UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉTUDE DE L'ÉVOLUTION DE TÂCHES MATHÉMATIQUES ROUTINIÈRES À TRAVERS LEUR EXPLOITATION COLLECTIVE EN CLASSE

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DOCTORAT EN SCIENCES DE L'ÉDUCATION

PAR

GENEVIÈVE BARABÉ

NOVEMBRE 2022

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont à mes directeurs de recherche qui m'ont offert, chacun à leur façon, un environnement riche dans lequel j'ai eu plaisir à me développer en tant que chercheure en didactique des mathématiques. Votre accompagnement et votre soutien, tout au long de ce processus, ont été grandement enrichissants, et je ne saurai que vous en remercier.

J'aimerais également remercier ma famille pour leur soutien et leurs encouragements. À mon conjoint Simon, qui a écouté, pendant de longues heures, mes avancements, trouvailles, joies, mais aussi, mes incertitudes, et mes craintes. Merci pour ton soutien inconditionnel dans ce rêve qui était le mien. À ma mère, Linda, merci de m'avoir inculqué l'importance de la persévérance et du travail bien fait. C'est réconfortant de savoir que tu seras toujours là pour moi. Merci maman! À mon père, Yvon, merci de tes encouragements et de ton écoute active et attentive. Je suis privilégiée de t'avoir dans ma vie. Merci à mes enfants, Anthony et Alec, qui m'ont permis de me changer les idées, de rire, et de bouger! Vous m'avez certainement permis de conserver un bel équilibre.

Merci aux professeurs et étudiant.e.s du *Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématique* (LEAM), avec qui, à un moment ou à un autre j'ai eu le plaisir d'échanger et de discuter de recherche; de la mienne, des vôtres, de lectures communes, et plus encore. L'environnement de recherche du LEAM a, grâce à vous, été très enrichissant, autant personnellement que professionnellement. Je sais que vous vous reconnaîtrez.

Finalement, merci au Fonds de Recherche du Québec Société et Culture (FQRSC) pour leur appui financier, qui a été d'une aide précieuse. Merci également aux élèves et aux personnels du milieu scolaire qui ont accepté de faire partie du *Teaching Experiment* duquel mes données de recherche ont été tirées.

DÉDICACE

À mon père, Yvon, qui m'a montré que le monde était rempli de possibilités.

À mes enfants, Anthony et Alec, croyez en vous. Vous réaliserez, vous aussi, vos rêves.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

Dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques, une place centrale est accordée aux « bons problèmes » mathématiques pour la classe. Ces « bons problèmes » ont d'ailleurs largement montré leur potentiel pour la classe de mathématiques. Toutefois, certaines expériences que j'ai vécues en tant qu'assistante de recherche et, plus tard, comme conseillère pédagogique, m'ont amenée à questionner cette idée de « bons problèmes » mathématiques pour la classe. Dans ces expériences, des tâches routinières (aussi appelées exercices) étaient données à résoudre et menaient, à ma grande surprise, à une activité mathématique qui me semblait riche et dynamique. Ces expériences m'ont conduite à investiguer la notion de « bons problèmes » mathématiques pour la classe puis de « problèmes mathématiques » qui révèlent dépendre à la fois de caractéristiques de la tâche en elle-même que de l'activité qu'elle génère chez la personne qui est en interaction avec la tâche. Dans certains écrits, l'idée que des tâches routinières, puissent être exploitées en classe de mathématiques et mener à une activité de résolution de problèmes chez les élèves est retrouvée. Cette idée, un peu timide, ne semble toutefois pas documentée par les travaux de recherche. Cette recherche doctorale étudie, de façon empirique, la manière avec laquelle des tâches routinières peuvent être exploitées en classe de mathématiques afin de stimuler l'activité de résolution de problèmes des élèves.

Pour mener cette étude, des outils théoriques ont été développés en prenant ancrage dans la théorie cognitive de l'enaction et dans les travaux de recherche portant sur l'approche investigative en mathématiques. Ces outils théoriques fondent un cadre qui permet d'étudier la manière dont une tâche (ici routinière) peut évoluer à travers ses interactions avec la collectivité. Une particularité de ce cadre est de considérer la classe comme une unité collective, soit une collectivité, qui met en avant une activité mathématique à travers l'exploitation d'une tâche mathématique. Ce cadre permet de tourner le regard sur ce qu'un groupe peut faire, ensemble, plutôt que de s'intéresser à ce que chaque individu peut produire en lui-même. Trois types d'évolution d'une tâche sont proposés dans cette recherche qui met aussi en évidence différentes pratiques de mathématisation pouvant jouer un rôle dans l'évolution de tâches routinières. Ces pratiques de mathématisation offrent une manière d'étudier plus finement les actions mathématiques mises en avant pour résoudre les tâches routinières en classe. Les objectifs spécifiques poursuivis par cette recherche doctorale sont ainsi (1) d'analyser la manière dont des tâches routinières peuvent évoluer à travers l'activité collective de pose|résolution de problèmes déployée pour les résoudre, et (2) d'étudier le rôle que jouent les pratiques de mathématisation dans cette évolution de tâches routinières.

Pour mener cette recherche, une étude de cas suggestif a été conduite, c'est-à-dire un cas pour lequel l'exploitation collective de tâches routinières se trouve à un état exemplaire ou exagéré a été choisi afin d'étudier finement la dynamique de l'évolution de tâches routinières. Le cas suggestif sélectionné est celui des séances de classe issues d'un *Teaching Experiment* (TE) qui a été réalisé dans cinq classes d'élèves de la 5^{e} année à la 2^{e} secondaire pendant une année scolaire complète. Les séances de classe issues de ce TE constituent un cas suggestif pour cette étude doctorale parce que des tâches routinières sont données aux élèves à résoudre et qu'elles sont exploitées de façon collective en classe.

Cinq principaux résultats de recherche se dégagent de cette étude : 1) la formation d'une boucle itérative de tâches à résoudre dans la sphère collective; 2) la mise en place de situations d'explication, de justification et de validation; 3) l'utilisation d'exemples; 4) l'émergence d'incertitudes et 5) l'émergence de problèmes mathématiques collectifs. Ces cinq résultats de recherche permettent d'éclairer la manière dont des tâches routinières peuvent évoluer à travers l'activité collective déployée pour les résoudre. Ces résultats mettent également en évidence la place centrale qu'occupent les pratiques de mathématisation dans cette évolution.

En outre, cette recherche doctorale met en lumière que la résolution collective d'une tâche routinière est bel et bien une activité de résolution de problèmes mathématiques. L'étude réalisée pointe, à cet égard, vers le rôle fondamental de la collectivité dans l'activité qui se déploie en classe. Ce constat rejoint les recherches récentes sur la résolution de problèmes qui montrent qu'elle est fortement dépendante du contexte dans lequel elle prend place, mais également de la nature des tâches proposées en classe. Toutefois, cette recherche doctorale semble pointer vers le rôle prédominant du contexte qui peut aller au-delà de la tâche proposée puisqu'à travers ses interactions avec la collectivité, celle-ci est appelée à évoluer.

Mots clés : Didactique des mathématiques, tâches routinières, résolution de problèmes, enaction, approche investigative.

INTRODUCTION

Cette thèse doctorale, qui s'intéresse à l'exploitation collective de tâches routinières afin de stimuler l'activité de résolution de problèmes en classe de mathématiques, est divisée en sept chapitres.

Le Chapitre 1 présente la problématique de recherche. Ce chapitre débute par une discussion sur l'origine du questionnement. Il se poursuit par la présentation d'une vision des mathématiques en tant qu'activité de formulation et de résolution de problèmes. L'idée de « bons problèmes » mathématiques pour la classe est ensuite abordée, et deux exemples de tels problèmes sont donnés. Ceci mène à développer davantage la notion de problèmes mathématiques. Le rôle de l'enseignant dans l'émergence de « bons problèmes » mathématiques en classe est alors examiné. Tout ceci permet de nuancer l'idée de « bons problèmes » mathématiques pour la classe par une proposition que cette idée ne repose pas uniquement sur l'énoncé de la tâche en elle-même, mais également sur les interactions entre l'enseignant, les élèves et la tâche. La problématique se termine par la présentation de l'objectif général de recherche.

Le Chapitre 2 présente le cadre théorique de la recherche. Le cadre proposé prend appui sur la théorie cognitive de l'enaction qui est une théorie biologique de la connaissance. Une explication des mécanismes en jeu lors des interactions entre une personne et son environnement, contextualisée à la classe de mathématiques, débute ce chapitre à travers les concepts de *déterminisme structurel* et de *couplage structurel*. Les actions entreprises à travers l'exploitation d'une tâche mathématique sont ensuite étudiées par une conceptualisation de la nature dialectique entre la pose et la résolution d'un problème mathématique. Cette conceptualisation permet d'expliciter la nature de l'activité mathématique engendrée lors de la résolution d'une tâche mathématique en classe. Comme les élèves et l'enseignant sont plongés dans un contexte social de classe qui les amène à faire des mathématiques collectivement, une explication des phénomènes sociaux est offerte. Cette partie souligne la nature collective de l'activité déployée en classe. Le chapitre se termine par une proposition de conceptualisation de l'évolution d'une tâche mathématique à travers les interactions en classe.

Le Chapitre 3, pour sa part, présente un cadre conceptuel issu des travaux de recherche portant sur l'approche investigative en mathématiques. Le cadre conceptuel, en complémentarité au cadre théorique, offre une lunette plus précise pour étudier les actions *mathématiques* mises en avant en classe. Une analyse des travaux sur l'approche investigative, qui se centre sur l'exploitation de tâches mathématiques en classe, a permis de mettre en lumière différentes pratiques de mathématisation qui peuvent jouer un rôle dans l'exploitation de tâches mathématiques en classe. Ce chapitre présente en ce sens les pratiques de mathématisation suivantes : l'explication, la justification, l'argumentation, la validation, l'utilisation de symboles et représentations, la formulation de conjectures, le surpassement des erreurs et incertitudes, le recours à un corpus de connaissances mathématiques et la formulation de questions mathématiques. Découlant des travaux sur l'approche investigative, un autre type d'évolution possible de tâches routinières est ensuite discuté et vient compléter la conceptualisation proposée de l'évolution d'une tâche mathématique du chapitre précédent. Le chapitre se conclut par la présentation des objectifs spécifiques poursuivis par cette recherche doctorale.

Le Chapitre 4 aborde la méthodologie retenue pour mener à bien les objectifs spécifiques de recherche. Dans ce chapitre, la nature de la recherche est d'abord discutée en considérant le paradigme dans lequel elle s'inscrit ainsi que l'enjeu qu'elle poursuit. Ensuite, l'étude de cas en tant qu'approche de recherche est explicitée et l'étude de cas suggestif est retenue comme approche de recherche. Le cas suggestif choisi pour la réalisation de cette recherche est dévoilé et justifié. La méthode d'analyse privilégiée pour cette étude est enfin exposée par la définition des unités d'observation et d'analyse, la description du processus d'analyse de vidéo ainsi que la présentation des grilles d'analyse. Les analyses effectuées ont mené à une actualisation de la méthode d'analyse qui est dévoilée au terme de ce chapitre.

Le Chapitre 5 présente l'analyse des données. Dans ce chapitre, deux exemples d'analyses détaillées sont donnés. Ces exemples comprennent, chacun, une vignette descriptive de la séance de classe, une analyse de l'histoire de l'évolution de la tâche routinière puis une analyse des pratiques de mathématisation déployée en classe. Ensuite, les analyses synthétiques de cinq autres séances sont exposées. Le chapitre se termine par une discussion sur l'ensemble des analyses détaillées réalisées où un regard global sur l'évolution des tâches routinières est proposé et est suivi d'un regard global sur le rôle des pratiques de mathématisation dans ces évolutions de tâches routinières.

Le Chapitre 6 présente ensuite les résultats issus de cette recherche doctorale. Le chapitre aborde, dans l'ordre, la formation d'une boucle itérative de tâches à résoudre dans la sphère collective, la mise en place de situations d'explication, de justification et de validation, l'utilisation d'exemples, l'émergence d'incertitude et l'émergence de problèmes mathématiques collectifs. À travers le chapitre, ces résultats sont discutés au regard de leur rôle dans l'évolution des tâches routinières et sont illustrés par des exemples issus des analyses réalisées.

La thèse se termine avec le Chapitre 7 qui présente la conclusion. Dans cette conclusion, une synthèse de la recherche est d'abord offerte. Le chapitre met ensuite en lumière deux ouvertures qui sont abordées en tant que deux questionnements qui ressortent de cette étude doctorale. Le premier est à savoir si les tâches routinières pourraient aussi, par moments, se qualifier de « bons problèmes » mathématiques. Le second concerne les conditions qui y semblent favorables. Cette section sur les ouvertures prend appui sur différents travaux de recherche qui permettent d'offrir certaines pistes pour éclairer ces questionnements. Le chapitre traite ensuite des pistes de prolongements qui émergent de cette étude doctorale. Pour terminer, un mot de la fin vient clore cette thèse.

CHAPITRE 1
LA PROBLÉMATIQUE DE RECHERCHE

Ce chapitre est divisé en sept sections qui permettent d'investiguer et creuser la notion de problèmes mathématiques qui est au cœur du chapitre. La première section aborde l'origine de mon questionnement autour de cette notion. La seconde présente une vision des mathématiques en tant qu'activité de formulation et de résolution de problèmes. La troisième discute, pour sa part, des caractéristiques intrinsèques aux « bons problèmes » mathématiques pour la classe. La quatrième offre deux exemples de tels « bons problèmes » mathématiques. La cinquième traite plus précisément de la notion de problèmes en mathématiques en elle-même. La sixième évoque le rôle de l'enseignant dans l'émergence de problèmes mathématiques en classe. Finalement, la dernière section décrit l'objectif général de recherche.

1.1 Origine du questionnement

Les balbutiements de cette recherche doctorale ont vu le jour lorsque j'accompagnais mon directeur de thèse dans sa cueillette de données pour son projet de recherche sur le calcul mental en mathématiques. Dans ce projet de recherche, réalisé auprès de participants variés allant d'enseignants et de conseillers pédagogiques à des élèves du primaire et du secondaire, mon directeur s'intéresse à la manière dont les participants entrent dans la résolution des tâches proposées en contexte de calcul mental. De mon côté, ce qui a attiré mon attention a été de voir à quel point la séance bouillonnait d'idées et d'activités mathématiques qui me semblaient riches et pertinentes. En effet, à partir de tâches de calcul mental comme « Voici une distribution : 10, 19, 20, 23, 30. La moyenne est-elle plus près de 10, de 20 ou de 30 ? » ou encore « Trouver le nombre de solutions du système d'équations formé de $y = 3x + 4$ et de $y = 3x + 9$ », les participants étaient fortement engagés, offraient plusieurs solutions différentes et partageaient avec les autres leurs interrogations, réflexions et recherches mathématiques. Dans le feu de l'action, les participants soulevaient différentes questions concernant leurs stratégies et celles des autres, forçant le chercheur à interagir de manière soutenue avec eux sur les idées évoquées, à les relancer avec d'autres questions, à proposer d'autres idées, etc. Je prenais plaisir à voir toutes ces personnes vivre cette expérience mathématique. J'étais toutefois intriguée de comprendre comment une telle activité mathématique avait pu être engendrée par des problèmes en apparence simple à résoudre (dû au contexte de calcul mental) considérant le niveau des participants.

Ces expériences sur ce site de recherche m'ont par la suite motivée à lire différents travaux de recherche portant sur un enseignement des mathématiques centré sur l'activité mathématique et la résolution de problèmes. Ces lectures ont constitué un tournant important pour moi dans ma façon d'envisager l'enseignement des mathématiques. Travaillant par la suite en tant que conseillère pédagogique (depuis l'année scolaire 2017-2018), j'ai vécu différentes expériences qui ont continué à me faire cheminer dans mon questionnement sur l'enseignement et la résolution de problèmes.

Voici une de ces expériences. À l'automne 2019, alors que j'étais en classe avec des élèves de première secondaire (12-13 ans), j'ai présenté un problème portant sur l'addition de deux fractions dont le dénominateur de l'une est multiple de celui de l'autre; une notion abordée dès la cinquième année du primaire (10-11 ans). Les élèves de première secondaire avaient déjà travaillé cette notion au primaire. Je voulais me servir de ce problème comme amorce pour travailler la multiplication de fractions; un concept qui n'avait pas encore été abordé avec eux par l'enseignant. Le problème proposé aux élèves était le suivant :

> Jules et Jim ont commandé deux pizzas de même grandeur, l'une au fromage et l'autre au bacon. Jules a mangé $\frac{5}{6}$ d'une pizza et Jim a mangé $\frac{1}{2}$ de l'autre pizza. Quelle quantité de pizza ont-ils mangée en tout ? (Adapté de Van de Walle et Lovin, 2008)

Ce problème m'apparaissait simple à résoudre pour ces élèves de première secondaire qui faisaient d'ailleurs partie du PEI (programme d'éducation intermédiaire); c'est-à-dire qu'ils étaient considérés comme des élèves forts au plan académique. La vignette qui suit présente une reconstruction de ce qui s'est produit en classe avec eux (les noms sont fictifs).

Figure 1.1 Vignette anecdotique

Les élèves avaient une minute pour réfléchir individuellement à une stratégie pour résoudre le problème. Par la suite, un échange de leurs idées s'est fait en plénière.

Geneviève : Ok. Quelles sont vos idées pour résoudre le problème ? Comment avez-vous procédé ? Oui Nathan.

Nathan : La réponse est $1\frac{1}{3}$.

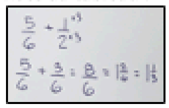
Geneviève : Ok. Comment es-tu arrivé à cette réponse ?

Nathan : Il faut faire $\frac{5}{6}+\frac{1}{2}$ ce qui est égal à $\frac{5}{6}+\frac{3}{6}$, car on multiplie $\frac{1}{2}$ en haut et en bas par 3 pour obtenir $\frac{3}{6}$. Et, $\frac{5}{6}+\frac{3}{6}=\frac{8}{6}$ ce qui vaut $1\frac{1}{3}$.

Geneviève : Ok. Comment sais-tu que $\frac{8}{6}=1\frac{1}{3}$?

Nathan : Car dans $\frac{8}{6}$ il y a $\frac{6}{6}$ qui vaut 1 entier. Il reste $\frac{2}{6}$ et si je divise par 2 en haut et en bas, j'obtiens $\frac{1}{3}$.

Des traces de la forme suivante ont alors été prises au tableau :



Geneviève : Ok. Est-ce que d'autres ont obtenu d'autres réponses ?

Silence.

Geneviève : Ok. Donc, vous êtes tous d'accord avec le $1\frac{1}{3}$ de Nathan ?

Élèves : [Oui, en chœur]

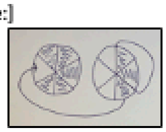
Geneviève. Ok. Est-ce que quelqu'un peut venir me faire un dessin pour représenter la situation ?

Julie: [Elle vient au tableau, dessine des pointes de pizza et en colore une partie, comme ceci :]

Julie : Ça donne donc $1\frac{1}{3}$ de pizza, car il y a 8 morceaux de mangés et il y a 6 morceaux par pizza.

Geneviève : Ok. Très bien. Est-ce que d'autres ont des manières différentes de le représenter ?

Adam: [Il vient au tableau et dessine:]



Adam : Ça donne donc $1\frac{1}{3}$.

Geneviève : Ok. Avez-vous d'autres réponses ou d'autres manières de faire ? [Après un peu d'hésitation, un autre élève lève la main.]

Maxime : Je pense que la réponse est $\frac{8}{12}$ car il y a 8 morceaux de pizza dessinés sur un total de 12 morceaux.

Geneviève : Ok. Les autres vous en pensez quoi ?

Plusieurs élèves affirment être d'accord. Je leur demande de lever la main s'ils pensent que $\frac{8}{12}$ est une bonne réponse. À l'unanimité, les élèves lèvent la main pour dire oui. À ce moment, je souligne qu'au début du problème tout le monde était d'accord avec $1\frac{1}{3}$, puis je leur demande s'ils croient toujours que cette réponse est bonne. Les élèves me disent unanimement oui. En réaction à leur réponse, je leur demande si $\frac{8}{12}$ et $1\frac{1}{3}$ sont des fractions équivalentes ? Ils me répondent que non. Je leur demande alors comment il est possible qu'ils aient mangé à la fois $\frac{8}{12}$ et $1\frac{1}{3}$. Les élèves ne savent plus trop quoi répondre et semblent réfléchir à ce qui se passe. Je leur demande de retourner réfléchir seul ou avec leurs voisins proches. Au bout de quelques minutes, un élève me dit qu'il pense savoir ce qui se passe. Je l'invite à expliquer son raisonnement à toute la classe.

Sacha : En fait, c'est la même chose. C'est la même quantité, mais dit différemment. Ils ont mangé $1\frac{1}{3}$ de *pizza* (en insistant sur le mot pizza) ou 8 morceaux sur un total de 12 morceaux. C'est la même chose, mais on ne parle pas de la même manière. On ne se réfère pas au même tout.

Geneviève : Ok bien. Est-ce que vous comprenez bien ce que Sacha nous dit ?

Élèves [Tous] : oui.

Un élève remarque ensuite la première solution écrite au tableau, et soulève le fait que s'ils avaient additionné les numérateurs et les dénominateurs, ils auraient obtenu ce $\frac{8}{12}$ plutôt que $\frac{8}{6}$, comme ceci $\frac{5+3}{6+6}=\frac{8}{12}$. Notant l'observation, plusieurs élèves désapprouvent cette idée, soulevant qu'ils n'ont pas le droit d'additionner des dénominateurs entre eux. Ils expliquent qu'ils doivent mettre les fractions sur un même dénominateur comme ils l'avaient fait initialement, pour ensuite additionner les numérateurs uniquement. Certains semblent toutefois perplexes en disant que cela représente tout de même le nombre de morceaux dans chaque pizza, et donc un total de 12 morceaux, si le tout est changé. La suite de cette séance s'oriente alors vers la distinction entre le sens rapport d'une fraction et le sens partie d'un tout. Cela dit, déjà un bon 50 minutes s'était écoulé depuis le début…

Ce qui me questionne le plus dans ce type d'expérience est de comprendre ce qui s'est passé pour qu'une telle activité mathématique soit déclenchée chez les élèves à partir d'un problème en apparence simple à résoudre considérant leur niveau mathématique. Ce problème, choisi en tant que déclencheur pour aborder la multiplication de fractions, s'est avéré provocateur d'une activité mathématique qui me semblait riche (et qui aurait certainement pu se poursuivre vu la relance faite par l'élève concernant l'addition des dénominateurs). Cette expérience, comme plusieurs autres vécues comme assistante de recherche et conseillère pédagogique, a soulevé en moi une envie de mieux comprendre les rouages derrière ceci : Que se passe-t-il ? Quelles sont les actions importantes posées ? Quel rôle le problème joue-t-il ? Comment une activité mathématique aussi riche et dynamique est-elle générée à partir de tâches qui apparaissent simples à résoudre pour le niveau des participants ? Les pages qui suivent problématisent ces idées.

1.2 Les mathématiques et la résolution de problèmes

La résolution de problèmes mathématiques est souvent vue comme une activité au cœur des mathématiques. En effet, plusieurs soutiennent que les mathématiques consistent essentiellement à formuler et résoudre des problèmes mathématiques, car ces activités sont considérées centrales au travail des mathématiciens :

> Mathematics could surely not exist without these ingredients [axioms, theorems, proofs, concepts, definitions, theories, formulas, methods] they are all essential. It is nevertheless a tenable point of view that none of them is at the heart of the subject, that the mathematician's main reason for existence is to solve problems, and that, therefore, what mathematics really consists of is problems and solutions. (Halmos, 1980, p. 519)

> Nous pensons que la science mathématique se construit et évolue à travers les problèmes internes et externes que les mathématiciens se posent et à travers leur acharnement à les résoudre. Au cours des différentes tentatives de résolution de ces problèmes, ils sont naturellement amenés à s'en poser un certain nombre d'autres qu'ils essayeront à leur tour de résoudre, etc. La connaissance mathématique se crée en particulier grâce à cette activité de résolution de problèmes. (Arsac, Germain et Mantes, 1988, p. 7)

Ces citations pointent sur le fait qu'aujourd'hui, comment avant, les problèmes occupent une place fondamentale dans la façon dont les mathématiques se font, se construisent et évoluent. Papert (1972) soulignent, à cet égard, que le mathématicien ne se réduit pas à celui qui a des « connaissances » à propos des mathématiques ni à celui qui est capable d'appliquer des faits et stratégies mathématiques qui lui sont montrés par une tierce personne. Le mathématicien est, pour lui, celui qui *fait* des mathématiques :

> Being a mathematician is no more definable as knowing a set of mathematical facts then being a poet is definable as knowing a set of linguistic facts. Some modern mathematical education reformers will give this statement a too easy assent with the comment : "Yes, they must understand, not merely know". But this misses the capital point that being a mathematician, again like a poet, or a composer, or an engineer, means *doing* rather than knowing or understanding. (p. 249)

Faire des mathématiques engagerait donc d'entrer dans une construction d'idées par une activité dynamique de résolution de problèmes (Lockhart, 2009; Schoenfeld, 1988). En faisant des mathématiques, une personne, tant élève que mathématicien, déploierait une activité dans laquelle elle met en avant différentes idées, explore différentes avenues, se laisse guider par ses intuitions, émet des conjectures, argumente, etc. Un processus créatif prend place à travers la résolution de problèmes mathématiques (Lampert, 1990a, 2001). Et, ce processus créatif se produit plus souvent qu'autrement de manière non linéaire. Pour Lakatos (1976), faire des mathématiques n'est en ce sens pas le résultat d'une accumulation d'idées et d'arguments exacts qui mènent tout droit vers la solution recherchée, mais est plutôt une activité qui prend la forme d'un zigzag :

> This activity of doing mathematics is different from what is recorded once its done : "Naive conjecture and counterexamples do not appears in the fully fledged deductive structure : The zig-zag of discovery cannot be discerned in the end product". (p. 72)

Lakatos (1976) suggère que cette activité en zigzag permet des allers-retours entre l'émission d'hypothèses, la recherche d'une solution et la recherche d'exemples et de contre-exemples, voire de réfutations. Dans ce processus, le « problème » à résoudre est amené à se raffiner, à se préciser et à se reformuler en cours de route. De plus, le doute et l'incertitude semblent constamment présents dans l'activité mathématique d'une personne, alors qu'elle tente de trouver une solution et de nouvelles idées en raffinant ses arguments face au problème qu'elle cherche à résoudre : « nos théorèmes ne naissent pas théorèmes, ils sont le plus souvent l'aboutissement d'une suite de conjectures erronées, rectifiées au fur et à mesure que sont levés les doutes sur leur part de fausseté. » (Legrand, 2006, p. 15)

Ce faisant, les mathématiques en viennent à avoir deux faces complémentaires. Elles sont à la fois (1) l'activité dans l'action d'une personne qui formule et résout des problèmes mathématiques et (2) le produit de cette activité, soit une solution, une formule, une méthode, un théorème, un résultat, une conjecture, ou la formulation d'un nouveau problème. Ce sont les dimensions créatives, non linéaires et dynamiques qui caractérisent les mathématiques.

Considérant que faire des mathématiques consiste essentiellement à être engagé dans une activité de formulation et de résolution de problèmes, alors les problèmes occupent une place fondamentale dans cette activité. Les mathématiques étant enseignées à l'école, elles font intervenir divers problèmes mathématiques. Il semble alors raisonnable de s'intéresser à ce que seraient de « bons problèmes » pour la classe de mathématiques, c'est-à-dire des problèmes qui permettraient aux élèves d'être dans une activité mathématique riche et dynamique.

1.3 Les caractéristiques des « bons problèmes » mathématiques pour la classe

Plusieurs chercheurs et formateurs se sont intéressés aux caractéristiques d'un « bon problème » pour la classe de mathématiques. En particulier, dans le cadre du colloque du Groupe Canadien d'Étude en Didactique des Mathématiques (GCEDM) en 2016, le groupe de travail *Résolution de problèmes : définitions, rôle et pédagogie associée,* composé d'une quinzaine de chercheurs, de formateurs, de mathématiciens et d'enseignants, s'est penché sur cette idée de « bon problème » pour la classe. Les discussions, basées sur différents problèmes proposés par les animateurs et les participants, ont mené les participants à soulever différentes caractéristiques (non ordonnées) d'un « bon problème » en mathématiques. Ces caractéristiques sont discutées dans ce qui suit, faisant aussi écho à d'autres travaux de recherche en didactique des mathématiques.

Selon ce groupe de travail (Hoshino, Polotskaia et Reid, 2016), un « bon problème » en mathématiques serait *génératif* dans le sens où une idée pour le résoudre mènerait vers d'autres idées mathématiques à explorer. La résolution du problème permettrait alors facilement aux élèves de travailler sur de nouveaux problèmes, de nouvelles questions ou encore de traiter d'autres concepts, stratégies, formules ou algorithmes mathématiques. Ce type de problème ferait avancer les mathématiques en classe, en permettant aux élèves d'être en investigation mathématique. À ce sujet, dans ses travaux, Borasi (1996) souligne qu'un problème génératif est celui pour lequel ni l'enseignant ni les élèves ne savent entièrement où l'exploration de celui-ci pourrait mener.

Par ailleurs, pour ce groupe de travail, un « bon problème » en mathématiques serait *accessible,* c'est-à-dire qu'il permettrait aux élèves de s'engager facilement dans sa résolution. Ce problème serait aussi facile à énoncer et à comprendre (voir Arsac, Germain et Mantes, 1988). Un « bon problème » serait également *non menaçant*, car bien qu'il offrirait un défi à l'élève qui tente de le résoudre, celui-ci serait à sa portée. Étant non menaçant, un tel problème permettrait aux élèves de progresser dans sa résolution; favorisant leur engagement. Ce problème permettrait aux élèves de rester engagés tout au long de sa résolution, puisqu'il ne reposerait pas uniquement sur un seul moment d'illumination sans lequel il serait impossible de progresser sans avoir trouvé le truc ou la stratégie pour le résoudre.

Une caractéristique implicite d'un « bon problème » dans ce rapport du groupe de travail, mais explicite dans d'autres travaux, serait qu'un « bon problème » permettrait aux élèves d'avoir *différents points d'entrée pour le résoudre* ou encore mènerait à *différentes solutions possibles*. En effet, dans leurs travaux, Kilpatrick (1987) et Lampert (1990a, 2001) proposent de s'intéresser à ce qu'ils nomment les « structured problems requiring productive thinking ». Ces problèmes permettraient aux élèves d'explorer différentes avenues vers une solution, et donc d'entrer dans une résolution à différents niveaux selon les expériences de chacun. Ces problèmes leur permettraient d'être dans le fameux processus zigzag, qui caractérise l'activité mathématique selon Lakatos (voir aussi Lampert, 1990a). Cette variété de solutions ou d'idées mathématiques pour résoudre un problème est une caractéristique fondamentale d'un « bon problème » pour la classe selon Lampert (2001).

Une autre caractéristique qui se retrouve en filigrane dans ce rapport du groupe de travail du GCEDM serait celle de placer les élèves dans une activité mathématique riche et substantielle de résolution de problèmes. En effet, ce rapport ainsi que d'autres écrits suggèrent qu'un « bon problème » exigerait de la part des élèves de raisonner mathématiquement et de fournir un effort pour surmonter le défi qu'ils rencontrent dans la résolution dudit problème. En ce sens, dans leurs travaux, Henningsen et Stein (1997) et English et Gainsburg (2015) parlent de ce qu'elles nomment des « problems with high cognitive demand ». Ces problèmes feraient appel à un *haut niveau de raisonnement*, auraient *plusieurs points d'entrée et permettraient différentes avenues vers une solution*, mais surtout exigeraient plus que de les résoudre uniquement : « Problems with high cognitive demand require students to explain, describe, and justify ; make decisions, choices, and plans ; formulate questions ; apply existing knowledge and create new ideas ; and represent their understanding in multiple formats. » (English et Gainsburg, 2015, p. 326) Ces problèmes nécessiteraient une entrée engagée de l'élève dans le problème, en forçant la justification, l'explication, la description, les choix, etc., ce qui ajouterait une couche supplémentaire au niveau de l'activité de l'élève que de simplement tenter de résoudre le problème.

En somme, quatre principales caractéristiques d'un « bon problème » mathématique mises en évidence par le groupe de travail du GCEDM font écho à différents travaux de recherche sur la résolution de problèmes : être génératif, être accessible et non menaçant, permettre plusieurs solutions ou points d'entrée pour le résoudre et exiger un haut niveau de raisonnement de la part des élèves.

Toutefois, ces caractéristiques font peu écho à mes expériences comme assistante de recherche et comme conseillère pédagogique, où les problèmes travaillés en classe ne semblent pas être du même ordre. Dans mes expériences, ces caractéristiques ne sont pas intrinsèques au problème, à son énoncé[1], mais semblent plutôt émerger des interactions en classe. En effet, le problème du $\frac{5}{6}+\frac{1}{2}$ présenté dans la section sur l'origine du questionnement m'a semblé être *génératif* puisqu'il a fait plus que l'addition de fractions en abordant les sens partie d'un tout et rapport de la fraction. Il m'a aussi semblé *accessible et non menaçant*

[1] Une distinction entre une tâche et un problème mathématique est fait ultérieurement, à la section 1.5.

pour les élèves qui ont facilement entré dans sa résolution et qui se sont engagés tout au long de celle-ci, et même lors de la confrontation des deux solutions $\frac{8}{12}$ et $1\frac{1}{3}$. Ce problème a également permis une *variété de solutions et de points d'entrée pour le résoudre* par le calcul, ainsi que par le dessin. Par ailleurs, lorsque les deux solutions $\frac{8}{12}$ et $1\frac{1}{3}$ ont été confrontées, le problème a présenté un réel défi aux élèves, qui ont fait preuve d'un *haut niveau de raisonnement* en cherchant, argumentant, expliquant et justifiant les idées mathématiques qu'ils mettaient en avant pour résoudre ce problème. Ainsi, malgré l'apparence simple de ce problème d'addition de fractions pour le niveau mathématique des élèves, les différentes caractéristiques de ce qui se veut être un « bon problème » en mathématiques ont émergé des interactions en classe avec les élèves. Bien qu'importantes, il semble raisonnable de se demander si ces caractéristiques sont nécessairement intrinsèques aux problèmes en eux-mêmes ou si elles peuvent aussi dépendre de l'activité qui se produit pendant leur résolution. En d'autres mots, est-ce qu'un problème est uniquement bon en « soi » ou est-ce que des facteurs externes au problème peuvent aussi jouer un rôle et le rendre « bon problème » ?

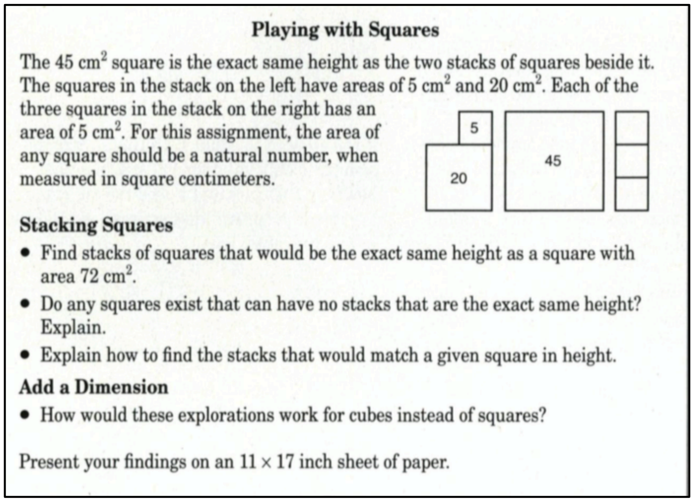
1.4 Deux exemples de « bons problèmes » mathématiques pour la classe

Cette section présente deux exemples de problèmes qui sont réputés « bons » pour la classe de mathématiques ; ceux-ci étant reconnus en didactique des mathématiques, et ayant été beaucoup cités et utilisés en classe de mathématiques au niveau international. Ces problèmes sont discutés dans ce qui suit au regard des quatre caractéristiques soulevées à la section précédente. L'objectif est de voir comment ces caractéristiques sont présentes dans ces problèmes, et s'il est possible d'en relever d'autres qui rejoindraient davantage mes expériences.

1.4.1 Le problème *Playing with squares* de Wagner

Un premier exemple est celui de *Playing with Squares* de Wagner (2003), conçu dans le but de travailler les expressions numériques comprenant des radicaux. Ce problème, qui a été présenté à des élèves de 10^{e} année (15-16 ans), consiste à (1) trouver un arrangement de carrés qui aurait la même hauteur qu'un carré de 72 cm^{2} d'aire, (2) déterminer s'il est possible que des carrés n'aient aucun arrangement de carrés qui soit de la même hauteur, (3) expliquer comment faire pour trouver un arrangement de carré qui a la même hauteur qu'un carré donné, et (4) expliquer comment cela pourrait fonctionner pour des cubes plutôt que des carrés. Les élèves étaient placés en équipe de 3 ou 4. La Figure 1.2 présente l'énoncé du problème :

Figure 1.2 Le problème *Playing with Squares* de Wagner[2]



Playing with Squares

The 45 cm^2 square is the exact same height as the two stacks of squares beside it. The squares in the stack on the left have areas of 5 cm^2 and 20 cm^2. Each of the three squares in the stack on the right has an area of 5 cm^2. For this assignment, the area of any square should be a natural number, when measured in square centimeters.

Stacking Squares

- Find stacks of squares that would be the exact same height as a square with area 72 cm^2.
- Do any squares exist that can have no stacks that are the exact same height? Explain.
- Explain how to find the stacks that would match a given square in height.

Add a Dimension

- How would these explorations work for cubes instead of squares?

Present your findings on an 11 × 17 inch sheet of paper.

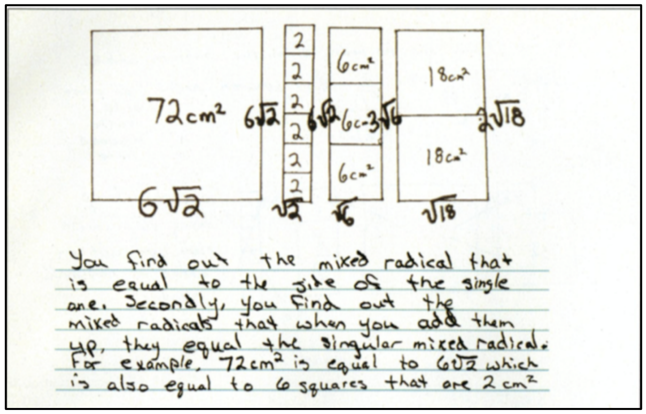
Ce problème est considéré comme un « bon problème », car, tel que l'explique Wagner (2003), il a su captiver l'intérêt des élèves dès sa lecture et que les élèves n'y voyaient aucune solution apparente, alors que le contexte des carrés était suffisamment familier pour qu'ils désirent explorer diverses pistes de solutions. D'ailleurs, comme le souligne Wagner (2003), l'activité mathématique des élèves est mesurable par leur degré d'engagement dans le problème: « I suggest that the richness of classroom mathematical activity might be measured by the extent to which students are being *captivated* by mathematical problems. » (p. 612, italiques dans l'original) Le problème s'est ainsi avéré être *accessible et non menaçant* aux élèves en les engageant dans sa résolution et en offrant un défi à leur portée.

Par ailleurs, les différentes solutions proposées par les élèves montrent la richesse du problème quant aux explorations possibles qu'il a permises. Le problème s'est avéré être *génératif.* En effet, alors que certaines solutions présentées par les élèves avaient été anticipées, d'autres *a posteriori* ont surpris le chercheur. Un exemple de solution attendue consiste à trouver la mesure des côtés de chacun des carrés en les

[2] Les Figures 1.1 à 1.4 sont tirés de l'article de D. Wagner (2003). Le *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) a autorisé l'utilisation des Figures 1.1 à 1.4 pour cette thèse doctorale.

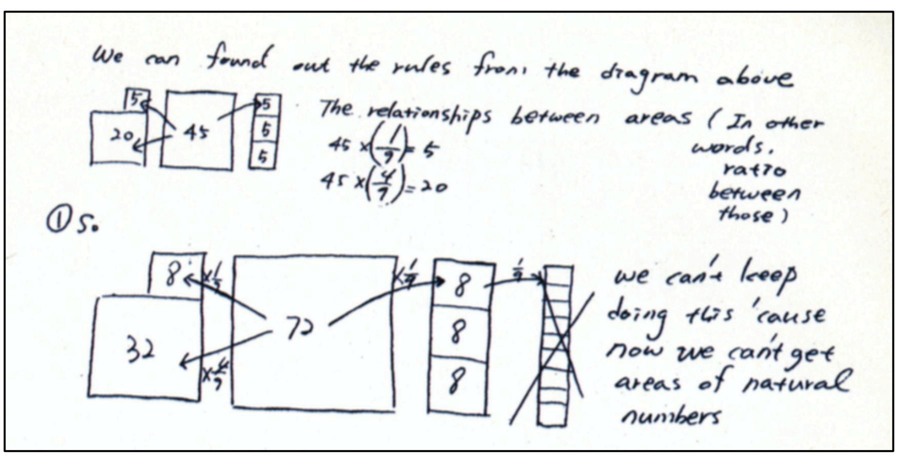
exprimant à l'aide de radiaux pour ensuite mettre directement en relation les quantités en jeu afin de trouver une solution au problème posé. La figure suivante montre un tel exemple de solution attendue.

Figure 1.3 Exemple de solution attendue



Cette solution était attendue puisque ces notions avaient été travaillées préalablement en classe. Le problème a toutefois permis aux élèves de trouver d'autres solutions, celles-ci inattendues. Un premier exemple d'une telle solution inattendue ne nécessite aucun travail sur les radicaux, privilégiant plutôt une entrée par le raisonnement proportionnel, où les élèves ont cherché à établir un rapport entre les aires. Cette solution est présentée à la Figure 1.4.

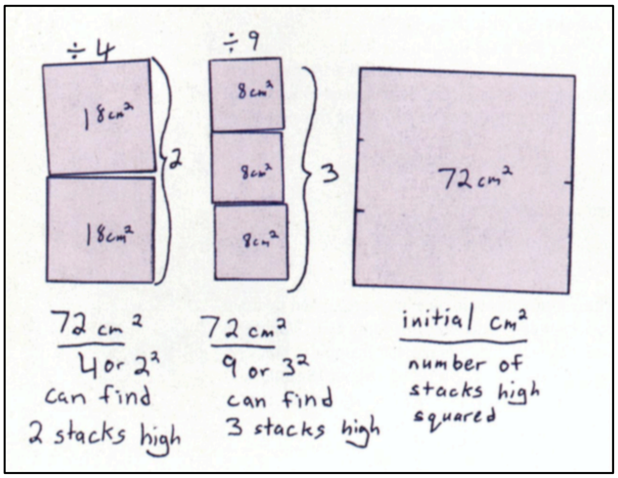
Figure 1.4 Premier exemple d'une solution inattendue



Bien que viable, cette solution n'a toutefois pas permis aux élèves de répondre à toutes les questions du problème. Comme le souligne Wagner (2003), avec l'aide de la classe, la méthode aurait pu être prolongée en remarquant que toutes les fractions utilisées comprenaient des nombres carrés. Une exploitation de cette solution aurait pu être faite, collectivement, en classe pour la faire progresser.

Une autre solution inattendue est celle d'un groupe qui a découpé les carrés avec des ciseaux en travaillant le problème de façon géométrique, comme l'illustre la Figure 1.5 suivante.

Figure 1.5 Deuxième exemple d'une solution inattendue



Ces solutions montrent que le problème a permis une *variété de solutions et de points d'entrée.* Celles-ci, en plus de montrer l'engagement des élèves, montrent que le problème n'a pas été le même pour tous, certains l'ayant abordé comme un problème d'expressions numériques comprenant des radicaux, d'autres comme un de proportionnalité, d'autres comme un de géométrie. Ceci suggère que le problème est également dépendant des élèves et qu'il ne comporte pas que des caractéristiques intrinsèques.

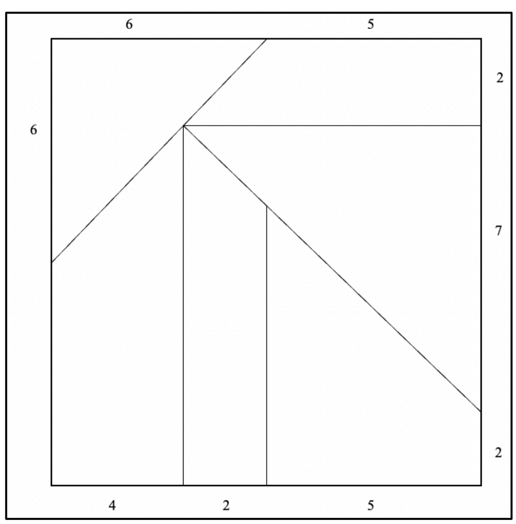
À travers la résolution du problème, les élèves ont également tenté différentes pistes de solutions, en ont abandonné certaines autres, ont discuté, argumenté, testé leurs hypothèses, etc. Ce problème a exigé des élèves *un haut niveau de raisonnement*. La confrontation des idées et l'argumentation en équipe ont joué un rôle important, comme le souligne Wagner (2003). Les interactions ont été favorables à la mise en œuvre d'un tel *haut niveau de raisonnement* chez les élèves.

Le problème *Playing with Squares* a été, pour ces élèves, un « bon problème », car les différentes caractéristiques d'être génératif, d'être accessible et non menaçant, de permettre plusieurs solutions ou points d'entrée pour le résoudre et d'exiger un haut niveau de raisonnement, ont émergé dans l'action en classe. En effet, ce n'est qu'une fois qu'ils se sont engagés dans la résolution du problème que le chercheur a pu voir se déployer tout le potentiel de ce problème, en particulier par les différentes solutions inattendues et par les interactions qui ont favorisé l'activité de résolution de problèmes mathématiques en classe.

1.4.2 Le problème du Puzzle de Brousseau

Un autre exemple de problème reconnu comme étant « bon » est celui du *Puzzle* de Brousseau (1989). Ce problème consiste à « trouver le moyen d'agrandir les pièces d'un puzzle de telle manière qu'une pièce de côté 4 ait pour image une pièce de côté 7 et que le puzzle fonctionne bien comme un vrai puzzle » (p. 52). Ce problème vise à travailler les applications linéaires sur les nombres rationnels et décimaux, comme la multiplication par un nombre rationnel. La recherche, par les élèves, d'une solution satisfaisante vise à les amener à comprendre et à expliciter une propriété fondamentale de la linéarité, soit que l'image de la somme de deux longueurs est la somme des images de ces longueurs. Voici une image du *Puzzle* initial :

Figure 1.6 *Puzzle* de Brousseau (reproduction de Brousseau et Brousseau, 1987, p. 137)



Brousseau et Brousseau (1987) constatent que trois stratégies pour résoudre ce problème sont généralement observées chez les élèves de 6e année (11-12 ans). Une première stratégie consiste à ajouter

3 à toutes les dimensions. Les différents morceaux ayant 3 unités de plus sur chacun de ses côtés ne s'accordent donc plus. Ceci force la recherche d'une nouvelle stratégie et la discussion entre les élèves. Un autre type de stratégie mobilisée est d'abord de tracer le contour du grand carré en ajoutant 3 à chaque segment. Les élèves voient alors que le carré devient un rectangle et sont forcés à changer de stratégie, remarquant que l'addition de 3 ne fonctionne pas. Une troisième stratégie employée par les élèves est de doubler toutes les dimensions pour ensuite soustraire 1, puisque la tâche exige qu'un morceau de 4 unités soit agrandi à 7 unités (4 x 2 – 1 = 7). Cette stratégie leur permet d'arriver à une solution près de la solution optimale, mais qui ne fonctionne toujours pas complètement. À la suite de différentes tentatives, certains élèves trouvent également une bonne manière de procéder, soit en multipliant toutes les dimensions par $\frac{7}{4}$.

Ce problème du *Puzzle* présente un énoncé court qui favorise sa compréhension et le rend *accessible* aux élèves. À travers sa résolution, il offre *différents points d'entrée,* comme le montrent les stratégies variées discutées ci-dessus. Le contexte familier favorise également l'engagement des élèves dans sa résolution, ce dernier étant *non menaçant* pour eux. Dans la recherche d'une solution, ces derniers sont amenés à conjecturer, argumenter et confronter leurs idées aux autres, faire des essais et se valider, car les essais qui ne fonctionnent pas ne leur permettent pas de retrouver la forme (agrandie) du *Puzzle* initial. Le problème exige ainsi des élèves *un haut niveau de raisonnement*. Par ailleurs, ceux-ci peuvent s'adapter à la rétroaction qu'offre le problème afin d'avancer dans sa résolution. Le problème possède en ce sens plusieurs des caractéristiques des « bons problèmes » soulevées précédemment.

Le *Puzzle* est un exemple de ce que Brousseau (1987) appelle une situation fondamentale. Les situations fondamentales sont conçues pour être suffisamment riches pour que les élèves s'y engagent avec leur bagage de connaissances, et qu'ils arrivent, à force de faire des hypothèses et des tentatives, en plus de chercher et d'argumenter avec les autres, à une solution satisfaisante. Ces situations plongent les élèves dans un milieu qui leur permet de construire de manière autonome les connaissances mathématiques visées par la situation, soit, dans le cas du *Puzzle*, la multiplication par un nombre rationnel (Brousseau et

Brousseau, 1987). Le milieu désigne les différentes composantes physiques, sociales, culturelles ou autres dans lequel baignent les élèves pour développer leurs connaissances :

> De manière générale, le milieu est ce sur quoi peut s'appuyer le professeur pour dévoluer aux élèves une part du savoir visé. Les composantes de ce milieu sont multiples, tantôt plus cognitives, tantôt plus sociales. Un matériel utilisé, [...], le ou les problème(s) proposé(s) avec ses (leurs) caractéristiques en font partie. Mais le milieu est aussi fait des échanges entre les élèves, [...], de même que leurs expériences et acquis antérieurs. (Schneider, 2002, p. 26)

L'environnement[3] et les élèves eux-mêmes semblent donc jouer un rôle important dans le problème. Bien que les situations fondamentales puissent sembler être *a priori* de « bons problèmes », tout ceci est également relatif aux élèves et à l'environnement de classe. En effet, si aucun élève se trompe ou si tous ont la même solution et que plus rien ne se produit, le *Puzzle*, seul, servirait peu dans ce cas. Ou encore, si d'autres stratégies (bonnes ou erronées) que celles présentées ressortaient lors de la résolution en classe, quels potentiels pourraient-elles avoir sur l'activité mathématique et l'avancement collectif des mathématiques si elles étaient exploitées ? Et si le *Puzzle* était redonné aux mêmes élèves, mais à un autre moment, pourrait-il être encore « bon » ? Il semble que ce n'est pas le problème en lui-même qui est bon, mais plutôt ce qu'il devient dans l'action, soit à travers les interactions entre les individus et l'environnement généré en classe par sa résolution.

Ces deux exemples amènent à penser qu'en dehors des caractéristiques intrinsèques aux « bons problèmes », il y a autre chose qui entre en jeu dans le fait qu'un problème soit un « bon problème » en classe de mathématiques. Les exemples soulèvent en particulier le rôle des élèves eux-mêmes par leur façon de voir le problème qui les amènent, par exemple, à l'aborder sous l'angle de la géométrie, de la proportionnalité, d'expressions numériques comprenant des radicaux, etc. Il semble aussi que l'environnement et les interactions en classe, comme le soulignent Brousseau et Brousseau (1987) et Wagner (2003), peuvent jouer un rôle important. Les caractéristiques qui peuvent faire un « bon problème » mathématique semblent en ce sens pouvoir aussi émerger dans l'action de résoudre.

[3] Le terme environnement est priorisé au terme milieu (de Brousseau) dans cette thèse doctorale, en cohérence avec le cadre théorique qui est présenté à la section suivante. L'environnement, dans une classe de mathématiques, est défini à la page 31.

1.5 La notion de problème en mathématiques

Au-delà du « bon problème » pour la classe de mathématiques, comment se définit un problème en mathématiques ? Parmi la pluralité de définitions qu'il est possible de trouver au sujet de la notion de problème, celle de Brun (1997) met en exergue l'importance de l'environnement dans l'émergence d'un problème. En effet, la définition qu'il utilise du terme « problème » souligne le fait que ce dernier n'existe que dans un rapport sujet/situation :

> Un problème est généralement défini comme une situation initiale avec un but à atteindre, demandant à un sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème que dans un *rapport sujet/situation*, où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est dire aussi que le problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel, par exemple. (p. 46, c'est moi qui mets l'emphase)

La situation, qui peut plus largement faire référence au problème proposé et à l'environnement en classe, semble à prendre en compte dans la notion de problème. Cela reflète également mes expériences d'assistante de recherche et de conseillère pédagogique, où le problème semblait se développer à travers l'activité déployée pour le résoudre. Dans ces expériences, bien que les élèves savaient dès le départ comment résoudre les problèmes proposés, les différentes stratégies déployées, les questions soulevées, les doutes émis, etc. les ont mené à construire des solutions à des problèmes qui se sont raffinés à travers l'activité mise en route. Il est aussi possible de préciser que la solution d'un problème n'est pas *toujours* possible à construire, comme le laisse entendre Brun (1997) (en effet, certains problèmes mathématiques n'ont, à ce jour, aucune solution mathématique connue).

Par ailleurs, les participants du groupe de travail du GCEDM (2016) soulignent le fait que le terme « problème » n'est pas toujours très pratique, car il met en lumière la relation avec la personne qui tente de le résoudre et le moment où cela se produit :

> Thus the terminology of “ problem ” is not very practical. Many researchers in the field use “task” terminology, which is associated with the formulation of the task, and not in relation to a particular solver. A task can become a “good problem” for some solvers in some conditions and a routine problem (or not a problem) for other solvers or in different conditions. (Hoshnino et al., 2016, p. 156)

Ceci soulève une distinction entre une tâche et un problème. En effet, une tâche ferait référence à l'énoncé mathématique. Et, le problème ferait appel à ce qui est résolu, a ce qui est fait pour et pendant la résolution. Cette définition de Brun (1997) et cette distinction entre une tâche et un problème permettent de faire ressortir différentes dimensions de la notion de problème en mathématiques. Ces dimensions, qui s'alignent avec différents écrits scientifiques à ce sujet, sont (1) l'émergence d'un problème (2) l'incertitude inhérente au problème et (3) la relativité du problème à la personne qui le résout. Celles-ci sont abordées dans les prochaines sous-sections.

1.5.1 L'émergence

Pour qu'une tâche devienne un problème mathématique, celui-ci doit émerger chez l'élève dans son interaction avec la tâche. Une tâche proposée en classe par un enseignant sert à déclencher, à faire naitre, un problème chez l'élève. Kilpatrick (1987) explique en ce sens qu'une personne ne peut pas « donner » un problème à une autre personne; un problème ne peut pas être forcé. Un problème n'en est un pour une personne que si celle-ci accepte qu'il soit problème pour elle, qu'elle accepte de s'y engager (Agre, 1982). Le problème mathématique n'existerait pas en soi, mais il serait mis en avant par une personne dans une situation donnée : « For some writers problems are created through consciousness of or articulation about situations rather than being situations, and hence they cannot exist prior consciousness » (*Ibid*., p. 123). C'est en ce sens que pour Schoenfeld (1983) un « problème » devient un problème uniquement si la personne s'engage dans la recherche d'une solution :

> Second, a problem is a Problem until one wants to solve it. [...] Once one wants to solve a Problem, there is an emotional and intellectual commitment to the solution, and the risk and rewards concomitant with that commitment. (p. 41).

Le désir de chercher une solution fait en sorte que la tâche devient un problème pour une personne. Cet engagement émerge de l'interaction avec la tâche.

1.5.2 L'incertitude

Lorsqu'un problème émerge chez une personne, il lui pose alors un défi, c'est-à-dire qu'elle ne connait pas encore une solution pour le résoudre. Une tâche devient un problème si une incertitude est soulevée chez la personne qui veut la résoudre (Beghetto, 2017). Un problème se distingue en ce sens d'un exercice puisqu'il place une personne dans un contexte de recherche afin de trouver une solution :

> A problem is a situation that differs from an exercise in that the problem solver does not have a procedure or algorithm which will certainly lead to a solution. (Kantowski, 1981, p. 113 cité dans Borasi, 1986, p. 132)

> First, a problem is only a Problem (as mathematicians use the term) if you don't know how to go about solving it. A problem that holds no "surprises" in store, and that can be solved comfortably by routine or familiar procedures (no matter how difficult !) is an exercice. (Schoenfeld, 1983, p. 41)

Dans un exercice, l'élève sait, contrairement au problème, comment s'y prendre non seulement pour s'engager, mais aussi pour le résoudre. L'exercice ne nécessite généralement qu'une simple application de concepts ou procédures déjà connues de l'élève. La manière de résoudre l'exercice lui est évidente, et ce, dès sa lecture. Le Fascicule K (Ministère de l'Éducation, 1988), élaboré par des chercheurs, conseillers pédagogiques et enseignants du Québec afin de clarifier la notion de problèmes en mathématiques, précise que

> Les exercices ont principalement pour but de faire fixer par les élèves des habiletés ou des automatismes auxquels ils ont déjà été initiés, ou encore de faire pratiquer l'application de certaines définitions ou propriétés qu'ils ont précédemment apprises en classe. (p.19)

Toutefois, en revenant aux exemples soulevés préalablement, relatifs au site de recherche de mon directeur ou encore à mes expériences comme conseillère pédagogique avec le $\frac{5}{6}+\frac{1}{2}$, cette distinction est moins claire qu'il n'y paraît. Dans cet exemple, les élèves savaient sur-le-champ comment résoudre la tâche, ils ont pu y répondre, proposer des solutions et appliquer leurs concepts et procédures rapidement. Toutefois, comme l'extrait le montre, une activité riche de résolution de problèmes a été stimulée en classe et a fait naitre une incertitude importante relativement aux réponses $\frac{8}{12}$ et $1\frac{1}{3}$. Est-ce par mes actions, par ceux des élèves, par le contexte, par la tâche, par tout ceci, que cette incertitude a émergé et a stimulé l'activité mathématique subséquente ? Est-ce que cette incertitude doit être inhérente à la tâche, à l'élève ou plutôt peut-elle naître dans l'action, dans l'interaction avec la tâche et le contexte de classe qui émerge ?

Agre (1982) aborde cette question d'incertitude un peu différemment en parlant de l'effort requis à travers la résolution du problème. Pour faire émerger un problème, il explique que le processus de résolution doit engendrer un effort chez la personne qui tente de le résoudre :

> If a time-tested procedure exists for bringing about desired state of affairs, there may not exist a problem, because carrying out the procedure may be easy. But if extra effort is required because the income is in doubt, the situation may qualify as a problem. » (p. 131).

Bien que centré sur l'effort, Agre en souligne aussi une composante différente de celle qui relie l'effort à « travailler fort » en parlant plutôt d'effort en termes de doutes ou d'incertitudes à surpasser. Avec l'aisance qu'ont montrée les élèves pour résoudre $\frac{5}{6} + \frac{1}{2}$, ou encore pour le représenter, la question habituelle de l'effort en termes de travail disparaît. Résoudre et représenter rapidement $\frac{5}{6} + \frac{1}{2}$, avec peu de difficultés, ne semblent pas avoir joué le rôle de problème pour eux. C'est probablement davantage celle du doute, de l'incertitude, face aux deux réponses $\frac{8}{12}$ et $1\,\frac{1}{3}$ possibles que le $\frac{5}{6} + \frac{1}{2}$ est devenu un problème dans la séance. Un problème implique peut-être de l'incertitude, mais celle-ci semble pouvoir émerger du travail fait dans l'action en classe, et non reposer uniquement sur la tâche en elle-même. Ce n'est pas que l'élève ne sache pas immédiatement comment faire pour le résoudre ou qu'il le fasse rapidement qui semble importer, mais plutôt le fait de se questionner, vivre un doute, s'interroger face à la situation en question, soit dans le travail et l'interaction autour de la tâche proposée.

1.5.3 La relativité

Une autre dimension importante est qu'un problème en mathématiques est relatif à la personne qui le résout, soit les élèves en contexte d'enseignement. Ceci signifie qu'un problème peut en être un pour un élève, mais pas pour un autre, ou encore, ne pas en être un du point de vue de l'enseignant, mais en être un pour certains élèves. L'exemple de l'addition de fractions illustre bien ceci. Pour moi, la distinction entre les réponses $\frac{8}{12}$ et $1\,\frac{1}{3}$ était évidente et ne représentait pas un problème, mais ce n'était toutefois pas le cas pour l'ensemble des élèves.

Un problème peut par ailleurs en être un pour une personne à une journée précise, mais ne plus en être un le lendemain compte tenu de l'avancement de ses connaissances et compétences ou tout simplement du contexte dans lequel cette personne se retrouve (Agre, 1982). Dans plusieurs situations, une fois des explications données le problème peut arrêter d'en être un, ou encore, au contraire peut soudainement en devenir un « nouveau ». L'addition de $\frac{5}{6}+\frac{1}{2}$ n'était pas un problème au début pour tous, mais les deux réponses possibles qui ont été mises en avant par les élèves l'ont fait émerger comme problème.

Pour pouvoir juger si une tâche a engendré un problème, il semble important de s'intéresser à l'activité mathématique qui a été réalisée par les personnes qui se sont engagées dans sa résolution. Une tâche ne serait pas bonne en soi, mais relative à l'activité qu'elle génère chez les personnes dans les contextes dans lesquels elles se trouvent. En ce sens, comme le suggère Agre (1982), c'est en regardant *a posteriori* l'activité mathématique qui a été déployée qu'il est possible de dire s'il y a eu un problème pour certaines personnes ou pas. Ce fut le cas avec le $\frac{5}{6}+\frac{1}{2}$, qui n'avait aucunement été pensé pour produire tout ce travail sur les fractions. Cet exemple montre que le problème a émergé pour les élèves en cours de route. Les interactions mises en avant à partir de la tâche proposée ont fait émerger un problème à ce moment précis et dans le contexte précis de classe dans lequel ils se trouvaient. La question de l'incertitude et de la relativité, dans son jugement *a posteriori*, sollicite donc toute la question de l'interaction, de l'engagement avec ce qui devient le problème, durant la résolution.

1.5.4 Synthèse sur les problèmes en mathématiques

Au fondement de la notion de problème, il y a différentes dimensions : (1) l'émergence, (2) l'incertitude et (3) la relativité. Ces trois dimensions reposent sur le rapport sujet/situation dont parle Brun (1997) et reviennent à la résolution, dans l'action, par ceux qui résolvent. De la même manière, les caractéristiques d'être génératif, d'être accessible et non menaçant, de permettre plusieurs solutions ou points d'entrée pour les résoudre et d'exiger un haut niveau de raisonnement, associées aux « bons problèmes » pour la classe, se situent dans ce rapport sujet/situation et semblent aussi pouvoir émerger dans l'action de résoudre. Dans les exemples donnés à la section portant sur l'origine du questionnement, le chercheur offrait bien « quelque chose » à ses participants à résoudre, tout comme moi-même lors de mon travail comme conseillère pédagogique. Il y a quelque chose qui est fait en classe et qui contribue au développement de ces dimensions et caractéristiques. C'est en ce sens que Simmt (2000) parle de « prompt », soit d'une invitation qui est donnée aux élèves. Pour elle, un enseignant ne donne pas de problèmes aux élèves, mais offre des invitations. Ce sont les élèves qui font des problèmes avec ces invitations. Tout ceci pointe sur le fait qu'une tâche ne représente pas un problème « en soi », dans son énoncé même. La notion de problème n'est pas figée. Les critères pour déterminer un problème, et aussi un « bon problème, sont à juger après coup, une fois la résolution de la tâche initiale terminée en classe.

1.6 Le rôle de l'enseignant dans l'émergence de problèmes mathématiques en classe

Ce qui importe pour juger qu'une tâche a donné lieu à un « bon problème » (ou non) pour les élèves apparait être davantage reliée à l'activité mathématique qui a été déployée en classe. La tâche engendre un « bon problème » par l'activité de résolution de problème mathématique qui prend place. C'est en ce sens que plusieurs chercheurs nuancent leurs propos sur les « bons problèmes » en mathématiques. Ils proposent qu'au-delà de ceux-ci il y a aussi l'exploitation par l'enseignant qui peut contribuer à l'émergence de problèmes chez les élèves.

1.6.1 L'exploitation de tâches par l'enseignant en classe de mathématiques

Dans le rapport du groupe de travail du GCEDM (Hoshino et al., 2016), les participants soutiennent le fait que la manière avec laquelle le processus de résolution de problèmes est géré en classe peut parfois être plus important que la tâche elle-même, insérant alors l'enseignant dans le portrait. En effet, bien qu'il y ait des caractéristiques qui soient reliées à la tâche elle-même et d'autres aux élèves eux-mêmes, il semble que ce soit le contexte mis en place par l'interaction entre les élèves, l'enseignant et la tâche qui assure une « bonne » activité de résolution de problèmes en classe.

Les participants du groupe de travail soutiennent que des tâches plus conventionnelles peuvent devenir de bons problèmes mathématiques à travailler en classe lorsque l'enseignant pousse plus loin la résolution du problème, ce qu'ils réfèrent à lui apporter une petite « twist » :

> We said that a "conventional" problem can become a great learning opportunity by pushing it : by putting a small twist on it. So much problem solving occurs when we as teachers have the confidence to encourage open-ended problem solving, such as giving them Pascal's triangle and asking them to find as many patterns as they can. (p. 158)

Ainsi, la pression d'avoir de « bons problèmes » pour la classe réside moins sur la tâche elle-même, mais davantage sur l'environnement mis en avant par l'enseignant alors qu'il exploite celle-ci avec les élèves. C'est d'ailleurs dans cet ordre d'idées que Rémillard et Geist (2002) parlent de l'intérêt pour l'enseignant de naviguer à travers les opportunités offertes par les élèves pour faire émerger des problèmes et réussir à faire avancer les idées mathématiques en classe. C'est aussi sous cet angle que Mason (2019) affirme que : « It's not the task that is rich, but whether the task is used richly » (p. 146), insistant sur l'exploitation et la résolution réalisées davantage que sur l'énoncé lui-même.

Un « bon problème » en classe de mathématiques semble ainsi devenir relatif à l'interaction entre les élèves, la tâche et l'enseignant, soit à l'activité mathématique collective engendrée par cette tâche en classe. Ceci reflète mes expériences comme assistante de recherche et conseillère pédagogique, où il m'a semblé que c'était davantage à travers les interactions en classe que les problèmes ont pris forme, et non seulement à cause de la nature de la tâche elle-même.

1.6.2 L'exploitation de tâches routinières en classe de mathématiques

La question de l'exploitation des tâches mène à aller plus loin que la nature de la tâche énoncée en classe. En ce sens, dans ses travaux, Beghetto (2017) argumente en défaveur des « bons problèmes » qui sont pour lui relatifs aux élèves et à la manière dont l'enseignant gère leur résolution en classe, et également difficiles à trouver pour un enseignant. De façon drastique, il propose de constamment utiliser ce qu'il appelle, suivant Polya (1966), des tâches[4] routinières en classe. Beghetto explique que ces tâches routinières sont en fait des exercices (tels que définis à la sous-section 1.5.2), puisqu'il n'y a pas de réel défi ni de difficulté pour l'élève à surmonter : la solution de ces tâches lui est rapidement évidente ou il n'a qu'à simplement appliquer une méthode déjà apprise pour les résoudre. Il propose, par ce qu'il nomme « lesson unplanning », que c'est à l'enseignant d'exploiter ces tâches routinières en profondeur par diverses interventions en fonction de ce qui se produit avec les élèves en classe.

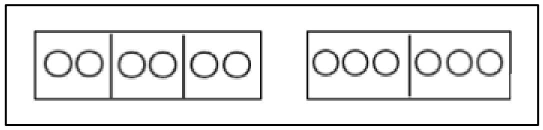
Pour Beghetto (2017), ce qui est intéressant avec ces tâches routinières est d'y insérer des incertitudes afin d'engendrer la nécessité d'être créatif pour pouvoir les résoudre. Il soulève au passage que les incertitudes sont souvent éliminées de la classe de mathématiques, et propose qu'elles soient ramenées en exploitant les tâches routinières dont les enseignants disposent dans leurs cahiers d'exercices. Dans son « lesson unplanning », Beghetto propose que l'enseignant crée des opportunités en classe, dans l'action, en remplaçant les caractéristiques qui semblent prédéterminées dans les tâches routinières par des aspects à être déterminés durant la résolution :

> Lesson unplanning refers to the process of creating openings in routine exercices by replacing predetermined features with to-be-determined aspects. Lesson unplanning can range from slight alterations (e.g., requiring students to come up with their own approach to solving an equation) to more substantial transformation (e.g., having students design their own problems and ways of solving those problems). (p. 990)

Il tire un exemple de cette perspective des travaux de Ball (2003) et de Bass (2005). Une enseignante de 3e année introduit les concepts de nombres pair et impair, ainsi que diverses règles de combinaison : impair + pair = impair et impair + impair = pair. L'enseignante demande aux élèves si tous les nombres fonctionnent bien avec ces règles. À ce moment, un élève propose l'exemple du nombre 6 qui pour lui est autant pair qu'impair, car il peut être composé de « 2, 4, 6 » ou encore de « 3 et 3 ». Le nombre est alors soit composé de 2 ou de 3 éléments. L'idée de cet élève ne correspond pas avec la discussion que l'enseignante avait prévue sur les nombres pair et impair. Elle décide toutefois de poursuivre avec la solution de l'élève en lui demandant de s'expliquer. Ce dernier dessine alors au tableau :

[4] L'expression « tâche » est utilisée plutôt que « problème » pour conserver la distinction faite entre une tâche et un problème à la page 19.

Figure 1.7 Solution d'un élève sur les nombres autant pairs qu'impairs (adaptation de Beghetto, 2017, p. 989-990)



L'élève explique que le nombre 6 est formé de *trois* groupes de deux étant alors impair, mais aussi de *deux* groupes de trois étant également pair. Ceci mène la classe à investiguer si tous les nombres possèdent cette caractéristique. Ils cherchent plusieurs exemples et contre-exemples pour réaliser que ce ne sont pas tous les nombres qui ont cette caractéristique, mais seulement certains. La classe nomme ainsi les nombres formés d'un nombre impair de groupements de deux les « nombres de Sean » en l'honneur de l'élève. Cet exemple montre que l'enseignante a ramené l'incertitude dans sa classe en assouplissant sa planification du cours, en ouvrant la classe à la solution non prévue proposée par l'élève, ce qui les a conduits à explorer les nombres, leurs caractéristiques et à user de ce que Beghetto (2017) appelle la créativité mathématique.

Une autre façon que Beghetto (2017) propose est celle de faire un petit ajustement de la tâche initiale qui permet d'enlever un aspect prédéterminé (la solution) pour introduire l'incertitude dans une tâche routinière. Par exemple, plutôt que de demander de trouver le produit de 0,9 x 0,2, une enseignante peut demander à ses élèves de trouver deux nombres qui ont 0,18 comme produit :

> Levenson (2011) reports on another example in a 6th grade classroom. The teacher introduced uncertainty into the typical format of task aimed at providing students with practice multiplying decimals. Instead of providing the two factors (such as 0.9, 0.2) and asking for the product (0.9 x 0.2 = ____________?), she instead provided students with solutions (i.e., _________ x _____ = 0.18) and then invited them to come up with as many ways of solving the problem as they could. When a student provided one possibility, she would acknowledge it and encourage additional possibilities [...] (Beghetto, 2017, p. 990)

Cet exemple montre comment un petit ajustement de la tâche initiale a, selon Beghetto (2017), le potentiel de permettre aux élèves d'être créatifs. Toutefois, l'idée derrière son « lesson unplanning » n'est pas uniquement que l'enseignant modifie les tâches routinières pour les rendre plus ouvertes, mais aussi, voire surtout, qu'il les utilise telles quelles et qu'il les exploite dans l'action de sorte à faire entrer l'incertitude dans la classe.

Chercheur en psychopédagogie, Beghetto (e.g. 2017) met en avant l'importance de faire entrer l'incertitude en classe afin de créer des défis plus complexes pour les élèves. Ses travaux sont de nature théorique et ouvrent la porte à l'investigation de ce que signifie et peut impliquer empiriquement une telle exploitation de tâches routinières en classe de mathématiques. Par ailleurs, outre l'incertitude, qu'en est-il des autres caractéristiques des « bons problèmes » discutées précédemment, soit être génératif, être accessible et non menaçant, permettre plusieurs solutions ou points d'entrée pour le résoudre et exiger un haut niveau de raisonnement? En ce sens, comment l'enseignant et les élèves, en interaction avec la tâche, peuvent-ils générer et maintenir une bonne activité de résolution de problèmes en classe? Voilà des questions qui sont au cœur de cette thèse doctorale.

1.7 L'objectif de la recherche

Les pages précédentes ont montré que la notion de « bons problèmes » en mathématiques se juge *a posteriori* de l'activité qui a pris place en classe; ne reposant pas que sur des caractéristiques de la tâche en elle-même, mais plutôt sur l'environnement mis en avant en classe par les élèves et l'enseignant alors qu'ils sont en interaction pour la résoudre. L'activité de résolution de problèmes mathématiques mise en œuvre dans l'action en classe semble avoir une grande importance, davantage que l'énoncé de la tâche en tant que telle. L'environnement de résolution semble jouer un rôle important, si bien que la nature de la tâche, pour certains, semble importer peu relativement à l'exploitation qui en est faite en classe. Il apparait important, toutefois, de mieux comprendre ces idées, c'est-à-dire de mieux comprendre la dynamique sous-jacente à l'exploitation de tâches routinières. En particulier, cette recherche doctorale veut investiguer les façons avec lesquelles une tâche routinière, tel que décrit par Beghetto (2017), peut devenir un bon problème en classe de mathématiques.

Le but de cette étude doctorale est d’étudier, de façon empirique, les manières avec lesquelles des tâches routinières peuvent être exploitées en classe pour stimuler l’activité de résolution de problèmes mathématiques des élèves.

CHAPITRE 2
LE CADRE THÉORIQUE

Dans ce chapitre, le cadre théorique de la recherche est présenté en prenant appui sur quatre sections. La première section aborde des concepts clés de la théorie cognitive de l'enaction. La seconde traite des inter-actions entre un individu et l'environnement qui sont ensuite discutées au regard de la classe de mathématiques. La troisième offre une conceptualisation de la résolution de problèmes en tant qu'activité de pose|résolution de problèmes mathématiques. La quatrième discute de l'aspect collectif de la classe de mathématiques et suggère de la voir, et de l'étudier, comme unité, soit en tant que collectivité. Finalement, la cinquième section propose une conceptualisation de l'évolution d'une tâche mathématique à travers ses inter-actions avec la collectivité.

2.1 Introduction : la théorie de l'enaction

Cette thèse doctorale prend ancrage dans la théorie cognitive de l'enaction (Maturana et Varela, 1992 ; Varela, 1996, 1999 ; Varela, Thompson et Rosh, 1991). L'enaction est une théorie biologique de la connaissance qui offre une compréhension des actions des individus à travers leurs inter-actions avec l'environnement. Cette théorie propose de voir la connaissance comme la mise en avant continue d'un monde qui se déploie, se fait, et se vit, en contraste à la réception d'un monde externe, prédéterminé et à décoder. Action et expérience sont indissociables dans cette théorie, où toute action fait émerger un monde : « every act of knowing brings forth a world. » (Maturana et Varela, 1992, p. 26). Les actions d'une personne sont inséparables de ses manières de voir le monde ; la connaissance étant une action accomplie par celui qui connaît et, de manière réciproque, les actions représentant les connaissances d'un individu : « All doing is knowing and all knowing is doing. » (Maturana et Varela, 1992, p. 27). Cette théorie de la connaissance met en exergue le rôle des inter-actions entre un individu et l'environnement dans le déploiement des connaissances et en explicite les mécanismes. L'insistance sur les mots « inter » et « action » par le trait d'union vient des travaux de Kieren (1995), l'un des pionniers à avoir exploité la théorie cognitive de l'enaction en didactique des mathématiques. Ce trait d'union a pour objectif d'accentuer le fait que, du point de vue de l'enaction, la connaissance s'observe dans les actions de chacun et pointe vers le rôle fondamental de l'environnement dans ces actions. Cette théorie permet d'expliquer les mécanismes en jeu lors des inter-actions entre une personne et l'environnement, offrant une manière de comprendre les actions des élèves et de l'enseignant en contexte d'exploitation de tâches routinières. Dans la classe de mathématiques, l'environnement fait référence aux tâches mathématiques, aux personnes qui s'y trouvent (enseignant, élèves, etc.), aux actions de tout un chacun, ainsi qu'aux différents artefacts qui sont présents.

2.2 L'inter-action et la classe de mathématiques

Dans leurs travaux, Maturana et Varela (1992) soutiennent que chaque individu nait avec une structure qui conditionne le cours de ses inter-actions avec et dans l'environnement, et qui circonscrit les changements au sein de cette même structure que ses inter-actions peuvent déclencher chez lui[5]. La structure d'un individu n'est pas statique, mais évolue en s'adaptant, au fil de ses inter-actions, à l'environnement. Cette structure évolutive est teintée par l'histoire de ses inter-actions avec l'environnement, et n'est alors pour ainsi dire jamais achevée (Kieren, 1995). Les actions d'un individu sont orientées par sa structure, lui permettant d'inter-agir avec l'environnement et de l'aborder en fonction de cette même structure. Maturana et Varela (1992) nomment ce phénomène le *déterminisme structurel,* soit le fait que c'est la structure d'un individu qui détermine les changements qui se produisent chez lui, et donc les actions qu'il met en avant à travers ses inter-actions avec l'environnement :

> This structure conditions the course of its interactions and restricts the structural changes that the interactions may trigger in it. At the same time, it is born in a particular place, in a medium that constitutes the ambience in which it emerges and in which it interacts. This ambience appears to have a structural dynamic on its own, *operationally distinct* from the living being. This is a crucial point. (p. 95, italiques dans l'original)

La structure d'un individu à la fois permet et restreint les changements qui peuvent se produire chez lui. Ces changements sont toujours contextualisés, car ils émergent de l'inter-action entre l'individu et l'environnement à un moment donné. De son côté, l'environnement possède également sa propre structure qui lui permet d'évoluer. Les changements de l'environnement ou de l'individu sont ainsi déterminés par leur structure, mais stimulés par leurs inter-actions :

[5] Pour Maturana et Varela (1992), le terme « structure » désigne l'ensemble des composantes et des relations qui permettent de constituer une unité (une personne, un objet, etc.).

> The key to understanding all this is indeed simple: as scientists, we can deal only with unities that are *structurally determined*. That is, we can only deal with systems in which all their changes are determined by their structure, whatever it may be, and in which those structural changes are a result of their own dynamics or triggered by their interactions. (p. 96, italiques dans l'original)

Les structures respectives de l'environnement et de l'individu sont par ailleurs connectées à travers leur histoire mutuelle d'inter-actions. L'environnement et l'individu sont toujours en inter-actions et, ce faisant, il y a une nécessaire compatibilité entre eux permettant leur fonctionnalité mutuelle. Dans leurs inter-actions, et tant que cette compatibilité demeure, chacun agit en tant que source de perturbations de la structure de l'autre, ce que Maturana et Varela (1992) nomment le *couplage structurel*. L'environnement agit comme un déclencheur de changements chez un individu et, réciproquement, celui-ci agit comme un déclencheur de changements pour l'environnement. Ces inter-actions et changements se mobilisent dans une boucle d'influence mutuelle, chacun influençant l'autre au cours de leur évolution et produisant ensemble leur histoire d'inter-actions. Ce faisant, l'environnement et l'individu non seulement co-évoluent, mais s'adaptent l'un à l'autre, demeurant dans un même domaine de compatibilité qui est propre à leur histoire. Ceci veut dire qu'un même environnement ne stimule pas nécessairement les mêmes changements, les mêmes actions, chez différents individus, car ceux-ci n'ont pas la même histoire de couplage structurel avec leur environnement ni le même déterminisme structurel qui orientent leurs inter-actions avec cet environnement.

Et, bien que ces changements soient occasionnés ou déclenchés par l'un, ils sont déterminés par la structure du système perturbé, car c'est de celle-ci que proviennent les changements, comme le disent Maturana et Varela (1992) :

> Therefore, we have used the expression "to trigger" an effect. In this way we refer to the fact that the changes that result from the interaction between the living being and its environment are brought about by the disturbing agent but *determined by the structure of the disturbed system*. The same holds true for the environment: the living being is a source of perturbations and not of instructions. (p. 96, italiques dans l'original)

L'environnement d'un individu n'impose donc pas les changements qui se produisent chez lui, mais agit en tant que source de perturbations. Réciproquement, les changements dans l'environnement ne sont pas dictés par les actions de l'individu, mais ces actions agissent en tant que déclencheur de changements. Il n'y aurait en fait aucune propriété prescriptive dans l'environnement ou dans les actions des individus qui dicterait les changements chez l'autre (Kieren, 1995). Ces changements, lorsqu'ils surviennent, sont déclenchés par l'autre, mais proviennent de sa structure lors de l'inter-action avec l'autre.

Dans la classe de mathématiques, ceci mène à penser que lorsqu'une tâche routinière est proposée, celle-ci ne dicte pas les actions à faire, mais a le potentiel de les stimuler, de les déclencher. La tâche en soi n'est pas conçue comme étant prescriptive ou déterminante des actions mises en avant en classe : elle agit comme un stimulus, un déclencheur. Vu sous cet angle, ceci offre une explication pour l'exemple de la tâche *Playing with Squares* de Wagner (2003) présenté au chapitre précédent (voir p. 12-16), dans lequel les élèves se sont engagés dans des avenues de résolution différentes les unes des autres. En effet, face à cette tâche, certains élèves se sont engagés dans la résolution d'un problème géométrique, alors que d'autres ont résolu un problème de proportion ou encore un problème d'expressions numériques comprenant des radicaux. Bien que la tâche initiale présentée aux élèves ait été *a priori* la même, il est possible de dire qu'ils ont résolu des problèmes différents puisque l'inter-action entre ceux-ci et la tâche a fait naitre différents problèmes. L'enaction nous invite à voir que ceci est le produit de la structure unique de chaque élève, en inter-action avec l'environnement qui stimule et déclenche ses actions; et non une propriété prescriptive inhérente à la tâche qui dicterait ces mêmes actions chez l'élève. Par ailleurs, la boucle d'influence mutuelle nous mène à penser que les actions mathématiques déployées en classe ont le potentiel de modifier l'environnement en retour. L'enaction propose en ce sens de s'intéresser à la co-évolution et à l'adaptation mutuelle entre des dimensions de l'environnement, telles que la tâche mathématique proposée, et les individus faisant partie de cet environnement, soient les élèves et l'enseignant.

C'est d'ailleurs dans cet ordre d'idées que Varela, dans ses travaux (1996 ; Varela, Thompson et Rosch, 1991), explique des aspects du déterminisme structurel en termes de différences entre la *pose* et la *résolution* de problèmes. Pour Varela (1996 ; Varela, Thompson et Rosch, 1991), la codétermination entre un individu et l'environnement, due à leur couplage structurel, implique que les problèmes qu'il rencontre proviennent du sens qu'il donne au monde dans lequel il vit. L'émergence d'un problème de géométrie ou encore d'un problème de proportion chez un élève, à partir d'une même tâche initiale, comme dans le cas de la tâche de Wagner (2003), provient du sens que chacun donne à la situation dans laquelle il se trouve. Pour Varela, les problèmes ne sont pas situés dans la nature, latents, à attendre qu'un individu les trouve et les résolve. Ceux-ci sont mis en avant à travers les inter-actions d'un individu et son environnement :

> The key point, then, is that the species brings forth and specifies its own domain of problems to be solved by satisficing; this domain does not exist "out there" in an environment that acts as a landing pad for organisms that somehow drop or parachute into the world. Instead, living beings and their environments stand in relation to each other through *mutual specification* or *codetermination*. (Varela, Thompson et Rosch, 1991, p. 198, italiques dans l'original)

En classe, si l'enseignant propose une tâche, il propose en fait un déclencheur, un « prompt » pour reprendre l'expression de Simmt (2000). C'est l'élève qui fait alors émerger un problème à travers son inter-action avec la tâche. Les problèmes qu'un élève aborde et résout en classe ne sont donc pas prédéterminés par l'enseignant, ni par la tâche, car l'élève les pose et les aborde en fonction de sa structure. Les actions réalisées par un élève lors de cette pose de problème ont toutefois, à leur tour, le potentiel de modifier des dimensions de l'environnement, comme la tâche (ceci sera abordé plus en détail dans les prochaines sous-sections). C'est la boucle d'influence mutuelle expliquée précédemment. Le couplage structurel entre l'élève et l'environnement crée et permet les situations possibles sur lesquelles l'élève agit, alors que sa structure lui permet de les faire émerger et de les aborder de manière spécifique. À son tour, l'élève agit comme un déclencheur potentiel de changements pour l'environnement, qui est tout autant appelé à se modifier au fil de leurs inter-actions. Ces transformations de l'environnement offrent de nouvelles possibilités, de nouveaux déclencheurs à l'élève; et la boucle se poursuit ainsi.

Dans cet ordre d'idées, pour Varela, la faculté d'un individu réside dans sa capacité de se poser des problèmes signifiants alors qu'il est couplé à son environnement :

> La plus importante faculté de toute cognition vivante est précisément, dans une large mesure, de poser les questions pertinentes qui surgissent à chaque moment de notre vie. Elles ne sont pas prédéfinies, mais *enactées*, on les *fait émerger* sur un arrière-plan, et les critères de pertinence sont dictés par notre sens commun, d'une manière toujours contextuelle. (Varela, 1996, p. 91, italiques dans l'original).

Un élève n'agit donc pas sur des situations préexistantes en classe, car celles-ci ne surviennent pas tant qu'il ne les fait pas émerger (Proulx et Maheux, 2017). Le problème que l'élève résout en classe émerge de l’inter-action de sa structure avec la tâche mathématique proposée, et plus largement, avec l’environnement mathématique de classe dans lequel il se trouve. Les problèmes qu’un élève aborde pourraient alors être vus comme étant implicitement importants pour lui, car de sa structure en inter-action avec l’environnement il les fait émerger, il les pose en tant que problèmes à aborder (Proulx, 2010). Dans le contexte de l’enseignement des mathématiques et sous la lumière de l’enaction, Proulx et Maheux (2017) invitent à concevoir cette étape de pose de problème comme le premier pas d’une voie au cœur de la démarche de résolution de problèmes mathématiques.

2.3 La relation dialectique entre la pose et la résolution de problèmes mathématiques

En classe de mathématiques, lorsqu’une tâche mathématique est proposée à résoudre, celle-ci agit comme un déclencheur potentiel, un stimulus, d’une réaction mathématique. La tâche, comme le suggère Simmt (2000), peut être vue comme une invitation à poser, c’est-à-dire à faire émerger, un problème mathématique en tant que réponse à cette invitation. Le déterminisme structurel de chaque individu lui permet de faire naitre un problème, suite à ce que la tâche déclenche chez lui comme réaction.

Par exemple, en contexte de calcul mental, des participants à un projet de recherche (voir Proulx, 2013 ; Proulx, Lavallée-Lamarche et Tremblay, 2017) ont été invités à résoudre la tâche : « $\frac{2}{5}\ x = \frac{1}{2}$ ». Face à cette tâche, un participant explique avoir utilisé des ratios en multipliant les moyens et les extrêmes pour obtenir $4x = 5$, d’où $x = \frac{5}{4}$. Un autre participant, pour sa part, dit avoir divisé par $\frac{2}{5}$ de chaque côté de l’égalité, ce qui l’a mené à multiplier par $\frac{5}{2}$ pour obtenir également $x = \frac{5}{4}$. Un autre individu a, quant à lui, cherché la valeur de x qui fait en sorte que $\frac{2}{5}$ soit égal à $\frac{1}{2}$. Mettant alors les fractions sur un même dénominateur de 10, il explique, en transformant en écriture décimale, que x vaut 1,25 car $4 \times 1{,}25 = 5$. Ces différentes stratégies de résolution proposées par ces participants illustrent que chaque individu fait émerger un problème différent en fonction de son déterminisme structurel et de ce que la tâche déclenche chez lui. Tout comme dans l’exemple de Wagner (2003), chacun donne un sens qui lui est propre à l’invitation lancée par la tâche, ce qui l’amène à poser son problème d’une manière singulière.

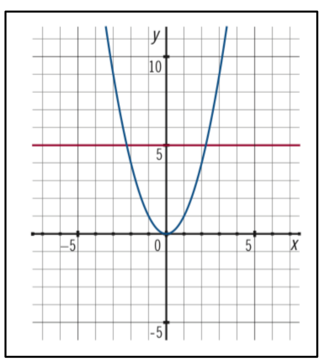
Un individu aborde une tâche mathématique offerte en classe avec ses expériences et les stimuli qu'il perçoit dans son environnement. En réaction à ces stimuli, il se pose un problème qui pour lui est significatif à ce moment précis. Proulx et Maheux (2017) nous invitent à voir ce moment de *pose de problème* comme l'entrée de chacun dans la résolution du problème :

> Hence posing a problem represents the first step that orients the solving process. This posing of the problem necessitates finding a way in, of getting through, in order to be able to start solving. Posing the problem is in fact already initiating its resolution. (p. 161)

En posant un problème, en assignant un contexte précis à la tâche, un individu se donne une manière de l'aborder, d'entamer sa résolution. Or, lorsque ce premier pas de pose de problème est fait, la tâche se modifie en retour puisqu'elle prend alors une couleur particulière en fonction de ce premier pas. Prenons un exemple, toujours de Proulx et Maheux (2017) (voir aussi Proulx, 2013), pour expliciter ceci.

Dans le contexte d'une autre séance de calcul mental, des participants avaient vingt secondes pour tenter de résoudre mentalement la tâche suivante : « Résoudre $x^2 - 4 = 5$ ». Un participant, Paul, explique que pour lui, la tâche est devenue un problème de système d'équations à aborder dans lequel les équations $y = x^2 - 4$ et $y = 5$ sont comparées. Il explique alors qu'il s'est donné, mentalement, une représentation graphique afin de s'aider à résoudre le système d'équations. L'image qu'il s'est donnée, tel qu'il l'explique, est la suivante :

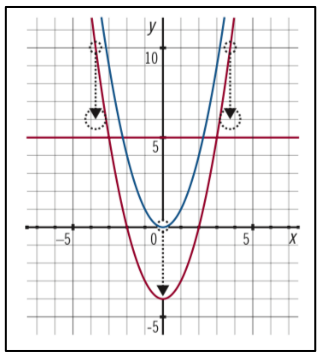
Figure 2.1 Image mentale de la représentation graphique d'un participant (p. 164)



Paul s'est engagé, mentalement, dans la recherche des points d'intersection de deux équations pour tenter de résoudre le problème de système d'équations de manière graphique qu'il s'est lui-même posé.

Cette première étape vient teinter la prochaine étape réalisée par Paul, car celle-ci a fait émerger un contexte spécifique de résolution. Elle influence la résolution de problèmes qui est ensuite déployée, mais offre néanmoins des possibilités à la fois nouvelles et diverses pour poursuivre la résolution. En effet, une autre personne qui prendrait la nouvelle tâche formée à partir de cette première étape (illustrée par la Figure 2.1) pourrait y voir quelque chose de légèrement ou radicalement différent en termes d'une possible prochaine étape. Toutefois, pour Paul, la résolution du problème de système d'équations qu'il s'est posé se poursuit en étant teintée de cette première étape. Afin de poursuivre la résolution de son problème, Paul s'est alors posé un problème géométrique de distance et de translation, en descendant mentalement la parabole afin de trouver les coordonnées des points d'intersection, comme l'illustre la figure suivante :

Figure 2.2 La translation de $y = x^2$ vers $y = x^2$ - 4 (p. 164)



Paul explique alors que la parabole subit une translation de 4 unités vers le bas le long de l'axe vertical et que la droite y = 5 devient alors 9 en termes de distance avec la courbe. En posant ce problème géométrique, Paul s'est, au même moment, engagé dans une réflexion sur la translation et sur la distance entre les graphiques des deux équations, faisant avancer la résolution du problème. Ceci le mène à se poser un troisième et dernier problème, soit un problème de recherche d'une valeur manquante dans l'expression $9 = x^2$. En considérant les deux branches de la parabole, il arrive à $x = 3$ et $x = -3$.

Comme cet exemple l'illustre, chaque étape de résolution peut être vue comme constituant à la fois la pose d'un problème (dans ce cas-ci de résolution graphique d'un système d'équations, de distance et de translation, de recherche d'une valeur manquante) et un pas de résolution, car la personne tente de le résoudre tout en le faisant émerger. La pose et la résolution d'un problème peuvent ainsi être vues comme étant mutuellement constitutives l'une de l'autre, tel que Proulx et Maheux (2017) l'expliquent :

> This gives the sense that each act of solving is followed by a reposing, which calls for a new solving move, and so forth. But there is more. The conceptualisation of mathematical problem-posing that we derive from our reading of Varela leads us to consider the dialectical nature of posing and solving. That is, not only does the posing and the solving continually follow and precede each other like two feet moving in/for walking, the two dimensions emerge at the very same time, each being conditional on and for the other (p. 163).

C'est en ce sens que Proulx et Maheux (2017) proposent d'utiliser l'expression *pose|résolution de problèmes* (et non uniquement de résolution de problèmes). Par cette expression, ils insistent sur la relation dialectique entre la pose et la résolution de problèmes mathématiques et montrent que la pose d'un problème fait partie de la résolution, et que réciproquement chaque étape de résolution est en fait la pose d'un nouveau problème. La résolution d'une tâche mathématique peut ainsi être vue comme une activité de pose|résolution de problèmes dans laquelle les différentes étapes sont contingentes l'une à l'autre. Chacune de ces étapes ouvre la porte à de nouvelles possibilités, si bien qu'après chacune d'entre elles, plusieurs avenues possibles pour poursuivre la résolution pourraient être envisagées. Chacune des étapes est toutefois influencée et déclenchée par les étapes précédentes au fil de la résolution de la tâche initiale.

