σ_b	Écart type des erreurs de prévision
σ_o	Écart type des erreurs d'observations
σ_l	Écart type des erreurs de prévision dans la direction de sensibilité
$\boldsymbol{\chi}$	Vecteur d'état préconditionné par \mathbf{B}
$\tilde{\boldsymbol{\chi}}$	Vecteur d'état préconditionné par $\tilde{\mathbf{B}}$

RÉSUMÉ

Les fonctions de sensibilité dites *a posteriori* permettent de caractériser des corrections aux conditions initiales qui peuvent réduire significativement l'erreur de prévision à une échéance donnée (typiquement 24 ou 48 heures). L'erreur est ici définie par l'écart à une analyse de vérification et la fonction de sensibilité ne peut donc être calculée qu'*a posteriori*. De telles structures dépendent de la nature de l'écoulement et ne sont pas prises en compte dans le modèle de covariance d'erreur de prévision stationnaire utilisé dans un système d'assimilation de données variationnelle 3D (3D-Var) comme celui du Centre Météorologique Canadien (CMC). Pour remédier à ceci, Hello et Bouttier (2001) ont introduit une formulation différente des covariances d'erreur de prévision qui permet d'inclure les fonctions de structure basées sur des fonctions de sensibilité *a priori* définissant la structure de changements aux conditions initiales qui ont le plus d'impact sur une prévision d'échéance donnée. Dans ce cas, l'amplitude de cette correction est déterminée en s'ajustant aux observations disponibles.

Dans ce projet, une formulation différente est proposée et comparée à celle de Hello et Bouttier (2001). L'algorithme, appelé 3D-Var adapté, est tout d'abord présenté et analysé dans le cadre plus simple d'une analyse variationnelle 1D (1D-Var) pour être ensuite introduit dans le 3D-Var du CMC. L'impact du changement apporté a été étudié en utilisant les fonctions de sensibilité *a posteriori* associées à une prévision manquée sur la côte est de l'Amérique du Nord. En mesurant globalement l'erreur de prévision, la fonction de sensibilité indique qu'il est nécessaire d'apporter des corrections à l'analyse sur différentes régions du globe. Pour le 3D-Var adapté, ceci conduit à une fonction de structure non localisée et l'amplitude de la correction est caractérisée par un seul paramètre défini par l'ensemble des observations disponibles. En comparant aux prévisions issues du 3D-Var opérationnel ou de l'analyse de sensibilité, la prévision issue de l'analyse du 3D-Var adapté est améliorée par rapport à celle du 3D-Var conventionnel mais nettement moins que celle issue de l'analyse de sensibilité. Par contre, le 3D-Var adapté améliore l'ajustement de l'analyse aux observations alors que l'analyse de sensibilité le dégrade.

En localisant la mesure de l'erreur de prévision sur la région correspondant au système météorologique du cas étudié sur la côte est de l'Amérique du Nord, la fonction de sensibilité est maintenant localisée sur une région mieux délimitée (dite *région sensible*). Il est également possible de varier la fenêtre temporelle utilisée pour définir la fonction de sensibilité. L'impact sur la qualité de l'analyse et des prévisions résultantes a été étudié autant pour l'analyse de sensibilité que pour le 3D-Var adapté. Les résultats montrent que la définition d'une fonction de structure appropriée pour un système d'assimilation vise à simultanément concorder aux observations disponibles et améliorer la qualité des prévisions. Les résultats obtenus montrent que l'utilisation des fonctions de sensibilité comme fonctions de structures n'est pas immédiate. Bien que limitées à un seul cas, nos expériences indiquent certaines pistes intéressantes pour définir des fonctions de sensibilité pouvant être utilisées comme fonctions de structures. Ces idées pourraient s'appliquer également aux fonctions de sensibilité *a priori*.

INTRODUCTION

Les prévisions numériques du temps fournissent des informations essentielles au sujet du temps à venir et s'appuient sur l'utilisation des modèles numériques de prévision du temps. Un modèle numérique est basé sur un système complet des équations représentant les processus physiques qui décrivent l'état et l'évolution de l'atmosphère (les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et thermodynamique) et sur une méthode numérique qui permet l'intégration de ce système d'équations dans le temps. De nombreux facteurs sont pris en compte dans la prévision du temps. En particulier, étant donné que le temps de demain dépend de celui d'aujourd'hui, une bonne connaissance de l'état initial est essentielle. Les prévisions numériques sont initialisées à partir d'une description de l'état de l'atmosphère fondée sur des observations anciennes et actuelles dans un processus appelé assimilation de données. L'impact de la précision de l'état initial sur la qualité des prévisions justifie amplement les ressources qui doivent être consacrées à l'assimilation de données météorologiques pour améliorer la prévision météorologique.

L'assimilation de données permet d'obtenir une évaluation cohérente de l'état de l'atmosphère. Les données de départ sont représentées d'une part par l'ensemble des observations des variables atmosphériques (température, vitesse des vents, pression, humidité, *etc.*) réparties dans l'espace et le temps et d'une ébauche, d'autre part. Les observations du réseau météorologique ne couvrent pas de façon continue et uniforme l'atmosphère et ne fournissent que des mesures ponctuelles à des échelles pas forcément représentatives des phénomènes importants. L'ébauche est le résultat d'une prévision antérieure à courte échéance et correspond à une estimation *a priori* de l'état réel du système. Naturellement, les observations ainsi que l'ébauche sont entachées d'erreurs. L'assimilation de données s'appuie sur la théorie de l'estimation statistique pour combiner l'information contenue dans les observations météorologiques à celle fournie par l'ébauche en tenant compte des erreurs associées à ces informations. Dans ce processus, il est important de bien caractériser l'erreur associée à chaque source d'information (observations, ébauche) afin de

mieux décrire les conditions initiales. La connaissance parfaite de ces erreurs n'étant pas envisageable, on cherche à en avoir une connaissance statistique.

En particulier, les covariances d'erreur de prévision jouent un rôle clé, car elles contrôlent la nature de la correction apportée par l'analyse. La matrice de covariance d'erreur de prévision est généralement considérée comme l'une des parties les plus importantes d'un algorithme d'assimilation de données (Daley, 1991; Bouttier et Courtier, 1999). Par exemple, dans une région avec une seule observation, la matrice de covariance d'erreurs de prévision détermine comment l'incrément d'analyse s'étale à partir du point de grille où on a pris l'observation vers les points de grille et les niveaux voisins. La matrice de covariance d'erreur de prévision est également nécessaire pour indiquer les corrélations entre différentes variables. Par exemple, si seulement le champ de pression est observé, et si l'équilibre géostrophique est incorporé dans la matrice de covariance d'erreur de prévision, l'algorithme d'assimilation produira une correction qui, tout en se rapprochant de l'observation, respectera l'équilibre géostrophique en corrigeant également les vents, la température et la pression de surface. Plusieurs centres de prévision numérique du temps, y compris le Centre Météorologique Canadien (CMC), utilisent dans l'assimilation variationnelle 3D (3D-Var) (Gauthier *et al.*, 1998), des modèles de covariance d'erreur de prévision stationnaires estimés en utilisant la méthode du National Meteorological Centre (NMC) (Parrish et Derber, 1992; Gauthier *et al.*, 1998; Derber et Bouttier, 1999). Cette méthode consiste à estimer les covariances d'erreur de prévision à partir des différences entre deux prévisions valables au même moment, mais avec des échéances différentes. Au CMC, les différences entre les prévisions à une échéance de 48-h et à 24-h respectivement sur une période de deux ou trois mois sont employées. Dans le système opérationnel, ces covariances sont modélisées en limitant la prise en considération de leurs propriétés statistiques (e.g. l'anisotropie, les variations dues à la nature de l'écoulement). Beaucoup d'efforts sont exigés pour améliorer l'estimation et la représentation des covariances d'erreurs de prévision (Buehner, 2004).

L'atmosphère étant un système chaotique, les petites erreurs dans les conditions initiales peuvent s'amplifier rapidement (Lorenz, 1963) et leur croissance dépend fortement de la nature de l'écoulement. Il existe un grand nombre de configurations de mouvements atmosphériques. Certaines de ces configurations sont instables et permettent le

déclenchement et l'amplification de systèmes météorologiques. Elles sont également responsables de l'incertitude des prévisions (Bouttier, 1993). Dans ce cas, une petite erreur dans les conditions initiales peut conduire à un développement rapide dans les premiers jours de prévision et les erreurs d'analyse sont telles que l'on ne peut prévoir comment cette instabilité va se développer.

Différentes approches ont été proposées pour mieux caractériser les structures atmosphériques les plus instables. Elles sont basées sur l'emploi du modèle adjoint (Le Dimet et Talagrand, 1986) d'un modèle de prévision numérique. Son développement a permis la réalisation d'applications dont les études de sensibilités aux conditions initiales (Rabier *et al.*, 1996 ; Klinker *et al.*, 1998). Les études de sensibilités (Rabier *et al.*, 1996) ont montré que des erreurs majeures de prévision peuvent être expliquées par des faiblesses de l'analyse. Le gradient de l'erreur de prévision à deux jours a été employé pour identifier les endroits où une petite erreur dans les conditions initiales aurait pu provoquer une détérioration sensible de la qualité de la prévision. Klinker *et al.* (1998) ont développé un algorithme itératif qui permet de caractériser les corrections aux conditions initiales qui peuvent réduire significativement l'erreur de prévision à une échéance donnée (typiquement 24 ou 48 heures). L'erreur est ici définie par l'écart à une analyse de vérification et cet algorithme fournit une meilleure évaluation des erreurs d'analyse comparées à l'utilisation du gradient proposée plus tôt par Rabier *et al.*, (1996). Au Centre Météorologique Canadien (CMC), le système d'analyse de sensibilité pour le système de prévisions, développé par Laroche *et al.*, (2002), permet d'évaluer l'erreur d'analyse en utilisant comme fonction diagnostique l'erreur de prévision à 24 heures.

L'emploi du modèle adjoint permet aussi de calculer les vecteurs singuliers qui représentent le sous-espace dans lequel des changements aux conditions initiales subissent le plus d'amplification sur une période donnée. L'intérêt des vecteurs singuliers pour l'étude des problèmes de prévisibilité a été mentionné de nombreuses fois dans la littérature, par exemple par Lorenz (1965), Lacarra et Talagrand (1988), Molteni et Palmer (1993). Le calcul et l'interprétation dynamique des vecteurs singuliers ont fait l'objet de plusieurs études. (Buizza et Palmer, 1995 ; Molteni et Palmer, 1993). Palmer *et al.*, (1998) ont montré qu'il est possible d'obtenir les vecteurs singuliers qui optimisent la croissance de l'erreur dans une

région particulière de l'espace au sens d'une norme convenablement choisie. En considérant différentes normes (l'énergie totale, enstrophie) ils ont montré que la norme énergie totale semble adéquate pour les problèmes de prévisibilité à une échéance de plusieurs jours. L'évolution des vecteurs singuliers est directement liée au phénomène d'instabilité barocline (Holton, 1992). Également, leur structure dépend de la norme choisie. Gelaro *et al.*, (1998) ont prouvé que si les erreurs d'analyse projettent sur l'une des structures instables (e.g. vecteurs singuliers), il en résultera une croissance d'erreur plus importante que si cette erreur ne projette pas sur ces structures. Conséquemment, pour décrire correctement les phénomènes dont la mauvaise analyse provoque des erreurs majeures de prévision, il est important que l'information sur les instabilités atmosphériques soit considérée par le système d'assimilation de données.

Les vecteurs singuliers et la sensibilité aux conditions initiales ont permis également le développement des stratégies de l'observation adaptative. Une brève description de principes de l'assimilation adaptative a été donnée par Bergot *et al.*, (1999) et Joly (2003). L'idée est de concentrer des observations dans les zones dites sensibles, dépendantes de l'écoulement atmosphérique, afin d'avoir de meilleures conditions initiales, et donc de meilleures prévisions. Les régions sensibles peuvent être identifiées par exemple comme étant les régions où les vecteurs singuliers commencent leur amplification. La technique de l'observation adaptative a été testée pour la première fois sur des situations réelles lors de la campagne de mesure avec ciblage des observations FASTEX (Joly *et al.*, 1997). L'utilisation adéquate des observations adaptatives et l'emploi du schéma d'assimilation 3D-Var influencent les prévisions permettant d'améliorer leur qualité.

Dans le système d'assimilation de données variationnelle 3D-Var, les structures dépendantes de la nature de l'écoulement ne sont généralement pas considérées. Hello et Bouttier (2001) ont proposé ce qu'il est convenu d'appeler le 3D-Var adapté, basé sur une formulation différente des covariances d'erreur de prévision qui permet d'inclure l'information sur les instabilités atmosphériques contenue dans une fonction de sensibilité. La fonction de sensibilité *a priori* proposée (Hello *et al.*, 2000) définit la structure de changements aux conditions initiales qui ont le plus d'impact sur une prévision d'échéance donnée. Une alternative possible est de considérer les vecteurs singuliers comme fonction de

structure dans le 3D-Var adapté. L'emploi des vecteurs singuliers permettra de mieux caractériser la partie de l'écoulement sur laquelle on désire réduire l'incertitude. Dans le contexte de l'assimilation adaptative, cela revient à se rapprocher du filtre du Kalman de rang réduit (RRKF), (Fisher, 1998).

Le sujet de cette mémoire concerne un aspect important de la méthodologie d'assimilation de données qui vise à corriger un état de référence en s'ajustant aux observations en tenant compte d'éléments dynamiques qui permettent le développement de systèmes météorologiques. La nouvelle approche proposée, le 3D-Var adapté, est basée sur une formulation différente des covariances d'erreur de prévision qui inclut les fonctions de structure définies par les fonctions de sensibilité. Dans ce mémoire, les fonctions de sensibilité *a posteriori* (Laroche *et al.*, 2002), que l'on sait être en mesure de réduire l'erreur de prévision à courte échéance, seront introduites dans la formulation même des statistiques d'erreur de prévision.

Le travail effectué est présenté en trois chapitres. Le premier chapitre présente le concept d'assimilation variationnelle 3D-Var et donne ses formulations générale et incrémentale. Il aborde brièvement la question des données du problème d'assimilation (observations, ébauche) et des erreurs associées à ces informations. En outre, le problème de sensibilité d'une fonction aux conditions initiales et la notion de fonctions de sensibilité *a posteriori* et *a priori* sont introduits et présentés.

Le deuxième chapitre explique, dans ses grandes lignes, l'algorithme 3D-Var adapté proposé et validé par Hello et Bouttier (2001) ainsi que l'approche originale développée dans le cadre de ce projet. Ces algorithmes, appelés 3D-Var adapté, proposent des modèles de covariance d'erreurs de prévision qui incluent la composante sensible tout en retenant le modèle plus conventionnel lorsque cette composante dite sensible est peu importante. Le fonctionnement du nouvel algorithme 3D-Var adapté est tout d'abord présenté et analysé dans le cadre plus simple d'une analyse variationnelle 1D (1D-Var) et une comparaison entre les deux approches adaptatives est effectuée.

Dans la suite de cette étude, le troisième chapitre se concentre sur l'application de la méthode 3D-Var adapté à une vraie situation météorologique. L'impact du changement apporté a été étudié en utilisant les fonctions de sensibilité *a posteriori* (Laroche *et al.*, 2002) associées à

une prévision manquée sur la côte est de l'Amérique du Nord. Les résultats seront interprétés pour les expériences à une seule donnée ainsi que pour l'ensemble de toutes les observations disponibles.

Dans la conclusion, nous résumons les principaux résultats obtenus dans ce mémoire et des perspectives de recherche ouvertes par ce travail sont proposées.

CHAPITRE I

CADRE THÉORIQUE

L'assimilation de données météorologiques, élément essentiel d'un système moderne de prévision numérique du temps, a pour but de produire une représentation cohérente et aussi précise que possible de l'état de l'atmosphère au moyen des informations du problème d'assimilation. Les données de départ sont constituées par l'ensemble d'observations in situ et satellitaires qui couvrent l'ensemble du globe. Bien qu'elles soient le meilleur moyen d'approcher la réalité atmosphérique, les données observées fournissent des mesures de quantités qui ne sont qu'indirectement reliées aux variables du modèle (par exemple, le rayonnement mesuré par un satellite est relié par l'équation non linéaire de transfert radiatif aux variables analysées que sont la température et l'humidité) et n'offrent qu'une couverture spatiale et temporelle incomplète ne permettant pas de caractériser de manière unique l'état de l'atmosphère. En règle générale, l'ordre de grandeur des données utilisées pour produire une analyse à un moment donné varie entre 10^4 et 10^5 . Compte tenu du nombre de variables prédictives, l'état du modèle compte un nombre de degrés de liberté de l'ordre de 10^7 ce qui fait que le problème d'estimation des conditions initiales est sous déterminé. Il devient alors essentiel d'ajouter de l'information complémentaire caractérisant notre connaissance a priori de l'atmosphère. Celle-ci est représentée par l'ébauche ou champ d'essai et est fournie généralement par une prévision à courte échéance obtenue d'un modèle de prévision numérique. L'assimilation de données, basée sur l'estimation statistique, combine l'information provenant de ses deux sources d'information (observations météorologiques et champ d'essai) en fonction des estimés d'erreurs de prévision et d'observation pour obtenir un état analysé. Dans les régions où il y a peu d'observations, le champ d'essai contribuera presque exclusivement à l'analyse. L'objectif de ce chapitre est d'introduire le formalisme de

l'assimilation de données. Il présente une description de l'assimilation de données formulée comme un problème d'estimation linéaire ainsi que la formulation de l'assimilation variationnelle 3D-Var avec sa variante, le 3D-Var incrémental. En assimilation de données, la sensibilité de l'erreur de prévision par rapport aux conditions initiales obtenue avec l'adjoint d'un modèle numérique aide à identifier les erreurs d'analyse qui conduisent à de mauvaises prévisions à courte et moyenne échéance. Ceci est évalué en employant les fonctions de sensibilité *a posteriori* et *a priori* qui seront également introduites.

1.1 Description du problème d'assimilation de données

L'état de l'atmosphère est représenté ici par un vecteur :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ T \\ q \\ p_s \end{pmatrix},$$

où u et v sont les composantes horizontales du vent, T la température, q l'humidité spécifique en chaque point du maillage et p_s la pression de surface. L'état réel de l'atmosphère est inconnu et sera représenté par le vecteur \mathbf{x}_t . Notre connaissance *a priori* de l'atmosphère est représentée par l'ébauche (ou champ d'essai) \mathbf{x}_b , donnée généralement par une prévision à courte échéance obtenue d'un modèle numérique. Celle-ci comporte une erreur $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ de telle sorte que :

$$\mathbf{x}_b = \mathbf{x}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_b \quad (1.1)$$

Les observations regroupées dans le vecteur \mathbf{y} , sont reliées à l'état de l'atmosphère par un opérateur d'observation H à laquelle s'ajoute une erreur d'observation $\boldsymbol{\varepsilon}_o$. Celle-ci renferme l'erreur de mesure instrumentale $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ ainsi que les erreurs de représentativité $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ décrivant les différences entre le système d'observation et le modèle, de telle sorte que :

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_m = H(\mathbf{x}_t) + \boldsymbol{\varepsilon}_r + \boldsymbol{\varepsilon}_m \equiv H(\mathbf{x}_t) + \boldsymbol{\varepsilon}_o \quad (1.2)$$

où

- \mathbf{x}_t : vecteur de l'état vrai de l'atmosphère;
 \mathbf{x}_b : vecteur d'ébauche;
 \mathbf{y} : vecteur d'observations;
 $\boldsymbol{\varepsilon}_b$: vecteur des erreurs de l'ébauche ;
 $\boldsymbol{\varepsilon}_o$: vecteur des erreurs d'observations ;
 $\boldsymbol{\varepsilon}_{in}$: vecteur d'erreur de mesure instrumentale ;
 $\boldsymbol{\varepsilon}_r$: vecteur d'erreur de représentativité ;
 $H(\mathbf{x})$: représente l'équivalent modèle des observations.

Le problème à résoudre est de trouver le vecteur \mathbf{x}_a , l'état analysé, en tenant compte de l'information disponible (observations, ébauche) et de distributions statistiques caractérisant les erreurs. Celui-ci approxime l'état vrai \mathbf{x}_t , et comporte également une erreur, l'erreur d'analyse $\boldsymbol{\varepsilon}_a$, de telle sorte que :

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_a \quad (1.3)$$

Dans les paragraphes qui suivent, l'assimilation de données a été formulée comme un problème d'estimation linéaire ainsi qu'en terme de minimisation d'une fonction coût qui tient compte des distances d'une part entre l'état du modèle et les observations et d'autre part entre l'état du modèle et l'ébauche.

1.1.1 Méthodes d'estimation statistique en assimilation de données

L'assimilation de données, formulée comme un problème d'estimation statistique, permet d'obtenir l'état analysé \mathbf{x}_a dépendant linéairement de l'ébauche et des observations. En posant le problème comme en étant un d'estimation statistique, on cherche à obtenir un estimateur linéaire non biaisé dont la variance d'erreur est minimale. Cette méthode nécessite des informations statistiques sur les erreurs du champ d'essai et d'observations. Ces erreurs sont caractérisées par leurs matrices de covariance d'erreur d'ébauche $\mathbf{B} = E[\boldsymbol{\varepsilon}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b^T]$ et d'observations $\mathbf{R} = E[\boldsymbol{\varepsilon}_o \boldsymbol{\varepsilon}_o^T]$ où $E[.]$ est l'espérance statistique. Ces erreurs sont supposées également non biaisées, c'est-à-dire que $E[\boldsymbol{\varepsilon}_b] = 0$, $E[\boldsymbol{\varepsilon}_o] = 0$ et non corrélées $E[\boldsymbol{\varepsilon}_b \boldsymbol{\varepsilon}_o^T] = 0$.

Considérons maintenant que cet estimateur soit linéaire de telle sorte que :

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_b) \quad (1.4)$$

où \mathbf{K} est un opérateur linéaire et \mathbf{H} , un opérateur d'observation linéaire reliant un état modèle aux observations. En introduisant les relations (1.1-1.3) dans la relation (1.4), nous obtenons l'expression pour l'erreur d'analyse $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ en fonction des erreurs de l'ébauche et d'observations donnée par la relation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a = \boldsymbol{\varepsilon}_b + \mathbf{K}(\boldsymbol{\varepsilon}_o - \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}_b) \quad (1.5)$$

La matrice de covariance d'erreur d'analyse $\mathbf{A} = E[(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_1)^T] = E[\boldsymbol{\varepsilon}_a \boldsymbol{\varepsilon}_a^T]$ est obtenue (Bouttier et Courtier, 1999) en développant $E[\boldsymbol{\varepsilon}_a \boldsymbol{\varepsilon}_a^T]$ de telle sorte que :

$$\mathbf{A} = E[\boldsymbol{\varepsilon}_a \boldsymbol{\varepsilon}_a^T] = E[\boldsymbol{\varepsilon}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b^T + \boldsymbol{\varepsilon}_b (\boldsymbol{\varepsilon}_o - \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}_b)^T \mathbf{K}^T + \mathbf{K}(\boldsymbol{\varepsilon}_o - \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}_b) \boldsymbol{\varepsilon}_b^T + \mathbf{K}(\boldsymbol{\varepsilon}_o - \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}_b)(\boldsymbol{\varepsilon}_o - \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}_b)^T \mathbf{K}^T]$$

ce qui conduit à l'expression suivante :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})^T + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^T \quad (1.6)$$

La trace de la matrice de covariance d'erreur d'analyse \mathbf{A} représente la variance d'erreur d'analyse totale. On cherche l'analyse comme l'état le plus près possible de l'état vrai, au sens qu'on choisit \mathbf{K} de telle sorte que \mathbf{x}_a minimise la variance d'erreur d'analyse totale ce qui correspond à la trace de la matrice \mathbf{A} . Ainsi,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} E[\boldsymbol{\varepsilon}_a^T \boldsymbol{\varepsilon}_a] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}} \text{trace}(\mathbf{A}) = 0 \quad (1.7)$$

On montre alors que la matrice de gain \mathbf{K} , qui satisfait la relation (1.7) est donnée par :

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T)^{-1} \quad (1.8)$$

de telle sorte que l'analyse obtenue à partir de la relation (1.4) est :

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_b) \quad (1.9)$$

Pour cette valeur de \mathbf{K} , l'expression de la matrice de covariance d'erreur d'analyse (1.6) s'écrit :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{B} = \mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H}\mathbf{B} \quad (1.10)$$

Les relations (1.8-1.10) représentent les équations d'interpolation statistique (Gandin, 1963; Daley, 1991; Kalnay, 2002). Étant donné la grande taille des matrices apparaissant dans la relation (1.4), il est impossible de résoudre ce problème explicitement. La solution du

problème d'analyse peut toutefois être trouvée en se plaçant dans un cadre variationnel. Dans sa forme variationnelle, l'analyse est obtenue de l'optimisation d'un critère objectif (minimisation d'une fonction coût) définie en fonction du problème posé. On minimise une fonction quadratique qui quantifie les écarts aux différentes sources d'informations (observations et ébauche), chacune d'elles étant pondérée en fonction de sa covariance d'erreur (Jazwinski, 1970). Dans le cas linéaire, c'est-à-dire si les variables analysées peuvent être reliées linéairement aux variables observées, la solution de ce problème variationnel est identique à celle donnée par l'équation (1.9). Dans ce qui suit, la méthode d'assimilation variationnelle tridimensionnelle, le 3D-Var, est présentée dans ses formulations générale et incrémentale.

1.1.2 Le 3D-Var

L'analyse variationnelle tridimensionnelle, ou 3D-Var, est une analyse à un instant donné. Lorsqu'on utilise le 3D-Var, la fonction coût est la somme d'un terme d'écart à l'ébauche J_b qui mesure la distance entre l'état du modèle et l'ébauche normalisée par les covariances des erreurs de l'ébauche et un terme d'écart aux observations J_o qui mesure la distance de l'état du modèle aux observations normalisée par les covariances des erreurs d'observation. Ces termes s'écrivent :

$$J(\mathbf{x}) = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)}_{J_b(\mathbf{x})} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})}_{J_o(\mathbf{x})} \quad (1.11)$$

Le vecteur analysé \mathbf{x}_a minimisant la fonction $J(\mathbf{x})$ est obtenu en résolvant l'équation $\nabla J(\mathbf{x}) = 0$. Le gradient de J est :

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) - \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) = 0 \quad (1.12)$$

La solution de l'équation (1.12) s'écrit sous la forme (Lorenç, 1986) :

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_b) \quad (1.13)$$

Cette solution est identique à celle donnée par la relation (1.9) si l'identité ci-après est vérifiée et si on suppose que les observations assimilées, l'ébauche et leurs statistiques d'erreur soient les mêmes dans les deux cas :

$$(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{B} \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T)^{-1} \quad (1.14)$$

La vérification de la relation (1.14) est immédiate si on multiplie de part et d'autre, à gauche par $(\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})$ et à droite par $(\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T)$ de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T) &= (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}) \mathbf{B} \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T &= \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T \end{aligned} \quad (1.15)$$

Dans le cas où les fonctions des densités de probabilité des observations et de l'ébauche sont gaussiennes, la fonction de densité de probabilité de \mathbf{x}_a sera gaussienne et la matrice de covariance d'erreur d'analyse associée à cette analyse est \mathbf{A} . Dans ce cas, \mathbf{x}_a est aussi l'estimateur du maximum de vraisemblance (Lorenç, 1986).

Le 3D-Var combine l'information provenant des observations et du modèle à un instant donné, proche d'un instant d'observation. À cet instant, l'algorithme d'assimilation de données identifie l'état analysé et éventuellement la matrice de covariance d'erreur \mathbf{A} associée à cette analyse. La relation (1.13) montre que l'analyse est une fonction des informations contenues dans le système d'observation (\mathbf{y}, \mathbf{R}) et des connaissances *a priori* de l'état représentées par le couple $(\mathbf{x}_b, \mathbf{B})$. Cette approche économise le calcul explicite de la matrice de gain \mathbf{K} en résolvant un problème équivalent de minimisation. Elle utilise pour la résolution de l'équation (1.12) une approche itérative basée sur des algorithmes de descente, telle que le gradient conjugué ou les algorithmes quasi-newtoniens (Navon et Legler, 1987; Gilbert et Lemaréchal, 1989).

1.1.3 Le 3D-Var incrémental

Les développements que nous venons d'effectuer sont tous basés sur l'hypothèse d'un opérateur d'observation linéaire. Dans ce qui suit, nous considérons que l'opérateur d'observation est non linéaire (noté H) et alors l'expression de la fonction coût, donnée en (1.11) devient :

$$J(\mathbf{x}) = \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)}_{J_b(\mathbf{x})} + \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{y} - H(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - H(\mathbf{x}))}_{J_o(\mathbf{x})} \quad (1.16)$$

Une solution pour réduire le coût du 3D-Var est d'utiliser une méthode incrémentale. D'après Gauthier (2003), la formulation incrémentale du 3D-Var cherche à minimiser la fonction coût par rapport à un incrément $\delta\mathbf{x}$ défini par rapport à l'ébauche, de telle sorte que :

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_b \quad (1.17)$$

La solution de la minimisation est l'incrément d'analyse $\delta\mathbf{x}_a$, tel que le vecteur d'analyse \mathbf{x}_a soit :

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \delta\mathbf{x}_a \quad (1.18)$$

Le changement de variable donné par la relation (1.17) permet le développement de l'opérateur d'observation autour de l'ébauche, de telle sorte que :

$$H(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}_b) + \mathbf{H}\delta\mathbf{x} + O(\|\delta\mathbf{x}\|) \quad (1.19)$$

où \mathbf{H} est l'opérateur linéarisé H autour de \mathbf{x}_b :

$$\mathbf{H} \equiv \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_b} \quad (1.20)$$

En insérant l'équation (1.17) dans la formulation de la fonction coût du 3D-Var donnée par la relation (1.16), on obtient l'expression de la fonction coût du 3D-Var incrémental :

$$J(\delta\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \delta\mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-1} \delta\mathbf{x} + \frac{1}{2} (\mathbf{y}' - \mathbf{H}\delta\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}' - \mathbf{H}\delta\mathbf{x}) \quad (1.21)$$

où $\delta\mathbf{x}$ est l'écart à l'ébauche et \mathbf{y}' le vecteur d'innovation définit comme étant la différence entre les observations et l'équivalent modèle des observations $H(\mathbf{x}_b)$:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y} - H(\mathbf{x}_b) \quad (1.22)$$

Dans cette nouvelle formulation, la fonction coût donnée par la relation (1.21) est quadratique en $\delta\mathbf{x}$. Elle est minimisée à l'aide d'un algorithme itératif de descente et l'incrément d'analyse $\delta\mathbf{x}_a$ est donné par :

$$\delta\mathbf{x}_a = \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{y} - H(\mathbf{x}_b)) \quad (1.23)$$

En utilisant la relation (1.18), dans le cas d'un opérateur d'observation non linéaire, l'expression de l'analyse s'écrit :

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{y} - H(\mathbf{x}_b)) \quad (1.24)$$

Un préconditionnement de la variable de contrôle peut être introduit pour réduire le coût de la minimisation. Le préconditionnement idéal est effectué par la matrice hessienne de la fonction coût. Cette matrice correspond à l'inverse de la matrice des covariances des erreurs d'analyse et elle est exprimée ci-après :

$$\nabla\nabla_{\delta\mathbf{x}}J = \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \quad (1.25)$$

Cet opérateur peut être approximé tel que proposé par Andersson *et al.*, (2000). Généralement, l'incrément d'analyse subit le changement de variable suivant :

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{B}^{1/2} \boldsymbol{\chi} \quad (1.26)$$

où $\boldsymbol{\chi}$ est la variable du contrôle du problème d'assimilation préconditionné par rapport à \mathbf{B} . Le préconditionnement introduit est optimal pour le terme J_b puisque la hessienne de J_b est alors l'identité. S'il y a peu d'observations, le terme \mathbf{B}^{-1} est dominant dans la relation (1.25) et le conditionnement par la matrice de covariance d'erreurs d'ébauche est presque parfait.

Dans l'espace de la nouvelle variable, la fonction coût et son gradient sont définis comme des fonctions de $\boldsymbol{\chi}$:

$$J(\boldsymbol{\chi}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\chi}^T \boldsymbol{\chi} + \frac{1}{2} (\mathbf{H}\mathbf{B}^{1/2} \boldsymbol{\chi} - \mathbf{y}')^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{B}^{1/2} \boldsymbol{\chi} - \mathbf{y}') \quad (1.27)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\chi}} J(\boldsymbol{\chi}) = \boldsymbol{\chi} + \mathbf{B}^{T/2} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{B}^{1/2} \boldsymbol{\chi} - \mathbf{y}') \quad (1.28)$$

Le problème d'assimilation sous forme variationnelle incrémentale est résolu dans l'espace de $\boldsymbol{\chi}$ puis ramené dans l'espace du vecteur d'état $\delta\mathbf{x}$ par l'équation (1.26). On remarque que la formulation incrémentale est tout à fait semblable à la formulation initiale. L'importance pratique de la formulation incrémentale réside dans le fait qu'elle permet de linéariser et de réduire le coût de l'assimilation en évaluant l'incrément d'analyse $\delta\mathbf{x}_a$ dans un espace de dimension réduite par rapport à celui du modèle. Les calculs se font donc pour une variable $\delta\mathbf{x}$ dite de contrôle de dimension réduite par rapport à \mathbf{x} .

Dans la formulation incrémentale, l'incrément $\delta\mathbf{x}$ est supposé être suffisamment petit afin que le développement en (1.19) soit une approximation valide du problème non linéaire. Dans le cas contraire, pour un $\delta\mathbf{x}$ d'amplitude finie, il est important d'effectuer une mise à jour des opérateurs d'observation linéarisés et des innovations. Des itérations externes sont

introduites (Courtier *et al.*, 1994; Laroche et Gauthier, 1998; Gauthier, 2003) afin de prendre en compte les non-linéarités. A chaque boucle externe, on relinéarise le modèle au voisinage d'un nouvel état de référence et par la suite on minimise un nouveau problème simplifié semblable à (1.27). Dans Laroche et Gauthier (1998), le rôle de la boucle externe a été étudié dans le cadre de l'analyse 4D-Var. Les résultats prouvent qu'il est nécessaire d'avoir un nombre minimal d'itérations externes pour que la minimisation converge à la bonne solution en présence de non-linéarités importantes. Dans le cas du 3D-Var qui nous occupe ici, ces non-linéarités sont faibles et la seule minimisation de (1.27) a été jugée suffisante pour notre étude.

1.1.4 Modélisation multivariée de la matrice de covariance d'erreurs de prévision

Le rôle clé que jouent les covariances d'erreur de prévision dans l'algorithme d'assimilation de données a fait l'objet de plusieurs études en assimilation de données (Daley, 1991; Bouttier et Courtier, 1999). Les covariances multivariées introduisent un ensemble de contraintes dynamiques entre les variables du vecteur d'état (Gauthier *et al.*, 1999; Derber et Bouttier, 1999). Essentiellement, le système d'analyse devrait produire des incréments d'analyse sur les vents et le géopotential à l'échelle locale de sorte qu'ils soient à peu près en équilibre géostrophique. Il existe différentes façons de forcer des incréments d'analyse géostrophiques. La méthode utilisée dans le schéma d'analyse variationnelle 3D-Var du CMC considère la géostrophie incorporée dans la matrice de covariance d'erreur de prévision. Le fondement théorique sur lequel reposent les modèles de covariance multivariés (c'est-à-dire une corrélation entre les champs de vent et de masse par exemple) est exposé dans Daley (1991) et détaillé en Gauthier *et al.*, (1999) pour le 3D-Var du CMC.

Dans le 3D-Var opérationnel, les variables d'état sont décomposées en une composante équilibrée et l'autre non équilibrée. Par exemple, l'incrément de la température est construit en ajoutant les incréments de la température non équilibrée et équilibrée, où le dernier est calculé à partir de l'incrément de la fonction de courant par l'application d'un opérateur de balance. Ceci implique ici que les corrélations entre la fonction de courant et les incréments de la température respectent l'équilibre géostrophique. Des opérateurs additionnels

d'équilibre sont employés pour créer des corrélations entre la fonction de courant, la pression de surface et la température (équilibre géostrophique) et entre la fonction de courant et le potentiel de vitesse près de la surface (équilibre d'Ekman). La considération des conditions d'équilibre explicites permet d'induire des informations sur toutes les variables qui sont équilibrées avec la variable observée et améliore par conséquent la qualité de l'analyse.

