

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

STRATÉGIE DE COUVERTURE EN TEMPS DISCRET DANS UN CARNET  
D'ORDRES LIMITES

MÉMOIRE  
PRÉSENTÉ  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR  
SALIOU FOFANA

FÉVRIER 2022

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.04-2020). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

La rédaction d'un mémoire de recherche est l'aboutissement de nombreux défis : le choix du sujet, la capacité à rechercher la bonne information, à résoudre les problèmes, à se plier à l'exercice de l'écriture scientifique et enfin la réussite de la maîtrise. Après plusieurs mois de travail acharné, c'est avec une immense fierté que je présente les résultats de mes travaux de recherche. Mais le chemin menant à cet instant n'a pas été une traversée solitaire. En effet, la présente étude n'aurait été possible sans le soutien bienveillant de plusieurs personnes qui, de façons différentes, ont contribué à son élaboration. Il est donc naturel de leur exprimer toute ma reconnaissance.

Mes premiers remerciements vont à l'endroit de mon directeur de recherche, le professeur Clarence Simard, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant de m'encadrer tout au long de mon cheminement. J'ai été particulièrement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension qui ont été d'un grand réconfort lors de moments difficiles. Il a toujours été disponible pour répondre à mes nombreuses questions et a toujours montré de l'intérêt à l'avancement des travaux. Sa capacité d'analyse et son enthousiasme m'ont montré que le monde de la recherche pouvait être un univers passionnant. Les nombreuses discussions que nous avons eues ainsi que ses conseils sont pour beaucoup dans le résultat final de ce travail. Enfin, ses nombreuses relectures et corrections ont été très appréciables. Je lui dois beaucoup, ce travail lui doit beaucoup et pour tout cela merci.

Je remercie également mes compagnons de route, ceux-là avec qui j'ai passé de nombreuses heures à étudier, ceux-là vers qui je pouvais me tourner pour avoir des explications lorsque je ne comprenais pas certaines choses, ceux-là avec qui j'ai fait le cheminement de la Maîtrise. Aliou Ba et René Kouarfate, j'ai énormément appris et progressé à vos côtés. Au-delà de l'académique, c'est surtout vos qualités humaines qui m'ont le plus marqué. Vous avez toujours été d'un grand soutien moral. Je suis ravie de vous avoir rencontré et je vous souhaite de brillantes carrières professionnelles car vous le méritez.

Enfin, je remercie ma famille, plus particulièrement mon père qui m'a toujours soutenu et encouragé dans mon choix de poursuivre mes études. Étudier au Canada représente un énorme défi culturel et surtout financier. Malgré ça, il a toujours cru en moi et a consenti d'énormes sacrifices pour me soutenir financièrement. Si j'en suis arrivé là aujourd'hui c'est grâce à lui. Mon plus grand souhait est de pouvoir lui rendre un jour tout ce qu'il a fait pour moi.

Ces remerciements ne peuvent se terminer sans une pensée pour ma mère qui nous a quitté en 2010. Même si physiquement elle n'est plus là, elle reste présente dans mon cœur et m'accompagne tous les jours. Je sais que de là où elle se trouve, elle m'adresse de nombreuses de prières. La rendre fière, voilà un leitmotiv supplémentaire pour atteindre la réussite.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES . . . . .	vi
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	vii
RÉSUMÉ . . . . .	viii
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I LE CARNET D'ORDRES LIMITES . . . . .	5
1.1 Mécanisme de transaction . . . . .	5
1.2 Risque de liquidité . . . . .	7
1.3 Mode de paiement . . . . .	8
1.4 Modélisation du marché . . . . .	9
1.5 Condition de non-arbitrage . . . . .	12
1.6 Portefeuille de couverture . . . . .	12
1.6.1 Coût de transaction . . . . .	13
1.6.2 Coût de liquidation . . . . .	13
1.6.3 Autofinancement . . . . .	14
1.7 Valeur terminale du portefeuille . . . . .	16
1.7.1 Acheteur d'option d'achat . . . . .	16
1.7.2 Vendeur d'option d'achat . . . . .	17
1.7.3 Les agents avertis . . . . .	17
1.7.4 Interprétation du portefeuille de couverture . . . . .	18
1.8 Modèle pour la structure du carnet d'ordres . . . . .	18
CHAPITRE II PROGRAMMATION DYNAMIQUE . . . . .	21

2.1	Problème d'optimisation . . . . .	21
2.2	Principe d'optimalité de Bellman . . . . .	23
	CHAPITRE III COUVERTURE GLOBALE . . . . .	26
3.1	Présentation . . . . .	26
3.2	La programmation dynamique . . . . .	27
	3.2.1 Implémentation . . . . .	28
	CHAPITRE IV RÉSULTATS ET INTERPRÉTATION . . . . .	33
4.1	Cas particulier de liquidité parfaite du carnet d'ordres : $\alpha = \beta = 1$ . . .	33
4.2	Couverture delta dans le carnet d'ordre . . . . .	34
4.3	Expériences numériques . . . . .	36
	4.3.1 Marché parfaitement liquide . . . . .	37
	4.3.2 Marché non liquide . . . . .	40
	CONCLUSION . . . . .	43
	APPENDICE A COEFFICIENTS D'INTERPOLATION . . . . .	46
	RÉFÉRENCES . . . . .	50

## LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Évolution des prix des actions à l'achat et la vente . . . . .	11
4.1 Comparaison des erreurs de couverture associées à la couverture delta et la couverture globale lorsque le marché est liquide. . . . .	37
4.2 Comparaison des erreurs de couverture associées à la couverture delta et la couverture globale lorsque le marché est liquide. . . . .	39
4.3 Comparaison des erreurs de couverture associées à la couverture delta et la couverture globale lorsque le marché n'est pas liquide. . . . .	40
4.4 Comparaison des erreurs de couverture associées à la couverture delta et la couverture globale lorsque le marché n'est pas liquide. . . . .	41

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
1.1 Les 5 meilleures offres d'un carnet d'ordres limites d'Amazon, datant du 29-06-2021, à 13h47. Source : Simard et Rémillard (2019) . . . . .	6

## RÉSUMÉ

L'un des problèmes les plus importants en mathématiques financières concerne la couverture de risque. Depuis les travaux de Black et Scholes (1973), la majorité des recherches portant sur la question se sont faites sur des marchés complets, sous l'hypothèse de parfaite liquidité.

Cependant, toutes les stratégies de couverture développées sous cette hypothèse s'avèrent être inadaptées sur des marchés incomplets. Dès lors, plusieurs approches ont été développées pour y remédier, notamment la couverture globale quadratique proposé par Schweizer (1995) qui est en quelque sorte une généralisation des méthodes de couverture. Cette approche va chercher à minimiser l'erreur de couverture. Par la suite, plusieurs études se sont appuyées sur cette méthode pour définir des stratégies de couverture sur les marchés dirigées par les ordres.

Le problème de la tarification dans les carnets d'ordres a également été abordé dans divers travaux, mais toujours en considérant un paiement monétaire. Toutefois, le mode de paiement privilégié sur ces marchés est le paiement physique des actions. La tarification dans les carnets d'ordres en temps discret avec paiement physique a récemment été abordée par Simard et Rémillard (2019). Dans leur approche, ils proposent une réécriture de l'erreur de couverture en intégrant directement la transaction des actions dans le processus du portefeuille de couverture.

Dans ce mémoire, nous reprenons la structure de carnet d'ordres limites proposée par ces derniers, puis nous nous appuyons sur le principe de la programmation dynamique couplée à la simulation de Monte-Carlo pour construire la stratégie de couverture globale. On montre par la suite que notre algorithme de programmation est fiable et que la couverture globale s'adapte mieux au marché d'ordres comparativement à la couverture delta.

**Mots-clés :** liquidité, marchés incomplets, couverture, carnets d'ordres limites, programmation dynamique, principe d'optimalité de Bellman, monte-carlo, optimisation.

## INTRODUCTION

Les travaux des pionniers tels que Black et Scholes (1973) ont permis d'établir le principe de parfaite réplication sous plusieurs hypothèses dont la parfaite liquidité du marché. Cette hypothèse garantit à tout moment l'existence d'une contrepartie pour toutes requêtes émises. Les titres sont donc transigés à un prix unique, quelle que soit la taille des échanges. Théoriquement, dans un marché complet et parfaitement liquide, il est possible de totalement éliminer un risque en adoptant une stratégie de négociation dynamique du portefeuille d'actifs dit autofinancé. En effet, on sera toujours en mesure de définir une stratégie de couverture dont la valeur du portefeuille associé répliquera parfaitement la valeur du paiement final. L'une des méthodes les plus couramment utilisées pour déterminer cette stratégie est la couverture delta.

Cependant, dans la réalité, aucun marché financier ne saurait se conformer aux configurations trop idéalistes de la parfaite liquidité. C'est notamment le cas des marchés dirigés par les ordres. Sur ces marchés, l'ensemble des requêtes soumises par les investisseurs est répertorié dans un registre électronique appelé carnet d'ordres. Pour un instrument financier donné, ce carnet donne en temps réel toutes les offres et toutes les demandes émises sur le marché.

Les transactions se font selon les contreparties existantes, les quantités disponibles et des règles de priorité. Il en découle que le prix des actions dépend de la taille de la transaction. Ce déphasage qui peut exister entre l'offre et la demande introduit un risque supplémentaire appelé risque de liquidité dont il faut tenir compte lorsqu'on

définit une stratégie de couverture.