En ce sens, la tâche est appelée à se transformer, à évoluer, à travers cette activité de pose|résolution de problèmes. Chaque étape de résolution du problème pourrait ainsi être associée à la pose d'un nouveau problème qui génère au même moment un autre pas dans la résolution et ainsi de suite ; un chemin de résolution émerge alors dans l'inter-action entre l'individu et la tâche, en co-évoluant. La stratégie de résolution d'un problème peut donc être vue comme émergeant à même les étapes de pose|résolution de problèmes que réalisent une personne, car celles-ci émergent au moment où elle s'engage avec le problème qu'elle se pose, et ce, à chaque étape de résolution. C'est en ce sens que pour Proulx et Maheux (2017) les stratégies mathématiques émergent dans l'inter-action entre la personne et le problème qu'elle résout :

> This view is consistent with other accounts of how mathematical strategies are said to emerge in the interaction of solver and problem, enacted at the moment of interaction. As Brent Davis

> (1995) explains, mathematical strategies are inseparable from the solver *and* from the problem itself. They emerge from both, and both co-emerge as solvers and problem through this interaction (p. 162, italiques dans l'original)

Résoudre un problème mathématique c'est ainsi faire un pas puis un autre ; des pas qui émergent et qui créent le chemin, la stratégie de résolution.

Cette conceptualisation offre une manière de comprendre les actions entreprises par les individus lors de l'exploitation d'une tâche mathématique (routinière ou non), ainsi que la nature de l'activité mathématique déployée par les élèves lorsqu'ils sont placés en contexte de résolution de problèmes. Lorsqu'une tâche routinière est proposée en classe, les stratégies mises en avant pour la résoudre peuvent être vues, sous cette lunette, comme des étapes de pose|résolution de problèmes. À travers ces étapes de pose|résolution de problèmes, cette conceptualisation montre également que la tâche initiale, qu'elle soit routinière ou non, subit des transformations; elle est appelée à évoluer. L'exploitation de tâches routinières se réalisant à travers et par les inter-actions qui prennent place *en classe*, il apparait important d'ancrer dans l'enaction l'aspect collectif de la classe de mathématiques.

2.4 L'entrée par la collectivité

Dans la classe de mathématiques, l'enseignant et les élèves sont en inter-action les uns avec les autres. Chacun participe en mettant en avant des actions qui dépendent de sa structure interne et de ce que l'environnement stimule chez lui. Étant couplé structurellement, chaque individu agit en tant que source de perturbations pour l'autre, comme nous l'avons vu précédemment. Tous sont en ce sens sensibles aux actions des autres.

La constitution d'un système social comme la classe entraine la *co-ontogénie* entre les individus, c'est-à-dire qu'en classe ceux-ci expérimentent une histoire partagée de changements structurels réciproques. La vie sociale de la classe permet aux individus de coordonner leurs activités à celles des autres à travers cette co-ontogénie. Ce faisant, les inter-actions qui découlent de la coordination de ces activités donnent lieu à de nouvelles possibilités d'action pour tous en classe, et donc pour la classe elle-même. C'est d'ailleurs dans cet ordre d'idée que Kieren (1995) propose de voir l'enseignement comme une activité réciproque dans laquelle les actions des uns en classe, enseignant et élèves, résultent en des possibilités d'actions pour les autres :

> Thus the learning and the teaching are not clearly distinct but are better thought of as reciprocal in nature. The children's mathematical actions were occasioned by the teacher acts but those teacher actions were in turn occasioned by the children's mathematical activity. This reciprocity was not simply a "back and forth" activity. This reciprocal teaching/learning occurred in a complex web with each person's actions resulting in new possibilities for all of the others. (p. 10)

Par cette réciprocité, Kieren (1995) met l'accent sur le fait que les actions de l'enseignant en classe sont stimulées par celles des élèves, tout comme les actions des élèves sont stimulées par celles de l'enseignant. Les élèves et l'enseignant s'influencent mutuellement, formant un tout, d'où l'idée que l'apprentissage et l'enseignement sont des activités réciproques. Les actions de tout un chacun en classe sont ainsi dépendantes de l'environnement dans lequel il se trouve. Ce faisant, dans chaque action faite en classe par l'élève ou par l'enseignant, il y a une contribution de l'environnement dans cette même action. L'action est tout autant attribuable à l'inter-action qu'à l'individu. Pour l'enaction, l'individu n'est pas isolé de son environnement, si bien que ses actions sont partagées et créées à travers et par l'environnement. C'est dans cet ordre d'idées que Towers et Martin (2015), reprenant les propos de Stahl (2006), proposent de voir le terme *partagé* non pas dans le sens que des actions mathématiques se chevauchent sous une intersection, comme dans un diagramme de Venn, ni que des individus réalisent des actions qu'ils connaissent déjà. Ils proposent plutôt que ces actions émergent et sont constituées de manière inter-active et sont difficilement attribuables à un seul individu en particulier. En classe, les actions mathématiques déployées sont un produit des inter-actions des individus avec l'environnement. Les actions mathématiques émergent de la collectivité que forme la classe.

Une position enactiviste soutient alors que les actions d'un individu (gestes, expressions faciales, paroles, etc.) font partie de son processus cognitif et sont coordonnées au sein de la collectivité, telle la classe de mathématiques, par le couplage structurel entre les individus qui en font partie (Towers et Martin, 2015). L'enaction invite alors à s'intéresser aux relations entre les éléments de l'environnement mathématique de la classe (idées, segments de dialogue, gestes, silences, diagrammes, tableau, etc.) plutôt qu'à ce que chacun de ceux-ci peut représenter pour lui-même ou pour un individu particulier (*Ibid*.). Prendre le groupe en tant que collectivité mène à s'intéresser à ce que les individus font collectivement : ce qu'ils explorent, produisent, creusent, etc., collectivement au niveau mathématique et non à ce que chacun accomplit lui-même. L'enaction met ainsi en lumière l'intérêt de prendre en compte l'activité collective de la classe, puisque c'est au sein de celle-ci qu'émergent les actions de chacun, élèves et enseignant inclus.

Toutefois, comme Martin, Towers et Pirie (2006) le mentionnent, l'idée n'est pas d'enlever de l'importance aux actions mathématiques déployées par un individu particulier, mais plutôt de tourner le regard vers le niveau auquel ces actions se constituent et prennent place, soit au niveau de la collectivité :

> Whilst we do not wish in any way to devalue the place of dynamical personal understanding, we would also argue that […] mathematical understanding must also be considered at the other levels at which it is seen to emerge, in particular that of the collective. (p. 180)

Un tel intérêt pour la prise en compte de la collectivité au sein de la classe de mathématiques s'est d'ailleurs développé dans plusieurs travaux de recherche depuis les vingt dernières années (Towers, Martin et Heater, 2013). En effet, plusieurs recherches utilisent la classe en tant qu'unité d'analyse pour étudier différents phénomènes collectifs (voir e.g. Bowers et Nickerson, 2001; Cobb, 1999; Francisco, 2013; Towers et al., 2013 ; Rasmussen et Stephan, 2008). Ces études s'intéressent à divers aspects mathématiques qui se produisent et qui sont réalisés collectivement ; la classe étant l'unité précise de production de ceux-ci. C'est en ce sens que Levenson (2011) soutient sa recherche centrée sur le collectif : « This study focuses on the collective, not as the aggregation of a few individuals, but as the unit of study. » (p. 215). Il ne s'agit donc pas de voir ce que chacun apporte individuellement, mais plutôt de considérer l'activité que des individus, *couplés structurellement*, produisent ensemble : le produit d'une collectivité.

C'est sous cet angle que Towers et Martin (2015) s'intéressent au développement de la compréhension mathématique *collective*. Pour eux, malgré le fait que les actions émergent de chaque élève, plusieurs voix peuvent avoir contribué à son émergence. C'est la manière avec laquelle les idées sont reprises, travaillées et développées par le groupe qui dirige leur analyse. Le développement de la compréhension mathématique collective, donc d'un groupe, est défini comme étant la compréhension qui peut se produire quand un groupe, peu importe sa taille, travaille ensemble à faire des mathématiques (*Ibid*.). À titre d'exemple, dans leurs travaux, trois élèves de sixième année ont à travailler ensemble pour résoudre une tâche mathématique. Ces élèves, d'une même classe, n'avaient jamais travaillé ensemble dans un même sous-groupe pendant l'année scolaire. Considérés forts en mathématiques par l'enseignante, ceux-ci étaient en fait répartis dans différents sous-groupes afin de séparer leur force au sein du groupe. La Figure 2.3 présente un extrait de verbatim tiré de cette recherche. Il est à noter que les points de suspension ne représentent pas des paroles omises ou en suspens, mais plutôt une lignée continue de penser.

Figure 2.3 Transcription traditionnelle du travail du groupe (tiré de Towers et Martin, 2015, p. 253)

1. Natalie: Can try it. Measure sides. (*She begins to measure one of the shorter sides*).
2. Stanley: Ten.
3. Natalie: Mm hm. And that's ten rights? (*She points to the opposite side*). They're both ten. And then the top one is longer, and that is…
4. Thomas: …it's eighteen.
5. Natalie: Yep. So that's ten…and eighteen. (*She writes the numbers on the sides*). Ok, so we could…
6. Thomas: …multiply…
7. Natalie: …the area, yeah ten by eighteen…and then see what we get.
8. Thomas: It would be this…*(writing 180)*
9. Natalie: yep (*pause*) and then if we wanted to do…so that would be the area then?
10. Stanley: But look at the shape.
11. Natalie: I know that's what I'm saying that can't be right cause that—that's a little bit…
12. Stanley: Okay. Wait, I know…. draw a straight line, here and here, you get triangles, and squares. (*He adds lines to the parallelogram, see Fig.* 2)

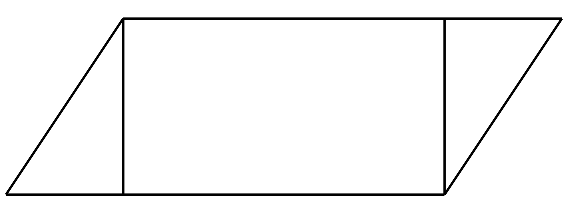


Fig. 2 Annotated parallelogram

13. Thomas: Oh I know…
14. Stanley: Now these triangles…I think…
15. Thomas: is half?
16. Natalie These triangles will make up that square though. So then if we just measure that….
17. Stanley: and times by two.
18. Natalie: Yeah. Because these two, these triangles make that square, right? (*They have concluded (wrongly) that the two outer right-angled triangles are equivalent in area to the inner rectangle*).
19. Thomas: That'll work.
20. Stanley: I think…
21. Natalie: So if we…what is…this it's still, it's not eighteen though, anymore. Because we're cutting it… it will be twelve. (*She measures the sides of the rec- tangle that has been created*).
22. Thomas: and then ten
23. Natalie: and this side is…no it wouldn't be ten. (*She is referring to the width of the rectangle, i.e. the perpendicular height of the parallelogram*).
24. Thomas: Like, eight?
25. Natalie: this side is eight, yep. So…
26. Stanley: and then 12 times 8…
27. Thomas: …is…ninety…
28. Stanley: Yeah, ninety-six. (*This is the area of the inner rectangle*).
29. Thomas: …six
30. Natalie: So ninety-six times…
31. Stanley: So ninety-six times two, so uh ninety-s….
32. Thomas: a hundred…I mean no, not a hundred…yeah a hundred eighty-uh… three?
33. Stanley: *ninety*-three…
34. Natalie: ninety-six. One ninety-six.
35. Stanley: Okay.
36. Natalie: How does that work? Two times six is twelve. One ninety-two.
37. Thomas: So it's one ninety-two.
38. Stanley: Yeah, one ninety-two…
39. Natalie: …is the area of that. So it's the area of the whole…

Sous ce format de transcription, les chercheurs étaient insatisfaits de leur analyse du développement de la compréhension mathématique collective des élèves, alors que celle-ci leur était évidente lorsqu'ils regardaient la vidéo (*Ibid*.). Cette situation les a menés à modifier la manière de présenter et d'organiser leurs données afin de tenir compte du caractère collectif et inter-actif des actions des individus. Ainsi, en regroupant les propos des élèves sous une seule et même voix, la dynamique du développement des compréhensions mathématiques des élèves devenait plus saillante. La Figure 2.4 suivante illustre cette nouvelle organisation et présentation de leurs données.

Figure 2.4 Transcription revisitée du travail du groupe (tiré de Towers et Martin, 2015, p. 253)

Can try it. Measure sides. (*Begins to measure one of the shorter sides*). Ten. Mm hm. And that's ten rights? (*Points to the opposite side*). They're both ten. And then the top one is longer, and that is it's eighteen. Yep. So that's ten and eighteen. (*Writes the numbers on the sides*). Ok, so we could multiply the area, yeah ten by eighteen and then see what we get. It would be this (writing 180). Yep (*pause*) and then if we wanted to do so that would be the area then? But look at the shape. I know that's what I'm saying that can't be right 'cause that that's a little bit. Okay. Wait, I know. Draw a straight line, here and here, you get triangles, and squares. (*Adds lines to the parallelogram, see Figure 1*). Oh I know. Now these triangles, I think is half? These triangles will make up that square, though. So then if we just measure that and times by two. Yeah. Because these two, these triangles, make that square, right? That'll work I think. So if we, what is this? (*indicating the longer dimension of the newly created rectangle in the middle.*) It's still, it's not eighteen though, anymore. Because we're cutting it. It will be twelve (*measures the sides of the rectangle that has been created*) and then ten and this side is, no it wouldn't be ten (*referring to the width of the rectangle, i.e., the perpendicular height of the parallelogram*). Like, eight? This side is eight, yep. So and then twelve times eight is ninety. Yeah, ninety-six. (*This is the area of the inner rectangle*) Six. So ninety-six times. So ninety-six times two, so uh ninety-s.... a hundred, I mean no, not a hundred, yeah a hundred – eighty-uh three? Ninety- three. Ninety-six. One ninety-six. Okay. How does that work? Two times six is twelve. One ninety-two. So it's one ninety-two. Yeah, one ninety-two is the area of that. So it's the area of the whole.

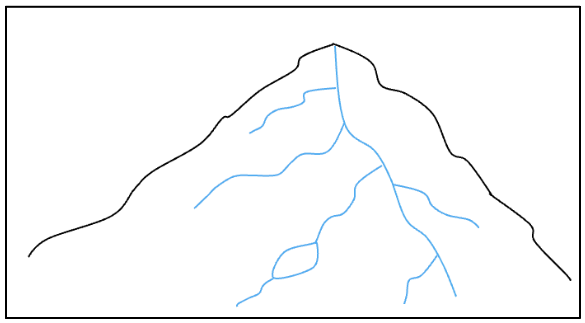
Cette transcription pourrait sembler provenir du monologue d'une seule et même personne en train de résoudre une tâche, alors qu'elle est issue du travail de trois différents individus (représentés par les différentes couleurs) qui, ensemble, mettent la main à la pâte pour faire des mathématiques. Bien que le vert soit davantage présent dans le verbatim, l'analyse de Towers et Martin montre que cet élève (en vert) prenait souvent un rôle de narrateur et que ce sont bien les diverses contributions mises en avant collectivement qui ont mené au développement de compréhensions mathématiques : chaque action mathématique réalisée est le fruit de l'inter-action entre les trois élèves et la tâche proposée.

Ces idées s'alignent avec la *sphère des possibilités* dont parle Kieren (1995) et qui fait référence aux actions déployées en classe lors de la coordination des activités des individus. Cette sphère des possibilités se développe par les actions des individus et contribue, en retour, à déclencher de nouvelles actions, offrant alors des possibilités mathématiques supplémentaires à la collectivité. Ces ancrages théoriques dans l'enaction, dans la conceptualisation de la pose|résolution de problèmes et dans l'activité collective amènent à considérer l'exploitation collective de tâches routinières comme une activité de pose|résolution de problèmes à étudier au niveau collectif. À travers cette activité collective, il apparait en retour important d'aborder, voire conceptualiser, l'aspect évolutif des tâches mathématiques en relation avec la collectivité.

2.5 L'évolution d'une tâche mathématique au sein de la collectivité

Maturana et Varela (1992) utilisent l'analogie de la goutte d'eau qui coule sur une montagne pour illustrer l'évolution des espèces. Cette analogie peut être reprise pour se donner un moyen d'imager comment une tâche présentée en classe peut évoluer au fil des diverses inter-actions entre les individus et leur environnement. Ils proposent d'imaginer une montagne dont le sommet est escarpé. Une personne se trouve sur le dessus et laisse tomber des gouttes d'eau l'une après l'autre dans la même direction. Chaque goutte d'eau possède alors une énergie potentielle qui lui permet de descendre dans la montagne et de se frayer un chemin. Aussi longtemps qu'une goutte d'eau a cette énergie potentielle, et que l'environnement le lui permet, elle poursuit sa descente dans la montagne. Si les gouttes d'eau laissaient des marques sur le sol, une personne pourrait voir qu'elles suivent différentes directions selon les obstacles qu'elles rencontrent sur leur parcours. Les différents parcours sont pour Maturana et Varela (1992) la résultante des manières individuelles qu'a chaque goutte d'eau d'inter-agir avec son environnement, soit le sol, le vent, les animaux, les autres gouttes d'eau, etc. Les gouttes d'eau, tout autant que le sol, le vent et les animaux ont la possibilité de se transformer à travers leurs inter-actions. Le parcours que poursuit une goutte d'eau dépend de l'inter-action entre sa structure et l'environnement qui l'entoure, les deux étant malléables. La dérive naturelle d'une goutte d'eau qui coule sur la montagne suit ainsi un parcours qui se développe et qui devient possible à chaque instant à travers ses inter-actions avec l'environnement. Et, lorsque la goutte d'eau ne s'adapte plus aux conditions de l'environnement, elle perd son énergie potentielle et se désintègre. Son parcours est alors terminé. La Figure 2.5 illustre en ce sens les différents parcours possibles que peut prendre une goutte d'eau :

Figure 2.5 Écoulement d'une goutte d'eau sur une montagne (reproduction de Maturana et Varela, 1992, p. 111-112)

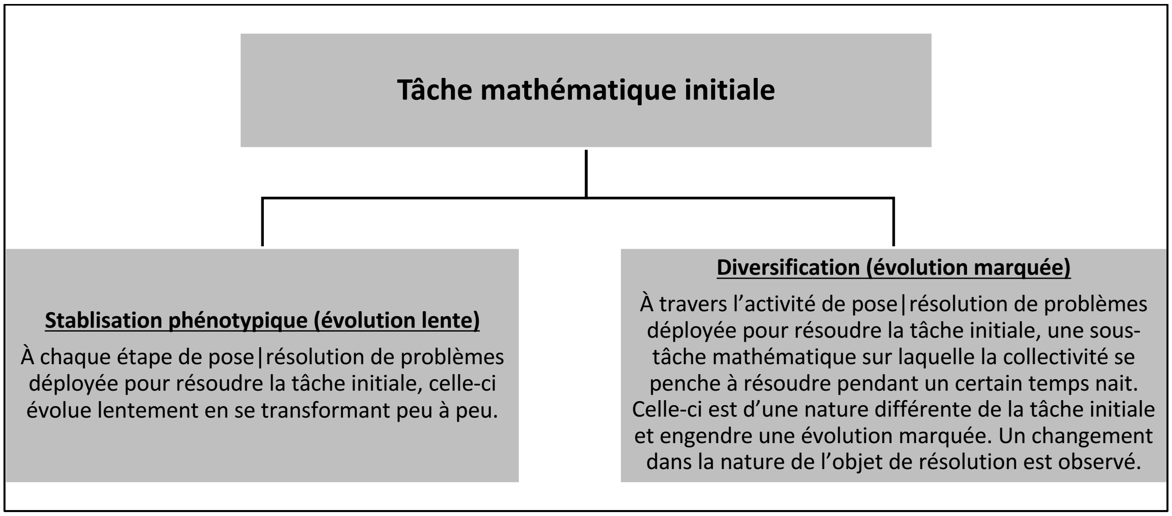


Dans la classe de mathématiques, si la goutte d'eau représente une tâche proposée, cette analogie montre les différents parcours poursuivis par celle-ci à travers l'activité de pose|résolution de problèmes qui émerge en classe. La tâche mathématique est dotée d'une énergie potentielle qui lui permet d'évoluer en se frayant un chemin à travers ses inter-actions avec l'environnement. Dans la classe de mathématiques, l'environnement d'une tâche se compose de la collectivité et des actions et artefacts mathématiques qu'elle met en avant; celles-ci étant dépendantes du passé, des préférences, de l'histoire de la classe, etc. La tâche, tout autant que son environnement, évolue alors à travers leurs inter-actions. Au plan collectif, les différentes étapes de pose|résolution de problèmes déployées en classe contribuent à enrichir la sphère des possibilités et à faire naitre un chemin de résolution. La tâche est alors appelée à évoluer, à se transformer, à bifurquer, ou encore à stagner à travers sa résolution en classe, soit à travers ses inter-actions avec l'environnement.

Dans leurs travaux, Maturana et Varela (1992) expliquent que les variations que subit une espèce au cours de son évolution, à travers ses inter-actions avec l'environnement, peuvent être soient lentes, soient marquées. Si les variations sont lentes, les espèces évoluent et ne semblent pas avoir changé ; bien qu'elles aient subi de légères variations. Ils parlent alors de stabilisation phénotypique. Au contraire, si les variations sont marquées, les espèces évoluent rapidement et un changement important survient dans leur allure. C'est la diversification. D'une manière analogue, une tâche mathématique peut évoluer lentement ou de manière marquée à travers les inter-actions en classe. D'une part, tel qu'explicité à la Section 2.2, chaque étape dans la résolution de la tâche initiale peut être vue comme constituant à la fois la pose d'un problème et un pas dans la résolution. Cette pose|résolution de problèmes fait évoluer lentement la tâche initiale, c'est-à-dire qu'à travers les différentes étapes déployées pour la résoudre celle-ci varie et se transforme peu à peu. Dans ce cas, la collectivité est centrée directement sur la résolution de la tâche initiale qui subit de légers changements et variations à travers les différentes étapes de pose|résolution de problèmes déployées pour la résoudre. D'autre part, la tâche mathématique initiale, à travers l'activité collective de pose|résolution de problèmes qui prend place, peut complètement bifurquer et alors évoluer rapidement. À ce moment, un changement dans la nature de l'objet de résolution de la collectivité est observé. Une sous-tâche mathématique nait alors et vient modifier, pendant un certain temps, la nature de l'objet de résolution de la collectivité. Cette sous-tâche mathématique est connectée et provient de l'activité collective mise en avant pour résoudre la tâche initiale, mais constitue une variation marquée : la collectivité ne se penche plus directement sur la résolution de la tâche initiale, mais tente plutôt, pendant un certain temps, de résoudre la sous-tâche mathématique. Ceci fait bifurquer l'activité collective de résolution de la tâche initiale, pendant un certain temps.

En s'intéressant à ce qui pourrait être appelé l'ontogénie de la tâche, c'est-à-dire à l'histoire de changements structurels de la tâche à travers ses inter-actions avec l'environnement, il serait alors possible de considérer son évolution sous deux angles différents : la stabilisation phénotypique (évolution lente) et la diversification (évolution marquée). La Figure 2.6 suivante reprend ceux-ci :

Figure 2.6 Deux types d'évolution d'une tâche mathématique



La stabilisation phénotypique peut être illustrée à partir de l'exemple de la résolution de la tâche visant à « Résoudre $x^2 - 4 = 5$ », tiré de Proulx et Maheux (2017) et discuté aux pages 36-37. À partir de cette tâche, Paul fait émerger, dans l'ordre un problème de :

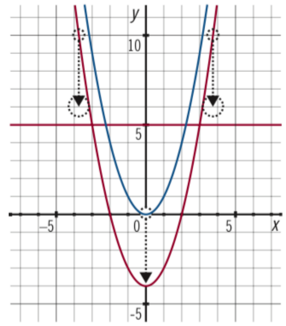
1) Système d'équations dans lequel les équations $y = x^2 - 4$ et $y = 5$ sont comparées ;

2) Géométrie portant sur la distance et la translation ;

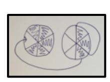
3) Recherche d'une valeur manquante dans l'expression $9 = x^2$.

Ces différents problèmes offrent des variations de la tâche initiale ; des variations qui permettent d'ailleurs de la résoudre. Toutefois, ces problèmes sont de même nature que la tâche initiale, c'est-à-dire qu'ils sont déployés afin de résoudre directement la tâche initiale. Ces variations peuvent en ce sens facilement être reliées à celle-ci. En effet, le problème de géométrie portant sur la distance et la translation peut aisément être associé à la tâche initiale de résoudre $x^2 - 4 = 5$. En prenant le graphique imaginé par Paul, repris ci-dessous, il est possible de voir la tâche de résoudre $x^2 - 4 = 5$ par la superposition des courbes en rouge qui représentent chaque côté de l'équation. En ce sens, il ne serait pas étonnant de donner ce graphique à une tierce personne et qu'elle soutienne que la tâche initiale était de résoudre $x^2 - 4 = 5$, ou encore sa représentation graphique (qui correspond par ailleurs au premier problème qu'il s'est posé).

Figure 2.7 Problème de géométrie portant sur la distance et la translation



Ce problème de géométrie portant sur la distance et la translation représente évolution lente de la tâche initiale. Il en va également de même pour les autres étapes de pose|résolution de problèmes qui sont à être vues comme une stabilisation phénotypique de la tâche initiale.

La diversification, pour sa part, peut être exemplifiée à partir de la tâche du $\frac{5}{6}+\frac{1}{2}$ abordée à quelques reprises précédemment. Face à cette tâche, donnée comme déclencheur, un élève propose la stratégie de mettre les fractions sur un même dénominateur pour ensuite les additionner et simplifier la réponse obtenue, comme ceci : « $\frac{5}{6}+\frac{3}{6}= \frac{8}{6}=1\frac{1}{3}$ ». Cet élève est entré dans la résolution de la tâche en se posant un problème de recherche d'un dénominateur commun pour effectuer un calcul arithmétique. La collectivité mentionne alors être d'accord avec cette proposition. Ceci amène un questionnement sur une manière de l'illustrer, ce qui donne lieu à une représentation en pointes de pizza isolées , puis à celle en pizzas rondes . L'utilisation de ces représentations, sous les formes respectives de collection puis de parties d'un tout, mène la collectivité à proposer une autre réponse possible soit $\frac{8}{12}$. Les deux réponses possibles émergent à même l'activité de pose|résolution de problèmes mathématiques qui prend place en classe, ce qui permet de la faire évoluer lentement. La confrontation des deux réponses mène toutefois la collectivité à tenter de résoudre une sous-tâche mathématique, soit celle de comprendre comment les fractions $\frac{8}{12}$ et $\frac{8}{6}$ ou encore $1\frac{1}{3}$ peuvent donner lieu à une même représentation. Sont-elles équivalentes? Comment comprendre leur différence, dans le contexte de la tâche, mais aussi dans un contexte plus général? Pendant un moment, la collectivité se penche sur la résolution de cette sous-tâche mathématique ce qui fait bifurquer la résolution de la tâche initiale. Bien que la sous-tâche soit rattachée à la tâche initiale, puisqu'elle émerge du travail collectif de résolution de la tâche initiale, elle présente une variation marquée, car un changement dans la nature de l'objet de résolution est observé. Cette sous-tâche peut donc être vue comme une évolution marquée de la tâche initiale, ou encore une diversification.

Ainsi, lorsqu'une tâche routinière est proposée en classe, il est possible de penser qu'elle peut évoluer lentement ou de façon marquée à travers l'activité collective de pose|résolution de problèmes mathématiques qui émerge en classe. La collectivité stimule cette évolution par les actions mathématiques qu'elle met en avant ; celles-ci contribuant également à enrichir la sphère des possibilités. Une tâche routinière n'est donc pas nécessairement à être vue de façon statique, mais peut évoluer à travers ses inter-actions avec la collectivité, alors que celle-ci déploie une activité de pose|résolution de problèmes mathématiques dans le but de la résoudre.

CHAPITRE 3
LE CADRE CONCEPTUEL

Dans ce chapitre, le cadre conceptuel est présenté. Celui-ci permet de s'intéresser de manière fine aux actions mathématiques mises en avant en classe en contexte de résolution de problèmes. Pour ce faire, ce chapitre est divisé en quatre sections. La première offre une introduction aux travaux de recherche sur l'approche investigative afin de mieux comprendre le type de travaux utilisés pour développer ce cadre conceptuel. La seconde comprend huit sous-sections qui présentent chacune des pratiques de mathématisation relevées lors de l'analyse des travaux de recherche sur l'approche investigative; ces pratiques de mathématisation pouvant jouer un rôle dans l'exploitation de tâches mathématiques en classe. La troisième section aborde un autre type d'évolution possible d'une tâche mathématique, mise en exergue à la lecture des travaux sur l'approche investigative, qui vient complémenter la conceptualisation de l'évolution d'une tâche proposée au chapitre précédent. Finalement, la dernière section traite des objectifs spécifiques poursuivis par cette recherche doctorale.

3.1 Introduction : les travaux de recherche sur l'approche investigative

Ce cadre conceptuel prend appui sur les travaux de recherche axés sur une approche investigative des mathématiques à l'école (voir Cobb, Perlwitz et Underwood, 1994). Dans une approche investigative, des tâches mathématiques sont utilisées en classe dans le but de faire vivre aux élèves une activité mathématique qui se rapproche de celle des mathématiciens, telle qu'abordée à la section 1.2. Dans une approche investigative, l'objectif de l'enseignant est de maintenir en vie l'activité mathématique des élèves, de la ressourcer. Dans une telle approche, des tâches mathématiques sont proposées en tant que déclencheur de l'activité mathématique des élèves. Des contenus mathématiques sont alors travaillés et creusés de manière contingente à l'activité qui prend place en classe. Ceci distingue une approche investigative des approches « usuelles » de la résolution de problèmes utilisées en classe de mathématiques. Ces dernières, mises en évidence par Schroeder et Lester (1989), sont : l'enseignement *de* la résolution de problèmes, l'enseignement *pour* la résolution de problèmes et l'enseignement *via* ou *par* la résolution de problèmes. Une brève description de ces approches est utile pour mieux comprendre ce qui caractérise une approche investigative.

Dans une approche d'enseignement *de* la résolution de problèmes, des heuristiques de résolution de problèmes sont enseignées aux élèves. Ces heuristiques, étant utilisées en résolution de problèmes par les mathématiciens, sont directement enseignées aux élèves pour les aider à résoudre des tâches mathématiques de nature diverse. L'objectif de cette approche d'enseignement est d'accroître l'aptitude des élèves en résolution de problèmes à partir de l'enseignement d'heuristiques mathématiques générales. Dans une approche d'enseignement *pour* la résolution de problèmes, des contenus mathématiques (définitions, théorèmes, algorithme, etc.) sont enseignés dans le but, une fois ces apprentissages réalisés, de résoudre des tâches mathématiques qui font appel à ces contenus. L'enseignement de contenus mathématiques vise à permettre aux élèves de résoudre, par la suite, différentes tâches mathématiques faisant appel à ces contenus enseignés. Finalement, dans une approche d'enseignement *via* ou *par* la résolution de problèmes, des tâches mathématiques sont utilisées en classe comme méthode d'enseignement. La résolution de ces tâches par les élèves vise à les amener à apprendre les concepts mathématiques qui sont visés par les tâches choisies. À l'instar de ces approches usuelles de la résolution de problèmes en classe, dans une approche investigative, les contenus mathématiques travaillés ne sont pas entièrement pré-décidés par l'enseignant. Les contenus mathématiques émergent plutôt des inter-actions en classe à partir du travail sur des tâches mathématiques données en tant que déclencheur de l'activité des élèves. Une approche investigative a pour but de tirer profit, ou d'exploiter, une tâche mathématique pour stimuler l'activité mathématique en classe, et de maintenir en vie cette activité. Et, dans l'activité qui prend place en classe, des contenus mathématiques émergent et sont, à ce moment, investigués et creusés.

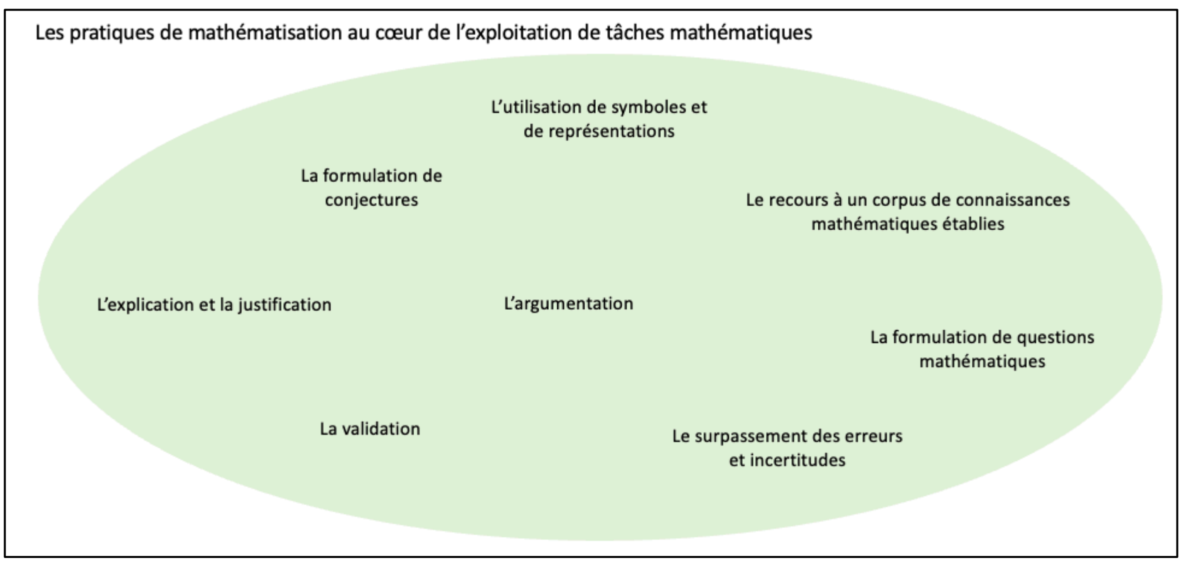
Les travaux de recherche ancrés dans une approche investigative des mathématiques à l'école ont été retenus pour la construction de ce cadre conceptuel parce qu'ils sont bien alignés à l'exploitation de tâches mathématiques par la collectivité. Par ailleurs, bien que ces travaux de recherche utilisent des tâches de natures diverses, ceux-ci se centrent sur l'exploitation de ces tâches en classe, soit à travers et par l'activité de pose|résolution de problèmes[6] déployée pour les résoudre. Ces travaux offrent en ce sens une entrée

[6] Par souci de cohérence, les concepts décrits à la section précédente sont repris dans cette section, bien que les travaux de recherche convoqués sur l'approche investigative ne les utilisent pas nécessairement.

qui s’avère fort utile pour comprendre la façon avec laquelle des tâches *routinières* peuvent être exploitées par la collectivité, afin d’étudier leur évolution.

Dans ce contexte d’enseignement axé sur l’investigation mathématique, différentes actions mathématiques peuvent jouer un rôle dans l’exploitation *collective* des tâches mathématiques. Ces actions mathématiques, qui sont constituées de manière inter-active et qui proviennent des conventions sociales de la classe, sont nommées des pratiques de mathématisation par Bauersfeld (1995). Ces pratiques de mathématisation offrent une manière d’interpréter les actions mathématiques déployées lors de l’exploitation collective de tâches mathématiques en classe. Issues d’une analyse des travaux de recherche ancrée dans une approche investigative, huit pratiques de mathématisation pouvant jouer un rôle dans l’exploitation de tâches mathématiques sont présentées dans la prochaine section. Celles-ci sont représentées à la Figure 3.1 et discutées par la suite.

Figure 3.1 Les pratiques de mathématisation au cœur de l’exploitation de tâches mathématiques en classe



3.2 Les pratiques de mathématisation au cœur de l'exploitation de tâches mathématiques en classe

3.2.1 L'explication et la justification mathématique

Les travaux sur l'approche investigative montrent que les explications et justifications mathématiques peuvent jouer un rôle dans l'exploitation de tâches mathématiques. À travers l'exploitation de tâches mathématiques, des idées mathématiques sont mises en avant et discutées en classe. Ce faisant, chaque individu essaie de comprendre les idées mathématiques avancées à partir de ses propres référents. Les différences qui existent entre les manières de comprendre, de voir et d'aborder une situation, ce que Cobb, Wood, Yackel et McNeal (1992) appellent le cadre de référence de chaque individu, créent un besoin de se comprendre les uns les autres. Dans les termes de l'enaction, ce cadre de référence fait partie de la structure de chaque individu. En discutant de mathématiques en classe, chacun tente de coordonner son activité mathématique à celle des autres afin de se comprendre et de communiquer ensemble. Les explications et justifications mathématiques sont à la base de la compréhension et la communication mathématique en classe (*Ibid*.) et, en ce sens, contribuent à faire avancer l'activité de pose|résolution qui se déploie.

Les explications mathématiques surviennent lorsqu'une personne choisit de communiquer son raisonnement mathématique en classe. Une explication mathématique peut également avoir lieu lorsque la collectivité demande des explications au sujet d'un élément mathématique qui vient d'être partagé. Les explications mathématiques visent en fait à rendre accessible et à clarifier les idées ou raisonnements mathématiques mis en avant en classe (*Ibid*.). Pour leur part, les justifications mathématiques ont lieu lorsqu'une personne essaie de montrer, de son propre chef ou d'une demande explicite de la collectivité, la validité d'un raisonnement, d'une affirmation, d'une conjecture, etc. énoncé en classe (*Ibid*.).

Prenons un exemple, tiré de Yackel (2001), pour illustrer ces pratiques de mathématisation d'explication et de justification. La tâche est d'additionner 16 + 8 + 14. Une élève répond qu'elle a enlevé 1 à 16 pour l'ajouter au 14. Elle dit alors obtenir 15 et 15, qu'elle additionne pour obtenir 30. Elle dit ensuite avoir ajouté le 8 pour obtenir, au final, 38. En verbalisant son raisonnement, l'élève donne une explication mathématique de sa solution. D'elle-même, elle explique son raisonnement mathématique afin de le rendre accessible aux autres. Pour ce faire, elle déploie une explication mathématique de son raisonnement. Si, par la suite, l'élève, ou encore une autre personne de la classe, ajoutait que l'addition est une opération commutative et transitive, alors une justification mathématique serait offerte. Une telle justification permettrait de confirmer que cette manière de faire est valide au plan mathématique. L'explication et la justification permettent à la tâche initiale de se transformer, d'évoluer. En effet, ces pratiques de mathématisation permettent à la tâche de devenir un problème de compensation en faisant émerger la possibilité de recombiner les nombres entre eux pour faciliter la résolution. D'autres combinaisons pourraient, par ailleurs, être ensuite proposées par la collectivité ce qui permettraient de poursuivre l'exploitation de la tâche initiale. Ainsi, la tâche initiale est appelée à évoluer à travers l'explication de cette solution et sa justification.

En plus d'illustrer ces deux pratiques de mathématisation que sont l'explication et la justification, cet exemple montre aussi qu'elles se constituent de manière inter-active. Des justifications mathématiques peuvent être demandées lorsque la collectivité veut montrer la validité des explications données et, également, des explications mathématiques peuvent provenir d'un besoin de clarifier certains éléments de cette justification. Il y a présence en ce sens d'une influence mutuelle entre les explications et les justifications mathématiques au sein de l'activité mise en avant par la collectivité.

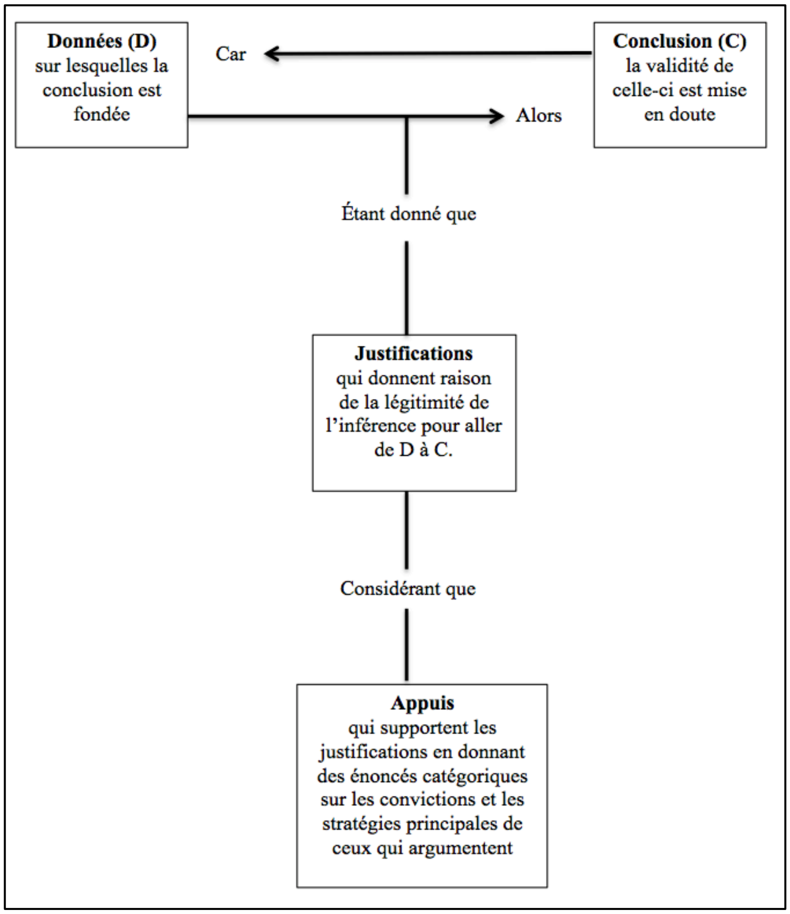
Lorsque des explications ou justifications mathématiques sont données, il est possible de penser qu'elles peuvent mettre un terme à l'activité de pose|résolution de problèmes qui se déploie, car une solution a été explicitée ou qu'après une justification convaincante tout semble avoir été dit. Toutefois, bien au contraire, la mise en avant d'explications et de justifications mathématiques contribue à l'enrichissement de la sphère des possibilités qui émerge des inter-actions. Ces pratiques de mathématisation ont le potentiel de déclencher de nouvelles idées mathématiques et de permettre à la tâche initiale d'évoluer. En classe, les explications et justifications peuvent prendre place à l'intérieur d'une argumentation mathématique.

3.2.2 L'argumentation mathématique

Les travaux sur l'approche investigative montrent que l'argumentation mathématique peut jouer un rôle dans l'exploitation de tâches mathématiques en classe. En effet, à travers l'activité de pose|résolution de problèmes qui prend place, la validité de certains éléments mathématiques peut être remise en question. Une argumentation mathématique se produit lorsque le statut de vraisemblance d'une idée mathématique est remise en question par la collectivité (Krummheuer, 1995). Un processus d'argumentation se développe alors par des justifications[7] soutenues par des appuis mathématiques. Des mésententes sur des parties de l'argumentation peuvent également entrainer des corrections, modifications, rétractations et remplacements d'éléments mathématiques mis en avant en classe. La séquence de l'argumentation finale et consensuelle est déterminée en surmontant étape par étape la controverse, alors que la collectivité avance des idées et se prononce sur la validité des propositions faites à chacune des étapes. Krummheuer (1995), inspiré du modèle de Toulmin (1969), définit le résultat de ce processus d'argumentation comme étant l'argument. Il schématise le processus d'argumentation comme ceci :

[7] Une justification mathématique peut prendre place à l'intérieur d'une argumentation mathématique, mais n'est pas toujours liée à une argumentation mathématique. C'est la mise en doute d'éléments mathématiques mis en avant en classe qui entraine une argumentation mathématique. Une justification mathématique peut être donnée sans qu'il y ait une mise en doute d'un élément mathématique.

Figure 3.2 Schéma de l'argumentation (traduit et reproduit de Krummheuer, 1995, p. 248)



Comme l'illustre cette figure, une donnée mathématique sur laquelle une conclusion se fonde est énoncée en classe. Lorsqu'une argumentation mathématique a lieu, cette conclusion est mise en doute par la collectivité. Ceci fait naitre des justifications mathématiques permettant de passer de la donnée qui fait l'objet de contestation à la conclusion. Les justifications mathématiques mises en avant requièrent alors, d'autant que possible, des appuis mathématiques solides, des énoncés catégoriques, sur lesquels la collectivité s'entend. Une argumentation est dite réussie lorsque la collectivité est convaincue de la validité mathématique de l'argument et donc qu'elle accepte la véracité de la proposition mathématique offerte. La force et la validité d'un argument se déterminent ainsi par la collectivité, alors qu'elle définit ce qui est acceptable comme argumentation et ce qui constitue un argument valide et convaincant pour elle.

Considérons l’exemple suivant, tiré de Krummheuer (1995), pour illustrer une argumentation mathématique qui a découlé de la tâche consistant à trouver combien font 4 x 4 :

> Jack: What’s 8 plus 8?
>
> Jamie: 16. It’s 4 sets of fours, 8 (pause) 16.
>
> Researcher: Why did you say what’s 8 and 8 Jack?
>
> Jamie: ’Cause 4 sets, um, 4, 2 sets make 8.
>
> Researcher : Yes.
>
> Jack : (Holds up fingers on one hand) You have 2 more sets. Like it’s 2 and 2 make 4.
>
> Researcher: OK, OK, very good. (p. 240)

Dans cette argumentation, Krummheuer (1995) soutient que le doute soulevé n’est pas au niveau de l’exactitude de l’équation mathématique 8 + 8 = 16, mais plutôt de l’acceptation par les autres élèves de la conclusion qu’alors 4 x 4 = 16. Krummheuer (*Ibid*.) souligne qu’étant donné le jeune âge des élèves, les faits numériques ne sont pas bien maîtrisés par ceux-ci, ce qui rend problématique cette conclusion hâtive. Ceci engendre une argumentation mathématique dans laquelle, la donnée (D) est que 8 + 8 = 16 et que 2 ensembles de 4 font 8. La conclusion (C) est que 4 x 4 = 16. Les justifications mathématiques qui permettent de passer de la donnée (D) à la conclusion (C) sont que (1) 4 x 4 c’est 4 ensembles de 4, énoncé par Jamie, et que (2) il y a alors 2 ensembles de 4 de plus, affirmé par Jack. Ceci est également supporté par l’appui mathématique de Jack qui lève les doigts en l’air en disant que 2 et 2 font 4. À travers cette argumentation, la tâche initiale s’est transformée en devenant un problème de justification d’une équivalence entre 8 + 8 et 4 x 4. Le 4 x 4 initial a été transformé en 8 + 8, ce qui a fait émerger une argumentation mathématique afin de s’entendre, collectivement, sur la validité de cette transformation, c’est-à-dire sur l’équivalence entre ces deux expressions mathématiques. Dans cet exemple, l’argumentation mathématique n’est pas très controversée, mais Krummheuer (*Ibid*.) souligne que celle-ci peut parfois être davantage houleuse et prendre une envergure plus imposante en classe.

Lorsqu’une argumentation mathématique a lieu, elle peut permettre de creuser, retravailler, rétracter, modifier certaines idées mathématiques émises en classe, afin que celles-ci soient considérées valables et valides par la collectivité dans le contexte donné. Ceci amène la tâche initiale à se transformer à travers l’activité déployée pour la résoudre. L’argument mathématique qui en résulte fait par ailleurs partie de la sphère des possibilités en classe et peut également permettre de déclencher une réaction mathématique en retour. C’est ainsi que l’argumentation mathématique peut contribuer à l’exploitation de la tâche mathématique initiale ; celle-ci faisant avancer les compréhensions mathématiques (Krummheuer, 1995 ; Yackel, 2001) et enrichissant la sphère des possibilités. L’argumentation mathématique, naissant de la mise en doute d’une idée mathématique avancée en classe, mène à aborder directement la pratique de la validation mathématique.

3.2.3 La validation mathématique

Les travaux sur l’approche investigative montrent que la validation mathématique est une pratique de mathématisation qui peut contribuer à l’exploitation de tâches mathématiques en classe. En effet, lorsque des idées mathématiques sont offertes en classe, elles sont sujettes à être discutées, testées, acceptées, réfutées ou bonifiées au sein de la collectivité qui cherche à s’assurer qu’elles soient valables et valides (Lampert, 1990a ; Legrand, 1993).

L’activité de pose|résolution de problèmes qui prend place à la suite d’une tâche initiale amène la collectivité à s’interroger et à argumenter sur les idées mathématiques qu’elle juge acceptables ainsi que sur celles qui nécessitent d’être révisées ou approfondies. En ce sens, la collectivité s’entend sur la validité des idées mathématiques qu’elle produit (Borasi, 1996). Cette validation mathématique, quant à la nature et la force des arguments nécessaires, est dépendante de la situation dans laquelle la collectivité se trouve. Dans certains cas, la validation peut chercher à établir la vraisemblance d’une idée mathématique énoncée, alors que dans d’autres cas, elle peut nécessiter la production de preuves mathématiques qui sont plus ou moins formelles dépendamment du contexte (Balacheff, 1987).

Lors de la validation mathématique, la collectivité peut avoir recours à différents exemples pour évaluer la vraisemblance d'une idée mathématique. Elle peut alors demander d'autres explications, justifications ou appuis mathématiques, voire tenter de trouver une preuve plus convaincante et formelle, selon les besoins et intérêts de la collectivité à un moment précis. La collectivité peut aussi utiliser un ou des contre-exemples pour réfuter une idée mathématique émise en classe (Lakatos, 1976 ; Legrand, 2006). La validation mathématique réfère en ce sens à l'établissement collectif du statut de vraisemblance des idées mathématiques énoncées en classe. Certains chercheurs (voir e.g. Lampert, 1990a ; Legrand, 2006 ; Povey et Burton, 1999) parlent, dans cet ordre d'idée, de la collectivité agissant en tant qu'autorité mathématique.

Dans l'exemple à la page 54, tiré de Yackel (2001), si la collectivité questionne le fait que l'élève puisse additionner les nombres dans un ordre quelconque, elle met alors en avant cette pratique de mathématisation. De même, dans l'exemple de Krummheuer à la page 58, la collectivité doute de la conclusion que 4 x 4 vaut 16 à partir de l'explication que 8 + 8 = 16. Les justifications et appuis mathématiques qui sont donnés, dans cet exemple, sont jugés recevables par la collectivité qui les accepte alors tels quels. Par la mise en doute et par la validation de l'argument mathématique fait, la collectivité déploie cette pratique de mathématisation. Celle-ci contribue à l'exploitation de la tâche initiale puisqu'elle amène la collectivité à se pencher sur les mathématiques en jeu afin de les valider ou les invalider, pouvant alors entrainer une réaction mathématique en retour. En effet, sur la base de cette validation mathématique, de nouvelles propositions peuvent émerger, contribuant à faire avancer l'activité de pose|résolution de problèmes qui se déploie en classe.

La validation mathématique exerce également une fonction de régulation à l'intérieur de la collectivité. Par exemple, lorsqu'une idée mathématique qui a été acceptée par la collectivité est, par la suite, remise en question, elle permet de réguler les mathématiques qui sont faites en réexaminant le statut de vraisemblance de celles-ci (Cobb, Perlwitz et Underwood, 1994 ; Lampert, 1990a). Le statut de vraisemblance d'un élément mathématique est en ce sens toujours ouvert à révision et à discussion, autant dans la classe, que dans la communauté des mathématiciens (Lampert, 1990a).

La validation mathématique peut contribuer à l'exploitation des tâches mathématiques puisque d'attester ou d'infirmer le statut de vraisemblance d'une idée ou d'un raisonnement mathématique peut mener à des discussions permettant de le rendre plus explicite, plus précis, de le bonifier, le modifier, ou encore de mener à une nouvelle proposition sur la base de ce qui est accepté. La tâche initiale évolue alors à travers l'activité de pose|résolution de problèmes qui prend place. C'est en ce sens que cette pratique de mathématisation peut jouer un rôle dans l'exploitation des tâches mathématiques au sein de la collectivité. La validation, l'explication, la justification et l'argumentation sont des pratiques de mathématisation qui s'alimentent l'une et l'autre à travers la communication mathématique en classe (Cobb et al., 1994). Cette communication est par ailleurs, et dans une large mesure, illustrée par des symboles et représentations mathématiques.

3.2.4 L'utilisation de symboles et de représentations mathématiques

Les travaux sur l'approche investigative montrent que l'utilisation de symboles et représentations mathématiques, ce que Byers et Erlwanger (1984) nomment les formes mathématiques, peut jouer un rôle dans l'exploitation de tâches mathématiques en classe. En effet, l'activité de pose|résolution de problèmes mise en avant est, en bonne partie, représentée par des formes mathématiques. L'histoire des mathématiques montre que les formes et contenus mathématiques sont en interrelation et que chacun influence l'autre au cours de leur évolution (*Ibid*.).

Les contenus mathématiques font référence aux idées qui sont imbriquées dans les méthodes et résultats mathématiques, c'est-à-dire qu'ils renvoient au produit d'une activité mathématique et peuvent être mobilisés dans des activités mathématiques. Les formes, plus précisément, réfèrent aux notations symboliques et aux représentations mathématiques utilisées pour exprimer des idées mathématiques (*Ibid*.). Celles-ci permettent à la fois d'exprimer et d'illustrer les compréhensions et idées mathématiques mises en avant, et, en retour, de donner un sens et réfléchir aux objets mathématiques en jeu (Lampert, 1990b). Plusieurs contenus mathématiques sont par ailleurs nés de réflexions et d'un travail sur des symboles et représentations mathématiques, comme le soulignent Byers et Erlwanger (1984) :

> The improvement in [computational] technique was a result of the improvement in notation. The new results show clearly that it is incorrect to say that men like Viète “merely” improved notation. Such a statement discards the profound relation between content and form. New results often become possible only because of a new mode of writing. (p. 260, tiré de Struik, 1964, p. 94).

En classe, tout comme dans la communauté des mathématiciens, les formes mathématiques jouent un rôle dans l’exploitation et l’évolution des tâches mathématiques, car elles permettent une réflexion et un travail mathématique qui peut même aller jusqu’à produire de nouvelles idées et formes mathématiques (Lampert, 1990b). Les formes permettent de donner un sens aux mathématiques qui se font, et le sens qui est donné peut faire naitre de nouvelles formes mathématiques. Il y a une interrelation entre les formes et les sens mathématiques.

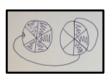
Dans la classe de mathématiques, les symboles et représentations mathématiques prennent souvent aussi une forme hybride entre les mathématiques exprimées par la collectivité et celles de la communauté des mathématiciens (*Ibid*). Ces formes servent à rendre compte des idées mathématiques offertes en classe de manière à rejoindre, d’autant que possible, les formes universelles de communication mathématique. Mais, surtout, elles permettent de donner un sens à l’activité qui est déployée en offrant un support à la réflexion. Dans la classe, les symboles mathématiques prennent alors souvent une forme intermédiaire. L’exemple qui suit, tiré des travaux de Lampert (1990b), illustre cette forme hybride d’écriture à partir d’une courte discussion en classe au sujet de la manière de trouver ce que représente le $\frac{2}{6}$ des élèves de la classe :

> For one-sixth, we figured out it was four *or* five. If you double four, it’s eight, and if you double five, it’s ten, and nine is exactly between eight and then, so two-sixths must be nine.
>
> Another student rebutted, referring to actual groups in room: Sometimes when you put two groups together, you get eight, and sometimes you get nine, but you will *never* get ten, because there is only one group of five, and all the rest have four. So, the *better* answer (for two-sixths of 25) is eight, but it *could be* nine. Another student said: It can’t always be nine, because that would mean you would have to have 27 kids. (Italiques dans l’original, p. 256)

Au tableau, l’écriture suivante est utilisée pour représenter l’activité de pose|résolution de problèmes qui est déployée :

	2/6 = 9 (left side)		2/6 = 9
If	2/6 = 9 (middle)	*then* 6/6 = 27. But if	2/6 = 8 *then* 6/6 = 25.
	2/6 = 9 (right side)		2/6 = 8

(Italiques dans l'original, p. 256)

Cette notation intermédiaire (par exemple 2/6 = 9) entre la réflexion mathématique et l'écriture mathématique conventionnelle témoigne de l'activité de pose|résolution de problèmes déployée en classe. Cette notation intermédiaire n'est pas parfaite en ce qui a trait aux conventions mathématiques, mais elle représente la trace des idées mathématiques mises en avant. C'est à partir de cette trace, de cette forme hybride, que la collectivité réfléchit aux mathématiques qui se font, que de nouvelles idées sont proposées, discutées, que des doutes sont énoncés, etc. En retour, cette réflexion mathématique permet de faire évoluer les formes mathématiques utilisées en classe. C'est ainsi que les symboles et représentations mathématiques peuvent participer à l'exploitation de la tâche initiale et que ces formes hybrides en classe ont le potentiel de faire évoluer celle-ci. C'est d'ailleurs le fruit d'une réflexion sur les formes mathématiques qui a permis, dans l'exemple de l'addition de fractions présenté à la section 1.1, à la tâche initiale de se diversifier. En effet, ce sont les représentations en termes de pointes de pizza isolées  et de pizzas rondes  qui ont mené la collectivité à proposer $\frac{8}{12}$ comme autre réponse possible. De cet événement est née la nouvelle tâche d'expliquer pourquoi l'addition de $\frac{5}{6}+\frac{1}{2}$ pouvait à la fois donner, dans ce contexte, $1\frac{1}{3}$ et $\frac{8}{12}$. L'utilisation de formes mathématiques, permettant de donner un sens aux objets mathématiques et évoluant en retour par le sens qui est donné, peut jouer un rôle important dans l'exploitation de tâches mathématiques en classe. Bien que cette exploitation soit soutenue et alimentée par des formes mathématiques, elle se produit aussi à partir de conjectures mathématiques.

3.2.5 La formulation de conjectures

Les travaux sur l'approche investigative montrent que la formulation de conjectures peut contribuer à l'exploitation de tâches mathématiques en classe. En effet, l'activité de pose|résolution de problèmes mathématiques, déclenchée par une tâche initiale, se développe à partir de la formulation de conjectures mathématiques (Lakatos, 1976 ; Lampert, 1990a). Dans l'exploitation d'une tâche mathématique, la collectivité peut mettre en avant des énoncés conjecturaux, c'est-à-dire des énoncés jugés vraisemblables par celui qui les propose, mais dont leur vérité (ou non) n'est pas établie d'emblée par la collectivité (Legrand, 1993). Lorsqu'une conjecture est formulée en classe, elle mène à la recherche d'une preuve ou d'une réfutation qui vise à valider ou infirmer la conjecture énoncée. C'est en ce sens que Lakatos (1976) parle de l'activité mathématique en termes d'une activité qui zigzag entre la formulation de conjectures et la recherche d'une solution, ce qui se produit par l'étude des conjectures à l'aide de preuves ou de réfutations.

À cet égard, Squalli (2014) souligne que :

> Une conjecture mathématique est un candidat théorème. C'est une proposition mathématique en laquelle nous avons développé une conviction, appuyée par une argumentation, mais nous n'avons pas encore les moyens de démontrer qu'elle soit vraie ou qu'elle soit fausse (pas de contre-exemple connu) » (p. 44).

Émettre une conjecture, comme cette citation l'illustre, entraine une argumentation mathématique en classe au sujet du statut de vraisemblance de celle-ci. La formulation d'une conjecture mathématique, chez les mathématiciens, mène d'ailleurs généralement vers trois avenues : la recherche d'une preuve ou d'une explication convaincante, la recherche de contre-exemples ou de réfutations ou, si elle résiste, à la tenue de la conjecture (Hiriart-Urruty, 2016). En classe, lorsqu'une conjecture est énoncée, elle peut également mener à ces trois avenues (Lampert, 1990a), faisant avancer l'activité de pose|résolution de problèmes. La formulation d'une conjecture amène alors des explications, des justifications et des argumentations mathématiques qui visent à valider (ou réfuter) celle-ci.

Le travail mathématique collectif qui est stimulé par la formulation de conjectures montre la richesse potentielle de la formulation de conjectures pour déclencher ou poursuivre l'activité de pose|résolution de problèmes mathématiques. La formulation de conjectures peut en ce sens permettre de produire de nouvelles (idées) mathématiques. Les conjectures réputées célèbres possèdent d'ailleurs cette caractéristique. Les caractéristiques de telles conjectures dites célèbres étant :

(1) elles ont un énoncé simple et compréhensible ;

(2) elles ont résisté aux diverses tentatives de la résoudre ;

(3) elles ont engendré de nouvelles mathématiques à travers les tentatives de résolution (Hiriart-Urruty, 2016)

Dans la classe de mathématiques, à travers l'activité de pose|résolution de problèmes qui prend place, il semble possible, tout comme pour les mathématiciens, que des conjectures puissent devenir célèbres, du moins à l'échelle de la classe. C'est d'ailleurs ce qui s'est produit dans l'exemple discuté dans Ball (2003) et Bass (2005) (voir p. 26-27), où un élève avait formulé la conjecture que les nombres pouvaient être à la fois pair et impair à partir de l'exemple du nombre 6 qui pouvait être composé de deux éléments « 3 et 3 », étant alors pair, ou de trois éléments « 2, 4, 6 », étant alors impair. Cette conjecture a donné lieu à un travail mathématique qui a mené la collectivité à investiguer les nombres et à expliquer, justifier et argumenter pour trouver des nombres qui possèdent cette caractéristique ; nombres qu'ils ont nommés « les nombres de Sean » en l'honneur de l'élève. La formulation de cette conjecture a mené à une investigation mathématique importante qui a contribué à l'exploitation de la tâche initiale. La formulation de cette conjecture a d'ailleurs mené à une diversification (évolution marquée) de celle-ci puisque la collectivité s'est penchée pendant un certain temps sur la résolution de cette conjecture, issue du travail fait sur la tâche initiale. En classe, l'activité déployée est toutefois généralement parsemée d'erreurs et d'incertitudes mathématiques qui sont à surmonter.

3.2.6 Le surpassement des erreurs et incertitudes mathématiques

Les travaux sur l'approche investigative montrent qu'une autre pratique de mathématisation qui peut jouer un rôle dans l'exploitation de tâches mathématiques en classe est le surpassement des erreurs et incertitudes mathématiques. Telle que l'illustre Borasi (1996), l'histoire des mathématiques montre, en particulier, que celles-ci jouent et ont joué un rôle capital dans le développement des mathématiques, par l'habileté des mathématiciens à les surpasser et à produire quelque chose à partir de celles-ci.

Lorsque des tâches mathématiques sont exploitées en classe, l'activité de pose|résolution de problèmes qui prend place ne se déroule pas en mettant en avant une suite de vérités et de certitudes pour arriver rapidement à une réponse finale et bien étoffée, mais plutôt à travers d'erreurs, d'incertitudes et de changements d'idées en cours de raisonnement. Cette activité implique des tâtonnements, des déviations et des faux pas qui peuvent conduire à mettre en avant des propositions qui ne sont à la fois ni totalement vraies ni totalement fausses (Borasi, 1996 ; Papert, 1980). C'est en ce sens que Papert (1980), faisant un parallèle avec le domaine de l'informatique, utilise le concept de débogage en insistant sur le fait que lorsqu'une personne programme un ordinateur, elle n'y arrive rarement d'un seul essai. Une personne habile à déboguer, à réparer ou adapter un programme, est reconnue comme étant un expert de la programmation. Papert (1980) souligne qu'il en va de même pour les mathématiques. Le débogage mathématique, soit cette pratique de surpassement des erreurs et incertitudes mathématiques, permet la poursuite de l'activité de pose|résolution de problèmes en réparant ou en adaptant les mathématiques qui sont faites lorsque celles-ci surviennent.

En classe, lorsqu'une erreur ou une incertitude émerge dans l'exploitation d'une tâche, le débogage mathématique peut se produire de deux manières : (1) en la fixant à sa source, c'est-à-dire en tentant d'y remédier, ou (2) en investiguant des avenues mathématiques qui découlent de celle-ci (Borasi, 1996, Megrourèche, 2020). Dans le premier cas, il s'agit de réparer la cause de l'erreur ou de l'incertitude pour alors poursuivre son chemin de résolution. Par exemple, si un élève propose que $\frac{3}{4}+\frac{6}{7}=\frac{9}{11}$ parce qu'il additionne les numérateurs et dénominateurs ensemble, la collectivité pourrait simplement rappeler la règle d'addition de fractions en réparant l'erreur commise pour poursuivre son activité (*Ibid*.). Si, plutôt, une incertitude sur la manière de réaliser l'addition de $\frac{3}{4}$ et $\frac{6}{7}$ survient, pour y remédier, un élève pourrait demander à la collectivité comment procéder, pourrait chercher des exemples similaires, ou encore pourrait tenter de trouver une explication dans un livre de mathématiques. L'erreur ou l'incertitude serait alors surpassée en y remédiant, soit en la fixant à la source. Cette remédiation contribue à faire évoluer la tâche initiale en permettant de poursuivre l'activité de pose|résolution de problèmes, voire en la poussant plus loin.

Dans le second cas, il s'agit de surpasser l'erreur ou l'incertitude en l'investiguant au plan mathématique. Dans l'exemple de cette erreur d'addition de fractions, il s'agirait d'investiguer des avenues mathématiques qui découlent de celle-ci. Selon Borasi (*Ibid*.), son investigation pourrait mener la collectivité à chercher dans quel cas la règle de l'élève peut fonctionner, introduisant alors les ratios. Par exemple, si un élève a 3 bonnes réponses sur 4 questions au premier examen et 6 bonnes réponses sur 7 questions au second examen, au total, l'élève a eu 9 bonnes réponses (6 + 3) sur 11 questions (4 + 7). En contexte de ratio, la règle de l'élève fonctionne. L'investigation de l'erreur ouvre alors la porte vers de nouvelles possibilités mathématiques en classe. Par rapport à l'incertitude quant à la manière d'additionner les fractions, une investigation de celle-ci pourrait mener l'élève à faire différentes tentatives et voir où celles-ci le mènent au plan mathématique. Le surpassement d'une erreur ou incertitude par l'investigation de celle-ci permet de faire évoluer la tâche initiale. En effet, se déboguer mathématiquement en empruntant une nouvelle avenue qui découle de l'erreur ou de l'incertitude peut permettre à la collectivité de poursuivre son activité de pose|résolution de problème, ou encore se pencher sur une nouvelle tâche à résoudre qui découle de cette activité (voir Megrourèche, 2020).

Étant une force majeure d'exploration et de productions de mathématiques chez les mathématiciens, ceci permet d'expliquer pourquoi les erreurs et incertitudes ne sont pas vues comme des défaillances, mais plutôt comme des possibilités d'ouvrir des portes vers de nouvelles avenues[8]. Par ailleurs, lorsque des erreurs surviennent en cours d'exploitation d'une tâche mathématique, celles-ci, étant souvent une source de conflit, ont le potentiel d'amener la collectivité à confronter ses idées mathématiques (Borasi, 1996). D'autres pratiques de mathématisation telle que des explications, justifications, argumentations, conjectures ont alors le potentiel de naitre de ces moments d'erreur ou d'incertitude. À travers l'activité

[8] Du côté de la théorie de l'enaction, les erreurs sont vues comme des actions qui apparaissent, pour la personne qui agit, adéquates au moment de leur production. L'erreur est plutôt un jugement *a posteriori* sur l'action qui vient d'être réalisée (voir Proulx et Savard, 2016).

de pose|résolution de problèmes qui prend place, la collectivité est aussi amenée à utiliser un corpus de connaissances mathématiques.

3.2.7 Le recours à un corpus de connaissances mathématiques établies

Les travaux sur l'approche investigative montrent que le recours à un corpus de connaissances mathématiques peut jouer un rôle important dans l'exploitation des tâches mathématiques. En effet, l'activité de pose|résolution de problèmes mathématiques déclenchée par une tâche initiale prend appui sur un corpus de connaissances mathématiques qui permet à la collectivité de faire avancer son activité. Des algorithmes, méthodes, théories, concepts, axiomes, définitions, heuristiques de résolution de problèmes, etc. sont ainsi utilisés par la collectivité afin de résoudre la tâche mathématique initiale (Schoenfeld, 2013).

Bien que ceci semble évident, le recours à un corpus de connaissances mathématiques est une autre pratique de mathématisation au cœur de l'activité de pose|résolution qui se déploie en classe. Les idées mathématiques mises en avant en classe reposent sur les connaissances mathématiques de la collectivité. Par exemple, face à une tâche initiale, la collectivité peut proposer un algorithme qui permet de résoudre la tâche. Elle peut également utiliser une stratégie, comme de représenter graphiquement une tâche en utilisant, dans un cas approprié, un diagramme de Venn. Elle peut aussi utiliser une heuristique de résolution de problèmes telle que de s'intéresser à un cas particulier afin de simplifier la tâche initiale, ou encore, utiliser le résultat d'une tâche similaire déjà résolue pour entrer dans la résolution de la tâche proposée (Polya, 1945). Tel que le soulignent Davis et Hersh (1981), les mathématiciens prennent appui sur un corpus de connaissances pour faire avancer leurs idées mathématiques. Ils se servent d'algorithmes, de définitions, de théorèmes, d'axiomes, d'heuristiques, etc. déjà connus pour faire avancer leurs activités de formulation et de résolution de problèmes. En classe, il en va de même. La collectivité prend appui sur un corpus de connaissances mathématiques établis pour faire avancer son activité de pose|résolution de problèmes mathématiques (Schoenfeld, 2013).

Le recours à un corpus de connaissances mathématiques peut soutenir les autres pratiques de mathématisation. Par exemple, dans une argumentation mathématique, des appuis sont nécessaires pour convaincre la collectivité de la validité des idées mathématiques offertes en classe. Ces appuis peuvent être de l'ordre de théorèmes, définitions, axiomes, ou autres. Également, afin d'invalider une idée mathématique émise en classe, la collectivité peut, par exemple, avoir recours non seulement à des contre-exemples, mais également à un théorème ou une définition mathématique. Ceux-ci pourraient également servir à la collectivité pour se déboguer lors d'un moment où une erreur est soulevée ou face à une incertitude.

Le recours à un corpus de connaissances mathématiques, faisant partie intégrante de l'habileté de la collectivité à être en activité de pose|résolution de problèmes mathématiques, peut contribuer à l'exploitation de tâches mathématiques en classe. Les travaux de Schoenfeld (e.g. 1992, 2013) pointent d'ailleurs le rôle fondamental de cette pratique de mathématisation pour la résolution de problèmes en mathématiques. Dépendamment de la nature des connaissances mises en avant, du moment et du pourquoi elles sont utilisées, le recours à ce corpus de connaissances peut contribuer de différentes manières à l'évolution lente ou marquée d'une tâche mathématique, comme le soulignent les différentes utilisations mentionnées ci-dessus. Le corpus de connaissances mathématiques utilisé en classe fait par ailleurs partie de la sphère des possibilités. Il sert d'appui aux mathématiques qui se font en classe et offre des éléments mathématiques sur lesquels la collectivité peut réagir en retour. Cette pratique de mathématisation est donc au cœur de l'activité de pose|résolution de problèmes en classe permettant de la déployer et de la faire avancer. En classe, cette activité peut également se poursuivre par la formulation de nouvelles questions mathématiques.

3.2.8 La formulation de questions mathématiques

Les travaux sur l'approche investigative montrent que la formulation de questions mathématiques est une pratique de mathématisation qui peut contribuer à l'exploitation de la tâche initiale. En effet, lorsqu'une tâche mathématique est proposée, des questions mathématiques peuvent être formulées et investiguées, ce qui permet de ressourcer, de faire évoluer, l'activité de pose|résolution de problèmes qui se produit en classe.

À cet effet, à partir d'une tâche initiale, différentes heuristiques mathématiques peuvent permettre de formuler de nouvelles questions mathématiques à investiguer. Les travaux de Polya (1945) et de Brown et Walter (2005), pionniers du domaine de recherche sur le « problem posing », illustrent bien la manière avec laquelle l'activité de pose|résolution de problèmes peut se poursuivre par cette pratique de mathématisation[9]. Par exemple, dans ses travaux, Polya (1945) propose, à travers ce qu'il nomme le « Looking Back », différentes heuristiques qui permettent de formuler une nouvelle question mathématique, une fois la tâche initiale résolue. Le « Looking back » consiste à s'intéresser à des aspects de la tâche initiale tels que les variables ou les données, ou encore à des aspects de sa résolution tels que la recherche de généralisation à partir d'une solution trouvée. Dans cet ordre d'idées, l'analogie, la généralisation ou spécification, le changement du rôle des variables ou encore la variation d'une donnée sont des heuristiques du « Looking back » qui s'intéressent à la tâche initiale ou à sa résolution pour formuler de nouvelles questions mathématiques, soient des tâches connexes à investiguer.

Dans leurs travaux, Brown et Walter (2005) proposent les heuristiques de « Accepting » et de « What-if-not? ». Le « Accepting » consiste à aborder la définition et/ou les implications d'un concept pour ensuite chercher à trouver des questions intéressantes qui peuvent en découler. Par exemple, lorsque des nombres premiers sont discutés en classe, l'explication de la définition, soit qu'un nombre premier est un nombre naturel qui a exactement deux diviseurs naturels, peut mener la collectivité à formuler questions, qu'ils disent « naturelles », qui peuvent en découler. Des questions du style : « Combien de nombres premiers y a-t-il ? », « Combien retrouve-t-on de nombres premiers par groupement de 100 nombres ? »,

[9] Plus de détails sur ce champ de recherche et sur les travaux de Polya (1945) et de Brown et Walter (2005) sont donnés dans Barabé et Proulx (2015).

« Est-ce qu'il est possible de trouver des régularités en ce qui concerne la densité de nombres premiers par groupement de 100 ? », etc. peuvent émerger des discussions en classe.

Le « What-if-not? », pour sa part, consiste à nier les implications et attributs des concepts, définitions et théorèmes mathématiques pour alors investiguer ce qui peut en résulter. Pour les nombres premiers, il s'agirait, par exemple, de se demander ce qui arrive avec les nombres qui ont exactement un, trois ou encore quatre diviseurs. Ceci pourrait mener la collectivité à se pencher sur des questions mathématiques telles que : « Quels sont les nombres qui ont exactement trois diviseurs? Comment puis-je les reconnaître? Combien en existe-t-il? » D'autres questions pourraient également être formulées en niant l'attribut « diviseur naturel » de la définition. Par exemple : « Y a-t-il des nombres qui ont exactement 2, ou encore 3, diviseurs entiers? Quels sont les nombres qui ont 4, 5, ou encore 6, diviseurs entiers? Comment puis-je les reconnaître? ». Ces heuristiques permettent de faire évoluer l'activité de pose|résolution de problèmes en explorant et en s'attardant aux liens entre les mathématiques qui sont travaillées en classe.

Ces exemples d'heuristiques, tirés des travaux de Polya (1945) et de Brown et Walter (2005) montrent qu'une tâche initiale peut être prolongée par la formulation de questions mathématiques qui mènent à investiguer les mathématiques. Ces questions, tel que le soulignent Brown et Water (*Ibid*.), ne sont pas de nature instrumentale, c'est-à-dire qu'elles ne servent pas uniquement à s'assurer de la compréhension et de la bonne exécution de ce que l'enseignant leur demande de faire, mais vise à creuser et approfondir les mathématiques en jeu en classe. La formulation de ces questions permet de faire évoluer la tâche initiale. Celles-ci peuvent être formulées *a posteriori*, une fois la tâche initiale résolue, tel que le suggère Polya (1945) dans ses travaux. Elles peuvent également émerger de manière tout à fait naturelle à travers l'activité de pose|résolution de problèmes qui se déploie, comme le soulignent Brown et Walter (2005). En ce sens, cette pratique de mathématisation illustre bien ce que Grenier et Payan (2002) soulignent lorsqu'ils parlent de la « non-fin » de l'exploitation d'une tâche mathématique, car de nouvelles questions mathématiques peuvent toujours être formulées. C'est ainsi que cette dernière pratique de mathématisation peut jouer un rôle dans l'exploitation de tâches mathématiques en classe.

3.3 Les pratiques de mathématisation et l'évolution des tâches mathématiques

Les huit pratiques de mathématisation abordées à la section précédente forment un cadre qui permet d'étudier les manières avec lesquelles des tâches mathématiques peuvent être exploitées en classe. Ce cadre offre une entrée pour comprendre ce qui peut se produire dans le cas de tâches routinières. Ces pratiques de mathématisation sont résumées dans le Tableau 3.1 qui agit à titre de synthèse.

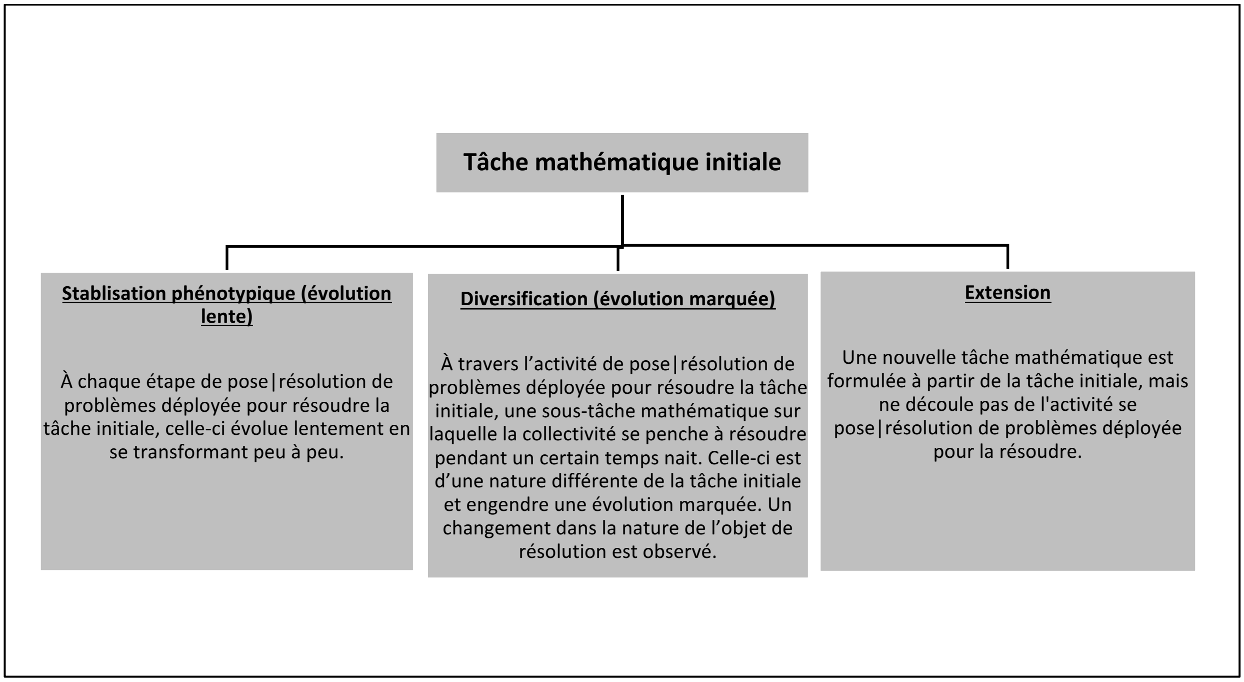
Tableau 3.1 Synthèse des pratiques de mathématisation au cœur de l'exploitation de tâches mathématiques

Pratiques de mathématisation jouant un rôle dans l'exploitation des tâches mathématiques	**Description**
L'explication et la justification	Une idée ou un raisonnement est offert en classe de manière à le rendre, autant que possible, clair et accessible. Il s'agit alors d'une explication mathématique. Un appui de la vraisemblance d'éléments mathématiques énoncés en classe est donné. Il s'agit d'une justification mathématique.
L'argumentation	Un doute est énoncé quant au statut de vraisemblance d'une idée mathématique proposée en classe. Une argumentation se développe alors par des justifications soutenues par des appuis mathématiques qui sont collectivement approuvées. Des modifications, rétractations, remplacements d'éléments mathématiques peuvent alors survenir. L'ensemble de ces éléments compose l'argumentation mathématique.
La validation	Une idée, un raisonnement ou une stratégie mathématique est énoncé, et celui-ci est approuvé ou réfuté en classe afin que les mathématiques qui se font soient considérées valables et valides par ceux qui les font.
L'utilisation de symboles et représentations	Une forme mathématique, telle une notation symbolique ou une représentation, est utilisée pour exprimer une idée ou compréhension mathématique. Celle-ci offre un support à partir duquel réfléchir aux mathématiques. La forme mathématique utilisée peut prendre une forme hybride entre les mathématiques exprimées par la collectivité et celle de la communauté mathématique.
La formulation de conjectures	Une proposition mathématique supposée vraie est énoncée et celle-ci amène un travail mathématique pour attester ou non de sa vraisemblance. La conjecture peut également perdurer au travail mathématique fait, si elle n'est ni démontrée ni réfutée en classe.
Le surpassement des erreurs et incertitudes	Une erreur est commise ou un moment d'incertitude survient à travers l'activité de pose|résolution de problèmes qui émerge en classe. Un travail de débogage mathématique peut alors être fait dans le but d'arriver à poursuivre l'activité. Ce travail peut se produire en fixant l'erreur ou l'incertitude à sa source pour la surmonter ou encore en investiguant de nouvelles avenues mises au jour par celle-ci.
Le recours à un corpus de connaissances mathématiques	Un algorithme, une méthode, une théorie, un concept, un axiome, une définition, une heuristique de résolution de problèmes, etc. sont utilisés à travers l'activité de pose|résolution de problèmes.
La formulation de questions mathématiques	Une nouvelle question mathématique à investiguer est formulée à partir de l'activité de pose|résolution de problèmes déclenchée par une tâche initiale ou *a posteriori* de celle-ci. Ceci permet de ressourcer cette activité.

L'exploitation de tâches mathématiques prend place à partir de ces pratiques de mathématisation qu'utilise la collectivité à travers son activité de pose|résolution de problèmes. À la lumière de ce cadre de référence, les types d'évolution possibles d'une tâche mathématique à travers ses inter-actions avec la collectivité, discutée à la sous-section 2.5, peuvent être revisités. Dans cette sous-section, l'évolution d'une tâche mathématique a été qualifiée, d'une part, de stabilisation phénotypique (évolution lente) pour désigner sa transformation à chaque étape de pose|résolution de problèmes déployée pour la résoudre. D'autre part, elle a été nommée diversification (évolution marquée) lorsque sa résolution amène la collectivité à se pencher à la résolution d'une sous-tâche mathématique qui nait du travail fait sur la tâche initiale, amenant celle-ci à bifurquer. Cette sous-tâche modifie la nature de l'objet de résolution de la collectivité pendant un certain temps. Ces deux types d'évolution résultent des changements structurels de la tâche initiale lors de sa résolution par la collectivité.

Les travaux de Polya (1945) et de Brown et Walter (2005) amènent à considérer un type supplémentaire d'évolution d'une tâche mathématique, soit une évolution pouvant être qualifiée d'extension. Cette extension de la tâche initiale peut référer, sous l'angle de l'enaction, à la formation d'une nouvelle lignée, mais qui est connectée à la première. Il s'agirait, pour reprendre l'analogie précédente, d'une nouvelle goutte d'eau. Celle-ci a également une énergie potentielle qui lui permet, à son tour, de couler sur la montagne. Cette extension ne résulte pas du travail fait par la collectivité pour résoudre la tâche mathématique initiale, mais provient plutôt de la recherche d'une nouvelle tâche connexe à résoudre, soit une extension de celle-ci. Les travaux de Polya (1945) et de Brown et Walter (2005) présentent des exemples d'heuristiques (voir sous-section 3.8), qui permettent à la collectivité de se pencher sur la résolution de tâches mathématiques connexes à la tâche initiale et d'y investiguer les liens mathématiques possibles. Par exemple, face à la tâche d'addition de fractions « $\frac{5}{6}+\frac{1}{2}$ », si la collectivité cherche une extension à celle-ci, et qu'elle propose, la nouvelle tâche « $— + — = 1\frac{1}{3}$ » en faisant varier des données de la tâche initiale, il s'agirait d'une extension de la tâche initiale ; une nouvelle goutte d'eau ayant sa propre énergie potentielle. Une extension ne résulte pas de l'activité de pose|résolution de problèmes engendrée par la tâche initiale, mais plutôt d'une autre activité en lien avec la tâche initiale, soit la formulation d'une nouvelle tâche mathématique à partir des caractéristiques de la tâche initiale. La Figure 3.3 suivante reprend les trois types d'évolution possibles d'une tâche mathématique :

Figure 3.3 Types d'évolution d'une tâche mathématique



Les pratiques de mathématisation abordée dans ce chapitre peuvent jouer un rôle important dans l'évolution d'une tâche mathématique. En effet, l'exploitation des tâches mathématiques se produit à travers l'activité de pose|résolution de problèmes qui prend place; une activité qui se déroule par le déploiement de ces pratiques de mathématisation.

3.4 Les objectifs spécifiques de la recherche

Lorsqu'une tâche mathématique est proposée à résoudre, celle-ci peut être exploitée par la collectivité par le déploiement de différentes pratiques de mathématisation qui contribuent à stimuler l'activité de pose|résolution de problèmes en classe. Le pas proposé dans cette thèse doctorale est qu'une tâche *routinière* peut aussi être exploitée par la collectivité et mener à une activité de pose|résolution de problèmes mathématiques qui lui permet d'*évoluer*. C'est ce que cette thèse propose d'étudier. Tel que discuté au Chapitre 1, en contexte d'enseignement des mathématiques une tâche routinière est une tâche pour laquelle les élèves ont déjà appris les concepts ou méthodes mathématiques permettant de la résoudre. Une tâche routinière ne présente pas de réel défi ni de difficulté pour les élèves à surmonter, et la solution leur est rapidement évidente. Ma recherche doctorale veut étudier empiriquement les manières avec lesquelles ce type de tâche peut évoluer et le rôle que peuvent jouer les pratiques de mathématisation dans cette évolution. En ce sens, à la lumière des ancrages théoriques proposés, les objectifs spécifiques poursuivis par cette recherche sont :

1) Analyser les manières dont des tâches routinières peuvent évoluer à travers l'activité collective de pose|résolution de problèmes déployée pour les résoudre.

2) Étudier le rôle que jouent les pratiques de mathématisation dans cette évolution de tâches routinières.

CHAPITRE 4
LA MÉTHODOLOGIE

Ce chapitre présente la méthodologie retenue pour réaliser cette étude doctorale. Il se compose de cinq sections. La première présente la nature de la recherche à travers le paradigme dans lequel elle s'inscrit. La seconde traite de l'étude de cas qui est l'approche de recherche privilégiée dans cette étude. L'étude de cas suggestif, un type particulier d'étude de cas, est abordée à la troisième section. La quatrième section offre ensuite une description des données de recherche. Finalement, la cinquième section détaille la méthode utilisée d'analyse des données.

4.1 La nature de la recherche

Parce que cette thèse vise à comprendre comment des tâches routinières peuvent évoluer à travers leur exploitation par la collectivité, elle s'inscrit dans un paradigme qualitatif interprétatif (Guba et Lincoln, 1982). Ce paradigme se fonde sur l'idée que la réalité est multiple, construite à partir de perceptions individuelles se modifiant à travers le temps. La « réalité », dans ce paradigme, est explorée telle qu'elle est perçue par un individu et tient compte du contexte dans lequel se tissent les liens avec l'environnement. Les recherches s'inscrivant dans ce paradigme ont généralement pour but de découvrir, d'explorer, de décrire ou de comprendre les actions humaines dans l'environnement où se passe l'action (Fortin, 2010). Ce paradigme de recherche apparait en cohérence avec l'objet de cette étude, puisque la compréhension de l'évolution d'une tâche routinière se produit à travers les inter-actions entre les tâches et la collectivité, c'est-à-dire au sein de l'environnement dans lequel se passe l'action.

Van der Maren (1996) soutient qu'il y a quatre différents enjeux poursuivis par les recherches en éducation : nomothétique, pragmatique, politique et ontogénique. L'enjeu nomothétique renvoie à la production de connaissances, le pragmatique à la résolution de problèmes de dysfonctionnement, le politique à un changement des pratiques (ou normes) des individus ou des institutions et l'ontogénique à un perfectionnement individuel par la réflexion sur l'action. Selon cette classification, cette thèse poursuivrait un enjeu nomothétique, car elle vise à produire des connaissances contextualisées sur la manière dont des tâches routinières peuvent évoluer à travers leur exploitation par la collectivité. Selon Van der Maren (1996), les recherches qui poursuivent un enjeu nomothétique se réalisent selon l'une ou l'autre des deux approches suivantes :

- Statistique : où l'on tente de découvrir des traits qui sont partagés par le plus grand nombre de personnes ;

- Monographique : où les conclusions générales sont élaborées par une réduction des informations obtenues sur un seul sujet aux seules informations essentielles ou fondamentales.

En éducation, les recherches monographiques sont en fait des études de cas (*Ibid*.). Dans une étude de cas, le chercheur tente de dégager un portrait à partir d'une étude détaillée et fouillée d'un seul cas que ce soit un individu ou une situation. Ma recherche doctorale, de nature qualitative interprétative (Guba et Lincoln, 1982), et poursuivant un enjeu nomothétique, se prête bien à la réalisation d'une étude de cas.

4.2 L'étude de cas comme approche de recherche

L'étude de cas se définit comme une approche de recherche qui consiste à explorer de manière détaillée et complète une entité (Fortin, 2010). L'entité qui est examinée ou approfondie peut être une personne, une famille, une organisation, une décision, un projet, une situation, etc. La définition du terme « étude de cas » varie quelque peu dans les divers écrits scientifiques, mais dans tous les cas, au plan méthodologique, réaliser une étude de cas signifie faire l'étude détaillée et approfondie de ce qui est considéré être un « cas » afin de le comprendre et de l'analyser.

Dans les écrits scientifiques, différents types d'études de cas sont distingués. Par exemple, Stake (2005), Yin (2003), Merriam (1988) ou encore Tremblay (1968) proposent différentes catégorisations des études de cas. Celle de Tremblay (1968) est particulièrement pertinente pour cette thèse doctorale puisqu'elle met en avant l'intérêt d'étudier un cas particulier ou atypique. Dans ses travaux, Tremblay (1968) différencie trois types d'étude de cas :

- Les études cliniques qui font référence au traitement d'un cas, soit à la solution des problèmes d'un individu ;
- L'approche monographique qui consiste en une description, la plus exhaustive que possible, d'une situation, d'un problème, d'une unité géographique ou autres; et
- L'étude de cas suggestif qui ressemble à l'approche monographique, mais qui porte sur un cas particulier, exemplaire, voire atypique.

L'étude de cas suggestif apparait comme une approche de recherche intéressante pour réaliser cette recherche doctorale. Elle permet de comprendre la dynamique de l'évolution à partir d'un cas qui illustre ou amplifie le phénomène à l'étude. L'étude de cas suggestif se réalise sur :

> un nombre restreint de situations, d'événements ou d'individus particulièrement bien choisis pour représenter l'état exemplaire ou exagéré, divers aspects saillants. Le cas est suggestif soit parce que, dans ses parties constituantes, il illustre, il amplifie ce qui existe à l'état embryonnaire ou diffus dans d'autres situations, *soit encore parce qu'il permet de comprendre la dynamique même de l'évolution en cours*, des divers éléments à l'œuvre. (p. 185, c'est moi qui mets l'emphase.)

Dans l'enseignement des mathématiques, d'une manière générale, il serait possible d'étudier l'évolution de tâches routinières en classe. Toutefois, tel que l'explique Beghetto (2017), ceci risquerait d'être à un état embryonnaire ou diffus, car l'exploitation de ce type de tâches en classe n'a pas souvent pour objectif de stimuler l'activité mathématique des élèves, visant plutôt une vérification de leurs connaissances procédurales. En ce sens, en classe de mathématiques, les tâches routinières sont généralement utilisées pour s'assurer de la maitrise des concepts, ou des stratégies qui viennent d'être montrées par l'enseignant. Les tâches routinières ne sont donc pas habituellement exploitées afin de stimuler l'activité mathématique des élèves (*Ibid*). Pour pouvoir étudier de manière détaillée l'évolution de tâches routinières à travers leur exploitation par la collectivité, il importe donc de choisir un cas suggestif, soit un cas dans lequel ceci se retrouve à un état exemplaire ou exagéré, afin de comprendre la dynamique de cette évolution, comme le mentionne la citation ci-dessus de Tremblay (1968). L'étude d'un tel cas suggestif permettrait en ce sens de comprendre, finement et dans le détail, comment peut se produire l'évolution de tâches routinières à travers les inter-actions en classe de mathématiques.

4.3 L'étude de cas suggestif

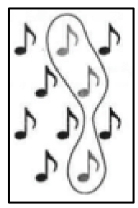
Les données qui sont utilisées pour la réalisation de cette étude doctorale proviennent de séances d'enseignement issues d'un projet de recherche prenant la forme d'un *Teaching Experiment* (Steffe, 1991). Ce projet de recherche, dans lequel j'ai participé en tant qu'assistante de recherche, s'intéresse aux mathématiques que font les enfants en contexte de résolution de problèmes (voir Proulx et al. (2019) et Proulx (2021) issus de ce projet de recherche). Dans ce projet, le chercheur principal agit comme chercheur-enseignant dans la classe et propose aux élèves de ces classes (du primaire ou du secondaire) des tâches à résoudre. Tel qu'expliqué plus bas, ces tâches sont de nature routinière. Ces tâches sont alors résolues et discutées au sein de la collectivité. Ma participation à ce projet de recherche m'a permis de constater que les séances de classe qui y sont conduites constituent un cas suggestif, car (1) des tâches routinières sont utilisées et (2) elles sont exploitées en classe de manière collective.