Dans l'algorithme d'assimilation de données 3D-Var, la matrice de covariance d'erreur de prévision \mathbf{B} distribue spatialement l'information provenant des observations et la projette sur les autres variables d'état. Mettons ce point en évidence par un exemple simple. Considérons une observation unique du vent située dans la région extratropicale (45°N). Si l'équilibre géostrophique est incorporé dans la matrice de covariance d'erreur de prévision, cette observation aura un impact sur le géopotential. Cet équilibre est illustré à la figure 1.1 qui montre les incréments d'analyse du vent et du géopotential pour une observation du vent localisée dans le point 45°N , 180°E à 250 hPa assimilée avec le 3D-Var du CMC.

Les modèles de covariance d'erreurs de prévisions utilisées dans un 3D-Var sont généralement stationnaires et ne considèrent pas des variations dues à la nature de l'écoulement. En présence d'instabilité, une petite erreur dans les conditions initiales connaîtra une croissance rapide. Pour contrôler cette croissance d'erreur à courte échéance, il est nécessaire d'apporter des corrections à l'analyse dans des régions localisées selon une structure spatiale très particulière. Ces structures, appelées fonctions de sensibilité, sont introduites dans la prochaine section.

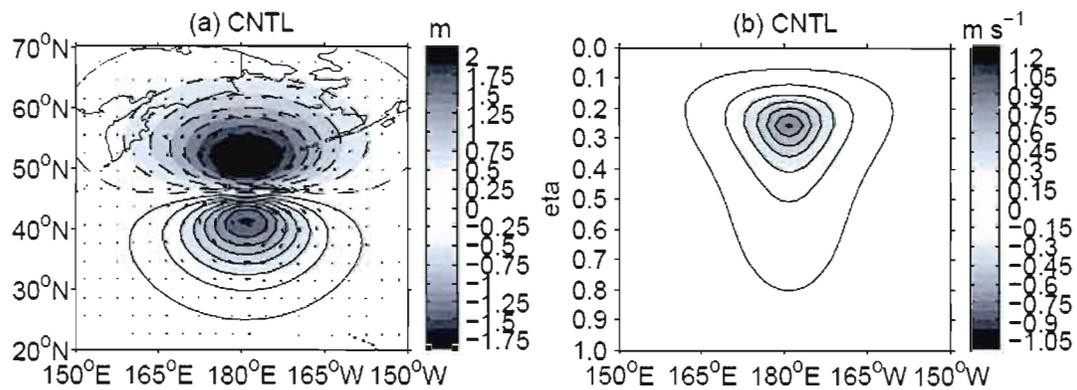


Figure 1.1 : Incréments d'analyse du vent (vecteurs) et du géopotentiel (contours) pour une observation de la composante zonale du vent localisée au point (45°N, 180°E) à 250 hPa assimilée avec le 3D-Var opérationnel au CMC dans la partie a), et respective, en b) la coupe verticale zonale à 45°N de l'incrément d'analyse du vent (contours). (tiré de : Buehner, 2004).

1.2 Revue des études de sensibilités

Dans certaines situations météorologiques, les erreurs de prévision peuvent croître très rapidement, même à courte échéance. Plusieurs centres météorologiques ont développé un système d'analyse de sensibilité afin de diagnostiquer les erreurs sur les conditions initiales susceptibles de croître rapidement. Rabier *et al.* (1996) ont introduit une méthode qui permet de retracer l'erreur d'analyse responsable de l'erreur de prévision à deux jours. On référera à cette approche comme une étude de sensibilité *a posteriori* puisque la définition de l'erreur de prévision n'est pas connue au moment où l'analyse est faite. D'autre part, l'analyse de sensibilité dite *a priori* vise uniquement à caractériser les structures atmosphériques qui auront le plus d'influence sur un aspect de la prévision. Par exemple, Hello *et al.* (2000) ont défini de telles sensibilités en fonction de la pression de surface de la prévision à deux jours au-dessus de l'Europe.

Une approche efficace utilisée pour l'étude de la sensibilité d'un phénomène donné aux perturbations des conditions initiales est basée sur l'utilisation du modèle adjoint (Le Dimet et Talagrand, 1986). L'emploi de la technique adjointe en météorologie a fait l'objet de plusieurs études (Courtier *et al.*, 1993). Le calcul des gradients à l'aide du modèle adjoint nous renseigne sur la sensibilité d'une fonction diagnostique par rapport aux paramètres d'entrée du modèle. Cette technique permet d'apporter des modifications aux conditions initiales du modèle permettant de changer radicalement la nature de la prévision. Nous nous contenterons d'introduire brièvement la méthode du modèle adjoint.

1.2.1 Application du modèle adjoint aux expériences de sensibilité

Soit M le modèle non linéaire qui prend un état \mathbf{x}_0 à l'instant t_0 et l'emmène au temps t . Formellement, la prévision météorologique entre les instants t_0 et t s'écrit :

$$\mathbf{x}(t) = M(\mathbf{x}_0) \quad (1.29)$$

En introduisant une petite perturbation $\delta\mathbf{x}_0$ sur l'état initial, il en résulte une petite perturbation $\delta\mathbf{x}(t)$ à la prévision $\mathbf{x}(t)$ dont l'évolution peut être calculée avec une bonne approximation comme étant :

$$\delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{M} \delta \mathbf{x}_0 \quad (1.30)$$

où \mathbf{M} est l'opérateur linéaire de M , représentant le propagateur du modèle linéaire tangent (Le Dimet et Talagrand, 1986).

Par définition, étant donné un opérateur linéaire \mathbf{M} allant de l'espace E vers l'espace F et les produits scalaires $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_E$ et $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_F$ dans les espaces respectifs E et F , l'adjoint de \mathbf{M} est l'opérateur linéaire \mathbf{M}^* tel que pour tout vecteur (\mathbf{x}, \mathbf{y}) dans les espaces adéquats, on ait :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{M}\mathbf{y} \rangle_E = \langle \mathbf{M}^* \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_F \quad (1.31)$$

L'adjoint de M est défini par rapport au produit scalaire choisi. Dans le cas où on a le produit scalaire Euclidien $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_E = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ et $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_F = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ et que l'opérateur \mathbf{M} est linéaire, il vient que $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}^T$. Comme pour la transposée, l'adjoint d'un produit d'opérateurs est le produit des adjoints dans l'ordre inverse (Talagrand et Courtier, 1987) :

$$(\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \cdots \mathbf{M}_n)^* = \mathbf{M}_n^* \cdots \mathbf{M}_2^* \mathbf{M}_1^* \quad (1.32)$$

Lorsqu'on définit à l'instant t une fonction coût J de l'état \mathbf{x} , le modèle adjoint \mathbf{M}^* du modèle \mathbf{M} permet de relier une petite variation de la fonction coût J à l'instant t à une petite variation de la variable \mathbf{x}_0 . La perturbation δJ de J due à une variation infinitésimale $\delta \mathbf{x}$ peut toujours s'écrire de la manière suivante :

$$\delta J = J(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - J(\mathbf{x}) = \left\langle \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}}, \delta \mathbf{x} \right\rangle \quad (1.33)$$

Compte tenu de la relation (1.30) et de la propriété caractéristique de l'adjoint donnée par (1.31), la relation (1.33) s'écrit :

$$\delta J = \left\langle \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{M} \delta \mathbf{x}_0 \right\rangle = \left\langle \mathbf{M}^* \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}}, \delta \mathbf{x}_0 \right\rangle \quad (1.34)$$

On note et on appelle sensibilité aux conditions initiales ou encore le gradient de la fonction J , la quantité :

$$\nabla J_0 = \mathbf{M}^* \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{M}^* \nabla J \quad (1.35)$$

Le gradient de J au temps initial représente la sensibilité de l'erreur de prévision aux conditions initiales. L'intégration du modèle adjoint fonctionne en inversant le sens du

déroulement du temps : on intègre à rebours en partant des dérivées de la fonction J par rapport à l'état prévu pour remonter aux dérivées de J par rapport à l'état initial. La sensibilité permet de connaître directement l'effet d'une petite variation de l'état initial sur la fonction coût à l'état final et dépend également de la définition de la fonction coût J . Différentes formulations pour la fonction J ont été données par Klinker *et al.*, (1998) et Hello *et al.*, (2000) et leurs brèves descriptions suivront ci-après.

1.2.2 Analyse de sensibilité *a posteriori*

Introduites par Klinker *et al.* (1998), les fonctions de sensibilité dites *a posteriori* permettent de caractériser des corrections aux conditions initiales qui peuvent réduire significativement l'erreur de prévision à une échéance donnée (typiquement 24 ou 48 heures). Ces fonctions définissent l'erreur de prévision par l'écart à une analyse de vérification, disponible à un moment ultérieur et sont donc calculées *a posteriori*.

Au Centre Météorologique Canadien (CMC), le système d'analyse de sensibilité (Laroche *et al.*, 2002) utilise le modèle linéaire tangent et adjoint (Tanguay et Polavarapu, 1999) du modèle Global Environmental Multi-échelle (GEM) (Côté *et al.*, 1998). Le modèle canadien de prévision GEM utilise une résolution spatiale horizontale uniforme de 0.9° et une résolution spatiale verticale comportant 28 niveaux. Il utilise la coordonnée verticale η définie en fonction de pression p de telle sorte que :

$$\eta = \frac{p - p_t}{p_s - p_t} \quad (1.36)$$

où p_s et p_t sont respectivement la pression de surface et la pression au sommet du modèle avec la valeur $p_t = 10\text{hPa}$.

La fonction de sensibilité *a posteriori* est obtenue par un algorithme itératif minimisant l'erreur de prévision à courte échéance. L'approche (qui suit le travail de Klinker *et al.*, 1998) consiste à définir une fonction diagnostique J comme la norme de la différence entre la prévision opérationnelle à 24-h et l'analyse opérationnelle correspondante :

$$J(\delta\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [M(\mathbf{x}_a + \delta\mathbf{x}) - \mathbf{x}_{a,v}]^T \mathbf{C} [M(\mathbf{x}_a + \delta\mathbf{x}) - \mathbf{x}_{a,v}] \quad (1.37)$$

où M représente le modèle de prévision, \mathbf{x}_a l'analyse initiale, $\delta\mathbf{x}$ les erreurs d'analyse, $\mathbf{x}_{a,v}$ l'analyse de vérification (valide à $t_0+\Delta t$) et \mathbf{C} réfère à la norme de l'énergie totale (Talagrand, 1981) définie de telle sorte que :

$$\delta\mathbf{x}^T \mathbf{C} \delta\mathbf{x} = \frac{1}{2A} \int_A \left\{ R_d T_r \left(\frac{p'_s}{p_r} \right)^2 + \int_0^1 \left[u'^2 + v'^2 + \frac{c_p}{T_r} T'^2 \right] d\eta \right\} dA \quad (1.38)$$

où $\delta\mathbf{x}$ est le vecteur perturbation de la variable d'état des composantes (u' , v' , T' et p'_s). De plus, T_r et p_r représentent une température et une pression de référence avec les valeurs numériques de 273K et de 1000 hPa, c_p est la chaleur spécifique à pression constante pour l'air sec, R_d est la constante spécifique pour l'air sec avec les valeurs numériques respectivement 1005.7 et 287.04 J kg⁻¹ K⁻¹. L'intégration est réalisée verticalement dans la direction η et horizontalement sur le domaine d'intégration ' A ' qui pourrait être le globe entier ou seulement une région localisée. L'énergie totale de l'erreur de prévision donnée par la relation (1.38) est définie pour caractériser globalement l'erreur de prévision des différentes variables météorologiques sur un domaine géographique donné.

La description de l'algorithme d'analyse de sensibilité et les étapes nécessaires pour identifier les corrections à l'analyse sont présentées dans Laroche *et al.*, (2002). La figure 1.2 schématise l'algorithme d'analyse de sensibilité utilisé au CMC. La partie supérieure illustre l'intégration du modèle à partir de l'analyse initiale opérationnelle et de l'analyse de sensibilité qui corrige l'état initial pour que la prévision à 24-h se rapproche de l'analyse vérificatrice. La fonction de sensibilité constitue une mesure de l'écart entre la prévision obtenue et l'analyse de vérification : cet écart représente l'erreur de prévision à 24-h. Cette fonction dépend des conditions initiales choisies et la partie inférieure illustre le processus itératif de minimisation utilisant le modèle linéaire tangent pour propager $\delta\mathbf{x}$ dans le temps et le modèle adjoint pour déterminer les dérivées de J par rapport à l'état initial à partir des dérivées de la fonction coût J par rapport à l'état prévu.

Dans ce qui suit, les erreurs d'analyse associées à une prévision manquée sur la côte est de l'Amérique du Nord, le 27 janvier 2003 à 12 UTC, ont été calculées en utilisant l'analyse opérationnelle valide 24 heures plus tard comme analyse vérificatrice. La fonction coût J est

l'énergie totale de l'erreur de prévision à 24 heures intégrée verticalement selon η entre 0 et 1 et horizontalement sur tout le globe. La figure 1.3-a donne les erreurs d'analyse au champ de température sur la grille latitude longitude du modèle GEM près de 900 hPa, obtenues après trois itérations de la fonction coût. On remarque que leur amplitude est non nulle presque partout sur le globe, variant entre $[-2.^{\circ}\text{C}, +2.^{\circ}\text{C}]$. La région des Maritimes du Canada est caractérisée par des valeurs importantes de la fonction de sensibilité. La figure 1.3-b donne un aperçu plus détaillé du même champ de température de la fonction de sensibilité dans cette région, dite région sensible. La coupe verticale dans les corrections initiales de température, présentée à la figure 1.3-c prise le long de la flèche en 1.3-b, montre une forte structure barocline. Quand les erreurs d'analyses obtenues après trois itérations de la fonction coût sont ajoutées à l'analyse initiale, une part considérable de l'erreur de prévision (pour des échéances inférieures à 48-h) peut être réduite. Nous reviendrons à ce cas au chapitre III.

1.2.3 Analyse de sensibilité *a priori*

Les fonctions de sensibilité *a priori* sont utilisées pour réduire la part des erreurs de prévision due aux conditions initiales sans attendre l'analyse vérificatrice. Pour évaluer la sensibilité d'une prévision aux changements aux conditions initiales, la fonction de sensibilité *a priori* est définie par rapport à un aspect particulier de la prévision à un temps ultérieur et on détermine ensuite la correction aux conditions initiales qui a le plus d'influence sur cet aspect particulier de la prévision.

Par exemple, en prenant la moyenne de l'anomalie de la pression de surface au-dessus d'une région d'intérêt, on peut identifier les changements à l'analyse courante qui pourraient avoir l'impact le plus significatif sur la prévision. Dans Hello *et al.* (2000), ceci a été employé pour identifier les régions où de petits changements aux conditions initiales peuvent mener à des changements substantiels dans la prévision. La fonction coût est :

$$J(p_S) = \int_{S'} (p_S - p_r) dS' \quad (1.39)$$

où $p_S = p_S(t)$, S' est le domaine sur lequel on calcule la fonction coût et p_r est une pression de référence. Dans ce cas, on a que :

$$\delta J(p_S) = \int_{S'} \delta p_S dS' = \langle \nabla_{p_S} J, \delta p_S \rangle \quad (1.40)$$

et le gradient de J au temps final est un champ constant ($\nabla_{p_S} J = \frac{\partial J}{\partial p_S} = 1$).

En définissant une forme linéaire $\mathbf{\Pi} = (0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{I})$ telle que $p_S(t) = \mathbf{\Pi} \mathbf{x}(t)$ et en utilisant les relations (1.30) et (1.38), on examine comment la prévision de la pression de surface dépend de l'état initial, et donc de ses erreurs :

$$\delta J(p_S) = \int_{S'} \delta p_S dS' = \langle 1, \mathbf{\Pi} \delta \mathbf{x} \rangle = \langle 1, \mathbf{\Pi} \mathbf{M} \delta \mathbf{x}_0 \rangle \quad (1.41)$$

En tenant compte de la propriété d'opérateur adjoint exprimée par la relation (1.31), la relation (1.40) s'écrit :

$$\delta J(p_{S_0}) = \langle \mathbf{M}^* \mathbf{\Pi}^* 1, \delta \mathbf{x}_0 \rangle = \langle \nabla_{x_0} J, \delta \mathbf{x}_0 \rangle \quad (1.42)$$

$$\nabla_{x_0} J = \mathbf{M}^* \mathbf{\Pi}^* \frac{\partial J}{\partial p_S} \quad (1.43)$$

où \mathbf{M}^* est le modèle adjoint du modèle de prévision et $\mathbf{\Pi}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{I} \end{pmatrix}$.

Cette méthode a été appliquée par Hello *et al.*, (2000) afin de diagnostiquer les zones de sensibilité dans le cas de la campagne FASTEX de janvier et février 1997. Cette information a été utilisée pour déployer des observations dites *ciblées* sur les régions identifiées comme étant critique par les fonctions de sensibilité *a priori*.

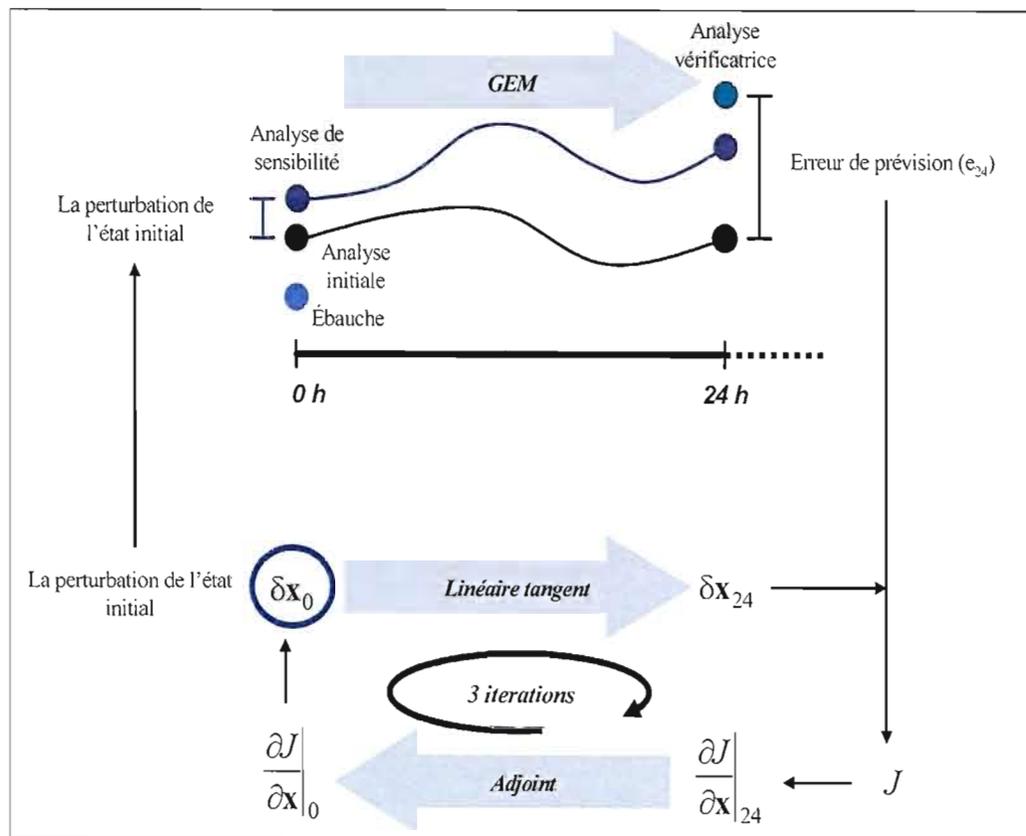


Figure 1.2 : Aperçu de l'algorithme d'analyse de sensibilité du CMC (d'après : Laroche *et al.*, 2002).

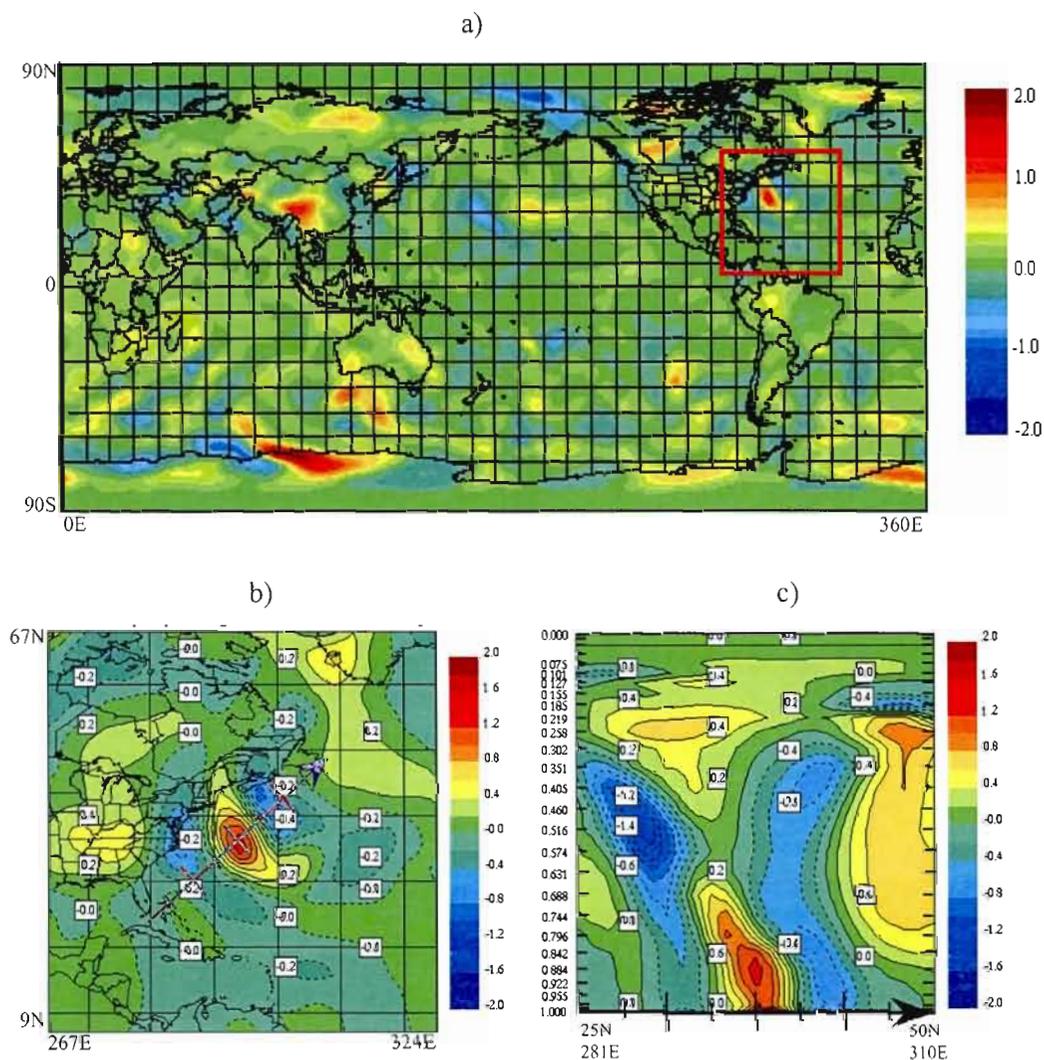


Figure 1.3 : Analyse de sensibilité *a posteriori* calculée avec l'algorithme du CMC pour une prévision manquée sur la côte est de l'Amérique du Nord, le 27 janvier 2003 à 12 UTC. En a) le champ de température de la fonction de sensibilité sur tout le globe proche de 900 hPa (intervalle 0.2°C); b) plan rapproché de la fonction de sensibilité pour le même champ de température (intervalle 0.2°C) dans la région entourée par le cadre en 1.3-a; c) la coupe verticale pour le champ de température de la fonction de sensibilité le long de la flèche en 1.3-b.

CHAPITRE II

L'ASSIMILATION ADAPTATIVE : UTILISATION DES ANALYSES DE SENSIBILITÉ COMME FONCTIONS DE STRUCTURE LOCALES

Ce chapitre se consacre à l'utilisation d'un champ de sensibilité comme fonction de structure en assimilation 3D-Var. Ce concept a été proposé et testé pour la première fois par Hello et Bouttier (2001) pour l'ensemble des cas de la campagne de mesures FASTEX, de janvier et février 1997, dans la perspective d'améliorer les prévisions de cyclogénèse. Ils ont introduit une formulation différente des covariances d'erreur de prévision qui permet d'inclure les fonctions de structure basées sur des fonctions de sensibilité *a priori*. Un aperçu de l'approche, appelée 3D-Var adapté, est tout d'abord présenté dans ce chapitre. Ensuite, une formulation différente du 3D-Var adapté est proposée et comparée à celle de Hello et Bouttier (2001). La validation et l'analyse de l'algorithme adapté proposé sont réalisées dans le cadre unidimensionnel 1D-Var.

2.1 Assimilation adaptative 3D-Var

Les méthodes adaptatives prennent en compte une information de prévisibilité locale ignorée dans le modèle de covariance d'erreur de prévision stationnaire du système d'assimilation standard. Dans ce qui suit, deux formulations différentes du 3D-Var adapté sont présentées afin d'illustrer les modifications apportées par cette technique à l'assimilation variationnelle 3D (3D-Var).

2.1.1 Première approche au 3D-Var adapté

Dans le cadre des méthodes adaptatives, Hello et Bouttier (2001) ont introduit localement dans le 3D-Var les fonctions de sensibilité comme fonctions de structure. Leur méthode consiste à représenter les covariances d'erreur pour une sous-partie de la matrice \mathbf{B} en suivant la procédure développée pour le filtre du Kalman de rang réduit (RRKF) par Fisher (1998). Essentiellement, cette approche traite différemment la partie de la variable de contrôle qui se projette dans l'espace décrivant la composante sensible.

Dans la formulation incrémentale d'assimilation variationnelle 3D-Var, l'expression du terme d'écart à l'ébauche $J_b(\delta\mathbf{x})$ qui mesure la distance entre l'analyse et l'ébauche normalisée par les covariances des erreurs de l'ébauche est :

$$J_b(\delta\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \delta\mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-1} \delta\mathbf{x} = \frac{1}{2} \langle \delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x} \rangle_{\mathbf{B}^{-1}}, \quad (2.1)$$

où par $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on note le produit scalaire défini par la relation (2.1).

On décompose ensuite l'incrément d'analyse $\delta\mathbf{x}$ en deux composantes associées aux sous-espaces S et \bar{S} , de telle sorte que :

$$\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{x}_S + \delta\mathbf{x}_{\bar{S}} \quad (2.2)$$

où

S : sous-espace engendré par la fonction de sensibilité \mathbf{y}_1 ($S = \{\mathbf{y}_1\}$);

\bar{S} : sous-espace complémentaire composé des vecteurs orthogonaux à S ;

$\delta\mathbf{x}_S$: la composante de l'incrément d'analyse parallèle à la direction de sensibilité;

$\delta\mathbf{x}_{\bar{S}}$: la composante de l'incrément d'analyse orthogonal à la direction de sensibilité.

En appliquant la relation (2.2) de décomposition de l'incrément d'analyse et la propriété de distributivité par rapport à l'addition du produit scalaire, on peut développer la relation (2.1) de telle sorte que :

$$J_b(\delta \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle \delta \mathbf{x}_S, \delta \mathbf{x}_S \rangle_{\mathbf{B}^{-1}} + \langle \delta \mathbf{x}_S, \delta \mathbf{x}_{\bar{S}} \rangle_{\mathbf{B}^{-1}} + \frac{1}{2} \langle \delta \mathbf{x}_{\bar{S}}, \delta \mathbf{x}_{\bar{S}} \rangle_{\mathbf{B}^{-1}} \quad (2.3)$$

On cherche à modifier l'expression de la matrice \mathbf{B} de telle sorte que l'on puisse imposer certaines valeurs de variance dans le sous-espace S . On note $\tilde{\mathbf{B}}_x$ cette matrice. Dans le sous-espace \bar{S} , l'expression de $\tilde{\mathbf{B}}_x$ est telle que par construction :

$$\tilde{\mathbf{B}}_x^{-1} \delta \mathbf{x}_{\bar{S}} = \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x}_{\bar{S}} \quad (2.4)$$

et donc, l'expression du $J_b(\delta \mathbf{x})$, donnée par la relation (2.3) peut se réécrire de telle sorte que :

$$J_b(\delta \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle \delta \mathbf{x}_S, \delta \mathbf{x}_S \rangle_{\tilde{\mathbf{B}}_x^{-1}} + \langle \delta \mathbf{x}_S, \delta \mathbf{x}_{\bar{S}} \rangle_{\tilde{\mathbf{B}}_x^{-1}} + \frac{1}{2} \langle \delta \mathbf{x}_{\bar{S}}, \delta \mathbf{x}_{\bar{S}} \rangle_{\mathbf{B}^{-1}} \quad (2.5)$$

Dans l'espace de la variable de contrôle χ , introduite pour préconditionner le problème du 3D-Var (Bouttier *et al.*, 1997), l'expression (2.5) devient :

$$J_b(\chi) = \frac{1}{2} \chi_S^T \tilde{\mathbf{B}}_x^{-1} \chi_S + \chi_S^T \tilde{\mathbf{B}}_x^{-1} \chi_{\bar{S}} + \frac{1}{2} \chi_{\bar{S}}^T \chi_{\bar{S}} = \frac{1}{2} \chi^T \tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1} \chi \quad (2.6)$$

où

$$\chi = \mathbf{B}^{-1/2} \delta \mathbf{x} = \mathbf{L}^{-1} \delta \mathbf{x}, \quad (2.7)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1} = \mathbf{L}^T \tilde{\mathbf{B}}_x^{-1} \mathbf{L}. \quad (2.8)$$

Dans l'équation (2.6), le premier terme ($\frac{1}{2} \chi_S^T \tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1} \chi_S$), représente la partie de la variable de contrôle qui projette dans le sous-espace S , défini par la direction de sensibilité, le deuxième terme ($\chi_S^T \tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1} \chi_{\bar{S}}$) contient les contributions des termes croisés et le troisième terme ($\frac{1}{2} \chi_{\bar{S}}^T \chi_{\bar{S}}$) concerne la partie de la variable de contrôle orthogonale au sous-espace S . Avec le changement de variable défini par (2.7), la relation entre la direction de sensibilité \mathbf{y}_1 (dans l'espace de la variable $\delta \mathbf{x}$) et son correspondant $\tilde{\mathbf{y}}_1$ (dans l'espace de la variable de contrôle χ) s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{y}_1 \quad (2.9)$$

La transformation orthogonale \mathbf{X} permet de redistribuer les composantes du vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_1$ de telle sorte que $\mathbf{X}\tilde{\mathbf{y}}_1$ soit un vecteur dont seulement le premier élément (la projection sur le sous-espace S) est non nul. Ceci s'obtient en appliquant une transformation de Householder basée sur le théorème suivant (démontré dans l'annexe A) :

« Pour tout vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_1$ du \mathfrak{R}^n et pour tout vecteur \mathbf{y}_1 non colinéaire de $\tilde{\mathbf{y}}_1$, il existe $\alpha \in \mathfrak{R}$, et un vecteur $\mathbf{v} \in \mathfrak{R}^n$, tels que :

$$\mathbf{X}\tilde{\mathbf{y}}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{I}_n - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\|\mathbf{v}\|^2} \quad (2.10)$$

où \mathbf{X} est la matrice de Householder associée au vecteur \mathbf{v} . Cette matrice est symétrique ($\mathbf{X}^T = \mathbf{X}$), orthogonale ($\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{I}_n$), idempotente ($\mathbf{X} = \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^T$). »

La relation (2.10) est utilisée pour générer la matrice $\tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1}$ dans l'espace d'intérêt S, notée $\hat{\mathbf{B}}_\chi^{-1}$ et donnée par :

$$\hat{\mathbf{B}}_\chi^{-1} = \mathbf{X}\tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1}\mathbf{X}^T \quad (2.11)$$

La matrice symétrique inverse $\tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1}$ s'écrit (en multipliant la relation précédente à gauche par \mathbf{X}^{-1} , à droite par \mathbf{X}^{-T} et en appliquant les propriétés de la matrice de Householder) comme :

$$\tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1} = \mathbf{X}^{-1}\hat{\mathbf{B}}_\chi^{-1}\mathbf{X}^{-T} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ \vdots & \mathbf{G} & \\ f_n & & \end{pmatrix} \mathbf{X}^T \quad (2.12)$$

où \mathbf{G} est la matrice mineure associée à l'élément de la matrice $\hat{\mathbf{B}}_\chi^{-1}$ d'indice (1, 1).

Pour déterminer les coefficients f_1, \dots, f_n , on note tout d'abord :

$$\mathbf{z}_1 = \tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1}\mathbf{y}_1 = \frac{\mathbf{y}_1}{\sigma_1^2} \quad (2.13)$$

où le paramètre σ_1 permet de régler la variance de l'erreur de l'ébauche dans la direction de sensibilité \mathbf{y}_1 . En appliquant les relations (2.8) et (2.9), l'équation (2.13) s'écrit :

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{L}^{-T} \tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1} \mathbf{L}^{-1} (\mathbf{L} \tilde{\mathbf{y}}_1) = \mathbf{L}^{-T} \tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1} \tilde{\mathbf{y}}_1 \quad (2.14)$$

On note également :

$$\tilde{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{L}^T \mathbf{z}_1 = \tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1} \tilde{\mathbf{y}}_1 \quad (2.15)$$

En appliquant la matrice \mathbf{X}^T à la relation (2.15), on obtient :

$$\mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{z}}_1 = \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ \vdots & \mathbf{G} & \\ f_n & & \end{pmatrix} \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{y}}_1 \quad (2.16)$$

Par construction de la matrice \mathbf{X} , $\mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{y}}_1$ est un vecteur dont tous les éléments sont nuls sauf le premier égal à $\alpha = \|\tilde{\mathbf{y}}_1\|$ et alors la relation (2.16) s'écrit :

$$\mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{z}}_1 = \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ \vdots & \mathbf{G} & \\ f_n & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|\tilde{\mathbf{y}}_1\| \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

et les éléments $(f_i)_{i=1,n}$ sont déterminées par :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|} \mathbf{X}^T \mathbf{L}^T \mathbf{z}_1 = \frac{1}{\sigma_1^2 \|\mathbf{L}^{-1} \mathbf{y}_1\|} \mathbf{X}^T \mathbf{L}^T \mathbf{y}_1. \quad (2.18)$$

Dans l'expression (2.12), finalement la matrice mineure \mathbf{G} reste inconnue. Mais, comme on sait que l'inverse de la matrice de covariance d'erreur de prévision dans l'espace de la variable de contrôle est la matrice identité, nous remplaçons la matrice mineure \mathbf{G} par la

matrice identité, \mathbf{I}_{n-1} en obtenant une approximation de $\hat{\mathbf{B}}_\chi^{-1} = \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ \vdots & \mathbf{I}_{n-1} & \\ f_n & & \end{pmatrix}$. Cette

approximation peut affecter les propriétés de la matrice $\hat{\mathbf{B}}_\chi^{-1}$, qui, comme matrice de covariance, doit être définie positive. On mentionne que la matrice est définie positive si et seulement si les conditions suivantes sont rencontrées (Golub et van Loan, 1983) :

a) $\hat{\mathbf{B}}_\chi^{-1}$ est non singulière; b) $f_1 \geq 0$; c) $f_1 > (f_i^2)_{i=2,n}$; d) $f_1 > \max(f_i)_{i=2,n}$.

Supposons que la matrice symétrique $\hat{\mathbf{B}}_x^{-1}$ soit définie positive. Le théorème suivant est applicable (Strang, 1986) :

« Une matrice carrée réelle $\hat{\mathbf{B}}_x^{-1}$ est symétrique définie positive si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme $\hat{\mathbf{B}}_x^{-1} = \tilde{\mathbf{I}}^{-T} \tilde{\mathbf{I}}^{-1}$. »

Alors, en appliquant l'algorithme de Choleski et après quelques calculs (détaillés dans l'annexe B) on identifie la matrice $\tilde{\mathbf{I}}^{-1}$:

$$\tilde{\mathbf{I}}^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{f_1 - (f_2^2 + \dots + f_n^2)} & 0 & \dots & 0 \\ f_2 & & & \\ \vdots & & \mathbf{I}_{n-1} & \\ f_n & & & \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

et aussi la matrice $\tilde{\mathbf{I}}$ qui se développe à partir de $\tilde{\mathbf{I}}^{-1}$, de la manière suivante :

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\sqrt{f_1 - (f_2^2 + \dots + f_n^2)}}{-f_2} & & & \\ \frac{\sqrt{f_1 - (f_2^2 + \dots + f_n^2)}}{\vdots} & & \mathbf{I}_{n-1} & \\ \frac{\sqrt{f_1 - (f_2^2 + \dots + f_n^2)}}{-f_n} & & & \\ \sqrt{f_1 - (f_2^2 + \dots + f_n^2)} & & & \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Il suit de (2.12) que

$$\tilde{\mathbf{B}}_x^{-1} = \mathbf{X} \tilde{\mathbf{I}}^{-T} \tilde{\mathbf{I}}^{-1} \mathbf{X}^T = \mathbf{X}^{-T} \tilde{\mathbf{I}}^{-T} \tilde{\mathbf{I}}^{-1} \mathbf{X}^{-1} = (\mathbf{X} \tilde{\mathbf{I}})^{-T} (\mathbf{X} \tilde{\mathbf{I}})^{-1} = \tilde{\mathbf{L}}^{-T} \tilde{\mathbf{L}}^{-1} \quad (2.21)$$

et la nouvelle matrice de covariance d'erreur de prévision s'écrit de telle sorte que :

$$\tilde{\mathbf{B}}_x = \mathbf{L} \tilde{\mathbf{B}}_x \mathbf{L}^T = \mathbf{L} \tilde{\mathbf{L}} (\tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{L}})^T = \mathbf{L} \mathbf{X} \tilde{\mathbf{I}} \tilde{\mathbf{I}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{L}^T \quad (2.22)$$

Dans l'annexe C, la forme particulière de l'équation (2.22) est montrée dans deux situations limites.