Dans ces séances d'enseignement issues du *Teaching Experiment*, les tâches utilisées étaient sélectionnées par les enseignants des groupes d'élèves, et suivaient leur planification annuelle. Ces tâches provenaient majoritairement des cahiers d'exercices des enseignants et les notions, procédures ou stratégies mathématiques pour les résoudre avaient déjà été apprises par les élèves. Ces tâches étaient choisies de sorte à ne pas présenter, *a priori*, de réel défi ni de difficulté pour les élèves à surmonter. En ce sens, les tâches utilisées dans le cadre du *Teaching Experiment* se qualifient de routinières. Voici quelques exemples :

Figure 4.1 Exemples de tâches routinières issues des séances de *Teaching Experiment*

1) Lequel ou lesquels de ces nombres sont divisibles par 2 : 46, 70, 81, 106 (5e année primaire)
2) Quel est le résultat de la division : 204 ÷ 4 ? (6e année du primaire)
3) Quelle est la valeur de x dans l'expression suivante : $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$? (2e secondaire)
4) Comment se convaincre que l'aire de la partie noire est bien la demie de l'aire d'un rectangle ? (5e, 6e et 2e secondaire)

5) Quelle est la fraction représentée par ce dessin ? (6e année)



Par ailleurs, dans ce *Teaching Experiment*, les tâches routinières sont exploitées en plénière, soit de manière collective. En effet, d'une manière générale, les séances de classe suivent une structure qui s'inspire de celle proposée par Douady (1994). Le chercheur-enseignant propose une tâche routinière oralement ou par écrit aux élèves. Dans un temps donné par le chercheur-enseignant qui varie de quelques secondes à quelques minutes, selon l'ampleur de la tâche, les élèves réfléchissent et résolvent celle-ci. Ils sont alors invités à proposer des stratégies ou des idées pour la résoudre, et à les expliquer, qu'elles soient bonnes ou erronées. Le chercheur-enseignant note ces stratégies et idées au tableau, ou encore, les élèves viennent eux-mêmes le faire au tableau. Les élèves sont invités à intervenir, questionner ou commenter les stratégies et idées mathématiques offertes en classe. D'autres stratégies qui pourraient permettre de résoudre la tâche sont ensuite demandées. Les différentes idées et stratégies proposées sont alors comparées entre elles. À tout moment de ce processus, le chercheur-enseignant peut apporter, toujours en plénière, de nouvelles idées ou solutions, questionner, ou encore commenter les idées mathématiques mises en avant. Et, de la même manière, les élèves sont invités à le faire. En ce sens, ces séances de classe donnent lieu à une exploitation collective des tâches routinières proposées, car la collectivité est amenée à proposer différentes idées et stratégies mathématiques pour les résoudre, à commenter et réagir face aux stratégies et idées offertes en classe, à questionner, à proposer de nouvelles idées, à comparer les différentes stratégies, etc. Pour reprendre les propos de Tremblay (1968), l'exploitation des tâches routinières y est à l'état exemplaire ou exagéré, par rapport à ce qui peut se retrouver habituellement en salle de classe ordinaire (Beghetto, 2017). C'est ce qui en fait un cas suggestif.

4.4 La description des données de recherche

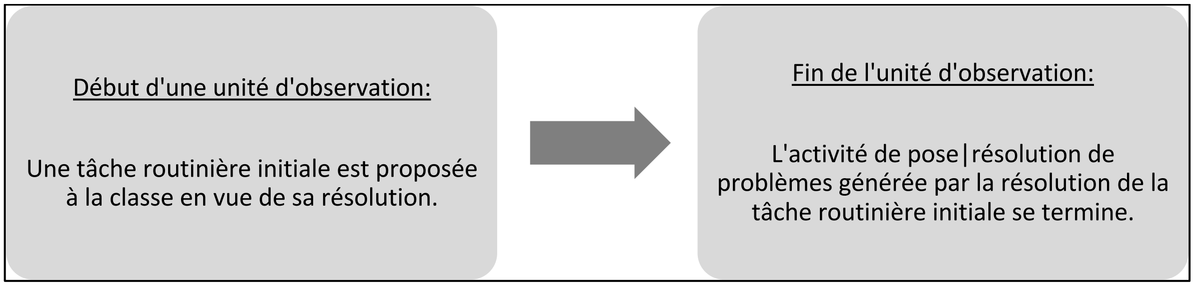
Les séances d'enseignement issues de ce *Teaching Experiment* ont été conduites au courant de l'année scolaire 2017-2018 auprès d'élèves du 3e cycle du primaire et du 1er cycle du secondaire. Ces séances de classe ont été enregistrées sur bande vidéo et une copie électronique du tableau blanc utilisé pour noter les idées et stratégies mathématiques déployées a été conservée. Au total, ce sont 56 séances de classe (d'une durée de 50 minutes pour le primaire et de 75 minutes pour le secondaire) qui ont été conduites et enregistrées. Pour le primaire, elles se sont déroulées dans une même école auprès de trois groupes d'élèves de cinquième année comptant chacune une vingtaine d'élèves et d'une classe double comptant une cinquantaine d'élèves de sixième année. Pour le secondaire, les séances de classe ont eu lieu dans une même école auprès de trois groupes de deuxième secondaire ayant des profils différents : une classe composée de 30 filles, une classe composée de 30 garçons et une classe mixte de 20 élèves en prolongation de cycle. Les séances de classe se déroulaient approximativement une fois aux deux semaines pour chacun des groupes pendant toute l'année scolaire. L'ensemble de ces 56 séances de classe constitue mes données de recherche. Chacune d'entre elles me permet d'étudier l'évolution de tâches routinières à travers leur exploitation par la collectivité.

4.5 La méthode d'analyse des données

4.5.1 Les unités d'observation et les unités d'analyse

Pour atteindre mes objectifs de recherche, il importe de cibler, à l'intérieur des 56 séances de classe, des extraits où une tâche routinière est présentée puis exploitée collectivement. Savoie-Zajc (2018) parle de définir une *unité d'observation* par le chercheur, c'est-à-dire d'identifier le début et la fin de chaque extrait observé. L'unité d'observation offre ici une règle pour extraire les données de recherche des enregistrements vidéo. Dans le cadre de cette recherche doctorale, les unités d'observation se définissent comme suit :

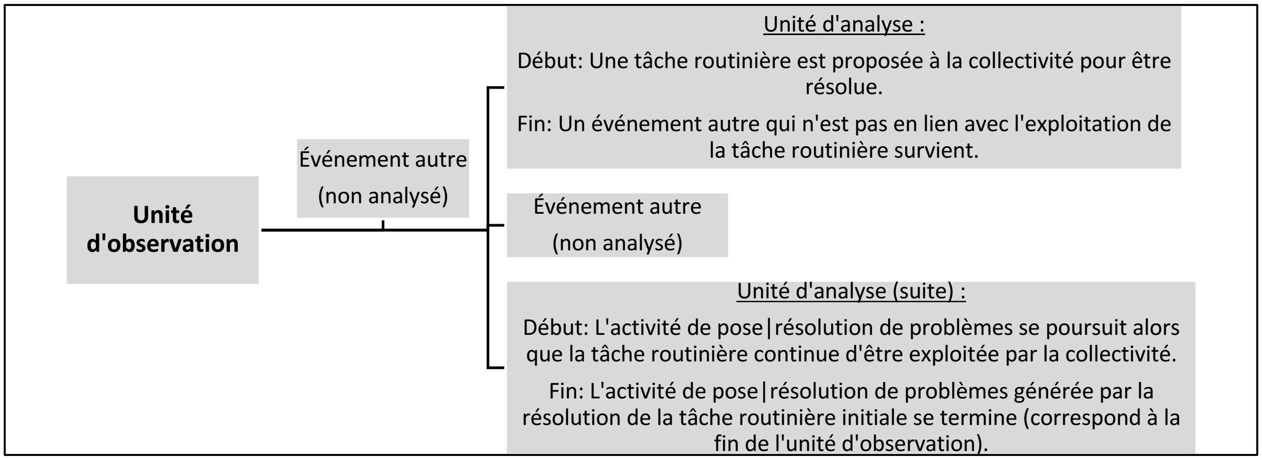
Figure 4.2 Définition des unités d'observation des données de recherche



Dans cette étude, une unité d'observation débute lorsqu'une tâche routinière est proposée à la collectivité à résoudre. Face à cette tâche, la collectivité entre dans une activité de pose|résolution de problèmes mathématiques dans laquelle elle propose différentes stratégies et idées pour résoudre la tâche, réagit face aux différentes idées et stratégies mises en avant en classe, offre de nouvelles stratégies, etc. La tâche routinière est alors exploitée collectivement en classe. À travers cette activité, si de nouvelles tâches mathématiques émergent, elles font partie de la même unité d'observation, car elles proviennent de l'évolution de la tâche routinière qui a initialement stimulé cette activité. La fin de l'unité d'observation est marquée par la fin de l'activité de pose|résolution de problèmes déclenchée par la tâche routinière proposée. La tâche routinière cesse donc d'être exploitée et son évolution se termine en même temps que l'unité d'observation prend fin. Généralement, le chercheur-enseignant propose une nouvelle tâche routinière à la collectivité et une nouvelle unité d'observation débute. Ou encore, la cloche annonçant la fin de la période de classe sonne, ce qui met fin (systématiquement parlant) à l'exploitation collective de la tâche routinière initiale.

Pour chacune des unités d'observation identifiées, une analyse de l'évolution des tâches routinières est réalisée. C'est ce que Savoie-Zajc (2018) appelle les *unités d'analyse.* Dans le cadre de cette recherche doctorale, les unités d'analyse peuvent être représentées par la figure suivante, qui agit à titre d'exemple :

Figure 4.3 Définition des unités d’analyse des données de recherche



Tel que cette figure l’illustre, à l’intérieur des unités d’observation, l’analyse de l’évolution des tâches routinières se réalise lors des moments où celles-ci sont exploitées par la collectivité, c’est-à-dire dans les moments où la collectivité est en activité de pose|résolution de problèmes. Donc, si certains événements émergent à l’intérieur d’une unité d’observation, mais que ceux-ci ne sont pas en lien avec l’objet de cette étude, ils ne font pas partie des unités d’analyse. Par exemple, si, à travers l’exploitation d’une tâche routinière, une discussion sur la note obtenue à un examen émerge, si une discussion sur l’actualité qui n’est pas connectée à l’exploitation de la tâche survient, ou encore si une question sur la sortie de fin d’année est posée, ces événements ne sont pas considérés dans l’analyse, car ils ne sont pas alignés à l’objet de la recherche. Dans ces unités d’analyses, l’analyse de l’évolution des tâches routinières à travers leur exploitation par la collectivité est conduite au regard des types d’évolution d’une tâche mathématique (stabilisation phénotypique (évolution lente), diversification (évolution marquée) et extension) et des pratiques de mathématisation déployées pour les résoudre, permettant de répondre aux deux objectifs spécifiques poursuivis par cette recherche. La définition des unités d’observation et d’analyse veut permettre d’identifier les moments clés des enregistrements des séances d’enseignement pour les fins de cette étude doctorale.

4.5.2 Le processus d’analyse des vidéos

L’analyse des vidéos se réalise à partir d’une adaptation du modèle développé par Powell, Francisco et Maher (2003), qui s’appuie elle-même sur une recension des écrits sur les méthodologies liées à l’analyse de vidéo. Dans leur modèle, ces chercheurs proposent une méthode d'analyse de vidéo qui se réalise en sept étapes itératives et non linéaires, c'est-à-dire que des allers-retours sont possibles entre chacune des étapes et que celles-ci peuvent être réalisées plusieurs fois avant d'en arriver à une analyse finale. L'adaptation proposée de ce modèle pour la réalisation de cette étude doctorale est présentée dans ce qui suit :

1) <u>Écoute attentive des enregistrements des séances de classe</u> : Les séances de classe sont visionnées et une synthèse de chacune est faite.

2) <u>Identification des unités d'observation</u> : Dans chacune des séances, les unités d'observation sont déterminées. Le temps indiquant le début et la fin de chaque unité d'observation est noté afin de faciliter le repérage subséquent.

3) <u>Identification des unités d'analyse</u> : Pour chaque unité d'observation, les unités d'analyse sont précisées et les temps de début et de fin de chacune sont inscrits.

4) <u>Description des unités d'analyse</u> : Une description des unités d'analyse est réalisée.

5) <u>Codage des unités d'analyse</u> : À partir des descriptions, les grilles d'analyse (p. 85-88) sont utilisées pour réaliser une analyse en profondeur des données. Ces grilles permettent d'analyser le type d'évolution des tâches routinières à travers leur exploitation par la collectivité (stabilisation phénotypique (évolution lente), diversification (évolution marquée) et extension). Ces grilles permettent aussi d'analyser les pratiques de mathématisation mises en avant par la collectivité à travers l'activité de pose|résolution de problèmes déployée pour les résoudre. Les analyses réalisées prennent en compte le caractère collectif de cette activité, tel que décrit au Chapitre 2.

6) <u>Interprétation des analyses</u> : Pour chaque unité d'analyse, un récit interprétatif qui raconte l'histoire de l'évolution de la tâche routinière est rédigé à partir du codage effectué. Un deuxième récit interprétatif précisant cette fois les pratiques de mathématisation déployées par la collectivité à travers l'activité qui prend place en classe est fait. Une analyse transversale de ces deux récits est ensuite conduite afin de faire émerger les résultats et conclusions à retenir de cette étude doctorale.

La mise en œuvre de ces étapes permet de répondre aux objectifs spécifiques de recherche poursuivis par cette thèse doctorale. Ces objectifs étant, rappelons-le, d'analyser la manière dont des tâches routinières peuvent évoluer à travers l'activité collective de pose|résolution de problèmes déployée pour les résoudre, et étudier le rôle des pratiques de mathématisation dans cette évolution de tâches routinières.

4.5.3 Les grilles d'analyse

Le codage des unités d'analyse s'effectue à partir des deux grilles suivantes, construites sur la base des ancrages théoriques présentés au Chapitre 2 et au Chapitre 3. La première grille présente un premier niveau d'analyse qui permet d'étudier le type d'évolution des tâches routinières. La deuxième grille expose un second niveau d'analyse, où une description des différentes pratiques de mathématisations relevées au Chapitre 3, ainsi que des exemples d'événements pouvant être observés en classe sont présentés. Ces descriptions et exemples veulent illustrer chacune des pratiques de mathématisation pour pouvoir les repérer dans les séances de classe afin d'étudier leur rôle dans l'évolution des tâches routinières. Ensemble, ces deux grilles soutiennent le processus d'analyse de vidéos des séances de classe.

Tableau 4.1 Grille d'analyse des types d'évolution d'une tâche routinière

Nature de l'évolution d'une tâche routinière	**Description**	**Exemples d'événements**
Stabilisation phénotypique (évolution lente)	Une tâche est donnée et, à travers les étapes de pose|résolution de problèmes déployées pour la résoudre, celle-ci évolue en se transformant peu à peu à chaque étape.	- Une stratégie pour résoudre la tâche est explicitée. - Un commentaire sur une stratégie est fait, ce qui permet de raffiner la stratégie proposée. - Une question est posée pour mieux comprendre une stratégie ou une idée mathématique mise en avant. - Un contre-exemple est donné en lien avec une solution proposée.
Diversification (évolution marquée)	Une tâche est donnée et, à travers l'activité de pose|résolution de problèmes déployée pour la résoudre, une sous-tâche mathématique sur laquelle la collectivité se penche à résoudre pendant un certain temps nait. Celle-ci est d'une nature différente de la tâche initiale. Il y a un déplacement du focus de résolution de la collectivité. La collectivité ne se penche alors plus de manière directe sur la résolution de la tâche	- Une erreur émerge en classe et en essayant de la comprendre, elle devient la « nouvelle tâche » à investiguer. - Une conjecture est formulée en classe pendant l'activité de pose|résolution de problèmes et donne naissance à une nouvelle sous-tâche mathématique à investiguer. - Une validation mathématique amène une investigation du statut de vraisemblance d'une idée mathématique

	initiale. Un changement dans la nature de l'objet de résolution est observé.	mise en avant, ce qui fait bifurquer la résolution de la tâche initiale en entrainant une nouvelle sous-tâche mathématique à investiguer.
Extension	Une tâche initiale est donnée et la collectivité formule une nouvelle tâche mathématique connexe à partir de celle-ci. La nouvelle tâche formulée ne découle pas de l'activité de pose|résolution de problèmes déployée pour résoudre la tâche initiale.	- Une stratégie du type *What-if-not ?* (Brown et Walter, 2005) est utilisée dans le but de formuler une nouvelle tâche connexe à résoudre. - Une heuristique du type *Looking Back* (Polya, 1945) est utilisée dans le but de formuler une nouvelle tâche connexe à résoudre.

Tableau 4.2 Grille d'analyse des pratiques de mathématisation pouvant jouer un rôle dans l'évolution des tâches routinières

Pratiques de mathématisation pouvant jouer un rôle dans l'évolution des tâches routinières	**Description**	**Exemples d'événements observables en classe**
L'explication et la justification	Une idée ou un raisonnement est mis en avant en classe de manière à le rendre, autant que possible, clair et accessible. Il s'agit alors d'une explication mathématique. Un appui de la vraisemblance d'éléments mathématiques énoncés en classe est donné. Il s'agit d'une justification mathématique.	- Une stratégie est expliquée pour montrer comment résoudre la tâche. - Une précision est demandée au sujet d'une réponse donnée. - Une raison est offerte pour montrer qu'une idée ou stratégie mathématique énoncée est valide, sans que celle-ci n'ait été mise en doute. - Une nouvelle idée est exprimée pour appuyer la validité d'une explication donnée.
L'argumentation	Un doute est énoncé quant au statut de vraisemblance d'une idée mathématique ou stratégie offerte en classe. Une argumentation se développe alors par des justifications soutenues par des appuis mathématiques qui sont collectivement approuvés. Des modifications, rétractations, remplacements d'éléments mathématiques peuvent alors survenir. L'ensemble de ces éléments compose l'argumentation mathématique.	- Une justification mathématique est donnée après qu'une stratégie mathématique ait été mise en doute. - Un raisonnement mathématique est mis en doute, donnant lieu à un travail mathématique qui engendre une modification d'une partie du raisonnement. - Une idée mathématique proposée en classe est remis en question et donne lieu à un débat mathématique en classe. Ce débat est soutenu par diverses justifications et différents appuis mathématiques

La validation	Une idée, un raisonnement ou une stratégie mathématique est énoncé en classe. Celui-ci est approuvé ou réfuté par la collectivité afin que les mathématiques qui se font soient considérées valides par ceux qui les font.	- Une idée mathématique est réfutée à partir d'un contre-exemple donné. - Un élément mathématique offert en classe est réfuté par l'utilisation d'une propriété mathématique. - Une stratégie déployée en classe est approuvée alors qu'aucun signe de désapprobation n'est fait, ni aucun élément permettant de la réfuter n'est énoncé.
L'utilisation de symboles et représentations	Une forme mathématique, telle une notation symbolique ou une représentation, est utilisée pour exprimer une idée ou compréhension mathématique. Celle-ci offre un support à la collectivité pour réfléchir aux mathématiques qui se font en classe. La forme mathématique utilisée peut être de forme hybride entre les mathématiques exprimées par la collectivité et celle de la communauté mathématique.	- Une représentation mathématique est proposée pour imager une idée mathématique. - Un symbole mathématique est utilisé pour écrire un raisonnement mathématique. - Un commentaire ou une question est soulevé par rapport à une forme mathématique présente au tableau.
La formulation de conjectures	Une proposition mathématique supposée vraie est énoncée et celle-ci mène à un travail mathématique pour attester ou non de sa vraisemblance. La conjecture peut également perdurer au travail mathématique fait, si elle n'est ni démontrée ni réfutée en classe.	- Une proposition mathématique qui semble vraie est proposée en classe et mène à investiguer sa vraisemblance. - Une idée mathématique est mise en avant pour faire avancer la résolution de la tâche et elle mène à investiguer si elle peut fonctionner ou non. - Une proposition mathématique faite en classe n'est ni démontrée ni réfutée malgré le travail mathématique fait pour y arriver.
Le surpassement des erreurs et incertitudes	Une erreur est commise ou un moment d'incertitude survient à travers l'activité de pose|résolution de problèmes qui prend place en classe. Un travail de débogage mathématique est alors fait dans le but d'arriver à poursuivre l'activité. Ce travail peut se produire en fixant l'erreur ou l'incertitude à sa source pour la surmonter ou encore en investiguant de nouvelles avenues qui émergent de celle-ci.	- Une erreur est commise et elle mène à investiguer le domaine de validité de celle-ci. - Une erreur est commise quant à la compréhension de la tâche mathématique, mais la nouvelle tâche issue de cette erreur est investiguée. - Un moment d'incertitude survient, mais il est surmonté par la formulation d'une conjecture mathématique. - Un moment d'incertitude survient, mais une explication convaincante est proposée et elle permet la poursuite de l'activité.

Le recours à un corpus de connaissances mathématiques	Un algorithme, une méthode, une théorie, un concept, un axiome, une définition, une heuristique de résolution de problèmes, etc., sont utilisés à travers l'activité de pose|résolution de problèmes.	- Un algorithme de calcul est proposé pour résoudre la tâche mathématique. - Un théorème mathématique est utilisé à travers une solution mathématique ou encore pour convaincre de la validité d'un argument. - Une solution d'une tâche résolue préalablement est reprise pour résoudre la tâche proposée en y modifiant certains éléments. - Une propriété mathématique est énoncée pour justifier une stratégie proposée.
La formulation de questions mathématiques	Une nouvelle question mathématique à investiguer est formulée à partir de l'activité de pose|résolution de problèmes déclenchée par une tâche initiale, ou *a posteriori* de celle-ci. Cette question relance l'activité de la collectivité.	- Une question mathématique est posée et mène à une investigation mathématique. - Une nouvelle tâche mathématique est formulée *a posteriori* de la résolution de la tâche initiale en faisant varier certaines données et en fixant des variables.

4.5.4 Déroulement : Actualisation de la méthode d'analyse

En cours d'analyse des données, un ajustement à la grille d'analyse des pratiques de mathématiques a été fait. La pratique de mathématisation « Généralisation » a été observée lors de l'analyse des données et a ainsi été ajoutée à la grille d'analyse. La généralisation est un processus qui vise à trouver une structure générale, une régularité, c'est-à-dire à tirer des conclusions valables pour tous les cas possibles (Mason 1994; Schoenfeld, 1992). La généralisation a une nature prospective puisqu'elle est orientée vers l'anticipation du général, en dépassant le spécifique (Squalli, 2015). Cette pratique de mathématisation est d'ailleurs présente dans les travaux de recherche sur l'approche investigative, en particulier dans les travaux de Schoenfeld (1992). En ce sens, cette pratique de mathématisation a été ajoutée à la grille d'analyse des pratiques de mathématisation pouvant jouer un rôle dans l'évolution des tâches routinières.

Également, en cours d'analyse des données, le processus d'analyse a été ajusté à la suite de l'analyse globale des données. En effet, une analyse globale a été réalisée sur l'ensemble des 56 séances de classe issues du *Teaching Experiment*. Cette analyse globale comprend les étapes 1 à 4 de l'adaptation proposée du modèle de Powell et al. (2003) (tel qu'explicité à la section 4.5.2 précédente), soit l'écoute attentive des vidéos, l'identification des unités d'observation, l'identification des unités d'analyse et la description des unités d'analyse. Une analyse détaillée a ensuite été conduite sur 7 de ces 56 séances. Cette analyse détaillée comprend les étapes 1 à 7 de l'adaptation proposée du modèle de Powell et al. (2003). Ces sept séances qui ont fait l'objet d'une analyse détaillée sont les suivantes :

- La séance #3 sur la tâche des notes de musique dans la classe de 6^{e} année;

- La séance #9 sur la tâche de divisibilité par 4 dans la classe de 6^{e} année;

- La séance #11 sur la tâche de divisibilité par 2 dans la classe de 5^{e} année de Louise;

- La séance #22 sur la tâche de complétion d'un tout dans la classe de 6^{e} année;

- La séance #37 sur la tâche de calcul mental d'une division avec reste dans la classe de 6^{e} année;

- La séance #45 sur la tâche sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5^{e} année de Louise;

- La séance #47 sur la tâche sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5^{e} année de Gisèle.

L'analyse globale réalisée a révélé qu'au niveau de l'analyse, les séances se ressemblent l'une et l'autre. En ce sens, ces sept séances ont été choisies pour en faire une analyse détaillée parce qu'elles sont illustratives de ce qui se produit dans l'ensemble des 56 séances. Ces sept séances permettent d'exemplifier le travail collectif pouvant être fait à partir de tâches routinières issues du domaine de l'arithmétique et du domaine de la géométrie qui comprennent des notions fréquemment travaillées avec les élèves : les fractions, la divisibilité et le calcul mental pour l'arithmétique et les concepts d'aire et de périmètre pour la géométrie. Qui plus est, une même tâche routinière a été analysée dans deux groupes différents de 5^{e} année afin de montrer l'unicité de l'activité collective de résolution de problèmes qui a pris place en classe. En effet, l'analyse globale des séances a dévoilé qu'une même tâche routinière n'engendre pas nécessairement la même activité collective de pose|résolution de problèmes pour deux classes différentes. Ceci est discuté plus en détail au Chapitre 7, qui présente les résultats de cette étude doctorale. Avant de s'y rendre, le Chapitre 6 suivant présente les analyses détaillées qui ont été conduites sur ces sept séances.

CHAPITRE 5
L'ANALYSE DES DONNÉES

Ce chapitre présente l'analyse des données conduite au regard des ancrages théoriques développés aux Chapitres 2 et 3 et des grilles d'analyses proposées au Chapitre 4. Tel qu'explicité au chapitre précédent, des analyses détaillées ont été effectuées sur un ensemble de sept séances. Pour en illustrer la nature, deux exemples complets sont offerts dans les deux premières sections de ce chapitre. Ainsi, dans la première section, l'analyse détaillée de la séance portant sur la divisibilité par 4 dans la classe de 6e année est présentée. Dans la seconde section, l'analyse détaillée de la séance sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5e année de Gisèle est exposée. La troisième section, pour sa part, présente d'une manière synthétique les analyses conduites sur les cinq autres séances. Finalement, la quatrième section de ce chapitre offre une discussion portant sur l'ensemble des analyses.

Tel que discuté au Chapitre 2, cette recherche doctorale s'intéresse à l'activité collective plutôt qu'aux actions d'un individu en particulier. En ce sens, bien que la description des séances de classe offre un découpage selon les acteurs présents en classe (chercheur-enseignant, élèves, enseignante(s), conseillère pédagogique, assistante de recherche), les analyses sont conduites au niveau collectif.

5.1 Premier exemple d'analyse : La tâche de divisibilité par 4 dans la classe de 6e année

Dans cette section, une description de la résolution collective de la tâche de divisibilité par 4 dans la classe de 6e année est offerte. Ensuite, l'analyse de l'évolution, soit l'ontogénie, de la tâche à travers ses inter-actions avec la collectivité est explicitée. Finalement, l'analyse des pratiques de mathématisation déployée par la collectivité au regard de l'évolution de la tâche est abordée.

La tâche de divisibilité par 4 proposée à la classe de 6e année s'énonce comme suit :

Figure 5.1 Énoncé de la tâche de divisibilité par 4 dans la classe de 6e année

Est-ce que 498 est un nombre divisible par 4?

Cette tâche peut être qualifiée de routinière, car les élèves avaient déjà abordé cette notion avec leur enseignante, et ils savaient comment s'y prendre pour la résoudre. Les élèves n'ont eu que quelques secondes pour la résoudre (en mode calcul mental), puis le chercheur-enseignant leur a demandé d'offrir leurs réponses et stratégies. Cette tâche routinière a donné lieu à une investigation mathématique d'une cinquantaine de minutes.

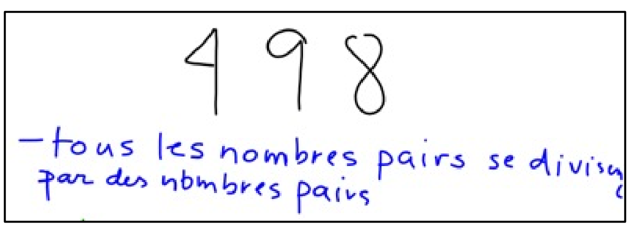
5.1.1 Description de la résolution collective de la tâche de divisibilité par 4

Pour débuter la séance, une première affirmation est proposée :

> Tomas : Si je ne me trompe pas, tous les nombres pairs peuvent se diviser par un nombre pair.

Le chercheur-enseignant (CE) demande à l'élève d'expliquer comment il le sait. L'élève lui répond que son enseignante de l'an dernier disait cela. Cette affirmation est prise en note au tableau, tel que l'illustre la Figure 5.2 ci-dessous.

Figure 5.2 Traces de la stratégie de l'analyse de la parité du diviseur et du dividende



Une affirmation d'un second élève, stipulant que ce ne sont pas tous les nombres qui donnent un nombre entier comme réponse lorsque divisés est énoncée[10]. Le CE demande à l'élève d'expliquer quels seraient les autres choix de réponses possibles à une division. L'élève répond qu'il pourrait s'agir de nombres décimaux.

Un troisième élève, Carl, propose ensuite une stratégie s'appuyant sur la décomposition du nombre :

> Carl : J'ai divisé les centaines en premier par 4 pour avoir 400 ÷ 4 = 100. Ensuite, le 98, je l'ai divisé en paquets de 20 pour arriver à 80 en faisant 4 paquets. Il reste alors 18, mais ça ne se divise pas par 4.

Le CE demande à l'élève de justifier la non-divisibilité de 18 en 4. L'élève explique que 18 est divisible par 3 et donc ne l'est pas par 4. Le CE demande aux autres élèves si la stratégie de décomposition du nombre en plusieurs morceaux, en elle-même, est valide :

> CE : A-t-on le droit de casser le nombre en plusieurs morceaux pour voir s'il est divisible ?

Une invalidation est alors exprimée par un autre élève qui affirme que cela ne fonctionne pas et que c'est mélangeant de le casser, car il faut alors retenir plusieurs nombres en même temps.

À ce moment, une nouvelle stratégie est proposée par Sam, soit de diviser directement le nombre par 4. Toutefois, le CE propose de rester centré sur la validation de la stratégie précédente de décomposition du nombre. Sam tente quand même de poursuivre son explication, mais le CE réitère sa demande de validation. Sam affirme que c'était facile avec ce nombre-là, mais que si le nombre avait été plus grand, cela aurait été difficile. Le CE s'adresse alors à tous les élèves, leur

[10] Il est à noter que cet élève ne semble pas dire ceci en réaction à ce que Tomas mentionne. Il s'agit plutôt d'une affirmation mise en avant par l'élève au regard de la tâche initiale proposée.

demandant s'ils sont d'accord que la stratégie de décomposition du nombre proposée fonctionne. Seulement deux élèves lèvent la main. Une élève, Jeanne, explique que la stratégie fonctionne :

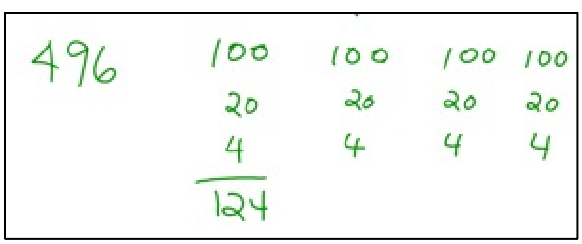
> Jeanne : Oui [cela fonctionne], parce que ça aide à mieux comprendre le nombre pour voir s'il peut être divisé.

Le CE offre alors un nouvel exemple à partir duquel réfléchir, soit 496. Il sollicite à nouveau Carl à expliquer sa stratégie de décomposition du nombre à partir de ce nouveau nombre. Ce dernier explique les paquets qu'il aurait fait avec 496.

> Carl : Heu, bien… J'aurais fait d'autres paquets.
>
> CE : Quel genre de paquets aurais-tu fait?
>
> Carl : Heu, j'aurais fait des paquets de deux, jusqu'à ce qu'il ne m'en reste plus.
>
> CE : Tu nous dis que si on avait eu 496, tu ferais encore quatre fois le 100, ensuite 20, 20, 20, 20 et là, tu aurais mis 2 à chacun. C'est ça?
>
> Carl : Heu, je vais mettre 4, parce que 4 x 4 = 16.
>
> CE : Ok. On aurait pu mettre 4, 4, 4, 4. Alors là, le 496 tu l'as cassé en 4 pour les 100, en 4 pour les 20 et en 4 pour les 4. En tout ça donne 124.

Les traces suivantes sont représentées au tableau :

Figure 5.3 Traces de la stratégie de décomposition du nombre sur le nombre 496



À la suite de l'explication de cette stratégie de décomposition du nombre, un retour est fait sur la stratégie de Sam de diviser directement le nombre initial 498 par 4, donnant 124,5. Sam explique avoir utilisé l'algorithme de division, et affirme pour 124,5 que « comme le nombre n'est pas entier, il n’est pas divisible ». Le CE précise que le nombre peut être divisé, mais qu’il n’est pas divisible.

Une autre stratégie d’analyser la divisibilité de chaque chiffre du nombre à ce moment proposée :

> Leo : Moi j’ai fait 4 ÷ 4 = 1, ensuite j’ai regardé le 9, mais il n’est pas divisible par 4, alors ça ne marche pas.

Le CE demande aux élèves ce qu’ils pensent de cette stratégie. Un élève affirme lui aussi avoir utilisé cette stratégie, mais que celle-ci ne fonctionne pas finalement.

Adam intervient pour dire qu’il a utilisé, comme Sam, l’algorithme de division, mais qu’il a obtenu 124,2 plutôt que 124,5. Le CE mentionne qu’ils pourront regarder comment il arrive à cette réponse, mais que dans les deux cas, le nombre n’est pas divisible par 4. Pour départager ces deux réponses, une élève propose de multiplier par 4 le résultat obtenu pour vérifier lequel mène au nombre initial. Le CE soutient que cette stratégie pourrait fonctionner pour valider la réponse obtenue. David prend la parole pour dire que « la virgule 2 » n’est pas possible, et explique que le reste de 2, devient 20 lorsque la virgule est ajoutée, et que 20 divisé en 4 donne 5. Le CE mentionne qu’ils pourront essayer de comprendre ceci plus tard, mais que la question de départ est de savoir si 498 est divisible par 4 ou non. Le CE demande s’ils ont d’autres réponses à partager.

Charlie explique avoir fait une division qui lui donne 124 reste 2, et d’avoir vérifié avec la calculatrice la valeur du reste :

> Charlie : J’ai fait 498 ÷ 4, ça m’a donné 124. Il reste un 2 à diviser alors j’ai regardé avec ma calculatrice et ça m’a donné 124,5. C’est donc 124 reste 2.

Le CE dit alors qu'il faudrait se demander quoi faire avec le reste de 2. Il recentre sur le fait que comme il y a un reste de 2 le nombre n'est pas divisible. Il propose pour l'instant de continuer avec d'autres stratégies.

Leo revient à ce moment sur sa stratégie d'analyser la divisibilité de chaque chiffre du nombre pour la modifier afin de tenir compte du 98 ensemble plutôt que du 9 et du 8 séparément :

> Leo : J'aurais pu regarder le 98 en entier, car ça se peut que le 9 ne soit pas divisible, mais que le nombre en entier le soit.

Le CE reprend l'explication de Leo et demande ensuite aux élèves s'ils ont d'autres stratégies.

Comme aucune autre stratégie n'est proposée, le CE explique les différentes stratégies qui ont été offertes. Il demande ensuite aux élèves de reprendre chacune de ces stratégies, sauf l'algorithme de division, en utilisant le nombre 589. Les élèves ont quelques minutes, seuls ou en petites équipes, pour travailler avec les stratégies proposées afin de vérifier si 589 est divisible par 4.

Après cinq minutes de travail, le CE propose de revenir en grand groupe. Pour lancer le retour, il propose de s'intéresser à la première stratégie, soit que tous les nombres pairs sont divisibles par des nombres pairs (expliquant en retour qu'un nombre impair n'est pas divisible par 4). Le CE demande aux élèves s'ils y arriveraient à savoir si 589 est divisible par 4 avec cette stratégie.

Plusieurs disent que non. Une élève affirme ne pas savoir si la stratégie fonctionne ou non, et dit que le nombre est divisible par 4, mais qu'il y a un reste. À ce moment, Maria propose que la multiplication d'un nombre par 4 donne un nombre pair et donne quelques exemples pour appuyer ses propos :

> Maria : Quand je prends un nombre et que je le multiplie par 4, ça donne un nombre pair.
>
> CE : Ok. Tu nous dis que quand tu as un nombre et que tu le multiplies par 4, ça te donne un nombre pair. Comment tu sais ça?
>
> Maria : Bien, parce que 4 x 4 = 16, 4 x 2 = 8, 4 x 3 = 12.

Le CE, avec une des enseignantes du groupe, demande s'ils sont d'accord avec cette proposition. Ils posent la question : « Êtes-vous d'accord que lorsqu'on multiplie par 4 ça donne un nombre pair ? » On entend plusieurs « oui » de la part du groupe. L'enseignante les relance alors : « Êtes-vous capable de trouver un contre-exemple? Est-ce que vous en connaissez des nombres que quand on les multiplie par 4, ça donne un nombre impair? »

Différents exemples sont lancés par les élèves :

> Katie : 4 x 15.
>
> Ens. : Ça donne combien?
>
> Ami : [L'élève regarde dans l'horloge]. Ça donne 60.
>
> CE : Ah bien oui! Tu peux y aller avec l'horloge. 15 minutes, 15 minutes, 15 minutes, 15 minutes, ça fait 60 minutes. Oui.
>
> Matt : 4 x 7.
>
> Coralie : Ça donne 28.

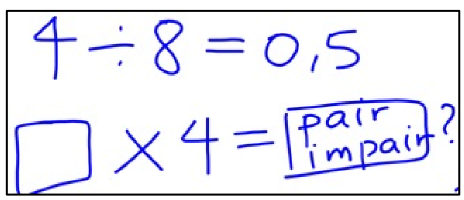
Félix explique à ce moment qu'aucun exemple ne sera impair :

Félix : Il n'y en a aucun qui sera impair, parce que si on prend 2 x 7 ça donne un nombre pair. Même si tu fais fois 4, ça va juste faire le double du nombre. Ça va toujours être un nombre pair.

La demande de trouver un contre-exemple ou de trouver un argument convaincant est alors réitérée par le CE. À nouveau, les élèves prennent quelques minutes pour y travailler, individuellement ou en petites équipes. Au retour, plusieurs élèves disent que malgré les nombreux essais qu'ils ont faits, ils n'ont trouvé aucun contre-exemple à la proposition qu'un nombre multiplié par 4 donne un nombre pair. Un élève dit même avoir essayé quarante-cinq nombres et qu'aucun multiplié par 4 n'a donné un résultat impair.

À ce moment, Charles, explique qu'il a fait la division 4 ÷ 8 = 0,5. Le CE rappelle la question : « Si on a un nombre multiplié par 4, ce que ça nous donne est-ce toujours pair ou impair? ». Il inscrit les explications de l'élève au tableau, comme ceci :

Figure 5.4 Traces de l'exemple d'un nombre rationnel qui multiplié par 4 donne un nombre pair



Charles explique que cela donne un nombre pair, puisque 0,5 x 4 = 2. Le CE donne la parole à une autre élève, qui propose un nouvel exemple avec 36 x 4, qui donne 144.

D'elle-même, Mégane affirme ensuite avoir trouvé une raison qui explique pourquoi multiplier par 4 un nombre donne toujours un nombre pair :

Mégane : Un nombre pair plus un nombre pair donne un nombre pair, et même si tu fais ça plusieurs fois, comme 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4, ça va toujours donner un nombre pair.

CE : Ok, alors deux nombres pairs ensemble donnent un nombre pair, si on ajoute un autre nombre pair, ça va donner pair.

Mégane : Même si on l'additionne plusieurs fois, ça va toujours fonctionner.

CE : Mais, si au début j'avais eu un nombre impair ?

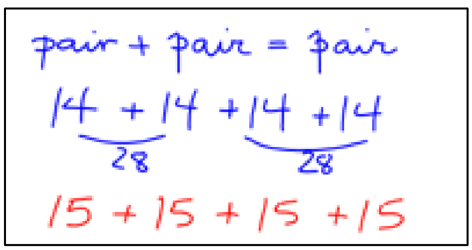
Mégane : Ah, là, ça ne fonctionnerait pas.

Le CE reprend l'explication proposée puis donne un exemple additionnel :

CE : 14 + 14 ça donne 28 qui est pair, je lui en ajoute un autre 14 et un autre 14, ça fait aussi 28. Et, au total, 28 + 28 ça donne 56.

Le CE propose d'essayer avec un nombre impair et suggère 15. Mégane indique que cela fonctionne et que la réponse donne 60. Les traces laissées au tableau sont les suivantes :

Figure 5.5 Traces de l'exemple de nombres pair et impair qui multipliés par 4 donnent un nombre pair



En réaction à cet exemple de nombres pair et impair qui multiplié par 4 donnent un nombre pair, Kevin, de lui-même, propose un exemple de boites de souliers en guise de justification additionnelle :

Kevin : Dans la vraie vie, ça fonctionne comme ça. Dans une paire de souliers, il y en a deux et ça ne serait pas logique qu'à un moment donné ça devienne impair avec des paires de souliers. Il y a toujours deux souliers dans une boite.

CE : Il y a toujours deux souliers dans une boite, alors si on a deux boites, on aura 4 souliers.

Tom ajoute de lui-même que :

> Tom : Multiplier 9 par 4, c'est 9 + 9 + 9 + 9 ou encore on peut faire 4 + 4 + 4 … 9 fois. Ça fait que même si on a un nombre impair, comme 37, de multiplier par 4, c'est 37 + 37 + 37 + 37.

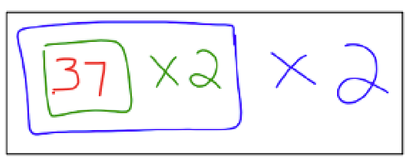
Le CE leur demande comment ils écriraient le 37 à l'aide de la proposition des boites de souliers.

> Kevin : 37 boites de souliers, cela vient en 2, en paire de deux dans chaque boite. Comme on en met deux dans chaque boite, on a 37 paires de souliers.

> CE : C'est intéressant ton exemple de boite de souliers. Avec 37 paires de souliers, parce que c'est des pairs, on en a deux dans chaque boite, au final j'aurais un nombre pair de souliers. 37 alors ça donnerait 74 souliers, qui est un nombre pair. Est-ce que je peux me servir de ceci pour comprendre le fois 4?

Le CE reprend alors l'explication de Félix qui, plus tôt, disait que de multiplier par 2 donne un nombre pair, et que de multiplier par 4 ne fait qu'encore le doubler. Félix complète les propos du CE en ajoutant que « multiplier par 2 donne un nombre pair et si on multiplie encore par 2, on aura encore un autre nombre pair ». Le CE écrit 37 dans une boite au tableau et inscrit une multiplication par 2. Félix reprend ses explications que de multiplier par 2 donne un nombre pair et que de multiplier encore une fois par 2 donne encore un nombre pair. Le CE complète les traces au tableau qui ressemble à ceci :

Figure 5.6 Traces de la multiplication par 2 qui donne un nombre pair qui est encore doublé pour la multiplication par 4



À ce moment, Élise lance d'elle-même l'idée que tout nombre multiplié par n'importe quel nombre pair donne un nombre pair :

> Élise : Tout nombre que l'on veut multiplier par un nombre pair donne toujours un nombre pair.

> CE : N'importe quel nombre que je prends, si je le multiplie par 2, j'obtiens un nombre pair.

Élise : En fait, ce n'est pas obligé d'être multiplié par 2, mais aussi 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 ou n'importe quel nombre pair. Ça donnera toujours un nombre pair.

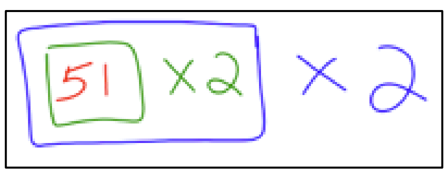
Le CE propose de rester centré sur 2 et 4, car ils devraient aussi justifier pour les autres cas. Il réexplique alors que s'il multiplie par 2 cela donne un nombre pair, et que dans le cas de 4, il faudrait multiplier par 2 une autre fois, ce qui donnerait encore un nombre pair.

Un élève ajoute que pour les quarante-cinq exemples qu'il a faits, et même dans les multiplications à deux chiffres, cela fonctionne toujours, c'est-à-dire que de multiplier un nombre par 4 donne un nombre pair. Le CE propose alors que si, par exemple, il était rendu à 51 dans ses multiplications, alors il aurait :

CE : 51 x 2 = 102 et 102 x 2 = 204. Donc, j'ai un nombre pair 102, et je le double.

Au tableau, le nombre 37 est modifié pour le nombre 51 :

Figure 5.7 Traces de l'exemple du nombre 51 qui est multiplié par 2 deux fois



La fin du cours approche, le CE demande aux élèves s'ils peuvent maintenant dire, rapidement, si 589 est divisible par 4. Plusieurs élèves disent que le nombre est divisible par 4. Un élève rétorque que comme 589 n'est pas un nombre pair, il n'est pas divisible par 4. Le CE reprend en disant que déjà, comme il est impair, ils viennent de dire que tout nombre multiplié par 4 va donner un nombre pair. Ils viennent donc d'éliminer la moitié des nombres entiers qui existent. La cloche sonne ce qui met fin à cette séance. Une analyse de cette séance, sous l'angle de l'évolution de la tâche, est offerte à la section suivante.

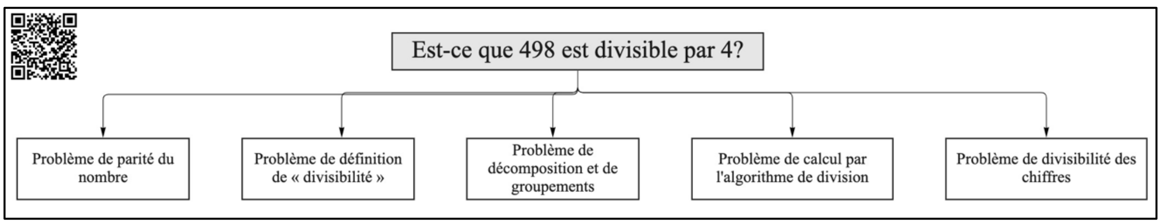
5.1.2 L'ontogénie de la tâche de divisibilité par 4

La vignette précédente présente l'histoire de la résolution collective de la tâche de divisibilité par 4 dans cette classe de 6e année. À travers sa résolution, la tâche s'est tranquillement transformée, a évolué, à partir des différents contextes offerts par la collectivité et qui se sont imposés au fur et à mesure que s'est déroulée l'activité. L'analyse de la séance révèle qu'une *évolution par stabilisation phénotypique* et *une évolution par diversification* se sont produites. En rappel, une *évolution par stabilisation phénotypique* d'une tâche mathématique est une *évolution lente* dans laquelle la tâche initiale se transforme à travers les étapes de pose|résolution de problèmes déployées en vue de la résoudre. Les étapes de pose|résolution de problèmes, tel qu'explicité au Chapitre 2, peuvent être vues comme des stratégies mises en avant pour résoudre la tâche initiale. Au plan collectif, ces stratégies sont expliquées, justifiées, commentées, validées, invalidées, raffinées, etc. ce qui permet de poursuivre l'évolution lente de la tâche initiale amorcée par la stratégie proposée. Également, une *évolution par diversification* d'une tâche initiale est une *évolution marquée* à travers laquelle un changement de l'objet de résolution est observé. Dans une *diversification*, l'objet de résolution n'est plus la tâche initiale, mais une sous-tâche qui a émergé et sur laquelle la collectivité se penche à résoudre pendant un certain temps. La *diversification* survient pendant l'activité de pose|résolution de problèmes déployée pour résoudre la tâche initiale. Toutefois, la collectivité ne se penche plus de manière directe sur la tâche initiale, mais plutôt sur la sous-tâche mathématique qui devient le nouvel objet de résolution pendant un temps donné. Ainsi, dans une *diversification*, il y a un déplacement du focus de résolution qui passe de la résolution de la tâche initiale à la résolution de la sous-tâche qui a émergé en cours d'activité. L'analyse qui suit reprend également la distinction faite, au Chapitre 1, entre une *tâche* et un *problème*. En rappel, une *tâche* réfère à un énoncé mathématique alors que le *problème* fait appel au fait que l'énoncé mathématique proposé, la tâche, fait émerger un problème chez ceux qui s'engagent dans sa résolution. Ces clarifications conceptuelles étant rappelées, les lignes qui suivent racontent l'histoire de l'évolution, soit l'ontogénie, de la tâche de divisibilité par 4 dans cette classe de 6e année[11].

[11] Il est à noter que l'ontogénie de la tâche n'est pas présentée de manière entièrement chronologique, mais plutôt en considérant les types d'évolution qui ont pris place.

Face à la tâche routinière initiale « Est-ce que 498 est divisible par 4? », la collectivité a déployé cinq stratégies en vue de la résoudre. À travers ces stratégies, différents problèmes mathématiques sont posés par la collectivité dans le but de résoudre cette tâche routinière initiale. En effet, comme discuté au Chapitre 2, ces stratégies témoignent d'un processus de pose et, à la fois, de résolution de problèmes mathématiques, soit la pose|résolution de problèmes (Proulx et Maheux, 2017). La Figure 5.8 suivante illustre les problèmes mathématiques mis en avant par la collectivité par le biais des cinq stratégies proposées pour résoudre la tâche routinière initiale[12]. Ces problèmes *transforment lentement* la tâche routinière initiale, représentant *une évolution par stabilisation phénotypique*.

Figure 5.8 Évolution par stabilisation phénotypique de la tâche de divisibilité par 4



Comme l'illustre la Figure 5.8, à travers ces stratégies, la tâche routinière initiale s'est transformée en un problème de :

- parité du nombre : lorsque la collectivité a mis en avant l'idée que tous les nombres pairs se divisent par des nombres pairs;

- définition du terme « divisibilité » : lorsque la collectivité a affirmé que ce ne sont pas tous les nombres qui donnent un nombre entier comme réponse lorsque divisés;

- de décomposition du nombre et de groupements : lorsque la collectivité a proposé de casser le nombre 498 en plusieurs morceaux pour vérifier si chaque morceau pouvait être groupé en paquets de 4;

[12] Le code QR suivant permet de visualiser, dans un format agrandi, les schémas d'analyse de chacune des sept séances ayant fait l'objet d'une analyse détaillée :

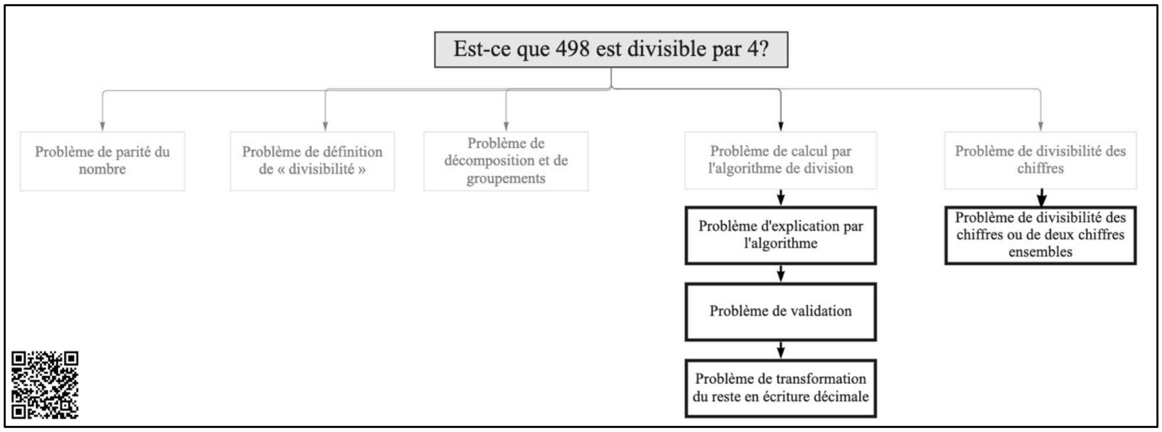
- de calcul par l'algorithme de division : lorsque la collectivité a proposé de diviser directement le nombre 498 par 4 pour établir sa divisibilité;

- de divisibilité des chiffres : lorsque la collectivité a proposé de vérifier si chaque chiffre composant le nombre 498 est divisible par 4.

Ces différents problèmes sont des variations de la tâche initiale, mais permettent de répondre directement à la tâche routinière initiale représentant une *évolution par stabilisation phénotypique*. En effet, différentes étapes de pose|résolution de problèmes sont déployées pour résoudre la tâche routinière initiale et amènent cette tâche à se transformer tout en offrant des entrées variées pour la résoudre. Toutefois, aucun changement important dans sa nature n'est survenu puisque la collectivité est demeurée centrée sur la résolution de cette tâche routinière dite initiale; ces différents problèmes étant à la fois mis en avant comme des stratégies de résolution de cette tâche routinière initiale.

Les deux stratégies de calcul par l'algorithme de division et de divisibilité des chiffres ont mené la collectivité à faire émerger de nouveaux problèmes mathématiques permettant la poursuite de l'*évolution par stabilisation phénotypique* amorcée par ces deux stratégies. La Figure 5.9 suivante met en évidence les nouveaux problèmes mis en avant par la collectivité à la suite du déploiement de ces deux stratégies dans la sphère collective. Ces nouveaux problèmes continuent la *transformation lente* de la tâche routinière initiale amorcée par ces deux stratégies, représentant *une évolution par stabilisation phénotypique*.

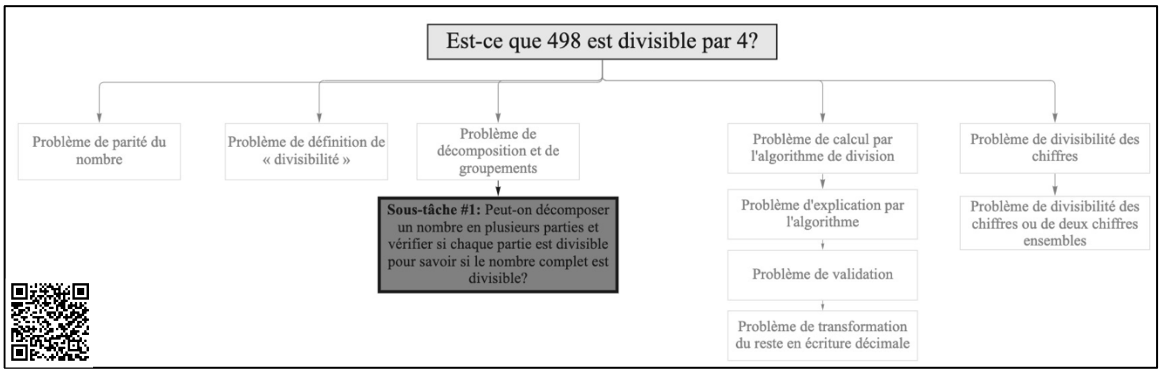
Figure 5.9 Poursuite de l'évolution par stabilisation phénotypique de la tâche de divisibilité par 4



D'une part, tel que l'illustre la Figure 5.9, la stratégie de calcul par l'algorithme de division a laissé place à un problème de distinction entre les termes « divisible » et « division » lorsque la collectivité affirme que comme le nombre n'est pas entier, il n'est pas divisible et qu'une explication sur ces deux termes est donnée. Ensuite, un problème de validation a pris place alors qu'une autre réponse, également obtenue à partir de l'algorithme de division, a été proposée. La collectivité a par la suite mis en avant un problème de transformation du reste d'une division en un nombre décimal lorsqu'elle a expliqué la manière de procéder avec l'algorithme de division quand un reste est présent, et que la calculatrice a été proposée pour interpréter le reste. D'autre part, la stratégie de divisibilité des chiffres du nombre laisse place à un problème de divisibilité des chiffres ou du nombre formé par les deux chiffres dans les positions des dizaines et des unités lorsqu'une modification de la stratégie est proposée pour également vérifier la divisibilité du nombre formé par les deux chiffres dans les positions des dizaines et des unités plutôt qu'uniquement chaque chiffre seul. En effet, un raffinement de la stratégie est mis en avant par une proposition de la modifier pour inclure la divisibilité du 98 de 498, plutôt que du 9 et du 8 séparément; le 4 de 498 étant divisible par 4. Ces nouveaux problèmes permettent de poursuivre l'*évolution par stabilisation phénotypique*, car ils amènent les stratégies de calcul par l'algorithme de division et de divisibilité des chiffres à se raffiner, à se développer, alors que la collectivité met en avant d'autres étapes de pose|résolution de problèmes pour les faire avancer. La collectivité demeure centrée sur la résolution de la tâche routinière initiale de la divisibilité de 498 par 4 et un raffinement des deux stratégies est observé, d'où la poursuite de l'*évolution par stabilisation phénotypique*.

Toutefois, à partir de la stratégie de décomposition du nombre et de groupements, une diversification de la tâche initiale est observée. Pendant un court moment, la résolution de la tâche routinière initiale a bifurqué pour laisser place à la résolution d'une première sous-tâche mathématique : « Peut-on décomposer un nombre en plusieurs parties et vérifier si chaque partie est divisible pour savoir si le nombre au complet est divisible? ». La Figure 5.10 suivante illustre l'évolution par diversification de la tâche routinière initiale.

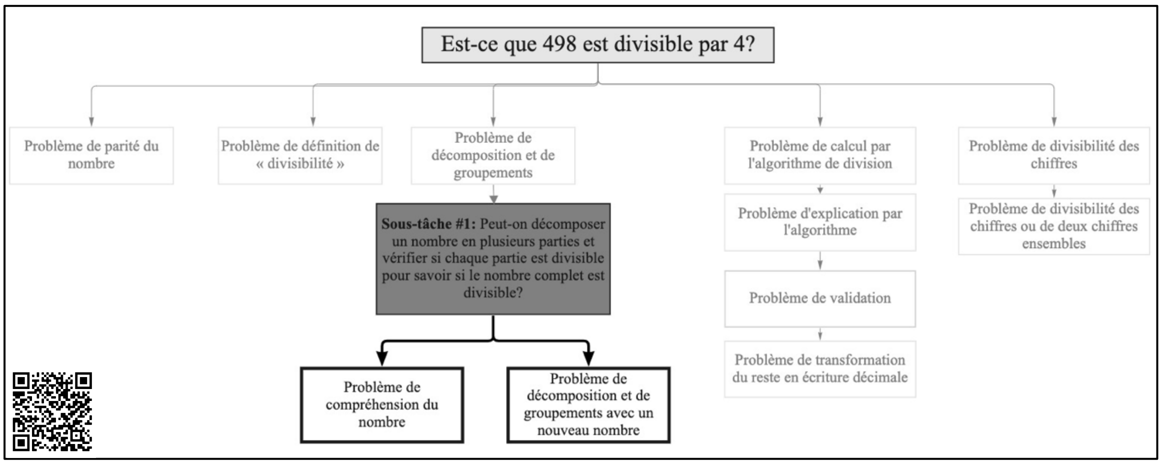
Figure 5.10 Évolution par diversification de la tâche de divisibilité par 4



Cette première sous-tâche mathématique est issue de l'activité de pose|résolution de problèmes déployée par la collectivité lors de la mise en route de la stratégie de décomposition et de groupement dans la sphère collective. Cette première sous-tâche offre une *variation marquée* de la tâche routinière initiale, car sa naissance engendre un déplacement du focus de résolution de la collectivité. La collectivité ne se penche plus directement sur la résolution de la tâche routinière initiale, mais plutôt sur la résolution de la stratégie en elle-même. En effet, c'est la validité de la stratégie de décomposition et de groupements, et ce, dans un contexte général, qui est l'objet de résolution de la collectivité à ce moment. À travers cette sous-tâche, la collectivité est appelée à expliquer, justifier et valider cette stratégie de décomposition et de groupements de manière générale. La tâche à résoudre change ainsi de nature à travers les inter-actions, si bien que la collectivité ne se penche plus directement sur la résolution de la divisibilité de 498 par 4, mais plutôt à savoir si de décomposer le nombre et d'effectuer des groupements est une stratégie qui fonctionne dans un contexte de divisibilité. C'est en ce sens qu'une *évolution par diversification* de la tâche routinière initiale est observée.

Alors que la collectivité tente de résoudre cette première sous-tâche mathématique, deux stratégies sont déployées. Ces stratégies permettent de mettre en avant deux problèmes mathématiques qui représentent une *évolution par stabilisation phénotypique* de la sous-tâche. La Figure 5.11 suivante illustre cette évolution par stabilisation phénotypique de la première sous-tâche mathématique.

Figure 5.11 Évolution par stabilisation phénotypique de la première sous-tâche mathématique



Comme la Figure 5.11 le met en lumière, deux problèmes sont déployés par la collectivité en vue de résoudre la première sous-tâche :

- un problème de compréhension du nombre : lorsque la collectivité soutient que la décomposition d'un nombre aide à mieux comprendre le nombre; et

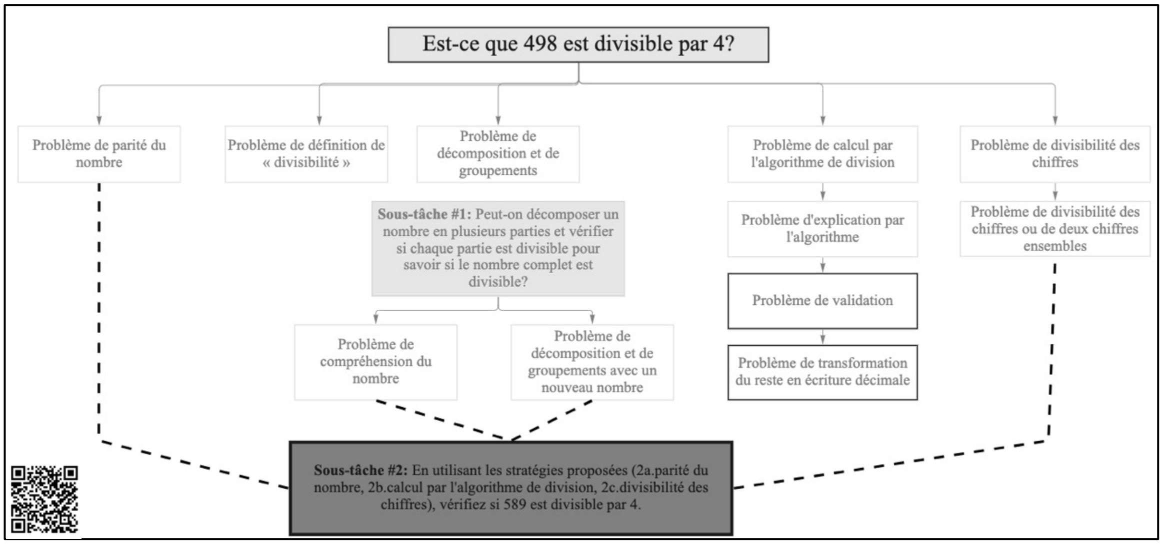
- un problème d'exemplification : lorsqu'un nouvel exemple à partir duquel réfléchir, 589, est proposé, et la stratégie de décomposition et de groupements est reprise à partir de cet exemple.

Le problème de compréhension du nombre, mis en avant en tant que stratégie pour répondre à cette première sous-tâche mathématique, s'est par la suite éteint puisque rien n'est fait par la collectivité en réaction à celui-ci. Le problème d'exemplification permet d'illustrer la stratégie de décomposition et de groupement à partir du travail sur un nouveau nombre. Ce problème d'exemplification émerge alors que peu d'explications et de justifications mathématiques autres, permettant de faire avancer la résolution de la sous-tâche, sont données. Ces deux problèmes de compréhension du nombre et d'exemplification sont déployés en tant que stratégie pour résoudre la première sous-tâche mathématique, c'est-à-dire qu'ils permettent d'avancer dans la résolution de la première sous-tâche. La collectivité est centrée sur la résolution de la première sous-tâche mathématique qui se transforme lentement par le déploiement de ces problèmes de compréhension du nombre et d'exemplification. C'est en ce sens qu'une *évolution par stabilisation phénotypique* de la première sous-tâche est observée.

Les cinq problèmes de parité du nombre, de définition du terme « divisibilité », de décomposition et de groupements, de calcul par l'algorithme de division et de divisibilité des chiffres (voir Figure 5.6) ont permis à la tâche routinière initiale de divisibilité par 4 d'*évoluer par stabilisation phénotypique* à travers ses inter-actions avec la collectivité. Le problème de calcul par l'algorithme de division et celui de divisibilité des chiffres ont poursuivi leur *évolution par stabilisation phénotypique,* c'est-à-dire que d'autres problèmes permettant de raffiner et de faire avancer les stratégies d'algorithme de division et de divisibilité des chiffres ont été déployés. Le problème de décomposition et de groupement a engendré une *évolution par diversification* de la tâche routinière initiale. L'autre problème de définition de « divisibilité » s'est, de son côté, éteint, et donc n'est pas repris ou travaillé dans la suite de la séance. Finalement, le cinquième problème, sur la parité du nombre, a stagné pendant un moment, mais a été réactivé, avec le problème de décomposition et de groupements et celui de divisibilité des chiffres, dans le travail d'une seconde sous-tâche mathématique qui est formulée à partir de ces stratégies.

Dans cette seconde sous-tâche mathématique, la collectivité est appelée à reprendre les stratégies de parité du nombre, de décomposition et de groupements ainsi que de divisibilité des chiffres à partir du nombre 589. Cette seconde sous-tâche mathématique correspond à une *évolution par diversification* de la tâche routinière initiale. La Figure 5.12 illustre la formation de cette seconde sous-tâche mathématique.

Figure 5.12 Seconde diversification de la tâche routinière de divisibilité par 4

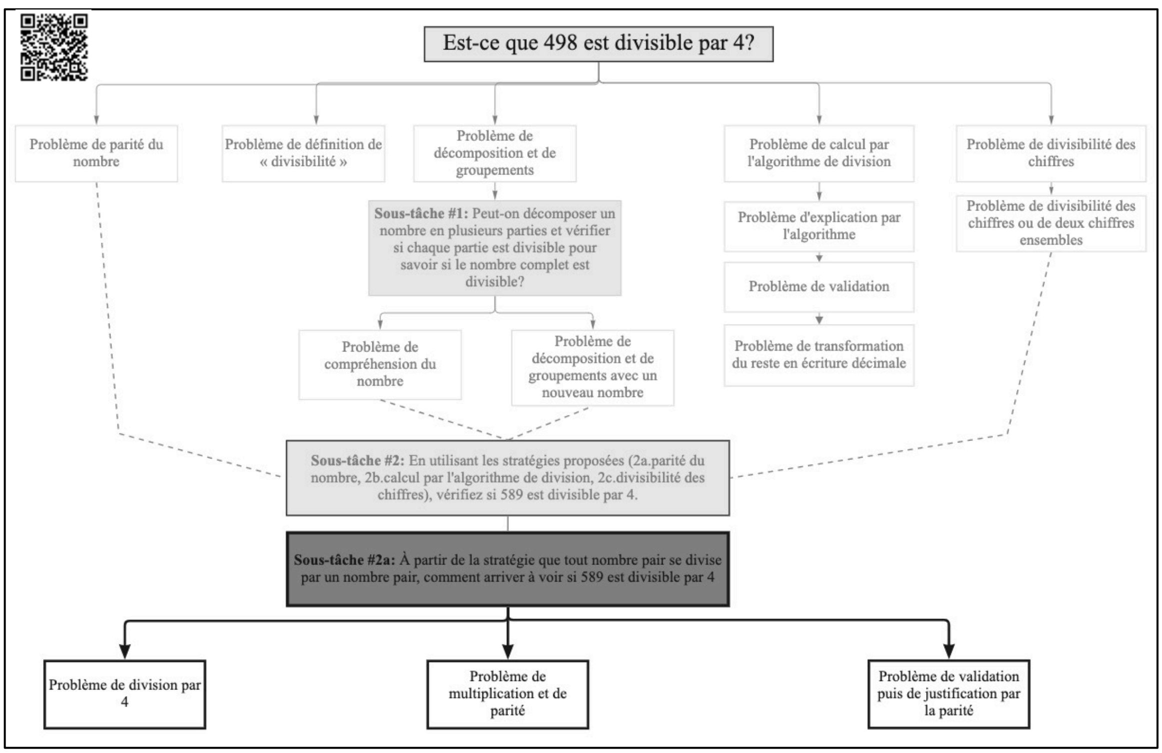


Cette seconde diversification de la tâche routinière initiale semble provenir du fait que les différents problèmes mathématiques déployés par la collectivité en vue de résoudre la tâche routinière initiale de divisibilité du nombre 498 par 4 n’étaient pas, à ce moment, pleinement solutionnés. En effet, ces problèmes de parité du nombre, de décomposition et de groupements et de divisibilité des chiffres n’ont été que peu expliqués, justifiés et validés collectivement, et ont plutôt été abordés, présentés ou partagés. Ceux-ci demeurent donc encore ouverts, n’étant pas résolus. Cette seconde sous-tâche mathématique est une *évolution par diversification*, puisqu’un changement dans la nature de l’objet de résolution est remarqué. En effet, la collectivité ne se centre plus directement sur la résolution de la divisibilité de 498 par 4, mais tente plutôt de solutionner les trois sous-tâches (2a, 2b, et 2c de la Figure 5.12) de parité du nombre, de décomposition et groupements et de divisibilité des chiffres positionnels à partir du nombre 589. Le but est de comprendre, de façon générale, comment fonctionnent ces stratégies, ces problèmes posés, si bien qu’elles deviennent le nouveau centre d’attention de la collectivité, les nouvelles (sous-)tâches à résoudre (ou comprendre). Cette seconde sous-tâche mathématique (en trois volets) provient de l’activité de pose|résolution de problèmes qui prend place, mais détourne pendant un certain temps le focus de résolution de la collectivité qui ne tente plus de résoudre directement la tâche routinière initiale, mais plutôt les sous-tâches émergeant de l’explication, la justification et la validation de ces trois stratégies; d’où la diversification de la tâche routinière initiale.

Cette seconde sous-tâche mathématique est d’abord travaillée de façon individuelle ou en petites équipes. Lors du retour en plénière, la sous-tâche relative à la stratégie de parité du nombre est abordée. Ainsi, la sous-tâche mathématique (2a): « À partir de la stratégie que tout nombre pair se divise par un nombre pair, comment arriver à voir si 589 est divisible par 4? » fait l’objet d’une résolution collective.

Dans le travail collectif de résolution de la sous-tâche mathématique (2a), trois stratégies sont proposées en vue de la résoudre. Ces stratégies permettent de mettre en avant trois problèmes mathématiques qui représentent une *évolution par stabilisation phénotypique* de la sous-tâche 2a. La Figure 5.13 suivante illustre l’*évolution par stabilisation phénotypique* de la seconde (2a) sous-tâche mathématique à travers le déploiement de ces trois problèmes.

Figure 5.13 Évolution par stabilisation phénotypique de la seconde sous-tâche mathématique



Comme le montre la Figure 5.13 ci-dessus, la sous-tâche 2a se transforme, évolue lentement à travers ses inter-actions avec la collectivité, en prenant la forme de :

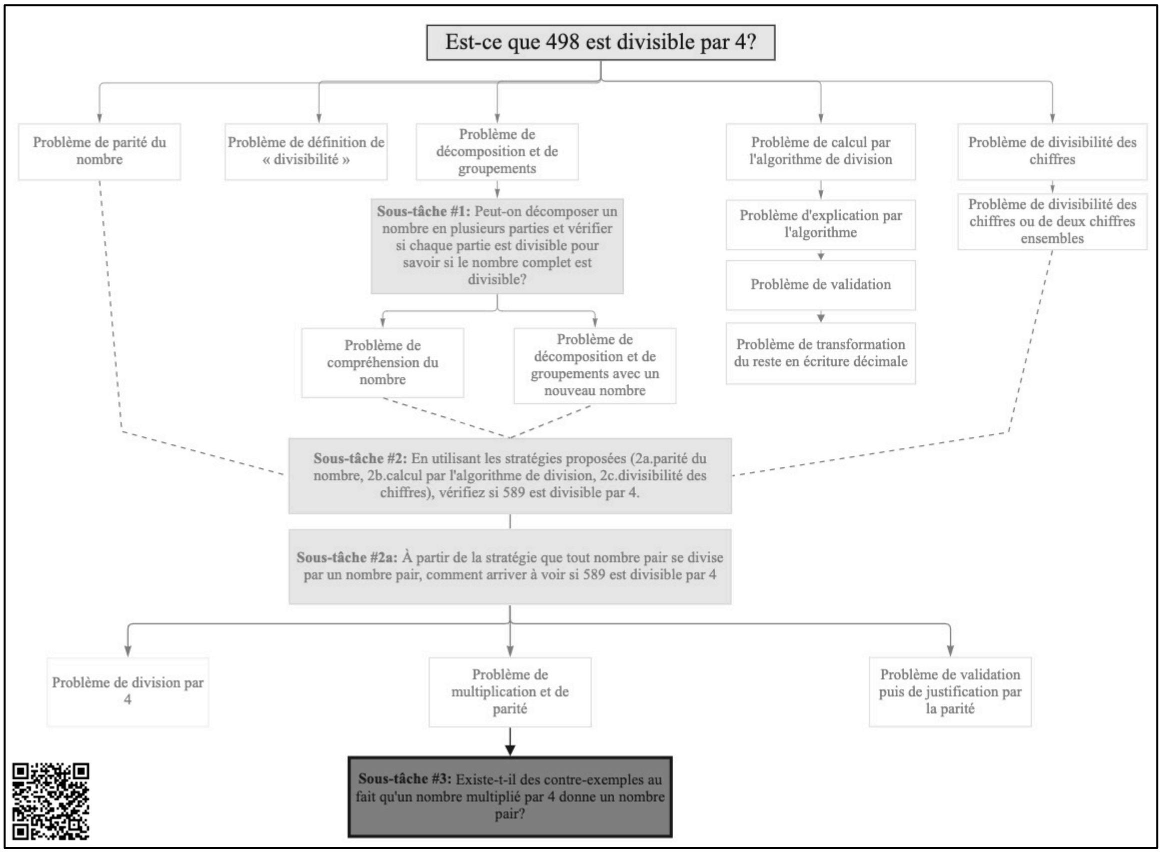
- un problème de division par 4 : lorsque la collectivité propose que 589 se divise par 4, mais qu'il y a un reste;

- un problème de multiplication par 4 et de parité : lorsque la collectivité explique qu'un nombre multiplié par 4 donne un nombre pair; et

- un problème de justification par la parité : lorsque la collectivité propose que 589 n'est pas divisible par 4, car il s'agit d'un nombre impair.

Ces trois problèmes de division par 4, de multiplication par 4 et de parité et de justification par la parité représentent une *évolution par stabilisation phénotypique* de la seconde sous-tâche (*2a*), car ils sont déployés en tant que stratégies pour la résoudre. À travers ces stratégies, la collectivité demeure centrée directement sur la résolution de cette seconde sous-tâche mathématique (2a) et aucun changement dans la nature de l'objet de résolution est observé; d'où l'*évolution par stabilisation phénotypique*. Toutefois, le problème de multiplication par 4 et de parité amène la seconde sous-tâche (2a) à évoluer par *diversification*. En effet, ce problème de multiplication par 4 et de parité amène la collectivité à se pencher sur la vraisemblance de cette stratégie, soit à savoir s'il est vrai que tout nombre multiplié par 4 donne un nombre pair. La diversification de la seconde sous-tâche (2a) laisse ainsi place à la résolution d'une autre, une troisième, sous-tâche, soit : « Existe-t-il des contre-exemples au fait qu'un nombre multiplié par 4 donne un nombre pair? ». La Figure 5.14 suivante illustre l'*évolution par diversification* de la seconde (2a) sous-tâche mathématique à travers la formation de cette nouvelle, cette troisième, sous-tâche mathématique sur laquelle la collectivité se penche pendant un moment.

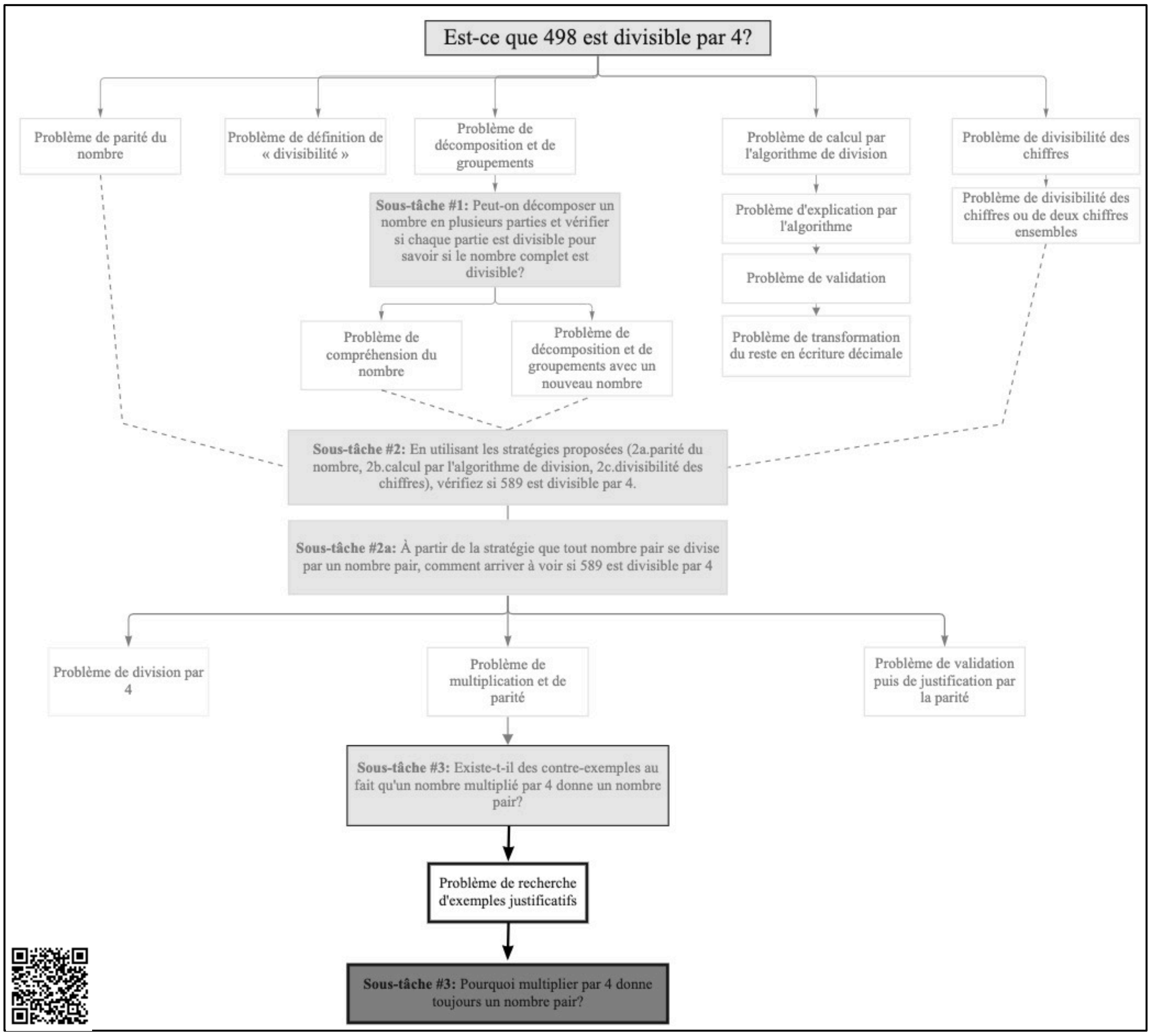
Figure 5.14 Évolution par diversification de la seconde sous-tâche mathématique



Cette troisième sous-tâche de recherche de contre-exemples au fait qu'un nombre multiplié par 4 donne un nombre pair constitue une *diversification* de la seconde sous-tâche mathématique (*2a*) puisque la collectivité se centre sur sa résolution pendant un certain temps. La nature de l'objet de résolution n'est plus directement la seconde sous-tâche mathématique (*2a*), mais plutôt la résolution de la stratégie de multiplication par 4 et de parité, dans un cadre plus général.

À son tour, cette troisième sous-tâche mathématique de recherche de contre-exemples au fait qu'un nombre multiplié par 4 donne un nombre pair *évolue par stabilisation phénotypique* alors que la collectivité tente de la résoudre. À travers l'activité collective qui prend place en classe, cette troisième sous-tâche est reprise, réexpliquée, ou encore précisée par la collectivité, et devient : « Pourquoi multiplier par 4 donne toujours un nombre pair? ». La Figure 5.15 suivante illustre l'*évolution par stabilisation phénotypique* de cette troisième ainsi que la reformulation qui est faite.

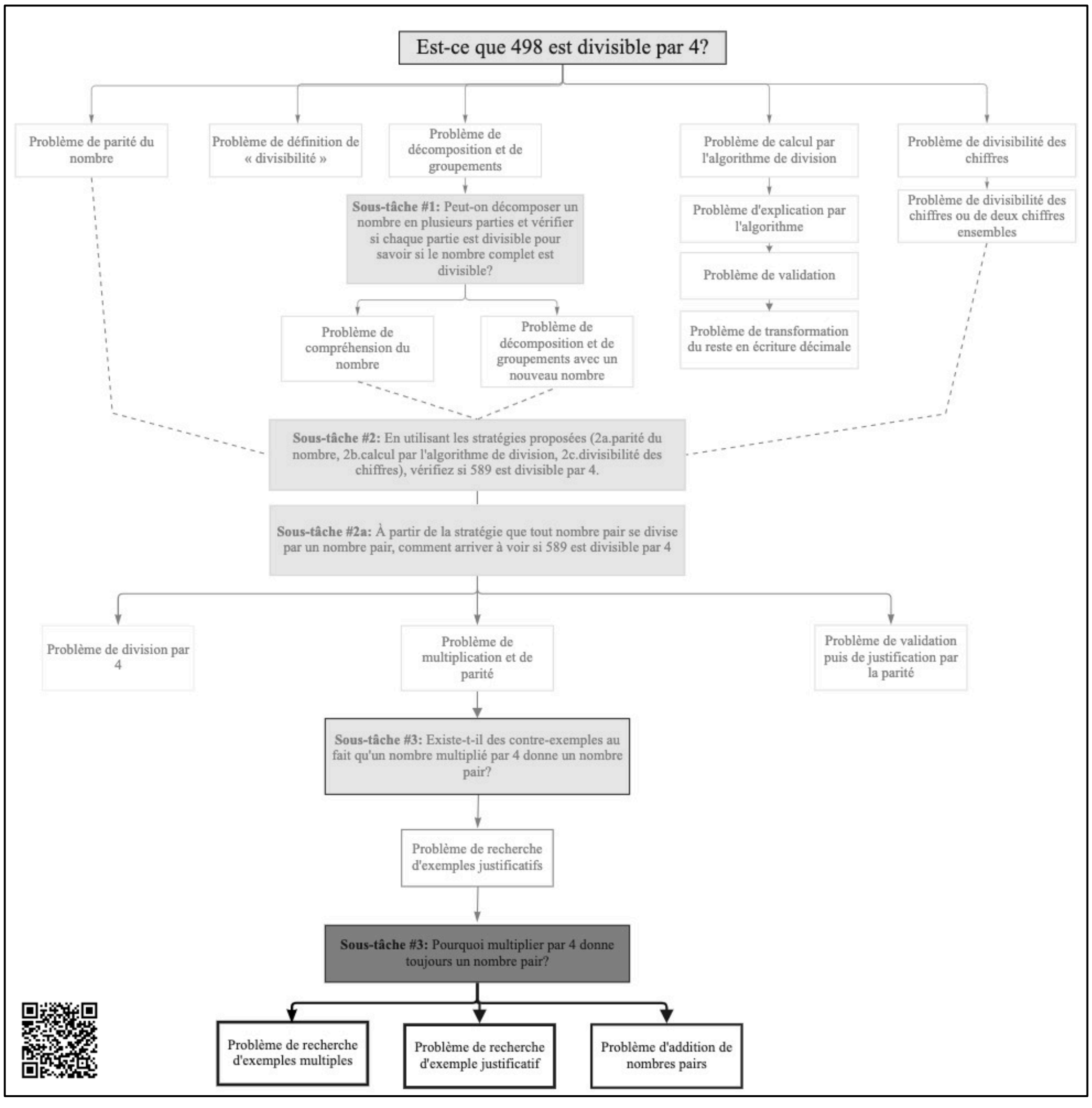
Figure 5.15 Évolution par stabilisation phénotypique de la troisième sous-tâche et reformulation de la sous-tâche



Comme la figure précédente le montre, une stratégie de recherche d'exemples justificatifs est déployée afin de résoudre la troisième sous-tâche; la collectivité proposant plusieurs exemples pour tenter de justifier la parité du produit de la multiplication par 4. Cette stratégie traduit la pose d'un problème d'exemples justificatifs qui engendre une transformation lente de cette troisième sous-tâche. Par ce problème d'exemples justificatifs, cette stratégie, la collectivité est centrée sur la résolution de la troisième sous-tâche; d'où l'*évolution par stabilisation phénotypique.*

Cette troisième sous-tâche visant à comprendre pourquoi un nombre multiplié par 4 donne un nombre pair est d'abord travaillée de façon individuelle et en petites équipes. Lors du retour en plénière, trois problèmes sont déployés en vue de la résoudre. Ces problèmes permettent à cette sous-tâche d'*évoluer par stabilisation phénotypique*. La Figure 5.16 illustre cette évolution de la troisième sous-tâche.

Figure 5.16 Évolution par stabilisation phénotypique de la troisième sous-tâche mathématique



Comme la Figure 5.16 le montre, la troisième sous-tâche, soit celle visant à expliquer pourquoi un nombre multiplié par 4 donne un nombre pair, a fait émerger :

- un problème de recherche d'exemples multiples : lorsque la collectivité mentionne avoir testé 45 exemples et que tous donnaient un nombre pair;

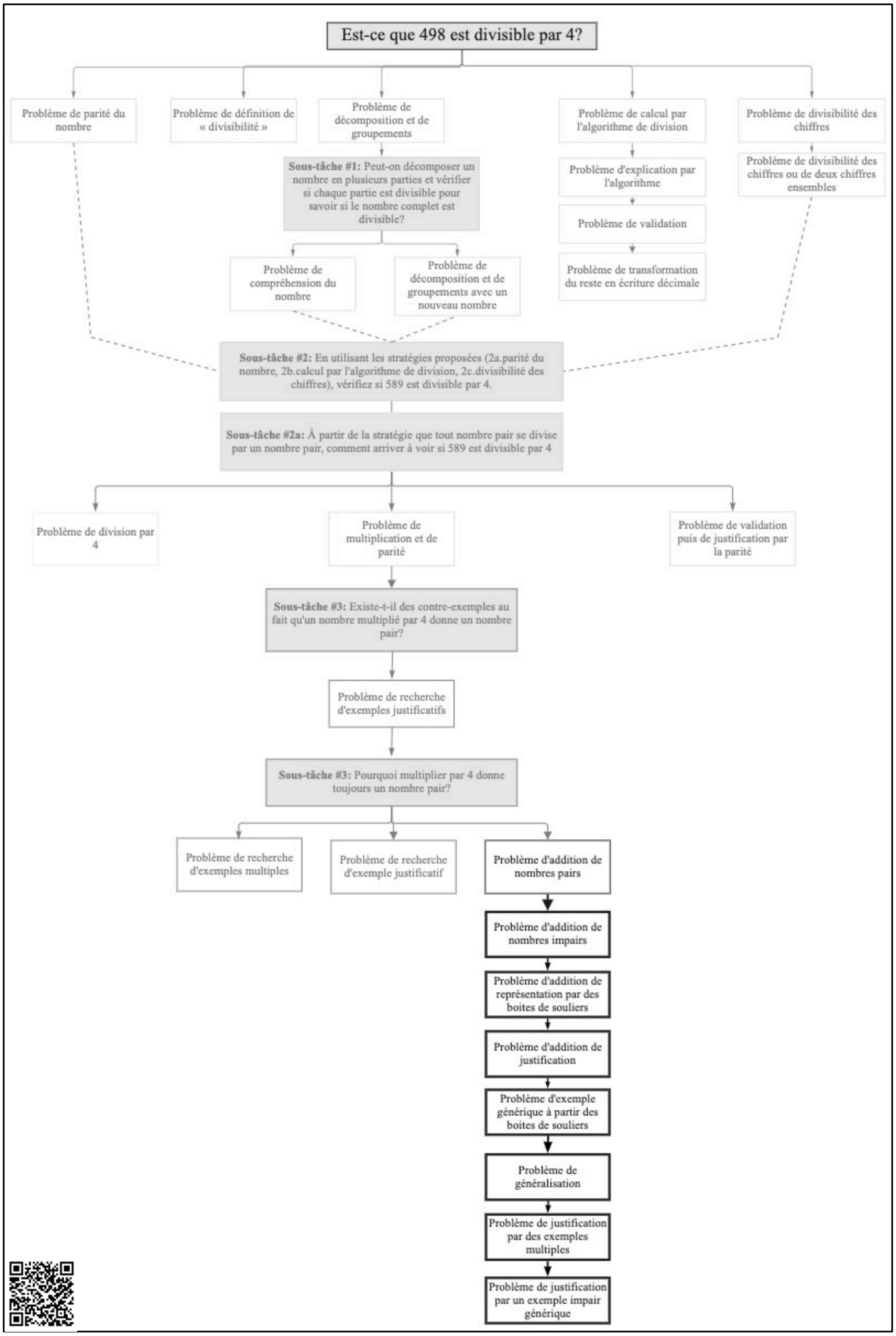
- un problème de recherche d'un exemple justificatif : lorsque la collectivité propose un exemple d'un nombre rationnel puis un exemple d'un nombre entier pour justifier que la multiplication par 4 donne toujours un nombre pair; et

- un problème d'addition de nombres pairs : lorsque la collectivité explique qu'un nombre pair additionné d'un autre nombre pair donne toujours un nombre pair.

Ces problèmes, mis en avant en tant que stratégies pour résoudre cette troisième sous-tâche, permettent à cette dernière d'évoluer lentement. Ces problèmes ne modifient pas la nature de l'objet de résolution puisqu'à travers ceux-ci la collectivité demeure centrée sur la résolution de la troisième sous-tâche.

La stabilisation phénotypique de cette troisième sous-tâche se poursuit à travers la stratégie d'addition de nombres pairs qui se développe et se raffine en générant six nouveaux problèmes. La Figure 5.17 illustre la poursuite de l'*évolution par stabilisation phénotypique* de cette troisième sous-tâche.

Figure 5.17 Poursuite de l'évolution par stabilisation phénotypique de la troisième sous-tâche par le biais de la stratégie d'addition de nombres pairs



Comme la figure précédente le montre, le problème d'addition de nombre pair, cette stratégie déployée pour résoudre la troisième sous-tâche d'expliquer pourquoi le produit d'une multiplication par 4 donne un nombre pair, a fait émerger six nouveaux problèmes :

- un problème d'addition de nombres impairs : lorsque la collectivité cherche à savoir si l'addition de quatre nombres impairs donne également un résultat pair;

- un problème de représentation par des boites de souliers : lorsque la collectivité propose qu'il y a toujours deux paires de souliers dans une boite et que par conséquent, il ne pourrait en résulter un nombre impair de souliers;

- un problème de justification: lorsque la collectivité justifie le lien entre l'addition et la multiplication à partir de deux exemples;

- un problème d'exemple générique à partir des boites de souliers : lorsque la collectivité exemplifie la représentation des boites de souliers à partir du nombre 37;

- un problème de généralisation : lorsque la collectivité propose que la multiplication par n'importe quel nombre pair donne un nombre pair;

- un problème de justification par des exemples multiples : lorsque la collectivité affirme avoir essayé sur plusieurs exemples et que tous étaient pairs;

- un problème de justification par un exemple impair générique : lorsque la collectivité utilise le nombre impair 51 pour justifier, voire valider, que la multiplication par 4 donne toujours un nombre pair.

Bien que la collectivité se soit penchée pendant un bon moment sur ce problème, cette stratégie, d'addition de nombres pairs, ce dernier ne mène pas à une évolution par diversification. Les différents problèmes qui ont émergé sont issus d'un travail collectif d'explications et de justifications de cette stratégie d'addition de nombres pairs. Il n'y a pas de nouvel objet mathématique faisant détourner la résolution de la troisième sous-tâche et sur lequel la collectivité se pencherait. Si c'était le cas, une diversification de la troisième sous-tâche aurait vu le jour, mais comme le travail collectif qui est fait permet d'enrichir, de mieux comprendre ou encore de faire avancer la stratégie de résolution proposée, elle est de l'ordre d'une *évolution par stabilisation phénotypique*.

L'ontogénie de la tâche de divisibilité par 4 dans cette classe de 6^{e} année prend fin puisque la cloche annonçant la fin de la séance de classe sonne. L'évolution de cette tâche de divisibilité par 4 aurait toutefois pu se poursuivre. En effet, dans la seconde sous-tâche mathématique, la collectivité est amenée à travailler, individuellement ou en petits groupes, les trois stratégies de parité du nombre, de décomposition et groupements et de divisibilité des chiffres du nombre. Lors du retour en plénière, un seul volet (2a) de la sous-tâche est abordé, soit la stratégie voulant que tout nombre pair se divise par un nombre pair. La collectivité ayant établi une condition essentielle de la divisibilité par 4, mais non suffisante, l'exploitation des stratégies aurait pu se poursuivre. Il est possible de penser que si la cloche n'avait pas sonné, le travail collectif aurait pu continuer autour des autres volets de la seconde sous-tâche, soit celui de décomposition et groupements (2b) et celui de divisibilité des chiffres du nombre (2c). En ce sens, la tâche initiale aurait pu encore être exploitée collectivement et aurait pu poursuivre son évolution à travers ses inter-actions avec la collectivité. Ceci est d'ailleurs le cas pour la plupart des séances du *Teaching Experiment*. À partir de la tâche routinière initiale, donnée en tant que déclencheur de l'activité collective de pose|résolution de problèmes, plusieurs idées, propositions et stratégies mathématiques sur lesquelles réagir sont mises en avant, permettant à la sphère des possibilités de se développer à travers l'activité qui prend place. Les séances se terminent donc souvent abruptement, alors que beaucoup pourrait encore être fait, souvent au grand désarroi des élèves qui mentionnent souvent vouloir continuer. Une analyse de cette même séance sur la divisibilité par 4, sous l'angle des pratiques de mathématisation déployée en classe, est offerte à la section suivante.