Si la matrice $\hat{\mathbf{B}}_x^{-1}$ n'est plus définie positive à cause des approximations introduites, les termes croisés (f_2, \dots, f_n) seront multipliés chacun par $\sqrt{\beta}$ ($0 \leq \sqrt{\beta} \leq 1$), et on identifie la valeur de $\sqrt{\beta}$ pour laquelle la matrice $\hat{\mathbf{B}}_x^{-1}$ est définie positive.

Cela revient à calculer la valeur de β pour laquelle :

$$f_1 - \beta \sum_{i=2}^n f_i^2 \geq 0 \quad (2.23)$$

On remarque que la valeur $\beta = 0$ ne considère pas l'information contenue dans les termes (f_2, \dots, f_n) , mais elle assure que la matrice est définie positive. Pour des raisons pratiques, un test initial de l'algorithme de Choleski est effectué pour la valeur $\beta = 1$. Si la matrice $\hat{\mathbf{B}}_{\chi}^{-1}$ n'est pas définie positive, la valeur de β est réduite par un facteur 2 et le test est répété. Si après quelques itérations on ne trouve pas la valeur optimale de β alors, il est mis à zéro et l'algorithme appliqué.

Dans le cadre de FASTEX, Hello et Bouttier (2001) ont montré que l'utilisation de cette approche s'est traduit par un impact positif sur presque tous les cas de développement pour lesquels des observations ciblées avaient été déployées. Ces résultats ont démontré la robustesse de la méthode. On peut donc dire que l'on adapte l'analyse 3D-Var à la prévision de la dépression pour prendre en compte les spécificités de l'écoulement.

2.1.2 Deuxième approche 3D-Var adapté

Une formulation différente du 3D-Var adapté est développée dans le cadre de ce projet. L'idée proposée par Hello et Bouttier (2001) d'introduire les fonctions de sensibilité comme fonctions de structure est également retenue et une reformulation de la matrice de covariance d'erreur de prévision est donnée.

Avant de présenter cette approche, nous allons passer en revue l'expression du terme d'écart à l'ébauche ($J_b(\delta\mathbf{x})$) dans la formulation incrémentale du 3D-Var donnée par la relation (1.21) réécrite ci-après :

$$J_b(\delta\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \delta\mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-1} \delta\mathbf{x} = \frac{1}{2} \delta\mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-T/2} \mathbf{B}^{-1/2} \delta\mathbf{x} \quad (2.24)$$

où \mathbf{B} est la matrice de covariance d'erreur de prévision du 3D-Var. En considérant le changement de la variable du 3D-Var donné par la relation (1.26), la relation (2.24) s'écrit :

$$J_b(\chi) = \frac{1}{2} \chi^T \chi = \frac{1}{2} \langle \chi, \chi \rangle_{\mathbf{B}_\chi^{-1}} \quad (2.25)$$

où, par construction, $\mathbf{B}_\chi^{-1} = \mathbf{I}$ est la matrice identité.

Une étape importante dans la formulation du 3D-Var adapté est représentée par le calcul de la fonction de sensibilité :

$$\tilde{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{B}^{-1/2} \mathbf{y}_1 \quad (2.26)$$

ou bien, de la fonction de sensibilité normalisée (par rapport à une norme euclidienne), notée par $\tilde{\mathbf{v}}$ et de norme unitaire ($\|\tilde{\mathbf{v}}\| = 1$) :

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{\tilde{\mathbf{y}}_1}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|} \quad (2.27)$$

La composante de l'erreur de prévision dans la direction de sensibilité $\tilde{\mathbf{v}}$ est donnée par le produit $\tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{B} \tilde{\mathbf{v}}$. Il en va de même pour \mathbf{B}^{-1} , de telle sorte que $\mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{v}}$ se projette sur $\tilde{\mathbf{v}}$ en autant que $\tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{v}}$ soit non nul ($\tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{v}} \neq 0$).

Le nouveau modèle de covariance proposé, ajoute au modèle de covariance initial un terme supplémentaire qui inclut la composante sensible :

$$\tilde{\mathbf{B}}_\chi = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{B}} \quad (2.28)$$

Lorsqu'on choisit :

$$\tilde{\mathbf{B}} = \gamma^2 \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}}^T \quad (2.29)$$

où γ est un scalaire on obtient :

$$\tilde{\mathbf{B}}_\chi = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{I} + \gamma^2 \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}}^T \quad (2.30)$$

Ce modèle de covariance d'erreur de prévision inclut la composante sensible tout en retenant le modèle de covariance initial, homogène et isotrope, lorsque la composante dite sensible est peu importante. Nous évaluons la composante de l'erreur de prévision dans la direction de sensibilité $\tilde{\mathbf{v}}$ donnée par le produit $\tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{B}}_\chi \tilde{\mathbf{v}}$ de telle sorte que :

$$\tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{B}}_\chi \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}^T (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{B}}) \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{v}} = 1 + \gamma^2 = \sigma^2 \quad (2.31)$$

où σ représente le paramètre permettant de régler la variance de l'erreur de l'ébauche dans la direction de sensibilité $\tilde{\mathbf{v}}$. On remarque que la matrice $\tilde{\mathbf{B}}$ ne se projette que sur la direction de sensibilité et une valeur nulle pour γ ($\sigma = 1$) redonne le modèle de covariance initial.

La forme variationnelle du problème d'assimilation 3D-Var requiert l'inverse de la matrice de covariance d'erreur $\tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1}$ calculé à partir de la relation (2.30) :

$$\tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1} = (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{B}})^{-1} = (\mathbf{I} + \gamma^2 \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}}^\top)^{-1} \quad (2.32)$$

La matrice inverse $\tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1}$, est déterminée en utilisant la relation de Sherman-Morrison (Golub et van Loan, 1983), démontrée dans l'annexe D et qui s'énonce comme suit :

« Soit $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ une matrice non singulière et $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{R}^n$ deux vecteurs arbitraires. Si $\mathbf{v}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \neq -1$, alors : $(\mathbf{A} + \mathbf{u} \mathbf{v}^\top)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^\top \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}}$ »

Dans notre cas, on identifie \mathbf{A} , \mathbf{u} et \mathbf{v} de telle sorte que $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, $\mathbf{u} = \gamma^2 \tilde{\mathbf{v}}$, $\mathbf{v}^\top = \tilde{\mathbf{v}}^\top$ et on vérifie que $\mathbf{v}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} = \gamma^2 \tilde{\mathbf{v}}^\top \tilde{\mathbf{v}} = \gamma^2 \neq -1$. Alors, en appliquant la relation de Sherman-Morrison, la matrice inverse $\tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1}$ est donnée par :

$$\tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1} = (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{B}})^{-1} = (\mathbf{I} + \gamma^2 \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}}^\top)^{-1} = \mathbf{I} - \frac{\gamma^2 \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}}^\top}{1 + \gamma^2 \tilde{\mathbf{v}}^\top \tilde{\mathbf{v}}} = \mathbf{I} - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}}^\top \quad (2.33)$$

L'expression de $J_b(\chi)$, donnée en remplaçant (2.33) dans (2.25), s'écrit :

$$J_b(\chi) = \frac{1}{2} \chi^\top \tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1} \chi = \frac{1}{2} \chi^\top \left(\mathbf{I} - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}}^\top \right) \chi \quad (2.34)$$

La matrice $\tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1}$ symétrique et définie semi-positive peut être décomposée, en appliquant l'algorithme de Choleski, en $\tilde{\mathbf{B}}_\chi^{-1} = \tilde{\mathbf{L}}^{-\top} \tilde{\mathbf{L}}^{-1}$ où $\tilde{\mathbf{L}}$ est définie par la matrice $\tilde{\mathbf{B}}_\chi = \tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{L}}^\top$.

En utilisant les relations (2.31) et (2.32) nous obtenons :

$$(\mathbf{I} + (\sigma^2 - 1) \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}}^\top) = \tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{L}}^\top \quad (2.35)$$

L'expression de l'opérateur $\tilde{\mathbf{L}}$ est donnée en décomposant la partie gauche de (2.35) de telle sorte que :

$$(\mathbf{I} - (1 - \sigma)\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}^\top)(\mathbf{I} - (1 - \sigma)\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}^\top) = \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{L}}^\top \quad (2.36)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}^\top = \tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{I} - (1 - \sigma)\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}^\top \quad (2.37)$$

Pour déterminer l'opérateur inverse $\tilde{\mathbf{L}}^{-1}$ la relation de Sherman-Morrison est encore une fois appliquée :

$$\tilde{\mathbf{L}}^{-1} = (\mathbf{I} + (\sigma - 1)\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}^\top)^{-1} = \mathbf{I} - \frac{(\sigma - 1)\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}^\top}{1 + \tilde{\mathbf{v}}^\top(\sigma - 1)\tilde{\mathbf{v}}} \quad (2.38)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}^{-1} = \mathbf{I} + \frac{1 - \sigma}{\sigma}\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}^\top \quad (2.39)$$

L'expression de $J_b(\delta\mathbf{x})$ avec la nouvelle matrice de covariance d'erreur de prévision est :

$$J_b(\delta\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\delta\mathbf{x}^\top \mathbf{B}^{-\top/2} \left(\mathbf{I} - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2}\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}^\top \right) \mathbf{B}^{-1/2} \delta\mathbf{x} \quad (2.40)$$

où on note :

$$\tilde{\mathbf{B}}_x^{-1} = \mathbf{B}^{-\top/2} \left(\mathbf{I} - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2}\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}^\top \right) \mathbf{B}^{-1/2} = \mathbf{B}^{-1} - \frac{\mathbf{B}^{-1}\gamma^2\mathbf{y}_1\mathbf{y}_1^\top\mathbf{B}^{-1}}{(1 + \gamma^2)\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2} \quad (2.41)$$

et nous identifions la matrice $\tilde{\mathbf{B}}_x$ en utilisant encore une fois la relation de Sherman-Morrison :

$$\tilde{\mathbf{B}}_x = \mathbf{B} + \frac{\gamma^2\mathbf{y}_1\mathbf{y}_1^\top}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2} \quad (2.42)$$

Cette représentation de la matrice de covariance d'erreur de prévision inclut les fonctions de structure basées sur les fonctions de sensibilité. Dans la zone où l'amplitude de la fonction de sensibilité est significative, appelée aussi région sensible, la contribution de la composante sensible est importante et le nouveau modèle de covariance d'erreur de prévision permet de prendre en compte cette information de prévisibilité locale. Lorsque l'amplitude de la fonction de sensibilité est faible ($\mathbf{y}_1 \cong 0$), la contribution de la composante sensible est peu importante et aucune modification n'est apportée au modèle de covariance d'erreur de prévision du 3D-Var. Ces approches 3D-Var adapté ont été introduites dans le 3D-Var du Centre Météorologique Canadien (CMC). Les étapes nécessaires pour passer de

l'assimilation variationnelle 3D-Var à l'assimilation adaptative 3D (3D-Var adapté) sont présentées dans la section suivante.

2.2 Génération du 3D-Var adapté à partir du 3D-Var

Considérons comme point de départ l'expression de la fonction coût pour le 3D-Var, dans sa formulation incrémentale, donnée par la relation (1.21). Ayant noté que les deux méthodes (3D-Var adapté) présentées dans les sections précédentes s'apparentaient à une modification de la matrice de covariance d'erreur de prévision, cette expression s'écrit :

$$J(\delta\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\delta\mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{B}}_x^{-1} \delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{y}' - \mathbf{H}\delta\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}' - \mathbf{H}\delta\mathbf{x}) \quad (2.43)$$

où $\tilde{\mathbf{B}}_x^{-1}$ représente le nouveau modèle de covariance d'erreur de prévision, décrit par la relation ci-après :

$$\tilde{\mathbf{B}}_x^{-1} = \tilde{\mathbf{B}}_x^{-T/2} \tilde{\mathbf{B}}_x^{-1/2} = \mathbf{B}^{-T/2} \tilde{\mathbf{L}}^{-T} \tilde{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{B}^{-1/2} \quad (2.44)$$

avec la matrice $\tilde{\mathbf{L}}$ spécifiée lors de la présentation de chaque méthode et $\tilde{\mathbf{B}}_x^{-1/2} = \tilde{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{B}^{-1/2}$.

Le nouveau changement de variable qui s'impose s'écrit :

$$\tilde{\chi} = \tilde{\mathbf{B}}_x^{-1/2} \delta\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{B}^{-1/2} \delta\mathbf{x} \quad (2.45)$$

Compte tenu du changement de variable du 3D-Var, donné en (2.7), la relation (2.45) devient :

$$\tilde{\chi} = \tilde{\mathbf{L}}^{-1} \chi \quad (2.46)$$

et alors, les expressions de la fonctionnelle à minimiser et de son gradient, dans la nouvelle variable $\tilde{\chi}$ sont respectivement :

$$J(\tilde{\chi}) = \frac{1}{2}\tilde{\chi}^T \tilde{\chi} + \frac{1}{2}(\mathbf{H}\mathbf{B}^{1/2}\tilde{\mathbf{L}}\tilde{\chi} - \mathbf{y}')^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{B}^{1/2}\tilde{\mathbf{L}}\tilde{\chi} - \mathbf{y}') \quad (2.47)$$

$$\nabla_{\tilde{\chi}} J(\tilde{\chi}) = \tilde{\chi} + (\mathbf{H}\mathbf{B}^{1/2}\tilde{\mathbf{L}})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{B}^{1/2}\tilde{\mathbf{L}}\tilde{\chi} - \mathbf{y}') \quad (2.48)$$

Par conséquent, pour résoudre le problème d'analyse variationnelle 3D-Var adapté, il faut calculer $J(\tilde{\chi})$ et son gradient. Le minimum de cette fonction est obtenu pour la valeur de $\tilde{\chi}$ suivante :

$$\tilde{\chi} = (\mathbf{H}\mathbf{B}^{1/2}\tilde{\mathbf{L}})^T [\mathbf{R} + (\mathbf{H}\mathbf{B}^{1/2}\tilde{\mathbf{L}})(\mathbf{H}\mathbf{B}^{1/2}\tilde{\mathbf{L}})^T]^{-1} \mathbf{y}' \quad (2.49)$$

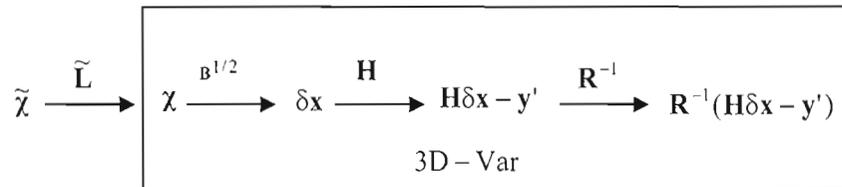
ou bien encore pour la valeur de $\delta \mathbf{x}$ suivante :

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{B}^{1/2} \tilde{\mathbf{L}} \tilde{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{B}^{1/2} \tilde{\mathbf{L}} (\mathbf{B}^{1/2} \tilde{\mathbf{L}})^T \mathbf{H}^T [\mathbf{R} + (\mathbf{H} \mathbf{B}^{1/2} \tilde{\mathbf{L}}) (\mathbf{H} \mathbf{B}^{1/2} \tilde{\mathbf{L}})^T]^{-1} \mathbf{y}' \quad (2.50)$$

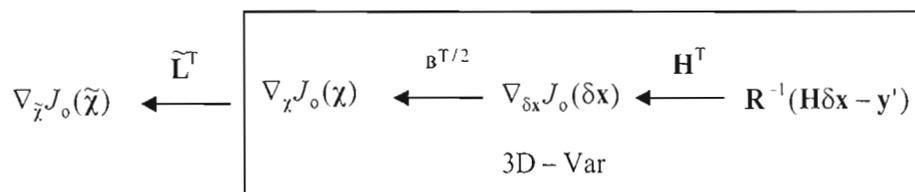
En tenant compte de la relation (2.44) l'expression de l'incrément d'analyse du 3D-Var adapté donnée par (2.50) s'écrit :

$$\delta \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{x}} \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{x}} \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{y}' \quad (2.51)$$

Dans l'expression (2.47) de la fonction coût, le terme d'écart à l'ébauche est facile à calculer puisqu'il se réduit à un simple produit scalaire. Aussi le gradient du terme associé au champ d'essai est trivial. Des calculs supplémentaires sont faits pour déterminer le terme d'écart aux observations et le gradient associé. La suite des changements de variables introduits plus haut est schématisée par :



Ceci résume les opérations nécessaires pour effectuer le calcul du terme d'écart aux observations. De manière analogue, la suite des opérations requises pour l'obtention du gradient du terme associé aux observations du 3D-Var adapté est la suivante :



Dans les expressions de la fonction coût du 3D-Var adapté et de son gradient, le calcul du terme d'écart aux observations implique un changement de variable supplémentaire par rapport au celui du 3D-Var. Le gradient de la fonction coût associé au même terme s'exprime par rapport au celui du 3D-Var de telle sorte que :

$$\nabla_{\tilde{\chi}} J = \left(\frac{\partial \chi}{\partial \tilde{\chi}} \right)^T \nabla_{\chi} J = \tilde{\mathbf{L}}^T \nabla_{\chi} J \quad (2.52)$$

Nous avons montré que le passage du 3D-Var au 3D-Var adapté peut être obtenu en introduisant un changement de variable supplémentaire pour le calcul de la fonction coût et de son gradient. Les expressions de la matrice $\tilde{\mathbf{L}}$ et de sa transposée ont été explicitement écrites pour chacune des approches au 3D-Var adapté. De plus, le 3D-Var standard peut être considéré comme un cas particulier du 3D-Var adapté, quand la matrice de changement de variable $\tilde{\mathbf{L}}$ est la matrice identité.

2.3 Le lien entre les deux approches au 3D-Var adapté

Les deux approches présentées sont basées sur une reformulation de la matrice de covariance d'erreur de prévision. Les formulations mathématiques différentes pour les deux méthodes reposent en partie sur des choix pratiques (faisabilité et rapidité de certains calculs comme des inversions des matrices) et sur des paramètres à régler. Notre attention porte sur la variance de l'erreur de l'ébauche dans la direction de sensibilité (\mathbf{y}_1). Nous avons supposé que dans les régions sensibles les variances d'erreurs de l'ébauche déterminées par la climatologie sont éloignées de la réalité.

Nous déterminons le lien entre la variance d'erreur de prévision σ_1^2 dans la direction de sensibilité (\mathbf{y}_1) introduite dans la première formulation (Hello et Bouttier, 2001) et la variance d'erreur de prévision σ^2 dans la direction de sensibilité normalisée ($\tilde{\mathbf{v}}$) qui apparaît dans la deuxième formulation de l'algorithme 3D-Var, après un développement mathématique de la quantité $\mathbf{y}_1^T \tilde{\mathbf{B}}_x^{-1} \mathbf{y}_1$. Dans la première formulation (Hello et Bouttier, 2001), l'expression de la matrice $\tilde{\mathbf{B}}_x^{-1}$ s'obtient à partir de la relation (2.22), de telle sorte que :

$$\tilde{\mathbf{B}}_x^{-1} = \mathbf{L}^{-T} \mathbf{X} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \dots & \mathbf{f}_n \\ \vdots & \mathbf{I}_{n-1} & \\ \mathbf{f}_n & & \end{pmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{L}^{-1} \quad (2.53)$$

En multipliant cette relation à gauche par \mathbf{y}_1^T et à droite par \mathbf{y}_1 on obtient :

$$\mathbf{y}_1^T \tilde{\mathbf{B}}_x^{-1} \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_1^T \mathbf{L}^{-T} \mathbf{X} \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ \vdots & \mathbf{I}_{n-1} & \\ f_n & & \end{pmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{y}_1 \quad (2.54)$$

En tenant compte de (2.9) et (2.10) et après quelques développements, la relation précédente s'écrit :

$$\mathbf{y}_1^T \tilde{\mathbf{B}}_x^{-1} \mathbf{y}_1 = f_1 \|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2 \quad (2.55)$$

où l'expression de f_1 est spécifiée par la relation (2.18).

Dans la deuxième formulation, on remplace $\tilde{\mathbf{B}}_x^{-1}$ par son expression donnée dans la relation (2.41) de telle sorte que :

$$\mathbf{y}_1^T \tilde{\mathbf{B}}_x^{-1} \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_1^T \mathbf{B}^{-T/2} \left(\mathbf{I} - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}}^T \right) \mathbf{B}^{-1/2} \mathbf{y}_1 \quad (2.56)$$

Après quelques développements et en tenant compte de (2.26) et (2.27) nous obtenons :

$$\mathbf{y}_1^T \tilde{\mathbf{B}}_x^{-1} \mathbf{y}_1 = \frac{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2}{\sigma^2} \quad (2.57)$$

Si nous désirons que la projection sur la direction de sensibilité (\mathbf{y}_1) du nouveau modèle de covariance proposé par les deux formulations soit la même, nous trouvons la relation entre les paramètres σ_1 et σ définis dans les deux formulations en utilisant les relations (2.55) et (2.57) de telle sorte que :

$$\mathbf{y}_1^T \tilde{\mathbf{B}}_x^{-1} \mathbf{y}_1 = f_1 \|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2 = \frac{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2}{\sigma^2} \quad (2.58)$$

d'où la relation cherchée sous la forme :

$$f_1 = \frac{1}{\sigma^2} \quad (2.59)$$

Si le coefficient (f_1) déterminé par la relation (2.18) est réécrit sous la forme :

$$(f_1) = \frac{1}{\sigma_1^2} (f_1') \quad (2.60)$$

où par (f_1') nous avons noté le premier élément du vecteur $\frac{1}{\|\bar{y}_1\|} \mathbf{X}^T \mathbf{L}^T \mathbf{y}_1$, la relation (2.59)

s'écrit :

$$\frac{1}{\sigma_1^2} (f_1') = \frac{1}{\sigma^2} \quad (2.61)$$

Cette relation spécifie le lien entre les variances d'erreur de prévision introduites lors de la présentation de chaque méthode. Comme il a déjà été mentionné, une valeur $\sigma_1 = 1$ (respectivement $\sigma = 1$) réduit l'assimilation 3D-Var adapté à celle 3D-Var standard. Dans l'annexe C l'expression du coefficient (f_1) a été développée en deux situations limites. En considérant la première situation limite présentée dans l'annexe C, (les covariances entre les points voisins nuls et le coefficient (f_1) égal à $(f_1) = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_1^2}$) la relation (2.58) s'écrit :

$$\sigma_1^2 = \sigma_b^2 \sigma^2 \quad (2.62)$$

2.4 Application de la méthode adaptative à un problème 1D

Dans cette section nous présentons le fonctionnement de l'assimilation adaptative dans le cadre 1D (1D-Var). L'exemple proposé par Hello et Bouttier, (2001) dans la validation de leur approche est également utilisé pour illustrer le comportement de l'algorithme dans sa deuxième formulation. Les résultats des différentes expériences sont présentés pour comparer les comportements de l'incrément d'analyse dans différentes situations.

2.4.1 Formulation théorique

Afin d'explicitier les quantités nécessaires pour résoudre le problème d'analyse variationnelle unidimensionnelle, l'expression de l'incrément d'analyse donnée par la relation (2.50) est réécrite dans le cas du 1D-Var et du 1D-Var adapté. Considérons le problème d'analyse en deux points comportant deux observations. L'expression de l'incrément d'analyse dans le

cadre simple d'une analyse variationnelle 1D, obtenue en considérant $\mathbf{B} = \sigma_b^2 \mathbf{I}$, $\mathbf{R} = \sigma_o^2 \mathbf{I}$, $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{I}$ dans l'équation (2.50), s'écrit :

$$\delta \mathbf{x}_a = \mathbf{B}(\mathbf{R} + \mathbf{B})^{-1} \mathbf{y}' \quad (2.63)$$

où $\delta \mathbf{x}_a$ et \mathbf{y}' sont des vecteurs ayant la dimension $\dim \delta \mathbf{x}_a = \dim \mathbf{y}' = 2$. Si les observations sont considérées suffisamment éloignées l'une de l'autre pour que chacune n'ait pas d'influence dans le calcul de l'incrément d'analyse au point de l'autre observation, les expressions des incréments d'analyse à ces points d'observations sont :

$$\delta x_a^{(1)} = \delta x_a^{(2)} = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} \mathbf{y}' \quad (2.64)$$

En particulier, si on considère que l'ébauche est nulle et que $\sigma_b = \sigma_o = 1$, les valeurs des incréments d'analyse aux deux points d'observations, sont égales à la moitié de la valeur observée.

L'expression de l'incrément d'analyse dans le cadre d'une analyse variationnelle 1D-Var adapté, s'écrit alors à partir de la relation (2.51) comme :

$$\delta \mathbf{x}_a = \tilde{\mathbf{B}}_x (\mathbf{R} + \tilde{\mathbf{B}}_x)^{-1} \mathbf{y}' \quad (2.65)$$

où, le modèle de covariance d'erreur de prévision $\tilde{\mathbf{B}}_x$, donné par la relation (2.42) dans la deuxième formulation de l'assimilation adaptative, a deux composantes, l'une homogène et isotrope donnée par le modèle de covariance initial et l'autre qui contient la contribution de la composante sensible, de telle sorte que :

$$\tilde{\mathbf{B}}_x = \mathbf{L} \tilde{\mathbf{B}}_x \mathbf{L}^T = \mathbf{L} \tilde{\mathbf{L}} (\mathbf{L} \tilde{\mathbf{L}})^T = \mathbf{B} + \frac{\gamma^2 \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_1^T}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2} \quad (2.66)$$

Parfois, la représentation des covariances d'erreur de prévision conduit à des matrices singulières. En général on peut régulariser le problème (Buehner, 2004) en considérant $\tilde{\mathbf{B}}_x = \mathbf{B}_H + \mathbf{B}_S$, où \mathbf{B}_H est une matrice non singulière et \mathbf{B}_S la matrice singulière. Nous illustrons ceci dans le problème d'analyse en deux points comportant deux observations. Si

nous considérons $\mathbf{B}_H = \mathbf{B} = \sigma_b^2 \mathbf{I}$, $\mathbf{B}_S = \gamma^2 \frac{\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_1^T}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2} = \frac{\gamma^2}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec γ un scalaire et

$\mathbf{y}_1^T = (1 \ 0)$ et $\mathbf{R} = \sigma_o^2 \mathbf{I}$, alors les expressions pour $\tilde{\mathbf{B}}_x$ respective $(\mathbf{R} + \tilde{\mathbf{B}}_x)^{-1}$ s'écrivent :

$$\tilde{\mathbf{B}}_x = \begin{pmatrix} \sigma_b^2 + \frac{\gamma^2}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2} & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

$$(\mathbf{R} + \tilde{\mathbf{B}}_x)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2 + \frac{\gamma^2}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

Les expressions des incréments d'analyse pour les deux observations sont :

$$\delta x_a^{(1)} = \frac{\sigma_b^2 + \frac{\gamma^2}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2}}{\sigma_o^2 + \sigma_b^2 + \frac{\gamma^2}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2}} y_1' \quad (2.69)$$

$$\delta x_a^{(2)} = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_o^2 + \sigma_b^2} y_2' \quad (2.70)$$

Nous remarquons que lorsque $\gamma^2 \gg \sigma_b^2 \approx \sigma_o^2$ les expressions (2.69) et (2.70) s'écrivent :

$$\delta x_a^{(1)} \cong y_1' = y_1 - x_b^{(1)} \quad (2.71)$$

$$\delta x_a^{(2)} = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_o^2 + \sigma_b^2} y_2' = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_o^2 + \sigma_b^2} (y_2 - x_b^{(2)}) \quad (2.72)$$

Dans la pratique, la formulation du 1D-Var (et le 3D-Var) introduit les covariances d'erreur de prévision par changement de variable. Compte tenu du changement de variable écrit en (2.46), la fonctionnelle à minimiser donnée par la relation (2.47) et sa hessienne s'écrivent maintenant :

$$J(\tilde{\chi}) = \frac{1}{2} \tilde{\chi}^T \tilde{\chi} + \frac{1}{2} (\mathbf{H}\mathbf{L}\tilde{\chi} - y')^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{L}\tilde{\chi} - y') \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \tilde{\chi}^2}(\tilde{\chi}) = J''(\tilde{\chi}) = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{L}}^T \mathbf{L}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{L} \tilde{\mathbf{L}} \equiv \mathbf{I} + \frac{1}{\sigma_o^2} (\mathbf{L}\tilde{\mathbf{L}})^T \mathbf{L} \tilde{\mathbf{L}} \quad (2.74)$$

Dans le cas qui nous occupe, on a que :

$$\tilde{\mathbf{B}}_x = \begin{pmatrix} \sigma_b^2 + \frac{\gamma^2}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2} & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_b^2 + \frac{\gamma^2}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2}} & 0 \\ 0 & \sigma_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_b^2 + \frac{\gamma^2}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2}} & 0 \\ 0 & \sigma_b \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

d'où en tenant compte de (2.66) :

$$\mathbf{L}\tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_b^2 + \frac{\gamma^2}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2}} & 0 \\ 0 & \sigma_b \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

et la matrice hessienne donnée par la relation (2.74) est :

$$J''(\tilde{\chi}) = \mathbf{I} + \frac{1}{\sigma_o^2} (\mathbf{L}\tilde{\mathbf{L}})^T \mathbf{L} \tilde{\mathbf{L}} \equiv \frac{1}{\sigma_o^2} \begin{pmatrix} \sigma_o^2 + \sigma_b^2 + \frac{\gamma^2}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2} & 0 \\ 0 & \sigma_o^2 + \sigma_b^2 \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

Le rapport entre la plus grande valeur singulière de la matrice et la plus petite définit le conditionnement de la matrice :

$$\text{cond} J'' = \frac{\sigma_o^2 + \sigma_b^2 + \frac{\gamma^2}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2}}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} = 1 + \frac{\gamma^2}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2 (\sigma_b^2 + \sigma_o^2)} \quad (2.78)$$

La relation (2.78) montre que le conditionnement se détériore lorsque la valeur de γ^2 augmente. Si la matrice hessienne est mal conditionnée, atteindre le minimum de la fonction coût (2.73) nécessite beaucoup plus d'itérations par les algorithmes de descente.

2.4.2 Cadre expérimental

Les expériences d'assimilation 1D-Var adapté (et 1D-Var) utilisent un domaine $[0, L]$, ($L=30000$ Km) à une résolution $\Delta x = 117.18$ Km. On considère que les erreurs d'observation ne sont pas corrélées entre elles et que la matrice \mathbf{R} est de la forme $\mathbf{R} = \sigma_0^2 \mathbf{I}$. La matrice de covariance d'erreur de prévision $\tilde{\mathbf{B}}_x$ du 1D-Var adapté est définie par la relation (2.66), de telle sorte que son élément $\tilde{B}_{ij} = \tilde{B}_x(x_i, x_j)$ est donné par la relation ci-dessus :

$$\tilde{B}_x(x_i, x_j) = B(x_i, x_j) + \frac{\gamma_x^2}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2} (\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_1^T)(x_i, x_j) \quad (2.79)$$

Le premier terme représente l'élément $B_{ij} = B(x_i, x_j)$ de la matrice \mathbf{B} du 1D-Var. Si on considère pour la définition de la matrice de covariance d'erreur de prévision \mathbf{B} , une fonction de corrélation homogène et isotrope de forme gaussienne de longueur caractéristique $r_L (=300$ Km) et si on suppose que l'écart type de l'erreur de l'ébauche σ_b est homogène alors, le terme $B(x_i, x_j)$ s'écrit :

$$B_{ij} = B(x_i, x_j) = \sigma_b^2 \exp\left(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2r_L^2}\right) \quad (2.80)$$

Le deuxième terme est obtenu en considérant la fonction de sensibilité \mathbf{y}_1 définie par une fonction localisée dans l'espace tel que proposé par Hello et Bouttier (2001) :

$$\mathbf{y}_1(x) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - L/2}{L_{Gr}}\right)^2\right) \cos\left(4 \left(\frac{x - L/2}{L_{Gr}}\right)\right) \quad (2.81)$$

La longueur d'échelle caractéristique de la fonction de sensibilité L_{Gr} , est considérée comme étant 600 Km. La partie où la valeur de la fonction de sensibilité n'est pas égale à zéro simule la zone sensible. Cette fonction de sensibilité sera introduite comme fonction de structure à

même le modèle des covariances d'erreur de prévision du 1D-Var. La fonction de structure en un point x , des covariances $\tilde{\mathbf{B}}_x(x_i, x_j)$ est définie, de telle sorte que :

$$f(x_i) = \tilde{\mathbf{B}}_x(x_i, x_j = x) \quad (2.82)$$

2.4.3 Présentation de résultats

Une première série d'expériences considère l'assimilation de deux observations : l'une placée dans la zone sensible et l'autre à l'extérieur de celle-ci. Ce choix nous permet de comparer le comportement de l'incrément d'analyse pour ces observations et de montrer le comportement différent du nouveau modèle de covariance dans la zone sensible et au dehors de celle-ci.

La figure 2.1-a représente les incréments d'analyse (en trait plein) pour ces observations obtenues avec le 1D-Var sans modification de la matrice $\tilde{\mathbf{B}}_x$. En pointillés, nous avons représenté la fonction de sensibilité et les deux observations sont marquées d'un x . La figure 2.1-b montre les incréments d'analyse pour ces deux observations obtenus avec le 1D-Var respectivement sans et avec la modification de la matrice $\tilde{\mathbf{B}}_x$ pour $\gamma_x^2 = 0$. L'analyse de ces figures indique que l'incrément d'analyse pour ces deux observations est contrôlé par le modèle de covariance habituel (stationnaire). La valeur de l'incrément d'analyse aux points d'observations est égale à la moitié de la valeur observée, tel qu'indiqué par la relation (2.64). On remarque que, comme prévu, dans les zones de sensibilité nulle la modification de la matrice $\tilde{\mathbf{B}}_x$ est sans effet. En effet, dans la deuxième formulation du 1D-Var adapté, on constate qu'en dehors de la zone sensible, l'expression du nouveau modèle de covariance, exprimé en termes de la variable χ s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{B}}_\chi = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{I} + \gamma^2 \tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_\chi = \mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{B} \quad (2.83)$$

Dans la zone sensible, pour $\sigma = 1$ ($\gamma = 0$) dans la relation (2.31), nous retrouvons aussi le modèle de covariance initial donné par la relation (2.83).

En faisant maintenant varier les valeurs prises pour le paramètre σ , ceci permet de régler la variance de l'erreur de l'ébauche dans la direction de sensibilité. La figure 2.2 présente les

incrément d'analyse (en trait plein) obtenus pour $\sigma=2$ et $\sigma=10$. On observe que l'incrément d'analyse lié à l'observation positionnée dans une zone à sensibilité nulle n'est pas affecté par les différentes valeurs de σ employées. L'incrément d'analyse lié à l'observation placée dans la zone sensible épouse la forme de la fonction de sensibilité en se rapprochant de la valeur de l'observation quand σ augmente. À proximité de la première observation, une grande valeur de σ conduit à un ajustement parfait de l'analyse à la fois à l'observation et à la forme de la fonction de sensibilité.

Par la suite on modifie les valeurs de σ_0 , en considérant $\sigma=10$ et les même deux observations. Dans la figure 2.3, l'incrément d'analyse est représenté pour différentes valeurs de σ_0 : $\sigma_0 = 2$ et $\sigma_0 = 0.5$. Comme il fallait s'y attendre, l'incrément d'analyse correspond mieux à la valeur observée lorsque σ_0 prend une valeur plus faible ($\sigma_0 = 0.5$).

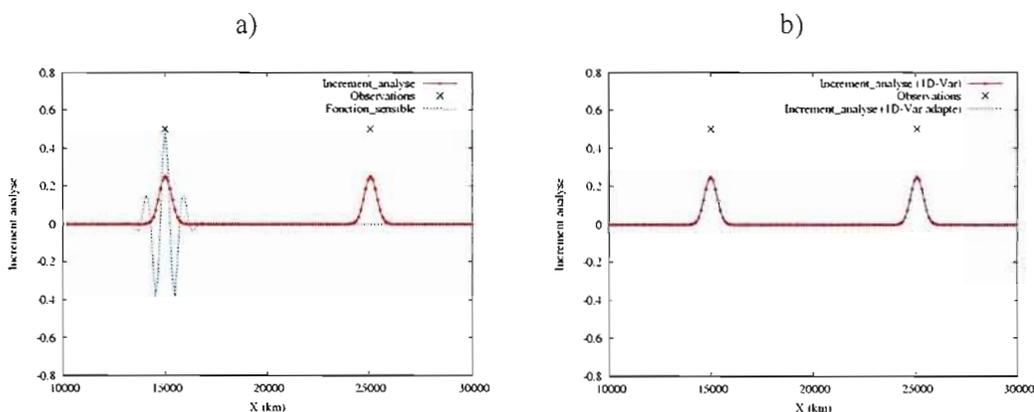


Figure 2.1 : a) L'incrément d'analyse obtenu avec un 1D-Var sans modification (trait plein), la fonction de sensibilité (en pointillés) et les deux observations assimilées (marquées d'un x). b) Comparaison des analyses obtenues avec le 1D-Var standard et le 1D-Var modifié pour $\sigma=1$: l'incrément d'analyse obtenu avec un 1D-Var sans modification (trait plein), l'incrément d'analyse obtenu avec un 1D-Var adapté (en pointillés) et les deux observations assimilées (marquées d'un x).

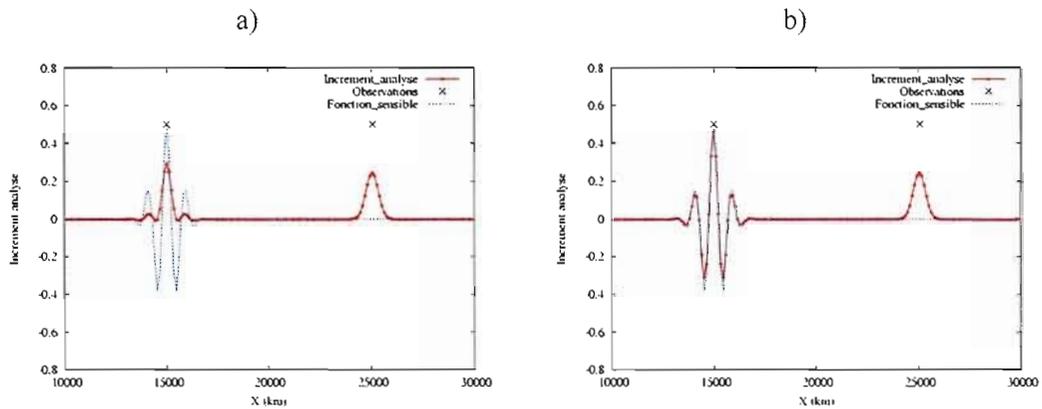


Figure 2.2 : Impact de la valeur de σ sur l'analyse dans un 1D-Var modifié. L'incrément d'analyse obtenu avec un 1D-Var adapté est représenté en trait plein en considérant $\sigma=2$ dans la partie a) et $\sigma=10$ dans la partie b). En pointillés est indiquée la fonction de sensibilité et les deux observations sont marquées d'un x.

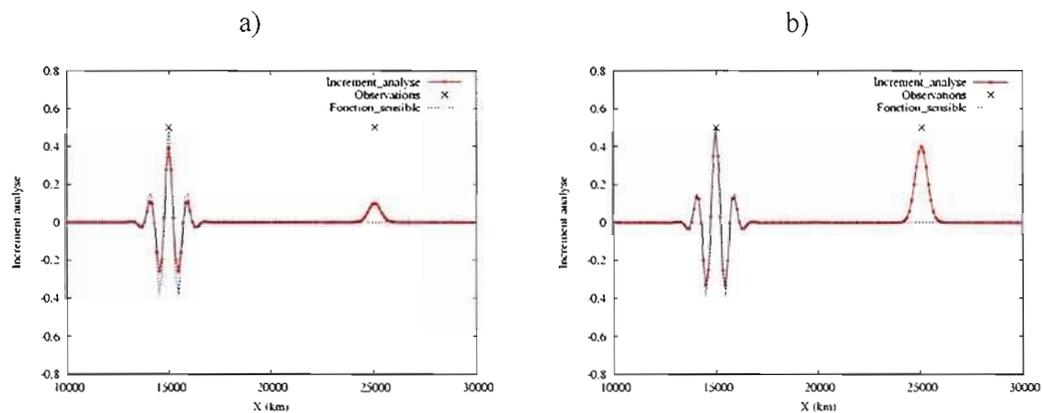


Figure 2.3 : Impact de la valeur de σ_0 sur l'analyse dans un 1D-Var modifié. En trait plein est représenté l'incrément d'analyse obtenu avec un 1D-Var adapté en posant $\sigma=10$ et en variant σ_0 : a) $\sigma_0 = 2$ respectif b) $\sigma_0 = 0.5$. En pointillés est indiquée la fonction de sensibilité et les observations sont marquées d'un x.

Une deuxième série d'expériences considère aussi deux observations placées dans la zone sensible : une observation située dans la zone à sensibilité maximale et la deuxième située dans un point où la valeur de la fonction de sensibilité est faible. Ce choix nous permet d'identifier le comportement de l'incrément d'analyse pour ces observations et de montrer l'influence de la valeur de la fonction de sensibilité au point d'observation sur la valeur et la structure de l'incrément d'analyse.

À la figure 2.4, nous avons représenté en trait plein les incréments d'analyse obtenus en employant le 1D-Var adapté, pour deux valeurs de σ_o (égal à 1 et 0.1 respectivement) et en variant le paramètre σ (égal à 2 et 10 respectivement). La fonction de sensibilité est représentée en pointillé et les observations ont été marquées d'un x. On remarque que la valeur de l'incrément d'analyse dépend de la valeur de la fonction de sensibilité au point d'observation. C'est-à-dire que la valeur de l'incrément est plus forte pour l'observation située dans la zone à sensibilité maximale que pour l'autre observation. Encore une fois, cet effet est contraint par les valeurs de σ_o . Pour illustrer l'influence de l'écart type d'erreur d'observation, dans les figures 2.4-c et 2.4-d, les incréments d'analyse sont représentés en trait plein pour une valeur $\sigma_o = 0.1$ et les mêmes valeurs de σ qu'auparavant : 2 et 10 respectivement.

L'impact d'une grande valeur du γ^2 (c'est-à-dire de σ^2 très grand) sur l'état analysé du 1D-Var adapté pour l'expérience à deux observations est illustré à la figure 2.5. Nous avons considéré $\sigma = 30$, $\sigma_o = 0.1$ et $\sigma_b = 1$. Dans les figures 2.5-a et 2.5-b nous avons représenté l'état analysé obtenu après respectivement 18 et 37 itérations de la minimisation. D'après l'équation 2.78, une augmentation de γ^2 amène un problème de conditionnement lorsque des observations sont présentes dans la région sensible. Ceci explique le problème de convergence observé dans cette expérience.

Une troisième série d'expériences considère plusieurs observations placées dans la zone sensible. Ce choix nous permet de comparer l'état analysé sans modification contre l'analyse adaptée, cette dernière pour différentes valeurs de σ . Dans la figure 2.6-a nous avons

représenté en trait plein l'analyse 1D-Var sans modification, en pointillés la fonction de sensibilité et les 7 observations assimilées sont marquées d'un x. Les états analysés adaptés sont tracés en considérant que $\sigma_o = \sigma_b = 1$ et pour différentes valeurs de σ : b) $\sigma=1$; c) $\sigma=2$; d) $\sigma=10$. Les figures 2.6-e et 2.6-f montrent l'impact de la valeur de σ_o sur l'analyse dans un 1D-Var adapté pour $\sigma=10$ ($\sigma_o = 2$; $\sigma_o = 0.5$). Au fur et à mesure qu'on augmente la valeur du σ , l'analyse adaptée reproduit de mieux en mieux la forme de la fonction de sensibilité et pour une valeur $\sigma = 10$, l'état analysé colle bien aux différentes observations.

Une dernière expérience est réalisée afin de valider numériquement le lien entre les deux formulations 1D-Var adapté présentées ci-dessus. Deux observations sont assimilées en employant les deux approches 1D-Var adapté. Les résultats sont présentés dans la figure 2.7 pour différentes valeurs des σ_1 et σ respectivement, conformes avec la relation (2.61). Quand la variance dans la direction de sensibilité augmente, les incréments d'analyse donnés par les deux méthodes sont identiques et aussi l'analyse est de plus en plus proche des observations. Cette expérience a permis de comparer les analyses adaptées données par les deux formulations du 1D-Var modifié.

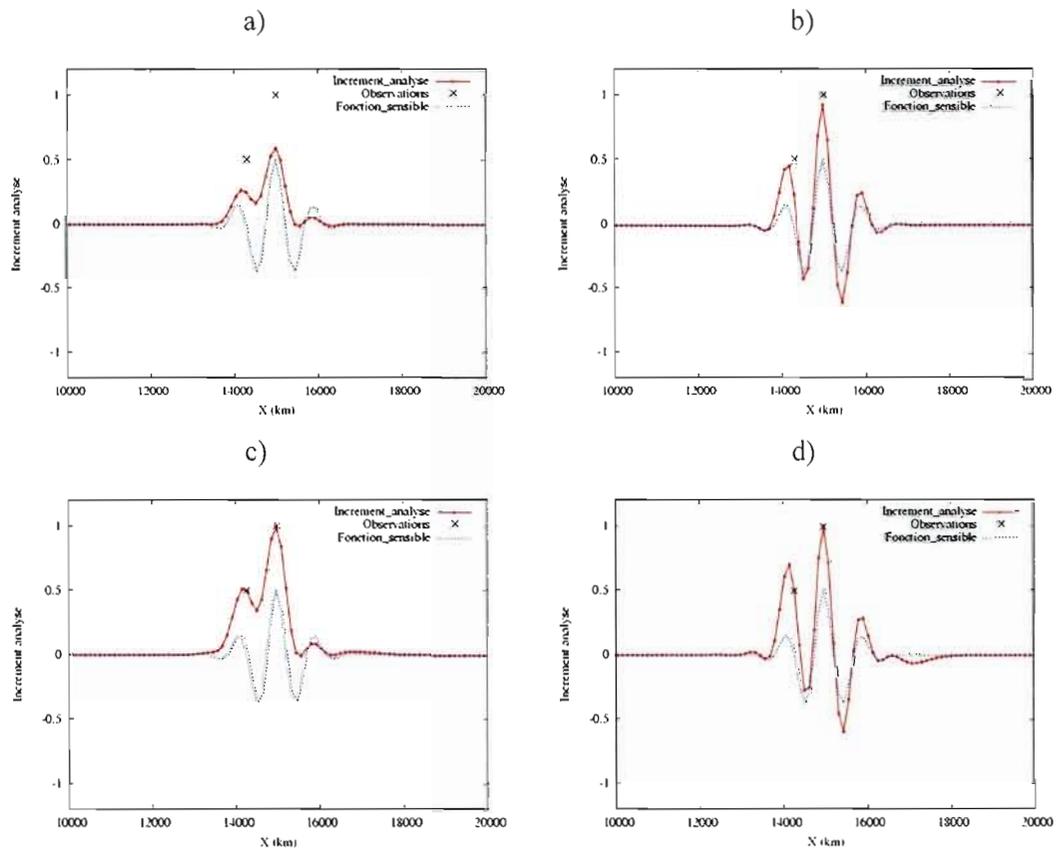


Figure 2.4 : Analyse avec un 1D-Var modifié : les incréments d'analyse obtenus en considérant différentes valeurs de σ_o et de σ . En a) $\sigma_o = 1$ et $\sigma = 2$, respectif en b) $\sigma_o = 1$ et $\sigma = 10$. Dans les parties c) et d) on a considéré $\sigma_o = 0.1$ et les mêmes valeurs pour le paramètre σ (égal à 2 respectif à 10). En pointillés est indiquée la fonction de sensibilité et les observations sont marquées d'un x.

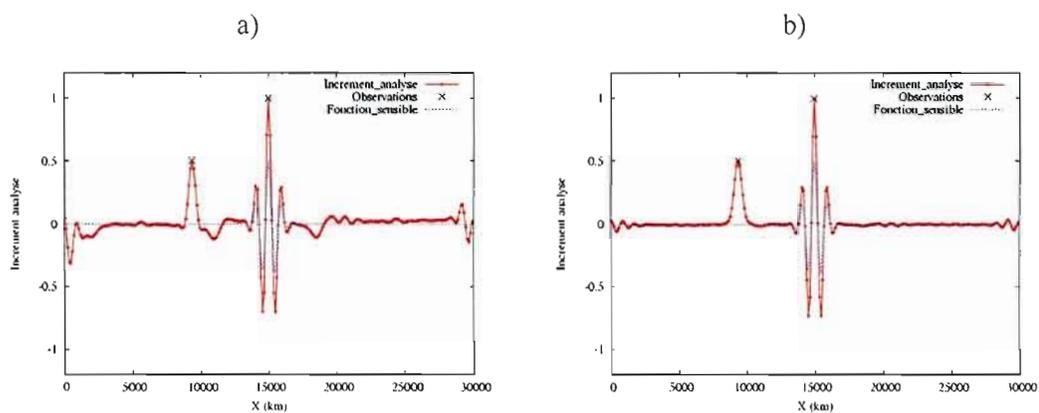


Figure 2.5 : Les changements de l'incrément de l'analyse induites par une valeur de $\sigma=30$ dans un 1D-Var modifié ($\sigma_o = 0.1$; $\sigma_b = 1$). Dans la partie a), l'état analysé obtenu après 18 itérations et en b) l'état analysé obtenu après 37 itérations. La fonction de sensibilité est en pointillés et les deux observations sont marquées d'un x.

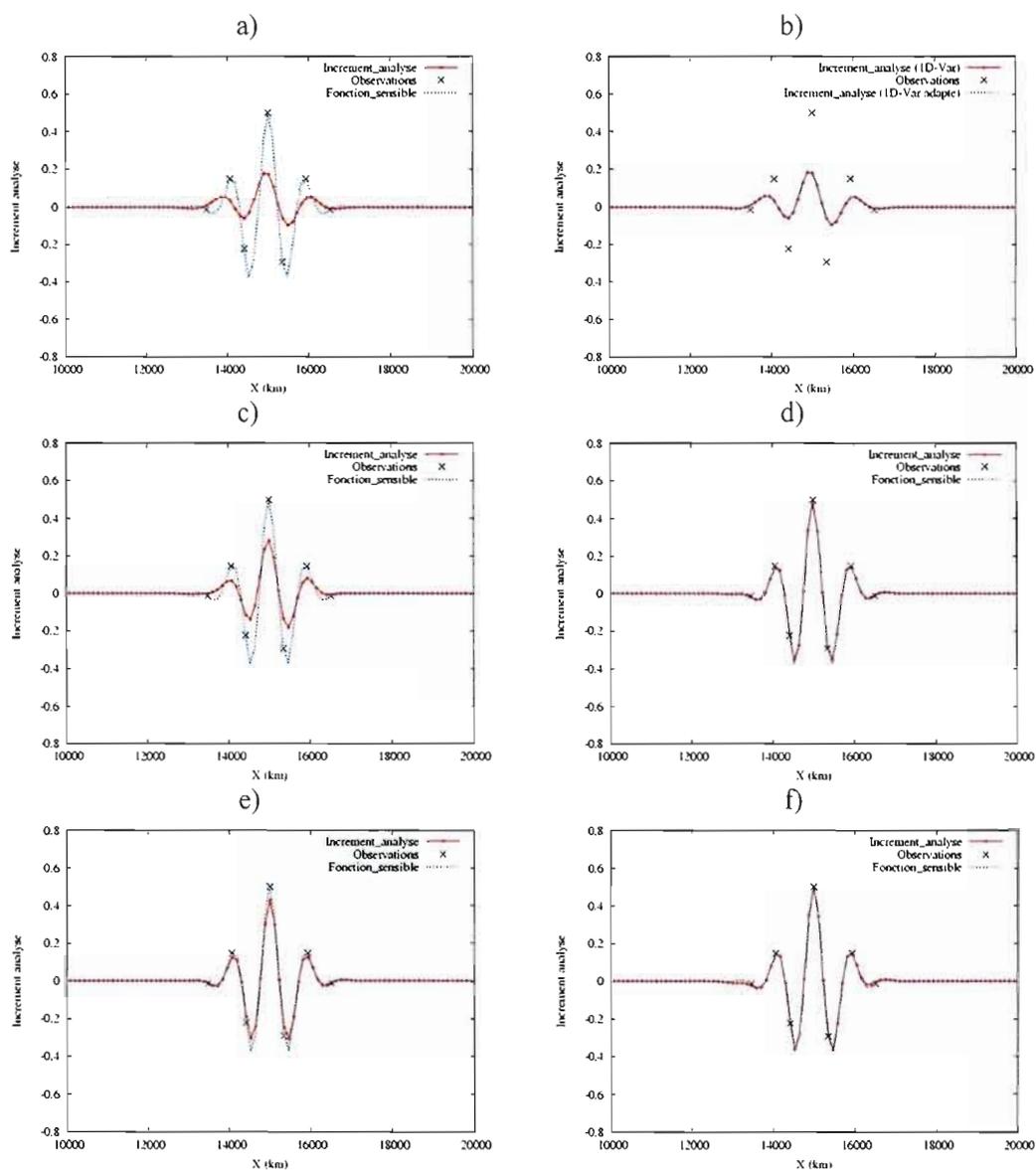


Figure 2.6 : Les états analysés obtenus en employant le 1D-Var et 1D-Var modifié. En a) l'analyse sans modification est représenté en trait plein, la fonction de sensibilité est en pointillés et les observations sont marquées d'un x. Dans la partie b) l'analyse sans modification en trait plein, en pointillés l'analyse obtenue avec un 1D-Var adapté pour $\sigma=1$ et les observations assimilées sont marquées d'un x. Les états analysés adaptés sont tracés en considérant que $\sigma_o = \sigma_b = 1$ et pour différentes valeurs de σ : c) $\sigma=2$; d) $\sigma=10$. Dans les figures e) et f) on a l'impact de la valeur de σ_o sur l'analyse dans un 1D-Var adapté : e) $\sigma_o = 2$; f) $\sigma_o = 0.5$ pour $\sigma=10$.

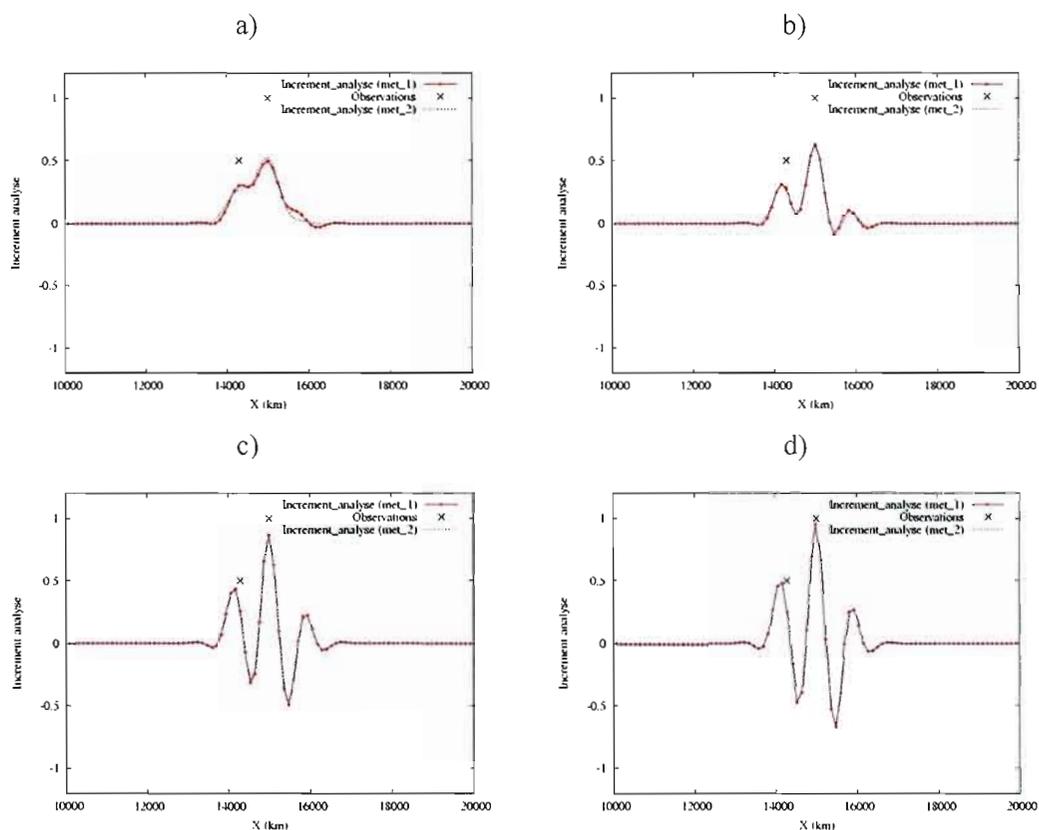


Figure 2.7 : Les états analysés obtenus en employant les deux méthodes définissant le 1D-Var adapté. En trait plein est représenté l'incrément d'analyse obtenu avec le 1D-Var adapté proposé par Hello et Bouttier, en pointillés est donné l'incrément d'analyse obtenu avec la deuxième approche du 1D-Var adapté et les deux observations assimilées sont marquées d'un x. Pour $\sigma_0 = \sigma_b = 1$, différentes valeurs de σ_1 et de σ sont considérées : a) $\sigma_1 = 1; \sigma = 1.27$; b) $\sigma_1 = 2; \sigma = 2.56$; c) $\sigma_1 = 5; \sigma = 6.39$; d) $\sigma_1 = 10; \sigma = 12.79$.

2.4.4 Discussions

Les expériences que nous avons effectuées dans une seule dimension ont permis d'étudier le comportement de l'incrément de l'analyse pour différentes observations en employant la deuxième formulation pour le 3D-Var adapté avec une fonction de sensibilité bien localisée dans l'espace. L'observation générale de ces résultats est que la modification de \mathbf{B} permet à l'incrément d'analyse de passer plus près des observations qui sont dans la zone sensible. En fait, toutes les simulations réalisées montrent le comportement différent du nouveau modèle de covariance dans la zone sensible. Pour toutes ces expériences, l'amplitude de l'incrément d'analyse demeure contrôlée par les observations et la structure de l'incrément d'analyse dépend de la valeur de la fonction de sensibilité aux points d'observations. En analysant plus en détail on a remarqué que l'ajustement à la valeur observée est contrôlé aussi par l'écart type de l'erreur d'observation.

En conclusion, les résultats de toutes les expériences que nous avons réalisées concordent avec ceux de Hello et Bouttier (2001). Il est donc possible d'introduire une fonction de sensibilité comme fonction de structure arbitraire dans le modèle de covariance d'erreur de prévision. En choisissant une fonction de structure localisée, ceci a pour effet de moduler l'incrément d'analyse uniquement dans la *région sensible* tout en conservant le modèle de covariance original dans les autres régions. Ces résultats sont tout à fait similaires à ceux obtenus par Hello et Bouttier (2001) avec leur formulation pour le 3D-Var adapté et la même définition de la fonction de sensibilité pour une application à un problème unidimensionnel.

CHAPITRE III

IMPACT DU 3D-VAR ADAPTÉ DANS UNE ÉTUDE DE CAS MÉTÉOROLOGIQUE

Dans ce chapitre, différentes expériences numériques sont présentées pour étudier le comportement du 3D-Var adapté. Tout d'abord, des expériences à une seule observation directe d'une des variables de l'état modèle permettent de visualiser le comportement du système variationnel dans des zones particulières. Dans ce cas-ci, en considérant une observation localisée dans la zone sensible ou loin de celle-ci, nous comparons les incréments d'analyse obtenus du 3D-Var standard avec ceux du 3D-Var adapté pour différentes valeurs de la variance d'erreur d'ébauche dans la direction de sensibilité. Ensuite, nous présentons des expériences d'assimilation avec le 3D-Var standard et adapté sur des données réelles, pour la date de 27 janvier 2003. Les analyses du 3D-Var adapté introduisent comme fonctions de structure les fonctions de sensibilité *a posteriori* (Laroche *et al.*, 2002) associées à une prévision manquée sur la côte est de l'Amérique du Nord. L'impact sur la qualité des prévisions résultantes à courte et moyenne échéance a été évalué autant pour le 3D-Var adapté que pour l'analyse de sensibilité.

3.1 Expériences à une seule observation

Comme on l'a vu au chapitre II, la représentation des covariances d'erreur de prévision (\mathbf{B}) est induite par une composition de changements de variables. L'intérêt de l'expérience à une observation est qu'elle nous permet de visualiser partiellement cette matrice \mathbf{B} . Dans cette section, nous détaillons cette idée pour le cas d'une analyse multivariée 3D.

3.1.1 Expérience à une observation et représentation des covariances d'erreur de prévision

En 3D, les coordonnées d'un point sont notées par $s = (\lambda, \phi, \eta)$ où λ est la longitude, ϕ la latitude et η la coordonnée verticale. Considérons l'assimilation d'une observation de température, T_{obs} située au point $s = s_{\text{obs}}$. Notons σ_o l'écart-type d'erreur d'observation, $\mathbf{H} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ le vecteur ligne définissant la projection de l'état modèle pour ne retenir que la température au point d'observation et $y' = T_{\text{obs}} - T_b(s_{\text{obs}})$, l'innovation. De la même manière, l'erreur de prévision pour la température en ce point a une variance σ_b^2 ce qui définit la variance d'erreur d'ébauche équivalente à l'observation (variance d'erreur de prévision effective) obtenue de (1.9):

$$\sigma_b^2(s_{\text{obs}}) = \mathbf{H}\mathbf{B}(s_1, s_2)\mathbf{H}^T \quad (3.1)$$

L'expression de l'incrément d'analyse du 3D-Var s'écrit à partir de (1.9):

$$\delta \mathbf{x}_a(s) = \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\sigma_b^2 + \sigma_o^2)^{-1} y' \quad (3.2)$$

En développant le produit $\mathbf{B}\mathbf{H}^T$ et en explicitant l'innovation y' , la relation (3.2) peut être réécrite de telle sorte que :

$$\delta \mathbf{x}_a(s) = \mathbf{B}(s, s_{\text{obs}}) \frac{\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_b}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} = \frac{T_{\text{obs}} - T_b(s_{\text{obs}})}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} \mathbf{b}(s) \quad (3.3)$$

où $\mathbf{b}(s)$ est une colonne de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche \mathbf{B} . Comme le vecteur d'état contient les variables $\mathbf{x} = (u \ v \ T \ q \ p_s)^T$, l'expression d'une colonne $\mathbf{b}(s)$, de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche s'écrit :

$$\mathbf{b}(s) = \begin{pmatrix} E[uT^T](s, s_{\text{obs}}) \\ E[vT^T](s, s_{\text{obs}}) \\ E[TT^T](s, s_{\text{obs}}) \\ E[qT^T](s, s_{\text{obs}}) \\ E[p_s T^T](s, s_{\text{obs}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{uT}(s, s_{\text{obs}}) \\ \mathbf{B}_{vT}(s, s_{\text{obs}}) \\ \mathbf{B}_{TT}(s, s_{\text{obs}}) \\ \mathbf{B}_{qT}(s, s_{\text{obs}}) \\ \mathbf{B}_{p_s T}(s, s_{\text{obs}}) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

La relation (3.3) montre que l'incrément d'analyse représente bien l'ensemble des covariances d'erreur de l'ébauche entre le point d'observation et tous les autres points de

grille. En multipliant la relation (3.2) à gauche par \mathbf{H} , l'équivalent modèle (3D-Var standard) de l'innovation à la position du point de grille de l'observation $\mathbf{H}\delta\mathbf{x}_a$ est :

$$\delta T_a(s_{\text{obs}}) = \mathbf{H}\delta\mathbf{x}_a = \frac{\sigma_b^2(s_{\text{obs}})}{\sigma_b^2(s_{\text{obs}}) + \sigma_o^2} \mathbf{y}' \quad (3.5)$$

Dans le cadre du 3D-Var adapté, la variance d'erreur de l'ébauche équivalente à l'observation, la variance d'erreur effective, et l'expression de l'incrément d'analyse pour l'observation assimilée sont obtenues à partir de (3.1) et (3.2) respectivement par :

$$\sigma_{b(\text{effective})}^2(s_{\text{obs}}) = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{B}}_x \mathbf{H}^T \quad (3.6)$$

$$\delta\mathbf{x}_a(s) = \tilde{\mathbf{B}}_x \mathbf{H}^T (\sigma_{b(\text{effective})}^2 + \sigma_o^2)^{-1} \mathbf{y}' \quad (3.7)$$

L'expression (2.42) montre que le modèle de covariance du 3D-Var adapté, est :

$$\tilde{\mathbf{B}}_x = \mathbf{B} + \frac{\gamma^2 \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_1^T}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2} \quad (3.8)$$

et les expressions (3.6) et (3.7) s'écrivent alors :

$$\sigma_{b(\text{effective})}^2(s_{\text{obs}}) = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{B}}_x \mathbf{H}^T = \sigma_b^2(s_{\text{obs}}) + \frac{(\sigma^2 - 1) \mathbf{y}_1^2(s_{\text{obs}})}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|^2} \quad (3.9)$$

$$\delta\mathbf{x}_a(s) = \tilde{\mathbf{B}}(s, s_{\text{obs}}) \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}_b}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} = \frac{T_{\text{obs}} - T_b(s_{\text{obs}})}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} \tilde{\mathbf{b}}(s) \quad (3.10)$$

où $\tilde{\mathbf{b}}(s)$ est similaire à (3.4) mais pour une colonne de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche $\tilde{\mathbf{B}}_x$. En multipliant la relation (3.7) à gauche par \mathbf{H} , l'équivalent modèle de l'innovation (3D-Var adapté) à la position du point de grille de l'observation s'écrit :

$$\delta T_a(s_{\text{obs}}) = \mathbf{H}\delta\mathbf{x}_a = \frac{\sigma_{b(\text{effective})}^2(s_{\text{obs}})}{\sigma_{b(\text{effective})}^2(s_{\text{obs}}) + \sigma_o^2} \mathbf{y}' \quad (3.11)$$

L'expression de l'incrément d'analyse pour une seule observation du 3D-Var, donnée par la relation (3.2), est un cas particulier de celle du 3D-Var adapté, donnée par la relation (3.7) pour une valeur unitaire $\sigma = 1$. Ces relations sont considérées dans les processus de l'assimilation variationnelle 3D-Var et 3D-Var adapté d'une seule donnée pour les calculs de l'incrément d'analyse.

3.1.2 Cadre expérimental

Des expériences à une seule donnée ont été réalisées pour vérifier et valider numériquement les modifications apportées au code 3D-Var adapté par rapport au 3D-Var standard. L'analyse du 3D-Var adapté utilise la fonction de sensibilité globale *a posteriori* obtenue avec l'algorithme d'analyse de sensibilité du CMC, dont le champ de température a été présenté sur la figure 1.3 du chapitre I. Les résultats de l'assimilation 3D-Var standard (Gauthier *et al.*, 1998) et du 3D-Var adapté sont présentés et analysés dans le cas de deux expériences décrites en détail plus bas.

Une première expérience considère une observation de température du 27 janvier 2003, à 900 hPa, au point des coordonnées 38°N et 295°E, dans la région des Maritimes du Canada avec une innovation $y' = 1^\circ\text{C}$. L'emplacement de l'observation est situé au maximum du champ de sensibilité de température au même niveau. Ce choix nous permet de confirmer que le 3D-Var adapté se comporte bien comme le 3D-Var lorsque $\sigma^2 = 1$ et qu'en augmentant la valeur du paramètre σ , la forme de l'incrément d'analyse correspond à celle de la fonction de sensibilité introduite comme fonction de structure dans le 3D-Var adapté. La figure 3.1 représente les incréments d'analyse de température et de vent près de 900 hPa, résultants de l'assimilation d'une seule donnée de température, qui sont en tout point identiques à ceux du 3D-Var standard (non illustrés). On remarque sur la figure 3.1-a, que la valeur de l'incrément d'analyse de température au point d'observation est de 0.61°C et décroît progressivement dans les zones avoisinantes. L'incrément de vent a aussi sa valeur maximale au point d'observation et il devient presque nul lorsqu'on s'éloigne de ce point. La figure 3.1-b montre une coupe verticale de l'incrément d'analyse de température. Il montre une structure homogène et isotrope à l'horizontale et une structure barotrope à la verticale. Lorsque $\sigma^2 = 1$, le 3D-Var adapté reproduit alors exactement le 3D-Var standard. Afin d'illustrer le plus possible la modification induite par la nouvelle formulation du 3D-Var adapté, différentes valeurs du paramètre σ ont été considérées ($\sigma = 100; 250$). La figure 3.2 montre que la structure de l'incrément d'analyse de la température n'est maintenant plus homogène et isotrope, qu'elle est inclinée à la verticale et adopte la forme de la direction de sensibilité (fig. 1.3). La valeur au point d'observation augmente en se rapprochant de la valeur observée

(0.66 °C pour $\sigma=100$ et 0.77 °C pour $\sigma=250$). En ce qui concerne l'incrément d'analyse de vent, il est plus grand et par conséquent l'observation de la température a aussi un impact sur le vent. Ces choix ont montrés que l'incrément d'analyse épouse la forme de la fonction de sensibilité en se rapprochant de la valeur observée pour des grandes valeurs de σ .

La deuxième expérience considère aussi une observation de température du 27 janvier 2003, à 900 hPa, mais prise au point de coordonnées 12°N et 205°E où la valeur de la fonction de sensibilité n'est pas très importante. Ce choix nous permet de vérifier que le 3D-Var adapté se comporte comme le 3D-Var dans une zone où la fonction de sensibilité s'annule et ce indépendamment de la valeur choisie pour le paramètre σ . La figure 3.3 montre les incréments de température et de vent près de 900 hPa en réponse à une seule observation de température située loin de la zone sensible et assimilée avec le 3D-Var adapté. On remarque sur la figure 3.3-a la structure homogène et isotrope de l'incrément d'analyse de température avec une valeur de 0.42 °C au point d'observation. Les résultats de l'assimilation de la même observation avec le 3D-Var standard (non montrés) indiquent que les deux formulations sont équivalentes lorsque $\sigma^2=1$. De plus, dans une zone de sensibilité presque nulle, les résultats du 3D-Var adapté ne sont pas affectés par les différentes valeurs de σ . L'impact d'une valeur du paramètre $\sigma=100$ sur les incréments de température et de vent près de 900 hPa, montre qu'ils sont contrôlés par le modèle de covariance habituel (stationnaire), tel que le montrent la figure 3.3-c. Cette expérience a donc montré que les formulations du 3D-Var adapté et standard conduisent à des résultats identiques là où la fonction de sensibilité est presque nulle et ce, peu importe la valeur choisie pour le paramètre σ .

Les expériences à une seule donnée d'une variable de l'état modèle ont permis de valider numériquement les modifications apportées au 3D-Var. Le faible coût de ces expériences permet l'étude du comportement de l'incrément d'analyse pour une observation située dans la zone sensible où loin de celle-ci. En se plaçant dans ce cadre simplifié, ceci nous a permis de jeter un regard partiel sur les fonctions de structure de l'assimilation et d'examiner la modification induite par la nouvelle formulation. Les résultats obtenus concordent avec ceux obtenus dans la section 2.4.3 dans le cadre plus simple d'une analyse variationnelle 1D.