5.1.3 Les pratiques de mathématisation et l'évolution de la tâche de divisibilité par 4

À travers la résolution collective de la tâche routinière de divisibilité par 4 dans cette classe de 6e année, différentes pratiques de mathématisation sont au cœur même de l'activité qui a pris place en classe. Celles-ci offrent une lunette pour comprendre les actions mathématiques mises en avant et, en ce sens, permettent d'expliquer la manière avec laquelle les pratiques de mathématisation ont participé à l'évolution par stabilisation phénotypique et par diversification de cette tâche routinière. Dans les pages qui suivent, un extrait de la séance est repris et discuté au regard des pratiques de mathématisation[13] déployées et de l'évolution de la tâche routinière initiale observée.

Le Tableau 5.1 suivant reprend le moment de la séance où la stratégie de décomposition du nombre et de groupements est proposée et que la première sous-tâche mathématique visant à établir la validité de cette stratégie, et à la justifier, voit le jour (p. 89-90 de la section 5.1.1). L'analyse en termes des pratiques de mathématisation est également effectuée. L'évolution par stabilisation phénotypique et par diversification entourant ce moment est par la suite discutée.

Tableau 5.1 Description du moment de la séance entourant la stratégie de décomposition du nombre et de groupements et analyse des pratiques de mathématisation

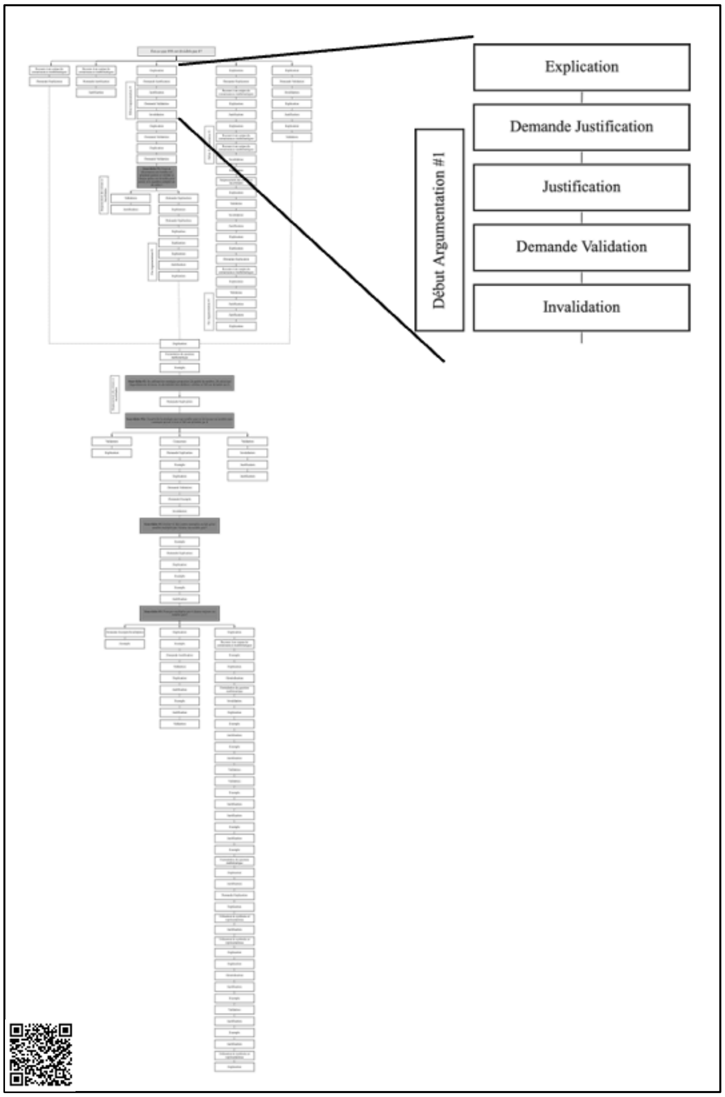
Description	**Analyse**
Un troisième élève, Carl, propose ensuite une stratégie s'appuyant sur la décomposition du nombre : Carl : J'ai divisé les centaines en premier par 4 pour avoir 400 ÷ 4 = 100. Ensuite, le 98, je l'ai divisé en paquets de 20 pour arriver à 80 en faisant 4 paquets. Il reste alors 18, mais ça ne se divise pas par 4. Une demande de justification de la divisibilité de 18 par 4 est à ce moment mise en avant par le CE. Une justification que 18 est divisible par 3 et donc pas par 4 est alors donnée par l'élève. Le CE demande alors aux élèves si la stratégie de décomposition, en elle-même, est valide : CE : A-t-on le droit de casser le nombre en plusieurs morceaux pour voir s'il est divisible ? Une invalidation est alors exprimée par un autre élève.	*Explication* Demande de justification *Justification* Demande de validation *Invalidation* et *Argumentation*
À ce moment, une nouvelle stratégie, soit de diviser directement le nombre par 4, est proposée par Sam, mais le CE propose de rester centrer sur la validation de la stratégie de décomposition du nombre qui est proposée.	*Explication* Demande de validation

[13] Les pratiques de mathématisation, étant des éléments d'analyse, sont identifiées en italique dans ce qui suit.

L'élève tente de poursuivre son explication, mais le CE réitère sa demande de validation.	
Sam affirme alors que c'est mélangeant de le casser, car il faut retenir plusieurs nombres. Le CE s'adresse alors à tous les élèves en demandant qui est d'accord que la stratégie proposée fonctionne. Seulement deux élèves lèvent la main. Un petit silence se fait sentir. Une élève, Jeanne explique alors : Jeanne : Oui [cela fonctionne], parce que ça aide à mieux comprendre le nombre pour voir s'il peut être divisé. Comme peu d'explications autres sont proposées, le CE offre un nouvel exemple à partir duquel réfléchir, 496. Il sollicite ensuite Carl à expliquer sa stratégie à partir de ce nouveau nombre. Carl : Heu, bien… J'aurais fait d'autres paquets. CE : Quel genre de paquets aurais-tu fait? Carl : Heu, j'aurais fait des paquets de deux, jusqu'à tant qu'il ne m'en reste plus. CE : Tu nous dis que si on avait eu 496, tu ferais encore quatre fois le 100, ensuite 20, 20, 20, 20 et là, tu aurais mis 2 à chacun. C'est ça? Carl : Heu, je vais mettre 4, parce que 4 x 4 = 16. CE : Ok. On aurait pu mettre 4, 4, 4, 4. Alors là, le 496 tu l'as cassé en 4 pour les 100, en 4 pour les 20 et en 4 pour les 4. En tout ça donne 124.	*Explication* Demande de validation *Surpassement des erreurs et incertitudes* *Validation* *Explication* Demande d'explication *Explication* Demande d'explication *Explication* *Explication* *Explication, Justification* *Explication*

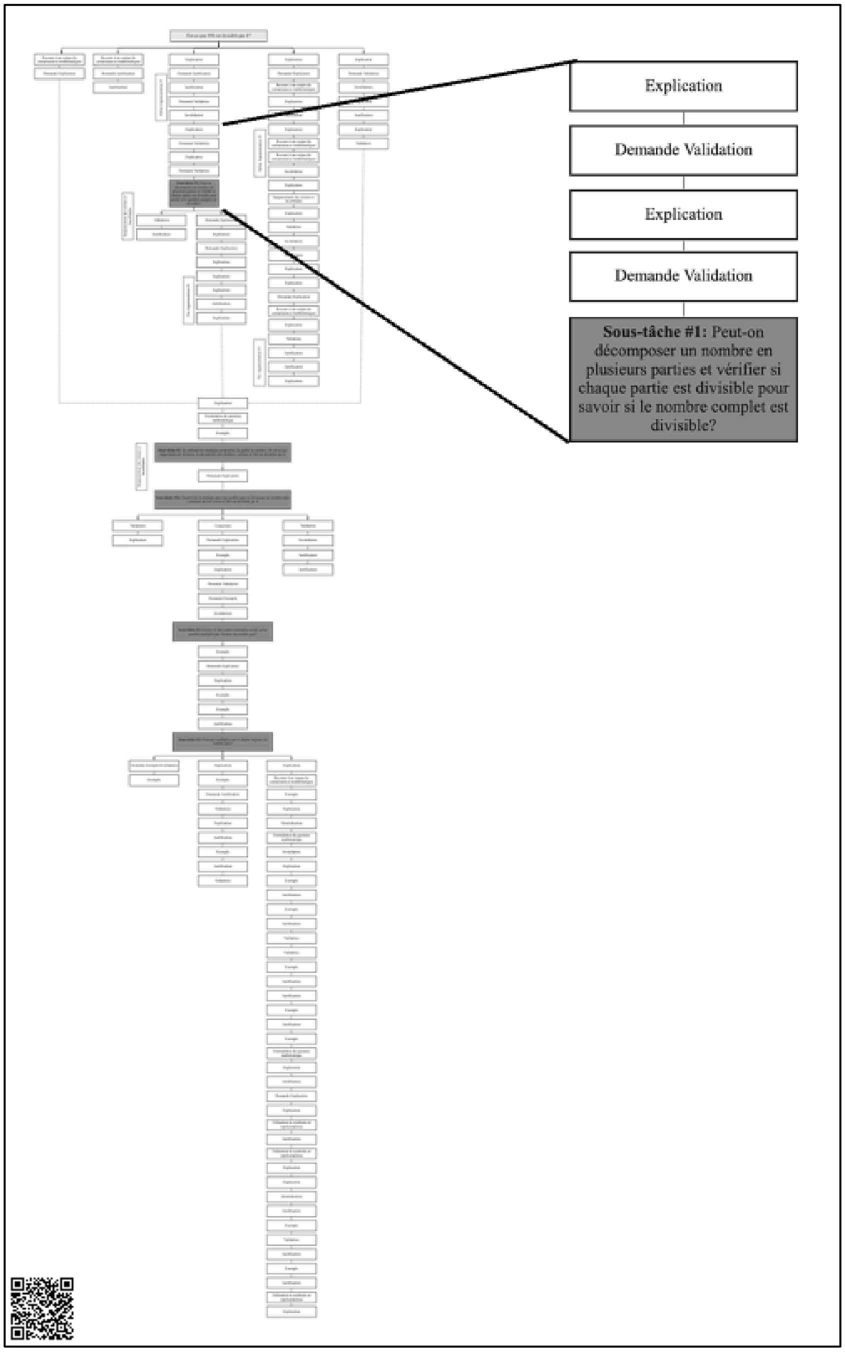
Dans cet extrait, une stratégie de décomposition du nombre et de groupements est proposée afin de résoudre la tâche routinière initiale de la divisibilité de 498 par 4. Une évolution par stabilisation phénotypique et par diversification est observée. D'abord, une stabilisation phénotypique est remarquée. En effet, en réponse à cette tâche routinière initiale, une stratégie de décomposer le nombre pour ensuite vérifier si chaque partie est divisible par 4 est expliquée. L'*explication* de cette stratégie est suivie par une demande de justification de l'affirmation faite que 18 ne se divise pas en 4. Une *justification* que 18 se divise en 3 et donc pas en 4 est alors énoncée. Une demande de validation de la stratégie en elle-même est à ce moment émise. Cette demande de validation mène à une *invalidation*, ce qui engendre une *argumentation* mathématique, car la validité de la stratégie est remise en question. Une nouvelle stratégie offrant de diviser le nombre directement par 4 est proposée, mais la demande de validation de la stratégie de décomposition est réitérée. Une *explication* à savoir qu'avec un grand nombre la stratégie serait difficile à utiliser est mise en avant. La demande de validation est à nouveau réitérée. Ces différentes pratiques de mathématisation permettent de mettre en route la stratégie de décomposition et de groupements et de la raffiner, la développer. À travers celles-ci, la tâche routinière initiale évolue lentement, par stabilisation phénotypique. La Figure 5.18 illustre cette évolution par stabilisation phénotypique qui prend place à partir de ces pratiques de mathématisation.

Figure 5.18 Les pratiques de mathématisation dans l'évolution par stabilisation phénotypique lors de la stratégie de décomposition et de groupements



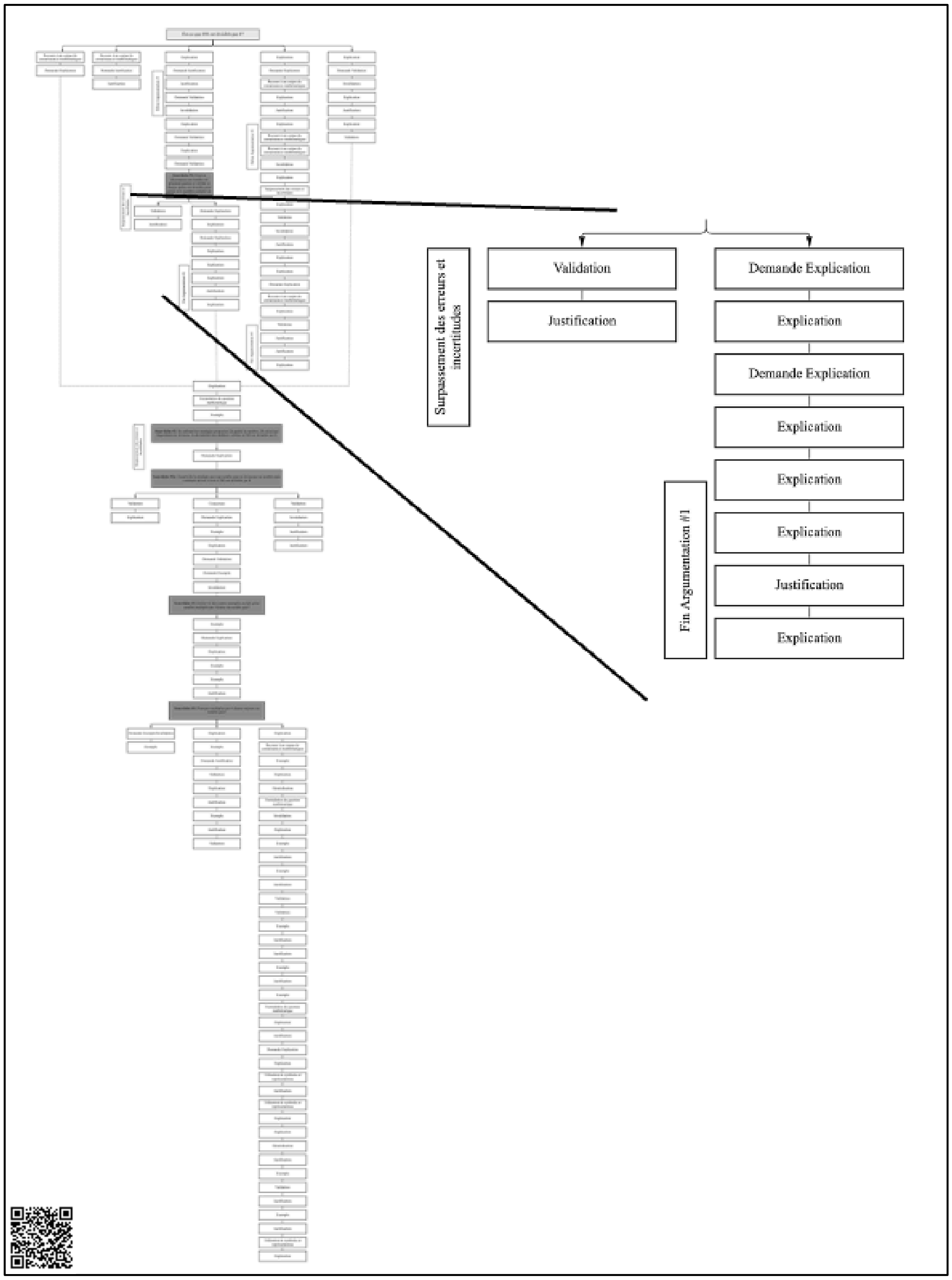
Ensuite, dans cet extrait, une évolution par diversification est observée. Certains croient que la stratégie fonctionne, et d'autres que non. Une incertitude collective relative à la validité de la stratégie proposée est présente. La centration sur la validation de la stratégie engendre alors une première diversification de la tâche routinière initiale. En effet, la collectivité tente de résoudre, dans un contexte général, la sous-tâche « Peut-on décomposer un nombre en plusieurs parties et vérifier si chaque partie est divisible pour savoir si le nombre au complet est divisible? ». Tel que discuté à la sous-section précédente, la collectivité n'est plus centrée directement sur la résolution de la tâche routinière initiale, mais plutôt sur la résolution d'une forme généralisée de la stratégie proposée. Cette première diversification provient de l'*explication* de la stratégie, mais aussi du *surpassement de l'incertitude* qui a émergé quant à sa validité. La Figure 5.19 illustre cette évolution par diversification mise en route par ces pratiques de mathématisation.

Figure 5.19 Les pratiques de mathématiques dans l'évolution par diversification lors de la stratégie de décomposition et de groupements



Finalement, dans la suite de l'extrait, cette sous-tâche, visant à valider et justifier la stratégie de décomposition du nombre, évolue par *stabilisation phénotypique.* En réponse à cette sous-tâche, une *validation* de la stratégie est mise en avant et est suivie par une *explication* à savoir que la décomposition d'un nombre aide à mieux le comprendre. Comme peu d'explications et de justifications autres ne sont données, un nouvel exemple à partir duquel réfléchir, 496, est proposé. Une demande d'explication, à partir de cet exemple, est faite. Cette demande d'explication est suivie par une *explication* de faire d'autres paquets ce qui mène à une nouvelle demande d'explication visant à clarifier les paquets qui seraient faits. Une *explication* précisant de faire des paquets de 2 jusqu'à ce qu'ils n'en restent plus est alors donnée et est suivie d'une autre *explication* reprenant le 496 au complet, en fonction de l'explication des paquets proposée. Une *explication* de faire des paquets de 4 plutôt que de 2 est faite et est suivie de la *justification* que 4 x 4 donne 16. Une dernière *justification* qui reprend le 496 au complet, selon les explications et justifications données, est proposée. Puisque personne ne conteste la validité de ce qui est avancé ni de la stratégie, l'argumentation se termine. La Figure 5.20 illustre l'évolution par stabilisation phénotypique de cette première sous-tâche qui survient à partir de ces pratiques de mathématisation.

Figure 5.20 Les pratiques de mathématisation et l'évolution par stabilisation phénotypique de la sous-tâche mathématique engendrée par la stratégie de décomposition et de groupements



Cette analyse en termes des pratiques de mathématisation mises en avant par la collectivité au regard de l'évolution de la tâche routinière initiale présente, d'une manière détaillée, un exemple de l'analyse de la séance qui a été conduite. Cette analyse met en lumière que les pratiques de mathématisation sont au cœur de l'activité de pose|résolution de problèmes déployée pour résoudre la tâche routinière initiale, et sont ainsi le moteur de son évolution; celles-ci lui permettant de se transformer, de manière lente ou marquée, à travers ses inter-actions avec la collectivité.

5.2 Deuxième exemple d'analyse : La tâche sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5e année de Gisèle

Dans cette section, une description de la résolution collective de la tâche sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5e année de Gisèle est offerte. Ensuite, l'analyse de l'évolution, soit l'ontogénie, de la tâche à travers ses inter-actions avec la collectivité est explicitée. Finalement, l'analyse des pratiques de mathématisation déployée par la collectivité au regard de l'évolution de la tâche est abordée. L'énoncé de la tâche initiale, tel que donné en classe, est le suivant :

Figure 5.21 Énoncé de la tâche sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5e année de Gisèle

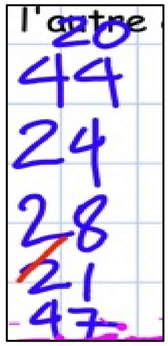
L'aire d'un rectangle est de 32 cm^2, quel est son périmètre si un côté mesure le double de l'autre

Cette tâche peut être qualifiée de routinière, car les élèves avaient déjà travaillé les notions d'aire et de périmètre auparavant avec leur enseignante, et dès son énoncé, ils savaient comment la résoudre; s'engageant immédiatement dans une stratégie de résolution. En classe, les élèves ont eu environ dix minutes pour travailler seul ou en petits groupes sur la résolution de la tâche puis un retour collectif sur leur réponse et stratégie est fait. Cette tâche routinière a donné lieu à une exploitation collective d'une quarantaine de minutes.

5.2.1 Description de la résolution collective de la tâche sur l'aire et le périmètre

Le retour collectif débute par la prise en note par le CE des différentes réponses obtenues par les élèves. Le tableau ressemble à ceci :

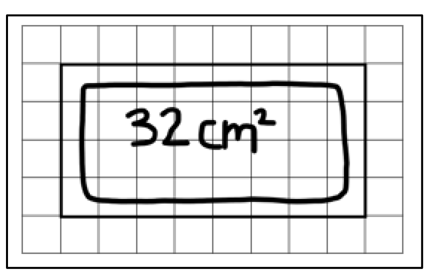
Figure 5.22 Les réponses obtenues à la tâche sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5e année de Gisèle



Le CE demande des explications à Charles sur sa stratégie. L'élève répond ne pas savoir. Le CE lui redemande comment il est arrivé à 20 et l'élève explique avoir compté les carreaux autour du rectangle. Le CE explique que Charles a tracé un rectangle sur sa feuille avec 32 cm^2 écrit dedans, ce qu'il reproduit également au tableau. Le CE mentionne alors qu'il s'agit d'une donnée du problème et poursuit en disant que Charles a compté le nombre de carrés qui sont autour. L'élève acquiesce.

Sur une feuille quadrillée au tableau interactif, le CE reproduit de manière exacte le rectangle de Charles, avec le 32 cm^2 inscrit dedans. Il donne ensuite le crayon interactif à Charles et lui demande d'expliquer ce qu'il a fait. L'élève trace alors un rectangle longeant le rectangle initial, mais à l'intérieur de celui-ci et explique avoir compté tous les carreaux. Les traces laissées au tableau sont reproduites ci-dessous :

Figure 5.23 Représentation de la stratégie du dénombrement des carrés-unités intérieurs de Charles



Le CE demande à Charles combien cela lui a donné. L'élève répond 20. Le chercheur justifie l'obtention du 20 en comptant « 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 » tout en mettant un point dans chaque carré du quadrillage correspondant au traçage fait par Charles. L'élève acquiesce puis le CE lui demande des explications à savoir comment il a obtenu le rectangle initial qu'il a tracé. L'élève dit toutefois ne pas savoir comment il a procédé.

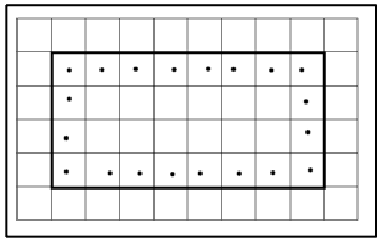
Le CE demande alors aux élèves s'ils sont d'accord avec la proposition de Charles. Quelques « non » se font entendre. Évelyne, une élève, dit alors qu'elle a obtenu une autre réponse. Le CE demande d'abord de se centrer sur la validation de la stratégie de Charles. Il propose de revenir plus tard sur les autres réponses proposées. À ce moment, il demande aux élèves s'ils peuvent expliquer ce qui se passe dans la stratégie de Charles.

Émilie se lance dans une explication en proposant une nouvelle manière de calculer le contour. Le CE lui mentionne alors qu'elle calcule deux fois le carré qui est sur le coin :

> Émilie : Charles a compté tout le contour, mais il faut compter en haut en premier, ça donne 8. Il faut ensuite compter les… les... bien je ne sais pas trop comment l'expliquer là.
>
> CE : On a compté la ligne d'en haut, ça donne 8. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 [Il compte les carrés du quadrillage qui sont sur la longueur en haut du rectangle intérieur tracé par Charles.]
>
> Émilie : Il faut continuer là.
>
> CE : Il poursuit le comptage sur la largeur à gauche du rectangle intérieur tracé par Charles] 9, 10, 11…
>
> Émilie : Non. Il faut recommencer à 1. 1, 2, 3, 4.
>
> CE : Bien, tu as déjà compté une fois le carré du coin. Il ne faut sans doute pas le compter une deuxième fois.
>
> Émilie : Ah oui. Non.

Un autre élève, Xavier affirme alors que Charles n'a pas fait le vrai rectangle de 32 cm^2. Il propose de faire le vrai rectangle puisque de cette façon, ils arriveront à une autre réponse. Le CE efface la ligne du rectangle intérieur de Charles pour ne pas les mélanger, et la remplace par des points qui passent au même endroit. L'image au tableau ressemble maintenant à ceci:

Figure 5.24 Représentation modifiée de la stratégie du dénombrement des carrés-unités intérieurs de Charles



Le CE mentionne qu'ils vont faire comme si un côté mesurait 1 cm, et donc qu'un petit carré vaut 1 cm^2. Xavier s'oppose en affirmant que cela ne donnera tout de même pas 32 cm^2. Le CE demande comment faire pour savoir si c'est ou non un rectangle de 32 cm^2. Il demande à Maxime qui a la main levée ce qu'il en pense. Ce dernier soutient que Charles n'a pas compté le périmètre, mais plutôt les carrés :

> Maxime : Le problème c'est que Charles n'a pas compté le périmètre. Il a compté juste les carrés.
>
> CE : On a un rectangle qui a en tout 8 et 4 de côtés. [Il les inscrit sur la figure]. Des bandes de 4, on en a 8. 4, 8, 12, 16, et là un autre 16, ça fait 32. C'est surement pour ça que Charles l'a dessiné de cette façon.
>
> Charles : Oui.
>
> CE : Ce que Xavier dit, c'est que Charles n'a pas compté le périmètre, mais il a compté le contour. Est-ce que le périmètre c'est le contour?
>
> Xavier : Charles a compté les carrés qui sont à côté de la ligne.
>
> CE : Ok, il ne peut pas faire ça?
>
> Xavier : Non. Pour compter le périmètre, c'est écrit.
>
> CE : Comment tu le compterais toi le périmètre?

Le CE invite Xavier à venir au tableau pour montrer ce qu'il compterait. L'élève lui répond qu'il faut compter les lignes. Le chercheur lui demande comment faire pour savoir comment les lignes mesurent. Petit silence.

Le CE reprend alors l'explication de Xavier qui soutient que Charles ne devrait pas compter les carrés, mais plutôt la ligne, et indique les mesures des côtés du rectangle fait par Charles :

> CE : Ce que tu dis c'est qu'il ne devrait pas compter les carrés, mais qu'il devrait compter la ligne.
>
> Xavier : Oui, chaque carré…
>
> CE : La ligne ici, elle vaut 8.
>
> Xavier : Oui.
>
> CE : [Il écrit 8 sur le côté du tableau.] L'autre, elle vaut 4.
>
> Xavier : Oui.
>
> CE : [Il inscrit le 4 sous le 8.] Les autres lignes valent encore 8 et 4.

Le CE inscrit les mesures des deux autres côtés du rectangle au tableau puis procède à l'addition ce qui lui donne 24 (8 + 4 + 8 + 4). Il mentionne que cela ne donne pas 20, mais que ce n'est peut-être pas faux non plus, car ils avaient compté 20 avec Charles précédemment.

À ce moment, Mathis affirme, lui aussi, qu'il faut compter le contour. Le CE demande aux élèves ce qui est problématique de compter à l'intérieur du rectangle; leur demandant pourquoi ils n'obtiennent pas la même réponse. Mathis propose une explication en disant qu'en comptant à l'intérieur, ils comptent plutôt un rectangle de dimensions 8 par 2 :

Mathis : Bien, quand compte les carrés intérieurs ça donne 20, au lieu de 24. Si on compte le contour, cela fait 8 x 2 au lieu de 8 x 4.

CE : Ce que tu nous dis, c'est que c'est comme si on avait un rectangle de 8 par 2. [Il trace un rectangle de 8 par 2 au tableau en dessous de celui de 8 par 4]. Il compte les 8 ici, et encore, les 8 ici, mais sur les côtés, il en compte juste 2.

Mathis : Oui, c'est ça.

CE : C'est comme si on avait un rectangle de 8 par 2.

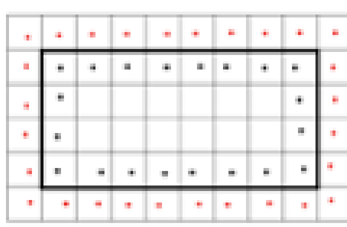
Mathis : Non. Bien, cela ne fonctionne pas si on compte par en dedans.

CE : On ne peut pas compter à l'intérieur.

Mathis : Non.

Julie affirme qu'ils devraient plutôt compter à l'extérieur, car il y a des coins qui ne sont pas comptés lorsqu'ils comptent par l'intérieur. Le CE l'invite à venir au tableau pour l'expliquer sa proposition. Au tableau, Julie montre qu'à l'intérieur il n'y a qu'un point pour chacun des coins, alors qu'à l'extérieur il y en a plus. Le CE lui demande si elle avait à compter le périmètre comment elle le ferait à partir de sa proposition. Julie trace des points sur le contour extérieur du rectangle en les comptant un à un, ce qui lui donne 28. L'image au tableau ressemble à ceci :

Figure 5.25 Traces de la stratégie du dénombrement des carrés-unités extérieurs de Julie



Le CE mentionne que le périmètre est peut-être de 28 finalement. Julie ajoute que le périmètre n'est pas le contour à l'intérieur, mais plutôt le contour à l'extérieur. Le CE indique qu'ils ont donc trois réponses possibles : 20, 24 et 28. Il récapitule les propositions qui ont été faites :

CE : Ok. On s'est dit qu'on peut compter le contour par en dedans. Ça donne 20, mais plusieurs n'étaient pas convaincus. On s'est aussi dit qu'il fallait compter la ligne et là, on arrivait à 24. Là, Julie nous dit qu'il faut plutôt compter à l'extérieur, ce qui donne 28. Il faudrait démêler tout ça un peu…

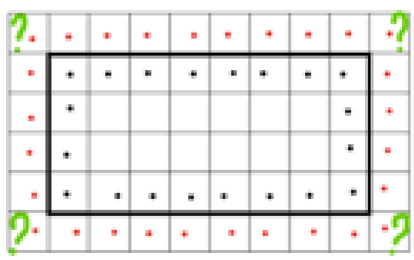
Logan affirme alors qu'il faut vraiment compter les lignes et que Julie a compté des carrés en trop dans sa proposition. Julie réplique que si une clôture était construite il y aurait un trou sinon :

Julie : Si on construit une clôture, il y aura un trou.

Damien : Mais les lignes se rejoignent de chaque côté, on n'a pas besoin d'un point de plus.

Le CE reprend que ce qui est questionné, c'est en fait le point supplémentaire qui se trouve sur le coin. Sur la figure, il ajoute des points d'interrogation aux endroits en question, ce qui ressemble à ceci :

Figure 5.26 Traces du questionnement de la comptabilisation des carrés sur les coins



Logan poursuit en disant que Julie calcule le contour, mais qu'il faut plutôt calculer les lignes par carré. Le CE demande aux élèves qu'elles seraient les unités associées à chacune des propositions :

CE : Si on avait à dire c'est quoi, ça serait 20 quoi? 28 quoi? 24 quoi? Qu'est-ce qu'on mettrait à côté comme mot?

Annie : Centimètre carré.

CE : Pour tous?

Élèves : [On entend plusieurs « non »].

Judith : Le périmètre.

CE : Est-ce qu'on écrirait 24 cm^2, 20 cm^2 et 28 cm^2?

Élèves : [On entend plusieurs « non »].

Maude revient toutefois sur l'argument de la clôture de Julie en répliquant que si elle place sa clôture comme cela, elle serait trop grande et qu'elle clôturerait alors du territoire qui ne lui appartient pas. Le CE reprend cet argument proposé par Maude :

> CE : Si le tour du rectangle c'est la maison, alors si je prends la clôture de Julie, je vais aller chercher du terrain du voisin. Ça cause donc problème. C'est peut-être ça que d'autres disent, qu'il faut mettre la clôture directement sur la limite de son terrain.

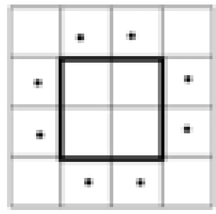
Jade embarque dans la discussion pour expliquer que la clôture est déjà en contact et qu'il ne faut donc pas rajouter le coin :

> Jade : Quand Julie calcule, aux coins la clôture entre déjà en contact alors il ne faut pas rajouter le coin.
>
> CE : Il est où l'ajout?
>
> Jade : Il ne faut pas rajouter le coin. Elle n'est pas obligée de rajouter ces coins-là, car les deux…
>
> CE : C'est ça [il pointe sur la figure], mais sans les coins. Donc, du 28, on en enlèverait 4, ça nous donnerait 24.
>
> Jade : Oui.

Justin, qui n'est pas d'accord avec Jade, affirme que si le rectangle initial est une prison, il y aurait un trou. Il ajoute que pour ne pas que les prisonniers puissent sortir, il ne faut pas qu'il y ait de trou. Le CE invite ce dernier à venir au tableau pour montrer où serait le trou. L'élève vient et montre les points qui sont questionnés sur les 4 coins (voir Figure 5.26). Le CE reprend l'idée de Justin et réexplique les différents arguments qui ont été énoncés. Il soutient ensuite que dans les trois cas, ce sont tous des contours, mais qu'il faut comprendre ce qu'il en est.

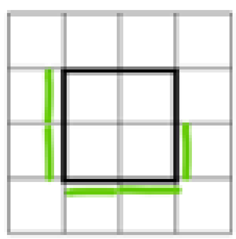
Damien propose de venir faire un exemple au tableau. Il trace un carré de dimensions 2 par 2 et indique qu'il devrait acheter 8 de clôture pour faire le contour. Les traces qu'il laisse au tableau sont les suivantes :

Figure 5.27 Traces de l'exemple du carré de 2 par 2 de Damien



Le CE reprend en disant que la maison, c'est le contour. Il le trace en rouge. Damien réexplique qu'il calculerait les points, ce qui vaut 8. Il ajoute ensuite qu'il ne servirait à rien d'ajouter les carrés sur les coins, car les lignes se rencontrent déjà. Il renchérit que les deux clôtures se rejoignent déjà et qu'il n'y a donc pas de périmètre à ajouter. Le CE propose à Damien de reprendre ce qu'il a fait. Ce dernier vient au tableau et indique (en vert) ce qu'il calcule :

Figure 5.28 Nouvelles traces de l'exemple du carré de 2 par 2 de Damien



Le CE demande à Damien si les lignes qu'il trace sont les mêmes que la maison, ce à quoi Damien répond que oui :

CE : La ligne que tu traces c'est la même que la maison, c'est ça?

Damien : Oui.

CE : Ok. Ça fait, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. C'est là le 8 que tu arrives.

Damien : Oui. Parce que c'est un carré de 2 par 2 et non de 3 par 3.

Le CE reprend ensuite la proposition de Damien en disant que « si le rectangle est de dimension 2 par 2, il a un côté de 2 et un autre de 2, et non pas un côté de 3 par un côté de 3 qui sort du carré ». Damien acquiesce. Le CE affirme que Damien est donc en faveur du 24, car c'est le rectangle est de dimension 8 par 4. L'élève rajoute également que 8 et 4 font aussi 32. Le CE reformule ces idées avancées par Damien :

> CE: Oui, le 8 x 4 nous donne 32, et si on compte tout autour ça donne 10 par 6. 1, 2, 3, 4, 5, 6 et là, on n'en a 10, alors cela ne serait plus le même rectangle.

Jade dit alors qu'ils ne peuvent pas compter à l'intérieur à cause des coins. Le chercheur l'arrête dans son élan, et lui demande de s'expliquer. Jade explique qu'à l'intérieur il n'y aurait pas assez de clôtures pour tout couvrir et que c'est le même principe, mais à l'inverse que pour l'extérieur. Le CE reprend l'explication en disant que dans un cas, ils n'en auraient pas assez compté, et que dans l'autre ils en auraient trop compté.

Un autre élève veut proposer sa manière d'être arrivé à 24. Le CE l'invite à le faire. L'élève explique que le rectangle est de 8 par 4, car 8 est le double de 4 et que la multiplication donne 32. Le CE l'arrête, proposant d'abord de terminer la question sur le périmètre. Il ajoute que plusieurs avaient trouvé le rectangle de 4 par 8.

Julie dit qu'elle est un peu d'accord avec la ligne formant le rectangle initial, mais qu'elle se demande pourquoi elle mettrait une clôture par-dessus sa maison. Le CE remet alors en question l'image de la maison et de la clôture. Il récapitule tout de même en disant que si la clôture fait le tour elle sera de 28, si elle entre en dedans, elle sera de 20, et si elle est comme Damien la veut, sur la limite, elle sera de 24.

Élodie reprend l'idée précédente en disant que dans la solution de Julie (voir Figure 5.25), le rectangle serait de 10 par 6. Julie acquiesce et le CE poursuit en disant que s'ils faisaient l'exercice de les compter, ils se rendraient à 60. Ils auraient maintenant un terrain de 60 cm^2. Le CE reprend les arguments donnés puis mentionne que tous ne semblent pas entièrement convaincus du périmètre, ajoutant aussi qu'ils n'ont toujours pas réglé la question des unités du 24.

Face à cette question, un élève répond que ce sont des centimètres. Une autre élève dit que ce sont des carrés-unités ou des cubes-unités, puis se ravise en soutenant que ce serait pour un volume. Le CE mentionne que dans le problème, il est écrit que l'aire c'est 32 cm^2 puis demande ce que veut dire 32 cm^2?

Damien dit que c'est comme de mettre 1 cm sur le bureau. Le CE trace un carré de 1 par 1 au tableau et répète que c'est comme un carré de 1 cm par 1 cm, et donc qu'ils en auraient 32. Il ajoute que dans le rectangle de 8 par 4, ils en auraient 32 s'ils les comptaient. Il recentre sur sa question, à savoir comment exprimer l'unité de mesure du périmètre.

Un élève dit que l'unité est le cm^2. Le CE questionne en pointant que l'unité du périmètre serait alors la même que l'aire. Plusieurs « non » sont lancés et Julie explique que le périmètre est comme une ligne :

> Julie : C'est carré unité, parce que cm^2 c'est comme un carré au complet et le périmètre on calcule juste la ligne, c'est comme une ligne.
>
> CE : Ok. Ça serait différent ou pareil?
>
> Julie : Différent parce que dans l'aire on calcule le carré.

Le CE explique que Charles a compté les 20 carrés à l'intérieur et que chacun vaut 1 cm^2. Il poursuit en disant que Julie a compté les carrés extérieurs pour avoir 28 petits carrés. Il mentionne que la clôture de Julie et celle de Charles était faite de petits carrés. Le CE ajoute que lorsque certains élèves ont proposé de calculer la ligne, ceux-ci ne calculaient pas les carrés, mais plutôt la longueur de la ligne. Il ajoute que d'une certaine manière, ils auraient pu écrire 20 cm^2 et 28 cm^2, mais que le 24 serait des centimètres, car c'est la longueur qui était mesurée. Le CE pointe sur la nécessité de porter attention au fait que le périmètre c'est une longueur, qui peut être déroulée, comme une corde qui fait le tour de la figure.

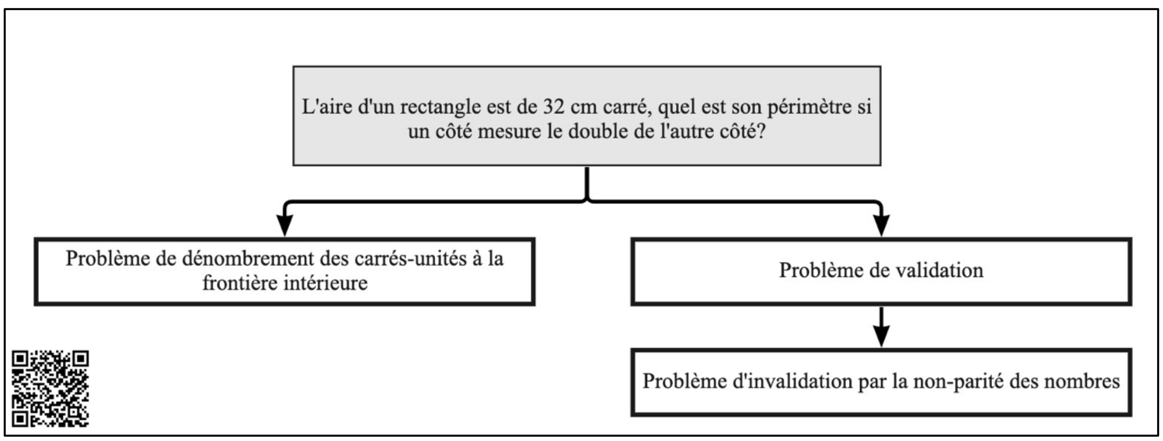
Comme il ne reste plus qu'une minute à la période, le CE les invite à terminer le problème entre eux. Plusieurs disent toutefois à voix haute que la réponse est 24 cm. Certains mentionnent que les autres réponses n'ont pas eu le temps d'être discutées. À ce moment, Julie affirme être certaine que 47 et 21 ne fonctionnent pas parce qu'ils ne peuvent pas faire un rectangle avec un nombre impair, précisant que cela fonctionnerait toutefois avec un cube. La cloche sonne à ce même moment. Le CE mentionne qu'il s'agirait d'une piste intéressante à investiguer. La séance se termine ainsi.

5.2.2 L'ontogénie de la tâche sur l'aire et le périmètre

La vignette précédente présente l'histoire de la résolution collective de la tâche sur l'aire et le périmètre dans cette classe de 5e année. À travers sa résolution, la tâche s'est tranquillement transformée, elle a évolué, à partir de différents contextes qui se sont imposés au fur et à mesure que s'est déroulée l'activité. L'analyse de la séance révèle qu'une *évolution par stabilisation phénotypique*, soit une évolution lente qui se produit à travers la mise en œuvre des stratégies, et qu'une *évolution par diversification,* soit une évolution marquée par l'émergence de sous-tâches mathématiques sur lesquelles la collectivité se penche, se sont produites. Les lignes qui suivent présentent l'histoire de l'évolution, soit l'ontogénie, de la tâche sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5e année de Gisèle[14].

Face à cette tâche routinière, deux stratégies sont mises en avant pour la résoudre, une en début de séance et une à la fin de la séance. Ces stratégies, tel que discuté au Chapitre 2, témoignent d'un processus de pose et, à la fois, de résolution de problèmes mathématiques, soit la pose|résolution de problèmes (Proulx et Maheux, 2017). La Figure 5.29 suivante illustre les problèmes mathématiques mis en avant par la collectivité par le biais de ces deux stratégies proposées pour résoudre la tâche routinière initiale. Ces problèmes transforment lentement la tâche routinière initiale constituant une évolution par stabilisation phénotypique.

Figure 5.29 Évolution par stabilisation phénotypique de la tâche sur l'aire et le périmètre



Comme l'illustre la Figure 5.29, à travers ces stratégies, la tâche routinière initiale s'est transformée en un problème de :

[14] De la même manière que pour l'ontogénie de la tâche de divisibilité par 4 dans la classe de 6e année, l'ontogénie de cette tâche sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5e année de Gisèle n'est pas présentée nécessairement de manière chronologique, mais selon les types d'évolution qui ont pris place.

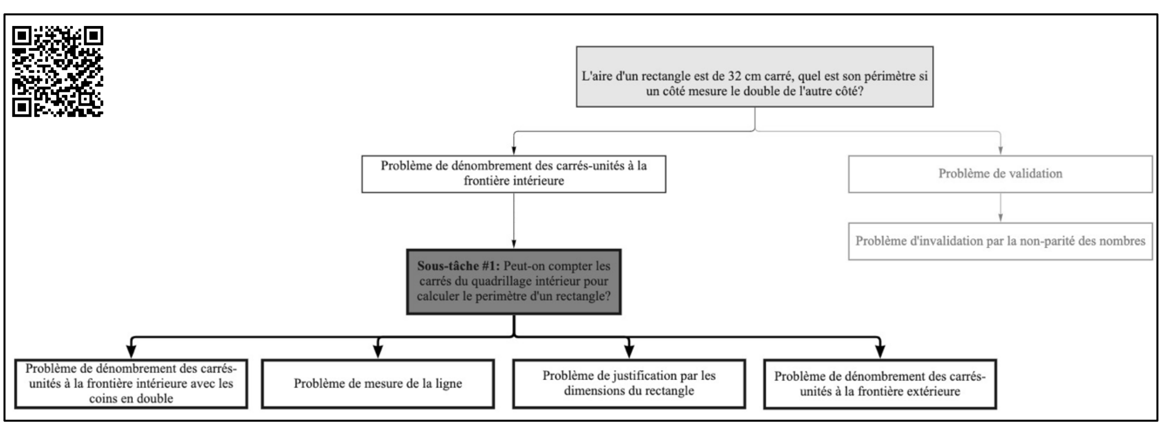
- dénombrement des carrés-unités situés à la frontière intérieure : lorsque la collectivité a proposé de calculer les carrés se trouvant à l'intérieur du rectangle proposé; et

- de validation : lorsque la collectivité a proposé, à la fin de la séance que la réponse 24 fonctionnait.

Ce problème de validation a ensuite mené à un problème d'invalidation par la non-parité des nombres, lorsque la collectivité a mentionné que les réponses impaires 47 et 21 ne fonctionnaient pas puisqu'étant impaires elles ne peuvent pas permettre de former un rectangle. Ces problèmes de dénombrement des carrés-unités situés à la frontière intérieure, de validation et d'invalidation par la non-parité des nombres offrent des variations de la tâche routinière initiale, mais permettent de lui répondre directement. Étant déployées en tant que stratégies pour répondre à la tâche routinière initiale, ces problèmes représentent une évolution par stabilisation phénotypique.

Le déploiement du problème de dénombrement des carrés-unités situé à la frontière intérieure laisse place à une première sous-tâche mathématique alors que la collectivité se penche sur la vraisemblance de cette stratégie de dénombrement des carrés-unités intérieurs. La Figure 5.30 suivante illustre cette première sous-tâche mathématique ainsi que son évolution à travers les stratégies qui sont mises en avant pour la résoudre :

Figure 5.30 Évolution par stabilisation phénotypique de la première sous-tâche mathématique



À travers l'activité qui a pris place en classe, un changement de l'objet de résolution est observé alors que la collectivité tente de résoudre une première sous-tâche mathématique, soit : « Peut-on compter les carrés du quadrillage intérieur pour calculer le périmètre d'un rectangle? ». Cette sous-tâche mathématique émerge de l'activité de pose|résolution déployée pour résoudre la tâche routinière initiale, mais engendre un changement du centre d'attention de la collectivité qui ne cherche plus, de façon directe, à résoudre la tâche routinière initiale. La collectivité cherche plutôt à établir la vraisemblance de la stratégie proposée pour calculer un périmètre, et ce, dans un contexte général; d'où la diversification. Comme la Figure 5.30 ci-dessus le montre, à son tour, cette première sous-tâche mathématique évolue à travers les stratégies qui sont mises en avant pour la résoudre. Un contexte de résolution particulier lui est assigné par ces quatre stratégies qui sont proposées pour la résoudre. Ces stratégies permettent de mettre en avant des problèmes de :

- dénombrement des carrés-unités à la frontière intérieure avec les coins en double : lorsque la collectivité propose un recomptage des carrés intérieurs, mais compte en double les coins;

- mesure de la ligne formant le rectangle : lorsque la collectivité affirme qu'il faut mesurer la ligne et non compter les carrés intérieurs;

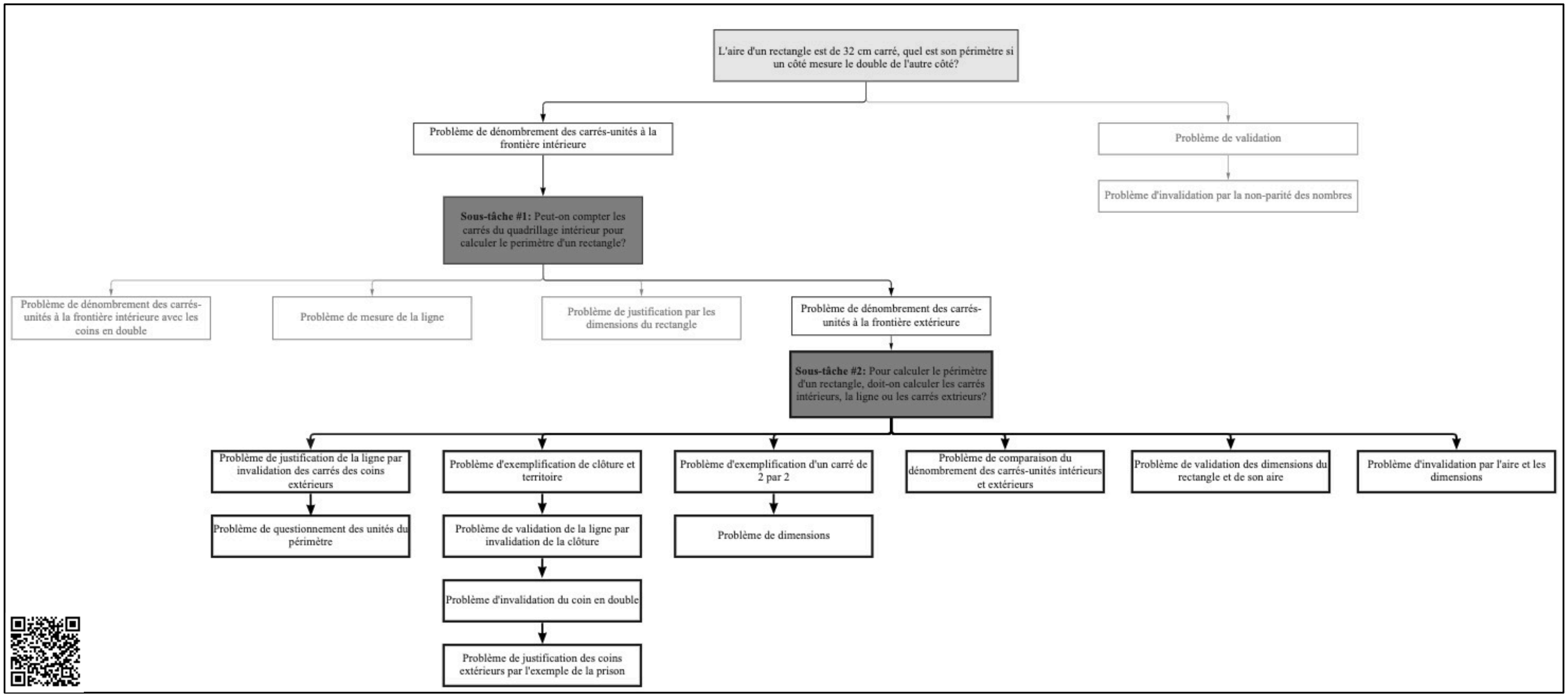
- justification par les dimensions du rectangle; lorsque la collectivité dit qu'en comptant les carrés intérieurs un rectangle de dimension 8 par 2 est formé plutôt qu'un rectangle de dimension 8 par 4 comme souhaité; et

- dénombrement des carrés-unités à la frontière extérieure : lorsque la collectivité propose de compter plutôt les carrés-unités se trouvant à l'extérieur du rectangle de 8 par 4 proposé.

Ces différents problèmes permettent à la première sous-tâche de se transformer à travers sa résolution. La collectivité demeure toutefois centrée sur la résolution de cette sous-tâche, ce qui traduit une évolution par stabilisation phénotypique.

La mise en route de ces problèmes déclenche ensuite une seconde sous-tâche mathématique sur laquelle la collectivité se penche pendant un certain temps : « Pour calculer le périmètre d'un rectangle, doit-on calculer les carrés intérieurs, la ligne ou les carrés extérieurs? ». Différentes stratégies sont proposées pour résoudre cette seconde sous-tâche, ce qui permet de la faire évoluer par stabilisation phénotypique. La Figure 5.31 suivante illustre cette seconde sous-tâche ainsi que son évolution par stabilisation phénotypique.

Figure 5.31 Évolution par stabilisation phénotypique de la seconde sous-tâche mathématique



Cette seconde sous-tâche mathématique amène la collectivité à se pencher sur la vraisemblance des trois stratégies proposées pour calculer un périmètre : les carrés intérieurs, la ligne ou les carrés extérieurs. Cette seconde sous-tâche émerge de l'activité de pose|résolution de problèmes déployée pour résoudre la première sous-tâche, mais l'attention de la collectivité n'est plus de résoudre directement et uniquement la première sous-tâche qui est relative à une seule des stratégies, celle comptant les carrés intérieurs. En effet, la collectivité se penche sur la vraisemblance de ces trois options possibles pour calculer le périmètre d'une figure, et ce dans un contexte général, d'où la diversification.

Comme la Figure 5.31 ci-dessus le montre, cette seconde sous-tâche mathématique, à son tour, évolue à travers l'activité de pose|résolution de problèmes qui prend place pour la résoudre. Différents problèmes mathématiques naissent des stratégies qui sont proposées pour la résoudre; engendrant une évolution par stabilisation phénotypique de cette seconde sous-tâche. Ces problèmes sont :

- un problème de justification de la ligne par invalidation des coins des carrés extérieurs: lorsque la collectivité invalide la proposition de dénombrer les carrés extérieurs en affirmant qu'il faut plutôt calculer les lignes par carré;

- un problème de questionnement des unités du périmètre : qui émerge du problème précédent de justification de la ligne, la collectivité se demandant ensuite quelles sont les unités associées aux trois périmètres proposés 20, 24 et 28.

- un problème d'exemplification de clôture et de territoire : lorsque la collectivité propose l'image d'une clôture qui délimite un territoire;

- un problème de validation de la ligne par invalidation de la clôture : qui émerge du problème précédent d'exemplification alors que la collectivité valide le dénombrement des lignes tout en invalidant la proposition de clôture extérieure qui prendrait alors du territoire voisin;

- un problème d'invalidation du coin en double : qui donne suite au problème précédent alors que la collectivité invalide à nouveau la proposition de dénombrer les carrés extérieurs puisque la ligne entre déjà en contact et qu'alors les coins seraient comptés en double;

- un problème de justification des coins extérieurs par l'exemple de la prison : qui est déclenché par les invalidations précédentes, la collectivité mettant en avant une justification basée sur la vie courante par l'exemple d'une prison qui serait mal gardée, car il y aurait des trous où les prisonniers pourraient sortir;

- un problème d'exemplification d'un carré de 2 par 2; lorsque la collectivité propose un exemple de calcul du périmètre d'un carré de 2 par 2 pour départager entre les trois stratégies de calcul du périmètre;

- un problème de dimensions : qui est déclenché par le problème précédent alors que la collectivité mentionne que le carré est de dimension 2 par 2 et non de dimension 3 par 3 et qu'un lien est fait avec les dimensions du rectangle qui est de 8 par 4 et non de 10 par 6, car il a une aire de 32 cm^2;

- un problème de comparaison du dénombrement des carrés-unités intérieurs et extérieurs : lorsque la collectivité soutient qu'à l'intérieur il n'y aurait pas assez de clôture et qu'à l'extérieur il y en aurait trop;

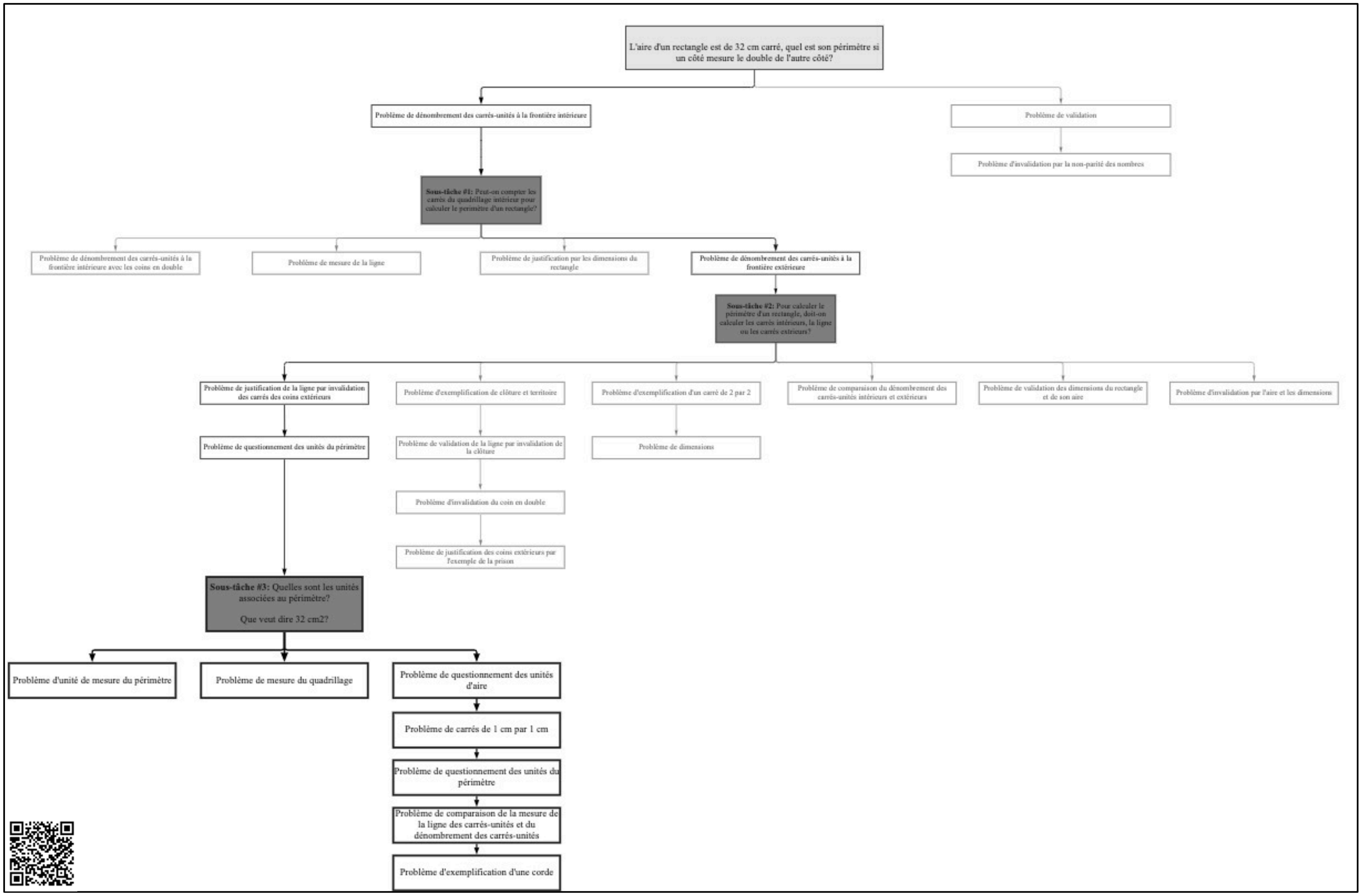
- un problème de validation des dimensions du rectangle et de son aire : lorsque la collectivité propose que le périmètre est bien de 24, car le rectangle initial est de dimension 8 par 4, car cela donne une aire de 32;

- un problème d'invalidation par l'aire et les dimensions : lorsque la collectivité propose que le dénombrement des carrés extérieurs donne un rectangle de 10 par 6, ce qui donnerait une aire de 60 cm^2;

Ces différents problèmes représentent une activité de pose|résolution de problèmes à travers laquelle différentes stratégies permettant de résoudre cette seconde sous-tâche sont déployées. Le centre d'attention de la collectivité demeure sur cette sous-tâche qui tranquillement se transforme et évolue à travers ces stratégies. En ce sens, ces différents problèmes correspondent à des stabilisations phénotypiques qui permettent de faire évoluer lentement cette seconde sous-tâche mathématique.

Dans l'activité qui prend place en classe, une troisième sous-tâche mathématique prend place alors que la collectivité revient sur le problème de questionnement des unités du périmètre et que ce dernier devient le centre d'attention de la collectivité. Différentes stratégies sont proposées pour résoudre cette troisième sous-tâche ce qui lui permet d'évoluer par stabilisation phénotypique. La Figure 5.32 suivante illustre cette troisième sous-tâche et son évolution par stabilisation phénotypique.

Figure 5.32 Évolution par stabilisation phénotypique de la troisième sous-tâche mathématique



Dans la séance, le problème de questionnement sur les unités du périmètre a stagné pendant un moment, mais est réactivé vers la fin de la séance alors qu'il devient l'objet central de résolution. En effet, la collectivité se penche, pendant un certain temps, sur la résolution de la sous-tâche : « Quelles sont les unités associées au périmètre? Que veut dire 32 cm^2? ». Cette sous-tâche constitue une diversification puisque la collectivité ne tente plus directement de résoudre la seconde sous-tâche mathématique qui porte sur les trois manières de calculer le périmètre ni d'ailleurs de résoudre directement la tâche routinière initiale. La collectivité tente plutôt, dans un contexte général, de donner un sens aux unités d'aire et de périmètre. Comme la Figure 5.32 précédente le montre, cette troisième sous-tâche, à son tour, évolue à travers les stratégies déployées pour la résoudre. Ces stratégies font émerger des problèmes :

- d'unité de mesure du périmètre : lorsque la collectivité demande quelles sont les unités du 24 et que les centimètres sont proposés ;

- de mesure du quadrillage : lorsque la collectivité dit que les unités du 24 sont des carrés-unités; et

- de questionnement des unités d'aire : lorsque la collectivité mentionne que dans l'énoncé de la tâche initiale 32 cm^2 correspond à l'aire et qu'elle se questionne sur ce que ceci veut dire.

Ce dernier problème de questionnement des unités d'aire, à travers ses inter-actions avec la collectivité, poursuit sa stabilisation phénotypique puisqu'il déclenche de nouveaux problèmes :

- de carré de 1cm par 1cm : lorsque la collectivité propose que c'est comme de mettre des carrés de 1cm par 1 cm sur le bureau;

- de questionnement des unités du périmètre : lorsque la collectivité se demande comment exprimer l'unité de mesure du périmètre;

- de comparaison de la mesure de la ligne des carrés-unités et de leur dénombrement : lorsque la collectivité distingue le carré-unité qui correspond à une aire de la ligne d'un carré-unité qui correspond au périmètre; et

- d'exemplification d'une corde : lorsque la collectivité propose que le périmètre peut être représenté par une corde qui fait le contour de la figure et qui peut être dépliée pour être mesurée.

Ces problèmes permettent de raffiner le problème de questionnement des unités d'aire, de le raffiner. C'est en ce sens qu'ils poursuivent la stabilisation phénotypique amorcée par ce problème. La troisième sous-tâche évolue ainsi par stabilisation phénotypique à travers la pose de ces différents problèmes qui contribuent à la résoudre.

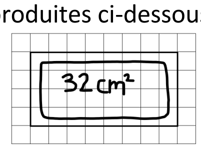
La séance étant terminée, l'activité de pose|résolution de problème déployée par la collectivité prend fin, de même que l'évolution de la tâche routinière initiale. L'évolution de celle-ci aurait pu encore se poursuivre, en particulier à travers les réponses initiales qui n'ont pas toutes été discutées, explicitées, justifiées, validées, modifiées, etc. Également, le problème d'invalidation par la non-parité des réponses (voir Figure 5.29) aurait pu mener à une investigation mathématique de la part de la collectivité. En effet, la proposition qu'un rectangle ne peut pas être formé par un nombre impair, mais qu'un cube pourrait, aurait pu relancer l'activité de la collectivité vers de nouvelles investigations. Le temps a manqué à la séance pour explorer cette nouvelle piste qui a tout de même semblé questionner la collectivité. La tâche routinière initiale aurait donc pu poursuivre son évolution, car beaucoup pouvait encore être exploité.

5.2.3 Les pratiques de mathématisation et l'évolution de la tâche sur l'aire et le périmètre

À travers la résolution collective de la tâche routinière sur l'aire et le périmètre dans cette classe de 5e année, différentes pratiques de mathématisation sont au cœur même de l'activité qui a pris place en classe. Celles-ci offrent une lunette pour comprendre les actions mathématiques mises en avant et, en ce sens, permettent d'expliquer la manière avec laquelle les pratiques de mathématisation ont participé à l'*évolution par stabilisation phénotypique* et *par diversification* de cette tâche routinière. Dans les pages qui suivent, un extrait de la séance est repris et discuté au regard des pratiques de mathématisation déployées et de l'évolution de la tâche routinière initiale observée.

Le Tableau 5. 2 suivant reprend le moment de la séance où la stratégie de dénombrement des carrés-unités situés à la frontière intérieure du rectangle est proposée et que la première sous-tâche mathématique visant à établir la validité de cette stratégie, et à la justifier, voit le jour (voir section 5.2.1). L'analyse en termes des pratiques de mathématisation est également effectuée. L'*évolution par stabilisation phénotypique et par diversification* entourant ce moment est par la suite discutée.

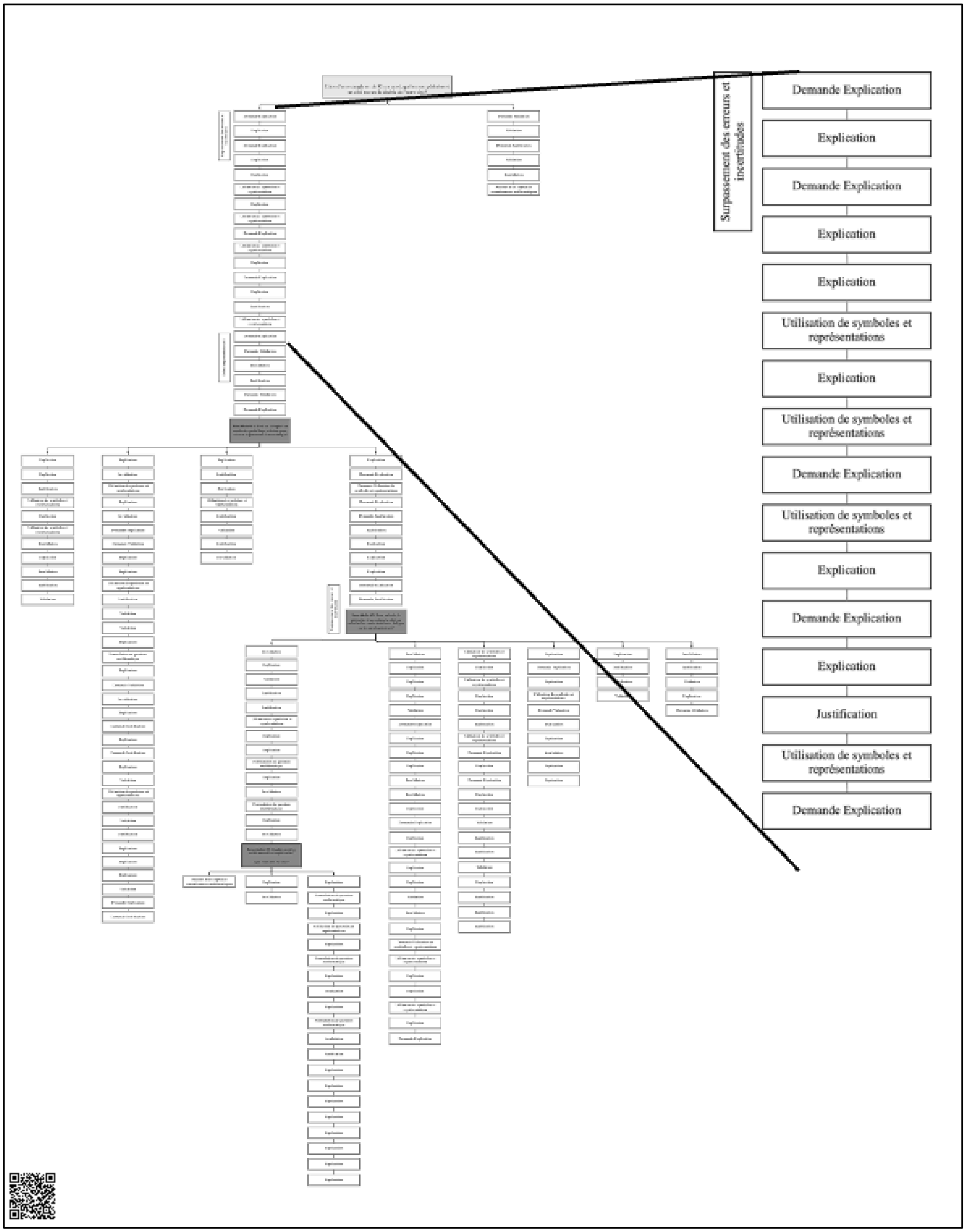
Tableau 5.2 Description du moment de la séance entourant la stratégie de dénombrement des carrés-unités situés à la frontière intérieure du rectangle et analyse des pratiques de mathématisation

Description	**Analyse**
Le CE demande des explications à Charles sur sa stratégie. L'élève répond ne pas savoir. Le CE lui redemande comment il est arrivé à 20. L'élève explique avoir compté les carreaux autour du rectangle. Le CE explique que Charles a tracé un rectangle sur sa feuille avec 32 cm^2 écrit dedans, ce qu'il reproduit également au tableau. Le CE mentionne alors qu'il s'agit d'une donnée du problème et poursuit en disant que Charles a compté le nombre de carrés qui sont autour. L'élève acquiesce. Sur une feuille quadrillée au tableau interactif, le CE reproduit de manière exacte le rectangle de Charles, avec le 32 cm^2 inscrit dedans. Il donne ensuite le crayon interactif à Charles et lui demande d'expliquer ce qu'il a fait. L'élève trace alors un rectangle longeant le rectangle initial, mais à l'intérieur de celui-ci et explique avoir compté tous les carreaux. Les traces laissées au tableau sont reproduites ci-dessous :  Le CE demande à Charles combien cela lui a donné. L'élève répond 20. Le chercheur justifie l'obtention du 20 en comptant « 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 » tout en mettant un point dans chaque carré du quadrillage correspondant au traçage fait par Charles. L'élève acquiesce puis le CE lui demande des explications concernant le rectangle initial. L'élève dit toutefois ne pas savoir ce qu'il a fait.	Demande d'explication *Explication*, Demande d'explication, *Surpassement des erreurs et incertitudes* *Explication* *Explication, Utilisation de symboles et de représentations* *Explication* *Utilisation de symboles et représentations* Demande d'explication *Utilisation de symboles et représentations* *Explication* *Demande d'explication, Explication* *Justification* *Utilisation de symboles et représentations* Demande d'explication
Le CE demande alors aux élèves s'ils sont d'accord avec la proposition de Charles. On entend quelque « non ». Évelyne, une élève, dit qu'elle a obtenu une autre réponse. Le CE demande d'abord de se centrer sur la validation de cette stratégie. Ils reviendront plus tard sur les autres réponses proposées. À ce moment, il demande aux élèves s'ils peuvent expliquer ce qui se passe dans cette stratégie.	Demande de validation *Invalidation, Argumentation* *Justification* Demande de validation Demande d'explication
Émilie se lance dans une explication : Émilie : Charles a compté tout le contour, mais il faut compter en haut en premier, ça donne 8. Il faut ensuite compter les… les... bien je ne sais pas trop comment l'expliquer là. CE : On a compté la ligne d'en haut, ça donne 8. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 [Il compte les carrés du quadrillage qui sont sur la longueur en haut du rectangle intérieur tracé par Charles.] Émilie : Il faut continuer là.	 *Explication* *Explication, Justification* *Utilisation de symboles et de représentations* *Explication*

CE : [Il poursuit le comptage sur la largeur à gauche du rectangle intérieur tracé par Charles] 9, 10, 11…	*Utilisation de symboles et de représentations*
Émilie : Non. Il faut recommencer à 1. 1, 2, 3, 4.	*Invalidation, Explication*
CE : Bien, tu as déjà compté une fois le carré du coin. Il ne faut sans doute pas le compter une deuxième fois.	*Invalidation* *Justification*
Émilie : Ah oui. Non.	*Validation*

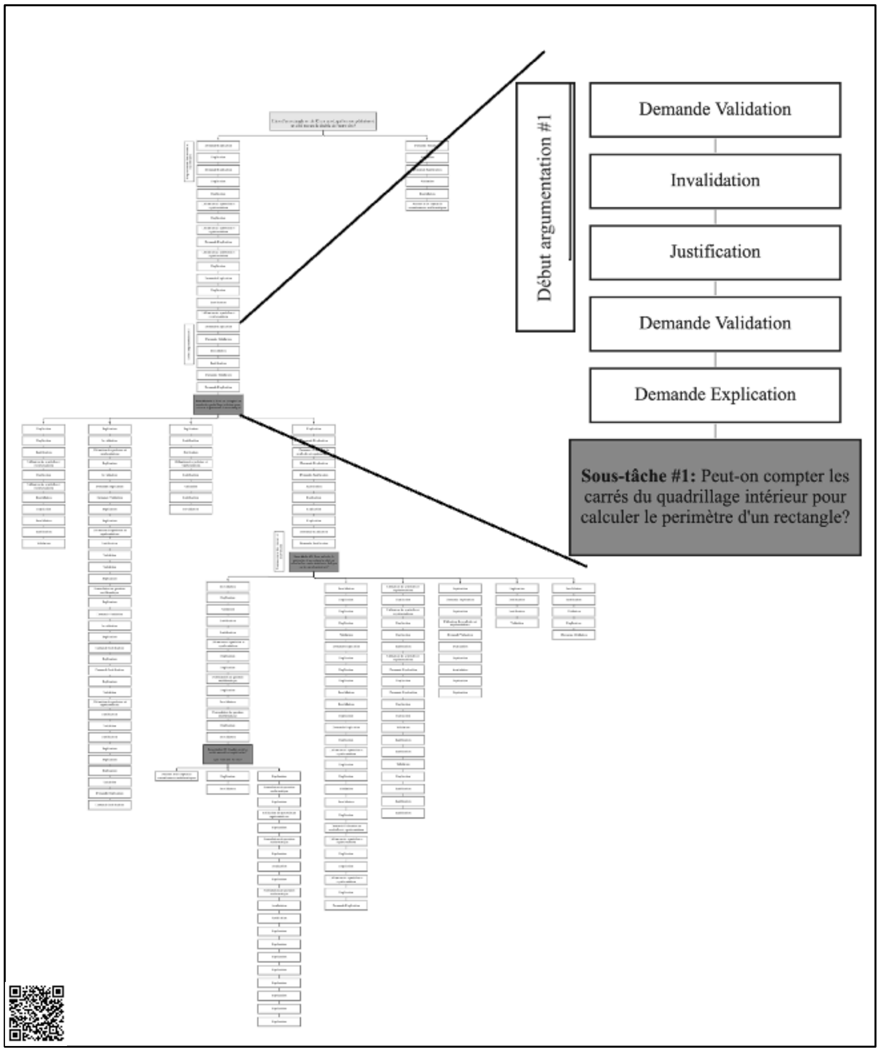
Dans cet extrait, une stratégie de dénombrement des carrés-unités situés à la frontière intérieure est proposée pour résoudre la tâche routinière initiale. Une stabilisation phénotypique est observée alors que des *pratiques de mathématisation* permettant de mettre en route la stratégie et la développer sont déployées. Pour débuter, un travail de *surpassement d'une erreur mathématique*, par son investigation, est mis en place. En effet, en réponse à la tâche routinière initiale, une demande d'explication d'une réponse erronée, 20, est mise en avant. Une réponse de ne pas savoir comment l'expliquer est faite puis la demande d'explication est à nouveau déployée. Cette demande d'explication engendre une *explication* d'avoir compté les carreaux autour du rectangle. Cette explication est suivie d'une représentation mathématique permettant d'illustrer la proposition. Une demande d'explication, plus précise, de la stratégie est ensuite faite, puis une autre *représentation mathématique,* dans laquelle un rectangle longeant le rectangle initial par l'intérieur est tracé, est proposée. Une *explication* d'avoir compté tous les carreaux est donnée. Un périmètre de 20 est proposé et engendre une justification se basant sur le dénombrement des carrés-unités. La *représentation mathématique* est à ce moment modifiée pour y ajouter un point à chaque carreau dénombré. Une demande d'expliquer comment avoir trouvé le rectangle initial est ensuite mise en avant, mais une incertitude sur la manière d'y répondre réponse est mise au jour. Ces différentes pratiques de mathématisation permettent de mettre en route la stratégie dénombrement des carrés-unités situés à la frontière intérieure et de la raffiner, la développer. À travers celles-ci, la tâche routinière initiale évolue lentement, par stabilisation phénotypique. La Figure 5.33 illustre cette évolution par stabilisation phénotypique qui prend place à partir de ces pratiques de mathématisation.

Figure 5.33 Les pratiques de mathématisation dans l'évolution par stabilisation phénotypique lors de la stratégie de dénombrement des carrés-unités situés à la frontière intérieure



Ensuite, une diversification est observée alors que des *pratiques de mathématisation* font émerger une première sous-tâche mathématique sur laquelle la collectivité se penche pendant un moment. En effet, une demande de validation de cette stratégie de calcul du périmètre est déployée. Une *invalidation* est mise en avant lorsqu'une autre réponse à la tâche routinière est obtenue. Cette invalidation engendre une *argumentation mathématique* puisque la validité de la stratégie est mise en doute. Une demande de rester centrer sur la stratégie est faite et est suivie d'une demande d'expliquer ce qui se passe dans cette stratégie. Cette centration à expliquer et valider cette stratégie pour calculer un périmètre fait naitre une première sous-tâche mathématique. En effet, la nature de l'objet de résolution est changée puisque la collectivité n'est plus centrée directement sur la résolution de la tâche routinière initiale, mais sur la résolution d'une forme généralisée de la stratégie proposée. La collectivité se penche ainsi sur la sous-tâche : « Peut-on compter les carrés du quadrillage intérieur pour calculer le périmètre d'un rectangle ». Cette première diversification fait partie du travail de surpassement de l'erreur. La stratégie étant expliquée et mise en route dans la sphère collective, la collectivité est appelée à l'expliquer et la valider, en vue de la modifier et surpasser l'erreur commise. La Figure 5.34 illustre cette évolution par diversification mise en route par ces pratiques de mathématisation.

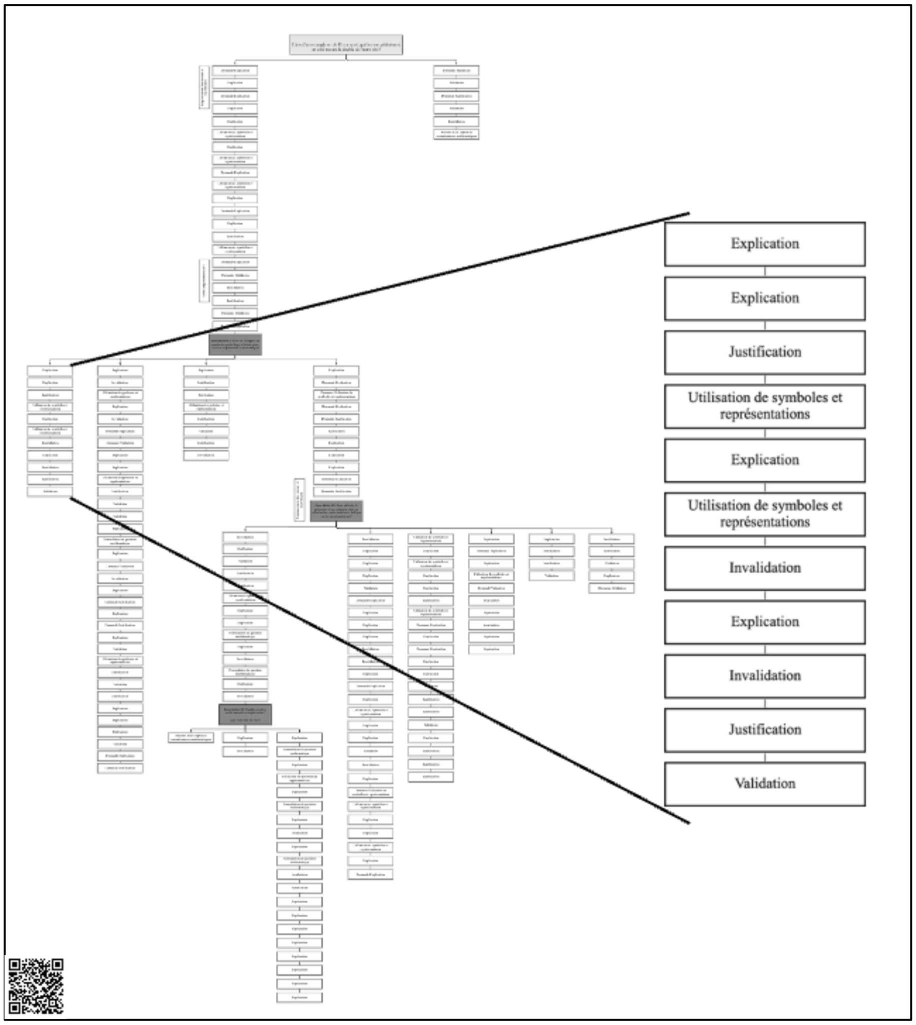
Figure 5.34 Les pratiques de mathématisation dans l'évolution par diversification engendrée par la stratégie de dénombrement des carrés-unités situés à la frontière intérieure



Une évolution par stabilisation phénotypique de la sous-tâche est ensuite observée. Pour y répondre, une *explication* que tout le contour a été compté, mais qu'il aurait fallu compter le haut en premier est donnée. Une incertitude quant à la manière d'expliquer la suite de la stratégie est mise en avant. Une poursuite de l'*explication* est tentée. Cette explication est appuyée d'une *justification* par le dénombrement des carreaux de la ligne du haut qui prend appui sur la *représentation mathématique* du rectangle initial. L'*explication* se poursuit et prend appui sur la *représentation mathématique* à partir de laquelle les carreaux sont dénombrés. Cette explication mène à une *invalidation* quant à la manière de dénombrer les carreaux. L'invalidation est suivie d'une *explication* qu'il faut recommencer à compter à 1 sur le côté du rectangle. Une *invalidation* de cette explication est alors mise en avant et est *justifiée* par le fait que le carré du coin serait alors compté deux fois. Une *validation* de cette intervention est finalement déployée.

La Figure 5.35 illustre une évolution par stabilisation phénotypique de cette première sous-tâche qui survient à partir de ces pratiques de mathématisation.

Figure 5.35 Les pratiques de mathématisation et l'évolution par stabilisation phénotypique de la sous-tâche mathématique engendrée par la stratégie de dénombrement des carrés-unités situés à la frontière intérieure



Cet extrait et cette analyse en termes des pratiques de mathématisation déployées par la collectivité au regard de l'évolution de la tâche routinière initiale présentent, d'une manière détaillée, un exemple de l'analyse de la séance qui a été conduite. Cette analyse illustre que les pratiques de mathématisation sont au cœur des stratégies déployées par la collectivité pour résoudre la tâche routinière initiale proposée, et que ces stratégies permettent de la faire évoluer par stabilisation phénotypique et par diversification.

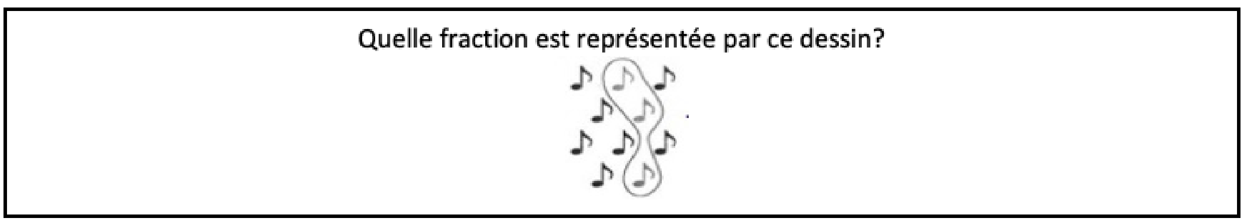
5.3 Analyses synthétiques des cinq autres séances

Les sections précédentes, présentant de manière détaillée l'analyse de la séance sur la tâche de divisibilité par 4 dans la classe de 6e année ainsi que l'analyse de la séance sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5e année de Gisèle, ont permis d'illustrer la nature des analyses qui ont été conduites. Cette section veut présenter, de manière synthétique, les éléments importants qui ressortent des analyses détaillées de chacune des cinq autres séances. Également, une vignette descriptive complète de ces cinq séances est offerte aux Annexes A à E.

5.3.1 Analyse synthétique de la séance des notes de musique dans la classe de 6e année.

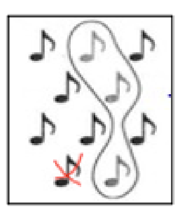
Dans cette séance (voir Annexe A), l'énoncé de la tâche routinière proposée à résoudre est le suivant :

Figure 5.36 Énoncé de la tâche routinière des notes de musique dans la classe de 6e année



Face à cette tâche routinière, une première réponse $\frac{3}{10}$ est mise en avant et explicitée. La réponse erronée $\frac{1}{3}$ est ensuite proposée et immédiatement invalidée par une explication d'avoir mal dénombré le nombre total de notes de musique. Toutefois, à ce moment, le CE enlève une des notes de musique du dessin de l'énoncé initial pour permettre l'explication de la stratégie permettant d'obtenir $\frac{1}{3}$. Le tableau ressemble à ceci :

Figure 5.37 Traces de la modification du dessin de la tâche routinière initiale pour expliciter la stratégie du $\frac{1}{3}$

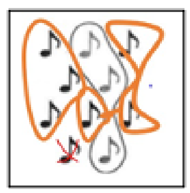


Des explications et justifications mathématiques concernant le fait que le dessin représente maintenant trois groupes de 3 notes de musique sont déployées afin d'expliciter la réponse $\frac{1}{3}$ obtenue :

> Rose : Avec neuf notes, exemple, on peut faire trois paquets de trois, et il y en a un d'encerclé, donc ça fait un tiers.
>
> CE: Ok, attends un petit peu, je vais essayer de le faire en même temps. Ok, donc là, on a enlevé cette note-là, hein. Et là, tu nous dis qu'on va faire trois paquets…
>
> Rose : Si exemple, on peut faire trois paquets de trois, déjà là, ça fait sur trois.

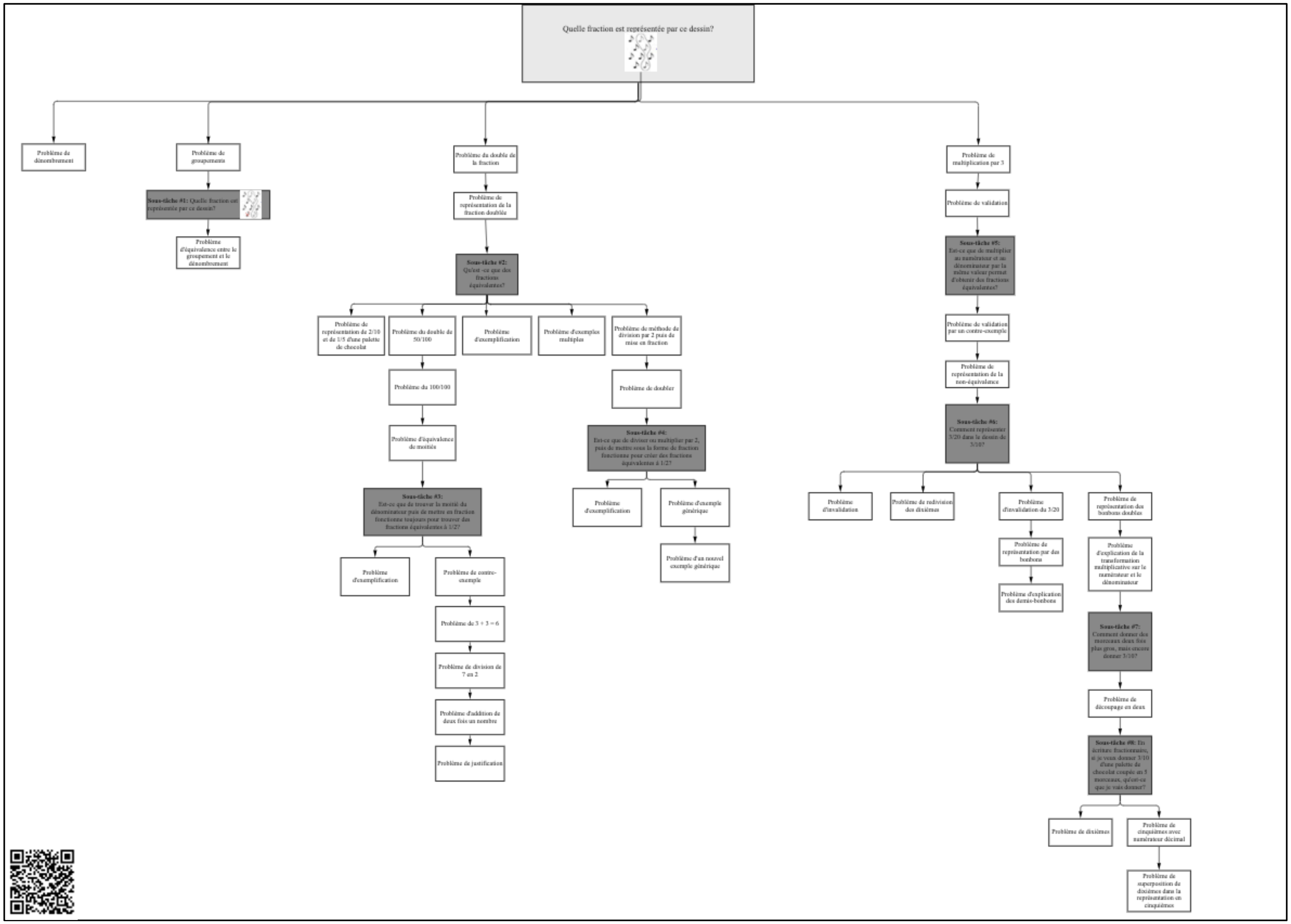
Au tableau, les paquets sont encerclés, comme ceci :

Figure 5.38 Traces de la stratégie du $\frac{1}{3}$

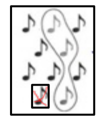


La collectivité semble bien suivre les explications et justifications proposées. Des explications et justifications supplémentaires concernant le lien entre la réponse $\frac{1}{3}$ et la fraction équivalente $\frac{3}{9}$ sont ensuite mises en avant. Ce travail d'équivalence entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{9}$ donne le ton au reste de la séance; l'investigation de la proposition initialement erronée $\frac{1}{3}$ ouvrant des portes vers de nouvelles avenues. En effet, à partir de ce moment, la collectivité s'est mise à s'intéresser et à proposer des fractions équivalentes afin d'offrir de nouvelles réponses possibles à la tâche routinière initiale. À travers les idées qui sont partagées en classe, la tâche routinière initiale a évolué au plan de la *stabilisation phénotypique,* c'est-à-dire qu'une évolution lente s'est produite à même les stratégies proposées, et au plan de la *diversification,* c'est-à-dire qu'une évolution marquée par l'émergence de sous-tâches mathématiques qui font bifurquer la résolution de la tâche routinière initiale pendant un certain temps est observée. La Figure 5.39 suivante illustre l'évolution poursuivie par cette tâche routinière ce jour-là dans cette classe de 6e année.

Figure 5.39 Schéma de l’ontogénie de la tâche routinière des notes de musique dans la classe de 6e année



Comme la Figure 5.39 ci-dessus l'illustre, huit sous-tâches mathématiques ont émergé de l'activité collective de résolution de la tâche routinière initiale. Ces sous-tâches constituent une évolution marquée de la tâche routinière initiale puisque l'objet de résolution de la collectivité a changé pendant un certain temps. Dans l'activité qui a pris place en classe ce jour-là, ces sous-tâches, qui représentent une *évolution par diversification,* sont :

- Sous-tâche #1 : Quelle fraction est représentée par ce dessin? 

- Sous-tâche #2 : Qu'est-ce que sont des fractions équivalentes?

- Sous-tâche #3 : Est-ce que de trouver la moitié du dénominateur puis de mettre en fraction fonctionne toujours pour trouver des fractions équivalentes à $\frac{1}{2}$?

- Sous-tâche #4 : Est-ce que de diviser ou multiplier par 2 fonctionne toujours pour trouver des fractions équivalentes à $\frac{1}{2}$?

- Sous-tâche #5 : Est-ce que de multiplier au numérateur et au dénominateur par la même valeur permet d'obtenir des fractions équivalentes?

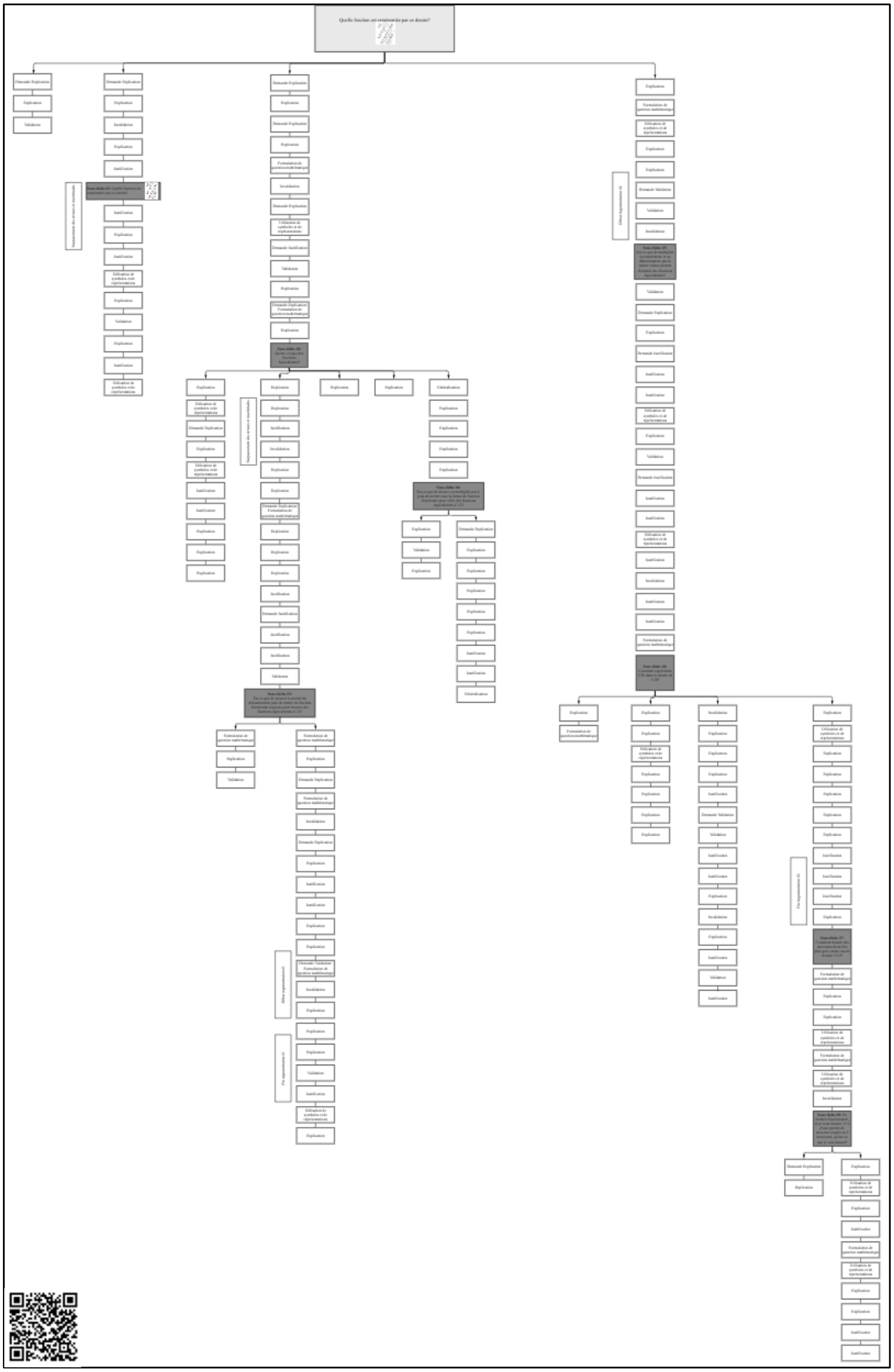
- Sous-tâche #6 : Comment représenter $\frac{3}{20}$ dans le dessin de $\frac{3}{10}$?

- Sous-tâche #7 : Comment donner des morceaux deux fois plus gros, mais encore donner $\frac{3}{10}$?

- Sous-tâche #8 : En écriture fractionnaire, si je veux donner $\frac{3}{10}$ d'une palette de chocolat coupée en 5 morceaux, qu'est-ce que je vais donner?

Chacune de ces sous-tâches a déclenché un travail mathématique chez la collectivité. Différentes stratégies permettant de les résoudre ont été proposées, permettant une évolution par stabilisation phénotypique. Par ailleurs, différentes pratiques de mathématisation ont été déployées par la collectivité et ont permis cette évolution par diversification et par stabilisation phénotypique. La Figure 5.40 suivante illustre, de façon globale, les pratiques de mathématisation mises en avant par la collectivité durant cette séance. Ces pratiques de mathématisation sont discutées au regard de l'évolution de la tâche routinière initiale par la suite.

Figure 5.40 Les pratiques de mathématisation déployée par la collectivité dans la tâche des notes de musique en classe de 6e année



Tel que l'illustre cette Figure 5.40 ci-dessus, différentes pratiques de mathématisation ont été déployées par la collectivité et ont permis l'évolution de la tâche routinière initiale. En particulier, le travail de *surpassement de l'erreur mathématique* de la réponse $\frac{1}{3}$ a mené la collectivité à s'engager dans un travail important sur les fractions équivalentes. La réponse $\frac{6}{20}$ est ainsi proposée en tant que réponse à la tâche routinière initiale. L'*explication* de la stratégie derrière cette réponse de $\frac{6}{20}$ mène la collectivité à s'intéresser à ce que sont des fractions équivalentes par le biais de la sous-tâche #2. L'*explication* de la stratégie du $\frac{6}{20}$ engendre cette seconde sous-tâche mathématique visant à expliquer ce que sont des fractions équivalentes. Pour la résoudre, différentes propositions sont mises en avant. Notamment, l'*explication* que $\frac{50}{100}$ donne $\frac{100}{200}$, déployée en guise de réponse à la seconde sous-tâche mathématique, mène vers la troisième sous-tâche mathématique qui porte sur la validation de la stratégie proposée pour passer de $\frac{50}{100}$ à $\frac{100}{200}$, dans un cadre plus général. La collectivité tente alors de vérifier, par cette troisième sous-tâche, si la stratégie de trouver la moitié du dénominateur puis de mettre en fraction fonctionne toujours pour trouver des fractions équivalentes à $\frac{1}{2}$. Différents exemples de fractions équivalentes à $\frac{1}{2}$ sont ensuite données pour tenter de valider cette stratégie, puis une *généralisation* d'une méthode pour trouver des demies est proposée. Cette *généralisation* mathématique entraine une la collectivité dans la résolution d'une quatrième sous-tâche mathématique qui vise à vérifier si, dans un cadre général, diviser ou multiplier par 2 fonctionne toujours pour trouver des fractions équivalentes à $\frac{1}{2}$. Deux exemples sont ensuite donnés et explicités afin de répondre à cette quatrième sous-tâche; ce qui permet de la faire évoluer par stabilisation phénotypique à travers les *explications mathématiques* qui sont données à partir de ces exemples. Un retour sur la tâche routinière initiale est fait et la réponse $\frac{9}{30}$ est proposée. La stratégie de multiplier au numérateur et au dénominateur par la même valeur est alors *expliquée* et mène à une demande de validation. L'*explication* de cette stratégie menant à la réponse $\frac{9}{30}$ fait émerger la cinquième sous-tâche mathématique à savoir si multiplier au numérateur et au dénominateur par la même valeur permet toujours d'obtenir des fractions équivalentes. La collectivité étant mitigée à ce sujet, une *argumentation mathématique* émerge en classe. Dans le travail d'argumentation, qui se produit en concordance avec la cinquième sous-tâche, une *question mathématique* est *formulée* et engendre une sixième sous-tâche mathématique, soit celle relative à la représentation de $\frac{3}{20}$ dans le dessin de $\frac{3}{10}$. Pour résoudre cette sixième sous-tâche, la collectivité prend notamment appui sur un exemple de bonbons coupés en demis et sur un exemple de bonbons qui sont doublés en grosseur. L'*explication* de cet exemple de bonbons doublés mène à la septième sous-tâche mathématique alors qu'une *question mathématique* est *formulée* au regard des explications données. Cette question mathématique, qui constitue la septième sous-tâche, est d'expliquer comment donner des morceaux deux fois plus gros, tout en donnant encore $\frac{3}{10}$. Une *explication mathématique* de couper en deux les morceaux est donnée et engendre une huitième sous-tâche mathématique demandant d'utiliser l'écriture fractionnaire pour dire comment donner $\frac{3}{10}$ d'une palette de chocolat qui est coupée en 5 morceaux. Pour résoudre cette huitième sous-tâche, différentes réponses sont déployées. En particulier, la réponse $\frac{1,5}{5}$ est *expliquée* et *justifiée* à partir de l'*utilisation de symboles et de représentations mathématiques*. À ce moment, la cloche annonçant la fin de la période sonne, ce qui met fin à cette séance. À travers l'activité collective qui a pris place pour résoudre la tâche routinière initiale des notes de musique, différentes pratiques de mathématisation ont ainsi été déployées par la collectivité et ont permis de faire évoluer cette tâche routinière.

5.3.2 Analyse synthétique de la séance sur la divisibilité par 2 dans la classe de 5e année de Louise

Dans cette séance (voir Annexe B), l'énoncé de la tâche routinière proposée à résoudre est le suivant :

Figure 5.41 Énoncé de la tâche de divisibilité par 2 dans la classe de 5e année de Louise

46, 81, 70, 106 Quels nombres parmi ceux-ci sont divisibles par 2 ?

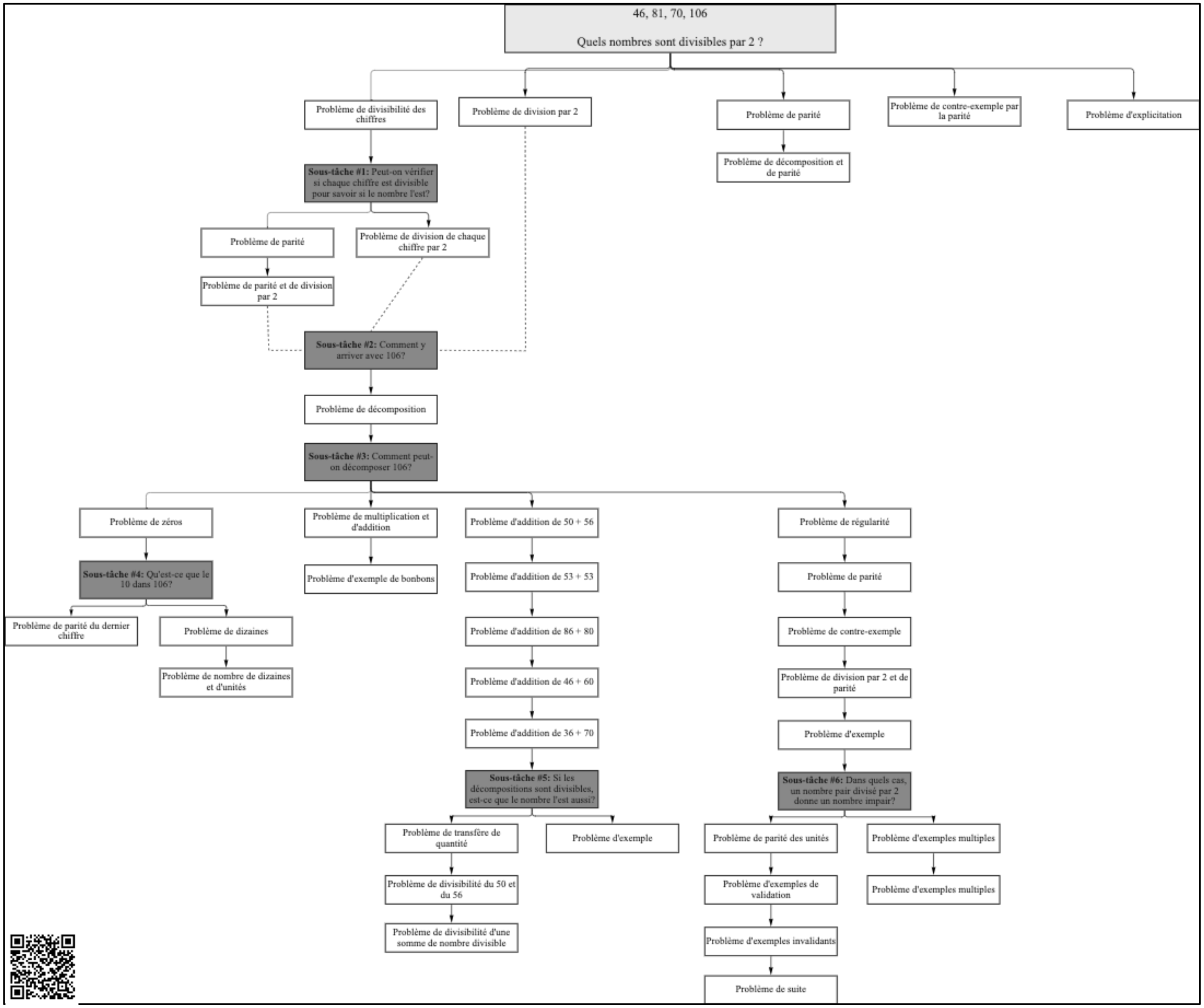
Dès son énoncé, des mains se sont levées et 46 est proposée comme première réponse. Voici l'extrait de la description qui correspond à ce moment :

Figure 5.42 Extrait de la description de la stratégie d'analyse de la divisibilité de chaque chiffre

Paul propose le nombre 46 comme réponse. Le CE lui demande d'expliquer sa réponse. L'élève explique que comme le 4 se divise en deux et que le 6 aussi, alors 46 est divisible par 2. Le CE demande aux autres élèves ce qu'ils en pensent.

La stratégie de vérifier si chacun des chiffres du nombre est ainsi proposée pour appuyer le fait que 46 est divisible par 2. Une autre stratégie de diviser directement le nombre 46 en deux est ensuite proposée. Une fois ces deux stratégies mises en avant, la stratégie d'analyser la divisibilité de chacun des chiffres du nombre devient l'objet de discussion. La collectivité tente alors d'établir si cette stratégie est valide ou non. La validation de cette stratégie, dans un cadre général, devient l'objet d'investigation de la collectivité, ce qui fait émerger une première sous-tâche mathématique sur laquelle la collectivité se penche pendant un moment. Dans le travail de résolution de la première sous-tâche, une proposition de s'intéresser à la parité des chiffres 4 et 6 est faite et une autre proposition, soit de diviser les chiffres du 106 en deux, est mise en avant. Ces deux propositions de s'intéresser à la parité des chiffres et de diviser en deux les chiffres du nombre mènent la collectivité à investiguer une deuxième sous-tâche mathématique à savoir comment utiliser la stratégie d'analyse de la divisibilité de chaque chiffre du nombre, mais à partir du nombre 106. À ce moment de la séance, le travail de la collectivité se centre sur des décompositions possibles du nombre 106, sur la valeur du 10 dans le nombre 106 ainsi que sur la question de savoir si les décompositions d'un nombre sont divisibles par 2, est-ce que cela implique que le nombre est également divisible par 2. Ce travail autour du nombre 106 et de ses décompositions amène également la collectivité à vérifier dans quel cas un nombre pair divisé par 2 donne un nombre impair. Dans ce travail mathématique fait autour du nombre 106, une proposition que 70 est divisible par 2 est énoncée. Cette proposition ne fait pas l'unanimité et est discutée au regard de la non-parité du 7 et de la parité du 0, puis en considérant la décomposition de 70 en 35 et 35 qui permet de former deux groupes identiques, étant ainsi divisible par 2. Le nombre 81, étant impair, est ensuite mis de côté. À travers cette activité collective visant ultimement à résoudre la tâche routinière initiale, une *évolution par stabilisation phénotypique,* c'est-à-dire une évolution lente qui se produit à même les stratégies proposées, et une *évolution par diversification,* soit une évolution marquée par l'émergence de sous-tâches mathématiques qui font bifurquer la résolution de la tâche routinière initiale pendant un certain temps, sont observées. La Figure 5.43 suivante présente l'évolution poursuivie par cette tâche routinière de divisibilité par 2 dans cette classe de 5^{e} année. Cette évolution est discutée par la suite.

Figure 5.43 Schéma de l’évolution de la tâche de divisibilité par 2 dans la classe de 5e année de Louise



Comme l’illustre la Figure 5.43 ci-dessus, six sous-tâches mathématiques ont émergé de l’activité collective de résolution de cette tâche de divisibilité par 2. Ces sous-tâches offrent une idée globale de l’activité qui a pris place en classe ce jour-là. Elles constituent par ailleurs une évolution par diversification de la tâche routinière initiale puisque l’objet de résolution de la collectivité a changé pendant un certain temps. Ces six sous-tâches mathématiques sont :

- Sous-tâche #1 : Peut-on vérifier si chaque chiffre est divisible pour savoir si le nombre l’est?

- Sous-tâche #2 : Comment y arriver avec 106?

- Sous-tâche #3 : Comment peut-on décomposer 106?

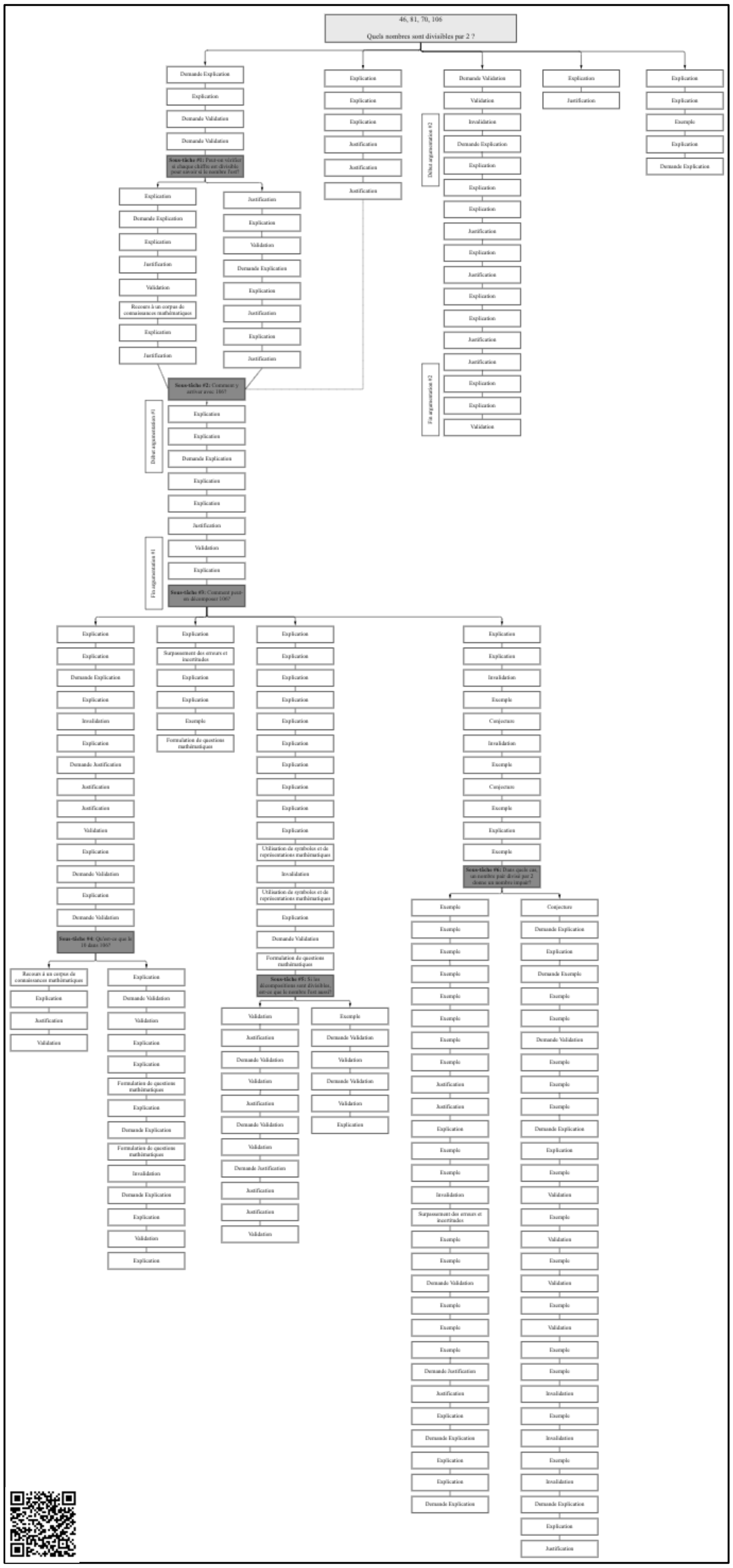
- Sous-tâche #4 : Qu’est-ce que 10 dans 106?

- Sous-tâche #5 : Si les décompositions sont divisibles est-ce que le nombre l’est aussi?

- Sous-tâche #6 : Dans quels cas un nombre pair divisé par 2 donne un nombre impair?

Dans cette séance, différentes pratiques de mathématisation ont par ailleurs été déployées par la collectivité et ont permis l’évolution par diversification et par stabilisation phénotypique de la tâche routinière initiale. La Figure 5.44 suivante illustre globalement les pratiques de mathématisation mises en avant par la collectivité dans le but ultime de résoudre cette tâche routinière initiale de divisibilité par 2. Ces pratiques de mathématisation sont discutées de façon synthétique, au regard de l’évolution de la tâche routinière initiale par la suite.

Figure 5.44 Schéma des pratiques de mathématisation déployée par la collectivité dans la tâche de divisibilité par 2 dans la classe de 5e année de Louise



Tel que l'illustre cette Figure 5.44 ci-dessus, différentes pratiques de mathématisation ont été déployées par la collectivité et ont permis l'évolution de la tâche routinière initiale. En particulier, l'*explication* de la stratégie d'analyser la divisibilité de chacun des chiffres du nombre a fait naitre la première sous-tâche mathématique qui vise à établir la validité de cette stratégie. Cette stratégie d'analyser la divisibilité de chacun des chiffres du nombre a aussi engendré la seconde sous-tâche mathématique relative à l'utilisation de cette stratégie à partir du nombre 106. Une *explication* prenant appui sur la décomposition de 106 entraine par la suite la collectivité à résoudre une troisième sous-tâche visant à trouver différentes manières de décomposer le nombre 106. En particulier, une *explication* d'enlever le 0 à la position des unités pour traiter le 10 et le 6 séparément est faite et permet à la collectivité de se pencher sur une quatrième sous-tâche qui consiste à expliquer à quoi correspond le 10 dans 106. En réponse à cette quatrième sous-tâche, une affirmation, *prenant appui sur un corpus de connaissances mathématiques établies,* que les nombres pairs se divisent en deux est énoncée. La collectivité met également en avant des *explications* et *justifications* mathématiques relatives au nombre de dizaines et d'unités pour répondre à cette quatrième sous-tâche mathématique. La collectivité poursuit ensuite le travail de la troisième sous-tâche de décomposition du nombre 106, en donnant différents exemples et *explications mathématiques* qui amènent la collectivité à se demander si les décompositions du nombre sont divisibles, est-ce que le nombre l'est également; constituant une cinquième sous-tâche mathématique sur laquelle la collectivité se penche. Pour répondre à cette cinquième sous-tâche une *justification* que 53 + 53 peut devenir 50 + 56 en transférant 3 unités du premier nombre au second nombre est donnée et est discutée. Une *validation* de cette justification est offerte et la décomposition 86 + 20 est discutée. Tout le travail fait autour de la décomposition du nombre 106 amène alors la collectivité à *formuler la conjecture* que lorsqu'un nombre pair est divisé en deux le quotient est impair, sauf dans le cas où le nombre initial se termine par 0. La *formulation de* cette *conjecture* amène la collectivité à investiguer son statut de vraisemblance ce qui fait naitre une sixième sous-tâche mathématique. Avant que la cloche ne sonne, une synthèse des différentes propositions et stratégies mises en avant durant la séance est faite. La séance se termine avec cette synthèse. À travers l'activité collective qui a pris place pour résoudre la tâche routinière de divisibilité par 2, différentes pratiques de mathématisation ont ainsi été déployées par la collectivité et ont engendré son évolution.

5.3.3 Analyse synthétique de la séance de calcul mental de division avec reste dans la classe de 6e année

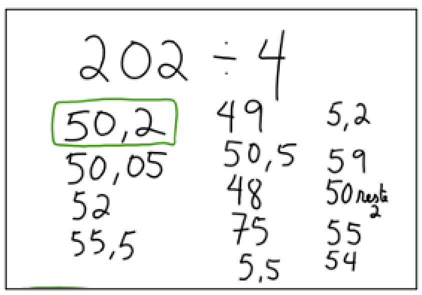
Dans cette séance (voir Annexe C), l'énoncé de la tâche routinière proposée à résoudre est le suivant :

Figure 5.45 Énoncé de la tâche de calcul mental de division avec reste dans la classe de 6e année

Calculer mentalement **202 ÷ 4**

Après une minute de réflexion, chaque élève écrit sa réponse sur un petit panneau et au signal du chercheur-enseignant le lèvent dans les airs. Le chercheur-enseignant inscrit les différentes réponses qu'il voit sur les panneaux au tableau :

Figure 5.46 Traces des différentes réponses obtenues à la division mentale de 202 par 4

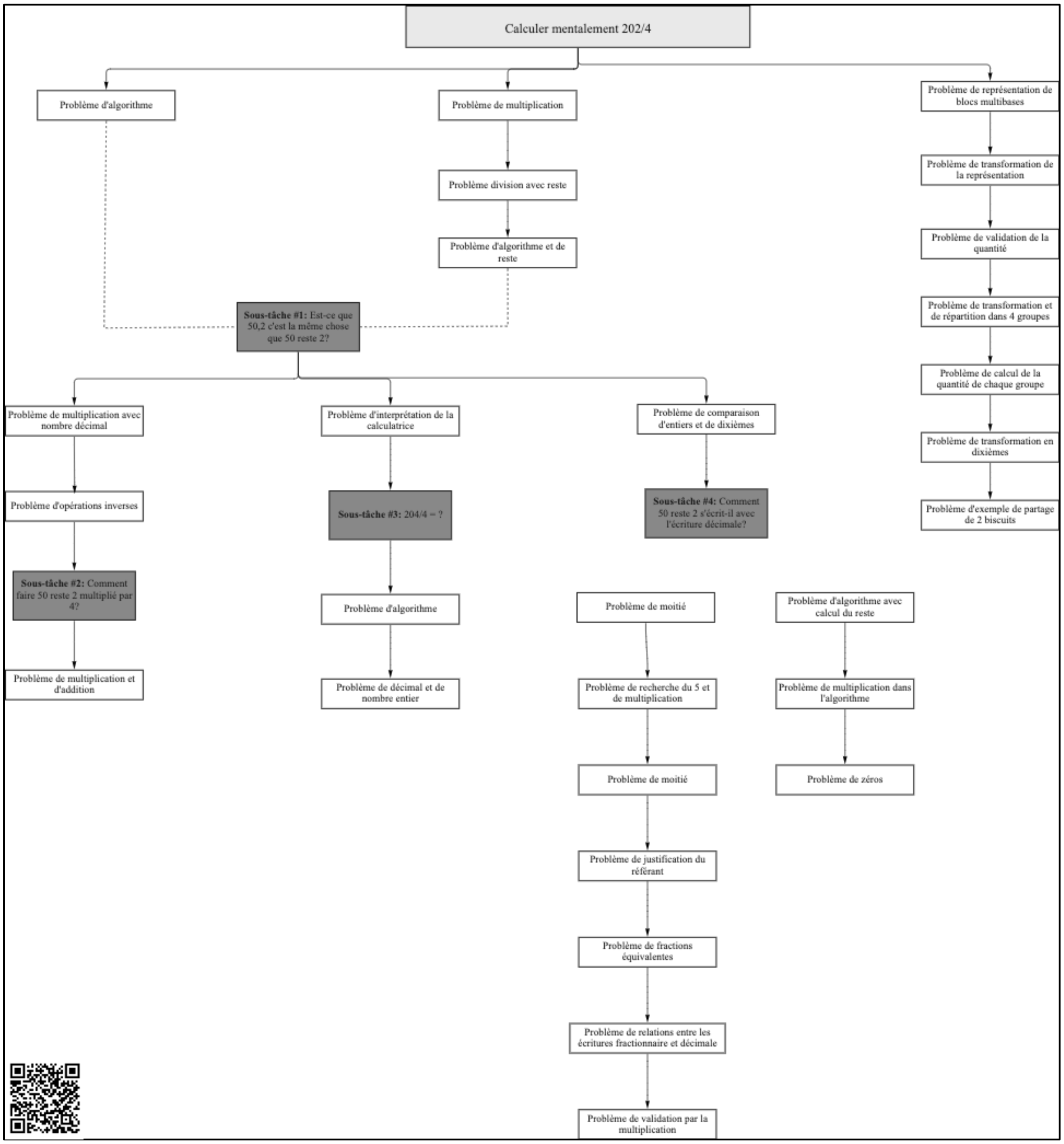


La réponse 50,2 est d'abord discutée. La stratégie proposée pour obtenir cette réponse prend appui sur l'algorithme de division conventionnel et sur le fait que comme il reste 2 à diviser, il faut mettre « virgule 2 ». Une autre stratégie reposant sur la multiplication de 50 par 4 est ensuite donnée et le reste de deux est simplement ajouté :

> Olivia : Bien, dans 200, il y a 4 x 50.
>
> CE : C'était 202.
>
> Olivia : Oui, mais quand on divise, on ne peut pas arriver à un nombre décimal, alors il reste 2. Ça donne 50 reste 2.

Les réponses 50,2 et 50 reste 2 amènent la collectivité à se pencher sur une première sous-tâche mathématique à savoir si les écritures 50 reste 2 et 50,2 veulent dire la même chose. Dans cette séance, cette première sous-tâche engendre un travail mathématique important à travers lequel la sous-tâche évolue. La résolution de cette sous-tâche mathématique déclenche en ce sens un travail autour du fractionnement de l'entier, de l'écriture décimale et de l'écriture fractionnaire. Ce travail mathématique perdure pratiquement jusqu'à la toute fin de la période. À travers l'activité collective qui a pris place en vue de résoudre la tâche routinière de calcul mental de division avec reste, une *évolution par stabilisation phénotypique,* c'est-à-dire une évolution lente qui se produit à même les stratégies proposées, et une *évolution par diversification,* soit une évolution marquée par l'émergence de sous-tâches mathématiques qui font bifurquer la résolution de la tâche routinière initiale pendant un certain temps, sont observées. La figure suivante présente l'évolution poursuivie par cette tâche routinière de divisibilité à travers ses inter-actions avec la collectivité. Cette évolution est discutée par la suite.

Figure 5.47 Schéma de l'ontogénie de la tâche de calcul mental de division avec reste dans la classe de 6e année



Comme l'illustre la Figure 5.47 ci-dessus, quatre sous-tâches mathématiques ont émergé de l'activité collective de résolution de cette tâche routinière de calcul mental de division avec reste. Ces sous-tâches constituent une évolution marquée de cette tâche routinière initiale puisque l'objet de résolution de la collectivité a changé pendant un certain temps. Dans l'activité qui a pris place en classe ce jour-là, ces sous-tâches, qui représentent une *évolution par diversification,* sont :

- Sous-tâche #1 : Est-ce que 50,2 c'est la même chose que 50 reste 2?

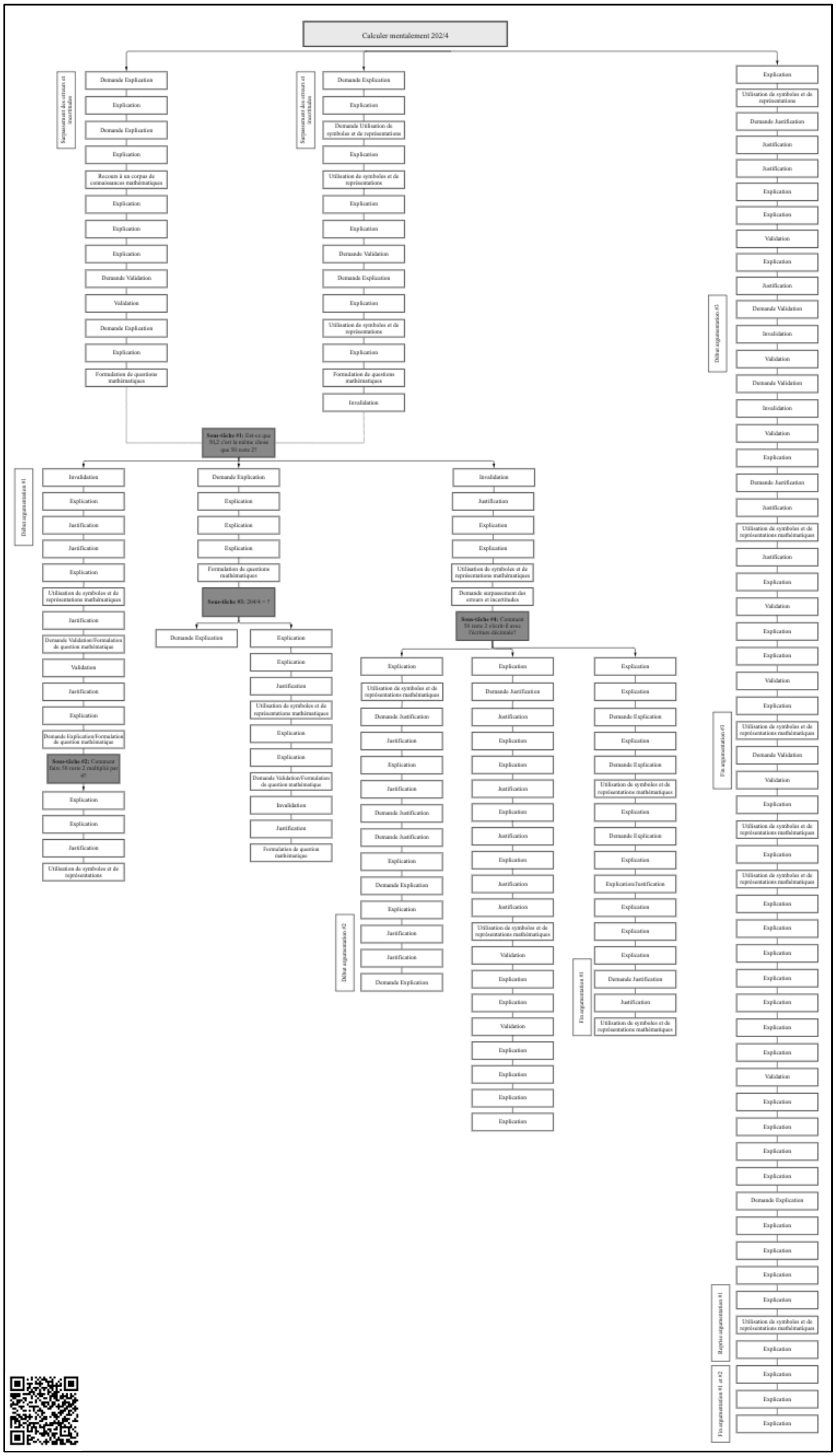
- Sous-tâche #2 : Comment faire 50 reste 2 multiplié par 4?

- Sous-tâche #3 : 204 ÷ 4 = ?

- Sous-tâche #4 : Comment 50 reste 2 s'écrit-il avec l'écriture décimale.

Les sous-tâches #2, #3 et #4 ont émergé de l'activité collective de résolution de la première sous-tâche mathématique. Dans le travail de résolution de ces sous-tâches, la collectivité a déployé différentes stratégies qui leur ont permis d'évoluer par stabilisation phénotypique. Sans entrer dans les détails de chacune de ces stratégies, la Figure 5.47 ci-dessus illustre que la collectivité a utilisé l'algorithme de calcul ainsi que la calculatrice pour tenter d'interpréter le reste. Une stratégie s'intéressant au lien avec l'écriture fractionnaire a également été mise en avant puisque le reste de 2 représente la moitié de 4. Les liens entre l'écriture fractionnaire, l'écriture décimale ainsi que la technique de division par l'algorithme conventionnel de division ont été discutés à travers ces quatre sous-tâches, permettant l'évolution de la tâche routinière initiale. Dans cette séance, différentes pratiques de mathématisation ont contribué à l'évolution par diversification et par stabilisation phénotypique de la tâche routinière initiale. La Figure 5.48 suivante illustre, globalement, les pratiques de mathématisation mises en avant par la collectivité afin de résoudre cette tâche routinière de calcul mental de division avec reste. Ces pratiques de mathématisation sont discutées, de façon synthétique, au regard de l'évolution de la tâche routinière initiale dans ce qui suit.

Figure 5.48 Schéma des pratiques de mathématisation déployées par la collectivité dans la tâche de calcul mental de division avec reste dans la classe de 6e année



Tel que l'illustre la Figure 5.48 ci-dessus, différentes pratiques de mathématisation ont été déployées par la collectivité et ont permis l'évolution de la tâche routinière initiale. En particulier, c'est l'*explication* et le *recours à un corpus de connaissance mathématique* lors de l'utilisation de l'algorithme conventionnel de division pour obtenir la réponse 50,2 ainsi que l'*explication* de la réponse 50 reste 2 qui ont mené la collectivité à investiguer la première sous-tâche mathématique à savoir si 50,2 et 50 reste 2 signifient la même chose. Également, c'est l'*explication* que pour valider si 50,2 et 50 reste 2 valent la même chose, il est possible de multiplier la réponse par 4 qui a engendré la seconde sous-tâche mathématique visant notamment à expliquer comment faire 50 reste 2 multiplié par 4. C'est aussi l'*explication* que la calculatrice place le reste derrière la virgule qui mène la collectivité à investiguer ce qui se passerait dans le cas de la division de 204 par 4. L'algorithme conventionnel de division est à ce moment utilisé pour obtenir la réponse de 51. N'ayant pas de reste, la collectivité est amenée à s'interroger sur le lien entre la portion décimale et le fractionnement de l'entier à partir d'un cas avec reste (202 ÷ 4) et d'un cas sans reste (204 ÷ 4). C'est ensuite l'*invalidation* et la *justification mathématique* que le reste de 2, qui correspond à 2 entiers, deviendrait alors 2 dixièmes qui engendrent la quatrième sous-tâche consistant à déterminer la manière d'écrire 50 reste 2 avec l'écriture décimale. Le travail des sous-tâches #2, #3 et #4 est issu, rappelons-le, du travail de résolution de la première sous-tâche mathématique visant à déterminer si 50,2 et 50 reste 2 veulent dire la même chose. Les différentes pratiques de mathématisation déployées par la collectivité permettent à la première sous-tâche d'évoluer à travers sa résolution autant par stabilisation phénotypique que par diversification. La tâche routinière initiale évolue également à travers ces quatre sous-tâches mathématiques et les différentes stratégies mises en avant pour les résoudre. Également, un peu avant que la séance ne se termine, une dernière stratégie pour résoudre la tâche routinière initiale est proposée. Cette stratégie est mise en route par *l'utilisation de symboles et de représentations mathématiques*, soit les blocs multibases. Le nombre 202 est représenté au tableau par un dessin de blocs multibases et un partage équitable en quatre groupes égaux est fait. À travers ceci, des transformations sont nécessaires pour permettre le partage égal dans les groupes, et un travail de *justification* de la conservation de la quantité, malgré les transformations réalisées, est fait. Dans cette stratégie de représentations par des blocs multibases, différentes *explications* et *justifications mathématiques* sont mises en avant, des *validations* au niveau de la conservation de la quantité sont données et des *représentations et symboles mathématiques* sont *utilisés*. La mise en route de cette stratégie amène la tâche routinière initiale à évoluer par stabilisation phénotypique; cette évolution étant initialement déclenchée par l'*utilisation de la représentation mathématique* des blocs multibases. Ces différentes pratiques de mathématisation mises en avant par la collectivité afin de résoudre cette tâche routinière de calcul mental de division avec reste ont contribué à l'évolution de cette tâche routinière.

5.3.4 Analyse synthétique de la séance sur la tâche sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5e année de Louise

Dans cette séance (voir Annexe D), l'énoncé de la tâche routinière proposée à résoudre est le suivant :

Figure 5.49 Énoncé de la tâche sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5e année de Louise

L'aire d'un rectangle est de 32 cm^2, quel est son périmètre si un côté mesure le double de l'autre côté?

Les élèves travaillent quelques minutes seuls ou en petites équipes sur cette tâche. Au retour, la réponse 15 est investiguée, mais la collectivité ne parvient pas à donner une explication de la provenance de cette réponse. La réponse 16, tout près de 15, est alors proposée. La stratégie utilisée pour obtenir 16 se base sur le fait que le « 2 » de cm^2 indique qu'il faut faire une division par 2, et que 32 divisé en deux donne 16. Cette stratégie amène la collectivité à se pencher sur une première sous-tâche mathématique consistant à expliquer ce qui se cache derrière le « 2 » de cm^2. Une fois que différentes propositions visant à rendre explicite le lien entre l'aire et le « 2 » de cm^2 sont données, une nouvelle stratégie pour résoudre la tâche routinière initiale est mise en avant et mène la collectivité à s'interroger sur la distinction entre un carré et un rectangle. En effet, la stratégie proposée met en avant un carré de dimension 32 par 32, ce qui engendre une invalidation que le carré n'est pas un rectangle :

> Charlie : Le problème dit de trouver le périmètre, mais qu'un côté c'est le double de l'autre. Alors, j'ai fait 32 + 32 = 64. Après, j'ai fait 64 x 4, parce que c'est un carré.
>
> Zack : Ce n'est pas un carré, c'est un rectangle.
>
> CE : Ce que Charlie a fait c'est qu'il a additionné les 32 parce que le problème disait…

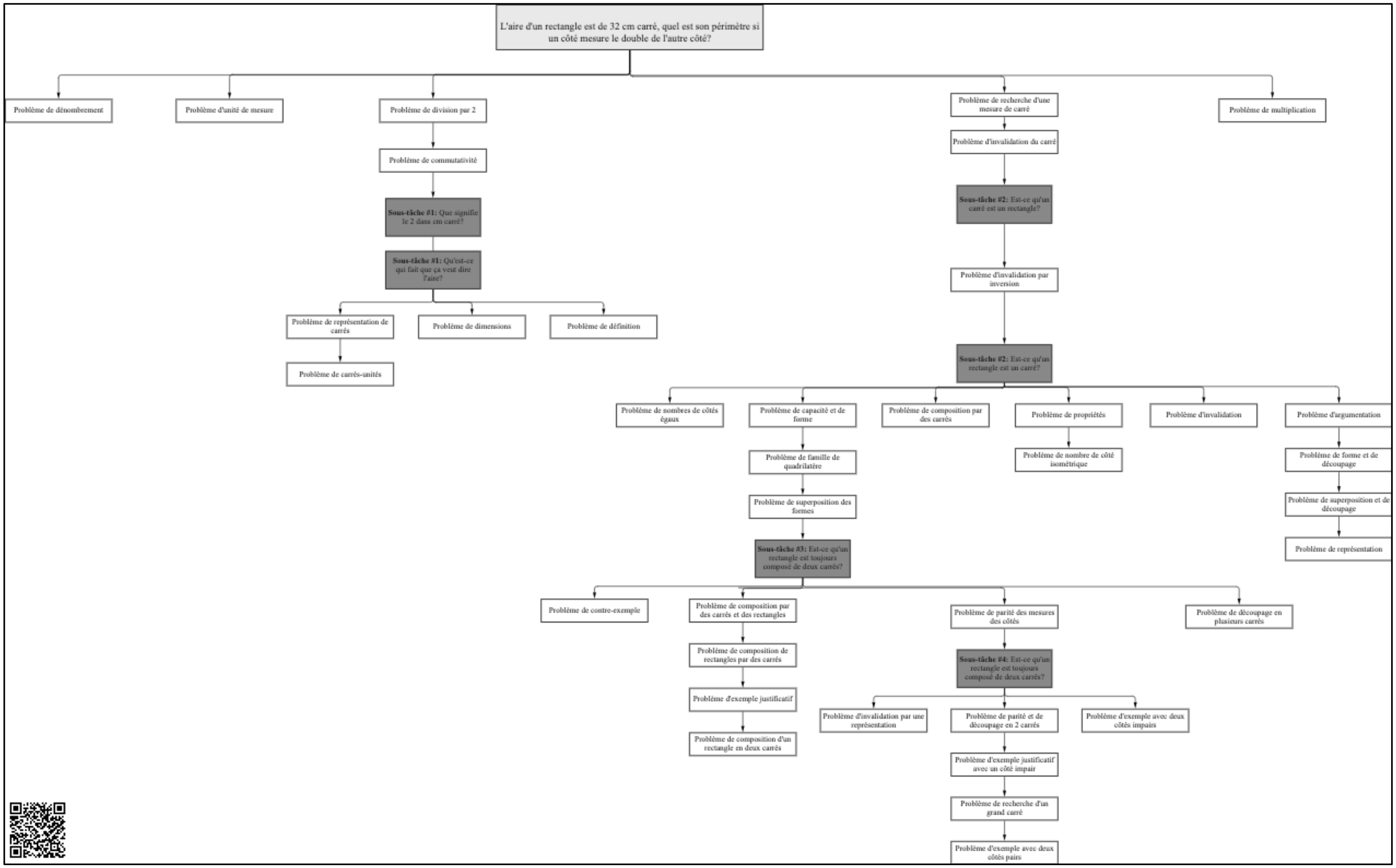
Charlie : C’est parce qu’il faut trouver le double pour un côté.

CE : Ok. Et comme il y a 4 côtés dans un rectangle, tu as multiplié par 4, c’est ça?

Charlie : Oui.

Cette stratégie engendre un travail important, s’étendant jusqu’à la fin de la séance, autour de la distinction entre un carré et un rectangle qui mène également la collectivité à proposer des découpages de figures à partir de carrés et de rectangles. L’activité collective qui a pris place en vue de résoudre cette tâche routinière portant sur l’aire et le périmètre a ainsi engendré une *évolution par stabilisation phénotypique,* c’est-à-dire une évolution lente qui se produit à même les stratégies proposées, et une *évolution par diversification,* soit une évolution marquée par l’émergence de sous-tâches mathématiques qui font bifurquer la résolution de la tâche routinière initiale pendant un certain temps. La Figure 5.50 suivante présente l’évolution poursuivie par cette tâche routinière à travers ses inter-actions avec la collectivité. Cette évolution est discutée par la suite.

Figure 5.50 Schéma de l'ontogénie de la tâche sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5e année de Louise



Comme l'illustre la Figure 5.50 ci-dessus, quatre sous-tâches mathématiques ont émergé de l'activité collective de résolution de la tâche routinière initiale. Ces sous-tâches constituent une évolution marquée de la tâche routinière initiale puisque l'objet de résolution de la collectivité a changé pendant un certain temps. Dans l'activité qui a pris place en classe ce jour-là, ces sous-tâches, qui représentent une *évolution par diversification,* sont :

- Sous-tâche #1 : Que signifie le « 2 » de cm^2? Qu'est-ce qui fait que ça veut dire l'aire?

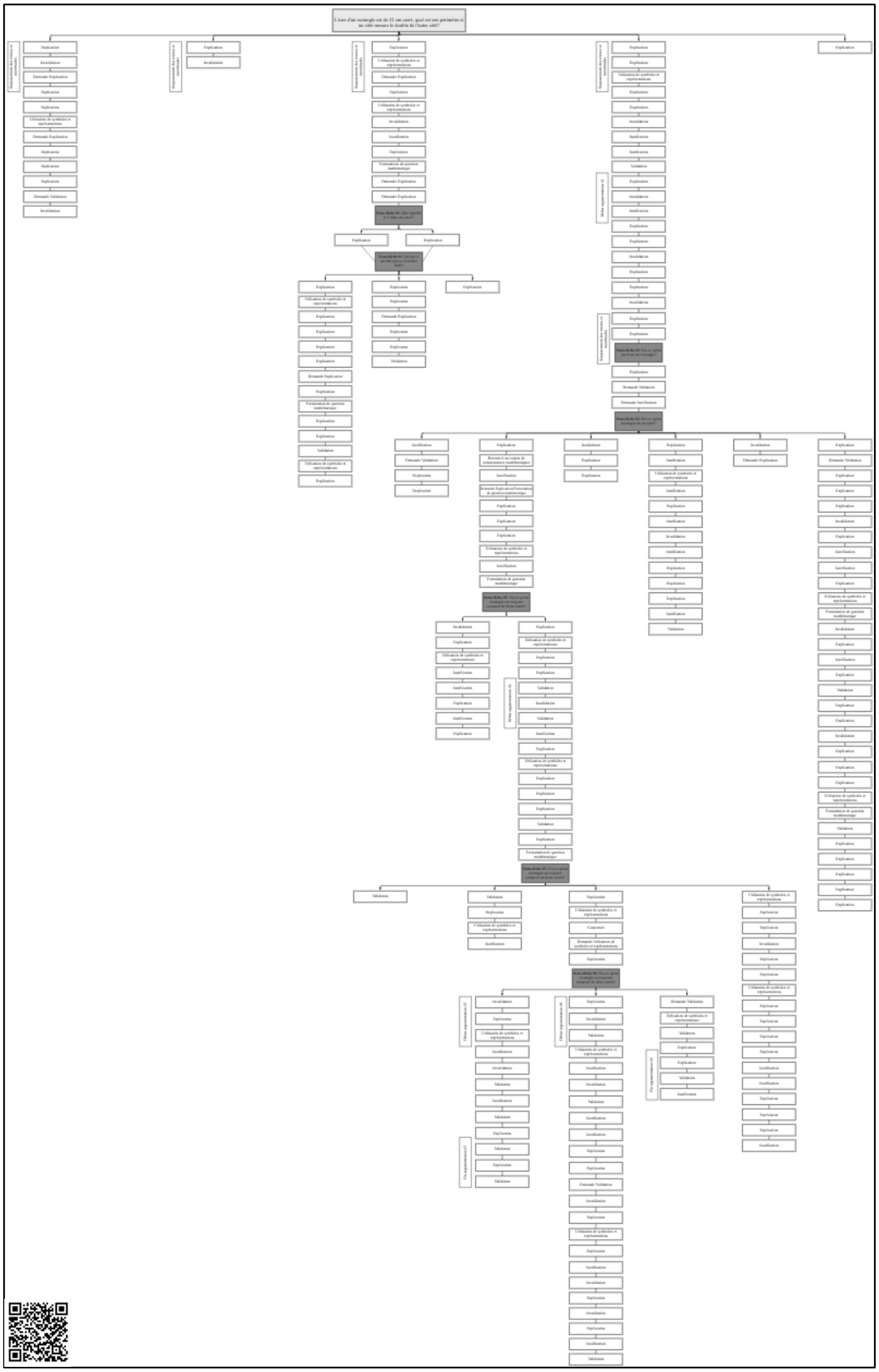
- Sous-tâche #2 : Est-ce qu'un carré est un rectangle? Est-ce qu'un rectangle est un carré?

-Sous-tâche #3 : Est-ce qu'un rectangle est toujours composé de deux carrés? Est-ce qu'un carré est toujours composé de deux rectangles?

- Sous-tâche #4 : Pour découper un rectangle en carré, est-ce qu'il faut que les côtés correspondent à un nombre pair?

Ces différentes sous-tâches mathématiques illustrent la nature du travail mathématique qui a été fait durant cette séance et permet de montrer que la tâche routinière initiale a évolué à travers la résolution collective qui a été faite. Par ailleurs, dans cette séance, différentes pratiques de mathématisation ont été déployées par la collectivité et ont contribué à cette évolution. La Figure 5.51 suivante illustre, globalement, les pratiques de mathématisation mises en avant par la collectivité durant cette séance sur l'aire et le périmètre. Ces pratiques de mathématisation sont discutées de façon synthétique, au regard de l'évolution de la tâche routinière initiale par la suite.

Figure 5.51 Schéma des pratiques de mathématisation déployées par la collectivité dans la tâche sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5e année de Louise



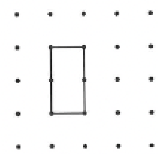
Tel que l'illustre la Figure 5.51 ci-dessus, différentes pratiques de mathématisation ont été déployées par la collectivité et ont permis l'évolution de la tâche routinière initiale. En particulier, c'est l'*explication* que le 2 de cm^2 indique d'effectuer une division qui a engendré la première sous-tâche mathématique d'en expliquer le sens. Également, c'est l'*explication* d'avoir utilisé un carré et l'*invalidation* que cette explication a déclenchée qui a permis à la collectivité de se pencher sur la résolution d'une seconde sous-tâche mathématique, soit celle visant à établir si un carré est un rectangle et vice-versa. Le travail de cette sous-tâche mathématique a mené la collectivité à mettre en avant différentes propriétés du carré et du rectangle. Les *explications* et *justifications* données et les *représentations mathématiques utilisées* pour tenter d'établir des distinctions entre le carré et le rectangle ont ensuite mené la collectivité à travailler sur la résolution d'une troisième sous-tâche mathématique, soit à savoir si un rectangle est toujours composé de deux carrés puis, à l'inverse, si un carré est toujours composé de deux rectangles. À travers l'activité qui a pris place pour résoudre cette troisième sous-tâche mathématique, la *conjecture* que pour découper un rectangle en carrés, il faut que les côtés correspondent à un nombre pair a été *formulée.* La formulation de cette conjecture a engendré la quatrième sous-tâche mathématique visant à établir le statut de vraisemblance de cette conjecture. Différentes stratégies ont alors déployé et ont permis d'*invalider* la conjecture. Avant que la cloche sonne, la collectivité revient directement sur la résolution de la tâche routinière initiale, et la réponse, adéquate, 24 est explicitée. La stratégie utilisée repose sur la multiplication de 4 et 8 qui donne 32 (qui correspond à l'aire du rectangle dans l'énoncé de la tâche initiale) et qui donne un périmètre de 24 cm. Cette stratégie est mise en route, tout particulièrement à partir *d'explications* et de *justifications mathématiques* ainsi que de *représentations mathématiques*. En ce sens, dans cette séance, différentes pratiques de mathématisation ont contribué à faire évoluer cette tâche routinière initiale sur l'aire et le périmètre.

5.3.5 Analyse synthétique de la tâche sur la complétion d'un tout dans la classe de 6^e année

Dans cette séance (voir Annexe E), l'énoncé de la tâche routinière proposée à résoudre est le suivant :

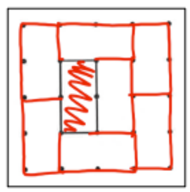
Figure 5.52 Énoncé de la tâche de complétion du tout dans la classe de 6e année

Le rectangle suivant représente $\frac{2}{5}$ d'un tout. Quel est ce tout?



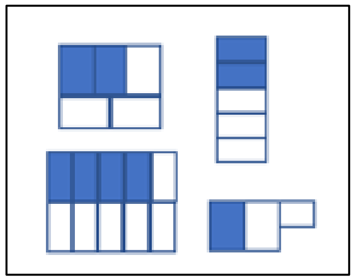
Pour débuter, une stratégie, erronée, consistant à daller le plan pointé en utilisant le rectangle comme étalon de mesure est proposée. Au total, 8 rectangles sont créés par cette stratégie qui est représentée au tableau comme ceci :

Figure 5.53 Traces de la stratégie de dallage



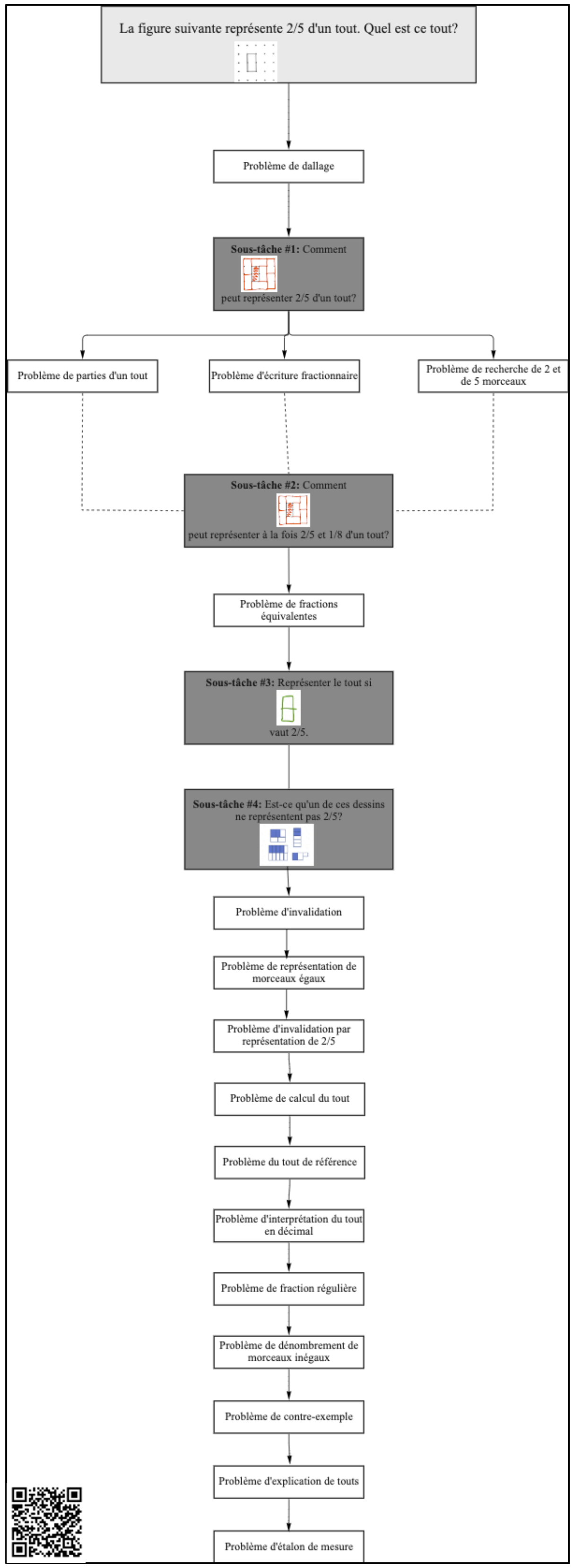
La collectivité est mitigée quant à la validité de cette stratégie. Certains affirment qu'elle fonctionne, mais ne peuvent pas expliquer pourquoi, et d'autres disent qu'elle ne fonctionne pas, mais ne peuvent pas non plus expliquer pourquoi. La stratégie, en elle-même, devient alors le nouvel objet de résolution de la collectivité, ce qui fait émerger une première sous-tâche mathématique à résoudre. À travers cette sous-tâche, la collectivité tente de donner un sens à la stratégie en essayant de voir comment elle pourrait ou non fonctionner. Différentes propositions sont mises en avant pour y arriver, et l'idée que la représentation correspond également à $\frac{1}{8}$ est lancée. La collectivité en vient alors à se demander, faisant émerger une seconde sous-tâche mathématique, si la représentation peut représenter à la fois $\frac{1}{8}$ et $\frac{2}{5}$. Une invalidation est proposée puisque les fractions ne sont pas équivalentes. Elles ne peuvent donc pas avoir une même représentation. La collectivité ne parvient pas à trouver une manière de faire en sorte que cette représentation donne $\frac{2}{5}$ d'un tout malgré leur effort pour y arriver ; ceci les convainc que la représentation proposée ne fonctionne pas. À la suite de ce travail autour de cette stratégie de dallage, une troisième sous-tâche mathématique est mise en avant alors que la collectivité est appelée à représenter le tout si  vaut $\frac{2}{5}$ du tout (le plan pointé ayant été enlevé). Les représentations suivantes, issues d'un travail individuel ou en petits groupes, sont ensuite mises en évidence au tableau :

Figure 5.54 Trace des représentations proposées du tout si  vaut $\frac{2}{5}$

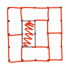


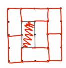
La collectivité se penche alors sur la résolution d'une quatrième sous-tâche mathématique qui consiste à déterminer si une des représentations ne représente pas $\frac{2}{5}$. La représentation  est contestée. La collectivité est mitigée sur la validité de cette représentation. Différents arguments mathématiques sont mis en avant et permettent de lever les doutes sur la validité de cette représentation. La cloche sonne ensuite et la séance se termine ainsi. L'activité collective qui a pris place en vue de résoudre cette tâche routinière a engendré une *évolution par stabilisation phénotypique,* c'est-à-dire une évolution lente qui se produit à même les stratégies proposées, et une *évolution par diversification,* soit une évolution marquée par l'émergence de sous-tâches mathématiques qui font bifurquer la résolution de la tâche routinière initiale pendant un certain temps. La Figure 5.55 suivante présente l'évolution de cette tâche routinière. Cette évolution est discutée de façon synthétique par la suite.

Figure 5.55 Schéma de l'ontogénie de la tâche sur la complétion du tout en classe de 6e année

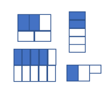


Comme l’illustre la Figure 5.55 ci-dessus, quatre sous-tâches mathématiques ont émergé de l’activité collective de résolution de la tâche routinière initiale. Ces sous-tâches constituent une évolution marquée de la tâche routinière initiale puisque l’objet de résolution de la collectivité a changé pendant un certain temps. Dans l’activité qui a pris place en classe ce jour-là, ces sous-tâches, qui représentent une *évolution par diversification,* sont :

- Sous-tâche #1 : Comment  peut représenter $\frac{2}{5}$ du tout.

- Sous-tâche #2 : Comment  peut représenter à la fois $\frac{1}{8}$ et $\frac{2}{5}$ du tout.

- Sous-tâche #3 : Représenter le tout si  vaut $\frac{2}{5}$.

- Sous-tâche #4 : Est-ce qu’un de ces dessins ne représente pas $\frac{2}{5}$:  ?

Différentes stratégies ont été mises en œuvre par la collectivité afin de résoudre ces sous-tâches mathématiques, leur permettant d’évoluer par stabilisation phénotypique. Par ailleurs, dans cette séance, différentes pratiques de mathématisation ont été déployées par la collectivité et ont contribué à l’évolution de la tâche routinière initiale. La Figure 5.56 suivante illustre, globalement, les pratiques de mathématisation mises en avant par la collectivité durant cette séance. Ces pratiques de mathématisation sont discutées de façon synthétique, au regard de l’évolution de la tâche routinière initiale par la suite.

Figure 5.56 Schéma des pratiques de mathématisation déployée par la collectivité dans la tâche de complétion du tout dans la classe de 6e année

Tel que l'illustre la Figure 5.56 ci-dessus, différentes pratiques de mathématisation ont été déployées par la collectivité et ont permis l'évolution de la tâche routinière initiale. En particulier, c'est l'*utilisation d'une représentation mathématique* lors de la stratégie de dallage qui a engendré la première sous-tâche mathématique. C'est *la formulation d'une question mathématique* à savoir si la représentation de la stratégie de dallage peut représenter à la fois $\frac{1}{8}$ et $\frac{2}{5}$ du tout qui a mené à l'émergence de la seconde sous-tâche mathématique. C'est l'*utilisation de symboles et de représentations mathématiques* dans la stratégie de dallage qui a engendré, par la suite, la formulation de la troisième sous-tâche dans laquelle la tâche routinière initiale est reprise, mais dans laquelle le plan pointé derrière a été retiré. Cette troisième sous-tâche a mené à la collectivité à *utiliser des symboles et représentations mathématiques* permettant de représenter $\frac{2}{5}$ du tout. Les nouvelles représentations mathématiques proposées du tout ont ensuite engendré la naissance de la quatrième sous-tâche à savoir si l'une d'entre elles ne représente pas $\frac{2}{5}$ du tout. C'est finalement, l'*invalidation* de l'une des représentations et l'*argumentation mathématique* qui s'en est suivie qui ont permis à cette quatrième sous-tâche mathématique d'évoluer par stabilisation phénotypique à travers le raffinement collectif des idées mises en avant en vue de la résoudre. C'est en ce sens que différentes pratiques de mathématisation ont contribué à l'évolution de la tâche routinière de complétion du tout.

5.4 Discussion sur l'ensemble des analyses

Les analyses détaillées des sept séances permettent de dégager un regard global sur la manière dont les tâches routinières évoluent en classe. Les analyses détaillées mettent également en lumière le rôle que jouent les pratiques de mathématisation dans cette évolution de tâches routinières. Les lignes qui suivent détaillent ceci.

5.4.1 Regard global sur l'évolution des tâches routinières

Dans les séances, une ou plusieurs stratégies sont d'abord mises en avant par la collectivité afin de résoudre les tâches routinières proposées. Le déploiement d'une stratégie dans la sphère collective permet à la tâche routinière initiale d'évoluer par stabilisation phénotypique. Par moment, dans les séances, la stratégie déployée engendre des réactions qui permettent un développement ou un raffinement de la stratégie, ce qui permet la poursuite de la stabilisation phénotypique. Par exemple, dans la séance sur la divisibilité par 4 dans la classe de 6e année, la stratégie de calcul par l'algorithme de division mise en avant pour résoudre la tâche routinière initiale a généré une distinction entre les termes « divisés » et « divisibles ». Une invalidation de la réponse obtenue par l'algorithme a ensuite été mise en avant ce qui a déclenché une explication de la transformation du reste en écriture décimale (voir Figure 5.9). La stratégie de calcul par l'algorithme de division s'est ainsi développée à travers les inter-actions en classe permettant de collectivement y donner un sens et y adhérer.

À d'autres occasions dans les séances, la stratégie proposée devient, dans un contexte plus général, l'objet même de résolution de la collectivité ce qui engendre une évolution par diversification. À travers cette diversification, la collectivité se penche sur une nouvelle sous-tâche mathématique à résoudre. Par exemple, dans cette même séance sur la divisibilité par 4, la stratégie de décomposition et de groupements mise en avant pour résoudre cette tâche routinière est devenue l'objet de résolution de la collectivité qui a tenté, dans un contexte général, de vérifier s'il est possible de décomposer un nombre en plusieurs parties et de vérifier si chaque partie est divisible pour savoir si le nombre au complet est divisible. L'émergence d'une sous-tâche mathématique régénère l'activité de la collectivité qui propose de nouvelles stratégies permettant de résoudre la sous-tâche mathématique dont il est question. Une évolution par stabilisation phénotypique de la sous-tâche est ainsi observée par la mise en œuvre de ces stratégies. Encore une fois, l'évolution par stabilisation phénotypique se poursuit si une stratégie est développée ou raffinée par la collectivité. Une nouvelle évolution par diversification peut également survenir si une stratégie mise en route pour résoudre une sous-tâche mathématique devient, à son tour, un nouvel objet à résoudre et sur lequel la collectivité se penche pendant un moment.

Ainsi, dans les séances, lorsque les stratégies ne sont pas exploitées par la collectivité, elles n'engendrent plus d'évolution. Toutefois, lorsqu'elles sont exploitées, le processus recommence et soit la stratégie est développée ou raffinée et engendre la poursuite de l'évolution par stabilisation phénotypique, soit la stratégie fait l'objet d'une nouvelle sous-tâche mathématique et une diversification se produit. Dans les séances, c'est globalement de cette manière que les tâches routinières évoluent.

5.4.2 Regard global sur le rôle des pratiques de mathématisation dans l'évolution des tâches routinières

Les analyses détaillées des sept séances montrent que toutes les pratiques de mathématisation, quelles qu'elles soient, contribuent à l'évolution des tâches routinières autant pour la stabilisation phénotypique que pour la diversification. En effet, les analyses mettent en lumière qu'il n'y a pas une ou un petit groupe de pratiques de mathématisation, qui, à elle seule ou à lui seul, engendre l'évolution des tâches routinières initiales.

Dans le cas de l'évolution par stabilisation phénotypique, soit l'évolution lente dans laquelle les tâches se transforment à travers les stratégies mises en avant pour la résoudre, différentes pratiques de mathématisation contribuent à cette évolution. En effet, les stratégies déployées pour résoudre les tâches routinières initiales, ou encore les sous-tâches mathématiques qui émergent en classe, sont mises en œuvre par le biais de différentes pratiques de mathématisation. Regardons quelques exemples pour illustrer ceci.

Dans la séance sur la divisibilité par 4, la stratégie de décomposition du nombre et de groupements, explicitée à la section 5.1.3, a été mise en route par le biais d'une *explication* et d'une *justification mathématique.* Une *invalidation* a ensuite été énoncée, ce qui a engendré une *argumentation mathématique* puisque la validité de la stratégie de décomposition du nombre et de groupements était alors contestée. Une nouvelle *explication mathématique* est par la suite donnée. Ces différentes pratiques de mathématisation permettent de mettre en route cette stratégie de décomposition et de groupements dans la sphère collective.

Également, dans la séance sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5^{e} année de Gisèle, tel que discuté à la section 5.2.3, la stratégie de dénombrement des carrés-unités situés à la frontière intérieure du rectangle est mise en route par le biais de différentes pratiques de mathématisation. En particulier, à travers cette stratégie, la collectivité tente de *surpasser une erreur mathématique* puisque la stratégie mène à la réponse erronée de 20 pour le calcul du périmètre. Dans ce travail de surpassement d'une erreur mathématique, des *explications mathématiques* sont données, des *justifications mathématiques* sont proposées, certains éléments sont *validés*, et des *représentations mathématiques* sont *utilisées* pour soutenir les propositions faites. Ces différentes pratiques de mathématisation permettent de mettre en route la stratégie de dénombrement des carrés-unités situés à la frontière intérieure du rectangle et de collectivement la raffiner, la faire avancer, représentant une évolution par stabilisation phénotypique.

De manière analogue, dans la séance sur la divisibilité par 2 dans la classe de 5e année de Louise, discutée à la section 5.3.2, un travail de décomposition du nombre 106 est fait par la collectivité. À un moment donné, des *explications mathématiques* concernant le fait que plusieurs 3 et 6 sont présents dans les décompositions proposées et que ces décompositions de 106 étaient paires sont données. Une *invalidation* est mise en avant et est suivie de l'exemple de 53 + 53 qui est impair. Ces explications mathématiques et cette invalidation mènent à la *formulation d'une conjecture mathématique* concernant le fait que lorsqu'un nombre pair est divisé en deux le quotient est impair, sauf dans le cas où le nombre initial se termine par 0. Ces différentes pratiques de mathématisation permettent de faire évoluer lentement, par stabilisation phénotypique, la sous-tâche #3 qui vise à trouver différentes décompositions du nombre 106.

Ces exemples veulent illustrer qu'une diversité de pratiques de mathématisation permettent de mettre en route des stratégies qui visent à résoudre les tâches routinières proposées, ou encore de résoudre les sous-tâches mathématiques qui ont émergé des inter-actions en classe. Les analyses détaillées qui ont été réalisées montrent en ce sens que toutes les pratiques de mathématisation, peu importe soient-elles, permettent le déploiement de stratégies et donc permettent une évolution par stabilisation phénotypique.

Dans le cas de l'évolution par diversification, c'est-à-dire l'évolution marquée dans laquelle un changement de l'objet de résolution se produit, différentes pratiques de mathématisation contribuent à cette évolution. En effet, dans les séances, différentes pratiques de mathématisation ont généré de nouvelles sous-tâches mathématiques sur lesquelles la collectivité s'est penchée pendant un moment. Regardons quelques exemples pour illustrer ceci.

Dans la tâche sur la complétion du tout dans la classe de 6e année, abordée à la section 5.3.5, quatre sous-tâches mathématiques ont émergé des inter-actions en classe. Ces sous-tâches, tel qu'explicité à la section 5.3.5, proviennent de l'utilisation de l'*utilisation de symboles et de représentations mathématiques*, de *la formulation d'une question mathématique* ainsi que de l'*invalidation* et de l'*argumentation mathématique*. Ces différentes pratiques de mathématisation ont engendré ces sous-tâches mathématiques lors de cette séance.

Également, dans la tâche de calcul mental de la division avec reste dans la classe de 6e année, discutée à la section 5.3.3, les quatre sous-tâches mathématiques qui ont émergé de l'activité collective déployée pour résoudre cette tâche routinière initiale proviennent d'*explications mathématiques*, du *recours à un corpus de connaissances mathématiques* ainsi que de l'*invalidation* et de la *justification mathématique*.

De manière analogue, différentes pratiques de mathématisation sont responsables de l'émergence des huit sous-tâches mathématiques dans la séance sur les notes de musique dans la classe de 6e année. En effet, tel qu'abordé à la section 5.3.1, ces sous-tâches proviennent du *surpassement d'une erreur mathématique*, d'*explications mathématiques*, d'une *généralisation*, d'une *argumentation* ainsi que de la *formulation de questions mathématiques*.

Les analyses conduites dans le cadre de cette thèse montrent ainsi qu'une diversité de pratiques de mathématisation contribue à l'émergence de sous-tâches mathématiques, permettant aux tâches routinières initiales d'évoluer par diversification. Les sous-tâches mathématiques qui surviennent en classe permettent par ailleurs de ressourcer l'activité de la collectivité. De nouvelles stratégies pour les résoudre sont déployées par le biais de différentes pratiques de mathématisation qui contribuent à leur évolution par stabilisation phénotypique et qui peuvent également engendrer une nouvelle diversification, comme discuté à la section 5.4.1 précédente.

En somme, les analyses détaillées mettent en lumière que toutes les pratiques de mathématisation, peu importe soient-elles, sont au cœur de l'évolution des tâches routinières initiales et ce autant pour l'évolution par stabilisation phénotypique que pour l'évolution par diversification. Les analyses conduites ont également permis de faire ressortir des résultats plus saillants. Ceux-ci font l'objet du chapitre suivant qui présente les résultats issus de cette recherche doctorale.

CHAPITRE 6
RÉSULTATS DE RECHERCHE

Ce chapitre présente divers résultats qui se dégagent de cette recherche doctorale. Ceux-ci permettent d'éclairer la manière dont des tâches routinières peuvent évoluer à travers l'activité collective déployée pour les résoudre, tout en mettant en lumière le rôle des pratiques de mathématisation dans leur évolution. L'analyse des données permet de dégager cinq éléments, qui composent les cinq sections de ce chapitre, qui favorisent l'évolution des tâches routinières : la formation d'une boucle itérative de tâches à résoudre dans la sphère collective; la mise en place de situations d'explication, de justification et de validation; l'utilisation d'exemples; l'émergence d'incertitude; et l'émergence de problèmes mathématiques collectifs.

6.1 La formation d'une boucle itérative de tâches à résoudre dans la sphère collective

L'analyse des données montre que la formation d'une boucle itérative de tâches à résoudre dans la sphère collective joue un rôle dans l'évolution des tâches routinières. En effet, les analyses révèlent que les tâches routinières déclenchent des pratiques de mathématisation. Les pratiques de mathématisation mises en avant génèrent de nouvelles pratiques de mathématisation chez la collectivité. Les pratiques de mathématisation déployées en classe permettent de mettre en route des problèmes mathématiques. Ces problèmes mathématiques agissent alors comme de nouvelles tâches disponibles sur lesquelles la collectivité peut réagir en retour. Cette boucle itérative de tâche à résoudre se forme donc ainsi :

(1) Les tâches routinières déclenchent des pratiques de mathématisation;

(2) Les pratiques de mathématisation sont autogénératives;

(3) Les pratiques de mathématisation sont consubstantielles aux problèmes mathématiques;

(4) Les problèmes mathématiques forment de nouvelles tâches disponibles.

Lorsque la collectivité tente de résoudre ces nouvelles tâches disponibles dans la sphère collective, elle met en œuvre de nouvelles pratiques de mathématisation, qui constituent alors de nouveaux problèmes mathématiques, et la boucle itérative se poursuit ainsi. Cette boucle itérative s'alimente d'elle-même à travers l'activité collective qui se déploie pour résoudre les tâches routinières initiales. Cette boucle itérative permet de montrer la manière avec laquelle les tâches routinières évoluent au sein de l'activité collective mise en avant pour les résoudre. Chacun des éléments de cette boucle itérative est décortiqué et exemplifié dans les prochaines sous-sections en prenant appui sur la séance de divisibilité par 4.

6.1.1 Les tâches routinières déclenchent des pratiques de mathématisation

L'analyse des données montre que lorsque des tâches routinières sont données en classe à résoudre, elles déclenchent des pratiques de mathématisation de la part de la collectivité. Puisque la manière de résoudre une tâche routinière est connue de la collectivité, par définition d'une tâche routinière, l'analyse des données montre qu'aussitôt que celles-ci sont proposées en classe, la collectivité s'engage dans sa résolution en déployant différentes pratiques de mathématisation. Lors de l'exploitation collective de la tâche routinière initiale, les pratiques de mathématisation mises en avant permettent d'initier le travail collectif de la résolution de la tâche routinière proposée.

Par exemple, dans la tâche de divisibilité par 4, cinq différentes stratégies ont été mises en avant par la collectivité en vue de la résoudre :

- Stratégie 1 : Analyser la parité du dividende et du diviseur;

- Stratégie 2 : Définir la notion de divisibilité;

- Stratégie 3 : Décomposer le nombre et faire des groupements;

- Stratégie 4 : Diviser directement par 4 avec l'algorithme de calcul;

- Stratégie 5 : Analyser la divisibilité des chiffres du nombre.

Le déploiement de ces stratégies au sein de la sphère collective prend appui sur différentes pratiques de mathématisation. En effet, l'analyse de cette séance montre que les deux premières stratégies ont été mises en route par le biais de la pratique de mathématisation *Recours à un corpus de connaissances mathématiques établies*. La première stratégie renvoie à une affirmation faite à savoir que « tout nombre pair se divise par un nombre pair ». Lorsque questionné sur cette affirmation, une réponse que « l'enseignant de l'an dernier disait cela » est énoncée. En ce sens, bien que l'affirmation soit une condition essentielle, mais non suffisante, une tentative de prendre appui sur un corpus de connaissances mathématiques établies est faite. Dans la seconde stratégie, une utilisation de la définition du terme « divisibilité » est mise en avant par le biais de l'affirmation que « ce ne sont pas tous les nombres qui donnent un nombre entier comme réponse quand on le divise ». Cette affirmation n'est pas offerte en tant que contre-exemple de la stratégie précédente, mais bien comme une stratégie pour résoudre la tâche routinière initiale. Cet appui sur une définition mathématique renvoie à un corpus de connaissances mathématiques établies.

Pour leur part, les trois autres stratégies sont mises en route à partir de la pratique de mathématisation *explication mathématique*. Ces stratégies prennent effectivement forme alors que des explications mathématiques sur la manière de procéder pour savoir si le nombre est divisible par 4 sont exposées à la collectivité. Pour la troisième stratégie, l'explication suivante est donnée :

Figure 6.1 Extrait de l'explication de la troisième stratégie dans la séance sur la divisibilité par 4

J'ai divisé les centaines en premier par 4 pour avoir 400 ÷ 4 = 100. Ensuite, le 98, je l'ai divisé en paquets de 20 pour arriver à 80 en faisant 4 paquets. Il reste alors 18, mais ça ne se divise pas par 4.

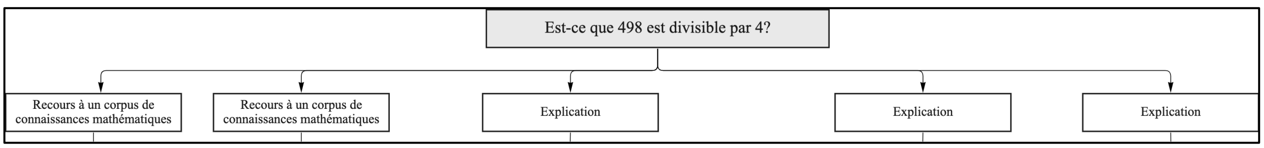
Cette explication se fonde sur la décomposition du nombre en différentes parties pour ensuite vérifier si chaque partie est divisible par 4. De son côté, la quatrième stratégie expose une courte explication soit « d'avoir divisé directement le nombre par 4 pour obtenir 124,5 ». Finalement, la cinquième stratégie prend appui sur une explication qui repose sur une analyse de la divisibilité des chiffres qui composent le nombre. L'explication proposée est celle-ci :

Figure 6.2 Extrait de l'explication de la cinquième stratégie dans la séance sur la divisibilité par 4

Moi j'ai fait 4 ÷ 4 = 1, ensuite j'ai regardé le 9, mais il n'est pas divisible par 4, alors ça ne marche pas.

Ces différentes explications mathématiques permettent de mettre en route ces trois stratégies dans la sphère collective. La tâche routinière de divisibilité par 4, dans cette classe de 6e année, a ainsi stimulé le déploiement de pratiques de mathématisation de la part de la collectivité. La Figure 6.3 illustre les premières pratiques de mathématisation déclenchées par cette tâche routinière.

Figure 6.3 Les premières pratiques de mathématisation déclenchées par la tâche de divisibilité par 4



Cet exemple met en lumière le potentiel qu'ont les tâches routinières de déclencher des pratiques de mathématisation chez la collectivité. Les analyses montrent à cet égard que des pratiques de mathématisation sont déployées par la collectivité en réaction à la tâche initiale qui permet de les stimuler. Par la nature routinière de ces tâches, la collectivité arrive par ailleurs aisément à les mettre en avant. Une fois déployées au sein de la sphère collective, ces pratiques de mathématisation agissent en tant que stimuli d'une réaction mathématique de la part de la collectivité, et en retour déclenchent de nouvelles pratiques de mathématisation.

6.1.2 Les pratiques de mathématisation sont autogénératives

Les analyses montrent que les pratiques de mathématisation mises en œuvre en classe peuvent engendrer la mobilisation de nouvelles pratiques de mathématisation, dans une sorte d'effet boule de neige. En effet, lorsque des pratiques de mathématisation sont déployées en classe, elles font partie de la sphère des possibilités et peuvent stimuler un nouveau déploiement de pratiques de mathématisation. Les pratiques de mathématisation peuvent être vues comme étant autogénératives.

Dans la tâche de divisibilité par 4, ce phénomène se produit lorsque Mégane affirme avoir trouvé une raison qui explique pourquoi toujours multiplier par 4 pour obtenir un nombre pair fonctionne et qu'un travail de justification au niveau du collectif s'enclenche. Voici l'extrait :

Figure 6.4 Extrait d'une explication de la multiplication par 4 qui donne un nombre pair qui déclenche un travail de justification

Mégane affirme alors avoir trouvé une raison qui explique pourquoi cela fonctionne toujours de multiplier par 4 pour avoir un nombre pair :

Mégane :	Un nombre pair plus un nombre pair donne un nombre pair, et même si tu fais ça plusieurs fois, comme 4 + 4 + 4 + 4 + 4 +4, ça va toujours donner un nombre pair.
CE :	Ok, alors deux nombres pairs ensemble donnent un nombre pair, si on ajoute un autre nombre pair, ça va donner pair.
Mégane :	Même si on l'additionne plusieurs fois, ça va toujours fonctionner.
CE :	Mais, si au début j'avais eu un nombre impair ?
Mégane :	Ah, là, ça ne fonctionnerait pas.

L'explication prend appui sur un *corpus de connaissances mathématiques établies* à savoir que deux nombres pairs additionnés ensemble donnent un nombre pair. Cette explication est appuyée d'un *exemple*[15], 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4. Une *explication* supplémentaire qui vient réaffirmer l'idée énoncée est ensuite donnée. À son tour, cette explication engendre une mise en lumière de l'aspect général de cette affirmation par la *généralisation* que peu importe le nombre de fois que des nombres pairs sont additionnés ensemble leur somme donne un autre nombre pair. Cette explication et cette généralisation déclenchent alors la *formulation d'une question mathématique* à savoir si cela fonctionnerait également pour un nombre impair. Une *invalidation* est alors mise en avant. Voici la suite de l'extrait :

Figure 6.5 Suite du travail de justification de la multiplication par 4 qui donne un nombre pair

Le CE reprend l'explication proposée puis donne un autre exemple :

CE :	14 + 14 ça donne 28 qui est pair, je lui en ajoute un autre 14 et un autre 14, ça fait aussi 28. Et, au total, 28 + 28 ça donne 56.

Le CE propose alors d'essayer avec un nombre impair, et suggère 15. Un calcul est alors fait pour obtenir 60, qui est pair également. La proposition fonctionne également pour les nombres impairs.

[15] L'utilisation d'exemple est une pratique de mathématisation qui ressort de l'analyse des données. Cette pratique est abordée à la section 6.3.

L'invalidation déclenche une reprise de l'*explication* qui est appuyée d'un *exemple* avec le nombre pair 14. Une *justification* du fait que l'addition de 14 + 14 donne un nombre pair est mise en avant et un *exemple* avec le nombre impair 15 est donné. Cet exemple stimule une *validation*, qui est *justifiée* par le fait que cela donne 60. Les échanges se poursuivent :

Figure 6.6 Suite du travail de justification de la multiplication par 4 qui donne un nombre pair par l'exemple des boites de souliers

À ce moment, un élève propose un exemple de la vie courante en guise de justification additionnelle :

Kevin :	Dans la vraie vie, ça fonctionne comme ça. Dans une paire de souliers, il y en a deux et ça ne serait pas logique qu'à un moment donné ça devienne impair avec des paires de souliers. Il y a toujours deux souliers dans une boite.
CE :	Il y a toujours deux souliers dans une boite, alors si on a deux boites, on aura 4 souliers.

Tom ajoute alors que :

Tom :	Multiplier 9 par 4, c'est 9 + 9 + 9 + 9 ou encore on peut faire 4 + 4 + 4 … 9 fois. Ça fait que même si on a un nombre impair, comme 37, de multiplier par 4, c'est 37 + 37 + 37 + 37.

Ces exemples et validations stimulent une nouvelle *justification* qui est appuyée par *l'exemple* des paires de souliers qui vient appuyer que la réponse d'une telle somme ne peut pas être impaire, car il y a deux souliers dans une boite. Ceci engendre l'*exemple* que deux boites donnent quatre souliers. Ces différents exemples de nature additive font émerger une nouvelle *justification*, soit le lien entre l'addition et la multiplication. Cet élément mathématique n'avait pas été justifié alors qu'il permet de lier les explications et les exemples donnés avec la multiplication par 4 dont il est question dans le travail de cette troisième sous-tâche. Cette justification s'appuie alors sur d'autres *exemples*. La discussion se poursuit :

Figure 6.7 Suite du travail de justification à partir de l'exemple des boites de souliers et proposition d'une généralisation

Le CE leur demande comment ils écriraient le 37 à l'aide de la proposition des boites de souliers.

Kevin :	37 boites de souliers, cela vient en 2, en paire de deux dans chaque boite. Comme on en met deux dans chaque boite, on a 37 paires de souliers.
CE :	C'est intéressant ton exemple de boite de souliers. Avec 37 paires de souliers, parce que c'est des pairs, on en a deux dans chaque boite, au final j'aurais un nombre pair de souliers. 37 alors ça donnerait 74 souliers, qui est un nombre pair. Est-ce que je peux me servir de ceci pour comprendre le fois 4?

Le CE reprend alors les idées qui ont été discutées. Félix complète les propos du CE en ajoutant que « multiplier par 2 donne un nombre pair et si on multiplie encore par 2, on aura encore un autre nombre pair ». À ce moment, Élise lance une autre idée :

Élise :	Tout nombre que l'on veut multiplier par un nombre pair donne toujours un nombre pair.
CE :	N'importe quel nombre que je prends, si je le multiplie par 2, j'obtiens un nombre pair.
Élise :	En fait, ce n'est pas obligé d'être multiplié par 2, mais aussi 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 ou n'importe quel nombre pair. Ça donnera toujours un nombre pair.

Le CE propose de rester centrer sur 2 et 4, car ils devraient aussi justifier pour les autres cas. Il réexplique alors que s'il multiplie par 2 cela donne un nombre pair, et que dans le cas de 4, il faudrait multiplier par 2 une autre fois, ce qui donnerait encore un nombre pair.

L'exemple de 37 et celui des boites de souliers déclenchent la f*ormulation* d'une nouvelle *question mathématique* à savoir comment reprendre cette justification et l'exemple de 37 à partir de boites de souliers. Une *explication* et une *justification* mathématiques sont données en retour, puis une demande d'expliquer la multiplication par 4 à partir de ceci s'en suit. Une *explication* que c'est comme de multiplier par 2 deux fois est ensuite proposée en prenant appui sur une *représentation mathématique*. Ceci déclenche une nouvelle *justification* qui est soutenue d'une *représentation mathématique*. L'*explication* que « tout nombre multiplié par un nombre pair donne un nombre pair » est ensuite donnée. Cette *explication* est reprise, et entraine une *généralisation* qui précise que cela fonctionne pour toutes les multiplications par un nombre pair que ce soit par 2, 4, 8 ou autre. Une centration sur 2 et 4 est demandée et est suivie de la *justification* que « dans le cas de 4, c'est comme de multiplier deux fois par 2 et à chaque fois on obtient un nombre pair ». Cette justification agit comme synthèse du travail justificatif qui vient d'être réalisé. Les échanges se poursuivent encore :

Figure 6.8 Fin du travail de justification de la multiplication par 4 qui donne un nombre pair

Un élève dit alors que pour les quarante-cinq exemples qu'il a faits, et même dans les multiplications à deux chiffres, cela fonctionne toujours. Le CE propose alors que si, par exemple, il était rendu à 51 dans ses multiplications, alors il aurait :

CE : 51 x 2 = 102 et 102 x 2 = 204. Donc, j'ai un nombre pair, 102, et je le double.

Au tableau, l'image des boites de souliers est reprise, et les traces ressemblent à ceci :

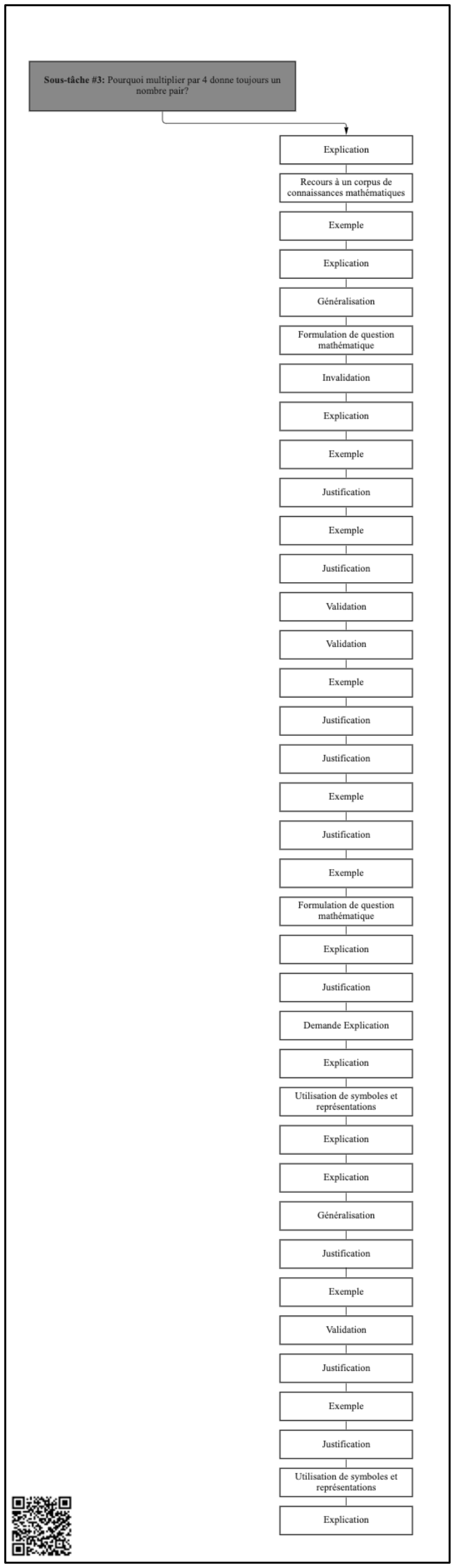
$$\boxed{\boxed{51} \times 2} \times 2$$

Le CE mentionne alors que cela peut les aider à comprendre la multiplication par 4.

Une *validation* appuyée par des *exemples* multiples est donnée en guise de justification supplémentaire. Ceci donne lieu à *l'exemple* du nombre 51 qui est utilisé pour *justifier* qu'un nombre impair devient pair quand il est doublé et qu'il reste pair quand il est encore doublé. Une *représentation mathématique* au tableau soutient cette justification par une image qui reprend les boites de souliers. Une *explication* à savoir que cela peut aider à comprendre la multiplication par 4 est finalement donnée.

Cet enchainement de pratiques de mathématisation est déclenché à partir de l'explication qu'un nombre pair additionné d'un nombre pair donne un nombre pair. La Figure 6.9 suivante représente cet enchainement.

Figure 6.9 Les pratiques de mathématisation sont autogénératives



Cet exemple montre l'effet boule de neige que peut avoir le déploiement d'une pratique de mathématisation au sein de la sphère collective où une pratique de mathématisation peut en déclencher une autre, qui peut en déclencher une autre et ainsi de suite. Faisant partie de la sphère collective, les pratiques de mathématisation qui sont déployées agissent en tant que stimuli d'une réaction mathématique de la part de la collectivité; réaction qui s'exprime sous la forme de la mise en œuvre d'une pratique de mathématisation supplémentaire. C'est en ce sens que l'analyse des données met en lumière le fait que les pratiques de mathématisation sont autogénératives. En classe, celles-ci jouent donc un rôle important dans l'évolution des tâches routinières. En plus d'engendrer le déploiement de nouvelles pratiques de mathématisation, leur déploiement permet de mettre en route différents problèmes mathématiques qui, au sein de la sphère collective, agissent comme des tâches disponibles sur lesquelles la collectivité peut réagir.

6.1.3 Les pratiques de mathématisation sont consubstantielles aux problèmes mathématiques

L'analyse des données montre que les pratiques de mathématisation sont consubstantielles aux problèmes mathématiques, car ils se constituent l'un l'autre. En effet, tel que discuté au Chapitre 2, l'activité de résolution de problèmes mathématiques peut être conceptualisée comme étant à la fois la pose d'un problème et un pas dans la résolution de ce même problème. Sous cet angle, les pratiques de mathématisation déployées pour résoudre une tâche mathématique peuvent également être vues comme une activité de pose(|résolution) de problèmes mathématiques. L'analyse en termes de pratiques de mathématisation de la sous-section précédente est ici reprise, représentée dans les encadrés grisés, pour illustrer ceci.

Figure 6.10 Première partie de l'analyse des pratiques de mathématisation de la sous-section 6.1.2

L'explication de Mégane prend appui sur un *corpus de connaissances mathématiques établies* à savoir que deux nombres pairs additionnés ensemble donnent un nombre pair. Cette explication est appuyée d'un *exemple*, 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4. Une *explication* supplémentaire qui vient réaffirmer l'idée énoncée est ensuite donnée. À son tour, cette explication engendre une mise en lumière de l'aspect général de cette affirmation par la *généralisation* que peu importe le nombre de fois que des nombres pairs sont additionnés ensemble leur somme donne un autre nombre pair.

Le déploiement de ces pratiques de mathématisation vise à répondre à la sous-tâche « Pourquoi multiplier par 4 donne toujours un nombre pair? ». En réponse à celle-ci, ces pratiques de mathématisation permettent, au même moment, de constituer un problème d'addition de nombres pairs par le biais des pratiques de mathématisation que sont l'explication, le recours à un corpus de connaissances mathématiques établies, l'exemple et la généralisation. Ce problème d'addition de nombres pairs a ensuite fait émerger un problème d'addition de nombres impairs.