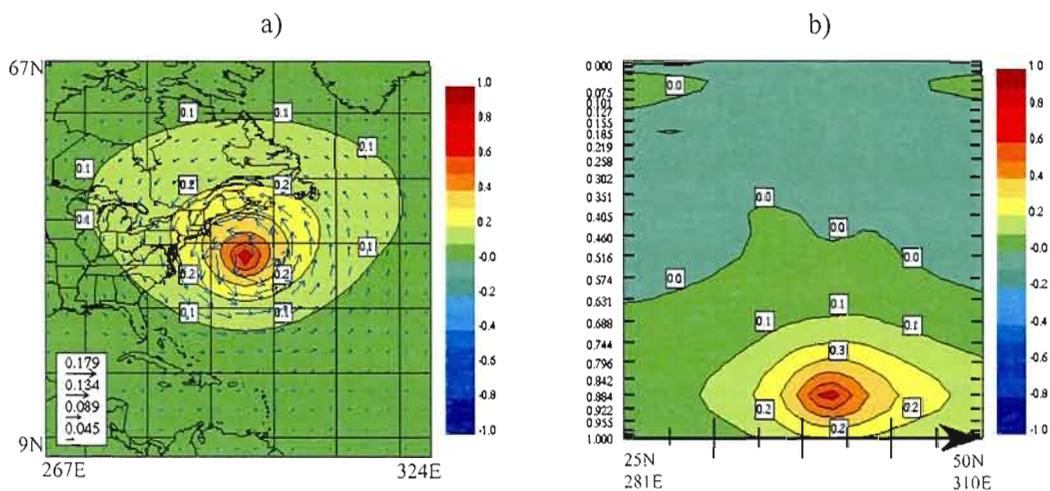


Figure 3.1 : Incrément d'analyse résultant de l'assimilation d'une seule donnée de température située dans la zone sensible au point (38°N, 295°E, 900 hPa) pour le 3D-Var adapté, lorsque $\sigma^2=1$; (a) champs de température (couleurs, intervalle 0.1°C) et de vent (vecteurs) près de 900 hPa, (b) coupe verticale de l'incrément d'analyse de la température.

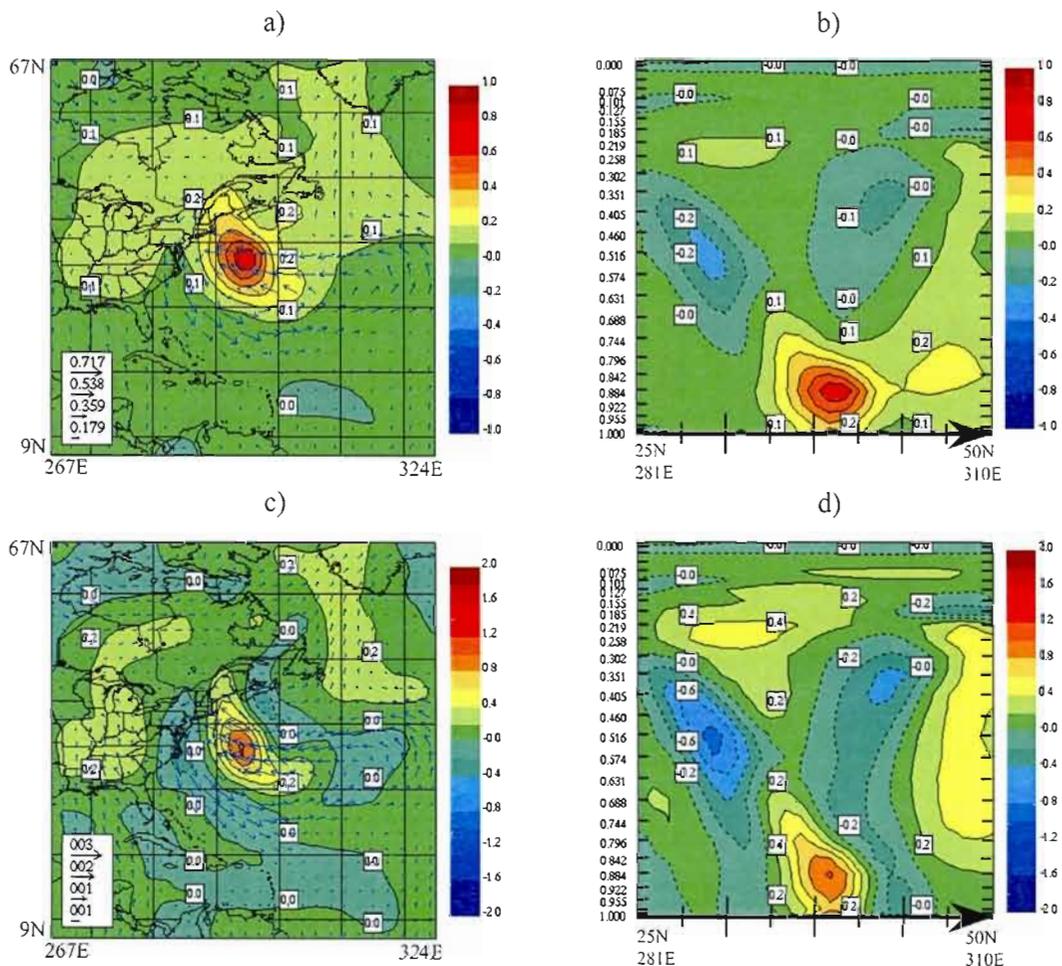


Figure 3.2 : Résultats de l'assimilation du 3D-Var adapté d'une seule donnée de température située dans la zone sensible au point (38°N , 295°E , 900 hPa). Incréments d'analyse de température (couleurs, intervalle 0.1°C) et de vent (vecteurs) près de 900 hPa pour : a) $\sigma = 100$; c) $\sigma = 250$; b), d) coupes verticales correspondantes des incréments d'analyse de température pour les deux valeurs de σ spécifiées : b) $\sigma = 100$ et d) $\sigma = 250$.

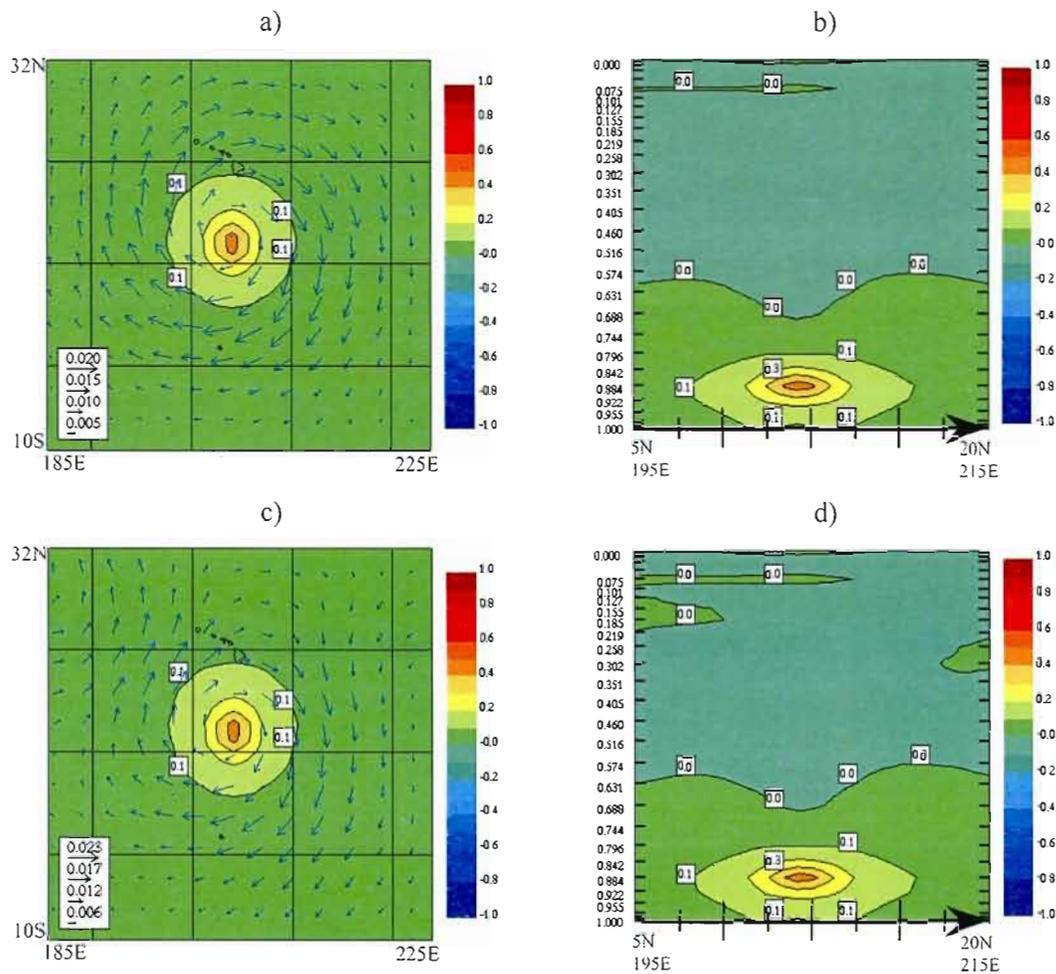


Figure 3.3: Incréments d'analyse résultant de l'assimilation d'une seule donnée de température située loin de la zone sensible au point (12°N, 205°E, 900 hPa) pour le 3D-Var adapté. Champs de température (couleurs, intervalle 0.1°C) et de vent (vecteurs) près de 900 hPa pour : a) $\sigma = 1$; c) $\sigma = 100$. Coupes verticales correspondantes de l'incrément d'analyse de température pour les valeurs du σ spécifiées : b) $\sigma = 1$ et d) $\sigma = 100$.

3.1.3 Variances effectives

Des expériences à une donnée permettent également le calcul des valeurs expérimentales de la variance d'erreur de prévision effective équivalente à l'observation ($\sigma_{b(\text{effective})}^2$) de même que de la variance de l'erreur d'analyse (σ_a^2). Dans cette section, on établit une correspondance entre les différentes valeurs du paramètre σ du 3D-Var adapté, défini par la relation (2.31), et les valeurs des variances d'erreurs de prévision et d'analyse correspondantes.

De la relation (3.11), la variance d'erreur de prévision effective peut s'exprimer comme étant :

$$\sigma_{b(\text{effective})}^2(s_{\text{obs}}) = \sigma_o^2 \left(\frac{\mathbf{H}\delta\mathbf{x}_a}{y' - \mathbf{H}\delta\mathbf{x}_a} \right) \quad (3.12)$$

D'autre part, l'expression de la variance d'erreur d'analyse au point d'observation est donnée par :

$$\sigma_a^2 = \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{H}^T \quad (3.13)$$

où \mathbf{A} est la matrice de covariance d'erreur d'analyse donnée par la relation (1.10). Alors, l'expression (3.13) peut donc être réécrite sous la forme :

$$\sigma_a^2 = \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T - \frac{(\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T)\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T}{\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T} = \frac{(\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T)\sigma_o^2}{\sigma_o^2 + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T} \quad (3.14)$$

En remplaçant (1.23) dans (3.14), la variance d'erreur d'analyse est exprimée en fonction de la variance d'erreur d'observations, de l'innovation et de l'équivalent modèle de l'incrément d'analyse ($\mathbf{H}\delta\mathbf{x}_a$) de telle sorte que :

$$\sigma_a^2 = \sigma_o^2 \left(\frac{\mathbf{H}\delta\mathbf{x}_a}{y'} \right) \quad (3.15)$$

Les résultats quantitatifs de plusieurs expériences à une observation avec le 3D-Var standard et adapté sont résumés dans le tableau 3.1. Les paramètres présentés sont :

l'équivalent modèle de l'innovation ($\mathbf{H}\delta\mathbf{x}_a$), la variance d'erreur effective ($\sigma_{b(\text{effective})}^2$) et la variance d'erreur d'analyse (σ_a^2). Dans le calcul de ces paramètres, la valeur de la variance d'erreur d'observations est $\sigma_o^2 = 1.11$ et la valeur de la variance d'erreur d'ébauche du 3D-Var standard calculée à partir de la relation (3.5) est $\sigma_b^2 = 2.05$. Ceci correspond à la contribution de la composante stationnaire à \mathbf{B} .

Les résultats présentés dans ce tableau établissent une correspondance entre les valeurs de σ employées et les variances d'erreur réelle. Même si le paramètre σ passe de 1 à 250, on constate que la variance d'erreur de prévision ne fait qu'approximativement doubler sa valeur. Ces valeurs sont aussi en concordance avec celles obtenues à partir de la relation analytique (3.9).

Tableau 3.1

Expériences d'assimilation 3D-Var et 3D-Var adapté d'une seule observation de température à 900 hPa localisée dans la zone sensible (38°N, 295°E) et loin de celle-ci (12°N, 205°E)

Type expérience	Variable	Type d'assimilation	$\mathbf{H}\delta\mathbf{x}_a(x_{\text{obs}})$ (°C)	$\sigma_{b(\text{effective})}^2$	σ_a^2	
Exp. à 1 obs. (38°N, 295°E)	TT 900 hPa	3D-Var standard	0.61	2.05	0.72	
		3D-Var adapté	$\sigma = 1$	0.61	2.05	0.72
			$\sigma = 100$	0.66	2.52	0.77
			$\sigma = 250$	0.77	5.02	0.91
Exp. à 1 obs. (12°N, 205°E)	TT 900 hPa	3D-Var standard	0.42	0.88	0.50	
		3D-Var adapté	$\sigma = 1$	0.42	0.88	0.50
			$\sigma = 100$	0.42	0.88	0.50

3.2 Assimilation de données réelles : cas du 27 janvier 2003

Dans cette section, les fonctions de sensibilité *a posteriori* sont introduites comme fonctions de structure dans le 3D-Var adapté pour un cas de prévision manquée sur la côte est du Canada, le 27 janvier 2003. Trois types de fonctions de sensibilité ont été considérés et l'impact sur les prévisions qui en résultent a été examiné de même que l'ajustement aux observations utilisées par l'analyse. Celles-ci incluent les données conventionnelles (e.g., radiosondages, avions, stations de surface) et satellitaires (radiances micro-ondes et infrarouges, vecteurs vent dérivés de l'imagerie satellitaire AMV).

3.2.1 Présentation du cas étudié

Une étude d'un cas réel a été faite pour comparer le 3D-Var adapté au 3D-Var standard. Les deux analyses utilisent l'ensemble complet des observations disponibles et un même champ d'essai provenant de la chaîne opérationnelle du CMC. Ensuite, des prévisions jusqu'à cinq jours sont réalisées en employant le modèle canadien de prévision Global Environmental Multi-échelle (GEM), (Côté *et al.*, 1998).

Pour le cas du 27 janvier 2003, la prévision à 24 heures réalisée à partir de l'analyse du 3D-Var du CMC à 12 UTC, en utilisant le modèle GEM, a été incorrecte sur la côte est du Canada. La figure 3.4 montre le champ de pression au niveau moyen de la mer le 28 janvier 2003 à 12 UTC, issu d'une part de l'analyse vérificatrice et d'autre part de la prévision à 24 heures du GEM initialisé à 12 UTC, le 27 janvier 2003. Le système dépressionnaire y est clairement visible, avec un centre de basse pression qui a été prévu à environ 600 km trop au nord.

Les fonctions de sensibilité *a posteriori* associées à cette prévision manquée sur la côte est du Canada ont été utilisées dans la formulation de la matrice de covariance d'erreur de prévision \mathbf{B} pour introduire une structure dynamique que l'on sait être en mesure de réduire l'erreur de prévision à 24 heures. Différentes valeurs de la variance dans la direction de sensibilité sont considérées pour accentuer cette composante dans l'incrément d'analyse dont l'amplitude sera définie ici à même le processus d'analyse en s'ajustant aux observations

disponibles. Dans ce qui suit, trois fonctions de sensibilité valides le 27 janvier 2003 à 12 UTC sont décrites et utilisées. L'impact sur la qualité de l'analyse et des prévisions résultantes sera ensuite étudié en comparant les résultats du 3D-Var adapté à ceux obtenus directement de l'analyse de sensibilité. Dans cette étude, tous les résultats (fonctions de sensibilité, analyses et prévisions) sont produits sur les niveaux η de la grille du modèle GEM pour ensuite, à l'étape du post-traitement être interpolés sur des niveaux de pression à chaque 50 hPa (entre 1000 hPa et 100 hPa) sur une grille polaire stéréographique avec une résolution de 100 km à 60°N qui couvre l'hémisphère Nord.

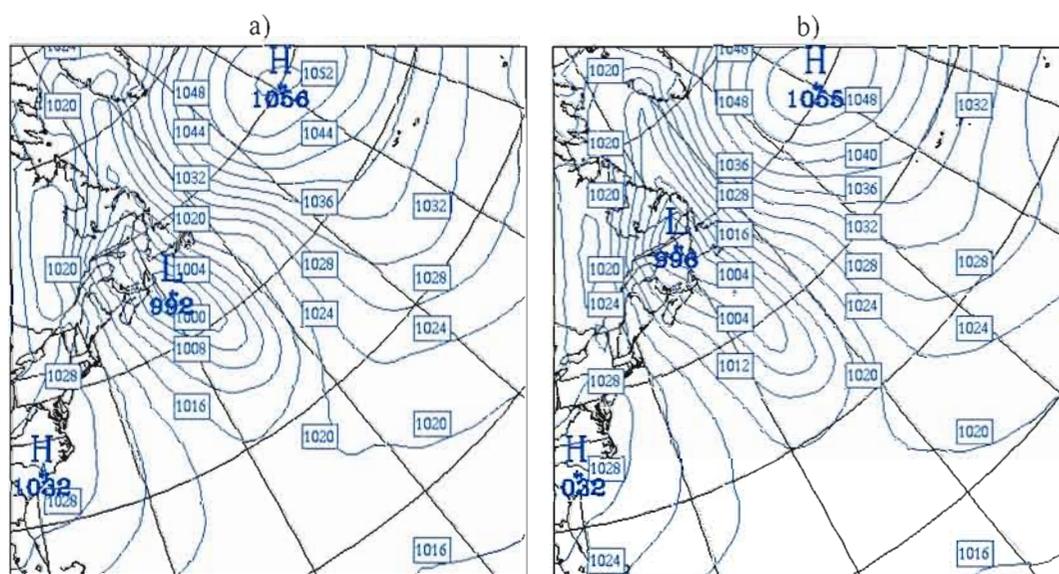


Figure 3.4 : Champ de pression au niveau moyen de la mer (intervalle de contour 4 hPa) le 28 janvier 2003 à 12 UTC issu de : a) l'analyse de vérification ; b) de la prévision à 24-h du modèle global canadien.

3.2.2 Fonctions de sensibilité *a posteriori* : trois définitions

Différentes définitions des fonctions de sensibilité peuvent être obtenues en changeant la norme utilisée ou encore la fenêtre temporelle considérée. Généralement, au CMC, le système d'analyse de sensibilité utilise la norme de l'énergie totale, définie par la relation (1.38), et une fenêtre temporelle de 24 heures afin d'évaluer les erreurs dans leurs analyses expliquant l'erreur de prévision à 24 heures. Cette norme est également utilisée au ECMWF (Klinker *et al.*, 1998) ainsi que dans plusieurs études sur les vecteurs singuliers (Montani et Thorpe, 2002; Palmer *et al.*, 1998). Dans cette section, nous décrivons les fonctions de sensibilité *a posteriori*, calculées avec le système d'analyse de sensibilité du CMC, valides le 27 janvier 2003 à 12 UTC. Les sensibilités *a posteriori* permettent de réduire l'erreur de prévision des différentes variables météorologiques sur un domaine géographique spécifié. Pour le cas présent, elles seront déterminées de manière à réduire l'erreur de prévision sur tout le globe ou uniquement sur une région localisée sur le système dépressionnaire qui nous intéresse.

3.2.2.1 Fonction de sensibilité globale

L'erreur de prévision est définie comme étant la différence entre la prévision opérationnelle à 24 heures et l'analyse vérificatrice. La fonction diagnostique est définie comme étant l'énergie de cette erreur de prévision à 24 heures intégrée sur tout le globe et à la verticale dans la direction η de 0 à 1. L'analyse de sensibilité permet d'obtenir une fonction de sensibilité définie sur l'ensemble du globe. Bien que les erreurs d'analyse aient été calculées globalement, seulement les erreurs d'analyse sur l'hémisphère Nord seront représentées sur les figures. Ainsi, la figure 3.5 montre la correction au champ de température de la fonction de sensibilité globale à 700 hPa. L'amplitude de cette correction est comprise dans l'intervalle $[-2.^{\circ}\text{C}, +2.^{\circ}\text{C}]$. On note aussi que les valeurs maximales sont atteintes dans les niveaux bas et moyens et que la structure verticale des corrections de température de la fonction de sensibilité globale est barocline (typique pour les perturbations qui peuvent croître rapidement). La fonction de sensibilité globale est représentée dans la figure 1.3.

D'autre part, si la fonction de sensibilité globale est introduite comme fonction de structure dans la matrice de covariance d'erreur de prévision du 3D-Var adapté, tel qu'établi

par la relation (2.42), on obtient l'analyse 3D-Var adapté. Différentes valeurs du paramètre σ , défini par la relation (2.31) sont considérés. L'incrément d'analyse du 3D-Var adapté commence à avoir des valeurs différentes et aussi une structure différente de celui du 3D-Var standard pour des grandes valeurs du paramètre σ . La figure 3.6-a présente la différence des incréments d'analyse de température à 700 hPa (3D-Var adapté moins 3D-Var standard) sur l'hémisphère Nord, obtenue pour $\sigma = 100$. En se référant à la Table 3.1, ceci correspond à une augmentation de la variance d'erreur de prévision effective d'environ 22 % pour la température. Dans ce cas, l'analyse adaptative apporte de corrections à l'incrément d'analyse de température presque partout, ayant les valeurs comprises dans l'intervalle $[-0.2^{\circ}\text{C}, +0.2^{\circ}\text{C}]$. La figure 3.6-b donne un plan rapproché de la différence des incréments d'analyse de température à 700 hPa le long de la côte est américaine caractérisée par d'importantes valeurs de la fonction de sensibilité. La coupe verticale (fig. 3.6-c) de la différence des incréments d'analyse de température le long de la flèche apparaissant sur la figure 3.6-b, indique une structure verticale barocline, semblable à la structure de la fonction de sensibilité globale. Toutefois, en comparant la figure 3.6-c à la figure 1.3-c, on remarque que l'amplitude de l'incrément est nettement plus faible par rapport à celle de la fonction de sensibilité globale introduite dans le 3D-Var adapté.

L'un des critères de qualité d'une analyse est sa concordance avec les observations et on peut se demander comment l'analyse de sensibilité, l'analyse du 3D-Var adapté et l'analyse opérationnelle se comparent aux observations. Dans le 3D-Var, le terme d'écart aux observations (J_o) est donné par la relation (1.11), réécrite ici :

$$J_o(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x})) \quad (3.16)$$

et constitue une mesure de l'écart de l'analyse aux observations (normalisée par les covariances d'erreurs d'observations). Une valeur de $J_o(\mathbf{x})$ a été calculée pour chaque analyse (opérationnelle $J_o(\mathbf{x}^{\text{standard}})$, analyse de sensibilité $J_o(\mathbf{x}^s)$, 3D-Var adapté $J_o(\mathbf{x}^{\text{adapté}})$) en employant toutes les observations (TOTAL) disponibles entre 09 UTC et 15 UTC, le 27 janvier 2003. Généralement, les observations du réseau météorologique assimilées sont : les radiosondages (RAOB), les mesures par avion (AIREP), les données des stations de surface et les bouées (SURFC) ainsi que, les radiances (ATOVS) et les vents

déduits des satellites géostationnaires (AMV). La figure 3.7 présente les résultats obtenus calculant les différences relatives dans J_o pour chaque famille des observations aussi bien que pour l'ensemble de toutes les données d'observations sous la forme :

$$\Delta J_o = \frac{J_o(\mathbf{x}^{s,(\text{adapté})}) - J_o(\mathbf{x}^{\text{standard}})}{J_o(\mathbf{x}^{\text{standard}})} \quad (3.17)$$

Une valeur de ΔJ_o positive (négative) indique que la nouvelle analyse s'éloigne (se rapproche) des observations par rapport à l'analyse opérationnelle. La figure 3.7-a montre que l'analyse de sensibilité s'écarte ($J_o(\mathbf{x}^{\text{sensibilité}}) > J_o(\mathbf{x}^{\text{standard}})$) plus des observations que l'analyse opérationnelle pour chaque type d'observations. Le comportement des analyses de sensibilité a été étudié sous cet angle pour différentes situations atmosphériques, par Isaksen *et al.*, (2004) sur une période de deux mois. Pendant cette période, un grand nombre d'observations étaient disponibles. Leur étude complète des résultats montre que les prévisions issues des analyses de sensibilité s'éloignent davantage des observations pendant les 12 premières heures, alors qu'après, elles se rapprochent des valeurs observées par rapport aux prévisions issues des analyses opérationnelles. Comme les corrections aux conditions initiales minimisent l'erreur de prévision à 48 heures, ceci correspond à un quart de la période de minimisation. La figure 3.7-b montre que l'analyse du 3D-Var adapté est plus proche des observations que l'analyse opérationnelle ($J_o(\mathbf{x}^{\text{adapté}}) < J_o(\mathbf{x}^{\text{standard}})$) pour chaque famille d'observations ainsi que pour l'ensemble des observations assimilées. Ce résultat est en accord avec ceux de Hello et Bouttier, (2001) pour un sous-ensemble des cas de la campagne FASTEX. Comme le 3D-Var adapté *augmente* la variance d'erreur de prévision spécifiée dans la matrice de covariance d'erreur de prévision \mathbf{B} , il est donc naturel de constater que ceci se traduit par un meilleur ajustement aux observations.

Les résultats obtenus montrent que le 3D-Var adapté basé sur le nouveau modèle de covariance d'erreurs de prévision qui inclut la sensibilité globale comme fonction de structure s'ajuste mieux aux observations que le 3D-Var standard, alors que l'analyse de sensibilité dégrade l'ajustement aux observations par rapport à l'analyse 3D-Var standard.

Dans ce qui suit, nous présentons et évaluons l'impact des analyses de sensibilité et du 3D-Var adapté sur les prévisions à courte et moyenne échéance. Comme référence, nous

montrons également les prévisions calculées à partir de l'analyse opérationnelle. Ces résultats montrent l'énergie de l'erreur de prévision intégrée à la verticale tel que proposé par Laroche *et al.*, (2002). Celle-ci est calculée entre $p_t = 100$ hPa et $p_b = 950$ hPa, de telle sorte que :

$$E = \frac{l}{2(p_b - p_t)} \int_{p_t}^{p_b} \left[u'^2 + v'^2 + \frac{c_p}{T_r} T'^2 \right] dp \quad (3.18)$$

où u' , v' et T' représentent l'écart entre la prévision et l'analyse de vérification. Dans ce calcul, en comparant à (1.38), la contribution de la pression de surface à l'erreur de prévision n'est pas considérée.

Les figures 3.8 et 3.9 montrent les distributions de l'énergie de l'erreur de prévision intégrée à la verticale au-dessus des Maritimes canadiennes à une échéance de 24 heures et 48 heures. La distribution de l'énergie de l'erreur de prévision intégrée à la verticale est montrée individuellement pour la prévision basée sur l'analyse du 3D-Var standard (fig.3.8) et adapté (fig. 3.9) à une échéance de 24-h (fig. 3.8-a et 3.9-a) et 48-h (fig. 3.8-b et 3.9-b). Les figures 3.8-c et 3.8-d représentent la différence de ces patrons d'erreur aux échéances de 24-h et 48-h respectivement. Cette différence présente de valeurs négatives de l'énergie de l'erreur de prévision dans la région d'intérêt indiquant ainsi que l'erreur de prévision à 24 heures du 3D-Var adapté est moindre que celle du 3D-Var standard, passant de 119 J/kg pour la prévision faite à partir de l'analyse opérationnelle à 98 J/kg dans le cas avec l'analyse adapté, soit une réduction de 18 %. Le même champ, 24 heures plus tard, dévoile encore la diminution de l'erreur de prévision passant de 121 J/kg pour la prévision faite à partir de l'analyse opérationnelle à 93 J/kg dans le cas avec l'analyse du 3D-Var adapté, soit une réduction de 23 %.

La figure 3.10 est similaire à 3.9 mais pour l'analyse de sensibilité. Les parties 3.10-a et 3.10-b présentent ce champ à 24 et à 48 heures d'échéances et respectivement les parties 3.10-c et 3.10-d montrent la différence des patrons de l'énergie de l'erreur de prévision. Quand une prévision à 24 heures est effectuée à partir de l'analyse de sensibilité, l'erreur de prévision à 24 heures sur les Maritimes canadiennes est réduite par rapport à la prévision opérationnelle. La diminution de l'erreur de prévision est maintenue également à une échéance de 48 heures.

Dans une perspective plus globale, nous avons calculé la moyenne de l'énergie de l'erreur de prévision au-dessus du domaine horizontal A correspondant à l'hémisphère Nord extratropical (latitudes supérieures à 25 degrés nord) de telle sorte que :

$$E_A = \frac{1}{A} \int_A E dA \quad (3.19)$$

où E est défini par la relation (3.18). Nous présentons son évolution en fonction de l'échéance de prévision. La figure 3.11 montre l'énergie de l'erreur de prévision E_A en fonction de l'échéance jusqu'à deux jours (fig. 3.11-a) et jusqu'à cinq jours (fig. 3.11-b) pour les prévisions basées sur les analyses du 3D-Var standard et 3D-Var adapté ainsi que pour l'analyse de sensibilité valides le 27 janvier 2003 à 12 UTC. On remarque une forte croissance temporelle de l'erreur de prévision pour la prévision opérationnelle. À 24 heures, l'énergie de l'erreur de prévision intégrée sur l'hémisphère Nord extratropical est réduite de 1 % dans la prévision adaptée et de 40 % dans la prévision de sensibilité. L'amélioration des prévisions constatée à 24 heures est aussi maintenue jusqu'à cinq jours d'échéance pendant que les erreurs de prévision continuent à se développer en régime non linéaire.

Ces résultats montrent que l'analyse de sensibilité réussit à réduire considérablement l'énergie de l'erreur de prévision jusqu'à des échéances de cinq jours. D'autre part, le 3D-Var adapté est en mesure d'introduire une composante sensible dans l'incrément d'analyse dont la structure est définie par la même fonction de sensibilité dont l'amplitude est établie par un ajustement aux observations. Toutefois, l'amélioration des prévisions réalisées à partir de l'analyse adaptative est moins importante que celles issues des prévisions basées sur l'analyse de sensibilité qui considère la même fonction de sensibilité globale et qui par construction a été définie pour minimiser l'erreur de prévision à 24 heures sur tout le globe. Par contre, l'analyse de sensibilité s'écarte considérablement des observations au temps initial alors que l'analyse du 3D-Var adapté s'en rapproche. L'incrément d'analyse du 3D-Var adapté obtenu en réponse à une observation est conforme à la fonction de sensibilité et induit donc des corrections sur tout le globe. Pour obtenir des incréments plus localisés, on étudie maintenant d'autres définitions de la fonction de sensibilité pour mieux localiser la réponse de l'analyse.

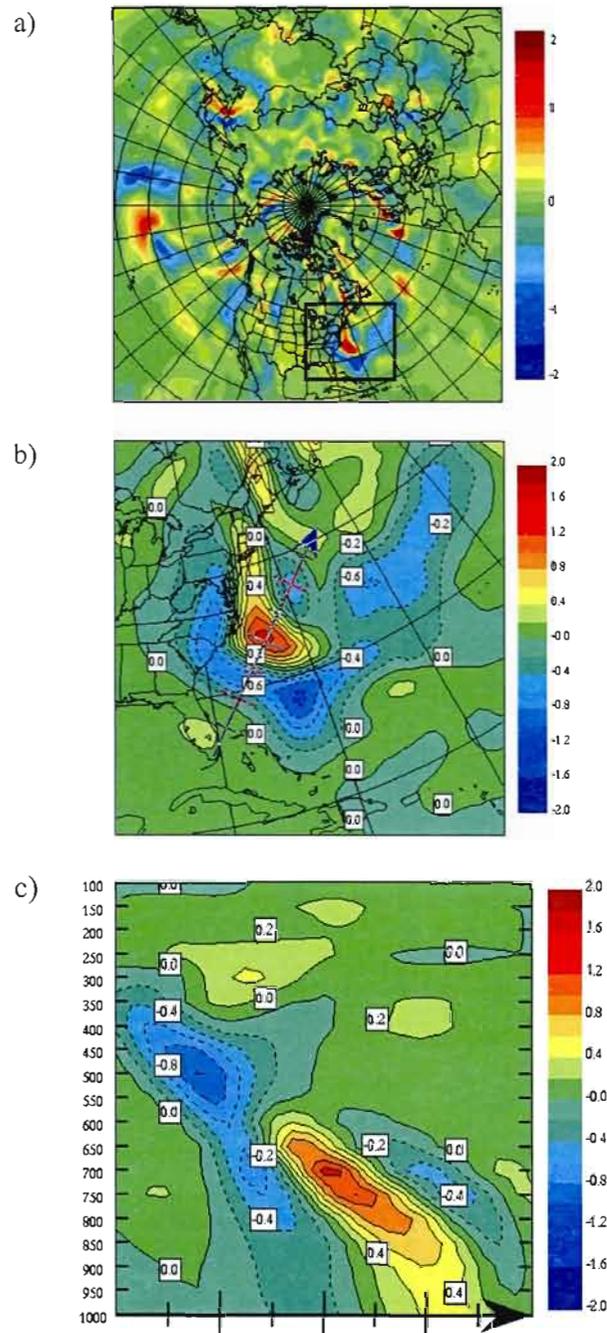


Figure 3.5 : Fonction de sensibilité globale valide le 27 janvier 2003 à 12 UTC : a) corrections initiales de température à 700 hPa sur l'hémisphère Nord ; b) plan rapproché de ces mêmes corrections initiales (intervalle de contour 0.2°C) ; c) coupe verticale le long de la flèche en b).

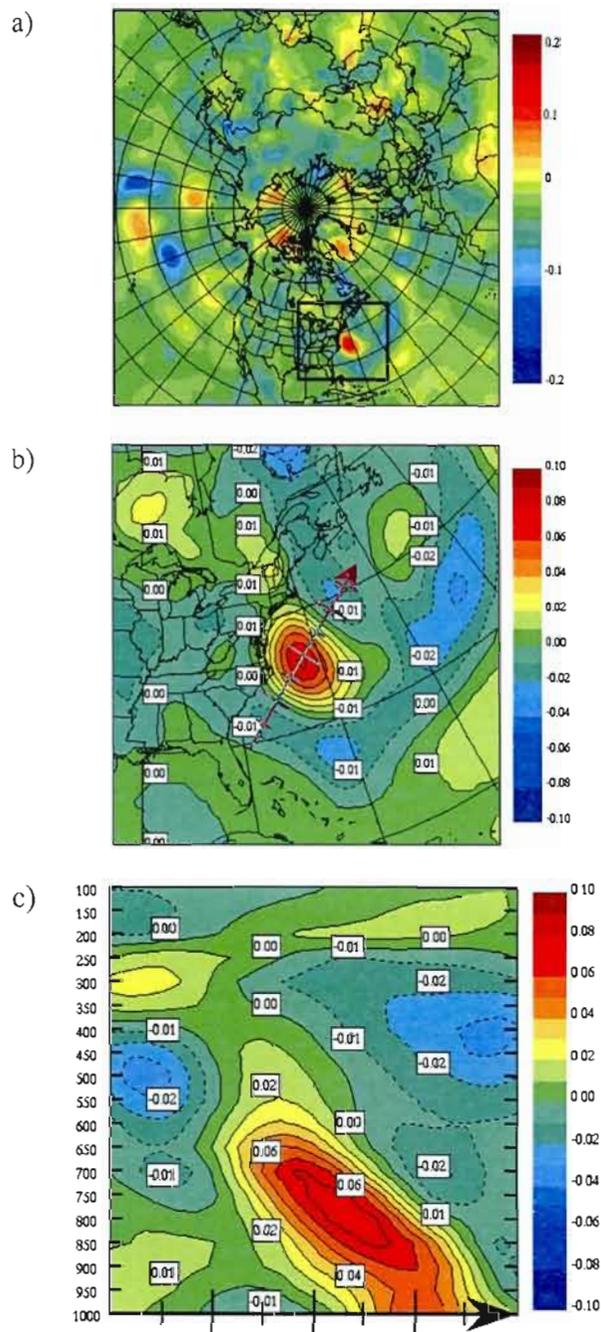


Figure 3.6 : Impact de l'utilisation d'une fonction de sensibilité globale sur l'analyse 3D-Var : a) différence entre l'incrément de température à 700 hPa du 3D-Var adapté ($\sigma = 100$) et l'incrément de température du 3D-Var standard à 700 hPa, valide le 27 janvier 2003 à 12 UTC ; b) plan rapproché de la différence en a); c) coupe verticale dans la différence des incréments d'analyse de température (3D-Var adapté moins 3D-Var standard) le long de la flèche en b).

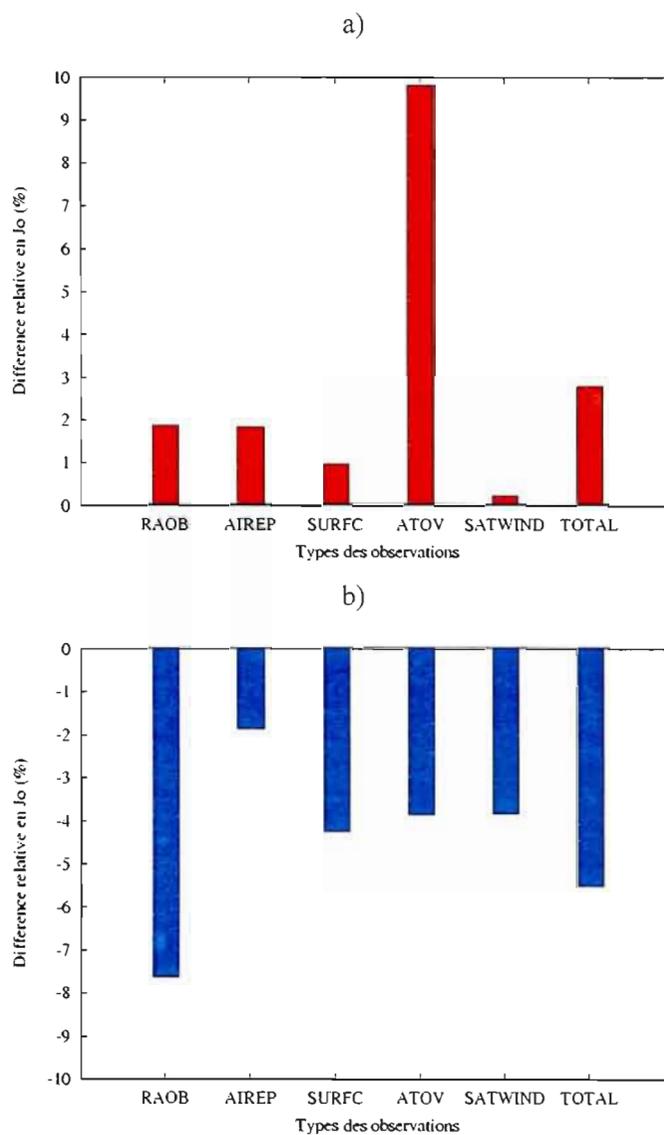
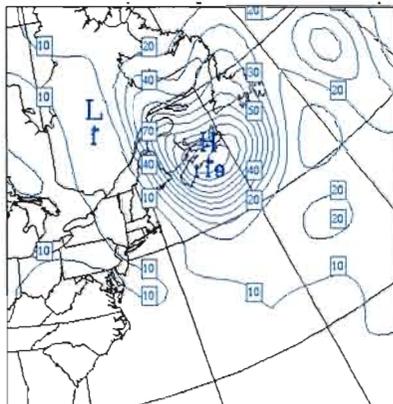


Figure 3.7 : Différence relative entre l'écart aux observations (J_0): a) de l'analyse de sensibilité et b) de l'analyse 3D-Var adapté par rapport à l'analyse opérationnelle à 12 UTC le 27 janvier 2003 pour différents types des données d'observation. Une valeur négative signifie que l'analyse est plus proche des observations tandis qu'une valeur positive indique que l'analyse est plus loin des observations que l'analyse opérationnelle. L'analyse du 3D-Var adapté utilise une fonction de sensibilité globale et $\sigma = 100$.

Erreur de prévision

a) (24-h)



b) (48-h)

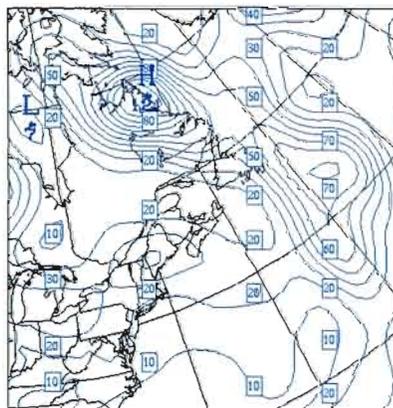


Figure 3.8 : Distributions de l'erreur de prévision à a) 24-h, b) 48-h pour une intégration basée sur l'analyse du 3D-Var opérationnel. Cette figure montre une valeur intégrée à la verticale au-dessus des Maritimes canadiennes (intervalle de contour 10 J/Kg). Ces valeurs correspondent à l'intégration du modèle GEM à partir de l'analyse opérationnelle valide le 27 janvier 2003 à 12 UTC.

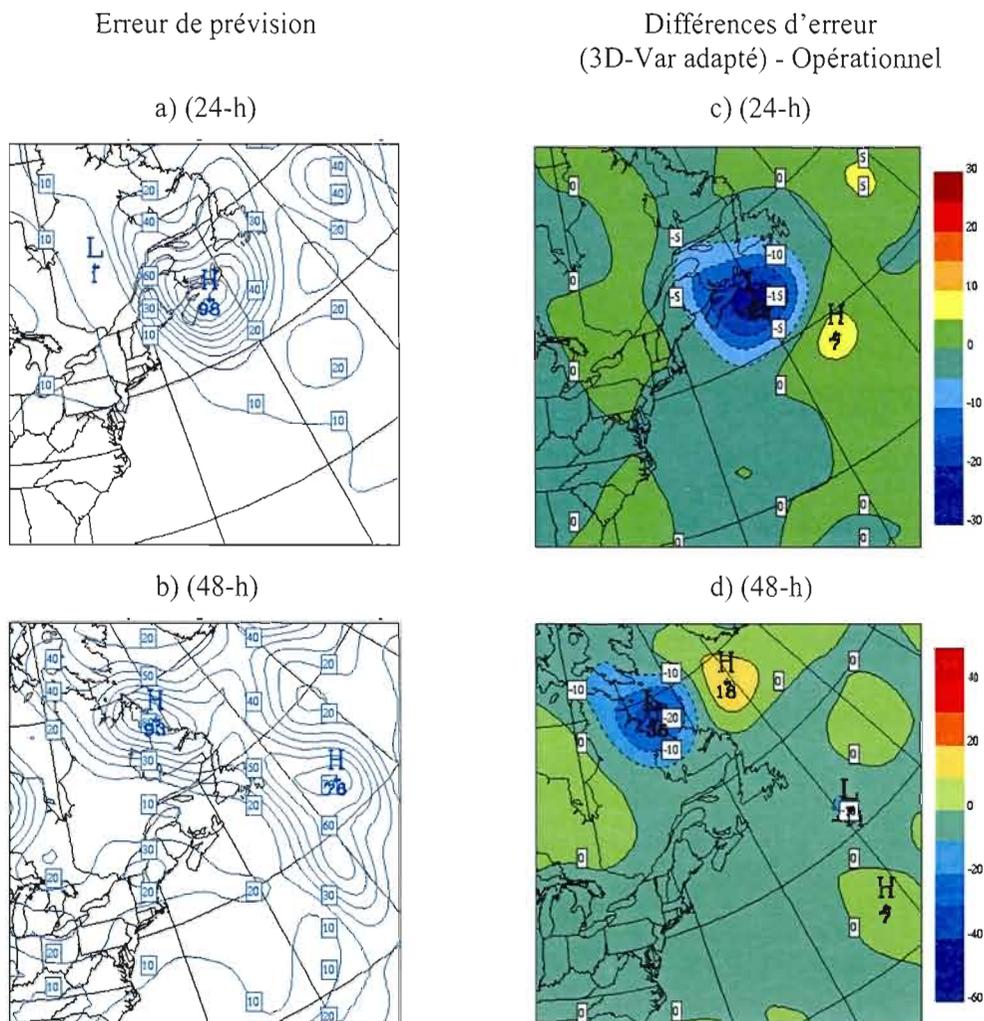


Figure 3.9 : Erreur de prévision pour les prévisions issues de l'analyse du 3D-Var adapté intégrée à la verticale au-dessus des Maritimes canadiennes à : a) 24-h, b) 48-h (intervalle de contour 10 J/Kg). Différence des patrons de l'erreur de prévision (3D-Var adapté - Opérationnel) pour la prévision issue de l'analyse du 3D-Var adapté et l'analyse opérationnelle à une échéance de c) 24-h, d) 48-h. L'analyse 3D-Var adapté utilise une valeur de $\sigma = 100$ et une fonction de sensibilité globale.

Erreur de prévision

Différences d'erreur
(Analyse de sensibilité) - Opérationnel

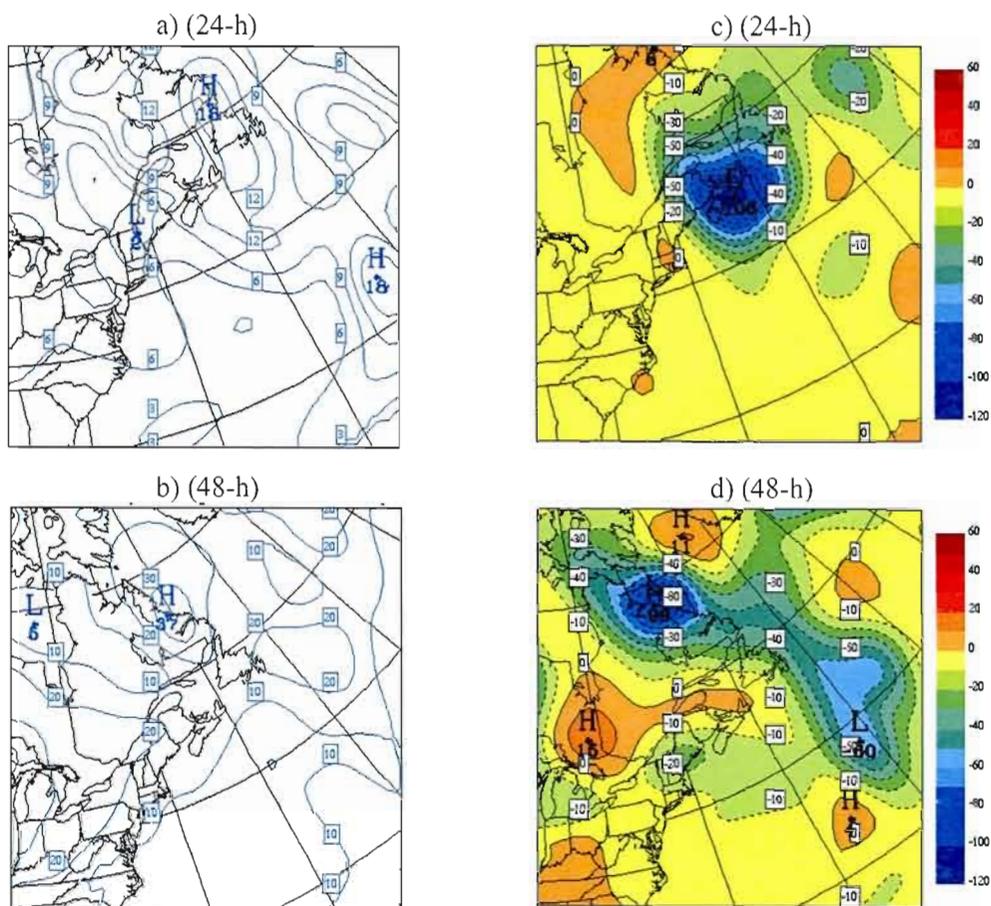


Figure 3.10 : Comme en 3.9 mais pour l'analyse de sensibilité.

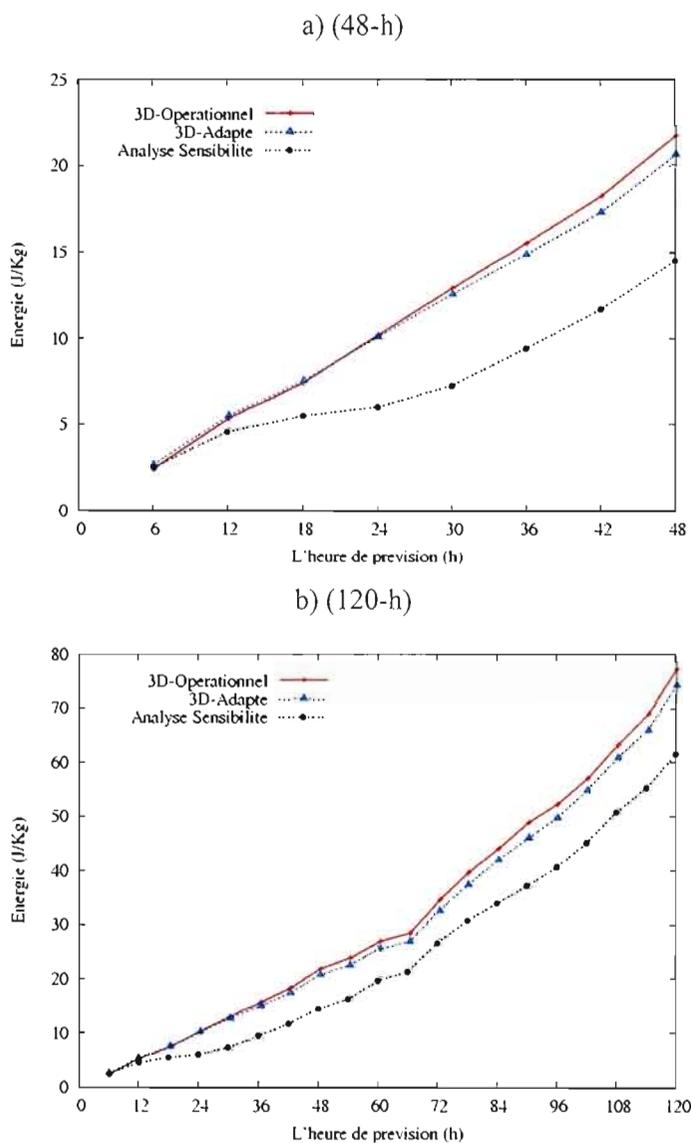


Figure 3.11 : Énergie (totale) des erreurs de prévision (prévision moins analyse de référence pour l'hémisphère Nord extratropical) pour l'intégration du modèle GEM à partir de l'analyse opérationnelle (en rouge, ligne pleine), de l'analyse adaptative (en bleu, ▲) et de l'analyse de sensibilité (en noir, ●) valides le 27 janvier 2003 à 12 UTC : a) les prévisions jusqu'à deux jours d'échéance ; b) les prévisions jusqu'à cinq jours d'échéance. L'analyse 3D-Var adapté ($\sigma = 100$) et l'analyse de sensibilité considèrent la fonction de sensibilité globale.

3.2.2.2 Fonction de sensibilité locale

Une fonction de sensibilité plus localisée est calculée sur un domaine de 30° nord à 60° nord et de 45° ouest à 75° ouest correspondant au système météorologique du cas étudié. Celui-ci est délimité par les lignes pleines sur la figure 3.12. En localisant la mesure de l'erreur de prévision sur cette région, la *région cible*, on définit en accord avec la relation (1.38) la fonction diagnostique comme l'énergie totale de l'erreur de prévision à 24 heures intégrée à la verticale dans la direction η de 0 à 1 et uniquement sur le domaine délimité sur la figure 3.12. En appliquant l'algorithme du CMC, l'analyse de sensibilité est obtenue après trois itérations pour minimiser l'erreur de prévision à 24 heures sur le domaine choisi. Ceci conduit à une structure de sensibilité plus localisée telle que la montre la figure 3.13.

La figure présente les corrections de température à 700 hPa de la fonction de sensibilité locale valide le 27 janvier 2003 à 12 UTC. Leur amplitude est comprise entre [-2.°C; +2.°C] à l'intérieur du domaine et presque nulle en dehors de cette région. La coupe verticale, illustrée à la figure 3.13-c dans les corrections de température le long de la flèche en 3.13-b montre une structure barocline significative. On remarque que localement, le long de la côte est américaine, ces corrections de température sont similaires à celles obtenues avec une fonction de sensibilité globale. L'emploi d'une telle fonction comme fonction de structure dans le 3D-Var adapté apporterait une correction à l'analyse seulement dans la région où son amplitude est non nulle, contrairement à la fonction de sensibilité globale qui corrigerait l'analyse presque partout dans l'hémisphère Nord en réponse à une ou plusieurs données assimilées.

Comme pour le cas précédent, nous présentons dans un premier temps les corrections apportées à l'analyse 3D-Var standard par le 3D-Var adapté. Ensuite, nous examinons si l'analyse du 3D-Var adapté et l'analyse de sensibilité correspondante sont plus près des observations que l'analyse 3D-Var standard, de même que leur impact sur les prévisions jusqu'à 5 jours d'échéance. Le 3D-Var utilise ici une valeur de $\sigma = 100$. La figure 3.14 présente la différence des incréments de température à 700 hPa (3D-Var adapté moins 3D-Var standard) représenté sur l'hémisphère Nord (fig. 3.14-a) et dans un plan rapproché focalisé sur la région d'intérêt (fig. 3.14-b). La fig. 3.14-c montre une coupe verticale de la différence des incréments d'analyse de température dans la direction indiquée sur la fig. 3.14-

b. On remarque la structure barocline penchée en altitude ayant toutefois un signe opposé à celui de la fonction de sensibilité employée.

Pour vérifier à quel degré ces analyses concordent avec les observations, la différence relative dans J_0 est calculée en utilisant la relation (3.17) pour chaque famille d'observations aussi bien que pour l'ensemble des données disponibles et utilisées dans les analyses. La fig. 3.15 montre que comparativement à l'analyse opérationnelle, l'analyse de sensibilité s'éloigne des observations (fig. 3.15-a) alors que l'analyse du 3D-Var adapté s'en rapproche (fig. 3.15-b).

La figure 3.16 illustre le patron de l'erreur de prévision intégrée à la verticale au-dessus de la région d'intérêt. Ces prévisions proviennent d'une intégration du GEM à partir de l'analyse du 3D-Var adapté et de l'analyse de sensibilité. L'erreur de ces prévisions est représentée à un jour et deux jours d'échéance pour le 3D-Var adapté (fig. 3.16-a, b) et l'analyse de sensibilité (fig. 3.16-c, d). Afin d'établir si ces prévisions sont plus fiables, la figure 3.17 montre la différence des patrons entre l'erreur de prévision pour chacune de ces prévisions par rapport à celle de la prévision opérationnelle (montrée dans les figures 3.8-a, à 24-h et 3.8-b à 48-h). Les figures 3.17-a, b, montrent des valeurs positives de l'énergie de l'erreur de prévision dans la région d'intérêt. Ceci traduit une augmentation de l'erreur de prévision dans la zone considérée, qui passe de 119 J/kg pour la prévision faite à partir de l'analyse opérationnelle à 167 J/kg dans le cas avec l'analyse adapté, soit une augmentation de 40 %. L'augmentation est maintenue 24-h plus tard, passant de 121 J/kg pour la prévision faite à partir de l'analyse opérationnelle à 177 J/kg dans le cas avec l'analyse adaptée, soit une augmentation de 47 % (fig. 3.17-b). Sur les figures 3.17-c, d, le champ de la différence d'erreur de prévision est négatif. Par construction, la prévision à partir de l'analyse de sensibilité réduit considérablement l'erreur de prévision dans la région spécifiant la fonction diagnostique.

La figure 3.18-a montre les valeurs de l'erreur de prévision E_A à chaque six heures jusqu'à deux jours d'échéance pour les trois prévisions considérées (opérationnelle, 3D-Var adapté et analyse de sensibilité). Pour les prévisions issues du 3D-Var adapté, nous constatons une légère augmentation des valeurs l'erreur de prévision intégrée sur

l'hémisphère Nord extratropical ce qui indique une faible dégradation des prévisions jusqu'à 48-h réalisées à partir de 3D-Var adapté par rapport aux prévisions opérationnelles. L'emploi de la fonction de sensibilité locale, a pour conséquence que l'amélioration des prévisions, réalisées à partir de l'analyse de sensibilité, jusqu'à deux jours d'échéance est moins importante que dans le cas précédent où une fonction de sensibilité globale était utilisée. À 24-h, l'énergie de l'erreur de prévision intégrée sur l'hémisphère Nord extratropical est augmentée de 5 % dans la prévision du 3D-Var adaptée et réduite de 8 % dans la prévision de l'analyse de sensibilité. La figure 3.18-b illustre les valeurs de l'énergie de l'erreur de prévision E_A à chaque douze heures jusqu'à cinq jours d'échéance. On constate que dans la deuxième partie de la période d'intégration, la prévision du 3D-Var adapté réduit légèrement les erreurs de prévision par rapport à la prévision opérationnelle, tandis que la prévision de l'analyse de sensibilité augmente ces erreurs.

Cette expérience a montré que les résultats dépendent de la façon dont la fonction de structure est définie. L'utilisation d'une fonction de sensibilité plus localisée comme fonction de structure dans le 3D-Var adapté apporte des corrections à l'analyse opérationnelle ayant le signe opposé à celui de la fonction de sensibilité locale. Le choix de la fonction de sensibilité s'avère critique pour que l'assimilation adaptative conduise à un impact optimal sur la qualité de la prévision à courte et moyenne échéance. Nous avons montré que dans le cas présent, les prévisions jusqu'à 2 jours d'échéance réalisées à partir du 3D-Var adapté sont légèrement détériorées. Une amélioration des prévisions réalisées à partir de l'assimilation adaptative est perceptible seulement dans la deuxième partie de la période d'intégration. D'autre part, on note également que l'utilisation d'une fonction de sensibilité localisée, conduit à une analyse de sensibilité qui conduit à des améliorations moins significatives sur les prévisions qui en résultent, comparativement au cas précédent où une fonction de sensibilité globale avait été utilisée.

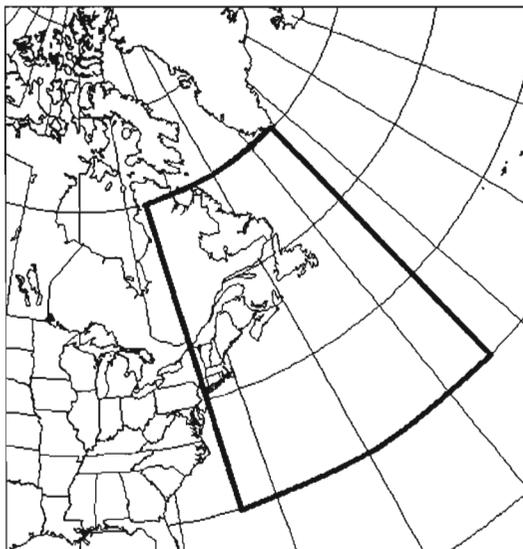


Figure 3.12 : Représentation de la région localisée employée pour définir une fonction de sensibilité localisée. La zone entourée par les lignes pleines est le domaine géographique où les erreurs d'analyse résultant du calcul de sensibilité du CMC agissent pour réduire l'erreur de prévision des différentes variables.

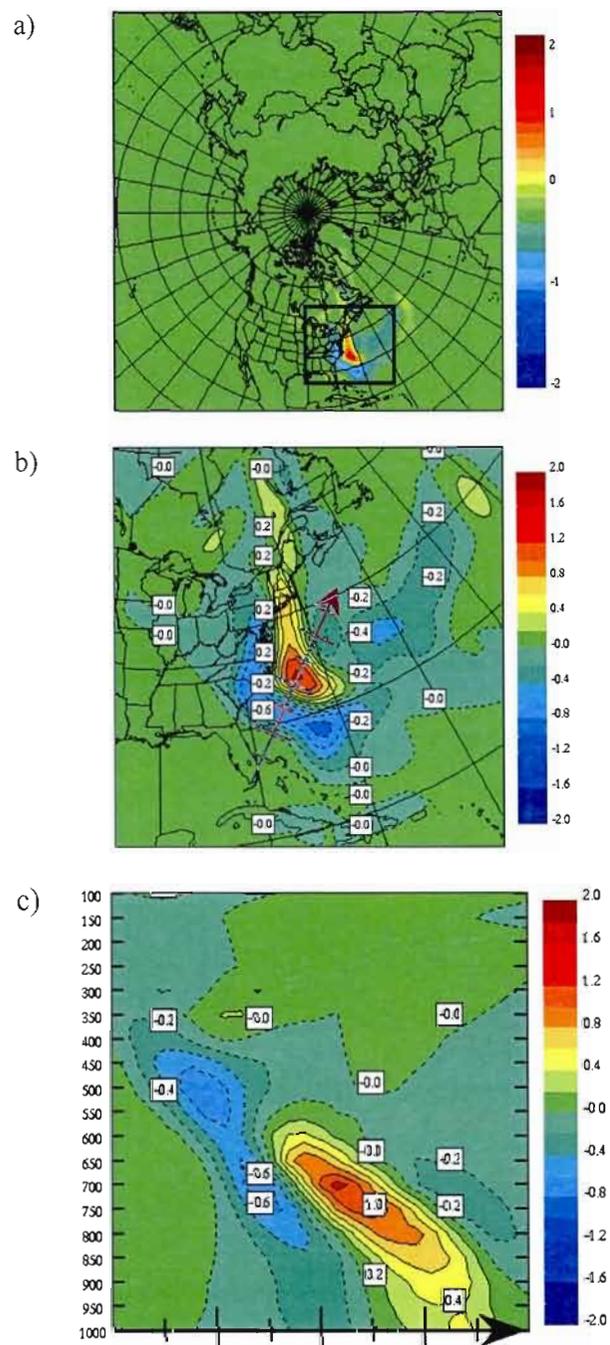


Figure 3.13 : Première fonction de sensibilité locale valide le 27 janvier 2003 à 12 UTC : a) les corrections initiales de la température à 700 hPa sur l'hémisphère Nord ; b) les corrections initiales de la température à 700 hPa en plan rapproché encadré dans la partie a) (intervalle 0.2°C) ; c) coupe verticale dans les corrections initiales de la température le long de la flèche en b).

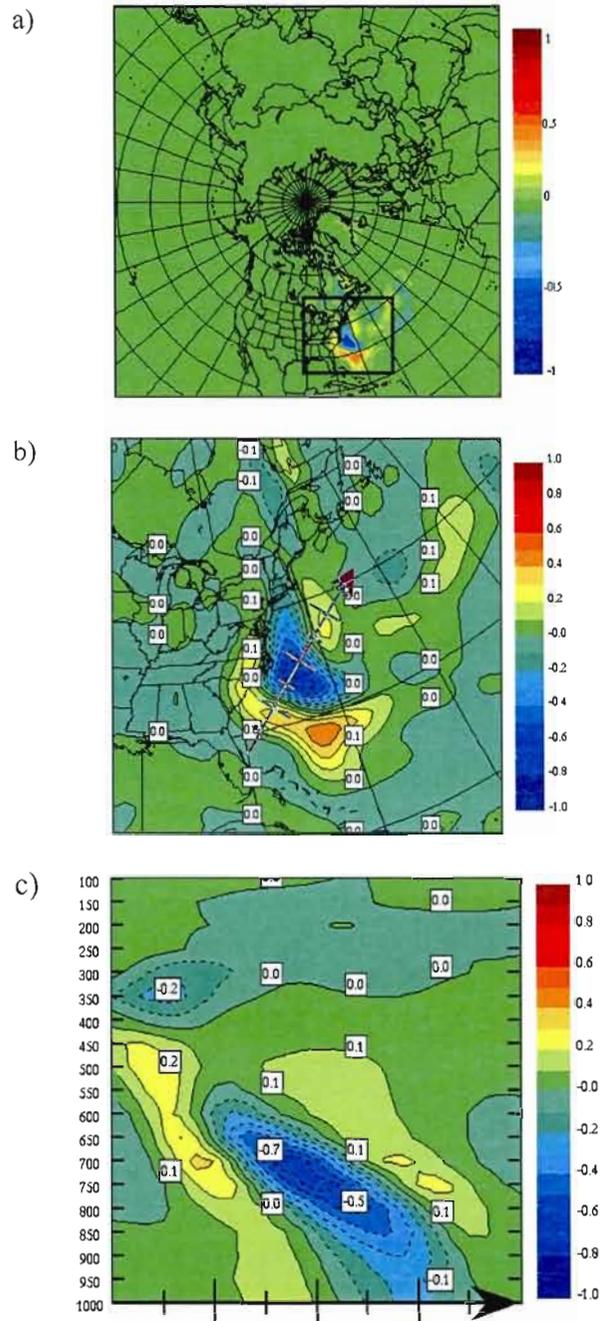


Figure 3.14 : Impact de l'utilisation d'une fonction de sensibilité locale sur l'analyse 3D-Var : a) différence entre l'incrément de température à 700 hPa du 3D-Var adapté ($\sigma = 100$) et l'incrément de température standard à 700 hPa, valides le 27 janvier 2003 à 12 UTC ; b) plan rapproché de la différence en a) ; c) coupe verticale dans la différence des incréments d'analyse de température (3D-Var adapté moins 3D-Var standard) le long de la flèche en b).

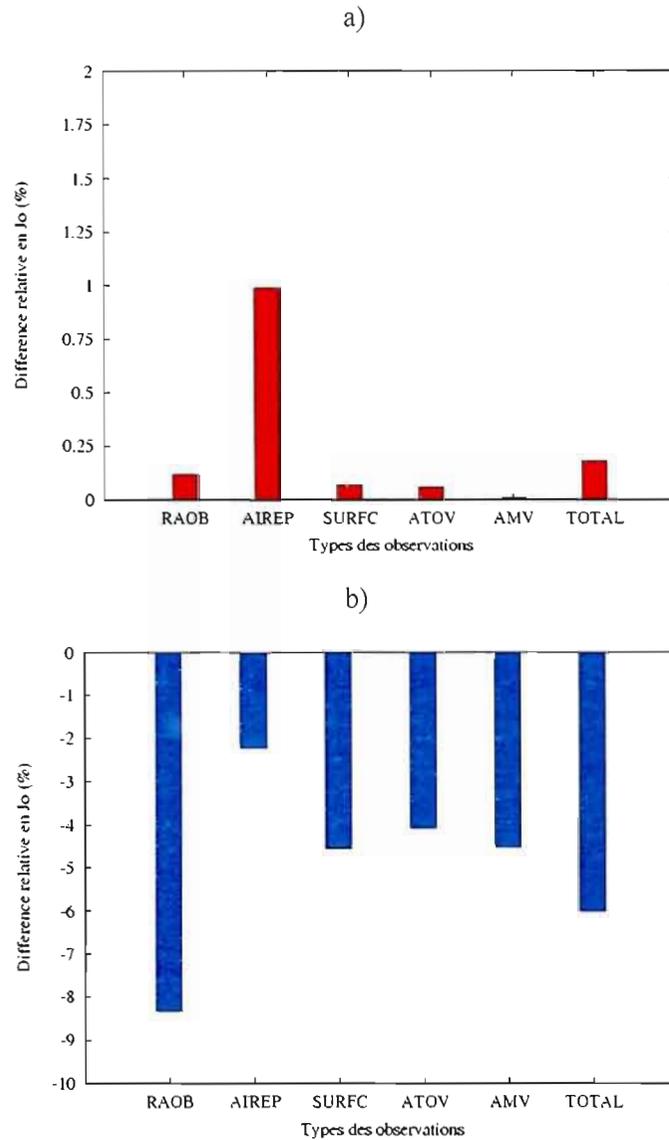


Figure 3.15 : Différence relative entre l'écart aux observations (J_0) : a) de l'analyse de sensibilité et b) de l'analyse 3D-Var adapté par rapport à l'analyse opérationnelle le 27 janvier 2003 à 12 UTC pour différents types des données d'observation. Une valeur négative signifie que l'analyse est plus proche des observations tandis que une valeur positive indique que l'analyse est plus loin des observations que l'analyse opérationnelle. L'analyse 3D-Var adapté considère la fonction de sensibilité locale et $\sigma = 100$.

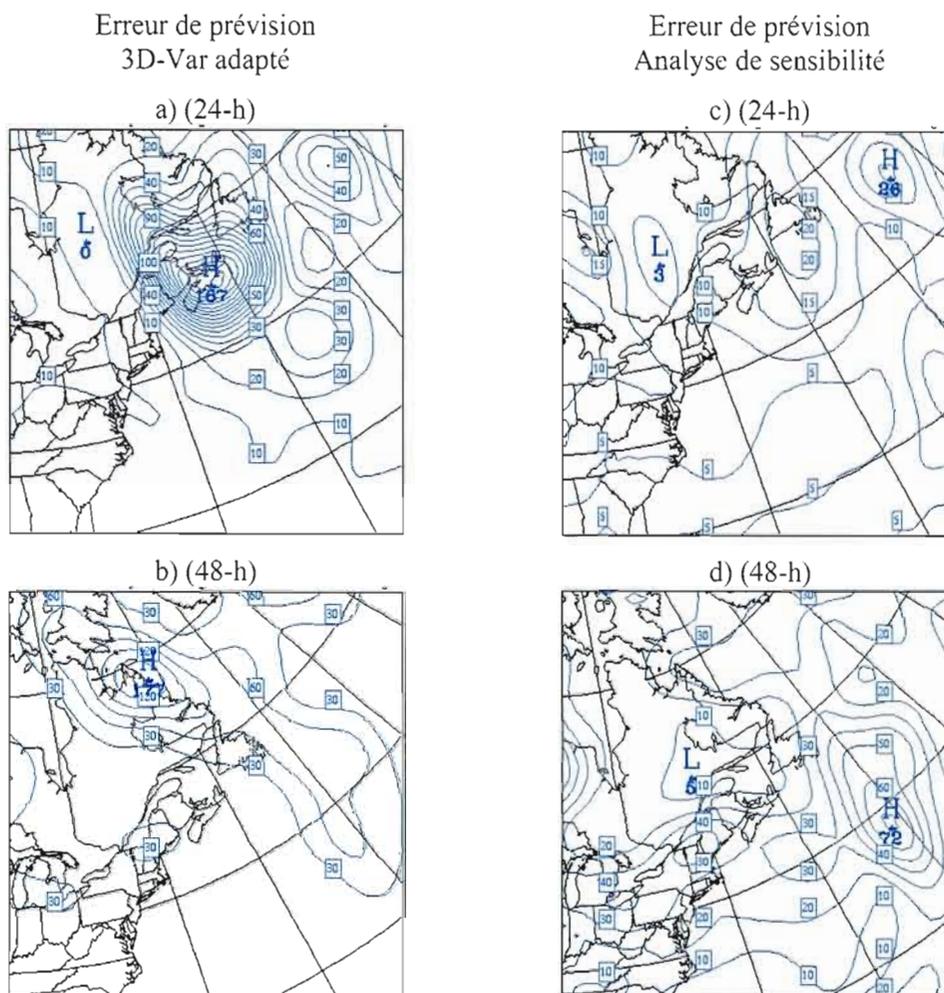


Figure 3.16 : Distribution de l'erreur de prévision intégrée à la verticale au-dessus des Maritimes canadiennes à 24-h et à 48-h d'échéance. Prévisions issues du 3D-Var adapté avec $\sigma = 100$ à a) 24-h, b) 48-h. Prévisions issues de l'analyse de sensibilité avec fonction de sensibilité localisée à c) 24-h, d) 48-h.

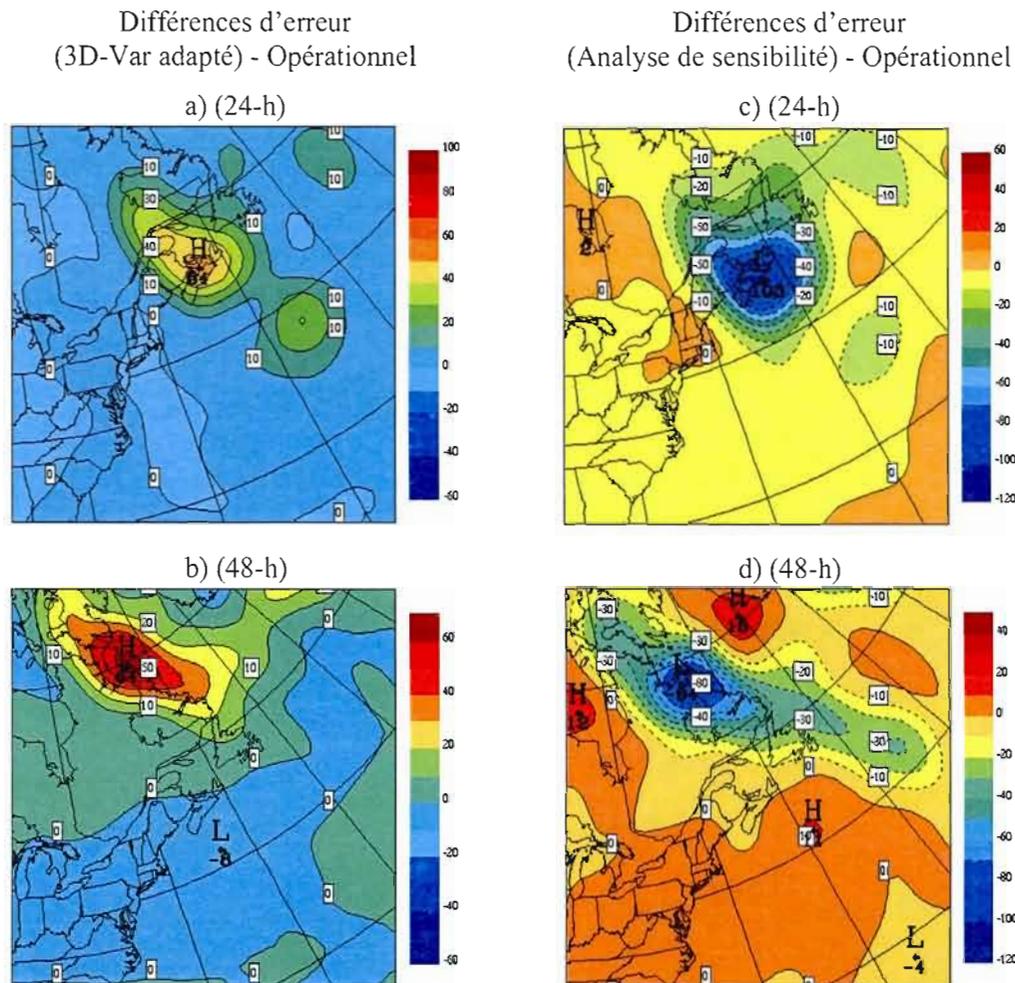


Figure 3.17 : Les différences des patrons de l'énergie de l'erreur de prévision à 24-h respectives à 48-h d'échéances. En 3.17-a et b sont les différences entre les valeurs obtenus à partir de l'analyse du 3D-Var adapté et du celle du 3D-Var opérationnel à un jour respectif deux jours d'échéances. En 3.17-c et d sont les différences entre les valeurs obtenus à partir de l'analyse de sensibilité et du celle opérationnelle au mêmes échéances comme en a et b. L'analyse adapté ($\sigma = 100$) et l'analyse de sensibilité considèrent la première fonction de sensibilité locale.