Figure 6.11 Deuxième partie de l'analyse des pratiques de mathématisation de la sous-section 6.1.2

> Cette explication et cette généralisation déclenchent alors la *formulation d'une question mathématique* à savoir si cela fonctionnerait également pour un nombre impair. Une *invalidation* est alors mise en avant. *L'invalidation* déclenche une reprise de l'*explication* qui est appuyée d'un *exemple* avec le nombre pair 14. Une *justification* du fait que l'addition de 14 + 14 donne un nombre pair est mise en avant et un *exemple* avec le nombre impair 15 est donné. Cet exemple stimule une *validation*, qui est *justifiée* par le fait que cela donne 60.

La formulation de question mathématique, la validation, l'explication, la justification et l'exemple sont les pratiques de mathématisation qui constituent le problème d'addition de nombres impairs. Ce dernier étant en prolongement au problème d'addition de nombres pairs. Ces problèmes déclenchent alors un problème de représentation par des boites de souliers.

Figure 6.12 Troisième partie de l'analyse des pratiques de mathématisation de la sous-section 6.1.2

> Ces exemples et validations stimulent alors une nouvelle *justification* qui est appuyée par *l'exemple* des paires de souliers qui vient appuyer que la réponse d'une telle somme ne peut pas être impaire, car il y a deux souliers dans une boite. Ceci engendre l'*exemple* que deux boites donnent quatre souliers.

Ce problème de boites de souliers est constitué des pratiques de mathématisation que sont l'exemple et la justification. Les problèmes mis en avant dans la sphère collective, étant jusqu'à présent de nature additive, font émerger un problème de justification mathématique qui fait le lien entre l'addition qui est au centre de ces problèmes et la multiplication qui fait l'objet de la troisième sous-tâche qui est l'objet de résolution.

Figure 6.13 Quatrième partie de l'analyse des pratiques de mathématisation de la sous-section 6.1.2

> Ces différents exemples de nature additive font alors émerger une nouvelle *justification*, soit le lien entre l'addition et la multiplication. Cet élément mathématique n'avait pas été justifié alors qu'il permet de lier les explications et les exemples donnés avec la multiplication par 4 dont il est question dans le travail de cette troisième sous-tâche. Cette justification s'appuie alors sur des *exemples*.

Ce problème de justification est constitué de justification et d'exemples mathématiques qui permettent de le mettre en route dans la sphère collective. Ceci fait émerger un problème d'exemple générique à partir des boites de souliers.

Figure 6.14 Cinquième partie de l'analyse des pratiques de mathématisation de la sous-section 6.1.2

> L'exemple de 37 et celui des boites de souliers déclenchent la f*ormulation* d'une nouvelle *question mathématique* à savoir comment reprendre cette justification et l'exemple de 37 à partir de boites de souliers. Une *explication* et une *justification* mathématiques sont alors mises en avant, puis une demande d'expliquer la multiplication par 4 à partir de ceci s'en suit. Une *explication* que c'est comme de multiplier par 2 deux fois est mise en avant et est appuyée d'une *représentation mathématique*. Ceci donne alors lieu à une nouvelle *justification* qui est ensuite soutenue d'une *représentation mathématique*.

Ce problème d'exemple générique est constitué de la formulation d'une question mathématique, d'explications, de justifications et de représentations mathématiques. Ces pratiques de mathématisation à la fois le constituent et permettent de le mettre en route en classe. Un problème de généralisation émerge alors.

Figure 6.15 Sixième partie de l'analyse des pratiques de mathématisation de la sous-section 6.1.2

> L'*explication* que « tout nombre multiplié par un nombre pair donne un nombre pair » est ensuite donnée. Cette *explication* est reprise, et déclenche une *généralisation* qui précise que cela fonctionne pour toutes les multiplications par un nombre pair que ce soit par 2, 4, 8 ou autre. Une centration sur 2 et 4 est demandée et est suivie de la *justification* que « dans le cas de 4, c'est comme de multiplier deux fois par 2 et à chaque fois on obtient un nombre pair ». Cette justification agit comme synthèse du travail justificatif qui vient d'être réalisé.

Le problème de généralisation est constitué à partir des pratiques de mathématisation que sont l'explication, la justification et la généralisation. Ce problème de généralisation laisse place à un problème de justification par des exemples multiples.

Figure 6.16 Septième partie de l'analyse des pratiques de mathématisation de la sous-section 6.1.2

> Une *validation* par des exemples multiples est toutefois mise en avant en guise de *justification* supplémentaire.

Le problème de généralisation donne lieu à une validation et une justification qui constitue le problème de justification par des exemples multiples. Ce dernier engendre, finalement, un problème de justification par un exemple impair générique.

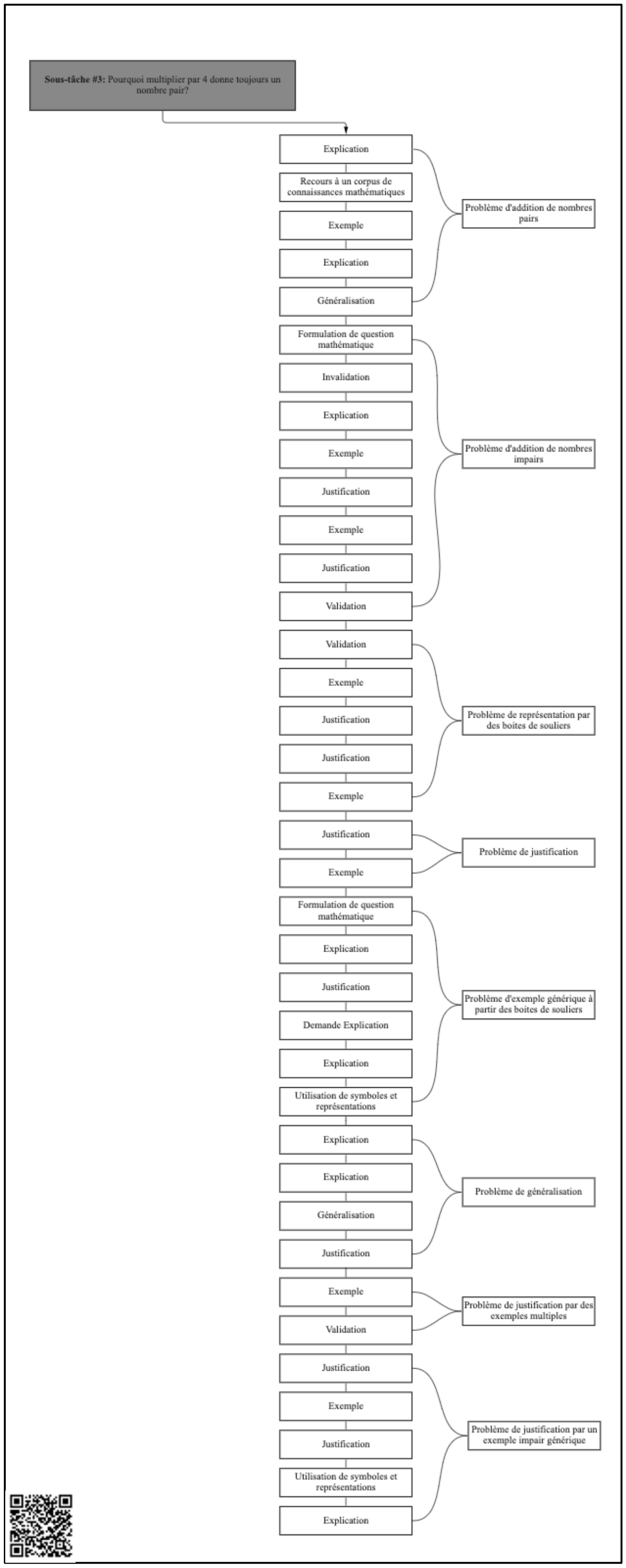
Figure 6.17 Huitième partie de l'analyse des pratiques de mathématisation de la sous-section 6.1.2

Ceci engendre *l'exemple* du nombre 51 qui est utilisé pour *justifier* qu'un nombre impair devient pair quand il est doublé et qu'il reste pair quand il est encore doublé. Une *représentation mathématique* au tableau soutient cette justification par une image qui reprend les boites de souliers. Une *explication* à savoir que cela peut aider à comprendre la multiplication par 4 est finalement donnée.

Ce problème justification par un exemple impair générique est constitué de l'exemple, la justification, l'explication et la représentation mathématique qui permettent de le mettre en route dans la sphère collective.

La Figure 6.18 qui suit reprend la Figure 6.9 dans laquelle les problèmes mathématiques mis en avant par la collectivité sont identifiés. Ces problèmes mathématiques sont consubstantiels aux pratiques de mathématisation déployées.

Figure 6.18 Des pratiques de mathématisation consubstantielles aux problèmes mathématiques



Les analyses révèlent que différentes pratiques de mathématisation constituent les problèmes mathématiques et permettent de les mettre en avant dans la sphère collective. Les pratiques de mathématisation sont ainsi consubstantielles aux problèmes mathématiques qui se déploient dans l'activité collective de pose|résolution de problèmes qui prend place en classe. Dans la sphère collective, ces problèmes agissent en tant que tâches mathématiques disponibles sur lesquelles la collectivité peut réagir en retour.

6.1.4 Les problèmes mathématiques forment de nouvelles tâches mathématiques disponibles

Lorsqu'un problème mathématique est mis en avant au sein de l'activité de pose|résolution de problèmes qui prend place, il est possible de voir que celui-ci agit comme une tâche mathématique disponible à partir duquel la collectivité peut faire émerger un nouveau problème en retour. En rappel, au Chapitre 1 une distinction entre une tâche et un problème mathématique a été faite. Une tâche ferait référence à un énoncé mathématique et ne serait pas en relation avec la personne qui veut la résoudre. De son côté, le problème ferait appel au fait que l'énoncé mathématique proposé, la tâche, ferait émerger un problème chez celui qui s'engage dans sa résolution. Les différents problèmes mathématiques déployés au sein de l'activité de pose|résolution de problèmes qui prend place peuvent ainsi former de nouvelles tâches disponibles sur lesquelles la collectivité peut réagir. Ceci permet d'illustrer l'évolution de la tâche initiale, autant sur le plan de la stabilisation phénotypique que de la diversification.

L'exemple suivant permet d'illustrer l'évolution par stabilisation phénotypique. Le déploiement du problème d'addition de nombres pairs est une activité de pose|résolution de problèmes déployée en guise de stratégie pour répondre à la sous-tâche « Pourquoi multiplier par 4 donne toujours un nombre pair? ». Ce problème d'addition de nombres pairs devient, au plan collectif, une tâche disponible sur laquelle la collectivité peut faire émerger un nouveau problème en retour. La *tâche* d'addition de nombres pairs stimule alors l'émergence d'un *problème* d'addition de nombres impairs. Face à cette nouvelle tâche mathématique, comme pour toute tâche mathématique d'ailleurs (tel que discuté au Chapitre 2), d'autres problèmes auraient pu émerger. Par exemple, un problème d'exemples multiples, un problème de justification arithmétique, ou encore un problème de justification par une représentation auraient pu naitre en classe. Toutefois, à cet instant précis, le problème d'addition de nombres impairs a émergé. Ce problème permet d'amener plus loin la stratégie d'addition de nombres pairs, la faisant évoluer. La résolution proposée de la sous-tâche #3 évolue alors en même temps que le problème évolue, c'est la pose|résolution de problèmes, mais dans un contexte collectif.

Les tâches d'addition de nombres pairs et d'addition de nombres impairs sont alors, dans la sphère collective, des tâches à partir desquelles la collectivité peut faire émerger un nouveau problème. Dans cette séance, le problème de représentation par des boites de souliers voit alors le jour. Celui-ci entraine, au même moment, un raffinement, un développement de la stratégie de résolution proposée. Les tâches d'addition de nombres pairs, d'addition de nombres impairs et de représentations par des boites de souliers étant de nature additive, font alors émerger un problème de justification du lien entre la multiplication et l'addition. Celui-ci devient alors également une tâche disponible, qui donne lieu, dans cette séance, à un problème d'exemple générique à partir de boites de souliers. Les problèmes de généralisation, de justification par exemples multiples puis de justification par un exemple impair générique sont ensuite déclenchés. Ils permettent de raffiner la stratégie proposée, alors que celle-ci évolue à travers ses inter-actions avec la collectivité. Le travail justificatif collectif de la stratégie proposée lui permet d'évoluer, tout en faisant évoluer lentement la troisième sous-tâche mathématique à laquelle cette stratégie veut répondre. La troisième sous-tâche évolue ainsi lentement par l'émergence de ces différents problèmes. Et de même pour sa résolution : la stratégie évolue, se raffine, prenant un sens particulier dans le contexte collectif.

Sur le plan de la diversification, la première sous-tâche mathématique « Peut-on décomposer un nombre en plusieurs parties et vérifier si chaque partie est divisible pour savoir si le nombre au complet est divisible? » provient de l'activité de pose|résolution de problèmes déployée pour résoudre la tâche initiale, mais constitue une évolution marquée puisque la collectivité se penche pendant un certain temps à sa résolution, devenant alors l'objet central d'attention de la collectivité. Cette sous-tâche mathématique émerge du déploiement du problème de décomposition et de groupements mis en avant pour résoudre la tâche routinière initiale. Ce problème de décomposition et de groupements devient une tâche disponible dans la sphère collective. En réponse à cette tâche, le problème de sa validité émerge alors que la collectivité s'engage à le résoudre.

Pour sa part, la seconde sous-tâche provient du déploiement des problèmes de parité du nombre, de décomposition et de groupements et de divisibilité des chiffres du nombre. Ces différents problèmes agissent comme des tâches disponibles sur lesquelles la collectivité peut réagir en retour. Ces tâches, n'étant pas pleinement résolues au moment où elles ont été mises en avant, ont été reprises alors que la sous-tâche de reprendre ces stratégies avec le nombre, 589, a été formulée.

Finalement, la troisième sous-tâche provient du problème de multiplication par 4 et de parité mis en avant pour résoudre la sous-tâche #2a : « À partir de la stratégie que tout nombre pair se divise par un nombre pair, comment arriver à voir si 589 est divisible par 4? ». Ce problème de multiplication par 4 et de parité, dans la sphère collective, est devenu une tâche disponible à partir de laquelle la collectivité a fait émerger la sous-tâche à savoir s'il existe des contre-exemples au fait qu'un nombre multiplié par 4 donne un nombre pair. Cette sous-tâche est ensuite précisée pour devenir « Pourquoi multiplier par 4 donne toujours un nombre pair ».

En somme, l'évolution d'une tâche routinière, autant sur le plan de la stabilisation phénotypique que de la diversification, provient de l'émergence de problèmes mathématiques qui deviennent des tâches disponibles sur lesquelles la collectivité peut faire émerger de nouveaux problèmes. Dans la sphère collective, les problèmes évoluent selon ce qu'ils déclenchent comme réaction mathématique chez la collectivité. Si peu se produit en réaction à un problème, son parcours, « sa vie » se termine. Ceci a été le cas, dans cette séance, du problème de définition de divisibilité qui n'a pas évolué, ni sur le plan de la stabilisation phénotypique, ni sur le plan de la diversification. Un problème peut également engendrer d'autres problèmes, comme le montre le parcours discuté dans les pages précédentes. Parfois, un problème peut aussi stagner pour reprendre plus tard. Dans cette tâche, ce fut le cas du problème de parité du nombre qui a stagné et qui a, a été réactivé ultérieurement dans la séance (sous-tâches #2 et

#2a). Un problème mathématique devient une tâche disponible dans la sphère collective et peut donc se poursuivre par les réactions qu'elle suscite chez la collectivité. Elle peut également mourir ou encore stagner un moment pour être réactivée ultérieurement. Sa fin n'est donc pas une fin définitive, car la tâche fait partie de la sphère des possibilités et est donc toujours disponible, ouverte, pour déclencher une réaction mathématique ultérieure. Ceci rejoint l'idée de « non fin » de l'exploitation d'une tâche de Grenier et Payan (2002) abordée au Chapitre 3, qui disent que de nouvelles questions peuvent toujours être formulées. Toutefois, les analyses, sous les ancrages théoriques proposés aux Chapitres 2 et 3, amènent des nuances supplémentaires. Ce ne sont pas toujours de nouvelles questions mathématiques qui peuvent être formulées, mais différentes pratiques de mathématisation qui peuvent être déployées; constituant de nouveaux problèmes, qui deviennent de nouvelles tâches disponibles, et ainsi de suite.

6.1.5 Synthèse de la boucle itérative de tâches à résoudre dans la sphère collective

Les analyses conduites dans le cadre de cette thèse doctorale soulèvent que la formation d'une boucle itérative de tâches à résoudre dans la sphère collective joue un rôle dans l'évolution des tâches routinières initiales. En effet, une boucle itérative de tâches à résoudre se forme alors que des tâches routinières initiales stimulent des pratiques de mathématisation chez la collectivité. Les analyses montrent que ces pratiques de mathématisation, au sein de la sphère collective, sont autogénératives puisque leur déploiement en classe stimule la mise en œuvre d'autres pratiques de mathématisation par la collectivité. Par ailleurs, les analyses révèlent que les pratiques de mathématisation sont consubstantielles aux problèmes mathématiques. À cet égard, les pratiques de mathématisations déployées par la collectivité à la fois constituent et permettent de mettre en route des problèmes mathématiques dans la sphère collective. Dans celle-ci, ces problèmes mathématiques deviennent des tâches disponibles sur lesquelles la collectivité peut réagir. Lorsqu'elle réagit, la collectivité déploie des pratiques de mathématisation, et la boucle itérative se poursuit ainsi. La formation de cette boucle itérative de tâches à résoudre permet à la tâche initiale d'évoluer à travers les différents problèmes qui émergent et par l'entremise des pratiques de mathématisation qui sont leur moteur, leur expression. Les analyses soulignent en ce sens l'importance de mettre en avant des pratiques de mathématisation dans la sphère collective, car, quelles qu'elles soient, elles contribuent à faire évoluer les tâches routinières; celles-ci étant autogénératives et consubstantielles aux problèmes mathématiques.

6.2 La mise en place de situations d'explication, de justification et de validation

Bien que toutes les pratiques de mathématisation contribuent à faire évoluer les tâches routinières, l'analyse met en exergue l'influence toute particulière que peuvent avoir les *situations* d'explication, de justification et de validation. Le terme *situation*, dans cette thèse doctorale, est pris au sens de Cobb, Gravemeijer, Yackel, McClain et Whitenack (1997). Il renvoie aux moments, dans les inter-actions, où une demande d'expliquer, de justifier ou de valider est explicitement formulée et que ces pratiques de mathématisation sont ensuite déployées. Par exemple, une *situation* de justification renvoie à deux actes, soit la demande de justification et la justification qui s'en suit[16]. Des situations d'explication, de justification et de validation sont présentes dans les données et l'analyse montre que celles-ci ont une influence notable dans l'évolution des tâches routinières initiales.

6.2.1 Des situations d'explication, de justification et de validation dans la séance sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5e année de Gisèle

Dans la tâche sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5e année de Gisèle, une situation d'explication prend place dès le début de la séance alors qu'une demande d'expliquer une réponse obtenue, 20, est énoncée. Face à cette demande, une affirmation de ne pas trop savoir comment l'expliquer est donnée. La demande d'explication est alors réitérée, et est suivie d'une explication d'avoir compté les carreaux autour du rectangle. Une première situation d'explication est ainsi constituée. L'explication de la stratégie est ensuite reprise et est soutenue de la représentation d'un rectangle de dimensions 8 par 4 dans lequel 32 cm^2 est inscrit. Une demande d'expliquer la stratégie utilisée de manière plus précise à partir de cette représentation est faite. Une explication s'appuyant sur cette représentation mathématique dans laquelle une ligne intérieure est ajoutée est donnée. Ceci permet de former une seconde situation d'explication. Ces situations d'explication contribuent à mettre en route le problème de dénombrement des carrés-unités situés à la frontière intérieure du rectangle discuté au chapitre précédent (voir Figure 5.29) dans la sphère collective. Une évolution de la tâche routinière initiale par stabilisation phénotypique est observée à travers ceci.

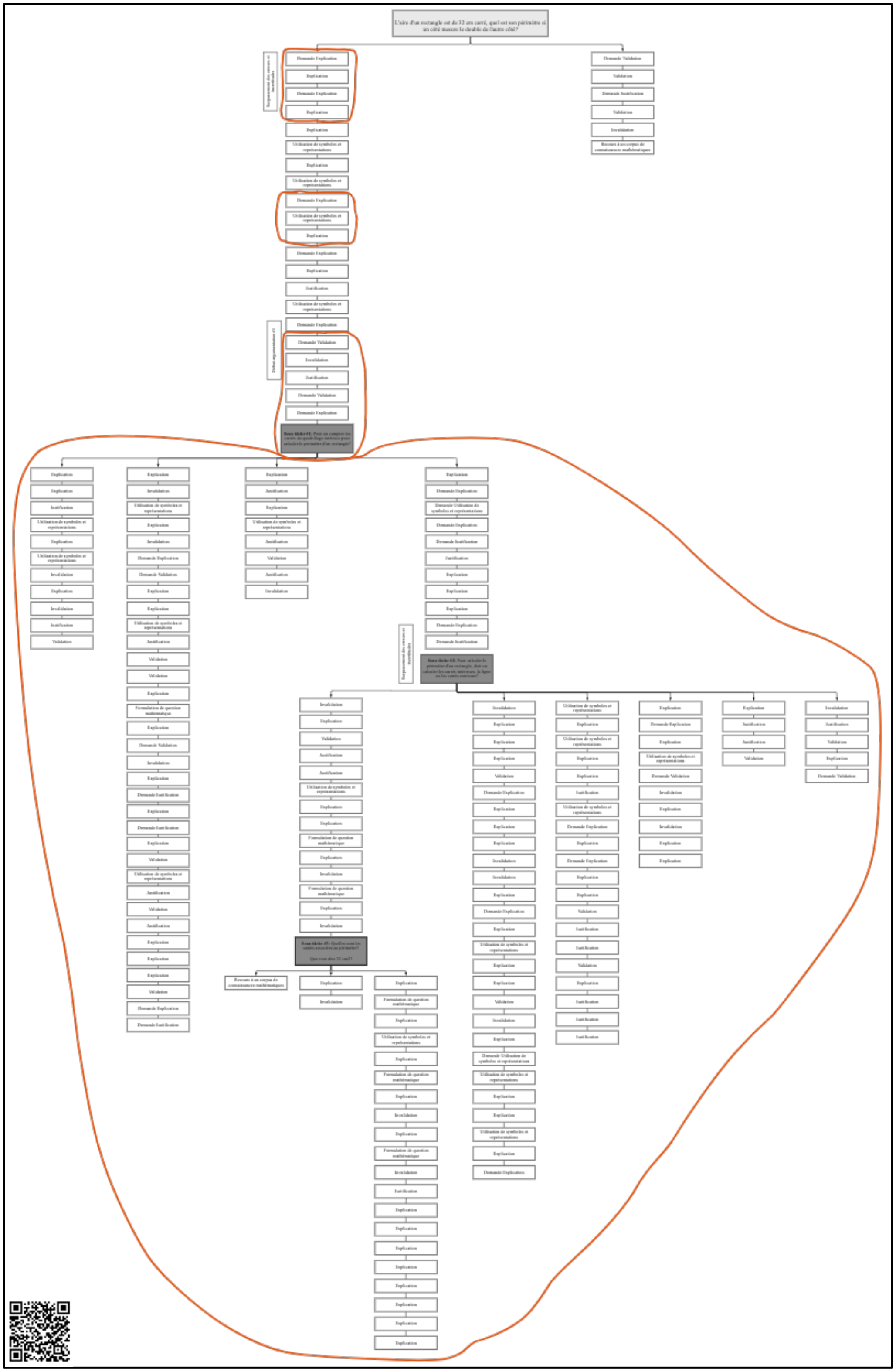
[16] Dans les schémas d'analyse en termes de pratiques de mathématisation, ces demandes d'expliquer, de justifier ou de valider sont notées par *Dem. E*, *Dem. J* et *Dem. V*.

Une fois ces situations d'explication mises en avant, une situation de validation prend place et engendre une évolution par diversification. En effet, une demande de validation de cette stratégie de calcul du périmètre est énoncée et une invalidation s'en suit. Une argumentation mathématique s'enclenche alors puisque la validité d'une proposition mathématique est remise en question. Une demande d'expliquer ce qui se passe dans la stratégie est réitérée. Cette demande d'explication suggère également, d'une manière implicite, une demande de justification et de validation de cette stratégie de calcul d'un périmètre. Ceci fait naitre la première sous-tâche mathématique sur laquelle la collectivité se penche pendant cette séance : « Peut-on compter les carrés du quadrillage intérieur pour calculer le périmètre d'un rectangle? ».

Cette première sous-tâche mathématique donne lieu à quatre stratégies qui sont déployées pour la résoudre. L'explication de ces stratégies peut être vue étant quatre situations d'explication, car ces stratégies sont expliquées en guise de réponse à la demande d'explication qui est faite. Ces stratégies représentent par ailleurs une évolution par stabilisation phénotypique de la sous-tâche, comme discuté au chapitre précédent. Dans la séance, le déploiement de ces stratégies engendre une nouvelle sous-tâche mathématique alors qu'une diversification de la première sous-tâche prend place à travers l'activité collective mise en avant pour la résoudre. Cette seconde sous-tâche vise à déterminer si pour calculer un périmètre, il faut calculer les carrés du quadrillage intérieur, la ligne ou les carrés du quadrillage extérieur. À son tour, cette seconde sous-tâche évolue par stabilisation phénotypique étant donné que plusieurs stratégies sont proposées pour la résoudre. Cette sous-tâche évolue également par diversification alors qu'une troisième sous-tâche qui s'intéresse aux unités à associer au périmètre est investiguée par la collectivité (voir à cet effet la Figure 5.32).

La Figure 6.19 suivante illustre l'influence de l'insistance à expliquer la stratégie et à s'y attarder pour l'expliquer, la justifier et la valider collectivement sur l'évolution de la tâche routinière initiale.

Figure 6.19 Influence de situations d'explication sur l'évolution de la tâche sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5e année de Gisèle



Les deux premières situations d'explication de cette séance ont contribué à mettre en avant la stratégie de calcul du périmètre par le dénombrement des carrés-unités situés à la frontière intérieure du rectangle. La troisième situation d'explication, qui fait également appel implicitement à une situation de justification et une situation de validation, permet de collectivement expliquer, justifier et valider cette stratégie de calcul du périmètre fait émerger la première sous-tâche mathématique. Ceci donne le ton au reste de la séance, comme l'illustre la Figure 6.19 ci-dessus, car les stratégies proposées pour résoudre la sous-tâche font émerger une seconde sous-tâche mathématique qui, à son tour évolue par stabilisation phénotypique et par diversification. C'est en ce sens que ces trois premières situations d'explication ont joué un rôle important dans l'évolution de la tâche routinière initiale.

Par ailleurs, dans cette séance, cette troisième situation d'explication s'inscrit dans un travail de surpassement d'une erreur mathématique par son investigation. En effet, à travers elle, l'erreur commise dans le calcul du périmètre est investiguée. Son investigation permet de l'expliquer, la modifier, la justifier et la valider collectivement dans le but ultime de la surpasser. Ceci permet à la tâche routinière initiale d'évoluer autant sur le plan de la stabilisation phénotypique que sur celui de la diversification. L'influence des situations d'explication, de justification et de validation dans l'évolution des tâches routinières initiales peut être aisément illustrée à partir d'autres séances. La sous-section suivante offre un autre exemple de ceci.

6.2.2 Des situations d'explication, de justification et de validation dans la séance sur les notes de musique en classe de 6e année

Dans la séance sur la tâche des notes de musique en classe de 6e année, la réponse, erronée, $\frac{1}{3}$ est proposée en début de séance. Une situation d'explication prend place par une demande d'expliquer cette réponse et par l'explication qui s'en suit. Cette explication repose sur une indication d'avoir dénombré neuf notes de musique plutôt que dix, ce qui permet d'obtenir $\frac{1}{3}$ parce que le dessin représente alors $\frac{3}{9}$. Cette situation d'explication permet de mettre en route un problème de groupement qui contribue à l'évolution par stabilisation phénotypique de la tâche routinière initiale. La note de musique en trop est à ce moment enlevée du dessin pour permettre l'explication de la stratégie. Une première sous-tâche mathématique émerge ainsi puisque la collectivité se penche sur l'explication d'une variation de la tâche routinière initiale qui comprend maintenant neuf notes de musique plutôt que dix. Une explication qu'avec les neuf notes de musique trois groupes de trois notes de musique peuvent être constitués est mise en avant. Le lien entre les réponses $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{9}$ est ensuite explicité et justifié à partir de la représentation mathématique. À travers ceci, un problème d'équivalence entre le groupement et le dénombrement est mis en avant, et l'idée de fraction équivalente est à ce moment présente dans la sphère collective. Ces problèmes de groupement et d'équivalence entre le groupement et le dénombrement permettent à la tâche routinière initiale d'évoluer par stabilisation phénotypique.

Dans la séance, la situation d'explication de la réponse $\frac{1}{3}$ engendre une nouvelle proposition qui permet à la tâche routinière initiale de poursuivre son évolution par stabilisation phénotypique. Cette proposition interpelle les fractions équivalentes par le biais de la réponse $\frac{6}{20}$; la fraction initiale représentant $\frac{3}{10}$. Une demande d'expliquer cette réponse est déployée, et une explication d'avoir doublé le numérateur et le dénominateur est donnée. Ceci permet de constituer une nouvelle situation d'explication. Des explications plus précises sur la stratégie sont alors demandées et données, permettant à la stratégie de se développer et de se raffiner à travers ses inter-actions avec la collectivité. Une explication que $\frac{3}{10}$ et $\frac{6}{20}$ sont des fractions équivalentes est mise en avant. Bien que cette explication soit effectivement valide, celle-ci est questionnée. Une autre situation d'explication prend place par une demande d'expliquer ce qu'est une fraction équivalente. Une explication, incomplète, est tentée. Cette situation d'explication engendre alors une diversification de la tâche routinière initiale, puisque la collectivité ne se centre plus directement sur sa résolution, mais tente plutôt de résoudre la sous-tâche : « Qu'est-ce que des fractions équivalentes? ».

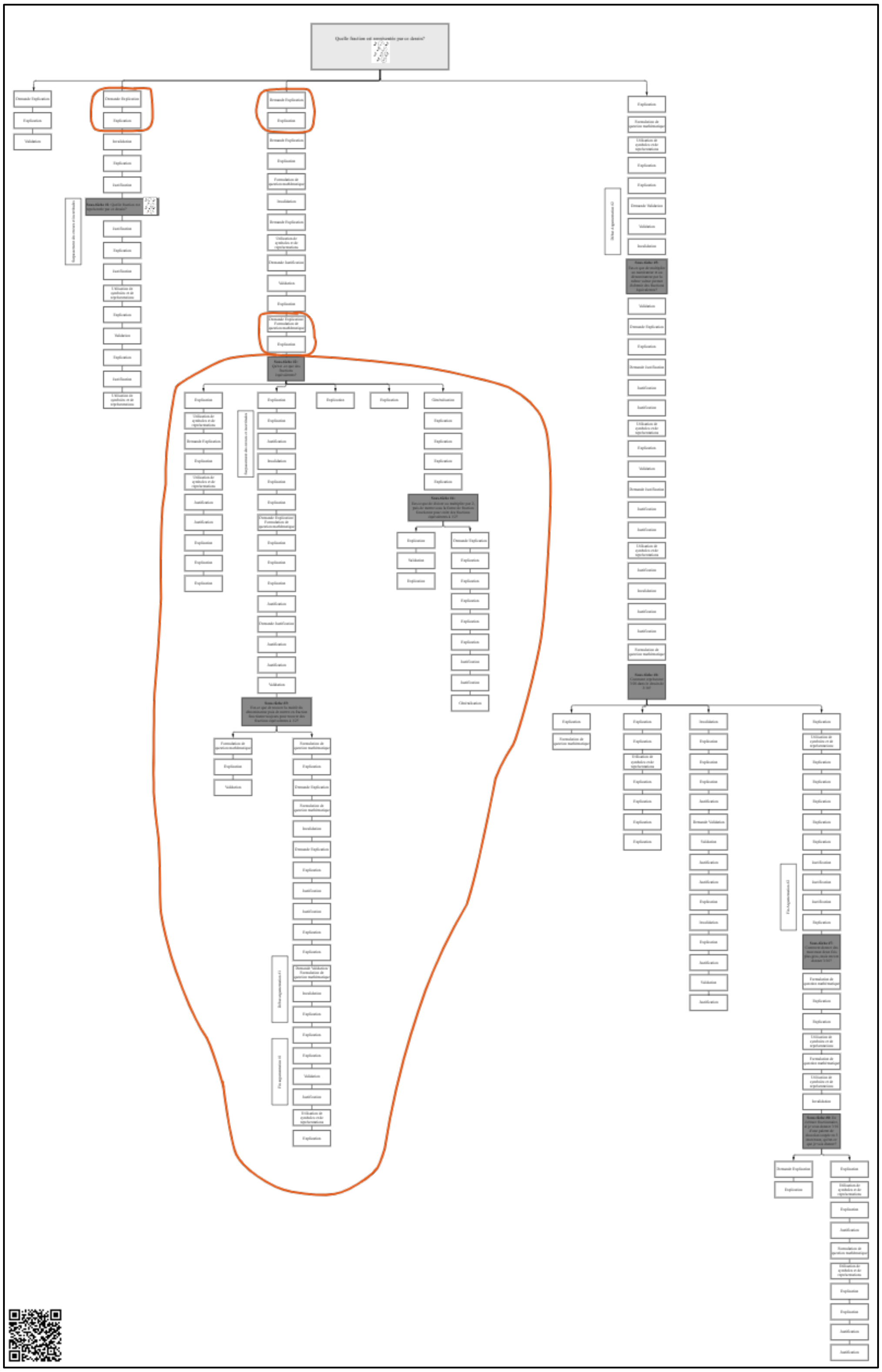
En réponse à cette sous-tâche, cinq stratégies, traduisant une évolution par stabilisation phénotypique, sont proposées. Ces stratégies peuvent être vues comme étant des situations d'explication puisque la sous-tâche provient d'une demande d'explication et que ces stratégies sont offertes en guise d'explication. Dans ces stratégies, différents exemples sont donnés et explicités et différentes manières de trouver des fractions équivalentes sont proposées. Ceci mène la collectivité à se pencher sur leur vraisemblance, ce qui engendre deux nouvelles sous-tâches mathématiques sur lesquelles la collectivité se penche pendant un moment :

- Est-ce que de trouver la moitié du dénominateur, puis de mettre en fraction, fonctionne toujours pour trouver des fractions équivalentes à $\frac{1}{2}$?

- Est-ce que de diviser ou de multiplier par 2, puis de mettre sous la forme de fraction, fonctionne pour créer des fractions équivalentes à $\frac{1}{2}$?

Le travail de ces sous-tâches par la collectivité permet à celles-ci d'évoluer par stabilisation phénotypique à travers les stratégies déployées pour les résoudre. La Figure 6.20 suivante illustre l'influence des situations d'explication du $\frac{1}{3}$ et du $\frac{6}{20}$ dans l'évolution de cette tâche routinière initiale.

Figure 6.20 Influence de situations d'explication dans l'évolution de la tâche des notes de musique dans la classe de 6e année



Ainsi, dans cette séance, la situation d'explication du $\frac{1}{3}$ permet de mettre en route un problème de groupement, qui engendre ensuite un problème d'équivalence entre le groupement et le dénombrement. De ceci, $\frac{6}{20}$ est proposé en guise de réponse à la tâche routinière initiale. Une situation d'explication de cette réponse est ensuite mise en place et mène à une situation d'explication de la notion de fraction équivalente. N'étant pas entièrement répondue, cette situation d'explication fait l'objet d'une sous-tâche mathématique sur laquelle la collectivité se penche. Les explications déployées pour y répondre permettent alors de constituer de nouvelles situations d'explication. Une évolution de cette sous-tâche par stabilisation phénotypique et par diversification est alors observée. Ceci montre l'influence que peuvent avoir les situations d'explication dans l'évolution d'une tâche routinière initiale.

6.2.3 Synthèse sur les situations d'explication, de justification et de validation

Ces exemples montrent que les situations d'explication, de justification et de validation jouent un rôle important dans l'évolution des tâches routinières initiales. Les analyses révèlent que ces situations amènent la collectivité à se pencher de manière fine sur les idées et stratégies offertes en classe, que celles-ci soient bonnes ou erronées, pour s'assurer qu'elles soient claires, justifiées et validées collectivement. Les réponses, idées et stratégies proposées deviennent, par la constitution de ces situations, le point central d'attention de la collectivité. Ceci contribue à la fois à l'émergence de sous-tâches mathématiques sur lesquelles la collectivité se penche pendant un certain temps, et au déploiement de différents problèmes mathématiques qui viennent raffiner, collectivement, ces idées et stratégies, permettant de les faire avancer ce qui traduit une évolution par stabilisation phénotypique. En ce sens, les demandes d'expliquer, de justifier et de valider, lorsqu'elles font naitre des *situations*, c'est-à-dire lorsqu'elles sont répondues par la mise en œuvre de ces pratiques de mathématisation, jouent un rôle important dans l'évolution des tâches routinières initiales. Comme discuté à la section précédente, le déploiement de ces pratiques de mathématisation a par ailleurs le potentiel de générer d'autres pratiques de mathématisation, contribuant ainsi à la formation de la boucle itérative de tâches à résoudre dans la sphère collective.

6.3 L'utilisation d'exemples

Les analyses montrent le rôle particulier que peuvent jouer les exemples dans l'évolution d'une tâche routinière initiale. En effet, dans l'activité qui se déploie en classe, des exemples sont donnés tout particulièrement pour soutenir la réflexion, pour donner des explications ou encore pour justifier ou valider certains éléments mathématiques mis en avant en classe. Lorsqu'ils sont utilisés en classe, ces exemples stimulent l'évolution des tâches routinières initiales.

6.3.1 L'utilisation d'exemples dans la séance sur la divisibilité par 4

La séance sur la divisibilité par 4 permet d'illustrer le rôle important que peuvent jouer les exemples dans l'évolution des tâches routinières initiales. Le tableau suivant présente les différents exemples utilisés par la collectivité ainsi que le rôle qu'ils ont joué dans cette séance. Ceux-ci sont discutés par la suite.

Tableau 6.1 Les exemples dans la tâche de divisibilité par 4

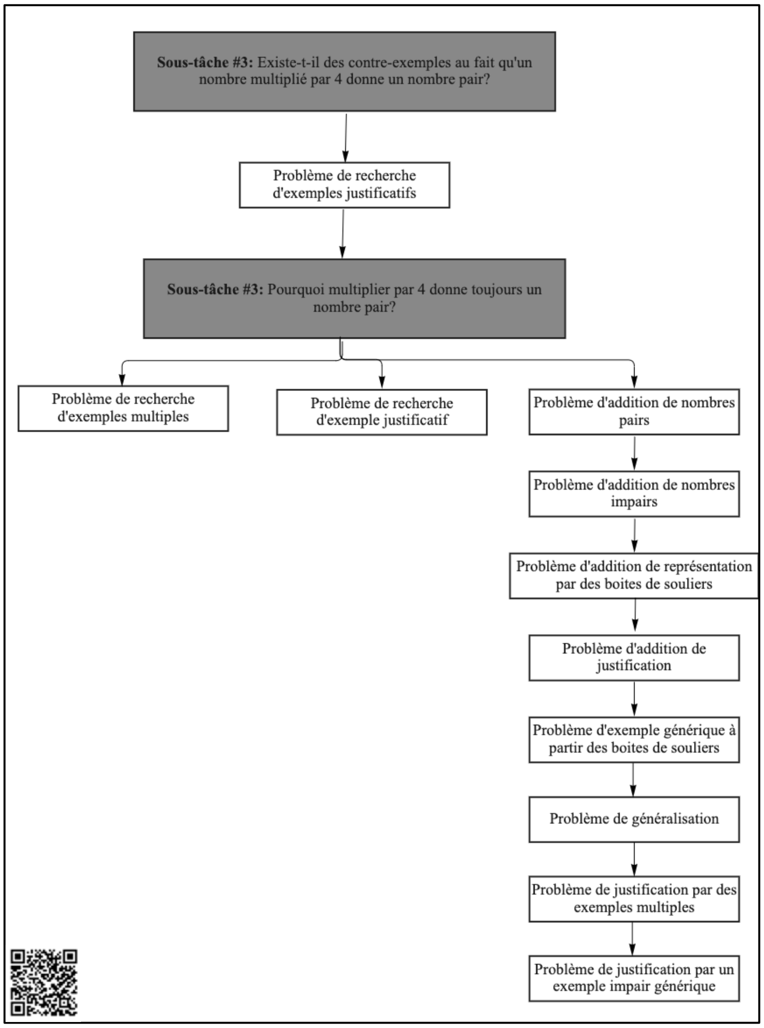
Exemple	**Rôle dans la séance**
496	Vise à soutenir l'explication de la stratégie de décomposition en vue de surpasser l'incertitude de sa validité.
589	Vise à reprendre les stratégies proposées, avec ce nouveau nombre, en vue de les expliquer, justifier et valider collectivement.
4 x 4 = 16 4 x 2 = 8 4 x 3 = 12	Servent d'explication à la conjecture de la multiplication par 4 qui donne toujours un nombre pair.
4 x 15	Vise à chercher un contre-exemple, suite à une demande de le faire. Essai avec un nombre impair.
4 x 7	Vise à chercher un contre-exemple, suite à une demande de le faire. Essai avec un nombre impair.
2 x 7	Vise à justifier la conjecture.
45 exemples	Sert à valider la conjecture, car 45 exemples ont été testés.
4 ÷ 8 = 0,5 et 0,5 x 4 = 2	Sert à justifier la conjecture.
36 x 4 = 144	Sert à justifier la conjecture.
4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4	Sert à expliquer un raisonnement sur la conjecture
14 + 14 = 28 et un autre 14 et un autre 14, ça fait 28 et au total (28 + 28) ça donne 56.	Vise à justifier la conjecture à partir d'un nombre pair.
15 + 15 + 15 + 15, ça donne 60.	Vise à justifier la conjecture à partir d'un nombre impair.
Exemple des paires de souliers, il y a 2 souliers dans une boite	Sert à justifier la conjecture.
2 boites donnent 4 souliers	Sert à expliquer l'exemple des paires de souliers
9 + 9 + 9 + 9 ou encore de faire 4 + 4 + 4… 9 fois	Vise à justifier un élément implicite des justifications proposées, soit le lien entre l'addition et la multiplication (dans l'énoncé de la sous-tâche #3)

37 multiplié par 4, c'est 37 + 37 + 37 + 37	Sert à expliquer le lien entre l'addition et la multiplication puis à justifier la conjecture en utilisant l'image des paires de souliers avec cet exemple.
45 exemples	Sert à valider la conjecture, car 45 exemples ont été testés.
51 x 2 = 102 102 x 2 = 204	Servent à justifier la conjecture

Dans la séance, le premier exemple proposé, 496, vise à soutenir l'explication de la stratégie de décomposition en vue de surpasser l'incertitude sur sa validité. Cet exemple permet de réexpliquer la stratégie, sur un nouveau nombre, afin de la raffiner à partir d'un exemple qui est divisible par 4 (contrairement au nombre 498 initial). Le travail de cet exemple permet de mettre en avant le problème de décomposition et de groupements sur ce nouveau nombre, constituant une stabilisation phénotypique de la première sous-tâche. Ensuite, l'exemple du nombre 589 est proposé à l'intérieur de la seconde sous-tâche afin de relancer la réflexion sur certaines stratégies qui ont été proposées, mais non entièrement expliquées, justifiées et validées collectivement. Ce nouvel exemple, tout comme le premier, sert à soutenir la réflexion de la collectivité pour la faire avancer.

Les autres exemples de cette séance sont reliés au travail de la conjecture de la multiplication par 4 qui donne un nombre pair. Ces exemples servent à la fois à expliquer la conjecture, à la justifier et à la valider, et sont particulièrement productifs au regard de l'évolution de la tâche routinière initiale. La figure suivante reprend ce moment dans la séance qui est explicitée, au regard du rôle des exemples, dans les lignes qui suivent.

Figure 6.21 Les exemples et l’évolution de la tâche de divisibilité par 4



Une fois la conjecture énoncée et la troisième sous-tâche formulée, la collectivité propose d’abord différents exemples qui appuient la conjecture, permettent de faire tenir. Un exemple justificatif est également proposé et constitue une stabilisation phénotypique de la troisième sous-tâche. Cette troisième sous-tâche est ensuite reformulée alors qu’une demande de justifier la conjecture est mise en avant. Afin d’y répondre, un problème d’exemples multiples est déployé par une affirmation d’avoir essayé 45 exemples, mais qu’aucun n’a donné un résultat impair. Ce problème d’exemples multiples constitue une nouvelle stabilisation phénotypique de la troisième sous-tâche. Ce problème d’exemples multiples vise à valider la conjecture énoncée. Un problème de recherche d’exemple justificatif est ensuite déployé, à partir de l’exemple d’un nombre décimal soit 0,5. La proposition est que 0,5 multiplié par 4 donne 2, qui est un nombre pair. Cet exemple vise à justifier, voire prouver, la conjecture, car celle-ci tient même avec un exemple d'un nombre rationnel. Ce problème d'exemple justificatif représente aussi une stabilisation phénotypique de la troisième sous-tâche. Finalement, une autre stabilisation phénotypique de la troisième sous-tâche est observée alors qu'un autre exemple est proposé. Cet exemple sert à expliquer un raisonnement général sur le fonctionnement de la conjecture puisqu'un nombre pair additionné d'un nombre pair donne toujours un nombre pair. Ceci est vrai pour 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 tout comme pour 14 + 14 + 14 + 14. Cet exemple donné à partir de nombres pairs étant restreint, donne lieu à un exemple avec un nombre impair, 15, qui permet d'élargir le domaine de validité de la conjecture. L'essai fait avec 15 montre que la conjecture tient aussi pour les nombres impairs. Cet exemple d'un nombre impair mène à l'exemple des boites de souliers qui agit en tant que justification additionnelle. Cet exemple veut ancrer les propos tenus en les expliquant à partir d'un contexte de la vie courante qui permet de lui donner un sens. Ceci mène alors à une explication à partir d'un exemple générique qui reprend la représentation des boites de souliers. Cet exemple générique agit également en tant que justification supplémentaire. Les exemples multiples sont par la suite repris, pour, encore une fois, montrer la validité de la conjecture, car elle tient sur autant d'exemples. Un dernier exemple à partir d'un nombre impair est finalement déployé pour justifier, à nouveau, la conjecture.

Le déploiement de ces exemples pour expliquer, justifier et valider la conjecture permet de faire avancer à la fois la résolution de la troisième sous-tâche, mais aussi celle de la seconde et de la tâche routinière initiale. En effet, rappelons-le, c'est à partir de l'affirmation que tous les nombres pairs peuvent se diviser par un nombre pair, utilisée pour résoudre la tâche routinière initiale, que tout ceci est survenu. La conjecture du nombre pair multiplié par 4 qui donne un nombre pair a été formulée et un travail mathématique important s'en est suivi, par l'entremise de tous ces exemples qui permettent de l'expliquer, la justifier et la valider. Ceci permet également de mieux comprendre, et de raffiner, cette première stratégie, cette affirmation, proposée en guise de réponse à la tâche routinière initiale. Ces exemples ont ainsi joué un rôle fondamental dans l'évolution de la tâche routinière initiale, en particulier, dans la stabilisation phénotypique de la troisième sous-tâche, qui prolonge la stabilisation phénotypique de la tâche initiale amorcée par cette affirmation, cette stratégie de parité du nombre.

6.3.2 Synthèse de l'utilisation des exemples

L'influence des exemples sur l'évolution de la tâche routinière initiale rejoint les travaux de Lynch et Lockwood (2019). Ceux-ci mettent en évidence que les exemples peuvent jouer un rôle important dans le développement d'idées mathématiques et qu'ils peuvent être porteurs pour la formulation de conjecture et dans le processus de preuve. C'est d'ailleurs ce qui peut être observé dans ce moment de la séance où la conjecture de la multiplication par 4 qui donne un nombre pair est formulée. Les exemples permettent de peaufiner la conjecture, de lui donner collectivement un sens, en se l'expliquant à travers différents exemples qui la concrétisent. Ces exemples permettent aussi de justifier la conjecture et d'en établir collectivement la validité, soit en quelque sorte de la « prouver » à partir de ceux-ci. La séance sur la divisibilité par 2 dans la classe de 5^{e} année de Louise offre un autre exemple du rôle de l'utilisation d'exemples dans l'évolution des tâches routinières initiales. Dans cette séance, une conjecture est formulée et de multiples exemples sont donnés et catégorisés afin d'y donner un sens et d'avancer dans la résolution de la conjecture. Ces multiples exemples amènent à développer une nouvelle idée, soit à formuler une seconde conjecture. Cette nouvelle conjecture est alors investiguée à partir des exemples de la première conjecture. Certains exemples la valident, mais d'autres l'invalident. Toutefois, à la fin de la séance, la conjecture est davantage expliquée et prend un nouveau sens, soulevant une nouvelle incertitude qui reste à investiguer, car le temps manque à la séance pour complètement établir le domaine de validité de cette seconde conjecture. Dans cette séance, ce travail d'exemplification permet à la tâche routinière initiale d'évoluer par stabilisation phénotypique. Ce moment dans la séance de divisibilité par 2 est davantage discuté à la sous-section 6.4.1.2 prochaine qui traite de l'incertitude, mais dans laquelle les exemples sont abordés. En somme, l'analyse des données révèle que l'utilisation d'exemples sert à soutenir la réflexion, à des explications ou encore à justifier ou valider certains éléments mathématiques mis en avant en classe. Jouant un rôle dans le développement d'idées, dans la formulation de conjecture et dans le processus de preuve (*Ibid*.), l'utilisation d'exemples est une pratique de mathématisation qui apparait porteuse au regard de l'évolution des tâches routinières initiales.

6.4 L'émergence d'incertitudes

Malgré que des tâches routinières aient été données à résoudre, l'analyse des données montre que des incertitudes peuvent émerger de l'activité collective déployée pour les résoudre. En particulier, l'analyse révèle que des incertitudes sur la manière d'expliquer une réponse ou une stratégie aux autres, sur la validité de certaines stratégies explicitées en classe, ou encore sur un contenu mathématique précis naissent en cours d'activité. Lorsqu'elle survient en classe, l'analyse montre que l'incertitude peut jouer un rôle important dans l'évolution des tâches routinières. Les lignes qui suivent présentent dans un premier temps des exemples d'incertitude et leur rôle dans l'évolution des tâches routinières initiales. Dans un second temps, un nouveau regard sur la notion même d'incertitude est proposé.

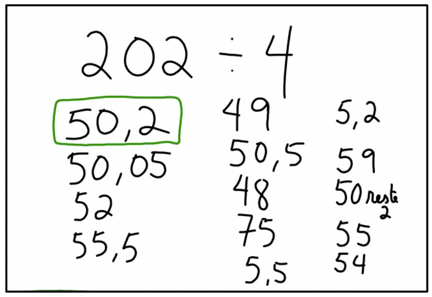
6.4.1 Des exemples d'incertitude dans les données

Au Chapitre 1, l'incertitude, dans le cadre de la notion de problème mathématique, a été définie comme étant le fait de poser un défi, de se questionner, ou de représenter une difficulté chez la personne qui tente de le résoudre. Dans le cas de la résolution de tâches routinières, par définition, l'incertitude est absente du travail fait pour les résoudre. Toutefois, tel qu'Agre (1982) le met en lumière, si une personne résout une tâche routinière, mais que des efforts supplémentaires sont requis, car le résultat est remis en doute, la situation peut se qualifier de « problème ». L'analyse des données montre que ceci est le cas lorsqu'une argumentation mathématique émerge en classe puisque que la validité d'un élément mathématique mis en avant en classe est mise en doute. L'analyse révèle également que la formulation d'une conjecture engendre de tels efforts supplémentaires, car le statut de vraisemblance de la conjecture est alors investigué par la collectivité. Lorsque ces incertitudes émergent en classe, des efforts supplémentaires sont faits afin de les surpasser. L'analyse des données montre que ceci stimule l'évolution des tâches routinières initiales. Dans ce qui suit, des exemples d'argumentation mathématique et de formulation d'une conjecture sont donnés pour illustrer le rôle de l'incertitude dans l'évolution des tâches routinières initiales.

6.4.1.1 Un exemple d'incertitude liée à une argumentation mathématique

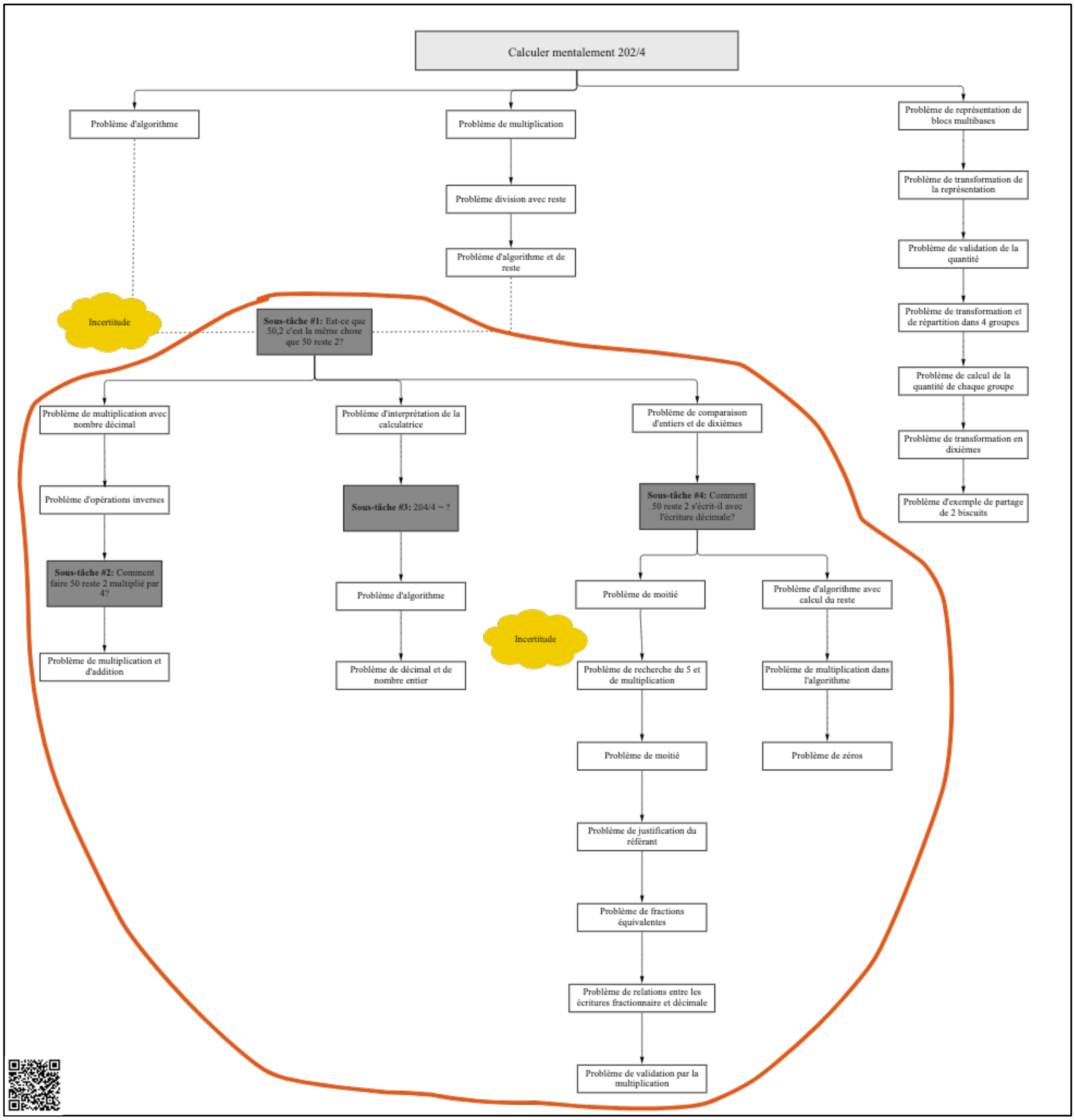
Dans la classe de 6e année, la tâche de calcul mental de division avec un reste a fait émerger une incertitude qui s'est avérée porteuse au regard de l'évolution de cette tâche routinière. En réponse à cette tâche de calcul mental, différentes réponses sont initialement proposées par la collectivité :

Figure 6.22 Réponses proposées à la tâche de calcul mental de division avec reste



La première stratégie investiguée prend appui sur l'algorithme de calcul, et mène à l'obtention de la réponse 50,2. Une explication qu'à la fin de l'algorithme, comme il reste 2 unités, il faut mettre « virgule 2 » est donnée. La réponse de 50 reste 2 est à ce moment discutée. La stratégie utilisée est celle du calcul de 4 x 50 qui donne 200. Comme il reste 2 unités, la réponse donne 50 reste 2. Une explication d'avoir utilisé l'algorithme de calcul, mais qu'avec les unités restantes, la réponse donne 50 reste 2 est ensuite donnée. À ce moment, ces deux réponses sont confrontées et mène la collectivité à se pencher sur une première sous-tâche mathématique : « Est-ce que 50,2 c'est la même chose que 50 reste 2? ». Une argumentation mathématique prend alors place en classe puisque la validité de la réponse 50,2 est alors contestée. La collectivité est toutefois mitigée; une partie dit qu'il s'agit de la même chose et une autre dit que non. Une incertitude sur la validité du 50,2 et sur l'équivalence entre 50 reste 2 et 50,2 est présente en classe. Dans cette séance, le travail de surpassement de cette incertitude prend une ampleur importante qui amène la tâche routinière initiale à évoluer autant par stabilisation phénotypique que par diversification. La Figure 6.23 ci-dessous illustre l'influence de cette incertitude dans l'évolution de la tâche routinière initiale.

Figure 6.23 Influence de l'incertitude liée à une argumentation mathématique dans la séance de calcul mental en classe de 6e année



Comme l'illustre ce schéma, le travail collectif de surpassement de l'incertitude a mené la collectivité à se pencher sur la première sous-tâche mathématique visant distinguer 50 reste 2 de 50,2. À travers ses interactions avec la collectivité, cette sous-tâche a évolué par stabilisation phénotypique et par diversification. Pour la résoudre, la collectivité a fait émerger un problème de multiplication avec nombre décimal qui a poursuivi son évolution en faisant émerger un problème d'opération inverse. En réponse à cette sous-tâche, la collectivité a également mis en avant un problème d'interprétation de la calculatrice puis un problème de comparaison d'entiers et de dixièmes. Ces problèmes sont déployés par la collectivité en tant que stratégies pour résoudre la sous-tâche mathématique, ce qui lui permet d'évoluer par stabilisation phénotypique. Or, le déploiement de ces stratégies engendre aussi une évolution de la sous-tâche par diversification. Trois sous-tâches mathématiques sur lesquelles la collectivité se penche pendant un certain temps émergent de l'activité qui prend place pour la résoudre. Ces sous-tâches sont :

- Sous-tâche #2 : Comment faire 50 reste 2 multiplié par 4? ;

- Sous-tâche #3 : Que vaut 204 ÷ 4? ;

- Sous-tâche #4 : Comment 50 reste 2 s'écrit-il en écriture décimale?

Dans le travail de la quatrième sous-tâche, l'idée que 50 reste 2 vaut 50,5 est explicitée et justifiée. Toutefois, cette réponse est mise en doute ce qui fait émerger une nouvelle argumentation mathématique. La première argumentation n'étant pas terminée, la collectivité est ainsi mitigée entre 50,2 et 50,5 en tant que réponse à la tâche routinière initiale. L'incertitude est encore présente en classe. À ce moment, une nouvelle stratégie, permettant de résoudre la tâche routinière initiale est proposée. Cette stratégie prend appui sur la représentation de 202 ÷ 4 par des blocs multibases qui sont séparés en quatre groupes égaux. À travers cette stratégie, des transformations sont effectuées pour permettre la répartition équitable dans les groupes. Les deux unités restantes sont finalement discutées. Un exemple prenant appui sur un contexte de deux biscuits à séparer en demis pour partager entre quatre amis est donné. Toutefois, la cloche est sonnée et les explications et justifications mathématiques prennent rapidement fin. Les argumentations mathématiques du 50,5 et du 50,2 ainsi que le travail de surpassement de l'incertitude prend ainsi fin, un peu abruptement.

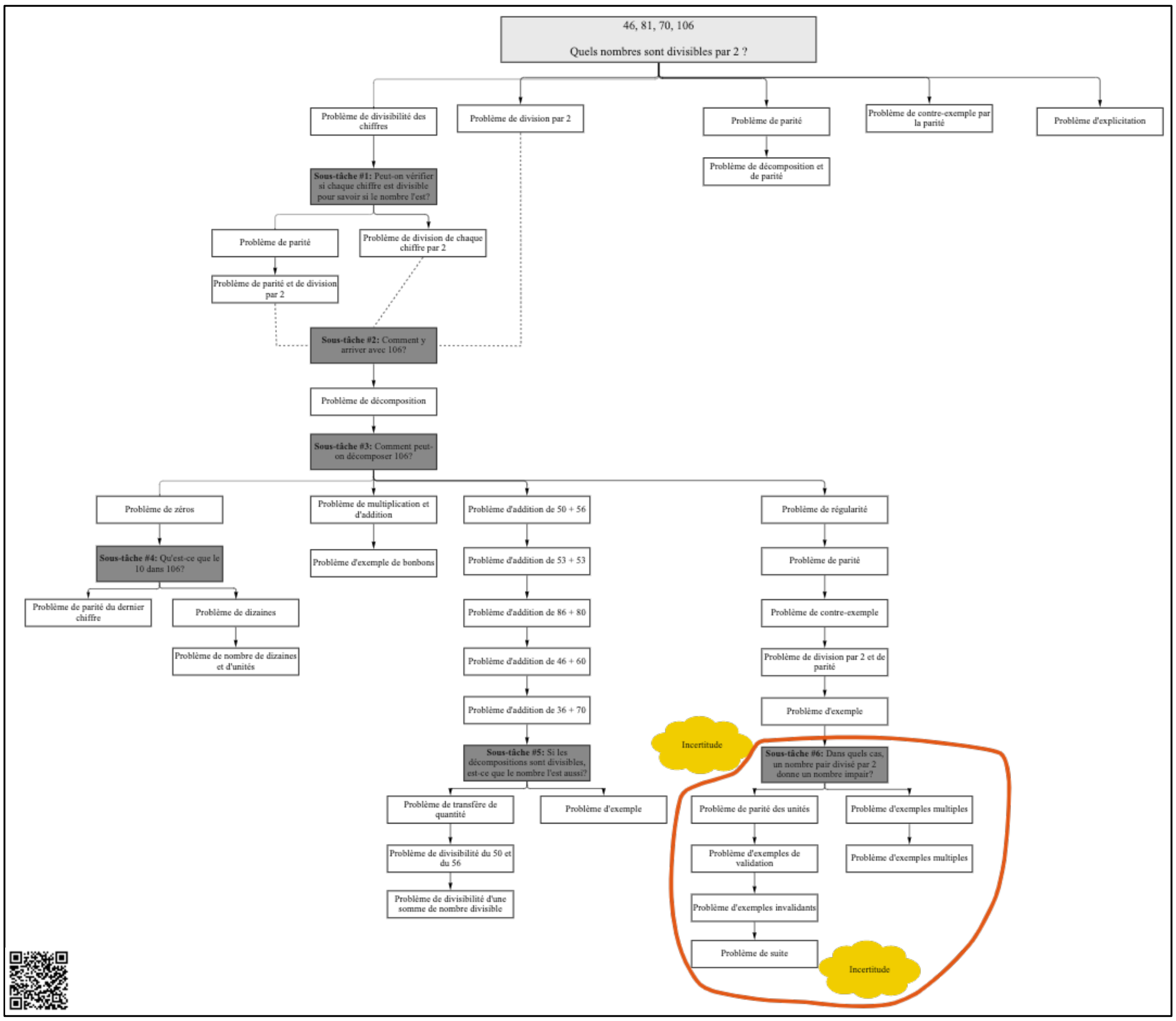
Cette séance montre que l'incertitude liée à une argumentation mathématique peut avoir une influence marquée dans l'évolution des tâches routinières initiales. Dans les séances, des incertitudes sur la validité de réponse, de stratégies ou encore de contenus mathématiques sont présentes et celles-ci s'avèrent souvent porteuses pour l'évolution des tâches routinières initiales. Cet exemple illustre l'incertitude sur la validité d’une réponse mathématique, mais les séances abordées au chapitre précédent montrent que la validité de stratégies ou contenus mathématiques peut également être questionnée. En effet, dans la séance sur la divisibilité par 4 dans la classe de 6e année, la validité de la stratégie de décomposition du nombre est questionnée et fait l’objet d’une argumentation mathématique qui fait émerger la première sous-tâche mathématique. Le travail de cette sous-tâche offre des éléments de réponse à la collectivité sur la validité de la stratégie, mais ces éléments n’étant pas complets, cette sous-tâche est reprise à l’intérieur de la seconde sous-tâche mathématique dans laquelle trois stratégies proposées font l’objet d’investigation de la collectivité. Dans la séance, comme discuté au chapitre précédent, le temps manque pour y revenir, mais ceci aurait pu faire l’objet d’une autre séance. Également, dans la tâche sur l’aire et le périmètre dans la classe de 5e année de Gisèle présentée au chapitre précédent, la notion même de périmètre, et de son calcul, est au cœur de la séance. Des incertitudes prennent place dans les argumentations qui ont cours en lien avec les trois stratégies de calcul du périmètre proposé. La séance presque complète tourne autour de la résolution de ces argumentations et des incertitudes qui leur sont associées. Ces incertitudes interpellent la notion de périmètre et de son calcul. En ce sens, l’analyse des données montre que des incertitudes sur la validité de réponses, stratégies ou contenus mathématiques émergent en classe et que ces dernières sont porteuses au regard de l’évolution des tâches routinières initiales.

6.4.1.2 Un exemple d’incertitude liée à la formulation d’une conjecture

Dans la classe de 5e année de Louise, la tâche portant sur la divisibilité par 2, discutée à la sous-section 6.3.2 sur l’utilisation d’exemples, a fait émerger une incertitude quant à la validité d’une conjecture qui a été formulée.

Dans l’activité de pose|résolution de problèmes qui a pris place en classe, la collectivité s’est penchée sur les décompositions possibles de 106 à l’occasion du travail de la troisième sous-tâche mathématique. Dans ce travail, une conjecture à savoir qu’un nombre pair divisé en deux donne deux nombres impairs est formulée. Un contre-exemple que 100 divisé en 2 donne 50 est immédiatement donné et mène à une reformulation de la conjecture, soit que celle-ci fonctionne sauf si le nombre se termine par 0. Une incertitude sur la vraisemblance de la conjecture est à ce moment présente en classe. Le statut de vraisemblance de celle-ci est alors investigué par la collectivité; la conjecture faisant l'objet d'une sous-tâche mathématique sur laquelle la collectivité se penche pendant un certain temps. Dans cette séance, cette sous-tâche engendre un travail mathématique à travers lequel la sous-tâche évolue par stabilisation phénotypique. La Figure 6.24 ci-dessous illustre l'évolution de la sous-tâche dont la conjecture fait l'objet.

Figure 6.24 Influence de l'incertitude liée à la formulation d'une conjecture dans la séance de divisibilité par 2 en classe de 5e année



Ce schéma montre que pour résoudre l'incertitude liée à la vraisemblance de la conjecture, un problème d'exemples multiples a émergé. Dans l'activité qui a pris place en classe, différents exemples ont été donnés et classés selon ceux qui donnent des nombres pairs et ceux qui donnent des nombres impairs lorsqu'on les divise en deux. Dans ce travail d'exemplification, une nouvelle conjecture est formulée à savoir que si l'unité est 2 ou 6, la division par deux du nombre donne deux nombres impairs, mais lorsque l'unité est 0, 4 ou 8, la division donne deux nombres pairs. Cette conjecture permet de déployer un problème de parité des unités dans la sphère collective. Ces problèmes d'exemples multiples et de parité des unités permettent à la sous-tâche d'évoluer par stabilisation phénotypique. Dans la séance, d'autres exemples sont utilisés avant de revenir sur la nouvelle conjecture formulée. À la suite cet autre problème d'exemples multiples, la collectivité met en avant les problèmes d'exemples de validation, d'exemples invalidants et de suite mathématique qui permettent la poursuite de l'évolution par stabilisation phénotypique de la sous-tâche. Dans ce problème de suite mathématique, l'explication de la provenance de cette nouvelle conjecture est donnée. L'explication donnée est la suivante :

Figure 6.25 Extrait de l'explication d'une conjecture formulée

L'élève dit qu'elle prenait les 100, 200 et 300 et qu'elle les a mis en 100, 102, 104, 106, 108 et ainsi de suite avec les 200 et 300. Elle dit que le 100 donnait pair, le 102 donnait impair, le 104 pair, le 106 impair et le 108 pair, et que cela lui donnait cela pour les autres aussi.

Comme la cloche est sur le point de sonner, ce problème de suite mathématique laisse la collectivité sur une piste d'exploration future. Dans cette séance, la formulation de la conjecture du nombre pair qui divisé en deux donne deux nombres impairs a engendré une nouvelle conjecture dont l'investigation est à poursuivre. Ceci rappelle le premier résultat que les pratiques de mathématisation sont autogénératives et qu'elles permettent de mettre en avant des problèmes mathématiques qui agissent en tant que tâches disponibles sur lesquelles la collectivité peut réagir en retour; formant ainsi une boucle itérative de tâches à résoudre dans la sphère collective. À la fin de la séance, le statut de vraisemblance de cette nouvelle conjecture, et son domaine de validité, demeure à établir. Ceci laisse la collectivité avec une nouvelle incertitude à surpasser, et qui pourrait permettre à la tâche routinière initiale de poursuivre son évolution. Dans cette séance, l'incertitude liée à la vraisemblance de la conjecture initiale a ainsi permis à la tâche routinière initiale d'évoluer par diversification. La conjecture est devenue le centre d'attention de la collectivité qui tente d'en établir le statut de vraisemblance. La sous-tâche mathématique qui en a découlé a ensuite évoluée par stabilisation phénotypique par les problèmes qui ont été déployés en vue de la résoudre. L'évolution aurait pu se poursuivre par l'investigation de la nouvelle conjecture.

Cet exemple montre que l’incertitude liée à la formulation d’une conjecture peut jouer un rôle important dans l’évolution des tâches routinières initiales. D’ailleurs dans la séance sur la divisibilité par 4 présentée au chapitre précédent, et discutée précédemment, la conjecture de la multiplication par 4 qui donne un nombre pair s’est aussi montrée porteuse au regard de l’évolution de la tâche routinière initiale. En effet, bien que sa vraisemblance semble plausible pour plusieurs, celle-ci n’est pas établie d’emblée par la collectivité qui cherche à surmonter l’incertitude entourant la justification et la validation de la conjecture. Dans la séance, la conjecture devient l’objet de la troisième sous-tâche mathématique sur laquelle la collectivité se penche dans la séance. Le travail de la conjecture, soit de la sous-tâche, permet à la tâche routinière initiale de poursuivre son évolution par stabilisation phénotypique.

En somme, l’analyse des données montre que des incertitudes peuvent naitre lorsque la validité d’un élément mathématique mis en avant en classe est questionnée ou recherchée. L’analyse révèle que ceci est le cas en particulier lorsque des argumentations mathématiques prennent place ou encore que des conjectures sont formulées. Ces incertitudes semblent créer chez la collectivité un besoin de les surmonter, ce qui engendre une exploration mathématique qui ouvre la porte vers de nouvelles possibilités; possibilités à travers desquelles la tâche routinière initiale est appelée à évoluer.

6.4.2 Des apports à une conceptualisation de l’incertitude en classe de mathématiques

Ces différents exemples d’incertitudes porteuses au regard de l’évolution des tâches routinières initiales s’alignent avec ce que Beghetto (2020) appelle des *actionable uncertainties*. Ce type d’incertitude ouvre une fenêtre sur de nouvelles possibilités en déclenchant de nouvelles actions chez la collectivité. Dans ses travaux sur l’incertitude, ce chercheur distingue trois niveaux d’incertitude, qui peuvent être représentés par le schéma suivant :

Figure 6.26 Continuum des niveaux d'incertitude

Les *mundane uncertainties* font référence à des incertitudes qui sont d'un bas niveau d'intensité. Celles-ci passent souvent inaperçues ou n'entrainent que peu ou pas de réaction chez une personne. Ce type d'incertitude se vit de manière plus implicite, comme la personne n'en est que peu ou pas consciente. Dans les séances, ceci pourrait être représenté lorsqu'une demande d'explication, de justification ou de validation est énoncée, mais qu'elle n'est pas répondue et qu'elle n'engendre pas de réaction chez la collectivité. En effet, ces demandes laissent parfois planer un doute au niveau mathématique, mais qui ne semble pas résonner chez la collectivité qui n'exprime d'ailleurs pas un besoin de le surmonter. Par exemple, dans la séance sur la divisibilité par 4, lorsque l'affirmation que tout nombre pair se divise par un nombre pair est énoncée, une demande de l'expliquer est mise en avant, mais n'est pas répondue. Une réponse de ne pas s'en souvenir et que c'est l'enseignant de l'an dernier qui disait cela est plutôt donnée. À travers cette réponse, il est possible de voir une incertitude quant à la manière de mettre en avant une justification mathématique satisfaisante en lien avec cette affirmation. Toutefois, à cet instant, la collectivité ne semble pas embêtée par le fait de ne pas savoir comment justifier mathématiquement l'affirmation, se tournant plutôt vers un argument d'autorité s'appuyant sur l'enseignant de l'année précédente. La collectivité ne réagit pas davantage, si bien que l'incertitude sur la manière d'appuyer mathématiquement cette affirmation n'est pas vraiment perçue par la collectivité qui ne cherche pas à la surmonter autrement que par cet argument d'autorité. De l'autre côté du continuum se trouvent les *profound uncertainties* qui sont extrêmement intenses et qui apparaissent comme étant inaccessibles; ne pouvant être vraiment connues, comprises, ni résolues par la personne qui se trouve face à ce type d'incertitude. Ce type d'incertitude ne semble toutefois pas être présent dans les données.

Entre ces deux pôles, il y a une grande variété d'expériences d'intensité modérée d'incertitude, ce sont les *actionable uncertainties*. Ce type d'incertitude augmente le niveau d'attention de la personne qui se trouve dans cet état, et l'entraine dans une impasse qui éveille chez elle le besoin d'explorer de nouvelles possibilités et de mettre en œuvre de nouvelles actions. Ce type d'incertitude est reconnue pour être un moteur de nouvelles investigations et pour ouvrir sur de nouvelles possibilités de penser et d'agir (*Ibid.*). Dans la séance sur la divisibilité par 4 (aux sous-tâches #2 et 2a) une demande de s'intéresser à cette stratégie que tout nombre pair se divise par un nombre pair est énoncée, et le nombre 589 est donné en tant que nouvel exemple à partir duquel réfléchir. À ce moment, ce qui était de l'ordre d'une *mundane uncertainty* devient une *actionable uncertainty*, puisqu'une invitation de s'engager avec l'incertitude quant à la manière de justifier cette stratégie au plan mathématique est lancée et répondue. La collectivité prend alors le temps d'explorer de nouvelles possibilités et de mettre en avant de nouvelles actions mathématiques afin de la surmonter, ce qui permet à la tâche routinière initiale de poursuivre son évolution. Les analyses montrent que de telles *actionables uncertainties,* ces incertitudes productives, sont présentes dans les séances de classe. Celles-ci permettent à la collectivité d'investiguer de nouvelles avenues, ce qui engendre un travail mathématique important qui stimule l'évolution des tâches routinières initiales, comme l'illustrent les exemples précédents.

Ainsi, bien qu'au niveau individuel les élèves savent comment résoudre la tâche routinière proposée, par définition d'une tâche routinière, au niveau collectif, des incertitudes sur la validité de certains éléments mathématiques mis en avant en classe ou encore sur la manière de les expliquer ou de les justifier émergent de l'activité collective de pose|résolution de problèmes qui prend place. Ces incertitudes ne proviennent pas de la résolution individuelle des tâches routinières proposées (sinon, il ne s'agirait pas d'une tâche routinière), mais naissent du travail collectif fait dans l'action pour les résoudre. Les incertitudes sont le fruit des inter-actions entre la collectivité et la tâche alors qu'elles co-évoluent. Ces incertitudes ne sont, en ce sens, pas entièrement prévisibles. En effet, il n'est pas possible d'être certain, *a priori*, qu'une incertitude précise émergera des inter-actions, qu'elle sera abordée par la collectivité à un moment prédéterminé ou encore qu'elle occupera un temps précis de l'activité collective afin de la surpasser. Il est toutefois possible d'identifier certains éléments qui pourraient potentiellement devenir une source d'incertitude en classe, par exemple, en faisant une analyse *a priori* de la tâche routinière initiale. Toutefois, ce qui, dans l'activité collective, devient la source d'une incertitude, et en particulier d'une incertitude productive dans ce qu'elle permet de produire au plan mathématique en classe, ne peut être entièrement prédit ou contrôlé. C'est d'ailleurs sous les angles d'interdépendance entre la collectivité et l'environnement, et du manque de prédictibilité, de contrôle, de prédétermination ou encore de certitude que Beghetto (2020) propose de concevoir la notion même d'incertitude :

> Uncertainty refers to a state of doubt. *It connotes a lack of determinateness, sureness, stability, control, and predictability*. Although uncertainty typically refers to one's own experience of doubt in the present moment, *it also includes past- and future-oriented doubts about others, features of the environment, and the interrelationship among self, others, and context* (Jordan & McDaniel, 2014). It thereby refers to a present state of not knowing, a future oriented inability to confidently predict what will happen in the future and a potential lack of clarity of how to make sense of past events. (p. 2, c'est moi qui met l'emphase)

Cette définition met en lumière que l'incertitude peut être relative à une activité qui se veut collective qui ne peut être entièrement prédéterminée et où des doutes surgissent à travers les relations avec les autres et avec l'environnement. À cet égard, il semble raisonnable que l'incertitude soit présente dans les données. L'exploitation de tâches routinières par la collectivité est une activité d'*exploitation* qui consiste à tirer profit de ce qui se produit en classe, dans l'action *collective* de résolution de la tâche routinière proposée. C'est le caractère instantané, et donc non certainement prévisible, des inter-actions entre la collectivité et la tâche, alors que tous deux co-évoluent au fil de leurs inter-actions, qui fait émerger la composante de l'incertitude. En tournant le regard vers la collectivité, il apparait donc que les tâches initialement vues comme étant routinières ne le sont plus tellement lors de l'activité collective qui se déploie pour les résoudre, puisque celles-ci évoluent à travers ses inter-actions avec la collectivité. Cette présence remarquée de l'incertitude dans les données amène à repenser la notion de problème mathématique et à considérer la présence de problèmes mathématiques dans les données.

6.5 L'émergence de problèmes mathématiques collectifs

Au Chapitre 1, la notion de problème mathématique a été définie en relation à ses trois dimensions d'émergence, d'incertitude et de relativité. Étant donné que les tâches routinières manquent d'incertitude, d'où leur qualificatif de « routinier », celles-ci sont souvent qualifiées d'*exercices*, afin de les distinguer des *problèmes* mathématiques. La résolution de ce type de tâche ne se qualifiant d'ailleurs pas de résolution de problèmes (Gavaz et al., 2021). Les analyses conduites dans le cadre de cette thèse doctorale montrent toutefois que la résolution *collective* de tâches routinières peut bel et bien devenir une activité de résolution de *problèmes*, avec tout ce que le terme *problème* comporte. Toutefois, le problème est considéré sous l'angle de la collectivité, faisant apparaitre la notion de *problèmes mathématiques collectifs* qui peut être (re)définie à travers les trois dimensions d'émergence, d'incertitude et de relativité ajustées au contexte collectif. Les lignes qui suivent définissent cette notion, puis des exemples de problèmes mathématiques collectifs et de leur rôle dans l'évolution des tâches routinières sont présentés.

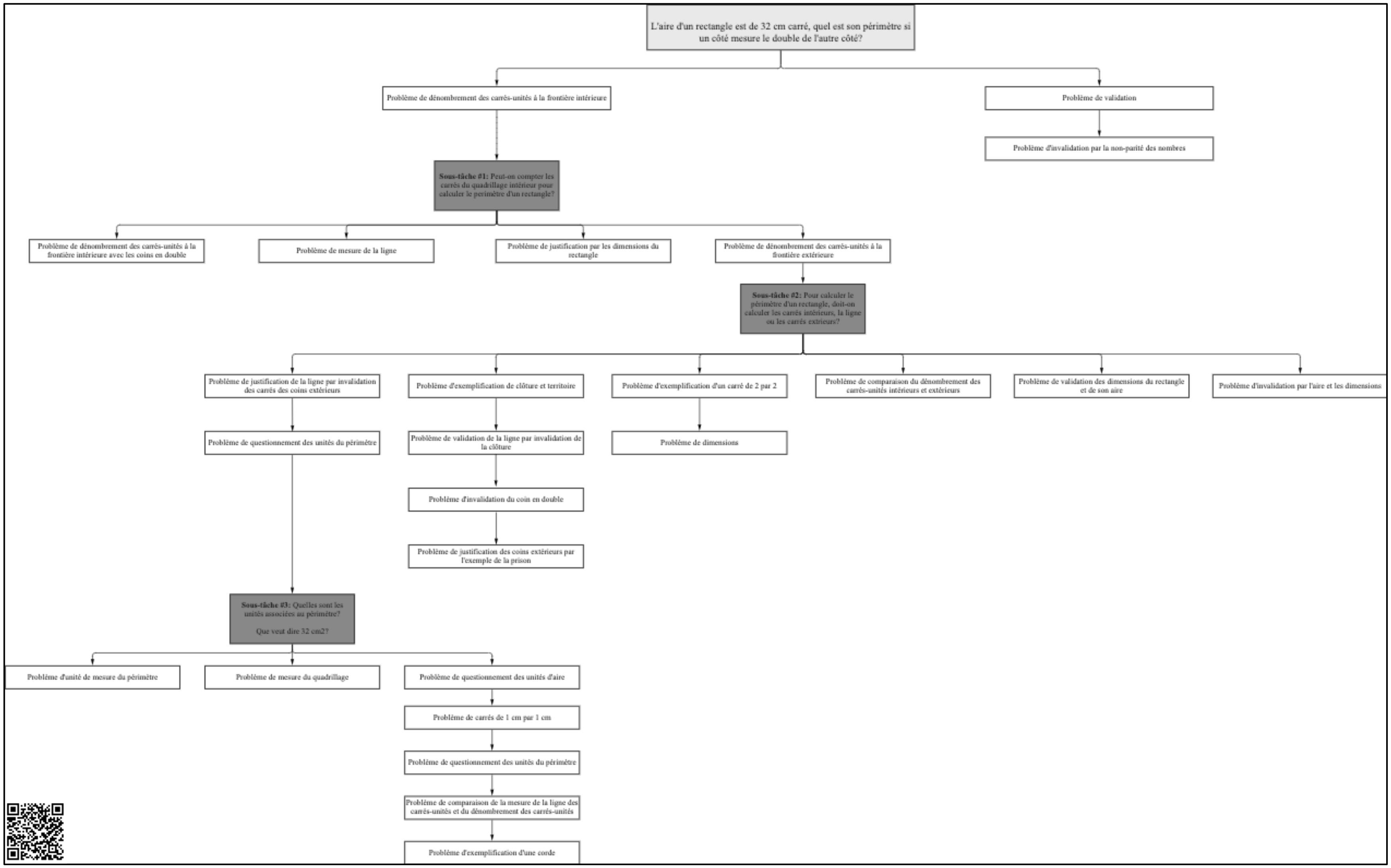
6.5.1 Vers une définition de la notion de problèmes mathématiques collectifs

Au niveau de l'émergence, à l'image de ce qui a été discuté au Chapitre 1, pour qu'il y ait un problème, celui-ci doit émerger chez la collectivité. Cette émergence se produit alors que la collectivité est en interaction avec la tâche routinière qu'elle tente de résoudre. L'activité collective de pose|résolution de problèmes qui prend place en classe, en particulier à travers la formation d'une boucle itérative de tâches à résoudre discutée précédemment, peut faire émerger un problème chez la collectivité si un désir de s'attarder à une certaine situation mathématique en vue de la résoudre se soulève. La collectivité accepte alors de s'engager dans sa résolution. Un problème mathématique collectif est ainsi mis en avant par la collectivité dans une situation donnée alors qu'elle s'engage à le résoudre. Par exemple, lorsque l'affirmation que tout nombre pair se divise par un nombre pair est initialement donnée en guise de résolution de la tâche de divisibilité par 4, elle ne fait pas émerger, à cet instant précis, de problème chez la collectivité. Cette affirmation reste, à ce moment, de l'ordre d'une tâche disponible dans la sphère des possibilités. Étant disponible, celle-ci est reprise plus tard dans la séance, soit à partir des sous-tâches #2 et #2a, et donne le ton au reste de la séance.

L'incertitude, de son côté, a été discutée à la sous-section précédente. Au niveau collectif, elle se décline sous deux angles. Le premier est relatif au fait de poser un défi à la collectivité, ou encore de fournir un effort supplémentaire pour surpasser un doute quant à la validité d'un résultat ou d'une idée proposée en classe. C'est cet angle qui a été abordé au Chapitre 1. L'argumentation et la formulation de conjectures, comme les exemples précédents l'illustrent, sont des pratiques de mathématisation qui contribuent à l'émergence d'une telle incertitude. Le second angle renvoie plutôt à la non-prédétermination, à la non-prédictibilité ou encore au non-contrôle d'une activité qui se veut collective. La définition de Beghetto (2020) de l'incertitude permet de mettre ce second angle en lumière. La collectivité, à travers l'activité de pose|résolution de problèmes déployée pour résoudre la tâche routinière initiale, est appelée à vivre des doutes, qui peuvent être de différents niveaux d'intensité, et qui peuvent l'amener à se questionner, à s'interroger, face à la situation dans laquelle elle se trouve. L'incertitude, sous ses différents niveaux d'intensité, peut ainsi émerger à travers l'activité collective déployée pour résoudre la tâche routinière initiale proposée.

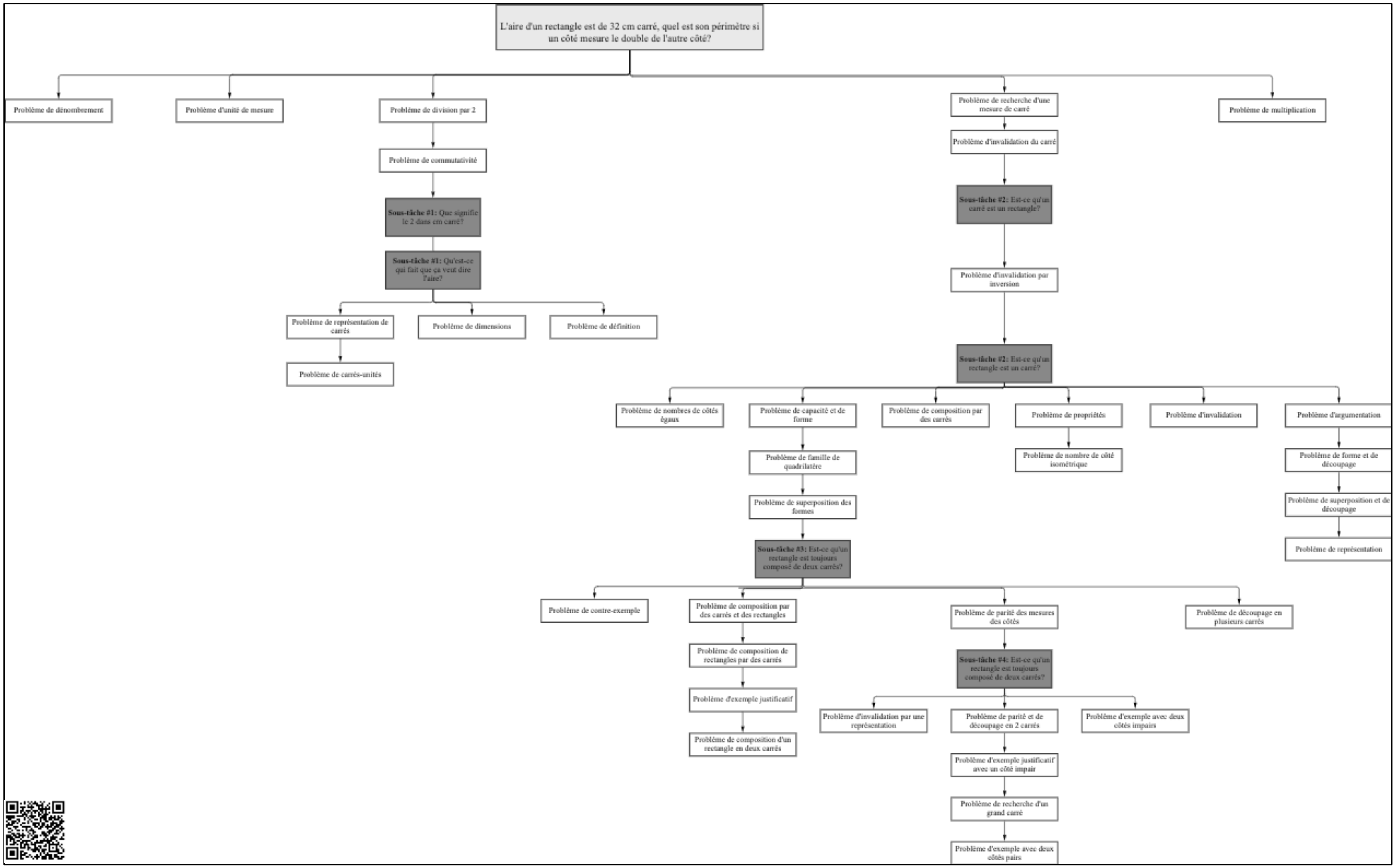
Concernant la dimension de la relativité, de manière analogue à ce qui été discuté au Chapitre 1, le problème qui émerge est dépendant de la collectivité et de ce que l'environnement mathématique déclenche comme réaction chez elle. De la même manière, les actions mathématiques déployées par la collectivité stimulent des changements dans la tâche routinière initiale, ce qui déclenche de nouvelles actions de la part de la collectivité, et ainsi de suite. Cette boucle d'influence mutuelle entre la tâche et la collectivité entraine une activité de pose|résolution de problèmes qui est unique. Ainsi, face à une même tâche initiale, un problème peut émerger dans une collectivité et pas dans une autre. En effet, d'une collectivité à une autre, à partir d'une même tâche routinière initiale, différents éléments mathématiques sont exposés, des explications ou stratégies différentes sont proposées, une insistance est mise sur certains éléments et moins sur d'autres, des erreurs différentes surviennent et attirent l'attention de la collectivité, etc. Ceci génère de nouvelles tâches mathématiques disponibles qui sont différentes d'une collectivité à une autre au regard d'une même tâche routinière initiale. Également, un problème peut en être un pour une collectivité à un moment donné, et ne plus en être un le lendemain en fonction de l'avancement des compréhensions et habiletés mathématiques, par exemple. La tâche routinière sur l'aire et le périmètre qui a été proposée à résoudre à la classe de Gisèle et à celle de Louise illustre bien ceci. Cette tâche a mené à une activité de pose|résolution de problèmes qui est différente dans les deux cas. Dans la classe de Gisèle, la collectivité s'est principalement penchée sur le concept même de périmètre, comme discuté au chapitre précédent. La Figure 6.27 suivante reprend le schéma de l'ontogénie de cette tâche dans la classe de Gisèle.

Figure 6.27 Ontogénie de la tâche sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5e année de Gisèle



Dans la classe de Louise, cette même tâche initiale a amené la collectivité à travailler les notions de carré et de rectangle ainsi que le découpage en carrés et en rectangles. La Figure 6.28 suivante présente l'ontogénie de cette tâche dans la classe de Louise.

Figure 6.28 Ontogénie de la tâche sur l'aire et le périmètre dans la classe de 5e année de Louise



Ces différents schémas montrent que ces collectivités ont vécu une activité de pose|résolution de problèmes bien différente l'une de l'autre à partir de la même tâche routinière. Bien que le carré associé aux unités d'aire ait été discuté dans les deux collectivités, les schémas illustrent que celles-ci n'ont, de façon globale, pas travaillé au niveau des mêmes notions et enjeux mathématiques; la notion de périmètre dans la classe de Gisèle et les caractéristiques du carré et du rectangle ainsi que le découpage en carrés ou en rectangles dans la classe de Louise. Ceci montre le caractère relatif, et situé, de l'activité de pose|résolution de problèmes. Celle-ci est relative aux personnes présentes, à l'environnement qui prend place en classe et à ce que leurs inter-actions déclenchent chez eux. Chaque collectivité a abordé des problèmes mathématiques différents et la tâche routinière initiale a évolué d'une manière unique dans chacune de deux collectivités.

Les dimensions d'émergence, d'incertitude et de relativité, prises au niveau collectif, permettent de fonder la notion de *problèmes mathématiques collectifs.* L'analyse des données conduite dans le cadre de cette thèse doctorale montre que des problèmes collectifs sont présents dans les séances analysées et que ceux-ci jouent un rôle fondamental dans l'évolution des tâches routinières initiales.