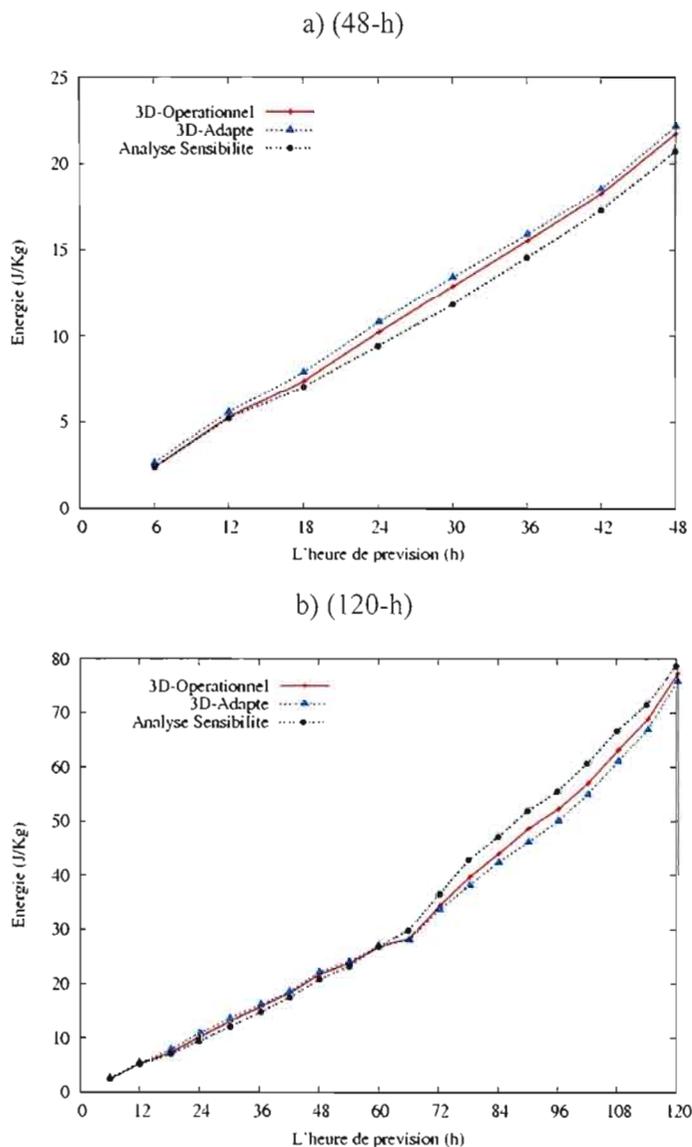


Figure 3.18 : Énergie (totale) des erreurs de prévision (prévision moins analyse de référence pour l'hémisphère Nord extratropical) pour l'intégration du modèle GEM à partir de l'analyse opérationnelle (en rouge, ligne pleine), de l'analyse adaptative (en bleu, ▲) et de l'analyse de sensibilité (en noir, ●) valides le 27 janvier 2003 à 12 UTC : a) les prévisions jusqu'à deux jours d'échéance ; b) les prévisions jusqu'à cinq jours d'échéance. L'analyse 3D-Var adapté ($\sigma = 100$) et l'analyse de sensibilité considèrent première fonction de sensibilité locale.

3.2.2.3 Deuxième fonction de sensibilité locale

La structure spatiale des fonctions de sensibilité est déterminante pour leur croissance future et pour le déclenchement des instabilités baroclines ou barotropes. Principalement, la croissance des erreurs dues aux incertitudes sur l'état initial dépend de la dynamique qui gouverne l'évolution de la prévision. Leur équation d'évolution considère que le taux de variation (ou de croissance) est proportionnel à la grandeur de l'erreur en tout temps. Pour préciser cet argument, nous écrivons les équations d'évolution dans le cas d'un système à deux composantes, une instable δx et l'autre stable δy de telle sorte que :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

où λ est un exposant défini positif.

La solution du système (3.20) montre que pour une durée de temps $\Delta t = t - t_0$, une petite perturbation (erreur) initiale varie exponentiellement de telle sorte que :

$$\begin{pmatrix} \delta x(t) \\ \delta y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda(t-t_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

On remarque que dans le cas d'une composante instable l'erreur croît exponentiellement dans le temps tandis que pour la composante stable celle-ci diminue dans le temps.

Le modèle adjoint permet d'identifier les changements aux conditions initiales qui se traduiront par une croissance d'erreur la plus importante. Le système d'équations adjointes correspondantes au système décrit par (3.20) s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta^* x \\ \delta^* y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^* x \\ \delta^* y \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

L'intégration du système (3.22) entre t et t_0 donne :

$$\begin{pmatrix} \delta^* x(t_0) \\ \delta^* y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda(t-t_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^* x(t) \\ \delta^* y(t) \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Cette relation est utilisée dans l'évaluation du gradient de la fonction coût suivante :

$$J(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}(x(t) - \hat{x})^2 + \frac{1}{2}(y(t) - \hat{y})^2 \quad (3.24)$$

où \hat{x} et \hat{y} représentent les observations disponibles au temps t .

Tel que montré par Le Dimet et Talagrand (1986), le gradient de la fonction coût par rapport aux conditions initiales est obtenu d'une intégration à rebours du modèle adjoint de t jusqu'à t_0 de telle sorte que :

$$\nabla J(x(t_0), y(t_0)) = \begin{pmatrix} \delta^* x(t_0) \\ \delta^* y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda(t-t_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) - \hat{x} \\ y(t) - \hat{y} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

On remarque que dans le cadre du problème de minimisation, le gradient caractérise bien la composante instable au temps initial de sorte qu'un petit changement dans les conditions initiales conduira à une croissance d'erreur importante. D'autre part, la composante du gradient dans la direction stable est d'autant plus faible que la dissipation est importante. La minimisation n'impose donc que peu de contraintes sur cette composante puisqu'une erreur importante au temps initial dans la direction stable est rapidement dissipée. Toutefois, la présence de cette composante peut nuire à l'ajustement aux observations au temps initial. (Tanguay *et al.*, 1995).

Pour tenter de filtrer la composante stable de l'analyse de sensibilité et de la fonction de structure qui en résulte, une deuxième fonction de sensibilité locale *a posteriori* est considérée. Elle consiste à définir la fonction diagnostique à la fin de la période (-24h, 24h) et de retenir la fonction de sensibilité valide à 0-h, correspondant au 27 janvier 2003 à 12 UTC. Comme la composante stable s'amortit rapidement, une telle définition permettra d'identifier les erreurs d'analyse qui peuvent croître très rapidement et qui sont responsables des grandes erreurs de prévision au temps de vérification. Pour le cas présent, on définit la fonction diagnostique comme l'énergie totale de l'erreur de prévision à 48 heures intégrée à la verticale dans la direction η de 0 à 1 et horizontalement sur le même domaine illustré dans la figure 3.12, en accord avec la relation (1.38). L'algorithme d'analyse de sensibilité du CMC calcule les erreurs d'analyse correspondantes à l'analyse du 26 janvier 2003 à 12 UTC. Après avoir identifié les corrections initiales apportées à l'analyse 3D-Var standard à 12 UTC le 26 janvier 2003, deux prévisions à 24 heures sont lancées à partir de l'analyse de sensibilité et de

l'analyse opérationnelle pour calculer l'écart entre ces deux prévisions au même moment, soit le 27 janvier 2003 à 12 UTC. La différence entre les deux prévisions donne la deuxième fonction de sensibilité valide, le 27 janvier 2003 à 12 UTC. Celle-ci sera utilisée comme fonction de structure dans le 3D-Var adapté. L'illustration des étapes réalisées afin d'obtenir la deuxième fonction de sensibilité locale est schématisée sur la figure 3.19.

La figure 3.20 présente les corrections apportées à l'analyse 3D-Var standard le 27 janvier 2003 à 12 UTC pour le champ de température à 700 hPa ainsi qu'une coupe verticale. On constate que les corrections sont localisées près du domaine géographique spécifié, ayant une amplitude comprise entre $[-3.^{\circ}\text{C}, +3.^{\circ}\text{C}]$. La coupe verticale, révèle une structure verticale différente de celles obtenues dans les situations antérieures. Comme pour les deux expériences précédentes, les figures 3.21-a, b représentent la différence des incréments d'analyse de température à 700 hPa (3D-Var adapté moins 3D-Var standard) calculée pour une valeur $\sigma = 100$, sur l'hémisphère Nord et sur le domaine plus localisé. La figure 3.21-c montre la coupe verticale de cette différence des incréments le long de la flèche en 3.21-b. On remarque que l'amplitude des corrections apportées par 3D-Var adapté à l'analyse opérationnelle est sensiblement réduite par rapport à celle apportées par l'analyse de sensibilité. La figure 3.22 présente les résultats obtenus quand l'analyse de sensibilité et le 3D-Var adapté sont comparées aux observations disponibles. Encore une fois, ils montrent que l'analyse du 3D-Var adapté réduit l'écart par rapport aux observations (fig. 3.22-b), tandis que l'analyse de sensibilité l'augmente (fig. 3.22-a).

L'utilisation de la deuxième fonction de sensibilité locale comme fonction de structure dans le 3D-Var adapté a un impact positif sur les prévisions réalisées. Les figures 3.23-a, b montrent l'impact local de l'assimilation adaptative sur les prévisions à 24-h et 48-h d'échéance. On constate qu'à 24-h, l'erreur de prévision intégrée à la verticale dans la région d'intérêt est réduite pour la prévision faite à partir de 3D-Var adapté, passant de 119 J/kg pour la prévision faite à partir de l'analyse opérationnelle à 100 J/kg dans le cas de l'analyse adaptée, soit une réduction de 16 %. Le même champ 24-h plus tard dévoile encore une diminution de l'erreur de prévision qui passe de 121 J/kg pour la prévision opérationnelle à 92 J/kg dans le cas de l'analyse adaptée, soit une réduction de 24 %. Le champ de la différence entre l'erreur de prévision intégrée sur la verticale pour la prévision issue du 3D-Var adapté

et celle de la prévision opérationnelle est montré sur les figures 3.24-a, b. Ce champ est négatif dans le domaine considéré à 24-h et aussi à 48-h d'échéance. Par contre, les figures 3.23-c, d montrent l'erreur de la prévision basée sur l'analyse de sensibilité correspondante à la fonction de sensibilité utilisée alors que les figures 3.24-c, d montrent la différence de l'erreur de prévision basée sur l'analyse de sensibilité par rapport à la prévision opérationnelle. Ces résultats montrent l'amélioration des prévisions dans la zone d'intérêt en dépit de la détérioration des prévisions dans les régions avoisinantes. Dans l'ensemble, comme le montre la figure 3.25, l'erreur de prévision intégrée sur l'hémisphère Nord extratropical est très proche, dans les deux cas, de l'erreur de la prévision opérationnelle. À 24-h, la valeur de l'énergie de l'erreur de prévision E_A reste inchangée dans la prévision adaptée et augmente de 4 % dans la prévision de sensibilité. À partir de 36-h d'échéance, la figure 3.25-b, montre une amélioration des prévisions basées sur le 3D-Var adapté et aussi une légère détérioration des prévisions réalisées à partir de l'analyse de sensibilité.

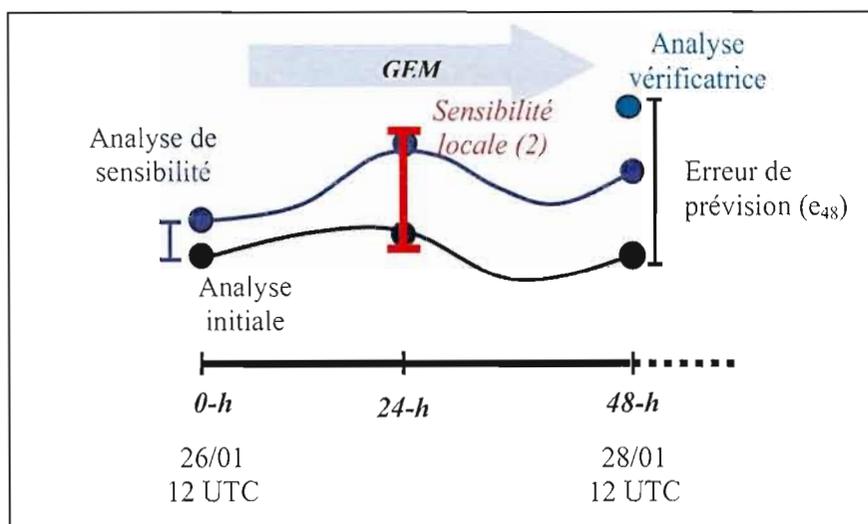


Figure 3.19 : Aperçu de l'algorithme d'analyse de sensibilité du CMC employé dans la détermination des fonctions de sensibilité localisées. La chaîne des opérations réalisées pour le calcul de la deuxième fonction de sensibilité. Les corrections à l'analyse initiale du 26 janvier 2003 à 12 UTC sont d'abord identifiées et ensuite la différence entre deux prévisions à 24-h réalisées à partir de l'analyse de sensibilité et de l'analyse opérationnelle du 26 janvier 2003 à 12 UTC identifie la deuxième fonction de sensibilité locale valide le 27 janvier 2003 à 12 UTC.

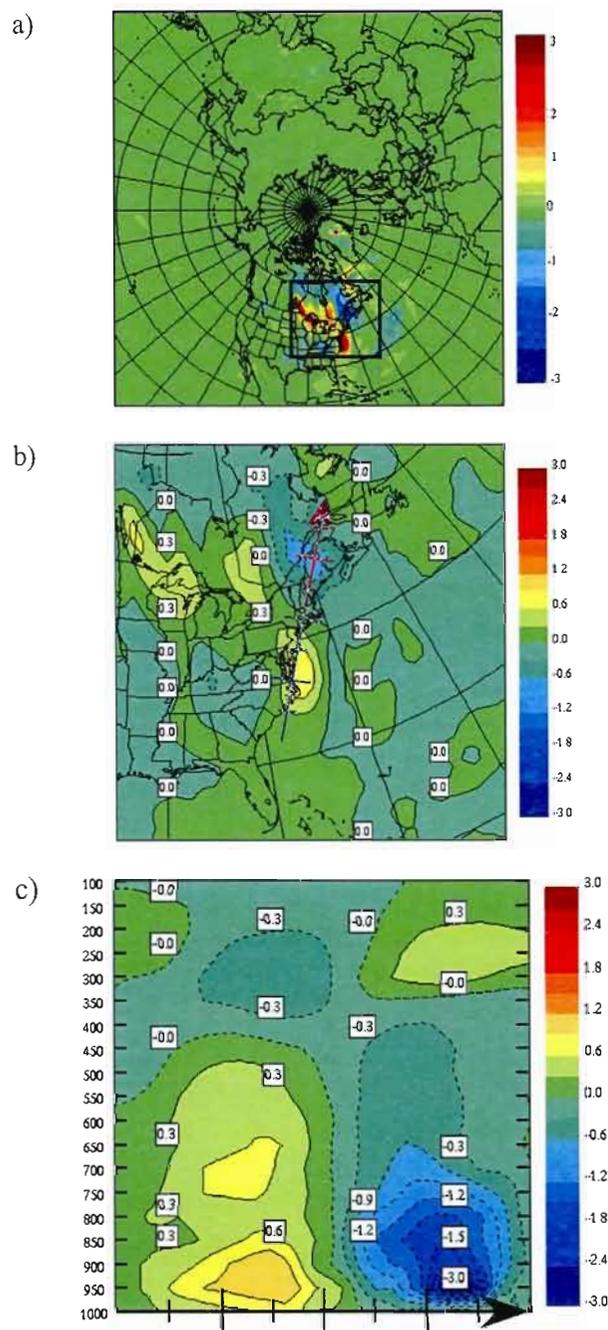


Figure 3.20 : Deuxième fonction de sensibilité locale valide à 12 UTC le 27 janvier 2003 : a) les corrections initiales de la température à 700 hPa sur l'hémisphère Nord; b) les corrections initiales de la température à 700 hPa en plan rapproché (intervalle 0.3°C); c) coupe verticale dans les corrections initiales de la température le long de la flèche en b)

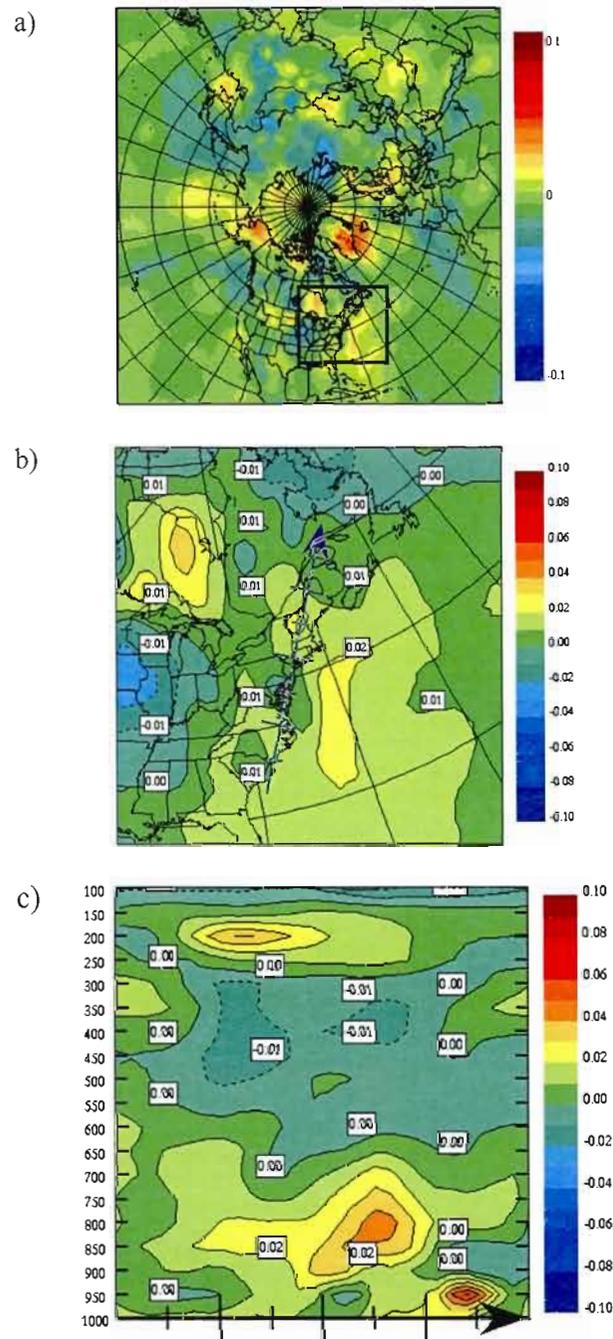


Figure 3.21 : Impact de l'utilisation de la deuxième fonction de sensibilité locale sur l'analyse 3D-Var : a) la différence entre l'incrément de température à 700 hPa du 3D-Var adapté ($\sigma = 100$) et l'incrément de température standard à 700 hPa utilisé dans le 3D-Var, valides à 12 UTC le 27 janvier 2003; b) plan rapproché de la différence en a) ; c) la coupe verticale dans la différence des incréments d'analyse de température (3D-Var adapté moins 3D-Var standard) le long de la flèche en b).

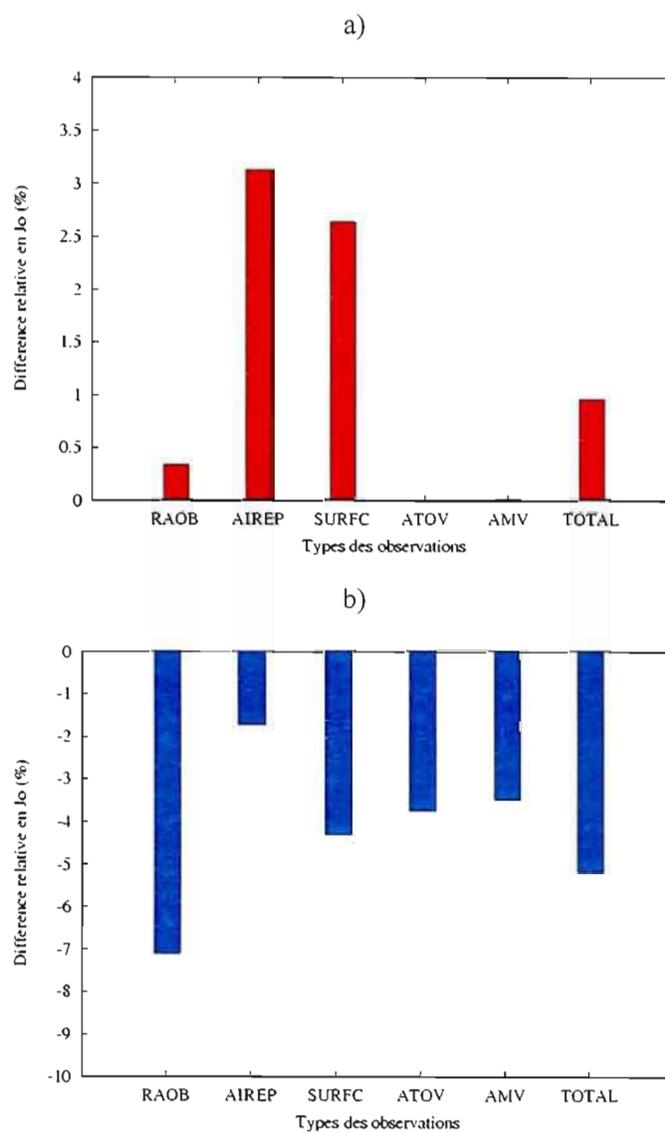


Figure 3.22 : Différence relative entre l'écart aux observations (J_0) : a) de l'analyse de sensibilité et b) de l'analyse 3D-Var adapté par rapport à l'analyse opérationnelle à 12 UTC le 27 janvier 2003 pour différents types des données d'observation. L'analyse 3D-Var adapté considère la deuxième fonction de sensibilité locale et $\sigma = 100$.

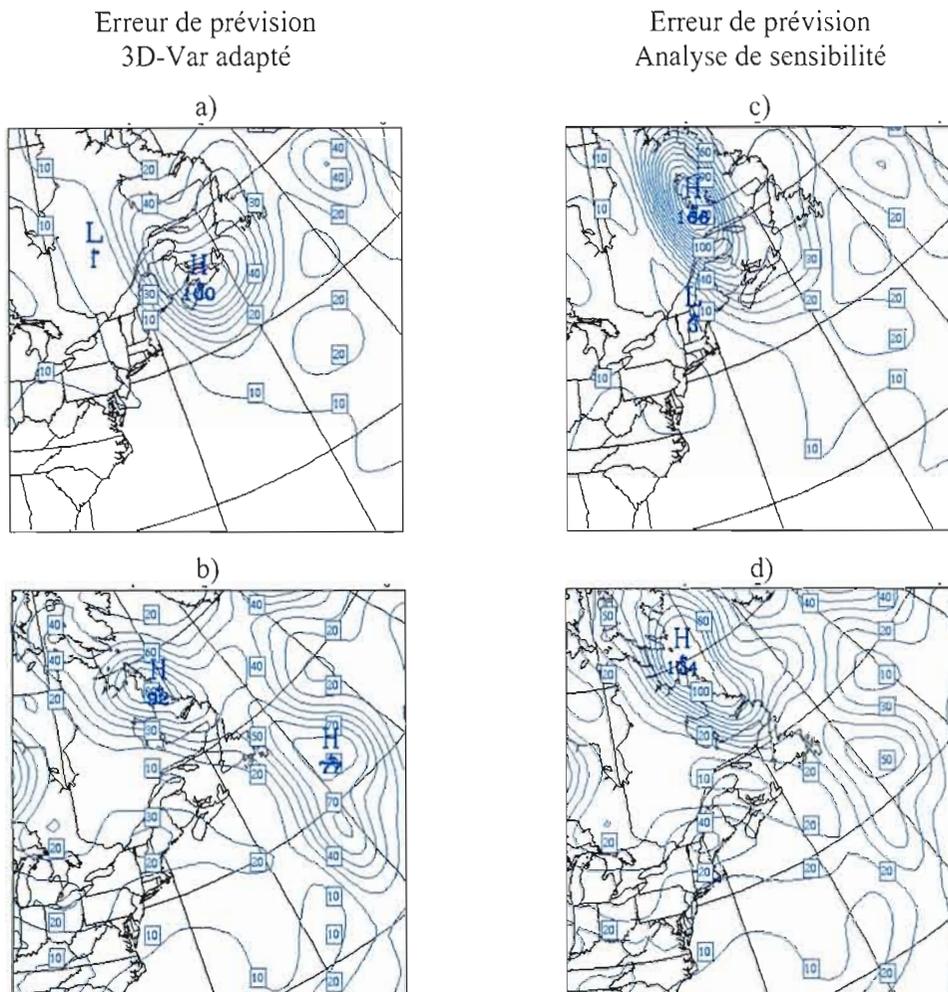


Figure 3.23 : Comme la figure 3.16 mais pour le deuxième type de fonction de sensibilité localisée. Distribution de l'erreur de prévision intégrée à la verticale au-dessus des Maritimes canadiennes à 24-h et à 48-h d'échéance. Prévisions issues du 3D-Var adapté avec $\sigma = 100$ à a) 24-h, b) 48-h. Prévisions issues de l'analyse de sensibilité à c) 24-h, d) 48-h.

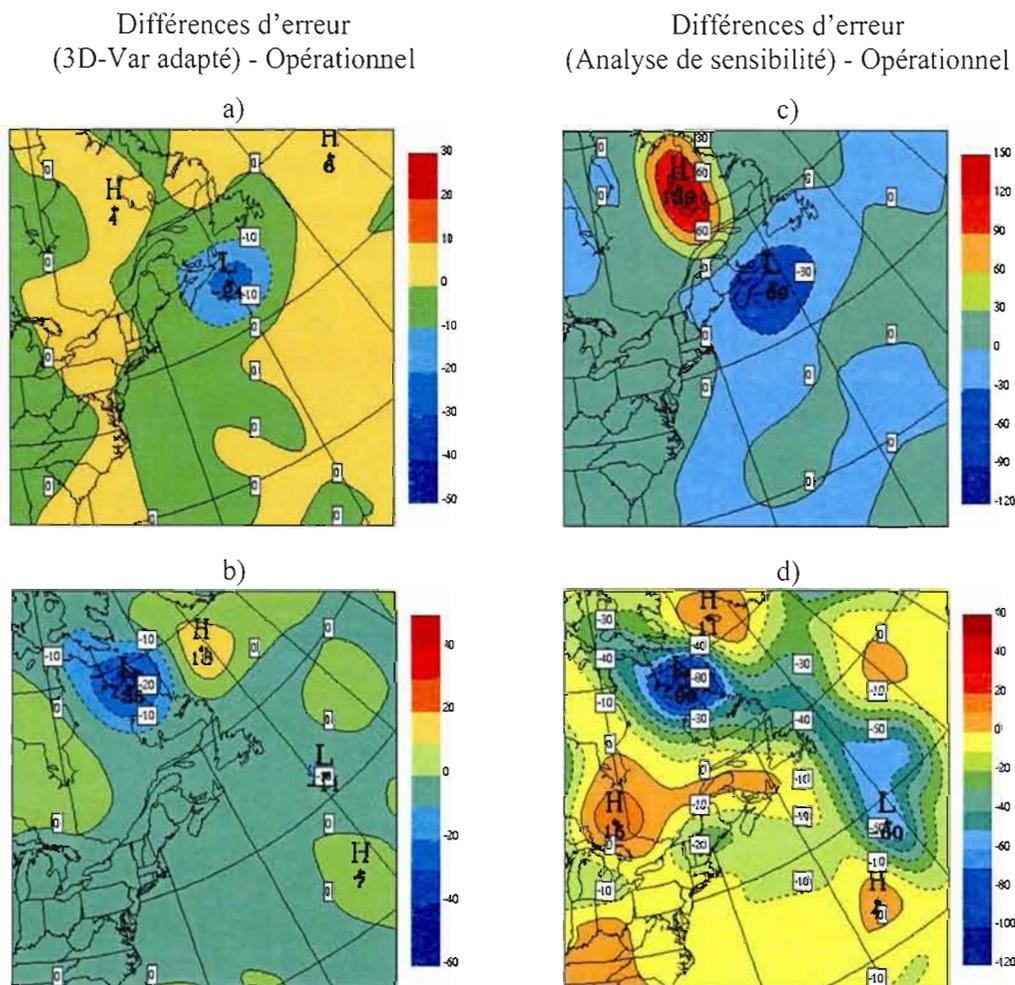


Figure 3.24 : Les différences des patrons de l'énergie de l'erreur de prévision à 24-h respectives à 48-h d'échéances. En 3.24-a et b sont les différences entre les valeurs obtenus à partir de l'analyse du 3D-Var adapté et du celle du 3D-Var opérationnel à un jour respectif deux jour d'échéance. En 3.24-c et d sont les différences entre les valeurs obtenus à partir de l'analyse de sensibilité et du celle opérationnelle au mêmes échéances comme en a et b. Les analyses 3D-Var adapté ($\sigma = 100$) et celle de sensibilité considèrent la deuxième fonction de sensibilité locale.

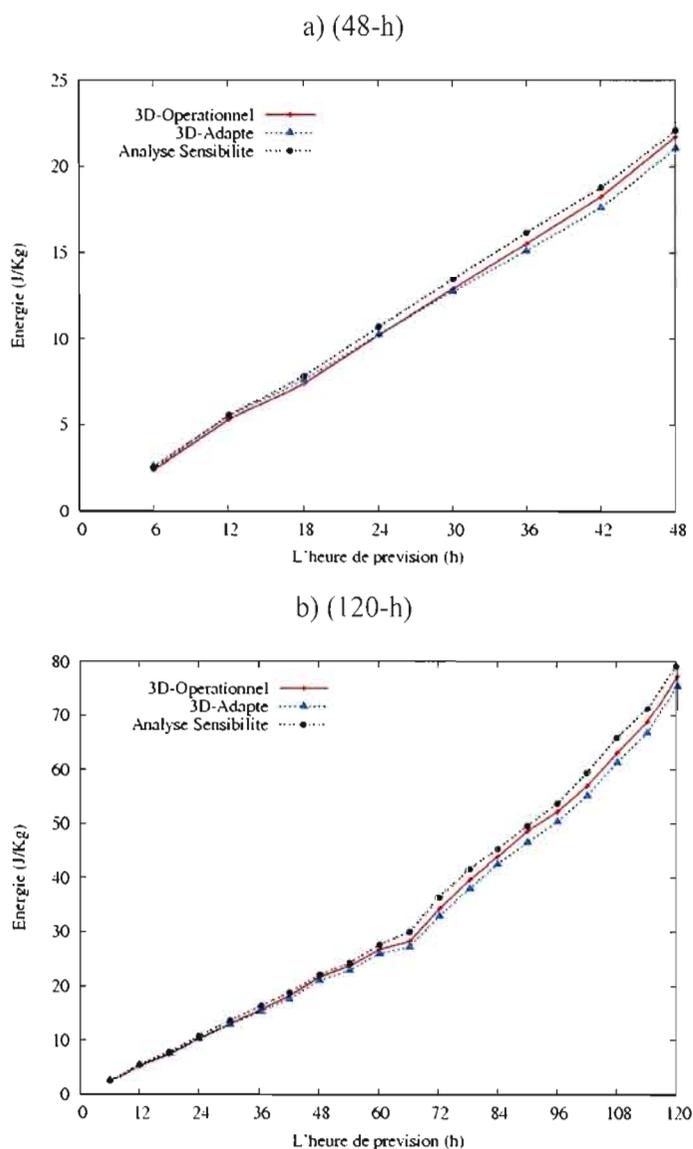


Figure 3.25 : Erreurs de prévision totale sur l'hémisphère Nord extratropical. Prévisions issues de l'analyse opérationnelle (en rouge, ligne pleine), de l'analyse adaptative (en bleu, ▲) et de l'analyse de sensibilité (en noir, ●) valides le 27 janvier 2003 à 12 UTC : a) les prévisions jusqu'à deux jours d'échéance ; b) les prévisions jusqu'à cinq jours d'échéance. L'analyse 3D-Var adapté ($\sigma = 100$) et l'analyse de sensibilité considèrent la deuxième fonction de sensibilité locale.

3.2.3 Discussion

Trois fonctions de sensibilité *a posteriori* ont été calculées avec l'algorithme d'analyse de sensibilité du CMC pour une prévision manquée sur la côte est du Canada du 27 janvier 2003. Elles ont été obtenues pour minimiser l'erreur de prévision à une échéance donnée (typiquement 24-h ou 48-h) et sur une région spécifiée. L'information contenue dans chacune des fonctions de sensibilité a été ajoutée à l'analyse opérationnelle et les analyses de sensibilité ont été obtenues en utilisant la méthode décrite dans Laroche *et al.*, 2002. Pour le cas étudié dans ce mémoire, ces analyses sont plus loin des observations que l'analyse opérationnelle 3D-Var à 12 UTC le 27 janvier 2003 alors que l'erreur de prévision diminue pour les prévisions jusqu'à cinq jours d'échéance basées sur les analyses de sensibilité.

Ces fonctions de sensibilité ont été ensuite introduites dans la formulation de la matrice de covariance d'erreur de prévision \mathbf{B} afin d'introduire une structure dynamique semblable que l'on sait être en mesure de réduire l'erreur de prévision à 24 ou 48 heures. C'est ce qu'on appelle le 3D-Var adapté. Les résultats présentés ont montré que l'emploi du 3D-Var adapté permet de capturer les structures dépendantes de l'écoulement pour ce cas météorologique mais que l'amplitude des corrections, caractérisée par un seul paramètre défini par l'ensemble des observations disponibles, est petite par rapport à celle de l'analyse de sensibilité. Par contre, les analyses du 3D-Var adapté sont toutes plus proches des observations que l'analyse 3D-Var opérationnelle pour chaque famille des observations aussi que pour l'ensemble des observations disponibles. Pour le cas étudié, cette diminution de l'écart aux observations illustre que les analyses du 3D-Var adapté sont plus proches de l'état réel de l'atmosphère que l'analyse opérationnelle. La réduction de l'erreur de prévision est toutefois moins importante que ce qui est observé pour les prévisions basées sur les analyses de sensibilité.

En cherchant à simultanément concorder aux observations disponibles et améliorer la qualité des prévisions, la définition d'une fonction de structure appropriée pour un système d'assimilation n'est pas immédiate. On a montré que les résultats obtenus sont très sensibles à la façon dont on la définit. Cependant, ces fonctions de sensibilité *a posteriori* nécessitent une analyse de vérification et elles ne peuvent donc pas être utilisées en temps réel pour tenter d'améliorer la qualité des prévisions en améliorant *a priori* la caractérisation des

composantes instables de l'écoulement. Bien que limitées à un seul cas, nos expériences indiquent certaines pistes intéressantes pour définir des fonctions de sensibilité pouvant être utilisées comme fonctions de structures qui pourraient être applicables aux fonctions de sensibilité *a priori*.

CONCLUSION

Les erreurs de prévision à courte échéance sont souvent causées par des petites erreurs sur les conditions initiales utilisées. Au cours des dernières années, des études dites de sensibilité ont été réalisées pour identifier les erreurs sur les conditions initiales, les erreurs d'analyse, susceptibles de croître rapidement (Rabier *et al.* (1996); Klinker *et al.*, 1998). Basées sur l'emploi du modèle adjoint d'un modèle de prévision, ces analyses de sensibilité *a posteriori* ont permis de diagnostiquer l'erreur d'analyse responsable de l'erreur de prévision à deux jours. Un tel système a également été développé au CMC pour identifier les corrections aux conditions initiales qui réduisent l'erreur de prévision à une échéance donnée (Laroche *et al.*, 2002). Une autre approche à ce problème consiste à caractériser les structures atmosphériques qui auront le plus d'influence sur un aspect de la prévision. Ces analyses de sensibilité dites *a priori* ont été présentées dans Hello *et al.*, (2000) et ont servi pour guider le déploiement d'observations lors de la campagne FASTEX en 1997. Puisque ces structures instables peuvent conduire à une croissance de l'erreur de prévision, il semblait naturel d'ajouter des observations dans ces régions pour augmenter la précision de l'analyse dans ces régions.

Hello et Bouttier (2001) ont ensuite proposé d'incorporer cette information à même le processus d'analyse en incorporant ces *fonctions de sensibilité a priori* comme fonction de structure à même le modèle de covariance d'erreur de prévision. Ceci rejoint la formulation de modèles de covariance d'erreur de prévision basés sur les vecteurs singuliers (Fisher et Andersson, 2001; Buehner, 2004). Le système d'assimilation de données variationnelle 3D (3D-Var) du CMC considère un modèle de covariance d'erreur de prévision stationnaire et ne prend pas en considération les structures dépendantes de la nature de l'écoulement. L'objet de notre étude a été d'introduire dans l'assimilation variationnelle 3D-Var une formulation originale des covariances d'erreur de prévision qui inclut les fonctions de structure définies par les fonctions de sensibilité.

Les chapitres 1 et 2 du mémoire présentent les méthodes d'analyses variationnelle 3D-Var et 3D-Var adapté. Une nouvelle formulation du 3D-Var adapté est proposée dans cette étude et a été comparée à celle proposée par Hello et Bouttier (2001). Essentiellement, les deux approches qui définissent le 3D-Var adapté proposent un modèle de covariance d'erreur de prévision qui inclut la composante sensible tout en retenant le modèle plus conventionnel lorsque cette composante dite sensible est peu importante. Pour mieux comprendre les méthodes adaptatives, ces techniques ont d'abord été validées dans le cadre plus simple du 1D-Var. En suivant les expériences faites par Hello et Bouttier (2001) avec le 1D-Var, nous avons réalisé les expériences d'assimilation 1D-Var adapté en suivant la deuxième approche. Nos objectifs étaient d'établir un lien entre ces deux formulations et d'analyser le comportement de l'assimilation adaptative. Les résultats sont présentés dans le deuxième chapitre et ils révèlent que l'introduction des fonctions de sensibilité comme fonctions de structure dans le 1D-Var conduit à un comportement différent de l'assimilation adaptative dans la zone sensible tout en n'altérant pas le comportement de l'analyse ailleurs. L'observation générale de ces résultats est que l'incrément d'analyse passe plus près des observations qui sont dans la zone sensible, sa structure dépend de la valeur de la fonction de sensibilité dans les points d'observations et l'ajustement aux observations est aussi influencé par d'autres facteurs, comme par exemple l'écart type de l'erreur d'observation. Ces conclusions sont tout à fait similaires à celles obtenues par Hello et Bouttier (2001) avec leur formulation du 3D-Var adapté.

Dans le troisième chapitre, l'attention est portée sur l'application du 3D-Var adapté à une situation météorologique réelle, du 27 janvier 2003 pour laquelle une analyse de sensibilité *a posteriori* a été faite, identifiant ainsi un changement à l'analyse de référence qui conduit à une amélioration de la prévision à 24 heures. Cette analyse de sensibilité a été introduite comme fonction de structure dans le 3D-Var adapté et l'importance de cette composante est contrôlée par un paramètre permettant d'augmenter la variance d'erreur de prévision dans cette direction. Des expériences à une seule observation de l'état modèle ont permis d'examiner le comportement de l'incrément d'analyse pour une observation située dans une région où les valeurs de la fonction de sensibilité sont importantes et loin de celle-ci ce qui a permis de vérifier que le 3D-Var adapté conduit à une analyse identique au 3D-Var standard

en dehors de la région sensible. Dans la région sensible, on remarque que pour des grandes valeurs de la variance dans la direction de sensibilité, la structure de l'incrément d'analyse n'est plus homogène et isotrope. Elle épouse la forme de la fonction de sensibilité en se rapprochant de la valeur observée. De plus, pour une valeur unitaire de la variance dans la direction de sensibilité, le 3D-Var adapté se comporte comme le 3D-Var standard. En effet, il est important de souligner que le modèle de covariance d'erreur du 3D-Var standard se projette en partie dans la direction de sensibilité : après la renormalisation décrite au chapitre 2, ceci correspond à une variance unitaire dans la direction de sensibilité. Finalement, les deux algorithmes du 3D-Var adapté ont pu être comparés et montrés être équivalents.

Après avoir validé le 3D-Var adapté, une étude de cas a été faite pour la situation météorologique du 27 janvier 2003. Une analyse avec le 3D-Var adapté a été faite en utilisant l'ensemble complet des observations disponibles et utilisées dans l'analyse variationnelle opérationnelle du CMC. Pour notre étude, les fonctions de sensibilité *a posteriori* étaient utilisées comme fonctions de structure dans le 3D-Var adapté. Ces fonctions de sensibilité ont été obtenues en utilisant l'algorithme d'analyse de sensibilité du CMC qui permet de définir la fonction diagnostique de différentes façons pour réduire l'erreur de prévision autant sur le domaine global que sur une région mieux localisée pour différentes fenêtres temporelles soit 24 heures ou 48 heures. Ceci a permis d'obtenir différentes fonctions de structure localisées ou non. Le but de notre étude était de comparer le comportement du 3D-Var adapté pour différentes définitions des fonctions de structure.

Nous avons présenté trois fonctions de sensibilité *a posteriori* de même que les changements apportées par les analyses adaptatives 3D-Var par rapport à l'analyse du 3D-Var opérationnel. Le but du chapitre a été d'illustrer que la définition d'une fonction de structure appropriée pour un système d'assimilation vise à simultanément concorder aux observations disponibles et améliorer la qualité des prévisions. Sur le premier point, les résultats obtenus montrent un meilleur ajustement aux observations pour les analyses du 3D-Var adapté comparativement à l'analyse 3D-Var opérationnelle et ce, pour chaque famille d'observations et pour l'ensemble de toutes les observations disponibles. Cette diminution de l'écart aux observations s'explique naturellement par l'augmentation de la variance d'erreur de prévision introduite par le 3D-Var adapté. Sur le deuxième point, il a été observé que

l'erreur de prévision intégrée à la verticale et sur l'hémisphère Nord extratropical est réduite par rapport à celle calculée à partir de la prévision opérationnelle. Cette réduction est moins importante que celle issue des prévisions basées sur les analyses de sensibilité qui par construction ont été définies pour minimiser l'erreur de prévision à 24 heures ou 48 heures sur un domaine géographique spécifié. Par contre, la comparaison de l'analyse de sensibilité avec les observations montre qu'elle est plus loin des observations que l'analyse standard. Le résultat est en accord avec ceux obtenus par Isaksen *et al.*, (2004) pour une étude plus approfondie comprenant une période de deux mois. Leur étude a montré que les prévisions issues des analyses de sensibilités s'éloignent des observations pendant les 12 premières heures de la prévision. Nos expériences indiquent certaines limitations de la méthode 3D-Var adapté lorsqu'elle est appliquée à un cas météorologique bien réel en effectuant des expériences d'assimilation avec l'ensemble des observations utilisées dans un système opérationnel.

Ce travail peut se poursuivre et la même approche 3D-Var adapté pourrait s'appliquer également aux fonctions de sensibilité *a priori*. Ces fonctions accordent plus d'importance à la composante instable qui conduira à une croissance d'erreur plus importante. Elles permettront également, d'identifier en temps réel, pour chaque situation météorologique, les régions sensibles, où la moindre erreur sur les conditions initiales peut croître très rapidement et avoir un effet considérable sur la qualité de la prévision. Dans ces régions, il semblait naturel d'ajouter de nouvelles observations (observations ciblées) ou d'utiliser les observations disponibles de manière plus fine (observations satellitaires) afin d'augmenter la précision de l'analyse. Les campagnes de mesures comme FASTEX (1997) et plus récemment NA-TReC (2003) ont été des occasions de mettre en oeuvre les concepts concernant le ciblage des observations : les mesures par bateaux et par avions ont été réalisées à l'endroit et à l'instant où elles seraient les plus utiles, en fonction des prévisions en temps réel de modèles de simulation de l'atmosphère dotés d'un calcul d'une fonction de sensibilité. Ces campagnes ont montré que l'impact de données ciblées sur les prévisions dépend fortement de la méthode d'assimilation employée et que le système d'assimilation actuel (le 3D-Var) ne peut pas utiliser de manière optimale cette information.

Bien que toute étude ait ses propres limitations, il ne fait nul doute que la connaissance des techniques adaptatives ainsi que les expériences effectués au cours de ce projet seront précieuses pour aborder l'utilisation des fonctions de sensibilité *a priori* comme fonctions de structure dans le 3D-Var. Cependant, vu que cette étude se limite à un seul cas, il serait nettement prématuré d'avancer de conclusions définitives concernant la performance de la méthode d'assimilation 3D-Var adapté par rapport au 3D-Var opérationnel. Cette étude montre que l'introduction de fonctions de structure dépendant de l'écoulement est délicate et que leur impact dans un système d'assimilation dépend de plusieurs éléments qu'il faut prendre en compte.

ANNEXE A

TRANSFORMATION DE HOUSEHOLDER

Dans cette annexe, les propriétés des matrices de Householder sont présentées et une interprétation de l'application de cette transformation est donnée. Une présentation détaillée de ce sujet est donnée dans Golub et van Loan (1983).

Soit \mathbf{v} un vecteur de \mathfrak{R}^n . On appelle *matrice de Householder* du vecteur \mathbf{v} une matrice \mathbf{X} de la forme suivante :

$$\mathbf{X} = \mathbf{I}_n - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\|\mathbf{v}\|^2} \quad (\text{A.1})$$

Cette matrice est *symétrique* ($\mathbf{X}^T = \mathbf{X}$), *orthogonale* ($\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{I}_n$), *idempotente* ($\mathbf{X} = \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^T$).

Dans ce qui suit, sans perte de généralité, on pose $\|\mathbf{v}\|^2 = 1$, et \mathbf{v} est un vecteur unitaire. La symétrie de la matrice vient du fait que la transposée d'un produit est égal au produit des transposées dans l'ordre inverse et conséquemment,

$$\left(\mathbf{v}\mathbf{v}^T\right)^T = \mathbf{v}\mathbf{v}^T \quad (\text{A.2})$$

et alors :

$$\mathbf{X}^T = \left(\mathbf{I}_n - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T\right)^T = \mathbf{I}_n - (2\mathbf{v}\mathbf{v}^T)^T = \mathbf{X} \quad (\text{A.3})$$

Elle est aussi orthogonale :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^T\mathbf{X} &= \mathbf{X}\mathbf{X} = \left(\mathbf{I}_n - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T\right)\left(\mathbf{I}_n - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T\right) \\ &= \mathbf{I}_n - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T + 4\mathbf{v}\mathbf{v}^T\mathbf{v}\mathbf{v}^T = \mathbf{I}_n \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

puisque $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2 = 1$. La matrice \mathbf{X} est donc idempotente : $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}_n$. Ceci implique que :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^T \quad (\text{A.5})$$

Nous voulons démontrer la propriété énoncée dans le chapitre II :

« Pour tout vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_1$ du \mathfrak{R}^n et pour tout vecteur \mathbf{y}_1 non colinéaire de $\tilde{\mathbf{y}}_1$ il existe $\alpha \in \mathfrak{R}$,

$$\text{et un vecteur } \mathbf{v} \in \mathfrak{R}^n, \text{ tels que : } \mathbf{X}\tilde{\mathbf{y}}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ où } \mathbf{X} = \mathbf{I}_n - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\|\mathbf{v}\|^2} . »$$

Pour démontrer cette propriété, on cherche à déterminer un vecteur \mathbf{v} (et donc un projecteur \mathbf{X}) tel que le vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_1$ soit transformé par \mathbf{X} en un vecteur colinéaire au vecteur \mathbf{y}_1 (ayant le vecteur $\mathbf{e}_1, \|\mathbf{e}_1\|=1$) et de même sens. Une représentation géométrique symbolique est donnée pour comprendre l'algorithme de Householder. Sur la figure (A.1), le plan du schéma est une représentation symbolique de \mathfrak{R}^n tout entier et nous avons représenté par une droite l'hyperplan de \mathfrak{R}^n des vecteurs orthogonaux à la direction \mathbf{y}_1 . On y a représenté le vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_1$ ainsi que le vecteur $\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|\mathbf{e}_1$ sur lequel on doit appliquer $\tilde{\mathbf{y}}_1$. On remarque qu'il n'existe que deux symétries qui envoient $\tilde{\mathbf{y}}_1$ sur la droite vectorielle engendrée par \mathbf{y}_1 . Elles correspondent aux hyperplans nommés ici P_1 et P_2 respectivement orthogonaux aux vecteurs : \mathbf{v} et \mathbf{w} où $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{y}}_1 - \|\tilde{\mathbf{y}}_1\|\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{y}}_1 + \|\tilde{\mathbf{y}}_1\|\mathbf{e}_1$. Seule la symétrie hyperplan relative à P_1 envoie le vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_1$ sur $\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|\mathbf{e}_1$. Une conclusion peut être tirée de la figure (A.1) : du point de vue vectoriel, on remarque que la projection orthogonale de $\tilde{\mathbf{y}}_1$ sur \mathbf{v} est :

$$\tilde{\mathbf{y}}_1^\perp = \frac{\mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{y}}_1}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} \quad (\text{A.6})$$

et que la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à l'hyperplan P_1 préserve les longueurs :

$$\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{y}}_1 - 2 \frac{\mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{y}}_1}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = (\mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\|\mathbf{v}\|^2}) \tilde{\mathbf{y}}_1 \equiv \mathbf{X}\tilde{\mathbf{y}}_1. \quad (\text{A.7})$$

Le vecteur \mathbf{v} est changé en son opposé par l'application de la transformation de Householder :

$$\left(\mathbf{I}_n - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v} = \mathbf{v} - \frac{2\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \mathbf{v} - 2\mathbf{v} = -\mathbf{v} \quad (\text{A.8})$$

D'un point de vue algébrique, on peut choisir :

$$\alpha = \pm\|\tilde{\mathbf{y}}_1\| \equiv S \Rightarrow \alpha = \pm S = \pm\sqrt{y_{11}^2 + \dots + y_{1n}^2} \quad (\text{A.9})$$

en sachant que la longueur d'un vecteur est préservée par une transformation orthogonale.

Avec la notation : $p = \mathbf{v}^T \tilde{\mathbf{y}}_1$

$$\mathbf{X}\tilde{\mathbf{y}}_1 = \left(\mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\tilde{\mathbf{y}}_1 = \tilde{\mathbf{y}}_1 - \frac{2p\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} = (\alpha, 0, \dots, 0)^T \quad (\text{A.10})$$

Dans la relation précédente, on multiplie à gauche par \mathbf{v}^T :

$$p - 2\frac{p\mathbf{v}^T\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} = \mathbf{v}_1\alpha \quad (\text{A.11})$$

$$p = -\alpha\mathbf{v}_1 \quad (\text{A.12})$$

Si on remplace en (A.10) l'expression donnée par (A.12), nous obtenons

$$\tilde{\mathbf{y}}_1 + \frac{2\alpha\mathbf{v}_1\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} = (\alpha, 0, \dots, 0)^T \quad (\text{A.13})$$

ayant les composantes :

$$\begin{cases} \tilde{y}_{11} + 2\alpha\mathbf{v}_1^2 = \alpha \Rightarrow \mathbf{v}_1^2 = \frac{\alpha - \tilde{y}_{11}}{2\alpha} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\tilde{y}_{11}}{\alpha}\right) & (\text{A.14}) \\ \tilde{y}_{1i} - 2p\mathbf{v}_i = 0, \quad i = \overline{2, n} & (\text{A.15}) \end{cases}$$

On montre qu'il vaut mieux choisir le signe moins (pour éviter les erreurs d'arrondi), si bien que : $\text{sign}(\alpha) = -\text{sign}(\tilde{\mathbf{y}}_1)$. Avec cette convention la soustraction dans la relation (A.15)

devient une addition. Alors, une fois \mathbf{v}_1 déterminé, on calcule $p = -\alpha\mathbf{v}_1$ et aussi, $\mathbf{v}_i = \frac{\tilde{y}_{1i}}{2p}$,

$i = \overline{2, n}$ et le vecteur v est complètement déterminé. La seule connaissance de v permet

d'utiliser la matrice X , en effet $X\tilde{y}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

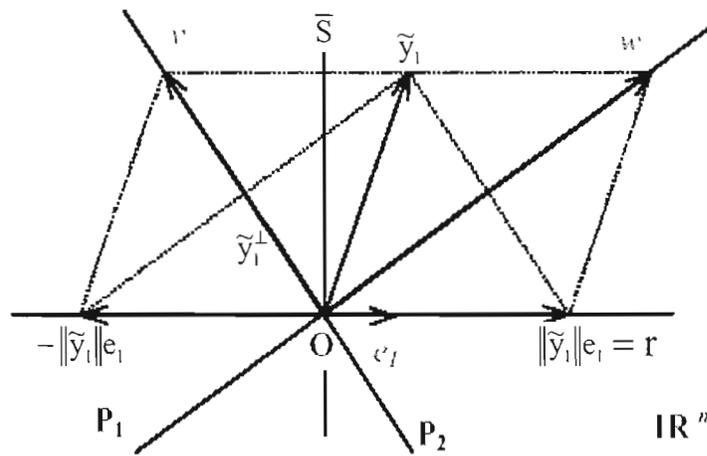


Figure A.1 : Représentation géométrique de l'algorithme de Householder.

ANNEXE B

CALCUL DE LA MATRICE $\tilde{\mathbf{I}}^{-1}$ PAR LA MÉTHODE DE CHOLESKI

Dans cette annexe, le calcul détaillé est présenté pour définir la matrice $\tilde{\mathbf{I}}^{-1}$, par la méthode de Choleski, utilisée dans le chapitre II. Cette méthode s'applique pour des matrices symétriques définies positives.

« Une matrice carrée réelle $\hat{\mathbf{B}}_x^{-1}$ est symétrique définie positive si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme $\hat{\mathbf{B}}_x^{-1} = \tilde{\mathbf{I}}^{-T} \tilde{\mathbf{I}}^{-1}$ ».

Soit $\hat{\mathbf{B}}_x^{-1} = \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ \vdots & \mathbf{I}_{n-1} & \\ f_n & & \end{pmatrix}$ la matrice symétrique définie positive. Pour trouver la matrice

triangulaire inférieure $\tilde{\mathbf{I}}^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \mathbf{I}_{n-1} & \\ b_n & & \end{pmatrix}$ il suffit d'écrire les équations de $\hat{\mathbf{B}}_x^{-1} = \tilde{\mathbf{I}}^{-T} \tilde{\mathbf{I}}^{-1}$

pour la partie triangulaire supérieure de $\hat{\mathbf{B}}_x^{-1}$.

Alors :

$$\begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \\ \vdots & \mathbf{I}_{n-1} & \\ f_n & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \\ 0 & \mathbf{I}_{n-1} & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \mathbf{I}_{n-1} & \\ b_n & & \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

d'où le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \sum_{i=1}^n b_i^2 = b_1^2 + \sum_{i=2}^n b_i^2 \\ f_2 = b_2 \\ \vdots \\ f_n = b_n \end{array} \right. \quad (\text{B.2})$$

et les coefficients sont déterminés par

$$\begin{aligned} b_1 &= \sqrt{f_1 - \sum_{i=2}^n f_i^2} \\ b_i &= f_i, \quad i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

avec la condition que ce qu'il y a sous la racine carrée soit strictement positif. On en arrive alors à la forme finale :

$$\tilde{\mathbf{I}}^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{f_1 - (f_2^2 + \dots + f_n^2)} & 0 & \dots & 0 \\ f_2 & & & \\ \vdots & & \mathbf{I}_{n-1} & \\ f_n & & & \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

ANNEXE C

CAS LIMITES DE L'APPROCHE PROPOSÉE PAR HELLO ET BOUTTIER

Dans cette annexe, nous présentons deux situations limites identifiées dans la formulation et le développement mathématique de l'approche énoncée par Hello et Bouttier (2001) : l'une porte sur la définition des covariances d'erreur de l'ébauche et l'autre sur la variance d'erreur dans la direction de sensibilité.

Tout d'abord, si on considère que la matrice \mathbf{B} est définie par une portée très courte, alors, dans cette limite, les covariances entre points voisins tendent vers zéro. La matrice du changement de variable prend la forme $\mathbf{L} = \sigma_b \mathbf{I}$. Dans cette situation, les coefficients $(f_i)_{i=1,n}$ donnés par la relation (2.18) s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_i^2 \|\tilde{\mathbf{y}}_1\|} \mathbf{X}^T \mathbf{L}^T \mathbf{L} \tilde{\mathbf{y}}_1 = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|} \frac{\sigma_b^2}{\sigma_i^2} \begin{pmatrix} \|\tilde{\mathbf{y}}_1\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Dans ce cas-ci, seulement le premier coefficient f_1 est non nul et il est calculé comme le rapport entre la variance d'erreur d'ébauche du 3D-Var et la variance d'erreur d'ébauche dans la direction de sensibilité. Les autres coefficients sont tous nuls, l'expression de la matrice de décomposition $\tilde{\mathbf{I}}$ prend alors la forme :

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{f_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{I}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{I}}^T \quad (\text{C.2})$$

Conséquemment, la nouvelle matrice de covariance d'erreur de prévision $\tilde{\mathbf{B}}_x$ prend la forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{B}}_x = \mathbf{L}\tilde{\mathbf{B}}_\chi\mathbf{L}^\top = \mathbf{L}\mathbf{X}\tilde{\mathbf{\Gamma}}\tilde{\mathbf{\Gamma}}^\top\mathbf{X}^\top\mathbf{L}^\top = \mathbf{L}\mathbf{X} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_b^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{I}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \mathbf{X}^\top\mathbf{L}^\top \quad (\text{C.3})$$

La deuxième situation limite est obtenue lorsque le paramètre σ_1 prend une valeur très grande ($\sigma_1 \rightarrow \infty$). Les coefficients $(f_i)_{i=1,n}$, déterminés par la relation (2.16), peuvent alors être réécrits comme :

$$(f_i)_{i=1,n} = \frac{1}{\sigma_1^2} (f_i')_{i=1,n} \quad (\text{C.4})$$

où nous avons noté par $(f_i')_{i=1,n}$ les éléments du vecteur :

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{y}}_1\|} \mathbf{X}^\top\mathbf{L}^\top\mathbf{y}_1 \quad (\text{C.5})$$

Lorsque σ_1 tend vers l'infini, les éléments de la matrice $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ calculés à partir des coefficients $(f_i)_{i=1,n}$ et définis par la relation (2.18) s'écrivent de la manière suivante

$$\tilde{i}_1 = \left(f_1 - \sum_{i=2}^n f_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{\sigma_1}{\sqrt{f_1'}} \text{ et tous les autres } (\tilde{i})_{i=2,n} = -f_i \left(f_1 - \sum_{i=2}^n f_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \approx 0.$$

Dans ce cas-ci, l'expression de la matrice $\tilde{\mathbf{B}}_x$ prend la forme :

$$\tilde{\mathbf{B}}_x = \mathbf{L}\tilde{\mathbf{B}}_\chi\mathbf{L}^\top = \mathbf{L}\mathbf{X}\tilde{\mathbf{\Gamma}}\tilde{\mathbf{\Gamma}}^\top\mathbf{X}^\top\mathbf{L}^\top = \mathbf{L}\mathbf{X} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2}{f_1'} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{I}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \mathbf{X}^\top\mathbf{L}^\top \quad (\text{C.6})$$

ANNEXE D

RELATION DE SHERMAN - MORRISON

Dans cette annexe, la relation Sherman - Morrison est démontrée. Celle-ci a été utilisée au chapitre II pour le calcul de la matrice inverse \mathbf{B}_κ^{-1} . Cette relation s'énonce (Golub et van Loan, 1983) :

« Soit $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ une matrice non singulière et $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{R}^n$ deux vecteurs arbitraires. Si

$$\mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \neq -1, \text{ alors : } (\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}\mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}} \gg$$

Le développement en série Taylor de l'expression $(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1}$ est le point de départ pour démontrer la relation de Sherman – Morrison :

$$(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{X} + \mathbf{X}^2 - \mathbf{X}^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathbf{X})^k \quad (\text{D.1})$$

où \mathbf{I} est la matrice identité.

À l'aide de cette relation et avec la notation :

$$\lambda = \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \quad (\text{D.2})$$

l'expression $(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1}$ peut être transformée en :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} &= [\mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}\mathbf{v}^T)]^{-1} \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} \mathbf{A}^{-1} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}\mathbf{v}^T + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}\mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \dots) \mathbf{A}^{-1} \\ &= \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}\mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} (1 - \lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + \dots) \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Dans (D.3) nous avons utilisé la propriété voulant que l'inverse d'un produit de deux matrices soit égal au produit des inverses dans l'ordre inverse et aussi la relation (D.1).

Alors,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k \quad (\text{D.4})$$

où bien :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}(1 + \lambda)^{-1} \quad (\text{D.5})$$

La relation (D.5) représente la relation de Sherman-Morrison employée dans le calcul de la matrice inverse d'une matrice donnée.

BIBLIOGRAPHIE

- Andersson, E., M. Fisher, R. Munro et A. McNally, 2000: Diagnosis of background errors for radiances and other observable quantities in a variational data assimilation scheme, and the explanation of a case of poor convergence. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **126**, 1455-1472.
- Barkmeijer, J., M. Van Gijzen et F. Bouttier, 1998: Singular vectors and estimates of the analysis-error covariance metric. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **124**, 1695-1713.
- Bergot, T., G. Hello, A. Joly et S. Malardel, 1999: Adaptive observations: A feasibility study. *Mon. Weather Rev.*, **127**, 743-765.
- _____, et A. Doerenbecher, 2002: A study on the optimization of the deployment of targeted observations using adjoint-based methods. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **128**, 1689-1712.
- Bouttier, F., 1993: The dynamics of error covariances in a barotropic model. *Tellus*, **45A**, 408-423.
- _____, J. Derber et M. Fisher, 1997: The 1997 revision of the J_b term in 3D/4D Var. *ECMWF Research Dept. Technical Memorandum*, no. **238**, 55pp.
- _____, et P. Courtier, 1999: Data assimilation concepts and methods, Training course notes of European Centre for Medium-range Weather Forecasts (ECMWF), Reading, UK.
- Buizza, R., et T. Palmer, 1995: The singular vector structure of the atmospheric general circulation. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 1434-1456.
- Buehner, M., 2004: Ensemble-derived stationary and flow-dependent background error covariances: Evaluation in a quasi-operational NWP setting. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **128**, 1-31.
- Côté, J., S. Gravel, A. Méthot, A. Patoine, M. Roch et A. Staniforth, 1998: The operational CMC-MRB global environmental multiscale (GEM) model: Part I - Design considerations and formulation. *Mon. Weather Rev.*, **126**, 1373-1395.
- Courtier, P., et O. Talagrand, 1987: Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. Part II: Numerical results. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **113**, 1329-1347.

- _____, J. Derber, R. Errico, J.-F. Louis et T. Vukicevic, 1993: Important literature on the use of adjoint, variational methods and Kalman filter in meteorology. *Tellus*, **45A**, 342-357.
- _____, J.-N. Thépaut et A. Hollingsworth, 1994 : A strategy for operational implementation of 4D-Var, using an incremental approach. . *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **120**, 1367-1388.
- Daley, R., 1991: *Atmospheric data analysis*, Cambridge University Press, 457 pp.
- Derber, J. C., 1989: A variational continuous assimilation technique. *Mon. Weather. Rev.*, **117**, 2437-2446.
- _____, et F. Bouttier, 1999: A reformulation of the background error covariance in the ECMWF global data assimilation system. *Tellus*, **51A**, 195-221.
- Fisher, M., et P. Courtier, 1995: Estimating the covariance matrix of analysis and forecast error in variational data assimilation. *ECMWF Research Dept. Technical Memorandum*, no. **220**, 26 pp.
- _____, 1998: Development of a simplified Kalman Filter. *ECMWF Research Dept. Technical Memorandum*, no. **260**, 16 pp.
- _____, et E. Andersson, 2001 : Developments in 4D-Var and Kalman filtering. *ECMWF Research Dept. Technical Memorandum*, no. **347**.
- Gandin, L. S., 1963: Objective analysis of meteorological fields. *Gidrometeorologicheskoe Izdatel'svo*, Leningrad, USSR. English translation by Israeli Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965.
- Gaspari, G., et S. E. Cohn, 1999: Construction of correlation functions in two and three dimensions. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **125**, 723-757.
- Gauthier, P., 1992: Chaos and quadric-dimensional data assimilation: a study based on the Lorenz model. *Tellus*, **44A**, 2-17.
- _____, M. Buehner et L. Fillion, 1998: Background-error statistics modelling in a 3D variational data assimilation scheme, Proceedings of the *ECMWF workshop on diagnosis of data assimilation systems*, 2-4 November 1998, Reading, UK, pp. 131-145.
- _____, C. Charette, L. Fillion, P. Koclas, S. Laroche, 1999: Implementation of a 3D variational data assimilation system at the Canadian Meteorological Centre. Part I: The global analysis. *Atmosphere Ocean*, **37** (2), 103-156.
- _____, 2003: *Operational implementation of variational data assimilation*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, Data assimilation for the Earth System, 167-176.

- _____, C. Chouinard et B. Brasnett, 2003: *Quality control: methodology and applications*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, Data assimilation for the Earth System, 177-187.
- Gelaro, R., R. Buizza, T. N. Palmer et E. Klinker, 1998: Sensitivity analysis of forecast errors and the construction of optimal perturbations using singular vectors. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 1012-1037.
- Gilbert, J. C., et C. Lemaréchal, 1989: Some numerical experiments with variable storage quasi-Newton algorithms. *Math. Programming*, **45**, 407-435.
- Golub, H. G. et C. F. Van Loan, 1983: *Matrix computations*. The John Hopkins University Press, Baltimore, U.S.A., 476 pp.
- Haas, P., A. Beck, M. Ehrendorfer, 2000: Reduced rank Kalman filter, TM-NOTIZ, no. **149**, 13 pp. [Disponible: <http://homepage.univie.ac.at/alexander.beck/>].
- Hello, G., F. Lalaurette et J.-N. Thépaut, 2000: Combined use of sensitivity information and observations to improve meteorological forecasts: A feasibility study applied to the 'Christmas storm' case. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **126**, 621-647.
- _____, et F. Bouttier, 2001: Using adjoint sensitivity as a local structure function in variational data assimilation. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **8**, 347-355.
- _____, 2002: Prise en compte de la dynamique associée aux dépressions des latitudes moyennes dans la détermination des conditions initiales des modèles météorologiques: approche en correction et dans une schéma d'assimilation. Thèse, Université Toulouse III- Paul Sabatier, France, 231 pp.
- Holton, J. R., 1992: *An introduction to dynamic meteorology*. Academic Press, 511 pp.
- Isaksen, L., M. Fisher and E. Andersson, 2004: The structure and realism of sensitivity perturbations and their interpretations as 'Key Analysis Errors'. *ECMWF Research Dept. Technical Memorandum*, no. **445**, 23 pp.
- Jazwinski, A. H., 1970: *Stochastic processes and filtering theory*. Academic Press, New York, 376 pp.
- Joly, A., 1995: The stability of steady fronts and the adjoint method: nonmodal frontal waves. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 3082-3108.
- _____, D. Jorgensen, M. A. Shapiro, A. Thorpe, P. Bessemoulin, K.A. Browning, J.-P. Cammas, J.-P. Chalon, S.A. Clough, K.A. Emanuel, L. Eymard, R. Gall, P.H. Hildebrand, R.H. Langland, Y. Lemaître, P. Lynch, J.A. Moore, P.O.G. Persson, C. Snyder and R. M. Wakimoto, 1997: The Fronts and Atlantic Storm-Track

- Experiment (FASTEX): Scientific Objectives and Experimental Design. *Bulletin of the American Meteorological Society*, **78** (9), 1917-1940.
- _____, 2003: L'observation adaptative. *La Météorologie*, 8^{ème} série, **43**, 22-36.
- Kalnay, E., 2002: *Atmospheric modelling, data assimilation and predictability*. Cambridge University Press, 341 pp.
- Klinker, E., F. Rabier and R. Gelaro, 1998: Estimation of key analysis errors using the adjoint technique. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **124**, 1909-1933.
- Lacarra, J. F., et O. Talagrand, 1988: Short-range evolution of small perturbations in a barotropic model. *Tellus*, **40A**, 81-95.
- Laroche, S., et P. Gauthier, 1998: A validation of the incremental formulation of 4D-Var variational data assimilation in a nonlinear flow. *Tellus*, **50A**, 557-572.
- _____, M. Tanguay, A. Zadra, J. Morneau, 2002: Use of adjoint sensitivity analysis to diagnose the CMC Global analysis performance: A case study. *Atmosphere Ocean*, **40** (4), 423-443.
- Le Dimet F.-X., et O. Talagrand, 1986: Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: Theoretical aspects. *Tellus*, **38A**, 97-110.
- Lorenç, A. C., 1986: Analysis methods for numerical weather prediction. *Q. J. R. Meteor. Soc.*, **112**, 1177-1194.
- Lorenz, E. N., 1963: Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130-141.
- _____, 1965: A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. *Tellus*, **17**, 321-323.
- Mitchell, H. L., P. L. Houtekamer et G. Pellerin, 2002: Ensemble size, balance and model-error representation in an ensemble Kalman filter. *Mon. Weather Rev.*, **130**, 2791-2808.
- Molteni, F., et T. N. Palmer, 1993: Predictability and finite time instability of the northern winter circulation. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **119**, 269-298.
- Montani, A., et A. J. Thorpe, 2002: Mechanism leading to singular-vector growth for FASTEX cyclones. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **128**, 131-148.
- Navon, I. M. et D. M. Legler, 1987: Conjugate-gradient methods for large-scale minimization in meteorology. *Mon. Weather Rev.*, **115**, 1479-1502.

- Palmer, T. N., R. Gelaro, J. Barkmeijer, R. Buizza, 1998: Singular vectors, metrics and adaptive observations. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 633-653.
- Parrish, D. F. et J. C. Derber, 1992: The National Meteorological Center's spectral statistical interpolation analysis system. *Mon. Weather Rev.*, **120**, 1747-1763
- Rabier, F., P. Courtier, O. Talagrand, 1992: On application of adjoint models to sensitivity analysis. *Beitr. Phys. Atmos.*, **65**, 177-192.
- _____, E. Klinker, P. Courtier, A. Hollingsworth, 1996: Sensitivity of forecast errors to initial conditions. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **122**, 121-150.
- _____, A. McNally, E. Andersson, P. Courtier, P. Undén, J. Eyre, A. Hollingsworth et F. Bouttier, 1998: The ECMWF implementation of three dimensional variational assimilation (3D-Var). Part II: Structure functions. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **124**, 1809-1829.
- Ricci, S., 2004: Assimilation variationnelle océanique : modélisation multivariée de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche. Thèse, Université Toulouse III- Paul Sabatier, France, 276 pp.
- Strang, G., 1986: *Introduction to Applied Mathematics*. Wellesley-Cambridge Press, 758 pp.
- Talagrand, O., 1981: A study of the dynamics of four-dimensional data assimilation. *Tellus*, **33**, 43-60.
- _____, et P. Courtier, 1987: Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. Part I: Theory. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **113**, 1311-1328.
- Tanguay, M., P. Bartello et P. Gauthier, 1995: Four-dimensional data assimilation with a wide range of scales. *Tellus*, **47A**, 974-997.
- _____, et S. Polavarapu, 1999: The adjoint of the semi-Lagrangian treatment of the passive tracer equation. *Mon. Weather Rev.*, **127**, 551-564.
- _____, et S. Laroche, 2002: Grid-point response to the incremental strategy for variational applications. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **128**, 385-397.
- Thépaut, J.-N., P. Courtier, G. Bélaud et G. Lemaître, 1995: Dynamical structure functions in a four dimensional variational assimilation: a case study. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **122**, 535-561.