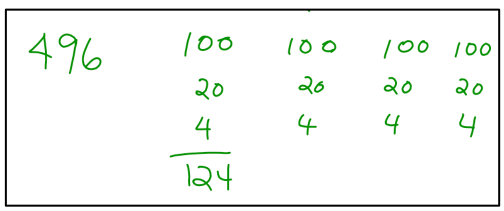
6.5.2 Les problèmes mathématiques collectifs au cœur de l'évolution des tâches routinières

Les analyses montrent que des problèmes mathématiques collectifs peuvent émerger de l'activité collective déployée pour résoudre une tâche routinière initiale. Ces problèmes mathématiques collectifs sont par ailleurs centraux dans l'évolution des tâches routinières. De manière plus précise, les analyses conduites montrent que deux types de problèmes mathématiques collectifs peuvent émerger de l'activité collective déployée pour résoudre les tâches routinières initiales : (1) des problèmes collectifs relatifs aux contenus mathématiques en jeu, et (2) des problèmes collectifs relatifs aux dimensions métamathématiques. Le premier type de problèmes collectifs fait référence à la compréhension même des contenus mathématiques qui émergent des inter-actions, et le second au fait de faire des mathématiques avec d'autres. De tels problèmes mathématiques collectifs surviennent d'ailleurs plusieurs fois au cours d'une même séance. La tâche de divisibilité par 4 en classe de 6^{e} année, dont l'analyse complète est présentée au chapitre précédent, permet de l'illustrer.

6.5.2.1 Le problème collectif issu de la stratégie de décomposition du nombre

Dans la séance de divisibilité par 4, une argumentation se produit alors que la validité de la stratégie de décomposition du nombre est remise en question. Au niveau collectif, un problème de contenu mathématique peut être observé. À travers ce problème, la collectivité tente de montrer si la proposition mathématique « n divise un nombre si et seulement s'il divise chaque élément qui permet de le décomposer » est valide. Cette proposition devient un problème mathématique collectif, car il émerge en classe alors que la collectivité s'engage à le résoudre. Également, une incertitude quant à sa validité est présente, et il est relatif à la collectivité, puisque, par exemple, il pourrait ne pas en être un pour une autre collectivité qui saurait comment en justifier la validité. C'est la collectivité qui s'engage dans ce problème via le travail de la première sous-tâche mathématique « Peut-on décomposer un nombre en plusieurs parties et vérifier si chaque partie est divisible pour savoir si le nombre au complet est divisible? ». Dans le travail de résolution de la sous-tâche, la stratégie est réexpliquée à partir de l'exemple du nombre 496 (plutôt que 498). Les traces laissées au tableau sont les suivantes :

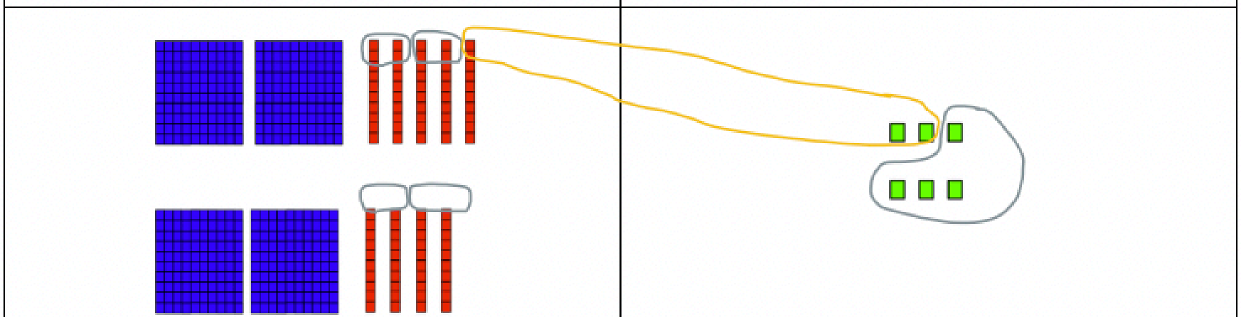
Figure 6.29 Traces de la stratégie de décomposition du nombre et de groupements sur le nombre 496



Au plan mathématique, beaucoup reste à faire concernant la résolution de ce problème collectif. En effet, bien que la collectivité semble comprendre que la décomposition de 496, sous ce format, semble fonctionner, celle-ci n'a pas été justifiée d'une manière générale comme la sous-tâche l'appelait. En effet, qu'en est-il pour d'autres décompositions? Quels sont les implicites sous-jacents à la stratégie offerte?

Par exemple, 496 peut aussi se décomposer en 490 + 6. Toutefois, 4 ne divise ni 490 ni 6. Quoi faire alors? Pourquoi cette stratégie fonctionne-t-elle à partir de certaines décompositions, judicieusement choisies, et pas pour d'autres? Comment ajuster cette proposition pour la rendre valide? Ces questionnements, potentiellement amorcés par la collectivité à travers la sous-tâche #2, sont au cœur même de la compréhension de la notion de divisibilité. Utilisons la décomposition 490 + 6 pour le montrer à partir d'un raisonnement possible. Dans 490, il y a 4 centaines. Dans chaque centaine, il est possible de faire 25 groupes de 4, ce qui fait que 4 divise chaque centaine. Dans chaque dizaine, il n'est possible que de faire 2 groupes de 4. Il reste ainsi 2 unités à chaque dizaine. Donc, pour 9 dizaines, il reste 2 x 9 donc 18 unités. Les 18 unités peuvent alors être regroupées. Sur ces 18, est possible de faire 4 groupes de 4 unités, si bien qu'il en reste 2. Dans le 6 maintenant, il est possible de faire 1 groupe de 4 unités, et il en reste alors 2. Ces 2 unités qui restent peuvent être jumelées aux 2 unités qui restent du 490, ce qui permet de former un groupe de 4. Il ne reste plus d'unité libre, alors le nombre 496 est divisible par 4. Toutefois, bien que 4 divise ce nombre, il ne divise, ni 490 ni 6. C'est en effet la juxtaposition des unités restantes du 490 et du 6 qui permet d'établir la divisibilité de 496 par 4. La Figure 6.30 suivante illustre ceci.

Figure 6.30 Décomposition de 496 en 490 et 6 et divisibilité par 4

490	6
	
Centaines : 25 x 4 = 100, donc 4|100. Dizaines : 2 x 4 = 8, donc il reste 2 unités par dizaine. Elles sont regroupées par 4 (en gris). Comme on a 9 dizaines, il reste 2 unités libres. **490 n'est donc pas divisible par 4, car il reste 2 unités qui ne font pas partie d'un groupe.**	Unités : On peut faire un groupe de 4 (en gris). 1 x 4 = 4, donc il reste 2 unités libres. **6 n'est donc pas divisible par 4, car il reste 2 unités qui ne font pas partie d'un groupe.**
Les unités restantes du 490 et les 2 unités restantes du 6, ensemble (en jaune), forment un groupe de 4. 496 est donc divisible par 4, car il n'y a pas de reste.	

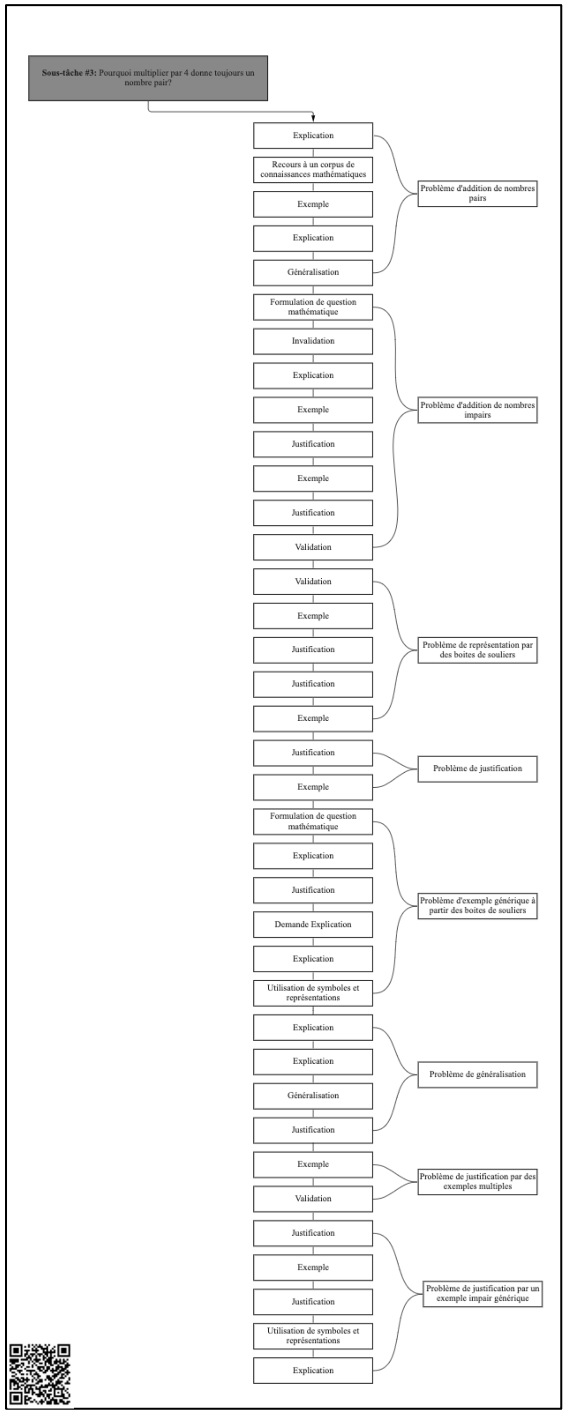
Cet exemple montre que ce problème collectif est au cœur même de la compréhension de la notion de divisibilité, ici par 4. En classe, la stratégie de décomposition a été étudiée par le biais de la première sous-tâche puis reprise à la seconde sous-tâche, mais le temps a manqué à la séance pour y revenir afin de collectivement résoudre le problème qu'elle a déclenché. Ce problème collectif a toutefois joué un rôle dans l'évolution de la tâche routinière initiale, par le biais de la sous-tâche #1 et #2, mais aussi, et surtout, dans les prolongements futurs qu'elle aurait pu apporter. Différents exemples auraient pu être investigués, des liens entre les exemples qui fonctionnent et ceux qui ne fonctionnent pas auraient pu être faits, un fonctionnement général pour toute tâche de divisibilité aurait pu être ressorti, etc. Ceci montre que beaucoup pouvait encore être investigué par la collectivité pour résoudre ce problème mathématique collectif qui a émergé en classe. Cette idée de collectivement résoudre ce problème renvoie aussi à une autre facette : celle de trouver des explications et des justifications mathématiques qui sont *collectivement* convaincantes. L'exemple suivant illustre précisément cet aspect.

6.5.2.2 Le problème collectif issu de la conjecture de la parité des multiples de 4

Dans le travail justificatif de la conjecture de la multiplication par 4 qui donne un nombre pair (voir Figure 6.31 suivante), un problème mathématique collectif de validation de cette conjecture est présent : il émerge et la collectivité s'engage à le résoudre, sa vraisemblance n'est pas d'emblée établie par la collectivité ce qui fait émerger une incertitude, et il est relatif, car il aurait pu ne pas devenir un problème pour une autre collectivité. Ce problème mathématique collectif émerge lors de l'activité déployée pour résoudre la sous-tâche #2a. Au niveau mathématique, ce problème travaille le lien entre la parité d'un nombre et la multiplication. Par ailleurs, ce travail mathématique fait partie, dans ce cas-ci, du travail de compréhension collectif de la divisibilité par 4 : la résolution de ce problème mathématique collectif donnant des points de repère permettant de comprendre la divisibilité d'un nombre par 4. Ce problème mathématique collectif présente donc des enjeux mathématiques. Il est relatif aux contenus mathématiques.

Toutefois, à un certain point, la conjecture est justifiée, mais la collectivité continue de donner des justifications supplémentaires. En effet, l'activité de pose|résolution de problèmes en lien avec les problèmes d'addition de nombres pairs puis de nombres impairs, à eux seuls, permettent de justifier la conjecture. En effet, dans un contexte de divisibilité, les exemples de nombres pairs et impairs constituent des exemples génériques qui couvrent tous les cas possibles de la multiplication d'un nombre par 4 : le nombre étant soit pair soit impair. Par ailleurs, d'autres exemples qui fonctionnaient avaient été donnés auparavant. Or, des justifications supplémentaires sont tout de même déployées par la collectivité. La Figure 6.31 suivante, qui est une reprise de la Figure 6.18, permet de monter la poursuite du travail justificatif mis en avant par la collectivité.

Figure 6.31 Travail de justification collectif de la conjecture de la multiplication par 4



Dans ce problème mathématique collectif, non seulement un problème de contenu mathématique est présent, mais un problème métamathématique peut aussi être décelé; celui de s'assurer que ce problème soit expliqué et justifié de façon convaincante pour la collectivité. Ce problème d'ordre métamathématique émerge chez la collectivité alors qu'elle ressent un besoin ou un désir d'expliquer et de justifier davantage les éléments mathématiques en jeu. Il est relatif à la collectivité qui possède ses propres normes socioculturelles qui régissent les inter-actions dans la classe de mathématiques (Cobb et al., 1992). Ces normes ont une historicité, et sont situées au contexte d'une collectivité, dans le sens où, par exemple, une nécessité de justifier peut être présente, car de façon habituelle toute explication, réponse ou idée est suivie d'une justification mathématique. Ou encore, certaines justifications peuvent être nécessaires dans une collectivité, mais pas dans une autre, car elle a déjà admis certains résultats auparavant. Des normes socioculturelles, qui régulent les inter-actions, sont présentes dans chaque collectivité, ce qui fait que les problèmes métamathématiques sont aussi relatifs à ces normes sociales et à l'historicité de la collectivité. Également, l'incertitude liée à ce problème métamathématique peut être de l'ordre du doute que tous aient bien compris ce qui est expliqué ou encore que la justification offerte soit bien acceptée par la collectivité. Ceci peut entrainer d'autres demandes d'explication ou de justification, ou encore, le besoin ou le désir d'expliquer ou de justifier davantage. Les trois composantes d'émergence, de relativité et d'incertitude étant réunies, il s'agit donc bien d'un problème mathématique collectif.

Ce problème mathématique collectif joue un rôle dans l'évolution de la tâche routinière initiale. En effet, les explications et justifications données déclenchent de nouvelles pratiques de mathématisation; les pratiques de mathématisation étant autogénératives, comme discuté précédemment. Étant également consubstantielles aux problèmes mathématiques, elles permettent de déployer des problèmes mathématiques qui contribuent à faire avancer la résolution de la tâche et à la faire évoluer. Dans cette séance, ce problème mathématique collectif contribue à la stabilisation phénotypique de la troisième sous-tâche. À la suite des problèmes d'addition de nombres pairs et d'addition de nombres impairs (qui permettent de justifier la conjecture), les problèmes de représentation par des boites de souliers, de justification, d'exemple générique à partir des boites de souliers, de généralisation, de justification par des exemples multiples et de justification par un exemple impair générique ont émergé. Ces différents problèmes, déployés en vue de justifier la conjecture, permettent à la troisième sous-tâche d'évoluer par stabilisation phénotypique.

Ainsi, il est possible de voir que le problème mathématique collectif de la validation de la conjecture est un problème de contenu mathématique, mais aussi un problème métamathématique dans lequel la collectivité surenchérit sur de nouvelles justifications afin de s'assurer de collectivement être convaincu de sa validité. La collectivité s'assure d'être collectivement satisfaite de la résolution de ce problème mathématique collectif.

6.5.2.3 Le problème collectif issu du calcul par l'algorithme

Dans la tâche de divisibilité par 4, une stratégie de calcul par l'algorithme est mise en avant en classe. La réponse obtenue, 124,5, est par la suite contestée, par une proposition que la réponse est plutôt 124,2. L'argumentation qui prend place, due à la contestation de la validité d'un résultat, génère de nouvelles propositions en vue de la surmonter. L'encadré suivant reprend la description de ce moment de la séance.

Figure 6.32 Extrait d'une argumentation issue d'une stratégie de calcul par l'algorithme

À la suite du travail d'explication de cette stratégie de décomposition, un retour est fait sur la stratégie de Sam, soit de diviser directement le nombre initial par 4 ce qui lui donne 124,5. L'élève explique alors avoir utilisé l'algorithme de calcul, et affirme que « comme le nombre n'est pas entier, il n'est pas divisible ». Une distinction entre les termes « divisé » et « divisible » est alors mise en avant par le CE.
[…]
Un autre élève, Adam, intervient pour dire qu'il a, lui aussi, utilisé l'algorithme de calcul, mais qu'il a obtenu 124,2 plutôt que 124,5. Pour départager entre ces deux réponses, une élève propose de multiplier par 4 le résultat obtenu pour voir lequel mène au nombre initial. Un autre élève explique alors que le 124,2 ne fonctionne pas et explique la méthode à suivre lors du fractionnement de l'entier dans l'algorithme de calcul.

Charlie fait, à son tour, une autre proposition :

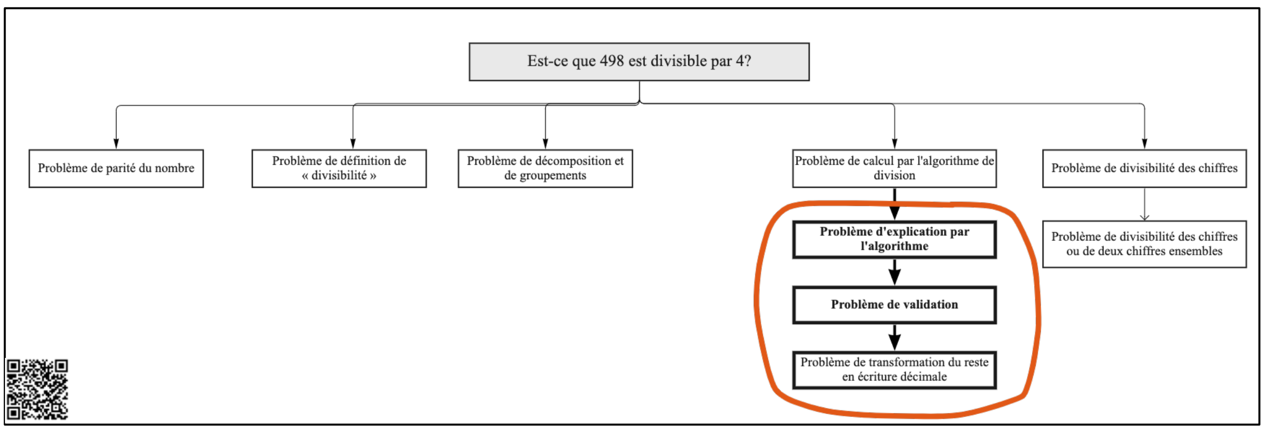
Charlie : J'ai fait 498 ÷ 4, ça m'a donné 124. Il reste un 2 à diviser alors j'ai regardé avec ma calculatrice et ça m'a donné 124,5. C'est donc 124 reste 2.

Le CE dit alors qu'il faudrait se demander comment positionner le reste de 2, et recentre sur le fait que comme il y a un reste de 2 le nombre n'est pas divisible. Il dit qu'ils pourront revenir à ceci, et propose,

Dans cet extrait, un problème mathématique collectif de contenu mathématique dont l'enjeu est le traitement du reste d'une division en écriture décimale est présent. Il s'agit d'un problème mathématique collectif, car il émerge chez la collectivité et celle-ci s'engage à la résoudre. Il est relatif à la collectivité puisque dans une autre collectivité ce problème aurait pu ne pas émerger (d'autant plus que la tâche de divisibilité n'exige pas d'exprimer le reste d'une quelconque façon). Et, des incertitudes sur la réponse de la division par l'algorithme et sur la manière d'exprimer un reste en écriture décimale sont présentes.

Ce problème mathématique collectif joue un rôle dans l'évolution de la tâche routinière initiale. En effet, le problème de calcul par l'algorithme utilisé en tant que stratégie pour résoudre la tâche routinière initiale devient une tâche mathématique disponible dans la sphère collective, comme discuté à la section 6.1. Cette tâche a engendré un problème mathématique collectif qui permet de faire avancer collectivement cette stratégie. En effet, la tâche stimule une invalidation chez la collectivité et celle-ci s'engage à surmonter l'argumentation qui prend place. La tâche de calcul par l'algorithme fait alors émerger un problème d'explication par l'algorithme, puis un problème de validation et, finalement, un problème de transformation du reste en écriture décimale. Ces problèmes sont déployés en vue de surmonter l'argumentation qui prend place, et ainsi résoudre le problème mathématique collectif qui a émergé. La Figure 6.33 suivante illustre la stabilisation phénotypique de la tâche routinière initiale qui se poursuit à la suite de l'émergence de ce problème mathématique collectif.

Figure 6.33 Poursuite de la stabilisation phénotypique par l'émergence d'un problème mathématique collectif



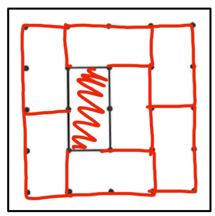
Dans cette séance, cette tâche de calcul par l'algorithme est devenue à la charge de la collectivité qui s'est engagée à la résoudre; faisant naitre un problème mathématique collectif. En vue de la résoudre, une invalidation est d'abord énoncée. Cette invalidation engendre ensuite un besoin de surmonter l'argumentation qui prend place, ce qui fait naitre de nouvelles propositions. À travers ceci, différentes pratiques de mathématisation sont mises en avant. Étant consubstantielles aux problèmes mathématiques, comme discuté à la section 6.1, celles-ci les mettent en route dans la sphère collective. La tâche routinière initiale poursuit ainsi son évolution; par stabilisation phénotypique dans le cas de cet exemple.

6.5.2.4 D’autres exemples de problèmes mathématiques collectifs dans les données

L’analyse des données montre que des problèmes mathématiques collectifs sont présents dans l’ensemble des séances. Prenons d’autres exemples pour l’illustrer.

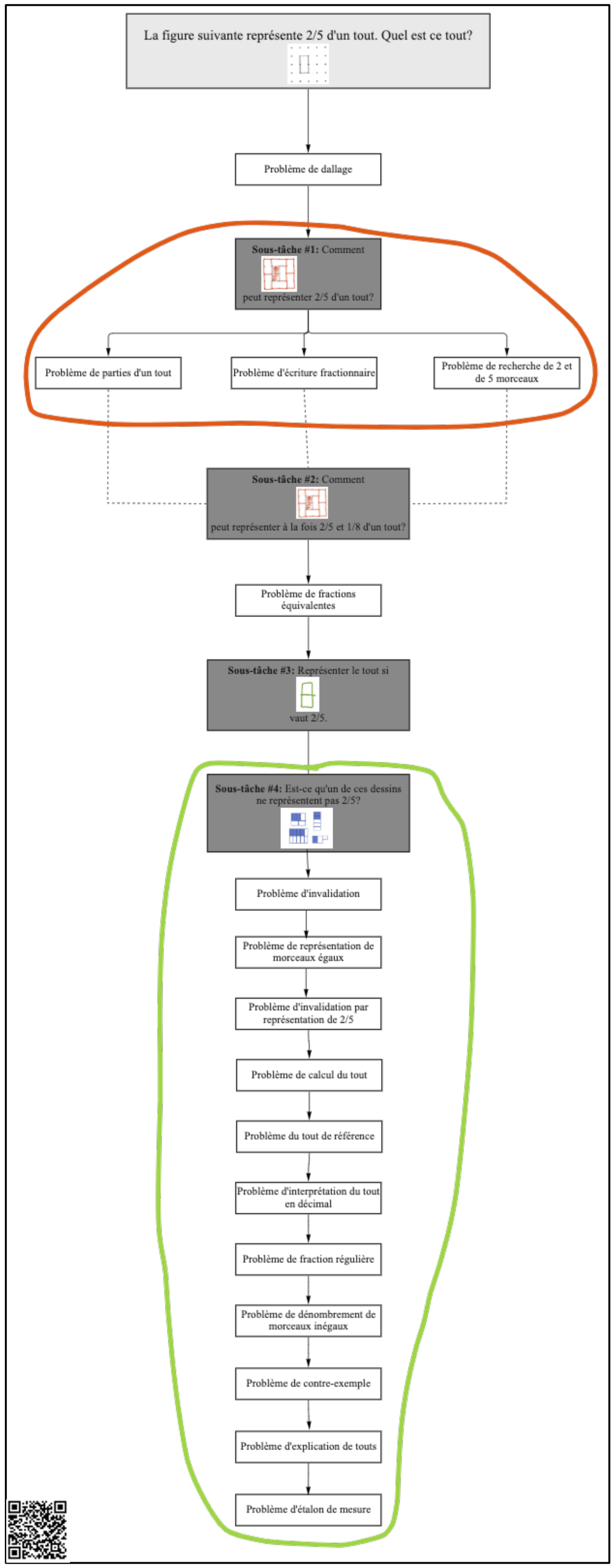
Dans la séance sur la complétion du tout en 6e année, une incertitude a émergé en classe dès le début de la séance alors que la stratégie suivante est proposée :

Figure 6.34 Stratégie de dallage proposée pour résoudre la tâche de complétion du tout



Cette stratégie permet de mettre en route un problème de dallage dans la sphère collective. En effet, la réponse repose sur le recouvrement de l’espace du plan pointé en utilisant le rectangle en guise d’étalon pour effectuer le dallage. Dans la suite de cette séance, la tâche initiale est modifiée par le plan pointé derrière qui est retiré; étant probablement à la source de l’erreur commise. Lorsque cette stratégie est proposée en classe, une incertitude émerge puisque la collectivité ne peut être expliquée comment elle fonctionne, et est mitigée sur sa validité. En effet, la collectivité ne parvient pas à expliquer ni pourquoi elle fonctionne, ni pourquoi elle ne fonctionne pas. Cette incertitude entraine la collectivité dans la résolution d’un problème mathématique collectif visant à comprendre comment cette réponse pourrait représenter $\frac{2}{5}$ du tout. Trois stratégies sont utilisées pour le résoudre, représentant une évolution par stabilisation phénotypique de la sous-tâche dont ce problème mathématique collectif fait l’objet. La Figure 6.35 suivante illustre, en rouge, l’influence de ce problème mathématique collectif dans l’évolution de la tâche routinière initiale.

Figure 6.35 Influence du problème collectif de dallage dans l'évolution de la tâche de complétion du tout



Dans cette séance, à la quatrième sous-tâche mathématique, un autre problème mathématique collectif peut être observée lorsque la validité de la réponse  est remise en question. L'argumentation qui prend place fait naitre une incertitude puisque la collectivité est mitigée sur sa validité. Un problème mathématique collectif est présent alors que la collectivité tente de se convaincre de comment fonctionne cette réponse pour représenter $\frac{2}{5}$ d'un tout. La résolution de ce problème mathématique collectif permet à la sous-tâche mathématique d'évoluer par stabilisation phénotypique, comme l'illustre, en vert, la Figure 6.35 ci-dessus.

La tâche des notes de musique, tout comme les autres séances d'ailleurs, offre d'autres exemples de tels problèmes mathématiques collectifs. Dans cette tâche, abordée à la sous-section 6.2.2, un problème mathématique collectif de fractions équivalentes peut être décelé. En effet, une incertitude sur la manière d'expliquer ce que sont les fractions équivalentes émerge et la collectivité prend à sa charge de se l'expliquer, soit de résoudre ce problème collectif qu'elle a fait émerger. Pour le résoudre, différents exemples sont donnés et des stratégies pour en créer sont proposées. Ceux-ci sont alors expliqués, justifiés, modifiés et validés collectivement en classe, permettant de résoudre ce problème mathématique collectif de relatif à un contenu mathématique. Or, certains exemples ou stratégies à elles seules permettent de saisir ce que sont des fractions équivalentes, mais d'autres exemples et stratégies sont déployés. Ceux-ci peuvent provenir d'une incertitude que tous aient bien saisi ce que sont des fractions équivalentes, ce qui révèle un problème mathématique collectif d'ordre métamathématique.

Les analyses montrent ainsi que des problèmes mathématiques collectifs sont présents dans les séances, soient-il de l'ordre d'un contenu mathématique et/ou métamathématique, et qu'ils jouent un rôle important dans l'évolution des tâches routinières initiales. La collectivité à la fois fait émerger ces problèmes et prend à sa charge leur résolution.

6.5.3 Synthèse des problèmes mathématiques collectifs

Dans l’activité collective de pose|résolution de problèmes déployée pour résoudre une tâche routinière initiale, des problèmes mathématiques collectifs, de contenus et métamathématiques, peuvent émerger. Leur résolution nécessite des efforts supplémentaires que de simplement résoudre la tâche routinière initiale pour soi-même; la résolution *collective* d’une tâche routinière impliquant davantage.

Par exemple, en prenant le point de vue d’un élève de la classe, il est possible de constater l’effet de la collectivité sur son activité. En effet, cet élève peut se trouver face à un problème métamathématique lorsqu’il doit expliquer son raisonnement aux autres, et que certains ne comprennent pas ce qu’il avance. Ce même élève peut aussi se trouver face à un problème lorsqu’il cherche à convaincre d’autres élèves de la validité de ce qu’il avance, alors qu’il n’aurait pas à chercher autant de justifications s’il était seul. Face à une erreur mathématique qui émerge de l’activité collective, cet élève peut également être dans une impasse pour tenter de la surpasser; n’ayant peut-être jamais été confronté à un tel raisonnement auparavant. Surpasser cette erreur, avec toutes les explications, justifications et validations que ceci peut impliquer, peut rapidement apporter son lot de défis supplémentaires. Résoudre une tâche routinière seule peut certes être facile, compte tenu de la nature de la tâche. Toutefois, mes analyses montrent que de résoudre *collectivement* cette même tâche nécessite davantage, en particulier, par les différents problèmes collectifs à résoudre qui émergent des inter-actions.

Par ailleurs, cette résolution collective est à la charge de la collectivité. En effet, si l’élève ne parvient pas à bien expliquer sa stratégie aux autres, ou encore que certains ne la jugent pas valide, ceci peut faire émerger un besoin d’expliquer ou de justifier davantage, de trouver d’autres manières de raisonner, etc. L’explication, la justification ou encore la validation de la stratégie devient à la charge de la collectivité; créant des problèmes mathématiques collectifs supplémentaires à résoudre par rapport à ce qu’exige une résolution individuelle de la tâche routinière initiale. Mes analyses montrent en ce sens que la résolution individuelle d’une tâche routinière initiale n’est pas de la même nature que la résolution collective de celle-ci. Les erreurs à surpasser, les différentes stratégies à être explicitées, justifiées et validées, les conjectures à être investiguées, etc. font partie de ce qu’est résoudre *collectivement* une tâche routinière initiale. Un lot de problèmes mathématiques collectifs émergent de cette activité. Toutefois, bien que la collectivité fasse émerger tous ces problèmes supplémentaires, elle travaille également, ensemble, à les résoudre.

En somme, les analyses conduites dans le cadre de cette thèse doctorale montrent que l'exploitation de tâches routinières par la collectivité est bel et bien une activité collective de résolution de *problèmes mathématiques*. D'ailleurs, tel que Martinez (1998) le met en exergue :

> Problem-solving is the process of moving toward a goal *when the path to that goal is uncertain*. (p. 605, c'est moi qui met l'emphase).

Au niveau collectif, ce processus d'avancer vers un but, soit la résolution *collective* de la tâche routinière initiale est incertain, tel que discuté précédemment. Cette résolution collective fait émerger différents problèmes mathématiques collectifs qui sont travaillés par la collectivité. Ceux-ci sont dépendants de la collectivité et de ce que l'environnement mathématique stimule chez elle à un moment donné. Ils permettent à la tâche routinière initiale d'évoluer à travers sa résolution; exigeant alors beaucoup plus que d'uniquement la résoudre. Mes analyses montrent d'autant plus que le terme *problème* et les *s* de la notion de « résolution de *problèmes mathématiques* » prennent toute leur importance au sein d'une telle activité collective.

CHAPITRE 7
CONCLUSION

Cette recherche doctorale a pour objectif d'étudier la manière avec laquelle des tâches routinières peuvent être exploitées dans l'action en classe pour stimuler l'activité de résolution de problèmes mathématiques des élèves. À travers celle-ci, des questionnements ont été soulevés, des ancrages théoriques ont été construits, une étude empirique permettant mieux comprendre ce qui se produit, de manière fine, dans l'action en classe a été réalisée et des résultats en sont ressortis. Ce chapitre propose de conclure cette étude en revenant sur ce qu'elle nous apprend et en discutant des ouvertures et possibilités qui maintenant s'offrent à nous, comme communauté de recherche en didactique des mathématiques.

7.1 La synthèse

Des expériences vécues en tant qu'assistante de recherche, et plus tard, comme conseillère pédagogique, m'ont amené à questionner l'idée de « bons problèmes » mathématiques pour la classe. Dans ces expériences, des tâches routinières étaient données à résoudre et menaient, à ma grande surprise, à une activité mathématique dans laquelle les participants réfléchissaient, se questionnaient, argumentaient, faisaient différentes tentatives, émettaient des conjectures, validaient, proposaient des exemples ou des contre-exemples, etc. Une activité riche et dynamique me semblait prendre place, alors que la tâche proposée semblait, à mon avis, avoir peu à offrir en elle-même.

Ces expériences m'ont amené à creuser la notion de « bons problèmes » mathématiques pour la classe puis de « problèmes mathématiques » qui révèlent dépendre à la fois de caractéristiques de la tâche en elle-même et de l'activité mathématique générée par cette tâche par la personne qui est en inter-action avec elle. Dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques, une place centrale a été accordée aux « bons problèmes mathématiques », ceux-ci ayant largement montré leur potentiel pour la classe de mathématiques (Liljedahl et Cai, 2021). Toutefois, dans certains écrits (e.g. Hoshino, Polostkaia et Reid, 2017; Beghetto, 2017), l'idée que des tâches routinières puissent aussi être exploitées en classe de mathématiques et mener à une activité de résolution de problèmes chez les élèves a été retrouvée. À ma connaissance, cette idée, un peu timide, n'a toutefois pas été documentée par les travaux de recherche, demeurant à un niveau théorique. Cette recherche doctorale s'est en ce sens penchée à étudier d'une manière empirique la manière avec laquelle des tâches routinières peuvent être exploitées en classe de mathématiques de sorte à stimuler l'activité de résolution de problèmes des élèves.

Pour mener cette étude, des outils théoriques ont été développés en prenant ancrage dans la théorie cognitive de l'enaction et dans les travaux de recherche sur l'approche investigative en mathématique. Ces outils théoriques fondent un cadre qui permet d'étudier la manière dont une tâche (ici routinière) peut évoluer à travers ses inter-actions avec la collectivité. Une particularité du cadre développé est de considérer la classe comme une unité collective, soit une collectivité, qui met en avant une activité mathématique à travers l'exploitation d'une tâche. Ceci permet de tourner le regard sur ce qu'un groupe peut faire, ensemble, plutôt que de s'intéresser à ce que chaque individu peut produire en lui-même.

À travers ces ancrages théoriques, trois types d'évolution d'une tâche ont été présentés. Une évolution par stabilisation phénotypique, soit une évolution lente qui se produit à travers les étapes déployées pour résoudre la tâche initiale proposée. Une évolution par diversification, c'est-à-dire une évolution marquée par l'émergence de sous-tâches mathématiques qui surviennent à même l'activité déployée pour résoudre la tâche initiale proposée, et qui deviennent, pendant un certain temps, un nouvel objet de résolution de la collectivité. Puis, une évolution par extension, soit la composition de tâches connexes, de variations, qui peuvent être formulées à partir de l'énoncé de la tâche initiale. Dans les données, ce dernier type d'évolution n'a pas été répertorié.

À travers ces ancrages théoriques, différentes pratiques de mathématisation permettant d'étudier de manière plus fine les actions mathématiques de la collectivité lors de l'exploitation de tâches mathématiques en classe ont été relevées. Ces pratiques de mathématisation sont : l'explication et la justification, la validation, l'argumentation, la généralisation, la formulation de conjectures, le surpassement des erreurs et incertitudes, l'utilisation de symboles et de représentations, la formulation de questions mathématiques et le recours à un corpus de connaissances mathématiques établies.

Le développement de ces ancrages théoriques a mené à formuler les objectifs spécifiques poursuivis par cette recherche doctorale :

1) Analyser la manière dont des tâches routinières peuvent évoluer à travers l'activité collective de pose|résolution de problèmes déployée pour les résoudre.

2) Étudier le rôle que jouent les pratiques de mathématisation dans cette évolution de tâches routinières.

Pour mener cette recherche, une étude de cas suggestif a été réalisée. Pour pouvoir étudier de manière détaillée l'évolution de tâches routinières à travers leur exploitation par la collectivité, il importait de choisir un cas pour lequel ceci se trouve à un état exemplaire ou exagéré, ce que Tremblay (1968) nomme un cas suggestif, afin de comprendre finement la dynamique de cette évolution. Le cas suggestif à l'étude est celui des séances de classe issues d'un *Teaching Experiment* dans lesquelles des tâches routinières sont proposées aux élèves à résoudre et sont exploitées de façon collective en classe. Mes données de recherche sont composées des 56 séances de classe réalisées dans des classes de 5^{e} et 6^{e} année et de 2^{e} secondaire à l'occasion ce *Teaching Experiment*. Une analyse des vidéos de ces séances de classe a été réalisée en prenant appui sur le modèle d'analyse de vidéo de Powell et al. (2003) et sur une grille d'analyse développée à partir des ancrages théoriques proposés.

Cinq principaux résultats de recherche ont été dégagés de cette étude :

(1) la formation d'une boucle itérative de tâches à résoudre dans la sphère collective;

(2) la mise en place de situations d'explication, de justification et de validation;

(3) l’utilisation d’exemples;

(4) l’émergence d’incertitudes; et

(5) l’émergence de problèmes mathématiques collectifs.

Le premier résultat montre que la formation d’une boucle itérative de tâches à résoudre dans la sphère collective joue un rôle dans l’évolution des tâches routinières. En effet, l’analyse des données révèle que lorsqu’une tâche routinière est proposée à résoudre, celle-ci déclenche des pratiques de mathématisation chez la collectivité. L’analyse montre également que ces pratiques de mathématisation sont autogénératives, puisque lorsqu’elles sont mises en avant en classe, elles en génèrent d’autres en retour. L’analyse illustre ensuite que ces pratiques de mathématisation sont consubstantielles aux problèmes mathématiques qui sont déployés en classe, car ils se constituent l’un l’autre. Dans la sphère collective, l’analyse montre que ces problèmes peuvent être vus comme étant de nouvelles tâches disponibles sur lesquelles la collectivité peut réagir en retour. Lorsqu’elle réagit, la boucle itérative recommence. La collectivité met en avant de nouvelles pratiques de mathématisation qui en génèrent d’autres et qui permettent de constituer de nouveaux problèmes. Ces nouveaux problèmes deviennent alors des tâches mathématiques disponibles sur lesquelles la collectivité peut réagir en retour. La boucle itérative se poursuit ainsi. La formation d’une boucle itérative de tâches disponibles dans la sphère collective est en ce sens un processus qui s’autoalimente à travers l’activité collective déployée pour résoudre la tâche routinière initiale proposée. Ce processus itératif est activé par la mise en œuvre de pratiques de mathématisation, quelles qu’elles soient, au sein de la sphère collective. Alors que Grenier et Payan (2002) mettent en avant l’idée de « non fin » de l’exploitation d’une tâche puisque de nouvelles questions mathématiques peuvent toujours être formulées, mes analyses soulignent que de différentes pratiques de mathématisation peuvent également toujours être mises en avant. Mes analyses montrent en ce sens l’importance de mettre en route des pratiques de mathématisation dans la sphère collective, car celles-ci, quelles qu’elles soient, contribuent à l’exploitation des tâches routinières; leur permettant d’évoluer.

Le second résultat de cette recherche montre que la mise en place de situations d’explication, de justification et de validation favorise l’évolution des tâches routinières. Le terme *situation* est pris au sens de Cobb et al. (1997) et renvoie aux moments où une demande d’expliquer, de justifier ou de valider est formulée et que ces pratiques de mathématisation sont ensuite déployées. Ces situations d'explication, de justification et de validation constituent des moments charniers parce qu'à travers eux, la collectivité est amenée à se pencher de manière fine sur les idées et stratégies offertes en classe, que celles-ci soient bonnes ou erronées, pour s'assurer qu'elles soient claires, justifiées et validées au plan mathématique. Les stratégies et idées mathématiques sont, par l'entremise de ces situations, considérées et investiguées par la collectivité. Celles-ci sont portées à l'attention de la collectivité, qui alors déploie de nouvelles pratiques de mathématisation afin de collectivement les expliquer, les justifier, les valider, les représenter, les exemplifier, les modifier, etc. Le travail collectif déclenché par ces situations permet de raffiner les idées et stratégies proposées, de les faire avancer, ce qui permet une évolution par stabilisation phénotypique. Ces idées et stratégies deviennent aussi, par moment, un nouvel objet de résolution de la collectivité, engendrant alors une diversification. À ce moment, la stratégie ou l'idée devient en soi un objet d'investigation de la collectivité. Ces situations d'explication, de justification, et de validation contribuent en ce sens à l'évolution des tâches routinières. Elles permettent également à la fois de faire avancer la résolution collective de celle-ci en s'attardant aux différentes stratégies proposées en classe, qu'elles soient bonnes ou erronées.

Le troisième résultat de cette recherche montre que l'utilisation d'exemples peut jouer un rôle dans l'évolution des tâches routinières. L'analyse des données montre que des exemples sont utilisés en classe tout particulièrement pour soutenir la réflexion, mettre en avant des explications, justifier ou encore valider certains éléments mathématiques. Les exemples servent de moyen à la collectivité pour mettre en route leurs idées dans la sphère collective. Dans les séances, certains exemples ont d'ailleurs contribué à mettre en avant un travail justificatif dans lequel une sorte de preuve collective s'est développée. Certaines études sur le rôle des exemples dans l'enseignement des mathématiques montrent à cet égard que les exemples peuvent jouer un rôle dans le développement d'idées mathématiques, dans la formulation de conjecture et dans la mise en œuvre d'un processus de preuve (Lynch et Lockwood, 2019). Cette recherche doctorale montre en ce sens que l'utilisation d'exemples, qui joue un rôle dans le développement d'idées, dans la formulation de conjecture et dans le processus de preuve (*Ibid.*), est une pratique de mathématisation qui peut s'avérer porteuse au regard de l'évolution d'une tâche routinière. Les pratiques de mathématisation étant par ailleurs autogénératives, l'utilisation d'exemples stimule l’émergence d’autres pratiques de mathématisation dans la sphère collective, ce qui favorise l’évolution des tâches routinières.

Le quatrième résultat de cette recherche montre que l’émergence d’incertitude joue un rôle dans l’évolution des tâches routinières. Malgré que des tâches routinières aient été données à résoudre, l’analyse des données montre que des incertitudes émergent de l’activité collective déployée pour les résoudre. Ces incertitudes sont favorisées par le contexte collectif dans lequel l’activité prend place puisqu’initialement la tâche routinière, par sa nature, n’engendre pas d’incertitude chez ceux qui la résolvent (bien que cette incertitude soit relative aux personnes qui tentent de la résoudre). C’est la résolution *collective* des tâches routinières qui génère ces incertitudes. Dans les séances, des incertitudes surviennent sur la validité de certains éléments mathématiques mis en avant en classe ou encore sur la manière de les expliquer ou de les justifier. Ceci se produit, en particulier, lors d’argumentations mathématiques dans lequel un élément mathématique mis en avant en classe est contesté. Ou encore, ceci se produit lors de la formulation d’une conjecture mathématique puisque le statut de vraisemblance est à établir par la collectivité. Ces incertitudes, qui exigent un effort supplémentaire de la part de la collectivité pour les surmonter, sont productives (ce que Beghetto (2020) nomme des *actionable uncertainties*) puisqu’elles ouvrent vers de nouvelles possibilités et de nouvelles investigations en classe. L’analyse des données montre que des pratiques de mathématisation ont été mises en avant par la collectivité en vue de surpasser les incertitudes qui émergent en classe. Ce travail collectif de surpassement des incertitudes favorise l’évolution des tâches routinières autant par stabilisation phénotypique que par diversification. La présence remarquée de ces incertitudes (compte tenu de la nature des tâches initiales proposées) mène à s’intéresser à la notion de problèmes mathématiques dans un contexte collectif.

Le cinquième résultat de recherche montre que l’émergence de problèmes mathématiques collectifs est au cœur de l’évolution des tâches routinières initiales. La présence (re)marquée de l’incertitude dans les séances a mené à investiguer si des problèmes mathématiques sont présents dans les données, et s’ils jouent un rôle dans l’évolution des tâches routinières. En effet, étant donné que l’incertitude est l’une des trois dimensions d’un « problème » mathématique, comme discuté au Chapitre 1, et que cette composante est absente d'une tâche routinière par sa nature, sa présence dans les données a fait émerger ces questionnements. Ceci a mené à définir la notion de *problème mathématique collectif* à travers les trois dimensions de la notion de problème mathématique (émergence, incertitude et relativité) dans un contexte collectif. Sous cet angle, l'analyse des données a révélé deux types de problèmes mathématiques collectifs présents dans les données : des problèmes relatifs aux contenus mathématiques et des problèmes métamathématiques relatifs au fait de faire des mathématiques avec d'autres. L'analyse des données montre que ces problèmes mathématiques collectifs sont centraux dans l'évolution des tâches routinières initiales, car un besoin de les résoudre émerge au sein de la collectivité qui alors s'y engage. Leur résolution nécessite des efforts supplémentaires que de simplement résoudre la tâche routinière initiale pour soi-même, entrainant une recherche et une mise en œuvre de pratiques de mathématisation supplémentaires qui permettent d'aborder ces problèmes mathématiques collectifs sous un certain angle. Ceci permet aux tâches routinières initiales d'évoluer autant par stabilisation phénotypique que par diversification. Ces problèmes mathématiques collectifs sont dépendants de la collectivité et de ce que l'environnement mathématique stimule chez elle à un moment donné. L'analyse des données montre ainsi que la résolution individuelle d'une tâche routinière initiale n'est pas de la même nature que la résolution collective de celle-ci. Les erreurs à surpasser, les différentes stratégies à être explicitées, justifiées et validées, les conjectures à être investiguées, etc. font partie des problèmes mathématiques collectifs qui émergent lors de la résolution *collective* des tâches routinières. Le travail de résolution que ces problèmes collectifs génèrent contribue à la fois à faire évoluer ces dernières, tout en avançant vers le but commun de les résoudre; ce qui comprend le lot de défis supplémentaires à surpasser que ces problèmes mathématiques collectifs font émerger.

Ces cinq principaux résultats de recherche permettent d'aborder mes objectifs de recherche, car ils permettent d'éclairer la manière dont des tâches routinières évoluent à travers l'activité collective déployée pour les résoudre, et montrent la place centrale qu'occupent les pratiques de mathématisation dans cette évolution.

7.2 Les ouvertures

Cette recherche doctorale a montré que lorsque des tâches routinières sont données en classe à résoudre, elles peuvent évoluer à travers leurs inter-actions avec la collectivité. Cette recherche illustre également que lorsque des tâches routinières sont exploitées collectivement en classe, elles peuvent engendrer une activité de résolution de problèmes mathématiques, avec tout ce que le terme « problème » implique. Ce contexte d'exploitation collective de tâches routinières amène un questionnement à savoir si ce type de tâche pourrait aussi, par moment, se qualifier de « bon problème » mathématique. Un autre questionnement concerne les conditions qui y semblent favorables. L'analyse des données conduites dans cette thèse doctorale peut être appuyée par différents travaux de recherche pour offrir certaines pistes éclairant ces questionnements.

7.2.1 Les tâches routinières peuvent-elles générer de bons problèmes mathématiques pour la classe?

Au Chapitre 1, différentes caractéristiques d'un « bon problème » mathématique ont été exposées : être génératif, être accessible et non menaçant, exiger un haut niveau de raisonnement et admettre plusieurs solutions ou points d'entrée pour le résoudre. En ce sens, un bon problème mathématique devrait permettre aux élèves d'être dans une activité mathématique à la fois riche et authentique. Les analyses conduites dans le cadre de cette thèse doctorale tendent à montrer que cela pourrait être le cas.

Un « bon problème » est génératif si une idée mise en avant pour le résoudre mène vers d'autres idées mathématiques à explorer. Le fait que les tâches routinières initiales aient évolué à travers leurs inter-actions avec la collectivité illustre bien cette caractéristique. En effet, les idées déployées pour résoudre une tâche routinière initiale ont engendré de nouvelles idées qui lui ont permis d'évoluer. À travers les idées et stratégies mises en avant pour résoudre une tâche routinière initiale, celle-ci s'est transformée amenant la collectivité à explorer différents contextes de résolution, à se pencher sur la résolution de différentes sous-tâches mathématiques qui ont émergé de l'activité qui a pris place et à être confrontés à différents problèmes mathématiques collectifs. Différentes idées, réponses et stratégies mathématiques ont ainsi été explorées dans les séances analysées, et ce, de manière contingente à l'activité s'est déployée en classe. L'analyse des séances montre, dans cet ordre d'idée, qu'une idée mise en avant en classe génère de nouvelles idées qui permettent à la tâche d'évoluer et à la collectivité d'explorer, en retour, de nouvelles possibilités mathématiques. L'exploitation de tâches routinières par la collectivité peut donc se montrer générative.

Un « bon problème » est accessible et non menaçant s'il permet facilement aux élèves de s'engager dans sa résolution et s'il offre un défi qui est à leur portée. Par sa nature, une tâche routinière est accessible aux élèves, puisque ceux-ci savent, dès son énoncé comment s'y prendre pour la résoudre. Puisque la tâche routinière évolue à travers ses inter-actions avec la collectivité, un défi peut également émerger. L'analyse des données montre qu'au niveau collectif, des défis émergent du travail fait en classe pour résoudre ces tâches routinières. Ces défis se trouvent dans le surpassement d'erreurs et d'incertitudes, dans la résolution des sous-tâches mathématiques ou encore dans la résolution des problèmes mathématiques collectifs qui émergent. Compte tenu de la nature des tâches proposées, les contenus mathématiques abordés lors de ces défis sont généralement familiers à la collectivité, qui, bien qu'elle soit appelée à surmonter un défi, semble facilement s'y engager[17]. L'analyse des données montre que la collectivité s'est engagée dans la résolution de ces différents défis, permettant de faire avancer la résolution collective des tâches routinières initiales. L'exploitation de tâches routinières par la collectivité peut donc se montrer accessible et non menaçante.

Un « bon problème » mathématique exige un haut niveau de raisonnement, c'est-à-dire qu'il exige plus chez les élèves que de simplement le résoudre. L'analyse des séances montre, à cet effet, que la collectivité s'est engagée dans une activité dans laquelle elle a expliqué, justifié, validé, conjecturé, formulé des questions, représenté ses idées dans différents formats, etc. L'analyse des pratiques de mathématisation déployées par la collectivité illustre cette exigence supplémentaire de la part de la collectivité que de simplement résoudre la tâche initiale proposée. Cette exigence est au cœur même de l'activité collective qui s'est déployée et, c'est à travers elle que les tâches routinières initiales ont évoluée. D'ailleurs leur évolution, comme discuté précédemment, a entrainé la collectivité à résoudre d'autres problèmes mathématiques collectifs exigeant alors beaucoup plus que de simplement résoudre les tâches routinières

[17] Ceci est discuté plus longuement à la sous-section 7.3.

initialement proposées. L'exploitation de tâches routinières par la collectivité peut donc exiger un haut niveau de raisonnement.

Un « bon problème » mathématique admet également différentes solutions ou points d'entrée pour le résoudre. L'analyse des données montre à cet effet, à travers les parcours poursuivis par une tâche routinière initiale au fil de ses inter-actions avec la collectivité, que différentes stratégies, réponses ou encore idées ont été proposées et investiguées par la collectivité en vue de collectivement la résoudre. Ces différentes stratégies, réponses et idées permettent de montrer que les tâches routinières peuvent admettre différents points d'entrée pour les résoudre. Ces points d'entrées pouvant d'ailleurs devenir de nouveaux centres d'intérêt de la collectivité et faire émerger des problèmes mathématiques collectifs à résoudre. L'exploitation de tâches routinières par la collectivité, faisant émerger différentes réponses, stratégies et idées en vue de les résoudre, peut donc admettre différentes solutions ou points d'entrés; solutions et points d'entrés qui sont investigués collectivement en classe.

Ces différentes caractéristiques d'un « bon problème » mathématique sont présentes dans les données. L'analyse conduite des données illustre en ce sens que l'activité collective de pose|résolution de problèmes déployée pour résoudre les tâches routinières proposées a pu permettre à la collectivité de résoudre, voire vivre, de bons problèmes mathématiques; la collectivité étant engagée dans une activité mathématique qui apparait à la fois riche et authentique. L'exploitation collective de tâches routinières peut en ce sens avoir un certain potentiel pour faire vivre de bons problèmes mathématiques aux élèves en classe. La question des conditions qui y sont favorables semble maintenant naturellement se poser.

7.2.2 Sous quelles conditions l'exploitation de tâches routinières peut-elle mener la collectivité à vivre de « bons problèmes » mathématiques?

L'environnement mis en place lors du *Teaching Experiment* semble avoir joué un rôle dans l'évolution des tâches routinières initiales de sorte à mener la collectivité à vivre de bons problèmes mathématiques en classe. Dans les modalités du *Teaching Experiment*, les élèves sont amenés à expliquer, justifier et valider les propositions mathématiques mises en avant en classe. Par ailleurs, toute proposition, qu'elle soit bonne ou erronée, est considérée et investiguée. Ce contexte d'enseignement peut être qualifié de flexible et d'ouvert dans le sens que les mathématiques qui sont travaillées en classe émergent en cours d'action, à partir d'une tâche routinière initiale donnée en tant que déclencheur de l'activité. Dans un tel contexte, les analyses conduites dans le cadre de cette thèse doctorale mettent en lumière le rôle de gardien des mathématiques que semble jouer le CE. Par ailleurs, les analyses pointent vers l'émergence d'une communauté mathématique de classe dans laquelle la collectivité semble s'imprégner d'une perspective d'*author/ity*. Les lignes qui suivent abordent ces idées.

7.2.2.1 Un contexte d'enseignement flexible et ouvert

L'analyse des séances illustre qu'à partir d'une tâche routinière proposée à résoudre, les élèves sont amenés à expliquer et justifier leurs idées, validées les idées mises en avant en classe, explorer différentes propositions, chercher de nouvelles manières de résoudre ou encore de nouvelles explications ou justifications, mettre à l'essai différentes pistes de solutions, etc. Dans un tel contexte, les mathématiques qui se font en classe émergent des propositions mathématiques qui sont avancées par les élèves alors que l'environnement les stimule en eux, et, qu'en retour, ceux-ci stimulent l'environnement. Les mathématiques qui se font en classe, dans ce contexte, offrent aux élèves ce que Papert (1980) appelle des découvertes mathématiques libres, puisque celles-ci ne sont pas balisées par un adulte qui cherche à faire découvrir une notion mathématique précise et prédéterminée. Ces découvertes dont parle Papert (1980) sont en fait des découvertes au niveau de l'élève et ne constituent pas nécessairement un objet mathématique nouveau aux yeux des mathématiciens. Elles sont des découvertes et des compréhensions mathématiques qui appartiennent aux élèves, et qui sont le fruit de leur activité mathématique alors qu'ils sont inter-actions avec un environnement mathématique. En classe, les mathématiques qui se font prennent différentes directions en fonction de ce que l'environnement mathématique stimule chez eux, alors que tous deux co-évoluent. Un tel contexte d'enseignement des mathématiques, ouvert aux propositions des élèves et s'adaptant ou se modifiant en cours d'action, est décrit par Borasi (1996) :

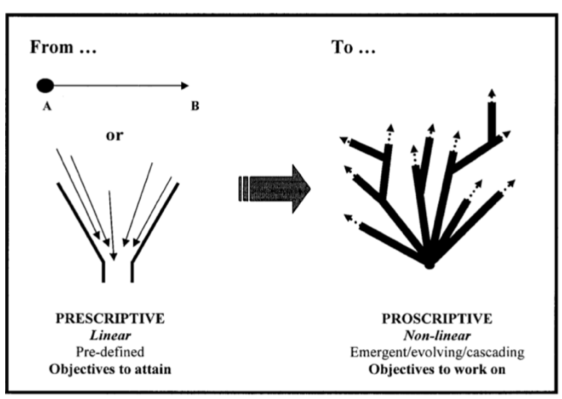
> In an inquiry model, on the contrary, the processes students engage in is expected to be more open ended and generative, insofar as neither the teacher nor the students may know what the outcome of the inquiry may be as they engage in it and, furthermore, the students are actively involved in main decisions about the scope and directions of an inquiry at all stages. […] Far from diminishing their responsibilities, an inquiry approach imposes new demands on

> mathematics teachers as they are now expected to provide both stimuli and structure to support the student's own inquiries. (Borasi, 1996, p. 25)

Comme discuté au chapitre précédent, l'analyse des séances montre que l'activité de pose|résolution de problèmes déployée par la collectivité pour résoudre les tâches routinières proposées est relative à la collectivité. L'exemple de la tâche routinière sur l'aire et le périmètre dans les classes de 5e année de Gisèle et de Louise (discuté à la sous-section 6.5.1), ayant des parcours de résolution bien différents l'un de l'autre, le montre bien. Dans le contexte du *Teaching Experiment*, l'enseignement se produit de manière contingente à ce qui est offert dans l'action en classe. Lampert (2001) parle en ce sens d'un enseignement qui se fait « on the spot » puisqu'il se produit à partir du travail sur les idées des élèves qui émergent dans l'action en classe. Le CE, en ce sens, peut être vu comme agissant également sur le moment en classe, en réagissant à son tour aux stimuli qu'il perçoit dans son environnement.

L'image de droite dans la Figure 7.1 ci-dessous, issue de la thèse de Proulx (2007), illustre un tel contexte d'enseignement flexible et ouvert dans lequel l'émergence des idées mathématiques des élèves est au cœur du travail fait en classe. Cette image est contrastée par celle d'un entonnoir, à gauche, où un contexte d'enseignement directif est représenté. Dans un enseignement directif, l'enseignant dirige l'activité mathématique des élèves de sorte à atteindre un objectif préalable qu'il s'est fixé. L'enseignant, bien qu'il puisse ouvrir et considérer les propos des élèves, cherche en fin de compte à les ramener vers un objectif qu'il a fixé.

Figure 7.1 Contextes d'enseignement directif et flexible (Tirée de Proulx, 2007, p. 71)



Dans un enseignement flexible et ouvert, l'enseignant propose ainsi une tâche, un contexte ou une situation mathématique à ses élèves et laisse leur activité mathématique se déployer, prendre plusieurs directions, en fonction de ce que l'environnement déclenche comme réaction de leur part. Ce contexte d'enseignement flexible et ouvert semble avoir favorisé l'évolution des tâches routinières de sorte à engager les élèves dans la résolution de problèmes mathématiques. Toutefois, et tel que la citation précédente de Borasi (1996) le met en lumière, à travers ceci, le CE offre à la fois des stimuli et une structure qui permettent de supporter ce contexte d'enseignement auprès des élèves.

7.2.2.2 Le rôle de gardien des mathématiques du chercheur-enseignant

L'analyse des données met en lumière le rôle particulier du CE comme un gardien des mathématiques qui se produisent en classe. À travers les séances, le CE insiste à ce que les propositions mathématiques, qu'elles soient bonnes ou erronées, soient à la fois expliquées, justifiées et validées par la collectivité. Ce faisant, le CE s'assure d'une résolution *collective* des tâches routinières, comme discuté au chapitre précédent, et que les mathématiques qui sont faites en classe soient riches, creusées et qu'elles avancent.

À travers les données, il est possible de voir que le CE enrichit le travail des élèves en formulant des questions mathématiques, en insistant que pour que certains éléments mis en avant soient expliqués, justifiés et validés par la collectivité, en laissant de côté certains éléments qui lui semblent moins importants à travailler à un instant donné, etc. À partir des opportunités qui lui sont offertes par les élèves dans l'action en classe, celui-ci pousse, stimule, questionne et amène plus loin leurs réflexions mathématiques; faisant alors avancer les mathématiques de la classe. Le CE, pour reprendre les propos de Papert (1980), modifie l'environnement des élèves en y introduisant différents éléments de construction et de nouvelles idées :

> But "teaching without curriculum" does not mean spontaneous, free-form classrooms or simply "leaving the child alone". It means supporting children as they build their own intellectual structures with materials drawn from the surrounding culture. (Papert, 1980, p. 31-32.)

En classe, le CE incite les élèves à pousser plus loin leurs idées et réflexions mathématiques, à clarifier leur point de vue, à s'intéresser aux différentes propositions mises en avant, etc. Il organise les idées mathématiques émises par les élèves en choisissant quelle idée est à discuter avant, après ou simultanément à une autre. Également, il reformule les propositions mathématiques faites en rappelant les explications et justifications données et en en formulant de nouvelles. Ce faisant, il saisit les enjeux mathématiques en classe et s'assure les mathématiques progressent. Ce travail du CE fait écho à une vision de l'enseignant en tant que gardien des mathématiques dont parle Lampert (1990a). Il s'assure que les élèves travaillent au niveau du sens mathématique, qu'ils justifient bien leurs idées, qu'ils se posent de bonnes questions, qu'ils explorent les mathématiques, etc.

Dans son rôle de gardien des mathématiques, le CE s'engage dans des arguments mathématiques et participe aux mathématiques qui se font en classe. Il est un membre de la collectivité. En ce sens, il questionne, pose de nouveaux problèmes mathématiques, cherche à trouver des exemples ou des contre-exemples ... bref, il entre dans les mathématiques faites par et avec les élèves pour les comprendre, les amener plus loin et relancer leur activité mathématique. La participation du CE aux mathématiques qui se font en classe favorise les explorations mathématiques, les réflexions, la recherche, les questionnements et l'approfondissement (Lockhart, 2009). Dans les séances, le CE porte attention aux différentes propositions mises en avant en classe; attention qu'il s'assure d'être partagée avec les élèves. Ce faisant, le CE agit comme un modèle d'une activité mathématique riche pour les élèves et leur montre la manière de participer et de s'engager dans une telle culture mathématique de classe (Simmt, Davis, Gordon et Towers, 2003). C'est d'ailleurs dans ce sens que Borasi (1996) cite les propos de Resnick qui soutient l'importance de socialiser les élèves à la manière de faire des mathématiques :

> If we want students to treat mathematics as an ill-structured discipline – making sense of it, arguing about it, and creating it, rather than merely doing it according to prescribed rules – we will have to socialize them as much as to instruct them. This means that we cannot expect any brief or encapsulated program on problem solving to do the job. Instead, we must seek the kind of engagement in mathematical thinking that the concept of socialization implies. (1988, p. 58 dans Borasi, 1996, p. 23)

Dans les séances de classe, le CE n'agit en ce sens pas comme un acteur qui connaît son texte de manière précise, mais plutôt comme un bricoleur qui compose avec ce qui émerge afin de stimuler l'activité mathématique et de faire avancer les mathématiques qui s'y produisent. Le CE est sensible aux réactions mathématiques des élèves en classe. Il les met en avant et essaie de les amener plus loin par ses interventions qui visent à stimuler d'autres réactions de la part des élèves. À travers ce rôle de gardien des mathématiques, le CE contribue à mettre en place une communauté mathématique de classe dans laquelle les élèves s'imprègnent d'une perspective d'*author/ity*.

7.2.2.3 La mise en place d'une communauté mathématique de classe ancrée dans une perspective d'*author/ity*

À travers les séances, il est possible de voir la collectivité comme une communauté mathématique. En tant que discipline, les mathématiques se développent par l'explication, la discussion, l'argumentation, la justification, la négociation et la validation des arguments, compréhensions et sens mathématiques à travers la communauté des mathématiciens (Lakatos, 1976). En classe, la mise en place d'une communauté mathématique a pour objectif de rapprocher la classe de mathématiques du travail des mathématiciens qui se posent des questions mathématiques, qui cherchent des solutions, qui argumentent avec les autres, qui justifient leurs arguments, qui valident, etc. (Borasi, 1996 ; Legrand, 1993). Dans une communauté mathématique de classe, les élèves sont ainsi placés dans une activité mathématique qui leur permet de mettre en avant différentes manières mathématiques de penser telles que conjecturer, argumenter, justifier, exemplifier, poser et résoudre des problèmes, etc. (Papert, 1972). L'analyse en termes des pratiques de mathématisation déployées par la collectivité pour résoudre les tâches routinières proposées montre que c'est bien ce qui se produit dans les séances.

Pour placer les élèves dans une telle position, il semble nécessaire que ceux-ci prennent une posture d'auteurs de mathématiques plutôt que d'auditeurs de mathématiques, pour reprendre la distinction de Legrand (1993). C'est en ce sens que le CE amène les élèves à s'exprimer sur et à développer les mathématiques qui se font en classe. Dans une classe où les élèves sont des auteurs de mathématiques, les mathématiques qui sont faites proviennent de leurs intérêts, idées, questionnements et réflexions mathématiques. Ceci est favorisé par le contexte d'enseignement flexible et ouvert mis en place dans le

Teaching Experiment. Or, celui ne peut se produire que si les élèves acceptent et jouent ce rôle d'auteurs de mathématiques.

Povey et Burton (1999) conceptualisent cette idée d'élèves auteurs de mathématiques en regroupant les élèves sous trois perspectives selon leur manière d'agir en classe : le silence, l'autorité externe, et l'auteur/autorité (par un jeu de mots sur *author/ity)*. Dans le silence, les élèves se voient comme étant sourds et muets. Ils se voient et se sentent incapables de comprendre et de se prononcer à propos des mathématiques qui se font en classe. Ils sont principalement passifs et ne cherchent pas à entrer dans une activité mathématique en classe. Pour ces chercheures, il s'agit majoritairement d'élèves qui croient peu en leur potentiel mathématique et qui participent donc peu en classe. Dans la perspective de l'autorité externe, les élèves dépendent d'une source experte pour apprendre les mathématiques : « Meaning is taken as given and knowledge is assumed to be fixed and absolute rather than contextual and changeable. » (p. 233) Les mathématiques sont alors vues comme une discipline rigide dans laquelle un expert transmet ses connaissances et où, en retour, l'élève reproduit ce que l'expert lui a appris. En classe, ces élèves se questionnent peu sur les mathématiques qui se font, leur rôle étant davantage de mémoriser et de reproduire les mathématiques montrées par l'enseignant. Le rôle de l'enseignant, de son côté, est de montrer aux élèves ce qu'ils doivent apprendre et faire.

Dans la perspective de l'auteur/autorité les élèves et l'enseignant voient la classe de mathématiques comme une communauté mathématique dans laquelle ils partagent leurs questionnements et réflexions sur les mathématiques qui se produisent en classe. Dans cette perspective, chacun a la liberté d'avancer ses idées, questionnements et réflexions, développe sa capacité à faire des mathématiques et est responsable des savoirs et connaissances mathématiques développées en classe :

> If the task of learners in the mathematics classroom is to be, jointly or severally, the authors of their own mathematics, the culture of the classroom must be one in which an epistemology of author/ity is fostered. Constructing a narrative, acquiring authorship cannot be done on the basis of the external authority of others, but needs the participant(s) to understand themselves as the makers of knowledge, tested out within their community of validators. It also requires that such participants are not silenced in the sense outlined above, but have a personal voice. (p. 236)

Être auteur de mathématiques ne signifie pas, encore une fois, qu'aux yeux de la communauté mathématique scientifique les mathématiques produites aient un quelconque caractère de nouveauté. Il s'agit plutôt de voir que les mathématiques qui sont faites par les élèves et l'enseignant sont une création qui provient de leur structure en inter-action avec leur environnement. C'est en ce sens qu'ils sont des auteurs de mathématiques, car c'est eux qui font émerger le travail mathématique qui est fait en classe; en avançant des conjectures, en cherchant des explications, en proposant des exemples et des contre-exemples … bref en laissant parler leur voix mathématique.

Une telle perspective implique une double responsabilité chez les élèves. Ceux-ci sont amenés à la fois à être responsable qu'il se produise des mathématiques en classe et à être responsable envers les mathématiques qui sont produites. En effet, les élèves auteurs ont la responsabilité qu'il se fasse des mathématiques en classe, c'est-à-dire qu'ils sont responsables de nourrir l'activité mathématique de la classe (Borasi, 1996). Être auteur de mathématiques amène à voir et à comprendre que les raisonnements et pensées mathématiques sont à être mis en avant et discutés en classe. Également, les élèves portent aussi la responsabilité de ce qu'ils avancent (Legrand, 1993). La validité des mathématiques faites en classe est alors sujette à discussion. Non seulement les idées et stratégies mathématiques sont mises en avant, mais elles sont à être validées, réfutées, retravaillées ou bonifiées. La communauté mathématique de classe, dans cette perspective de l'auteur/autorité, s'assure de maintenir en vie son activité mathématique, et de s'assurer de la validité et de l'avancement des mathématiques qui se font en classe. Dans les séances, une telle communauté mathématique de classe imprégnée de cette perspective d'auteur/autorité semble être présente. En effet, au sein de l'activité collective déployée pour les résoudre les tâches routinières proposées, il apparait que tout un chacun met en avant des pratiques de mathématisation et contribuent à la résolution *collective* des tâches routinières initiales et à leur évolution.

En somme, les analyses conduites dans cette thèse doctorale suggèrent que l'environnement mis en place dans le cadre du *Teaching Experiment* ait joué un rôle dans l'évolution des tâches routinières. Un tel environnement semble avoir favorisé l'émergence de bons problèmes mathématiques pour la classe, bien qu'initialement, des tâches routinières aient été offertes en classe à résoudre. Par ailleurs, le rôle du CE en tant que gardien des mathématiques ainsi que l'émergence d'une communauté mathématique de classe ancrée dans une perspective d'auteur/autorité semblent être des éléments favorables à l'évolution des tâches routinières; menant la collectivité à s'engager dans de bons problèmes mathématiques en classe.

7.3 Les pistes de prolongement

Au terme de cette recherche doctorale qui s'intéresse à la manière dont des tâches routinières peuvent être exploitées par la collectivité pour stimuler l'activité de résolution de problèmes, il est possible de dégager de nouvelles possibilités, de nouveaux questionnements, qui s'offrent à nous en tant que communauté de recherche en didactique des mathématiques.

Les analyses mettent en lumière l'engagement des élèves dans l'activité collective de pose|résolution de problèmes qui a pris place en classe afin de résoudre les tâches routinières proposées. Comme abordé à la sous-section précédente, le contexte d'enseignement mis en place dans le *Teaching Experiment*, le rôle qu'y a joué le CE et l'émergence d'une communauté mathématique de classe, sont des éléments qui semblent avoir contribué à l'évolution des tâches routinières et qui pourraient aussi avoir joué un rôle dans cet engagement observé. Toutefois, il est aussi possible de penser que le contexte familier et rassurant des tâches routinières pourrait aussi avoir favorisé cet engagement. En effet, le sentiment de contrôlabilité de la tâche et de la perception de sa compétence à la résoudre sont des déterminants importants de l'engagement cognitif d'un élève (Viau, 1998). Au terme de cette étude doctorale, il apparait qu'une étude spécifique portant sur l'engagement des élèves en contexte d'exploitation collective de tâches routinières pourrait être réalisée. Sachant que la motivation joue un rôle prédominant dans la réussite des élèves (*Ibid*.), une telle étude pourrait contribuer à comprendre les usages potentiels de ce type de tâches au sein de la classe de mathématiques. En particulier, est-ce que l'exploitation collective de ce type de tâches pourrait jouer un rôle important auprès des élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques ? Également, sous cet angle, il pourrait être intéressant d'éclairer si l'exploitation collective des tâches routinières peut jouer un rôle sur l'anxiété mathématique des élèves, un phénomène de plus en plus documenté par les travaux de recherche en didactique des mathématiques et qui a un effet sur leur réussite en mathématiques (Dowker, Sarkar et Yen Looi, 2016).

Alors qu'un consensus important est présent dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques concernant le potentiel des tâches non routinières pour l'enseignement des mathématiques (voir e.g. Gavaz et al., 2021; Liljedahl et Cai, 2021), cette recherche doctorale montre que des tâches routinières peuvent aussi être exploitées et mener à une activité riche de résolution de problèmes mathématiques. Sans nier l'apport et l'importance des tâches non routinières dans l'enseignement des mathématiques, qui est largement documentée, ma recherche suggère que l'important n'est peut-être pas nécessairement dans la tâche proposée, sinon que dans l'activité qui se déploie en classe. Une étude plus fine des conditions didactiques permettant aux tâches routinières de devenir de bons problèmes mathématiques pour la classe pourrait être réalisée pour mieux saisir leur apport possible pour l'enseignement des mathématiques. Par ailleurs, une étude longitudinale, et à fréquence soutenue, pourrait permettre de mieux comprendre les contraintes et les possibilités qu'offrent l'utilisation des tâches routinières auprès des élèves.

Également, il pourrait être intéressant d'étudier si une distinction importante peut être observée entre l'exploitation de tâches routinières et l'exploitation de tâches non routinières en classe. D'emblée, les tâches non routinières présentent un certain niveau d'incertitude. Lors de leur exploitation par la collectivité, est-ce que ce type de tâches évoluerait également? Est-ce qu'il pourrait engendrer d'autres incertitudes? Ces incertitudes seraient-elles productives comme c'est le cas pour les tâches routinières? Est-ce que des problèmes mathématiques collectifs émergeraient? Quels seraient les avantages et les limites de l'exploitation collective de tâches routinières et non routinières au niveau de la mise en œuvre de pratiques de mathématisation, du développement de compréhensions mathématiques, de l'engagement des élèves dans l'activité qui prend place en classe, etc.?

Cette étude doctorale soulève ainsi un certain nombre de questions visant à mieux circonscrire les conditions, les possibilités et les contraintes de l'exploitation de tâches routinières par la collectivité, et ce, auprès de toutes les clientèles d'élèves. Si l'important n'est pas nécessairement dans la tâche proposée, mais dans l'activité qui prend place en classe, comme cette recherche le suggère, alors une autre perspective sur l'enseignement des mathématiques s'ouvre à nous. Il s'avère maintenant important de mieux la comprendre.

7.4 Le mot de la fin

Cette étude doctorale sur l'exploitation de tâches routinières par la collectivité montre qu'à travers l'activité collective de pose|résolution de problèmes déployée pour les résoudre, celles-ci sont amenées à évoluer. L'évolution des tâches routinières peut par ailleurs entrainer la collectivité dans une activité authentique de résolution de problèmes mathématiques. Telle que soulevée dans la recherche, la résolution collective d'une tâche routinière exige beaucoup plus que la résolution individuelle de celle-ci. Ma recherche doctorale pointe, à cet égard, vers le rôle fondamental de la collectivité sur l'activité qui se déploie en classe. Ce constat rejoint les récentes recherches sur la résolution de problèmes qui montrent qu'elle est fortement dépendante du contexte dans lequel elle prend place :

> Likewise, five of the papers clearly showed that what problem solving looks like is also highly dependent on the context in which it takes place. Whether problem solving is done in a collaborative setting (Pruner et Liljedahl, 2021; Salminen-Saari et al., 2021), completed within a digital maker space (Ng, 2021), or in an immersive environment (Mellone et al., 2021; Saadati et Felmer, 2021), *context matters*. *And it matters a lot*. This coupled with the nature of the task, shows us that *problem solving is highly situated and socially constructed*. (Liljedahl et Cai, 2021, p. 731, c'est moi qui met l'emphase)

Les recherches sur la résolution de problèmes mettent à l'avant-plan les tâches non routinières, et montrent, comme le met en lumière cette citation, que la nature de la tâche influence fortement l'activité qui prend place en classe. Or, cette recherche doctorale semble pointer vers le rôle prédominant du contexte qui peut aller au-delà de la tâche proposée puisqu'à travers ses inter-actions avec la collectivité, celle-ci est appelée à évoluer.

ANNEXE A

LA SÉANCE SUR LA TÂCHE DES NOTES DE MUSIQUE EN CLASSE DE 6^E ANNÉE

La tâche des notes de musique est la suivante :

Quelle fraction est représentée par ce dessin?

Cette tâche a été proposée à la classe de 6e année à résoudre[18]. Cette tâche peut être qualifiée de routinière, car les élèves avaient déjà abordé cette notion préalablement dans leur parcours scolaire et, dès son énoncé, ils savaient comment s'y prendre pour la résoudre. Cette tâche routinière a donné lieu à une investigation mathématique d'une cinquantaine de minutes. Les élèves ont eu quelques secondes pour réfléchir à la tâche (mode calcul mental) puis le CE prend une première intervention.

La réponse $\frac{3}{10}$ est d'abord proposée par un élève. Le CE demande à l'élève d'expliquer sa réponse. L'élève dit alors « […] qu'il y a 10 notes de musique et il y en a 3 qui sont encerclées ». Plusieurs élèves affirment alors avoir trouvé la même réponse.

Le CE demande si d'autres élèves ont obtenu une autre réponse ou encore s'ils peuvent penser à une autre manière de faire. Cette demande semble surprendre un peu les élèves. Au bout de quelque seconde, la réponse $\frac{1}{3}$ est proposée par Rose. Le CE lui demande d'expliquer comment elle a obtenu cette réponse. Rose indique alors avoir mal compté les notes de musique :

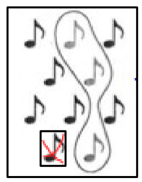
> CE : Comment tu sais que c'est un tiers?
>
> Rose : Parce que si, exemple … ah non !

[18] La vignette de cette séance s'inspire de celle de Proulx et al. (2019) accessible à http://profmath.uqam.ca/~jproulx/MAT3227.html

CE : Mais continue, continue, je suis intrigué.

Rose : Parce que, ça aurait marché, mais je n'avais pas vu la note de musique en bas.

Rose continue en indiquant que sa réponse fonctionne uniquement si cette note n'est pas prise en compte. Elle explique que sans cette note de musique, la réponse donne $\frac{1}{3}$ parce que le dessin représente $\frac{3}{9}$. À ce moment, le CE propose d'éliminer une des notes de musique du dessin, en faisant une croix rouge dessus, pour permettre à Rose d'expliquer clairement son raisonnement. Le tableau ressemble à ceci :



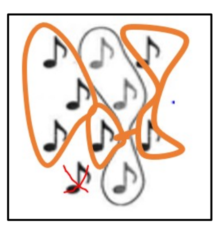
Rose explique avoir fait 3 paquets de trois notes de musique et obtient $\frac{1}{3}$, car un seul des paquets est encerclé :

Rose : Avec neuf notes, exemple, on peut faire trois paquets de trois, et il y en a un d'encerclé, donc ça fait un tiers

CE : Ok, attends un petit peu, je fais essayer de le faire en même temps. Ok, donc là, on a enlevé cette note-là, hein. Et là, tu nous dis qu'on va faire trois paquets …

Rose : Si exemple, on peut faire trois paquets de trois, déjà là, ça fait « sur trois ».

Au tableau, les paquets sont encerclés, comme ceci :

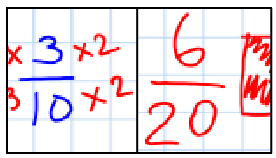


Le CE reprend alors l'explication en disant que chaque paquet de trois notes vaut 1, ce que confirme l'élève. Rose ajoute aussi que c'est en simplifiant $\frac{3}{9}$ que $\frac{1}{3}$ est obtenu.

Le CE efface les traces faites sur la figure initiale de la tâche puis demande ensuite aux élèves s'ils ont d'autres idées de solutions. Une nouvelle réponse, $\frac{6}{20}$, est alors proposée par Emeric qui explique doubler le numérateur et le dénominateur :

> Emeric : Ben, tu doubles le numérateur et le dénominateur.
>
> CE : Ah! Pour passer de trois dixièmes à six vingtièmes. Tu doubles, qu'est-ce que ça veut dire ça, tu doubles ?
>
> Emeric : Trois fois deux, ça donne six et dix fois deux, ça donne vingt.

Le tableau ressemble à ceci :



Le CE relance alors les élèves à savoir s'il est possible d'expliquer cette réponse de $\frac{6}{20}$ à l'aide du dessin initial des notes de musique. Les élèves disent toutefois ne pas voir le $\frac{6}{20}$ dans le dessin. Le CE relance Emeric qui affirme alors que ce sont des fractions équivalentes. Or, lorsque questionné sur ce que sont des fractions équivalentes, ce dernier ne parvient pas à bien l'expliquer :

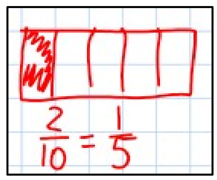
> CE : C'est difficile hein. Emeric, veux-tu nous expliquer un peu, comment tu le vois le six vingtièmes? C'est vrai ce que tu dis, on pourrait essayer de comprendre un peu plus.
>
> Emeric : C'est un genre de fraction équivalente.
>
> CE : C'est quoi une fraction équivalente ?
>
> Emeric : Ben, eumh, pour, mmh, deux valeurs différentes, ça donne genre la même chose. Mettons, c'est ça, si j'en ai 20… et que j'en entoure 6…

Un silence suit cette réponse incomplète d'Emeric. Le CE se tourne vers le reste de la classe pour aider à répondre à cette question sur ce que sont des fractions équivalentes.

Nadia propose une explication à l'aide d'une barre de chocolat. Le CE dessine une barre de chocolat au tableau et invite l'élève à reprendre son explication avec le dessin. Nadia vient au tableau et explique comment obtenir $\frac{2}{10}$.

> Nadia : Disons que j'ai une palette de chocolat. [Elle colore 2 des 10 petits carrés dans le rectangle au tableau]. Ce que je viens de colorier, c'est comme deux dixièmes.

Nadia poursuit alors en traçant 5 segments verticaux pour délimiter 5 parties de la barre de chocolat. Le tableau ressemble à ceci :



Nadia poursuit alors son explication en montrant comment $\frac{2}{10}$ vaut aussi $\frac{1}{5}$:

> Nadia : Quand j'ai cinq parties, c'est comme si un cinquième, c'était égal à deux dixièmes.
>
> CE : Ok, donc ce que Nadia nous dit, c'est que si on regarde les petits carrés, si j'en prends deux sur les dix carrés, ça fait deux dixièmes tu disais. Mais si on regroupe les petits carrés par deux, et on regarde une bande complète, ça fait un cinquième.
>
> Nadia : C'est équivalent.
>
> CE : Donc deux dixièmes, ça serait équivalent à un cinquième [il écrit $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ au bas du dessin]

À ce moment, un autre élève lève la main pour proposer une nouvelle explication de ce que sont des fractions équivalentes. L'élève propose alors $\frac{50}{100}$ et indique au CE qu'il peut écrire que c'est égal à $\frac{100}{100}$, car 50 x 2 = 100. Face à cette erreur de doubler uniquement le numérateur de la fraction, plusieurs élèves s'agitent. Le CE revient sur la stratégie d'Emeric de doubler le numérateur et le dénominateur, puis l'élève corrige son erreur en indiquant que c'est plutôt 200 au dénominateur. Le CE demande ensuite aux élèves ce qu'est $\frac{100}{100}$. Les élèves répondent rapidement à cette question mathématique en indiquant que cela vaut 1. Le CE donne alors quelques explications supplémentaires sur le $\frac{100}{100}$.

Un autre élève, Simon, propose alors que $\frac{50}{100}$ c'est la même chose que $\frac{1}{2}$, car 50 est la moitié de 100. Le CE demande alors à l'élève d'en dire plus à ce sujet. Simon ajoute que 50 + 50 donne 100, et donc que 50 c'est la moitié de 100. Le CE reprend cette idée et ajoute, de la même manière, que 1 + 1 = 2. Le CE propose alors un nouvel exemple en demandant si 100 sur 200 fonctionne de cette manière également. Simon répond que oui, car 100 + 100 = 200. Le CE demande ensuite aux élèves s'ils connaissent d'autres fractions qui fonctionnent comme celles-ci. Plusieurs élèves disent que oui.

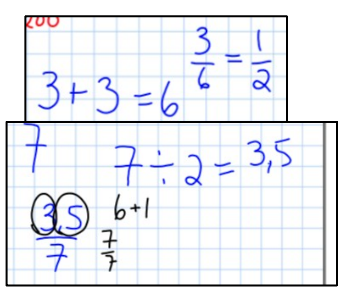
Le CE demande alors si $\frac{3}{7}$ fonctionne aussi. Simon répond que non, car « ça ne marcherait pas en $\frac{1}{2}$ ». Le CE lui demande d'expliquer, mais l'élève n'y parvient pas. Il interpelle alors les autres élèves à se prononcer à ce sujet. Plusieurs élèves disent que cela ne fonctionne pas. Le CE demande des explications. Élizabeth répond que 7 ne peut pas se diviser en deux et qu'il ne peut donc pas correspondre à une demie :

> Élizabeth : Moi je dirais non, parce que tu ne peux pas diviser 7 en 2 parties. 3 plus 3, ça fait 6, donc trois septièmes, ça ne peut pas être une demie. Ça serait trois sixièmes, une demie.

Le CE, en prenant des notes au tableau, soutient que l'explication d'Élizabeth réutilise la stratégie de Simon :

> CE : Si on prend l'idée de Simon tantôt, on se disait 100 plus 100 égal 200, 1 plus 1 donne 2. Ici, 3 plus 3, ça donnerait 6
>
> Élizabeth : Donc ça serait 3 sixièmes qui est la demie
>
> CE : Trois sixièmes, qui seraient la demie…

Le tableau ressemble à ceci :



Le CE questionne alors les élèves au sujet du 7 qui ne peut être divisé en 2. Il leur demande si cette affirmation est vraie. Des explications sont proposées par une élève qui affirme que 7 peut se diviser en deux, mais que le résultat est un nombre à virgule. Une autre élève indique que la réponse vaut 3,5. Le CE propose à ce moment que 3,5/7 est une fraction équivalente à ½. Il explique sa proposition en faisant un lien avec la stratégie proposée d'additionner deux fois le numérateur pour voir si cela donne le dénominateur. Le CE explique alors que la fraction $\frac{3,5}{7}$ bien qu'équivalente à $\frac{1}{2}$ n'est généralement pas acceptée sous cette écriture à l'école.

Le CE affirme alors que toute cette discussion sur les demies les a éloignés de la question initiale concernant le $\frac{3}{10}$ et le dessin des notes de musique. Malgré cette intervention, une élève lève sa main et affirme que le $\frac{50}{100}$ proposé plus tôt se simplifie aussi en $\frac{5}{10}$. Un rappel des différentes fractions équivalentes à $\frac{1}{2}$ déjà trouvées est fait par le CE. La proposition $\frac{10}{20}$ est aussi lancée.

À ce moment, Timothée propose une manière de créer des fractions équivalentes à $\frac{1}{2}$ en effectuant des divisions par 2 :

> Timothée : Pour une demie, j'imagine que tout le monde dans la classe connait ses divisions par 2. Quand tu fais une division par deux, disons 100, si tu connais sa demie, il reste juste à le mettre sous forme de fraction. Tu mets 100 en dessous de la barre, et sa demie en haut. En fait, si tu connais tous tes doubles…
>
> CE : Ouais, si tu connais tes doubles, on peut reprendre la stratégie de Simon, les additionner et trouver plein de demies.
>
> Timothée : Ouais, mais à l'inverse. 5 fois 2 égal 10, ben… je ne sais pas comment le dire.

Le CE souligne que l'idée est de doubler les nombres. Pour mettre cette méthode à l'épreuve, un nouveau nombre, 11 est proposé. Ce nombre est ensuite doublé pour obtenir 22. Le CE propose d'essayer encore avec un autre nombre. Timothée propose 8 puis explique comment il procède :

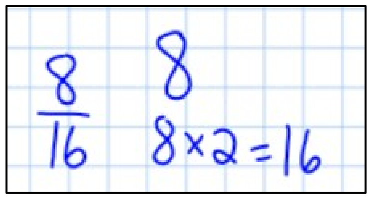
CE : Donc, j'ai 8, qu'est-ce que je fais ?

Timothée : Tu le multiplies par deux

CE : Ok, je le multiplie par deux. 8 fois 2, ça me fait… Quelques élèves : 16 !

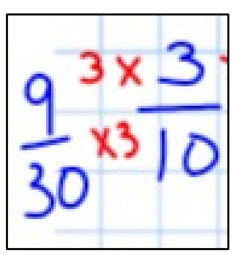
Timothée : Donc, comme ça fait 16, le nombre que tu as multiplié, ben le 8, ça va être la demie de 16. Après ça, on le met sous forme de fraction.

Le tableau ressemble à ceci :



Le CE affirme que ce que Timothée propose est une méthode pour trouver « plein de demies ». Timothée ajoute que « si tu connais tes doubles, tu vas connaître toutes tes demies » et complète avec un dernier exemple : 2 fois 2 égal 4. Le CE complète en concluant que « 2 par rapport à 4 c'est une demie », ce à quoi Timothée ajoute « et ainsi de suite », signifiant qu'il est possible d'appliquer cette méthode à n'importe quel nombre.

À ce moment, un élève propose que le dessin de départ peut aussi représenter $\frac{9}{30}$. Le CE l'invite à expliquer comment il voit le $\frac{9}{30}$ dans le dessin. L'élève explique que puisque le dessin représente $\frac{3}{10}$ il peut faire « 3 fois 3 et 10 fois 3 qui donnent $\frac{9}{30}$ ». Le CE fait alors le lien avec la stratégie d'Emeric, qui est de multiplier par le même nombre le numérateur et le dénominateur pour obtenir une fraction équivalente. Le tableau ressemble à ceci :

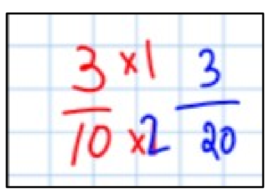


Le CE demande alors aux élèves s'ils sont certains que la stratégie fonctionne. Certains élèves expriment leurs doutes par des « peut-être… », alors que d'autres sont certains et que d'autres s'abstiennent de répondre. Le CE lui-même affirme ne pas être certain de comment cette méthode fonctionne, même si elle semble fonctionner jusqu'à présent. Il demande aux élèves de se pencher sur cette stratégie.

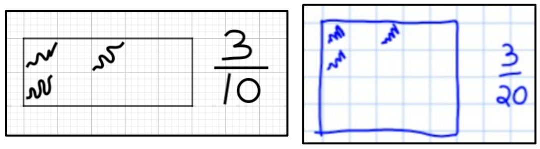
Nadia affirme que la stratégie fonctionne et explique qu'il faut multiplier le numérateur et le dénominateur par la même valeur. Questionné par le chercheur, Nadia ajoute que c'est pour obtenir une équivalence :

> Nadia : Ben! Ça fonctionne!
>
> CE : Ça fonctionne ?
>
> Nadia : Quand tu le multiplies par 2, ou par 3… disons que je prends l'exemple du $\frac{3}{10}$, si je multiplie le numérateur par deux, il faut que le dénominateur aussi soit multiplié par 2.
>
> CE : Mais pourquoi il faut que tu fasses la même chose ?
>
> Nadia : Ben, tu ne peux pas faire fois 1 en haut, et fois 2 en bas, ça ne marcherait pas.
>
> CE : Ben, ça marcherait, mais…
>
> Nadia : Ça ne donnerait pas une équivalence.

Le CE écrit alors cette « fausse multiplication » au tableau avec le $\frac{3}{10}$, obtenant $\frac{3}{20}$. Le tableau ressemble à ceci :



Le CE insiste que ce n'est pas la même opération au numérateur et au dénominateur et affirme que $\frac{3}{10}$ et $\frac{3}{20}$ ne seraient donc pas des fractions équivalentes. La classe est d'accord et le CE les questionne à savoir pourquoi ce ne sont pas des fractions équivalentes. Une élève affirme que « ce n'est pas la même chose, parce que tu ne multiplies pas par la même chose et ça ne donne pas la même réponse ». Le CE illustre alors ces deux fractions en reprenant l'idée de palettes de chocolat, qu'il dessine au tableau :



Le CE explique que dans la première palette, il y a 10 cases et dans la deuxième il y en a 20, donc deux fois plus. Plusieurs élèves soutiennent alors que cela ne représente pas la même chose :

> Nadia : Ce n'est pas la même chose.
>
> CE : Ce n'est pas la même chose hein ?
>
> Mélodie : Ils n'ont pas le même dénominateur.
>
> Philippe : Si on le faisait en fraction… mettons, des palettes de chocolat, tu en manges plus si tu en manges 3 dixièmes que 3 vingtièmes.

Le CE questionne alors le groupe à savoir si $\frac{3}{20}$ peut être représenté dans le dessin du $\frac{3}{10}$. Plusieurs élèves disent que « non ». Celui-ci revient alors sur l'explication du tout qui n'est pas le même, et ramène à nouveau sa question.

Rebecca explique comment y arriver en demandant de représenter les 20 morceaux dans le dessin du 10 morceaux :

> Rebecca : Ben, tu pourrais représenter le 20 dans le 10 en séparant ton carré, tu pourrais faire 5 lignes. Dans tes 5 espaces, tu pourrais faire une ligne. Tu pourrais avoir 20, mais 3 vingtièmes, ça ne serait pas ta fraction équivalente, ça serait 6 vingtièmes.

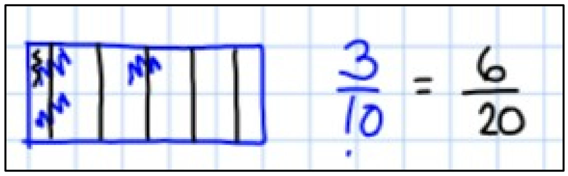
Le CE dessine au tableau l'idée de Rebecca, qui continue son explication en proposant de diviser en deux chaque morceau pour retrouver les 20 morceaux et obtenir $\frac{6}{20}$:

> Rebecca : On les diviserait en deux pour en faire 20 morceaux.

CE : Ah ha ! Donc ce que tu nous dis Rebecca, c'est qu'au lieu de le découper en 10 petits carrés, on le découperait en 20 petits rectangles. Chacun des carrés coupés en deux. Mais là, tu nous as dit par contre que la réponse, ça ne serait pas 3 vingtièmes

Rebecca : Ça serait 6 vingtièmes.

Le tableau ressemble à ceci :



Un élève, Timothée, renchérit sur cette proposition à l'aide d'un exemple de bonbons séparés en deux:

Timothée : Ce n'est pas bon, parce qu'en fait, l'année passée, le prof avait un truc avec des bonbons. C'est comme si tu partageais, mais pas égal. Sur 20, tu en donnes trois, et ce ne serait pas égal. Tandis que dans le dessin en haut, où on a mis les lignes, c'est comme si tous tes bonbons étaient séparés en deux, donc au lieu d'en avoir 3 sur 10, tu en as 6 sur 20, là, tout serait égal.

Le CE reprend l'idée de Timothée puis demande si ce qui est énoncé par l'élève, c'est que les bonbons sont en fait 2 fois plus petits dans le dessin des 10 bonbons coupés en deux. Timothée acquiesce à cette question. Le CE reprend les explications de Timothée et de Rebecca. Nadia poursuit les explications du CE en faisant les liens entre le nombre de bonbons complets et de demi-bonbons correspondant :

CE : Donc ce que Rebecca me dit, et ton exemple de bonbon, au lieu de prendre un carré complet dans le dessin du $\frac{3}{10}$, qui est un bonbon entier disons, à la place, on le coupe en deux, on en prend la moitié. Donc là, dans tout mon dessin, je devrais avoir deux fois plus de bonbons.

Nadia : Ben…

CE : Oui, vas-y

Nadia : Parce que, mettons, si on dit qu'on en prend plus dans 6 vingtièmes, c'est comme égal, parce que dans 6 vingtièmes, tu en prends des moitiés, tandis que dans 3 dixièmes, tu les as au complet. Donc tes 6 vingtièmes, si tu les rassembles ensemble, ça fait 3 complets.

CE : Donc 10 bonbons complets…

Nadia : Non. 3 bonbons complets, c'est la même chose que 6 moitiés.

CE : Oui ! Mais là, j'allais dire que 10 bonbons complets, c'est la même chose que 20 moitiés.

Nadia : Ouais !

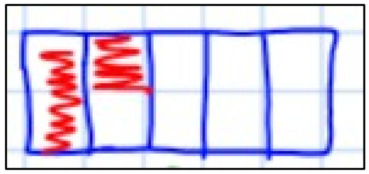
Le CE explique que s'il y a 10 bonbons il est possible d'en donner à 10 enfants. Il ajoute que s'ils sont coupés en 2, il est possible d'en donner à deux fois plus d'enfants, mais que les bonbons seraient par contre deux fois plus petits.

À ce moment, Francis propose de faire des bonbons doubles en reprenant le dessin associé à $\frac{3}{10}$ et en jumelant deux carrés. Le CE reprend l'explication de Francis. Un autre élève précise qu'il donnerait alors moins de bonbons, soient 5. Le CE répond qu'ils seraient par contre 2 fois plus gros. La discussion se poursuit quant au nombre de bonbons et à leur grosseur :

> CE : Tantôt, ma palette de chocolat, je l'ai coupée en 10. J'en ai une seule palette de chocolat, je ne peux pas en avoir d'autres. Je l'ai coupée en 10, et j'ai donné 3 des morceaux. Là, vous m'avez dit que si je la coupais en 20, comme les morceaux sont deux fois plus petits, pour en donner autant, il faut que je donne deux fois plus de morceaux.
>
> Nadia : Parce qu'ils sont plus petits, tu peux en donner deux fois plus.
>
> CE : Ouais! Pour être sur… j'ai ma palette de chocolat et je veux absolument donner 3 dixièmes de cette palette. Alors, si j'ai des morceaux deux fois plus petits, donc je la sépare en 20, je peux en donner plus, mais c'est des morceaux qui sont deux fois plus petits, je peux en donner.
>
> Élèves : Plus.
>
> CE : Et même deux fois plus.

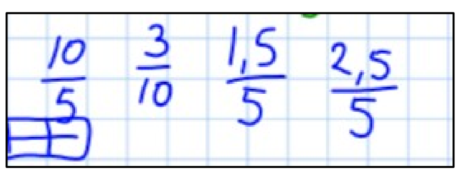
Le CE relie alors tout ce travail avec la stratégie d'Emeric de multiplier par 2 le numérateur et le dénominateur de la fraction. Il explique qu'avec les 10 morceaux qui deviennent 20 morceaux en étant deux fois plus petits, les 3 morceaux deviennent aussi 6 morceaux.

Le CE propose ensuite un découpage en cinquième et demande aux élèves ce qu'il devrait faire s'il veut donner des morceaux deux fois plus gros, mais qu'il veut encore donner $\frac{3}{10}$. Une proposition de les couper en deux est mise en avant. Le CE reprend l'explication et fait le dessin suivant au tableau :



Il demande alors comment il est possible d'écrire ceci en fraction. Après quelques secondes de réflexion, Francis, qui avait proposé de faire des morceaux doubles, offre la réponse de $\frac{3}{10}$. Le CE lui indique que cela ne fonctionne pas, en précisant que $\frac{3}{10}$ c'est pour le premier dessin, mais que maintenant, le découpage représente des cinquièmes. Un autre élève propose $\frac{3}{5}$. Le CE note cette proposition au tableau et les autres élèves se questionnent.

Le CE demande aux élèves de travailler sur ceci de manière individuelle ou en petits groupes pour quelques minutes. Environ 5 minutes plus tard, il ramène le groupe en plénière puis recueille les diverses réponses des élèves au tableau. Voici ce qu'il note :



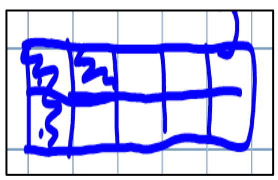
Des élèves affirment ne pas être d'accord avec certaines des réponses. Le CE leur demande d'être patients avant d'affirmer qu'une réponse est fausse, car il faut attendre d'entendre sa justification pour évaluer la réponse dans son ensemble. Il ajoute qu'il est possible parfois d'être surpris et de trouver des éléments intéressants dans ces réponses pensées initialement fausses.

Le CE demande ensuite des explications sur une première réponse, le $\frac{10}{5}$. L'élève ayant offert cette réponse dit ne pas vraiment pouvoir l'expliquer, mais essaie tout de même en affirmant qu'au début on avait 10 morceaux et maintenant 5. Il affirme ne pas pouvoir expliquer plus, bien que « tantôt dans ma tête ça fonctionnait ». Comme il ne peut continuer son explication, le CE mentionne qu'ils y reviendront peut-être plus tard.

Il propose entre temps d'explorer d'autres réponses, et demande si d'autres élèves peuvent expliquer leur réponse. Nadia, qui a trouvé $\frac{1,5}{5}$, vient au tableau et explique avoir fait 5 morceaux et d'en avoir pris 1 au complet et une moitié sur les 5 :

> Nadia : Ce que j'ai fait, c'est qu'au lieu d'une palette de 10 morceaux, j'en ai fait 5. Donc on a pris 1 morceau au complet, plus, on en a pris une moitié, donc ça faisait 1,5 parce qu'on lui, on ne l'a pas pris au complet.

Le tableau ressemble à ceci :



Le CE reprend les explications et ajoute que chaque groupe de 2 morceaux vaut 1 morceau de la palette coupée en cinquième. Il demande ensuite à Nadia où elle voit le $\frac{3}{10}$ dans son dessin. Celle-ci explique que c'est ce qui est colorié. Le CE lui indique que c'est sa réponse de $\frac{1,5}{5}$. Nadia ajoute que « si on resépare les morceaux pour en avoir 10, il y a 3 morceaux sur les 10 de coloriés ». Le CE conclut en disant que ce que Nadia propose c'est que « 1 et une demie sur 5 c'est la même chose que 3 morceaux sur 10 parce que les morceaux sont maintenant deux fois plus petits ». À ce moment, la cloche annonçant la fin de la période sonne et la séance se termine sur ceci.

ANNEXE B

LA SÉANCE SUR LA TÂCHE DE DIVISIBILITÉ PAR 2 DANS LA CLASSE DE 5^{E} ANNÉE DE LOUISE

La tâche sur la divisibilité par 2 est la suivante :

46, 81, 70, 106
Quels nombres sont divisibles par 2 ?

Cette tâche a été proposée à résoudre à la classe de 5e année de Louise. Cette tâche peut être qualifiée de routinière, car les élèves avaient déjà abordé cette notion auparavant avec leur enseignante, et dès son énoncé, ils savaient comment s'y prendre pour la résoudre. Cette tâche routinière a donné lieu à une investigation mathématique d'environ cinquante minutes. Lors de cette séance, aussitôt que la question est posée, des mains se lèvent et une première réponse est énoncée.

Pour débuter, Paul propose le nombre 46 comme réponse. Le CE lui demande d'expliquer sa réponse. Paul explique que comme le 4 se divise en deux et que le 6 aussi, alors 46 est divisible par 2. Le CE demande aux autres élèves ce qu'ils en pensent.

Marie dit qu'elle aurait divisé par 2 pour obtenir 23. Le CE indique qu'il s'agit d'une autre façon de faire et reformule les deux stratégies proposées :

> CE : Dans la première stratégie, on s'intéresse au 4 et ensuite au 6, on va s'y intéresser, mais, en ce moment, ce que tu proposes c'est que 46 c'est aussi 23 + 23, c'est ça?
>
> Marie : Bien, je diviserais.
>
> CE : Oui, 46 ÷ 2 = 23. Comme ça donne un nombre complet, alors c'est divisible par 2.

Le CE demande ensuite aux élèves ce qu'ils pensent de la première stratégie de regarder le 4 puis le 6. Zack se lance dans une explication en proposant que Paul s'intéresse à la parité de chaque chiffre du nombre :

Zack : C’est comme s’il regarde le 4 et le 6 pour savoir si c’est un nombre pair ou impair.

CE : Ok. Peux-tu nous en dire un peu plus là-dessus?

Zack : Bien, les deux sont des nombres pairs parce que 0, 2, 4, 6, 8 sont des nombres pairs.

CE : Ok.

Zack : Les nombres pairs se divisent toujours en deux.

Le CE dit que c’est un peu ce que Marie propose avec sa division. Le CE indique que le nombre 47, en contraste, ne peut pas se diviser en deux puisqu’il est impair. Le CE demande aux élèves s’ils ont autre chose à dire sur cette stratégie.

Damien dit alors que les deux stratégies sont au fond les mêmes, car « 4 on peut le diviser en 2, ça donne 2. Et 6, on peut aussi le diviser en 2, ça donne 3 ». Le CE reprend l’explication donnée puis un autre élève renchérit qu’il aurait également fait $6 \div 2 = 3$, car $3 + 3 = 6$ et $4 \div 2 = 2$, car $2 + 2 = 4$.

À ce moment, Julie propose que 106 fonctionne aussi, car cela donne deux fois le nombre 53 :

Julie : 106 fonctionne aussi parce que ça donne 53 et 53.

CE : Ok. Tu en regardes un autre et ça te donne 53 et 53. Quand on divise en deux, ça veut dire qu’ils ont deux parties. Est-ce qu’on pourrait utiliser la stratégie de Marie, mais avec le 106?

Certains élèves disent que oui et d’autres disent que non. Le CE donne alors la parole à Mathis qui décompose 106 en 100 et en 6 et divise chaque partie de la décomposition en deux :

Mathis : Bien, le 100, ça me fait penser à deux 50, et le 6 c’est comme deux 3.

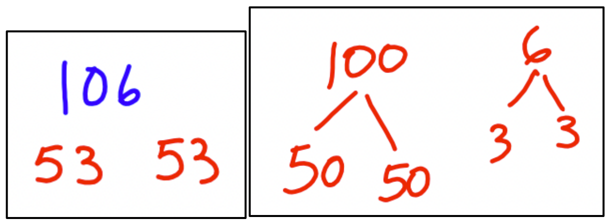
CE : Ah! Tu regardes le 100 de 106.

Mathis : Oui. Le 100 me fait penser à deux 50.

Ce : Est-ce que tu regardes le 6 ensuite?

Mathis : Oui, le 6 se découpe en deux 3.

Au tableau, les traces suivantes sont laissées :



Le CE reprend le tout en disant que ce qui est proposé c'est que pour savoir si 106 est divisible, ils n'ont pas besoin de regarder le 106 dans son ensemble. Ils peuvent regarder des bouts de 106 et s'ils sont tous divisibles, alors 106 le sera aussi. Le CE répète qu'ils pourraient donc regarder 100 et 6. Il demande alors s'ils peuvent le découper autrement.

Jordan propose une stratégie qui consiste à jouer avec les zéros en ne considérant que 10 et 6 qu'il divise en deux. Il remet ensuite le 0. Sa stratégie lui permet d'obtenir également la réponse de 23. Le CE lui demande d'expliquer ce à quoi correspond le 10 qu'il utilise. Jordan dit qu'il met le 6 de côté en prenant le 10 et qu'ensuite il remet le 6. Le CE lui redemande à quoi correspond le 10, ce à quoi l'élève répond 10 x 10 :

Jordan : Heu, bien… c'est 10 x 10.

CE : 10 x 10

Jordan : 10 x 10 = 100.

CE : Ok. 10 x 10 = 100

Mathis : Oui. Il a cassé le 100, il peut juste ajouter des zéros.

CE : Les autres vous en pensez quoi de ce 10 là?

Un petit silence se fait sentir. Le CE reprend les explications données et sollicite un côté de la classe qui est un peu silencieux à intervenir. Les élèves de ce côté ne donnant pas de réponse, il demande finalement à Paul s'il peut les aider un peu. Ce dernier explique que les nombres se terminant par 2, 4, 6, ou 8 sont pairs et peuvent se diviser en deux :

> Paul : Bien, ma sœur dit que les nombres 2, 4, 6, 8, que quand cela finit par ça, ça peut se diviser en deux parce que c'est des nombres pairs.
>
> CE : Oui, les nombres pairs se terminent par 0, 2, 4, 6, 8 se divisent en deux. C'est un peu ça l'idée d'être un nombre pair. On peut faire deux groupes séparés avec.

Un élève mentionne que dans le cas du 106, ça va bien, car il se termine par 6. Le CE cache alors le 6 du 106 au tableau et demande aux élèves à quoi correspond le 10. Plusieurs élèves disent alors que ce sont des dizaines. Le CE acquiesce et demande aux élèves si cela fonctionne. Ceux-ci affirment que oui. Le CE poursuit en disant que Jordan suggère que de regarder le 4 et le 6 fonctionne parce qu'il pourrait regarder le 10 et le 6 en sachant que c'est 10 dizaines et 6 unités. Jordan confirme cette affirmation. Le CE demande aux élèves comment le dire de cette manière pour le 46. Un élève répond qu'il y a 4 dizaines et 46 unités. Le chercheur reprend l'explication et Mia mentionne ne pas comprendre. Le CE lui demande d'attendre un peu et lui pose plutôt une question :

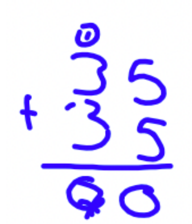
> CE : Quand Paul a fait 4 divisé en 2 et 6 divisé en 2, est-ce que c'est un 4 ça? [Il pointe le 4 des dizaines.]
>
> Élèves : Non.
>
> CE : Qu'est-ce que ça vaut si ce n'est pas 4?
>
> Mia : 40.

Le CE répète 40 et un élève s'exclame « Ah, bien oui! ». Le chercheur discute alors des stratégies proposées en expliquant que l'élève a regardé 100 et 6, et qu'un autre a regardé 40 et 6, car le 4 représente en fait 40. Le CE mentionne que le 40 se sépare en deux tout comme le 6.

Un élève propose alors que 70 fonctionne aussi. Le CE demande qui est d'accord avec le 70. Certains lèvent la main. Il demande ensuite qui n'est pas d'accord. D'autres mains se lèvent. Il demande finalement qui n'est pas certain. Plusieurs lèvent la main. Le CE demande à une élève pourquoi elle n'est pas certaine. Celle-ci affirme que 7 est un nombre impair. Un élève ajoute que le 0 est pair. Éric élève demande pour aller au tableau pour faire sa solution dans laquelle il décompose le 70 en pour former deux groupes pareils :

> Éric : Je sais que 30 plus 30 ça donne 60. 60 est un nombre pair parce qu'il a deux groupes pareils. 60 se divise par 2 et ce que je me rends compte c'est que 70 c'est juste 10 de plus.
>
> CE : 70 c'est 10 de plus que 60.
>
> Éric : Oui.
>
> CE : Il est déjà divisible par 2.
>
> Éric : Je vais effacer les 0 [du 30 + 30 qu'il a écrit au tableau], et je vais mettre des 5 à la place.
>
> CE : Comme 10 c'est 5 + 5.
>
> Éric : Oui, ça donne 10.

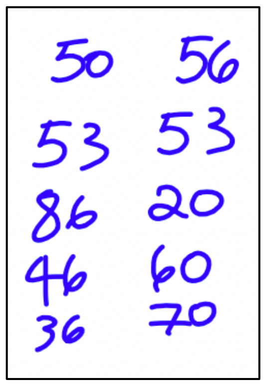
L'élève procède alors au calcul par l'algorithme. Les traces qu'il laisse au tableau sont les suivantes :



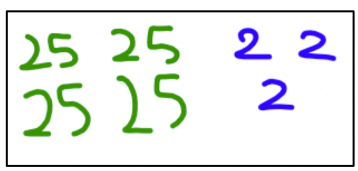
Le CE reprend les explications données et fait le lien avec le 100 et 6 discuté plus tôt. Un élève propose que 81 ne fonctionne pas, car il est impair, mais le CE demande avant d'aller sur les nombres impairs, s'ils peuvent découper 106 autrement qu'en 100 et 6 ou qu'en 10 dizaines et 6 unités.

Un élève propose de faire 10 x 100 et ensuite 2 x 3. D'autres le reprennent en soutenant que 10 x 100 = 1000. Le CE mentionne qu'ils sont encore avec 100 et 6, et leur demande s'ils peuvent faire autrement. Pour les aider, il donne un exemple en lien avec l'Halloween et le nombre de bonbons amassés par deux amis. Il leur demande si les amis pourraient avoir amassé autre chose que 100 bonbons pour un et 6 pour l'autre. On entend plusieurs élèves dire oui. Le CE leur demande de donner des exemples.

Différentes propositions sont alors lancées et notées au tableau :



Un élève vient alors au tableau et explique sa décomposition. Les traces de sa stratégie sont celles-ci :



Le CE reprend en disant que tantôt ils ont découpé 106 en 100 et 6, et ont dit que si 100 est divisible par 2 et 6 est divisible par 2, alors 106 serait divisible par 2. Il demande aux élèves si cela fonctionne, ce à quoi ils acquiescent. Le CE demande alors s'il ne casse pas le nombre en 100 et 6, mais en 50 et 56 est-ce que ça marche aussi? Camille explique alors qu'il est possible de transférer des unités d'un groupe à un autre :

Camille : Oui, c’est comme si tu transférais le 3, parce qu’au début 53 et 53 c’est 106, c’est comme si au 53 on enlève un trois et qu’on le transfère, ça fait 56.

CE : Ok. Est-ce que le 50 est divisible par 2?

Élèves : Oui.

CE : Oui, ça donne 25. Est-ce que 56 est divisible par 2?

Élèves : Oui.

CE : Ça donne combien?

Élèves : [On entend des 26, 27 et 28.]

CE : Oui, ça donne 28. 50 est divisible par 2 et 56 est divisible par 2, alors 106 est divisible par 2.

Élèves : Oui.

Le CE et les élèves essaient alors avec 86 et 20 et constate que cela fonctionne également.

À ce moment, Clara soutient qu’elle voit qu’il y a beaucoup de 6 et de 3 au tableau. Le CE fait remarquer que quand ils ont découpé 106 chacun des nombres était encore un nombre pair. Un élève mentionne que ce n’est pas vrai pour 53 qui est un nombre impair.

Damien fait la remarque que lorsqu’il divise un nombre pair en deux, cela donne un nombre impair :

Damien : À chaque fois que je divise par 2, ça donne deux nombres impairs. Si on divise un nombre pair par 2, ça donne toujours un nombre impair.

Zack : Bien, 100 divisé par 2 ça donne 50 et 50 c’est pair. [Petit rire.]

CE : Ok. Il faudrait comprendre ça un peu par contre.

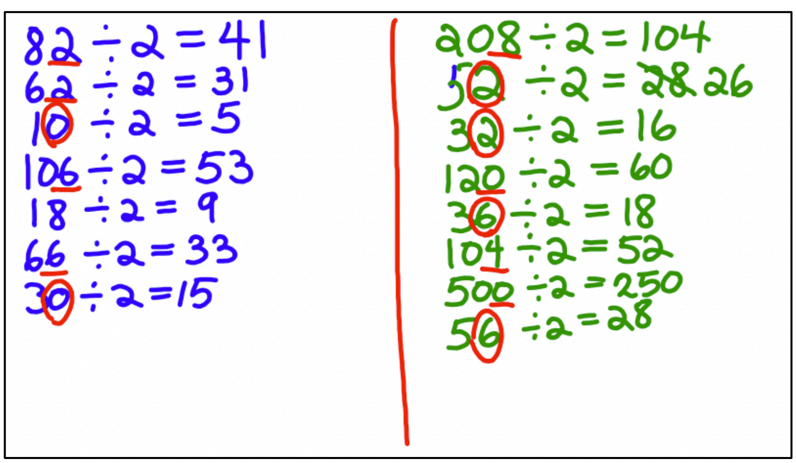
Damien : Ok. Sauf si ça fini par 0, mais si on prend 102, ça fait 51.

Le CE propose alors aux élèves de prendre un peu de temps pour y réfléchir seul ou en petits groupes. Il reprend les idées proposées et leur demande de trouver quand c'est vrai que quand un nombre pair est divisé en deux donne un nombre impair, quand cela ne fonctionne pas et quand ils ne sont pas certains. Il leur propose de se donner des exemples ou de trouver des explications pour tenter de comprendre ce qui se passe.

Au bout de quelques minutes, le CE reprend le groupe et propose d'inscrire les exemples qu'ils ont trouvés en séparant ceux qui donnent des nombres impairs et ceux qui donnent des nombres pairs. Plusieurs propositions sont données. Julie ajoute que quand l'unité est 2 ou 6 cela devient un nombre impair, mais pas pour les nombres qui se terminent en 0, 4 ou 8 :

> Julie : Quand l'unité est 2 ou 6, je pense que cela devient un nombre impair, mais qu'avec 0, 4, ou 8 aux unités, ça devrait donner un nombre pair.

Le CE propose de continuer avec d'autres exemples et demande à Julie de vérifier si cela fonctionne toujours. À la suite de leurs propositions, le tableau ressemble à ceci [les cercles et les soulignements sont toutefois faits plus tard] :



Un élève mentionne qu'il y en a plus dans la colonne paire que dans la colonne impaire. Le CE leur demande ce qu'ils voient dans ce tableau. Un autre élève dit que les deux réponses sont en fait possibles. Le CE mentionne que c'est quelque chose de pas mal important déjà, et que Damien n'avait ni tort, ni raison et

Zack de même, puisqu'il y a plein de réponses qui fonctionnent et qui ne fonctionnent pas. Le CE demande alors à Julie de reprendre ce qu'elle proposait tout à l'heure :

> Julie : Quand l'unité est 2 ou 6, alors ça donne impair.
>
> CE : Peux-tu nous donner un exemple pour nous aider à comprendre?
>
> Julie : 82.
>
> CE : [Il pointe au tableau le 82 ÷ 2 = 41 au tableau.] L'unité c'est 2, [il pointe alors le 106] ou 6.

Le CE propose alors d'essayer avec les exemples notés au tableau. Il souligne au tableau les nombres qui se terminent par 2 ou 6 qui donnent un nombre impair lorsque divisé par 2 et encercle ceux qui donnent un nombre pair. Julie ajoute que « quand 0, 4 ou 8 est à la position des unités cela devrait donner un nombre pair. »

Le CE vérifie ensuite les nombres. Pour le 8, cela fonctionne (il le souligne). Pour le 4, il souligne le 104 en disant qu'il fonctionne aussi. Pour le 0, le CE souligne le 500 qui fonctionne aussi. Le CE souligne ensuite le 102 qui fonctionne aussi. Le CE dit alors : « Ah! Attendez un peu, il y a des 0 dans l'autre colonne [impair]. » Un élève mentionne qu'il y a aussi un 2 dans l'autre colonne. Le CE encercle alors les nombres se terminant par 0 dans le tableau, puis ceux se terminant par 2 et ajoute : « Ah non! Pas vrai! ». Un élève renchérit que c'est la même chose pour le 6. Le CE mentionne que c'est très intéressant ce qu'elle essayait de faire, et lui demande plus d'explication sur ce qu'elle tentait de faire. Julie dit alors qu'elle prenait les 100, 200 et 300 et qu'elle les a mis en 100, 102, 104, 106, 108 et ainsi de suite avec les 200 et 300. Elle dit que le 100 donnait pair, le 102 donnait impair, le 104 pair, le 106 impair et le 108 pair, et que cela lui donnait cela pour tous les autres. Le CE inscrit les nombres au tableau :

100	102	104	106	108

Le CE reprend l’explication de Julie, en disant que le premier donnait un résultat pair avec 50 et 50. Il dit que l’autre, le 102, donnait 51 et 51 ce qui est impair, et qu’ensuite c’était pair avec 52 et 52. Il poursuit avec 53 et 53 qui est impair, puis avec 54 et 54 qui est pair. Comme la cloche est sur le point de sonner, le CE propose qu’ils continuent ceci avec leur enseignante. Il reprend alors l’ensemble des stratégies et idées discutées à travers la séance. La séance se termine ainsi.

ANNEXE C

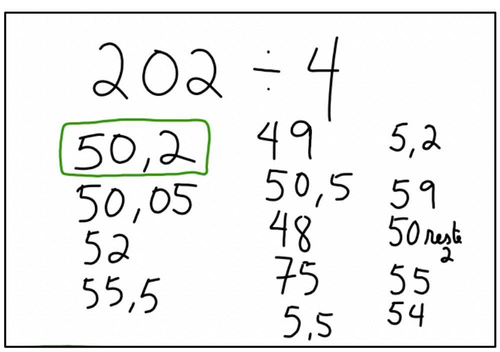
LA SÉANCE SUR LA TÂCHE DE CALCUL MENTAL DE DIVISION AVEC RESTE DANS LA CLASSE DE 6^{E} ANNÉE

La tâche de calcul mental proposée à résoudre est la suivante :

$202 \div 4 = ?$

Cette tâche a été donnée à la classe de 6e année à résoudre. Cette tâche peut être qualifiée de routinière, car dès son énoncé, les élèves savaient comment s'y prendre pour la résoudre. Cette tâche routinière a donné lieu à une investigation mathématique d'une quarantaine de minutes. Lors de cette séance, les élèves ont eu environ 1 minute pour penser à une solution et pour indiquer leur réponse sur leur panneau individuel.

Au bout d'une minute, le CE demande qui a trouvé une réponse. Comme une majorité lève la main, il décide de commencer. Il demande d'abord aux élèves de lever leur panneau et à une enseignante du groupe de choisir une réponse à discuter. L'enseignante propose 50 et 5 centièmes et aussi le 50,2. Le chercheur propose de commencer avec le 50,2, mais avant, il propose de noter les différentes réponses qu'il voit sur les panneaux au tableau :



Le CE demande à David comment il a obtenu 50,2. David indique avoir fait l'algorithme dans sa tête. Le CE lui demande ce que c'est pour lui « faire l'algorithme ». David vient alors au tableau et effectue sa division par crochet en expliquant ce qu'il fait. Il termine en disant que comme il reste 2, il faut mettre « virgule 2 ».

Le CE demande alors si d'autres élèves ont eu cette réponse. Une élève dit que oui. Le CE lui demande comment elle y est arrivée. Cette dernière explique avoir aussi fait l'algorithme. Elle reprend alors la même stratégie que David.

Le CE demande ensuite à Olivia qui avait indiqué 50 reste 2 si sa stratégie était la même. Celle-ci dit que non. Le CE l'invite à expliquer sa stratégie. Cette dernière explique avoir multiplié 4 par 50 pour obtenir 200 et d'ajouter le reste de 2 :

> Olivia : Bien, dans 200, il y a 4 x 50.
>
> CE : C'était 202.
>
> Olivia : Oui, mais quand on divise, on ne peut pas arriver à un nombre décimal, alors il reste 2. Ça donne 50 reste 2.

Le CE reprend l'explication d'Olivia. Il demande ensuite si d'autres ont obtenu 50,2 ou encore 50 reste 2.

Matt dit qu'il arrive à « reste 2 » et explique qu'au lieu d'avoir multiplié par 50, il a fait l'algorithme, mais à la fin il a mis reste 2. Le CE reprend l'explication et demande à l'élève si pour lui c'est la même chose virgule 2 et reste 2. Matt dit que non. Le CE demande alors aux autres ce qu'ils en pensent. Certains disent que oui, et d'autres que non.

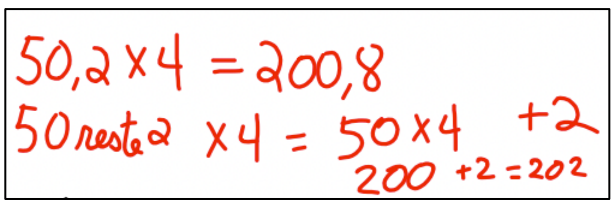
Benoit explique alors que 50,2 multiplié par 4 donne 200,8 et non 202 :

> Benoit : 50,2 x 4 ça donne 200,8. Ça ne donne pas la même chose.
>
> CE : Ok. 50,2 x 4 donne 200, 8. Vu que la multiplication et la division sont des opérations inverses, donc, si 202 ÷ 4 ça donnait 50,2, alors il faudrait que 50,2 x 4 donne 202 aussi, mais ce n'est pas le cas.

Le CE demande à la classe si la réponse d'Olivia et de Matt fonctionne avec cette stratégie d'opération inverse. Certains disent que oui. Un élève ajoute que cela fonctionne s'ils veulent rester dans les nombres naturels. Le CE leur demande comment faire 50 reste 2 multiplié par 4. La réponse 502 est alors lancée. Un autre élève dit que ça donne la même chose, soit 2008 (plutôt que 200,8). On entend d'autres élèves dire 202. Le CE demande à nouveau des explications sur comment le faire cette multiplication. Martine explique alors qu'il faut faire 50 x 4 et ajouter le 2 ensuite :

> Martine : Il faut faire 50 x 4 qui donne 200 et ensuite, il faut ajouter le 2.
>
> CE : Ok. Ce que tu nous dis, c'est que 50 x 4 donne 200 et ensuite, il faut ajouter le 2. Si je multiplie le reste par 4, ça donne 8, ça ne fonctionne pas.

Au tableau ces traces sont laissées :



Le CE demande aux élèves ce qu'il faut faire avec la virgule 2. Adèle propose l'explication que « quand il reste des nombres, la calculatrice les place derrière la virgule ». Cette explication amène le CE à demander s'il était resté 3, si elle aurait mis virgule 3 :

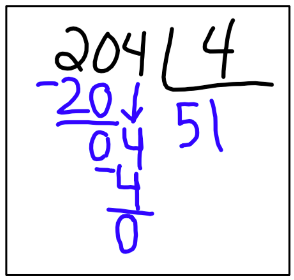
> Adèle : La calculatrice ne va pas dire reste 2, mais aussi pour ne pas se mêler sur papier, c'est mieux d'écrire reste 2 sinon tu peux te mélanger. Est-ce qu'il reste 2 unités ou c'est virgule 2?
>
> CE : Si plutôt qu'il était resté 2, il reste 3. Donc ce que tu nous dis, c'est que s'il était resté 3, tu aurais mis virgule 3.
>
> Adèle : Bien, c'est 202, mais si ça avait été 204, il serait resté 4 en arrière de la virgule ou reste 4.

Le CE reprend l'exemple de 204 proposé par Adèle et demande aux élèves d'imaginer qu'il avait donné 204 ÷ 4 à la place. Un élève répond immédiatement que la réponse serait 51. Le CE demande à David de venir le faire avec sa technique de l'algorithme qu'il a présenté plus tôt.

David vient au tableau et explique qu'il faut mettre la plus grande valeur possible pour qu'en multipliant par 4, elle soit le plus près de 20, mais sans le dépasser. Le CE reprend l'explication et ajoute que 4 rentre 5 fois, car 5 x 4 donne 20. Adèle ajoute alors qu'il n'y aura pas de reste parce que le nombre sera complet :

> Adèle : Là, ça ne va pas donner virgule quelque chose, parce que 4 rentre dedans. Ça sera un nombre complet.

David termine son algorithme pendant ce temps et obtient 51. Le tableau ressemble à ceci :

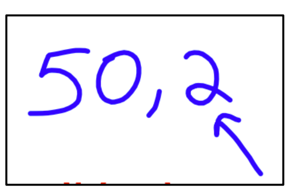


Le CE demande aux élèves si David aurait aussi pu écrire 50,4. Les élèves disent que non, car il n'y a pas de reste. Le CE reprend alors sa question à savoir si le reste est le nombre après la virgule :

> CE : Ce que l'exemple soulève, c'est que quand il y a un reste, est-ce que c'est le nombre qui s'en vient après la virgule? »

Un petit silence est présent en classe.

Camille explique que « le reste est de 2 entiers et si on le met en arrière de la virgule cela deviendrait des dixièmes ». Camille soutient alors que 2 dixièmes et 2 entiers ne sont pas équivalents. L'enseignante du groupe reprend alors l'explication donnée par Camille. Le CE poursuit l'explication en insistant sur l'écriture. Il pointe alors le dixième au tableau, comme ceci :



Le CE demande aux élèves quoi faire de tout ceci. Charles répond que « comme 2 est la moitié de 4, la réponse serait 50,5 ». Le CE le note au tableau :

Il demande ensuite à Charles s'il peut en dire plus à propos de ceci. Charles précise alors que dans 4 il y a deux fois le 2 :

> Charles : Dans 4, il y a 2 fois le 2 dedans.
>
> CE : Quand on fait 202 ÷ 4 ça donne 50 reste 2. Ce que tu dis c'est que 2 c'est une demie de 4 ce qui donne 50,5.

Justin, qui n'est pas trop d'accord, demande des explications supplémentaires concernant le lien entre le 5 et le 4 :

> Justin : Comment on peut arriver à 5, parce que si on multiplie on arrive à 4, il n'y a rien qui donne 5.
>
> CE : Comment on fait pour arriver à 5 quand on a 2.
>
> Justin : Si on multiplie on arrive à 4.
>
> CE : Qu'est-ce que tu veux dire?
>
> Justin : Bien, 2 x 2 ça donne 4.
>
> Charles : Oui, et 5 c'est la moitié de 1.

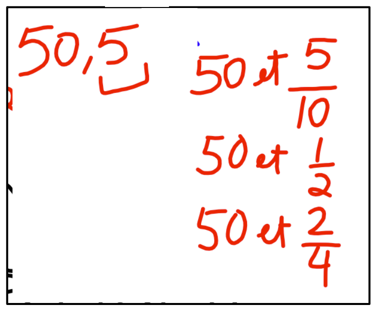
Le CE reprend la proposition de Charles et fait un lien avec le 2 x 2 de Justin. Justin réplique ne pas comprendre d'où vient le 5. Jade propose une nouvelle explication en termes de moitié. Elle soutient que 5 est la moitié de 1, ce à quoi l'enseignante demande des explications supplémentaires :

> Jade : 5 c'est la moitié de 1 et que vu que c'est la moitié de 1, bien 1 + 1… 5 + 5 ça donne 1 entier, tu le fais 4 fois ça donne 2 entiers donc il reste 2.

Ens. : Comment 5 + 5 peut donner 1 entier?

Jade : Bien c'est 5 dixièmes, si on le met en fraction c'est $\frac{5}{10}$ ça donne $\frac{1}{2}$, parce que c'est la moitié d'un entier et que si on fait $\frac{1}{2}$ x 4 ça donne 2 entiers.

Le CE, Jade et Charles poursuivent les explications concernant l'égalité de 5 dixièmes avec $\frac{5}{10}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{4}$. Les traces suivantes sont laissées au tableau :



Jade soutient que pour valider la réponse, ils peuvent faire « 50 et 5 dixièmes multiplié par 4 ». Le CE mentionne que cela donnerait bien 202 s'ils le calculaient.

Malik veut, à son tour, proposer une autre manière de montrer que la réponse est 50,5. Il vient au tableau et affirme qu'avec l'algorithme, il peut y arriver. Malik débute l'algorithme. Le CE lui demande d'expliquer ce qu'il fait.

Malik : J'ai fait 202, et comme 4 ne rentre pas dans le 2, j'ai pris 20.

CE : Est-ce que tu parles du 202 ou du 2 du début ?

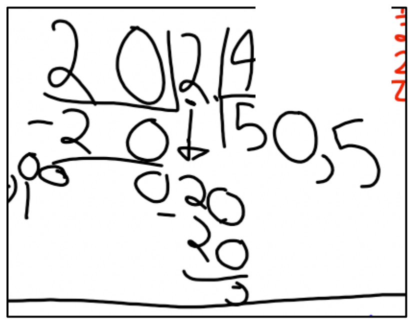
Malik : C'est le 2 de la centaine. Comme 4 ne rentre pas dans 2, je prends les dizaines aussi. Ça fait 20, et là, 4 il entre 5 fois dans 20. Alors, ici on va avoir 5. Là, on descend le 2.

CE : C'est le 2 unités qu'il descend.

Malik : Oui. Et encore, 4 ça ne marche pas pour rentrer dans 2 unités, mais là on va rajouter un 0. Vu qu'on rajoute un 0, il faut mettre un 0 à côté ici [il place le 0 à côté du 5 dans la réponse de l’algorithme pour avoir le 50]. Là, vu qu’on est rendu dans les points 5, bien dans les dixièmes, alors on met une virgule. 4 rentre 5 fois dans 20 encore.

CE : On arrive à 50,5. Le 2 qui restait tantôt, il s’en sert, il le rend à 20 pour pouvoir ajouter la virgule.

Le tableau ressemble à ceci :

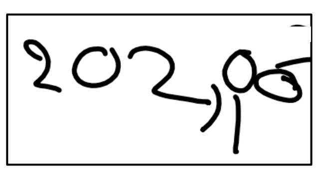


Adèle affirme ne pas comprendre comment ils passent du 5 au 2. Elle dit que Malik l’a montré, mais qu’elle ne comprend pas d’où vient le 0.

À ce moment, un autre élève, Renaud, mentionne savoir d’où vient le 0 dans l’algorithme de Malik.

Renaud : 202, des fois on n’ajoute pas les 0, quand ça donne juste.

Il vient alors au tableau et écrit :

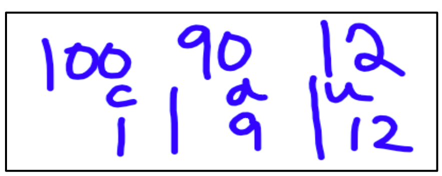


Il trace ensuite une barre sous le zéro à la position des dixièmes pour indiquer à quel 0 Malik fait référence dans l’algorithme. À ce moment, le CE demande aux élèves s’ils sont capables de résoudre 202 ÷ 4 sans passer par l’algorithme. Camille vient au tableau pour proposer sa stratégie. Elle explique avoir mis 2 plaques de cent, avoir laissé un espace et avoir ensuite mis 2 unités. Elle les dessine également au tableau (sa démarche est illustrée ci-dessous). Le CE lui demande d’expliquer pourquoi elle a laissé un espace.

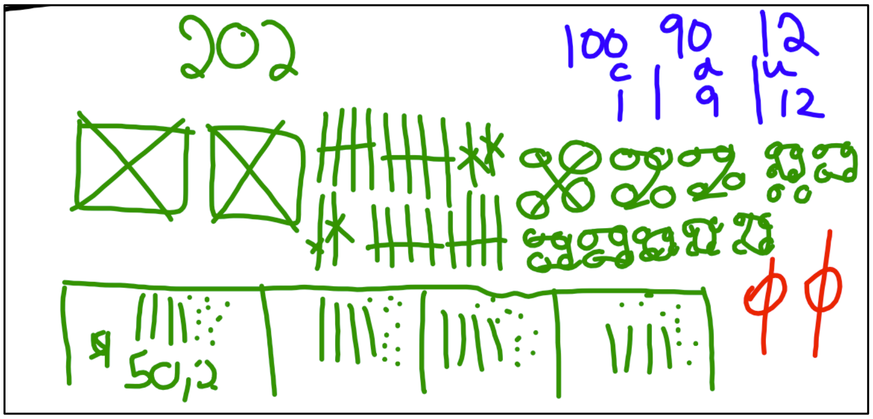
Camille explique que c'est parce qu'il n'y a pas de dizaine. Le CE reprend en disant qu'il y a plein de dizaines, mais qu'elles sont toutes regroupées dans les plaques de cent. L'élève acquiesce et poursuit son explication en faisant un rectangle qu'elle sépare en quatre. Elle explique alors les différentes transformations qu'elle a fait qui lui permettent de distribuer le tout dans chaque rectangle.

Une fois les transformations effectuées, le CE lui demande de confirmer qu'elle a bien encore 202. L'élève dit toutefois qu'elle n'a plus 202. Un autre élève renchérit que oui. Le CE adresse alors la question à tout le groupe. Un autre « non » est lancé. Sara dit toutefois que oui, et explique que le nombre est seulement décomposé. Le CE demande s'ils peuvent le retrouver.

Sara vient au tableau et explique en remettant les dizaines dans la plaque de cent et les unités dans la dizaine. Elle le montre avec ses mains sur le tableau. Le CE reprend l'explication en disant qu'ils ont 1 plaque de 100 et 9 bâtons de 10. Une élève mentionne qu'ils sont toujours là, mais sous une autre forme. Le CE reprend qu'ils avaient 2 plaques de cent et 2 unités et dit que maintenant, ils ont 1 plaque de cent, 9 bâtons et 12 unités. Il leur demande si cela donne bien 202. Les élèves disent que oui. Le CE poursuit les explications à l'aide du tableau de nombres, comme ceci :



Les élèves semblent alors convaincus que le nombre 202 est conservé. Camille poursuit donc sa stratégie en expliquant la distribution dans les 4 groupes et les autres transformations qu'elle fait. À la fin de ce processus, il reste alors deux petites unités. L'élève et le CE soulignent que c'est le reste du début. La cloche annonçant la fin de la séance sonne alors, mais le CE demande aux élèves de rester un petit instant pour terminer. L'élève calcule la quantité dans un groupe et indique que ça lui donne 50. Elle écrit alors 50,2 au tableau en guise de réponse. Le tableau de sa stratégie ressemble à ceci :



Jade intervient à ce moment en disant qu'avec les 2 unités qui restent, Jade doit les transformer en dixièmes. Le CE explique que les unités doivent être séparées pour en donner à chaque groupe. Charles mentionne alors que cela donne « virgule 5 ». Le CE propose de voir les unités restantes en termes de biscuits. Il explique que pour les partager, elle voudrait sans doute les casser en demies. Au tableau, il dessine ceci en rouge. Comme la cloche était déjà sonnée, la séance se termine ainsi.

ANNEXE D

LA SÉANCE SUR LA TÂCHE SUR L'AIRE ET LE PÉRIMÈTRE DANS LA CLASSE DE 5^{E} ANNÉE DE LOUISE

La tâche sur l'aire et le périmètre proposée à la classe de Louise en 5e année à résoudre est la suivante :

L'aire d'un rectangle est de 32 cm^2, quel est son périmètre si un côté mesure le double de l'autre côté?

Cette tâche peut être qualifiée de routinière, car les élèves avaient déjà travaillé les notions d'aire et de périmètre auparavant avec leur enseignante, et dès son énoncé, les élèves savaient comment la résoudre; s'engageant immédiatement dans une stratégie de résolution. Cette tâche routinière a donné lieu à une exploitation collective d'une quarantaine de minutes. En classe, les élèves ont eu environ dix minutes pour travailler seul ou en petits groupes sur la résolution de la tâche puis un retour collectif sur leur réponse et stratégie est fait. En ramenant le groupe en plénière, le CE demande aux élèves ce qu'ils ont trouvé comme réponse. Les réponses 24 cm^2 et 24 cm sont proposées puis notées au tableau.

Le CE, qui avait vu une réponse de 15 lors du travail individuel, demande à l'élève, Paul, sa réponse. Celui-ci dit toutefois s'être trompé. Un autre élève mentionne alors avoir obtenu 16 cm, et un autre dit obtenir 256 cm. Le CE demande aux élèves s'ils ont d'autres réponses? Une élève dit 24 cm, mais celle-ci était déjà inscrite au tableau.

Le CE dit être intrigué et demande à Paul ce qui ne fonctionnait pas avec le 15. L'élève dit s'être trompé. Le CE, désirant en savoir davantage demande d'autres explications à Paul, mais celui-ci dit ne pas avoir compté assez de carrés. Le CE lui indique avoir vu un rectangle de 5 par 2,5 dans son cahier. L'élève mentionne que cela ne fonctionnait pas, car il n'avait pas compté suffisamment de carrés.

Un autre élève, Zack, mentionne s'être trompé dans la réponse qu'il a donnée plutôt. Il demande de changer le 24 cm^2 par 24 cm. Le CE lui indique qu'ils y reviendront plus tard, puis demande à Carl, qui a proposé 16, une réponse près du 15, d'expliquer sa réponse. Carl vient au tableau et explique qu'il a divisé en 2 le 36. Il écrit au tableau 2 ÷ 36, et indique que cela donne 16 cm. Le CE lui demande d'expliquer la division par 2. L'élève explique alors que c'est le petit 2, dans 32 cm^2 qui lui a indiqué de diviser en deux. Le CE revient sur l'écriture de l'élève qu'il propose de modifier. Le tableau ressemble à ceci :

$$32 \div 2 = 16$$
$$2 \div 32 \neq 16 \text{ cm}$$

Le CE explique la commutativité sur les opérations à partir de quelques exemples qu'il note au tableau :

$$3+4=4+3$$
$$2 \times 7 = 7 \times 2$$
$$1518 \times 31{,}7$$
$$7-2$$

À ce moment, le CE mentionne que Carl soulève une idée importante, et demande ce que veut dire le 2 de cm^2 et pourquoi Zack, lui, voulait l'enlever de sa réponse.

Une élève indique qu'il s'agit d'un carré. Zack affirme ensuite que 32cm^2 c'est l'aire et que le petit 2 signifie que c'est l'aire. Le CE insiste alors pour expliquer davantage et leur demande « qu'est-ce qui fait que ça veut dire l'aire? ».

Des explications sont proposées par différents élèves qui amènent les idées de petits carrés, d'aire et de volume :

Charlie : Ce sont des petits carrés dans des carrés ou dans des rectangles.

CE : Ok. L'aire c'est les petits carrés dans les carrés ou dans les rectangles.

Dave : Il y en a plusieurs sortes. Il y a le petit 2 qui signifie l'aire et le 3 qui signifie le volume.

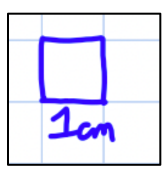
CE : Ce que tu nous dis c'est que si on avait 32 cm^3, ce serait un volume. Il faudrait essayer de comprendre pourquoi.

Dave : Le cube, c'est un volume. C'est une forme en 3D.

Le CE repose à nouveau sa question en leur demandant pourquoi le petit 2 signifie que c'est l'aire.

Zack dit que « ça veut seulement dire que c'est l'aire, qu'il calcule une aire ». Le CE reprend alors l'explication de Charlie concernant le fait que ce sont des petits carrés. Zack précise que ce sont des carrés-unités. Le CE lui demande d'en dire plus à ce sujet. Zack indique que « le petit carré ressemble à une unité dans les blocs d'unités ».

Le CE demande au groupe ce qu'il doit faire pour avoir 32 cm^2 ou 32 petits carrés. Zack explique qu'il doit mettre 32 petits carrés-unités, ce qui est validé par d'autres élèves. Le CE trace au tableau un petit carré de 1 cm par 1 cm.



Le CE explique qu'ils auraient alors 32 petits carrés comme ceux-ci. Il propose ensuite de regarder la réponse de 256 de Charlie.

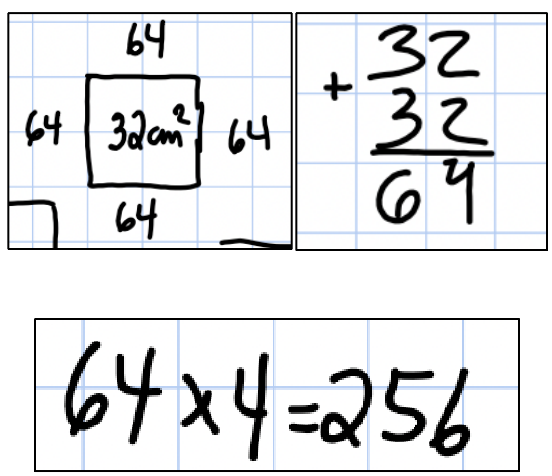
Charlie vient au tableau pour expliquer sa stratégie en proposant d'abord de faire un carré de 32 cm^2 :

> Charlie : J'ai pris le 32 cm^2 qui est l'aire.
>
> CE : L'aire c'est la surface, c'est ce qu'on couvre, comme on en a discuté l'autre jour.

Charlie trace alors un carré au tableau et inscrit 32 cm^2 à l'intérieur. Il poursuit ensuite son explication en indiquant avoir doublé le 32 pour obtenir 64. Il multiplie ensuite le 64 par 4, puisque c'est un carré. Le carré est alors contesté par Zack qui indique que la forme doit être un rectangle :

> Charlie : Le problème dit de trouver le périmètre, mais qu'un côté c'est le double de l'autre. Alors, j'ai fait 32 + 32 = 64. Après, j'ai fait 64 x 4, parce que c'est un carré.
>
> Zack : Ce n'est pas un carré, c'est un rectangle.
>
> CE : Ce que Charlie a fait c'est qu'il a additionné les 32 parce que le problème disait…
>
> Charlie : C'est parce qu'il faut trouver le double pour un côté.
>
> CE : Ok. Et comme il y a 4 côtés dans un rectangle, tu as multiplié par 4, c'est ça?
>
> Charlie : Oui.

Les traces laissées au tableau sont celles-ci :



Le CE demande aux autres élèves ce qu'ils pensent de cette stratégie. Zack reprend en indiquant que 32 carrés-unités ne peuvent pas former un carré, et la discussion se poursuit à savoir si un carré est aussi un rectangle :

> Zack : Bien, ça peut qu'il ait réussi à rentrer 32 carré-unités dans un carré, mais c'est un rectangle. Il ne peut pas multiplier par 4, parce que les côtés ne sont pas égaux.
>
> Charlie : Ce n'est pas écrit dans le problème qu'il faut trouver vraiment un rectangle. Tout ce qu'il faut c'est avoir 32 carrés-unités dedans.
>
> CE : [Il reprend les arguments avancés.]
>
> Zack : Ça ne marche pas…Bien je n'ai pas été capable de faire entrer 32 cm^2 dans un carré.
>
> CE : Ce que Zack tu dis c'est qu'un rectangle pourrait avoir deux côtés qui ne sont pas les mêmes.
>
> Zack : Il a 2 côtés isométriques, mais pas les 4.
>
> CE : [S'adressant à tous.] Est-ce que le carré est aussi un rectangle?

À cette question, des « oui » et des « non » se font entendre. Charlie ajoute que le carré n'est pas un rectangle, mais que le rectangle est toutefois un carré. Le CE demande à Louis ce qu'il en pense, mais ce dernier affirme ne pas savoir. Il demande ensuite à Charlie pourquoi il dit qu'un rectangle c'est un carré. Charlie indique que le rectangle a 4 côtés ce qui mène à une discussion sur les caractéristiques des carrés et des rectangles :

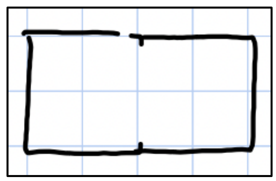
> Charlie : Parce que le rectangle a 4 côtés.
>
> CE : Les autres? Vous en pensez quoi?
>
> Louis : Le carré a 4 côtés égaux, mais le rectangle en a juste 2.
>
> Julie : Oui, c'est ça. Le carré a 4 côtés égaux, et le rectangle juste 2.
>
> Valérie : Le rectangle a toutes les capacités d'un carré, mais pas sa grandeur. Le carré ne ressemble pas à un rectangle.
>
> Zack : Ils sont dans la famille des quadrilatères, mais ils n'ont pas la même forme.

CE : Peux-tu expliquer c'est quoi la famille des quadrilatères?

Zack : C'est toutes les formes qui ont 4 côtés.

Valérie : Dans le fond, le rectangle et le carré c'est un peu la même chose, mais ils n'ont pas la même grandeur.

Valérie demande au CE de dessiner un carré de 32 cm de côté et d'en dessiner un autre pareil collé à côté. Le CE dessine au tableau deux carrés collés. Valérie demande ensuite d'effacer la ligne au centre, et ajoute qu'il s'agit maintenant d'un rectangle. Le tableau ressemble à ceci :



Le CE demande si cela veut dire qu'un rectangle est toujours fait de deux carrés. Zack dit que « non » et précise que dans cette forme-là, le carré est la moitié du rectangle, mais que ce n'est pas toujours le cas. Il demande au CE de dessiner un rectangle beaucoup plus long, et affirme que s'il le coupe en deux moitiés, cela ne donnera pas un carré avec 4 côtés égaux. Zack insiste sur le fait que la partie de droite n'a pas 4 côtés égaux comme un carré et ajoute qu'un carré a nécessairement 4 côtés isométriques. Le CE reprend les explications et demande aux élèves si, finalement, le carré est un rectangle ou non.

Un élève dit que « non », et affirme qu'un rectangle est composé de plusieurs carrés. La discussion sur les caractéristiques des carrés et des rectangles se poursuit :

Mégane : Le rectangle c'est un carré, parce qu'il a 2 paires de côtés parallèles comme le carré et deux paires de côtés isométriques.

CE : [Au tableau, il montre les deux pairs de côtés isométriques.]

Mégane : Le carré, lui, n'est pas un rectangle… Je ne sais pas comment l'expliquer plus.

Zack : Le carré n'a pas juste 2 pairs de côtés isométriques, il a 4 côtés isométriques.

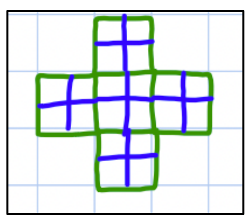
CE : [Il reprend les explications données puis revient sur les propos de Valérie.] Ce que Valérie dit, c'est qu'ils ont la même chose, mais …

Valérie : … mais pas la même forme.

CE : Ok. Le carré n'est donc pas un rectangle, parce qu'il a 4 côtés isométriques et non seulement isométriques 2 à 2.

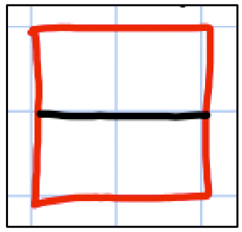
Charlie vient au tableau et découpe des carrés à même un rectangle qui est déjà dessiné au tableau. Il affirme alors que le rectangle est composé de plusieurs carrés tout comme le carré est composé de plusieurs rectangles. Le CE reprend les explications de Charlie et ajoute que bien qu'il arrive à le faire, qu'il n'est pas certain que cela fonctionne toujours.

Un autre élève valide la proposition de Charlie en prenant appui sur une autre séance où, dans une croix, Maude avait découpé plusieurs morceaux. Le CE redessine alors la croix au tableau et refait le découpage qui avait été fait par Maude lors de cette autre séance, comme ceci :



Le CE ajoute que ce que Charlie dit, c'est que le rectangle pourrait toujours être recoupé en carrés. Il demande aux élèves si le carré peut toujours être découpé en deux rectangles.

Les élèves disent que « oui ». Une élève explique qu'étant donné que tous les côtés sont isométriques, s'il est coupé au centre cela donnera nécessairement deux rectangles. Le CE le trace au tableau :

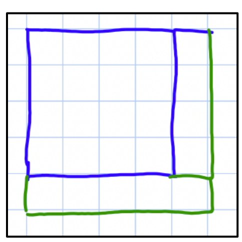


Il demande ensuite si tout ceci répond à la question de savoir si un rectangle est un carré et si un carré est un rectangle. Les élèves disent que « non ». Le CE demande à deux élèves ce qu'elles en pensent, mais celles-ci disent ne pas être certaines.

Jade indique qu'un rectangle est comme un carré, et demande au CE de dessiner une largeur de 4 au tableau. Elle précise ensuite que pour que le rectangle soit composé de carrés, ses côtés doivent être des nombres pairs :

> Jade : Si on veut faire un rectangle et qu'on veut qu'il y ait des carrés dedans, il faut toujours que les côtés soient un nombre pair.

Le CE, un peu surpris, lui demande ce qu'il fait avec le dessin. Elle lui demande de mettre 4 en longueur. Elle dit qu'il y aura 4 carrés. Un élève invalide alors en disant qu'un nombre impair fonctionne aussi. Le CE reprend cette idée et allonge le carré au tableau. Il indique alors qu'elle pourra toujours découper en carrés à partir du quadrillage en dessous. Ce dessin est fait au tableau :

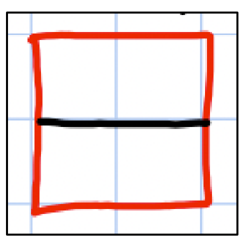


L'élève insiste toutefois que le nombre doit être pair, ce que d'autres réfutent immédiatement. Le CE reprend la justification donnée de passer d'une largeur de 4 à une largeur de 5. Le CE ajoute qu'il pourrait encore continuer, mais qu'avec le quadrillé, il y aurait toujours un découpage en carrés qui serait possible.

D’autres élèves valident cette explication du CE. Ce dernier leur demande si cela règle finalement leur question du rectangle est du carré.

Un élève dit alors que « oui », car un rectangle ce n’est pas un carré et un carré ce n’est pas un rectangle. Le CE demande à Valérie si elle est d’accord et précise qu’elle semble dire le contraire, c’est-à-dire que le rectangle est un carré, mais le carré ce n’est pas un rectangle. Zack interrompt toutefois en disant qu’ils peuvent les découper l’un dans l’autre, mais que le carré n’est pas un rectangle parce que chacun a sa forme :

> Zack : On peut les découper en petites formes qui vont donner l’autre, mais ce n’est pas un rectangle parce que chacun a sa forme.
>
> CE : Ce que tu nous dis c’est qu’on peut passer de l’un à l’autre en faisant un découpage, mais que chacun est différent.
>
> Zack : C’est comme le carré rouge, on peut le découper en deux rectangles, mais en tout c’est quand même un carré. Il a seulement été coupé. C’est comme s’il avait des morceaux deux fois plus petits. [Zack fait référence à ce carré, dessiné au tableau précédemment] :



Tamie ajoute que c’est comme un carré, mais qu’on l’élargit. Le CE prend alors un carré qui est dessiné au tableau et fait comme s’il l’allongeait. Il demande aux élèves s’il demeure un carré. Tamie répond que ça fait un rectangle et précise que le rectangle est même le double du carré initial. Le CE reprend en disant que par contre s’il l’allonge de 1 seulement, cela ne serait plus le double. Tamie acquiesce. Zack ajoute que s’il l’allonge de 1, il n’est toutefois plus possible de le couper en deux pour que cela forme deux carrés. Le CE reprend le tout en disant que certains disent que le carré c’est un rectangle, mais que le rectangle ce n’est pas un carré. Zack ajoute que les deux sont différents, dans le fond, parce qu’ils n’ont pas la même forme. Le CE ajoute que certains disent aussi que le rectangle est un carré et que le carré est un rectangle. Un élève ajoute alors qu’ils sont dans la même famille, mais qu’ils ne sont pas pareils.

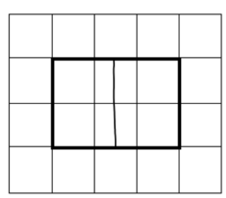
À ce moment, le CE dessine un carré au tableau, mais dit qu'il dessine un rectangle, et demande aux élèves s'il a menti. On entend plusieurs « oui ». Zack dit que c'est un carré, car il a dessiné un 3 par 3. Le CE synthétise en disant qu'ils ont un questionnement sur le carré et le rectangle et qu'ils ont des arguments qui sont bons. Il souligne que les élèves mentionnent qu'ils n'ont pas la même forme. Zack précise que bien qu'ils n'aient pas la même forme, ils peuvent toujours la retrouver dedans. Le CE indique que c'est ce qui est intéressant, puisqu'en fonction de ce qui est dessiné, il peut s'organiser pour en retrouver d'autres. Zack propose alors que si le périmètre du rectangle est un nombre impair, le rectangle ne pourrait pas être coupé en deux de sorte à former deux carrés :

> Zack : Si le périmètre du rectangle est un nombre impair, on ne peut pas le couper en deux pour que ça fasse un carré, mais si c'est un nombre pair, on peut le couper en deux pour que cela fasse un carré.
>
> Charlie : Même si c'est un nombre impair, tu peux le couper en…
>
> Zack : Non…. Peux-tu tracer un rectangle de 3 par 2?

Le CE exécute sa demande.

> Zack : Si tu le coupes au milieu, ça donne deux carrés.

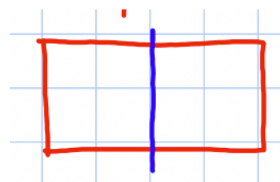
Le CE le reprend en lui disant que chacun ne représente pas deux carrés. Le dessin au tableau est reproduit ici :



Zack valide ce que le CE dit et poursuit en disant que ce n'est pas deux carrés, car la ligne du centre est plus longue que les deux autres. Le CE montre les petits côtés de chacun des rectangles formés par la coupure. L'élève poursuit en disant que le petit côté est plus petit que la hauteur. Le CE acquiesce et reprend les explications données. Il demande ensuite à Jade si elle est d'accord. Jade indique son désaccord en mentionne que les deux moitiés mises ensemble donnent un carré :

Jade : Non, parce que si tu prends les deux moitiés et que tu les mets ensemble, ça donne un carré.

Zack lui demande d'attendre et indique au CE de faire un rectangle de 4 par 2. Le CE le trace au tableau. Zack poursuit en disant que s'il le coupe au centre, il aura alors deux carrés de 2 par 2. Au tableau, se trouve cette figure :



Zack : Ça donne deux carrés de 2 par 2.

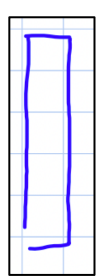
Jade : Si tu prends les deux moitiés de l'autre dessin, et que tu les colles ensemble, ça fait quand même un carré.

Zack : Non, parce que la figure est un rectangle.

CE : [Il montre la figure de 3 par 2.]

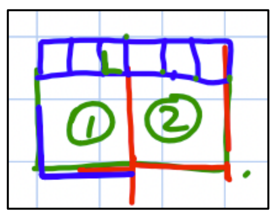
Jade insiste encore sur le fait que c'est un carré. Le CE reprend en disant que ce que Zack dit c'est que la figure est de 3 par 2, et donc que les deux morceaux ensemble ne peuvent pas former un carré.

Une autre élève qui a la main levée demande d'essayer un exemple qui a un nombre impair pour voir si cela fonctionne. Le CE trace un rectangle de 1 par 5, comme ceci :



L'élève constate alors que la séparation donne deux rectangles. Ce que confirme Zack puis le CE. Ce dernier ajoute que Charlie pourrait sans doute le couper en 5 carrés. Un élève ajoute que « oui, avec les quadrillés ».

Charlie vient ensuite au tableau et à l'intérieur du rectangle de 3 par 2, il trace une ligne horizontale qui sépare la première rangée de quadrillée en deux. Il indique qu'il essaie de faire des carrés. Le CE reprend qu'il essaie de faire deux carrés de $1\frac{1}{2}$ par $1\frac{1}{2}$. L'élève acquiesce et explique qu'en haut il reste deux rectangles. Zack soutient toutefois qu'il ne l'a pas coupé en deux carrés, mais qu'il découpe la figure en plusieurs morceaux. Charlie poursuit en voyant qu'il n'a qu'à couper le petit rectangle bleu de chaque côté en trois parties pour avoir uniquement des carrés. Il précise que ce sont des carrés mesurant $\frac{1}{2}$. Le rectangle de 3 par 2 ainsi découpé en carrés est celui-ci :



Le CE reprend l'explication de tous les carrés de ce découpage de Charlie :

> CE : En 1 et en 2, on a des carrés de $1\frac{1}{2}$ par $1\frac{1}{2}$. Ensuite, la bande de $\frac{1}{2}$ par 3, il l'a découpé en $\frac{1}{2}$.
>
> Zack : C'est des tiers.
>
> CE : Chaque bout de la bande est coupé en trois.
>
> Zack : La bande complète est coupée en sixièmes.
>
> CE : Ça forme des petits carrés de $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{2}$.

À ce moment, d'autres lèvent la main pour proposer d'autres carrés et d'autres figures. Toutefois, il reste seulement 2 minutes à la séance et le CE leur demande de revenir à la réponse de 24 du départ.

Martine et Clara viennent expliquer leur façon d'arriver à 24, à partir du rectangle de 8 par 4 qu'elle ont tracé :

> Clara : Il y a 32 carrés à l'intérieur. [Elle dessine un rectangle de 4 par 8].
>
> CE : Est-ce que c'était votre façon de retrouver les 32 petits carrés?
>
> Martine : [Elle efface le rectangle tracé par Clara.] Je l'ai fait de l'autre côté. Mais, mais…8 x 4 ou 4 x 8, ça donne 32.
>
> CE : Où vous avez pris ça?
>
> Martine : On l'a calculé mentalement.
>
> CE : Ok. Vous auriez pu prendre 1 x 32 ou encore 2 x 16, mais vous avez pris 8 et 4, ce qui est aussi un bon choix.
>
> Martine : [Elle trace son rectangle.] On a tout de suite pensé faire le 4 x 8. Ça donne 32 en tout. Pour le périmètre on a obtenu 24 pour pouvoir arriver à 32 cm^2.

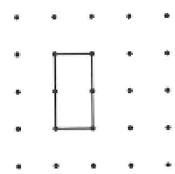
Martine et Clara poursuivent que les enseignantes leur ont mentionné qu'elles avaient une petite erreur. Elles disent toutefois l'avoir trouvée, car elles avaient écrit 24 cm^2 plutôt que 24 cm. Le CE revient alors sur l'idée de longueur qui est associée au périmètre et qui est mesurée en centimètres, dans ce cas. Les élèves disent que le périmètre donne 24 cm. La cloche sonne, mais un élève demande si la réponse est bonne. Le CE reprend alors les éléments de la tâche initiale et de la solution proposée en guise de justification et de validation. La séance se termine ainsi.

ANNEXE E

LA SÉANCE SUR LA TÂCHE SUR LA COMPLÉTION D'UN TOUT DANS LA CLASSE DE 6^{E} ANNÉE

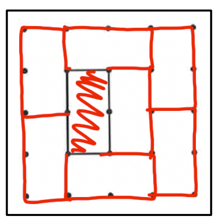
La tâche sur la complétion d'un tout proposée à la classe de 6e année à résoudre est la suivante :

Le rectangle suivant représente $\frac{2}{5}$ d'un tout. Quel est ce tout?



Cette tâche peut être qualifiée de routinière, car les élèves avaient déjà abordé cette notion antérieurement et, dès son énoncé, ils savaient comment s'y prendre pour la résoudre. Cette tâche routinière a donné lieu à une investigation mathématique d'une quarantaine de minutes. Lors de cette séance, les élèves n'ont eu qu'une minute pour réfléchir (mode calcul mental) à une solution, puis le CE leur a aussitôt demandé de partager leurs idées et stratégies.

Une première élève, Jade, vient au tableau et dessine 7 autres rectangles de même dimension que celui initial, comme ceci :



Le CE lui demande d'expliquer sa réponse et compte les 8 rectangles. Cette dernière dit ne pas pouvoir l'expliquer. Le CE interpelle les autres élèves à savoir si d'autres ont obtenu la même réponse et pourraient l'expliquer. Un élève explique que le rectangle initial se retrouve partout. Le CE reprend l'explication en disant qu'il y a 8 fois des petits rectangles identiques à celui du départ qui sont dessinés dans le grand carré (le plan pointé). Il demande à ceux qui ont utilisé cette stratégie d'expliquer comment ils y arrivent.

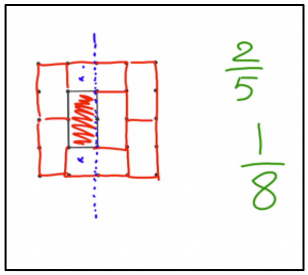
Amélie, une autre élève, dit voir obtenue la même réponse, mais soutient qu'elle ne peut pas expliquer en quoi cela correspond à $\frac{2}{5}$ du tout. Benjamin affirme ne pas être certain que la réponse soit bonne. Le CE demande alors à ceux qui sont certains de la réponse de lever la main. Seulement quelques mains se lèvent. Il sollicite Maude qui a la main levée pour expliquer son raisonnement. Maude affirme ne pas savoir comment l'expliquer, mais qu'elle l'aurait fait comme cela. Patrick dit que lui aussi l'aurait fait comme cela, mais qu'il ne peut pas l'expliquer lui non plus. Ces élèves qui disent être en accord avec la proposition ne peuvent toutefois pas expliquer en quoi elle fonctionne. Le CE demande si d'autres peuvent donner des explications supplémentaires. Un petit silence se fait sentir.

Jade dit alors que la réponse serait $\frac{1}{8}$ sinon, proposant une alternative à sa réponse initiale. Le CE reprend l'idée du $\frac{1}{8}$ et demande d'attendre un peu. Il leur demande d'abord comment écrire $\frac{2}{5}$. Un élève répond que c'est 2 sur 5. À ce moment, Tomas offre une justification à la nouvelle réponse proposée par Jade :

> Tomas : La raison pourquoi Jade dit que c'est $\frac{1}{8}$, c'est parce qu'il y en a 1 de dessiné sur un total de 8. C'est plus logique que ça fasse $\frac{1}{8}$.

Le CE reprend l'explication de Tomas et de Jade, en disant que c'est $\frac{2}{5}$, mais qu'on pourrait aussi voir que c'est $\frac{1}{8}$. Il montre ensuite chacune des 8 parties sur la représentation au tableau. Le chercheur dit qu'il existe des palettes de chocolat qui sont carrées et que les morceaux sont pareils à ce qui est dessiné. Il pourrait découper la palette de chocolat en 8 morceaux et qu'ils auraient pris 1 morceau sur 8.

Jade reprend la parole et propose de mettre une ligne au centre de son dessin, un peu comme un axe de symétrie. Elle explique qu'il y a ainsi 2 parties de coloriées et 5 morceaux de chaque côté. Au tableau, les traces suivantes sont laissées :



Le CE reprend l'explication des morceaux à la suite du traçage de cette ligne centrale :

> CE : Si on trace une ligne au milieu, on se retrouve avec 5 morceaux. 1, 2, 3, 4, 5 (il les montre sur la figure) et aussi 5 morceaux à droite.

Mathieu conteste cette proposition de Jade en disant qu'il y aurait 4 morceaux :

> Mathieu : Si un morceau c'est deux carrés collés, ça veut dire que… où on a tranché les deux morceaux du haut et du bas en deux. Dans le fond c'est comme si on avait juste 4 parties.

Le CE reprend et reformule les idées de Mathieu. Mathieu poursuit en précisant que deux morceaux mis ensemble forment 1 morceau :

> Mathieu : Deux morceaux mis ensemble cela fait 1, pour un total de 4 morceaux par côté. Il y aurait donc 1, 2, 3, et ces deux-là 4. Il y aurait 4 de l'autre côté aussi.

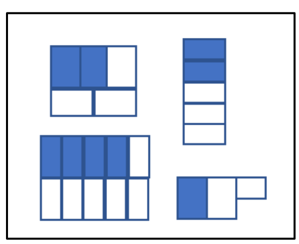
Le CE propose de revenir sur ce que Jade dit, soit que cela pourrait aussi être $\frac{1}{8}$. Il retrace les 8 morceaux sur un nouveau plan pointé et reprend l'explication du $\frac{1}{8}$. Il demande le dessin peut à la fois représenter $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{8}$? On entend quelques « non ». Le CE demande pourquoi cela ne fonctionne pas.

Benjamin répond que $\frac{1}{8}$ n'est pas une fraction équivalente à $\frac{2}{5}$. Le CE lui demande comment il le sait. L'élève réplique qu'il ne peut pas multiplier ou diviser pour arriver à l'autre. Le CE reprend l'idée de ne pas pouvoir passer $\frac{2}{5}$ à $\frac{1}{8}$ avec une multiplication. Puis, il prend des blocs pour expliquer et montrer que $\frac{1}{8}$ c'est plus petit que $\frac{2}{5}$ dans un même tout. Le CE demande alors s'ils ont autre chose à dire sur ceci.

Carl dit qu'il ne voit pas comment le $\frac{2}{5}$ pourrait fonctionner, car il ne peut pas arriver à des cinquièmes avec la proposition de Jade. Il dit qu'il tente depuis tantôt de trouver comment $\frac{2}{5}$ pourrait fonctionner, mais qu'il n'y arrive pas.

Le CE relance à ce moment les élèves à la tâche en reprenant le même petit rectangle initial, mais en enlevant le plan pointé derrière, et en leur demandant de compléter le tout si le rectangle vaut $\frac{2}{5}$. Les élèves prennent environ 5 minutes, seuls ou en petits groupes, pour dessiner le tout.

Au retour en groupe, le CE rapporte au tableau différentes réponses qu'il a vu sur les feuilles des élèves lors de leur travail individuel ou en petites équipes. Il fait alors les quatre dessins suivants :



Le CE demande aux élèves si l'un de ces dessins ne représente pas $\frac{2}{5}$. Jordan mentionne que  ne fonctionne pas. Le CE demande si d'autres sont d'accord avec lui. Quelques élèves lèvent la main.

Le CE demande d'expliquer pourquoi ce dessin ne représente pas $\frac{2}{5}$ à son avis. Damien explique avoir fait cette stratégie, mais qu'au milieu des deux rectangles il a rajouté une petite ligne qui les sépare en deux. Le CE rajoute la ligne sur le dessin et demande combien ont fait une proposition similaire. Plusieurs mains se lèvent. Le CE reprend les explications à savoir que Damien a fait une ligne ici et qu'ensuite, il a compté les 5 morceaux. Il dit alors qu'ils ont 2 morceaux sur 5 en tout.

À ce moment, Julie affirme que cela ne change rien avec ou sans la ligne, puisque cela représente la même chose. Le CE demande des explications. Julie indique ne pas savoir l'expliquer, mais que c'est la même chose :

> CE : Pourquoi tu dis ça?
>
> Julie: Il y a déjà un carré. Dans le fond, ça représente la même chose, parce que…. Je ne sais pas comment l'expliquer, mais ça représente $\frac{2}{5}$ pareil. C'est clair pour moi, mais je ne sais pas comment l'expliquer.

Maxime vient au tableau et vérifie que le total donne bien $\frac{5}{5}$:

> Maxime : Ça, c'est 2/5. On a mis deux rectangles de $\frac{2}{5}$, puis là, ça donne $\frac{4}{5}$. Puis, la moitié d'un rectangle, bien la moitié de 2, c'est 1. 4 + 1 ça donne 5.

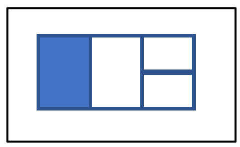
Le CE reformule les propos de Maxime. Julie ajoute ensuite, à nouveau, que la ligne n'importe pas. Jordan demande pour venir au tableau afin d'expliquer pourquoi il n'est pas d'accord avec la proposition. À partir du dessin original, il explique que le morceau n'est pas coupé et que la figure ne représente pas $\frac{2}{5}$:

> Jordan : Ça fait 1 parce qu'on ne l'a pas coupé, plus la demie de 1, parce que si on le coupe là on va en avoir 5. Mais, ça ne donnera quand même pas $\frac{2}{5}$.

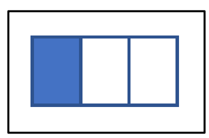
Le CE reprend sa proposition en disant que si la figure est coupée, cela fonctionne, mais que si on regarde la figure telle qu'elle il y aurait 2 morceaux et la moitié d'un morceau et non $\frac{2}{5}$:

CE : Ce que tu nous dis c'est que si on le coupe ça fonctionne, parce qu'on aurait 1, 2, 3, 4, 5. Donc, si on coupe en 2, ça marche. Mais, ce que tu nous dis c'est qu'en fait, si on regarde ça au complet, ça fait 1 morceau, 2 morceaux et la moitié d'un morceau. Ça, ça ne serait pas $\frac{2}{5}$. Mais, ça serait quoi?

Le CE demande aux élèves ce que ça serait si ce n'est pas $\frac{2}{5}$. Jordan dit que c'est dur à expliquer. Le CE demande si ça pourrait être $\frac{1}{3}$. Un élève affirme que cela serait alors deux tiers et une demie. Jordan affirme que s'ils veulent que cela fonctionne, il faudrait ajouter un carré pour obtenir $\frac{1}{3}$. Il ajoute le carré sur le dessin, comme ceci :



Le CE demande ensuite d'expliquer ce que cela donne s'il ajoute un carré. L'élève répond $\frac{1}{3}$. Le CE lui demande d'expliquer en quoi cela fait $\frac{1}{3}$. Jordan montre au tableau les trois morceaux en effaçant la ligne entre les carrés, comme ceci :



Le CE reprend l'explication en l'illustrant à partir de blocs. Il fait ensuite une petite ligne dans un seul des morceaux et demande si la figure représente maintenant $\frac{1}{4}$. Jordan invalide la proposition :

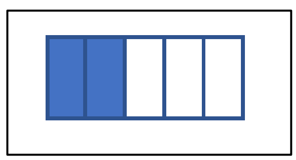
Jordan : Non parce que si on prend encore notre tiers, ça nous donnerait $\frac{1}{3}$. Juste ce morceau-là, si c'est 1, ça vaut $\frac{1}{3}$. Ici, c'est une demie (le morceau séparé en deux), mais que si on les met ensemble, là, ça va donner 1.

Le CE reprend ceci en expliquant que ce n'est pas parce qu'il y a quatre morceaux que ça donne nécessairement des quarts, précisant que les morceaux doivent être identiques. Il reprend ensuite l'explication de Jordan à savoir que si le morceau initial vaut $\frac{1}{3}$ alors, il y aurait un autre morceau de $\frac{1}{3}$, puis un morceau valant la moitié de $\frac{1}{3}$. Le CE poursuit en reprenant l'explication précédente de Maxime qui avait calculé le $\frac{5}{5}$. Maxime complète en précisant que l'unité de référence correspond à $\frac{2}{5}$:

> CE: Maxime nous dit que le dessin vaut $\frac{5}{5}$, parce qu'ici on a $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{5}$ puis la moitié d'un $\frac{2}{5}$, donc tu nous as dit $\frac{1}{5}$.
>
> Maxime : Oui, tantôt Jordan a dit qu'un rectangle c'est 1 [référant au $\frac{1}{3}$], mais en haut, on a dit que l'unité de mesure c'est 2 [référant au $\frac{2}{5}$].

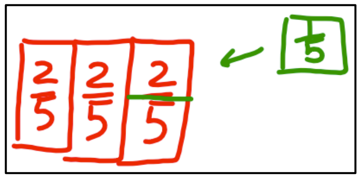
Le CE demande à Jordan, qui contestait au départ cette réponse, s'il est maintenant d'accord qu'elle fonctionne. Ce dernier dit que oui.

James mentionne que sur cet angle, il ne trouve pas que le dessin ressemble à $\frac{2}{5}$. Il vient au tableau pour plutôt proposer son dessin :

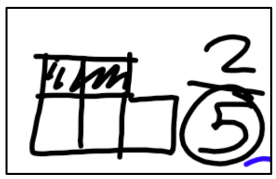


James explique que la première partie représente le $\frac{2}{5}$, qu'on l'a une autre fois, pour avoir $\frac{4}{5}$ et que le cinquième petit rectangle correspond à $\frac{1}{5}$. Le CE reprend l'explication de James en justifiant le $\frac{1}{5}$ qui vaut la moitié d'une bande. Il réexplique ensuite les deux stratégies qui proposent deux manières de diviser une bande de $\frac{2}{5}$, à la verticale ou à l'horizontale.

Deux élèves qui argumentaient entre elles sont alors invitées à partager leur mésentente. Tania explique que : « une bande ça fait deux, avec une autre ça fait 3, mais si on en fait une à moitié, ça fait 5. ». Le CE demande à quel dessin elle fait référence. Celle-ci dit qu'il s'agit de la proposition de Zoé. Elle réexplique alors qu'une bande fait 2, que deux bandes donnent 4 et que si elle en ajoute une autre cela donne 6, il faut donc la couper en deux pour avoir 5. Le CE reprend l'explication et propose la représentation suivante :



Ariane veut proposer autre chose, mais le CE lui demande d'attendre. Il demande au groupe ce qu'est le tout. Ariane dit que c'est ce qu'elle veut dire. Elle vient au tableau et fait le dessin suivant [la cloche sonne, mais la séance se poursuit] :



Ariane affirme que le tout est le dénominateur. Elle indique qu'il y a 2 parties sur 5 de coloriées. Le CE reprend la justification proposée par Ariane et la séance se termine sur ceci.

RÉFÉRENCES

Agre, G. P. (1982). The concept of problem. *Educational Studies, 13*(2), 121-142.

Arsac, G., Germain, G., et Mante, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème.* Lyon : IREM de Lyon.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176.

Barabé, G. et Proulx. J. (2015). *Problem Posing : A Review of Sort.* Actes du colloque de la 37e Conférence de North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education. Michigan, Etats-Unis : PME-NA.

Bauersfeld, H. (1995). The structuring of the structures: development and function of mathematizing as a social practice. Dans L. Steffe et J. Gale (dir.). *Constructivism in education* (p. 137-158). New-York: Routledge.

Beghetto, R. A. (2017). Lesson unplanning: toward transforming routine tasks into non-routine problems. *ZDM Mathematics Education, 49*, 987-993.

Beghetto R.A. (2020) Uncertainty. In: Glăveanu V. (dir.) The Palgrave Encyclopedia of the Possible. Palgrave Macmillan, Cham.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics, 17*(2), 124-141.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving Mathematics Instruction: A focus on Errors*. Norwood, NJ: Ablex Publishing.

Bowers, J. S. et Nickerson, S. (2001). Identifying cyclic patterns of interaction to study individual and collective learning. *Mathematical Thinking and Learning, 3*(1), 1-28.

Brousseau, G. (1989). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège. *Petit x, 21*, 47-68.

Brousseau, G., et Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : IREM de Bordeaux.

Brown, S.I., et Walter, M.I. (2005). *The Art of Problem Posing.* (3e éd.). New-York: Routledge.

Brun, J. (1997). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes*. *ERMEL CM1.* Paris : Hatier.

Byers, V. et Erlwanger, S. (1984). Content and form in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 259-275.

Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical development: The case of statistical data analysis. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(1), 5-43.

Cobb, P., Perlwitz, M., et Underwood, D. (1994). Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des sciences de l'éducation, 20* (1), 41-61.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E. et McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: an interactional analysis. *American Educational Research Journal, 29*(3), 573-604.

Cobb, O., Gravemeijer, K., Yackel, E., McClain, K., et Whitenack, J. (1999). Mathematizing and symbolizing: The emergence of chains of signification in one first-grade classroom. Dans D. Kirshner et J. A. Whitson (dir.), *Situated Cognition. Social, Semiotic and psychological perspectives* (p. 151- 233). New-Jersey: Lawrence Erlbaum Associates

Davis, P. J. et R. Hersh. (1981). *The mathematical experience*. Boston: Birkhäuser.

Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Reperes-IREM, 15*, 37-61.

Dowker, A., Sarkar, A., et Yen Looi, C. (2016). Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years? *Frontiers in Psychology, 7*(508), 1-16.

English, L., et Gainsbourg, J. (2015). Problem solving in a 21st century mathematics curriculum. Dans L. English et D. Kirshner (dir.), *Handbook of international research in mathematics education* (p. 313-335). New-York: Routledge.

Fortin, M-F. (2010). *Fondements et étapes du processus de recherche. Méthodes quantitatives et qualitatives.* (2e éd.). Montréal : Chenelière Éducation.

Francisco, J. M. (2013). Learning in collaborative settings: students building on each other’s ideas to promote their mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 417-438.

Gavaz, H. O., Yazgan, Y. et Arslan, Ç. (2021). Non-routine problem solving strategy flexibility : A quasi-experimental study. *Journal of Pedagogical Research, 5*(3), 40-54.

Grenier, D. et Payan, C. (2002). Situations de recherche en « classe ». Essai de caractérisation et proposition de modélisation. Dans V. Durand-Guerrier et C. Tisseron (p. 189-203). *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques.* France : IREM de Paris.

Guba, E. G., et Lincoln, Y. S. (1982). Epistemological and methodological bases of naturalistic inquiry. *Educational Communication and Technology, 30*(4), 233-252.

Halmos, P. R. (1980). The art of mathematics. *The American Mathematical Monthly, 87*(7), 519-524.

Henningsen, M. et Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5), 524-549.

Hiriart-Urruty, J.-B. (2016). Conjecturez, conjecturez… il en restera toujours quelque chose. *Tangente, 168,* 10-11.

Hoshino, R., Polotskaia, E., et Reid, D. (2016). Problem solving: definitions, role and pedagogy. Dans S. Oesterle, D. Allan et J. Holms (dir.), (p. 151-162). *Actes du colloque annuel du CMESG/CGEDM*. Kingston : Ontario.

Kieren, T. (1995). Mathematics Teaching (In-the-middle): Enactivist view on learning and teaching mathematics. *Communication présentée au Canadian National Mathematics Leadership conference*. Kingston, Ontario: Université Queens.

Kilpatrick, J. (1987). Formulating the problem: Where do good problems come from? Dans A. H. Schoenfeld (dir.), *Cognitive science and mathematics education* (p. 123-147). New-Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.

Krummheuer, G. (1995). The ethnology of argumentation. Dans P. Cobb et H. Bauersfeld (dir.), *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures* (p. 229-269). New-Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lampert, M. (1990a). When the problem is not the question and the solution is not the answer: mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*(1), 29-63.

Lampert, M. (1990b). Connecting inventions with conventions. Dans, L.P. Steffe et T. Wood (dir.). *Transforming children's mathematics education* (p. 253-265). New-Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale University Press.

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères-Irem, 10,* 123-159.

Legrand, M. (2006). Mathématiques, mythe ou réalité, un point de vue éthique sur l'enseignement scientifique. *Repères-Irem, 20*, 91-106.

Levenson, E. (2011). Exploring collective mathematical creativity in elementary school. *The Journal of Creative Behavior, 45*(3), 215-234.

Liljedahl, P. et Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look of the state of the art. *ZDM- Mathematics Education, 53,* 723-735*.*

Lockhart, P. (2009). *Mathematician's Lament. How School Cheats Us Out of Our Most Fascinating and Imaginative Art Form.* New-York: Bellevue Literary Press*.*

Lynch, A. G. et Lockwood, E. (2019). A comparison between mathematician's and student's use of example for conjecturing and proving. *Journal of Mathematical Behavior, 53,* 323-338.

Martin, L., Towers, J. et Pirie, S. (2006). Collective mathematical understanding as improvisation. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(2), 149-183.

Martinez, M. E. (1998). What is problem solving? *The Phi Delta Kappan, 79*(8), 605-609.

Mason, J. (1994). *L'esprit mathématique*. Québec: Modulo Éditeur.

Mason, J. (2019). Evolution of a task domain. *Digital Experience in Mathematics Education, 5,* 145-165.

Maturana, H. et Varela, F. J. (1992). *The tree of knowledge*. Boston, MA: Shambhala.

Megrourèche, C. (2020). L'erreur en classe de mathématiques: Repenser son rôle, explorer son potentiel. Mémoire de maîtrise en mathématiques. UQAM: Montréal.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. Jossey-Bass.

Ministère de l'éducation (1988). *Guide pédagogique. Résolution de problèmes. Orientation générale. Fascicule K*. Québec : Gouvernement du Québec.

Papert, S. (1972). Teaching children to be mathematicians versus teaching about mathematics. *International Journal of Mathematics Education, Sciences and Technology*, *3,* 249-262.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: children, computers, and powerful ideas*. New-York: Basic Books.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. New-York: Doubleday.

Povey, H., et Burton, L., (1999). Learners as authors in the mathematics classroom. Dans L. Burton (dir.), *Learning mathematics: From hierarchies to networks* (p. 232-245). London: Falmer.

Powell, A. B., Francisco, J. M., et Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 405-435.

Proulx, J. (2007). (Enlarging) *Secondary-level mathematics teachers' mathematical knowledge: An investigation of professional development*. Thèse de doctorat. Edmonton: University de l'Alberta.

Proulx, J. (2010). Is "facilitator" the right word? And on what grounds? Some reflections and theorizations. *International Journal on Complexity and Education, 7*(2), 52-65.

Proulx, J. (2013). Mental mathematics, emergence of strategies, and the enactivist theory of cognition. *Educational Studies in Mathematics, 84*, 309-328.

Proulx, J. (2019). *Enseignement des mathématiques par résolution de problèmes : Approche, fondements et illustrations*. Document de travail pour le cours MAT3227. Université du Québec à Montréal. Montréal : Québec. Récupéré de http://profmath.uqam.ca/~jproulx/MAT3227.html

Proulx, J., Lavallée-Lamarche, M.-L., Tremblay, K.-P. (2017). Students' and teachers' mental solving of algebraic equations: From differences to challenges. Dans M. Haspekian et E. Roditi (dir.), *Proceedings of the Congress of European Research on Mathematics Education (CERME 10)* (p. 488-495). Dublin: Irelande.

Proulx. J. et Maheux, J.-F. (2017). From problem solving to problem posing and from strategies to laying down a path in solving: Taking Varela's ideas to mathematics education research. *Constructivist Foundation, 13*(1), 160-190.

Proulx, J. et Savard, A. (2016). Regards sur l'erreur en mathématiques. *Chronique – Fondements et épistémologie de l'activité mathématique.*

Remillard, J. T. et Geist, P. K. (2002). Supporting teachers' professional learning by navigating openings in the curriculum. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 5, 7-34.

Savoie-Zajc, L. (2018). La recherche qualitative/interprétative en éducation. Dans T. Karsenti et L. Savoie-Zajc (dir.), *La recherche en éducation. Étapes et approches.* (p. 171-198). Montréal : Les presses de l'Université de Montréal.

Schoenfeld, A. H. (1983). The wild, wild, wild, wild, wild world of problem solving. (A review of sorts). *For the Learning of Mathematics, 3*(3), 40-46.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: the disasters of "well-taugh" mathematics courses. *Educational Psychologist, 23*(2), 145-166.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. Dans D. Grouws (dir.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 334-370). New York: MacMillan.

Schoenfled, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The mathematics Enthusiast, 10*(1), 9-34.

Schneider, M. (2002). Problèmes, situations-problèmes en mathématiques: un regard pluraliste. *Mathématique et Pédagogie,* 137, 13-48.

Schroeder, T. L., et Lester, F. K. Jr (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. Dans P. R. Trafton (dir.), *New directions for elementary school mathematics, Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 31-42). Reston, VA: NCTM.

Simmt, E. (2000). *Mathematics knowing in action: A fully embodied interpretation*. Thèse de doctorat. Université d'Alberta, Edmonton, Canada.

Simmt, E., Davis, B., Gordon, L., et Towers, J. (2003). Teachers' mathematics: Curious obligations. *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,*Volume 4, 175-182.

Squalli, H. (2014). Rendre la classe de mathématiques un environnement riche où les élèves conjecturent, justifient, expliquent, argumentent, prouvent et démontrent. *Envol, 163,* 40-46.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.) *Pluralité culturelle et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage-* Actes du colloque EMF2015-GT3, p. 346-356.

Stake, R. E. (2005). Qualitative case studies. Dans N. K. Denzin et Y. S. Lincoln (dir.) *The Sage Handbook of qualitative research (3e éd.)* (p. 443-466). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Steffe, L. P. (1991). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications. Dans E. von Glasersfeld (Dir.), *Radical constructivism in mathematics education* (p. 177-194). Boston, MA: Kluwer Academic Press.

Towers, J. et Martin, L. (2015). Enactivism and the study of collectivity. *ZDM Mathematics Education, 47,* 247-256.

Towers, J., Martin, L. et Heater, B. (2013). Teaching and learning mathematics in the collective. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*, 424-433.

Tremblay, M.- A. (1968). *Initiation à la recherche dans les sciences humaines*. Montréal: McGraw-Hill.

Van der Maren, J.-M. (1996). *Méthodes de recherche pour l'éducation*. Montréal : Presses de l'Université de Montréal/De Boeck Université.

Van de Walle, J. A. et Lovin, L. H. (2008). *L'enseignement des mathématiques. L'élève au centre de son apprentissage. Tome 3.* Montréal : ERPI.

Varela, F. J. (1996). *Invitation aux sciences cognitives*. Paris: Éditions du Seuil.

Varela, F. J. (1999). *Writing science. Ethical know-how: Action, wisdom, and cognition*. Stanford: Stanford University Press.

Varela, F. J., Thompson E., et Rosh, E. (1991). *The embodied mind: Cognitive science and human experience*. Cambridge, MA: MIT Press.

Viau, R. (1998). *La motivation en contexte scolaire (2e éd.)*. Bruxelles: Éditions Deboeck.

Wagner, D.R. (2003). We have a problem here: 5 + 20 = 45? *The Mathematics Teacher, 96*(9), 612-616.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification, and argumentation in mathematics classrooms. Dans M. van der Heuvel-Panhuisen (dir.). *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education, 1*, (p. 1-9). Utretch: Hollande.

Yin, R. (2003). *Case study research* (3e ed.). Thousand Oaks. CA: Sage Publications.