L'impossibilité de négocier en temps continu, les sauts de prix, les frictions du marché et le risque d'illiquidité rendent le marché incomplet et par la même occasion la parfaite réplcation inatteignable. Par conséquent, développer de nouvelles méthodes mieux adaptées aux caractéristiques de ces marchés est apparu comme un enjeu majeur.

Bien que le carnet d'ordres constitue aujourd'hui l'un des moyens les plus courants de transiger des titres, sa structure reste très complexe à modéliser, rendant par la même occasion difficile l'élaboration de stratégie de couverture efficace. Raison pour laquelle la couverture delta reste la stratégie de couverture la plus répandue, même sur les marchés illiquides.

En 1995, Schweizer propose une alternative à la couverture delta nommée couverture globale. La parfaite réplcation étant quasi-irréalisable, la couverture globale va plutôt chercher à minimiser l'erreur de couverture, le tout soumis à une fonction de pénalité qui sanctionne les pertes. Dans un contexte idéal de liquidité sur un marché complet, cette erreur serait nulle puisque la parfaite réplcation sera possible. Schweizer généralise ainsi les méthodes de couverture pour qu'elle s'adapte aux différents types de marchés.

Plusieurs auteurs ont suivi cette idée pour définir des stratégies de couverture optimales sur les marchés incomplets et sur différents modèles de carnets d'ordres. Černý (2004) et Basak et Chabakauri (2012) minimisent l'erreur quadratique entre le droit contingent et la valeur terminale du portefeuille de couverture dans un contexte général de marché incomplet. Ils calculent la stratégie optimale de couverture en temps discret en utilisant la programmation dynamique. Bertsimas et Lo (1998) définissent

la séquence de décisions optimales en minimisant le coût total espéré des transactions. Ils utilisent aussi la programmation pour résoudre le problème. Gökay et Soner (2014) suivent la même idée que Bertsimas et Lo (1998) mais l'appliquent sur une structure binomiale des carnets d'ordres. D'autres auteurs tels que Cont *et al.* (2010) et Bayraktar et Ludkovski (2011) suivent l'idée de décrire le flux des ordres dans le carnet par un processus de poisson. Ils minimisent également le coût total espéré des transactions pour trouver la séquence optimale. Agliardi et Gençay (2017) et Alfonsi *et al.* (2010) considèrent eux la structure de carnet d'ordres décrit dans Obizhaeva et Wang (2013) et minimisent également le coût total espéré des transactions. Ils obtiennent des solutions fermées pour la stratégie de couverture.

Le point commun entre tous ces travaux est qu'ils considèrent tous un règlement monétaire de l'option. Sauf que sur les marchés des options, c'est plutôt le paiement physique qui est privilégié, car ce mode de paiement permet de définir des valeurs d'option beaucoup plus réaliste, plus cohérente avec les carnets et avec une meilleure précision.

Simard et Rémillard (2019) sont les premiers à traiter le problème de tarification dans les carnets d'ordres avec paiement physique des actions. Ils proposent une nouvelle structure pour le carnet et redéfinissent la valeur du portefeuille de couverture en y intégrant directement dans sa dynamique la livraison des actions.

Dans ce travail de recherche, nous voulons évaluer la possibilité d'utiliser la couverture globale en remplacement de la couverture delta dans un carnet d'ordres limites. Pour ce faire, nous mettons en évidence l'erreur de couverture supplémentaire induite par l'utilisation de la couverture delta lorsque le carnet d'ordres est illiquide.

Nous nous appuyons sur la programmation dynamique et la simulation de Monte-

Carlo pour construire la méthode d'évaluation de la stratégie de couverture globale selon le modèle de carnet d'ordres tel que décrit par Simard et Rémillard (2019).

Dès lors, comment appliquer le principe de couverture globale ? Quels sont les outils mathématiques et algorithmiques nécessaires à sa mise en œuvre ? Est-elle une réelle alternative à la couverture delta ? Voici un peu les interrogations auxquelles nous tenterons d'apporter des réponses.

Après une présentation, dans le chapitre 1, du fonctionnement des transactions dans le carnet d'ordres, nous décrirons de manière générale le principe de la programmation dynamique dans le chapitre suivant. Au chapitre 3, nous verrons comment utiliser la programmation dynamique pour résoudre notre problème de couverture dans le carnet d'ordres. Enfin, nous analyserons les résultats de nos expériences numériques dans le dernier chapitre.

## CHAPITRE I

### LE CARNET D'ORDRES LIMITES

Dans ce chapitre, nous allons présenter le fonctionnement du carnet d'ordres et voir comment les opérations s'y opèrent. On décrit également le modèle structurel choisi pour effectuer les analyses numériques.

#### 1.1 Mécanisme de transaction

Le carnet d'ordres est un registre électronique qui répertorie l'ensemble des ordres d'achat et de vente soumis sur le marché. Pour un instrument financier donné, il donne en temps réel l'état de l'offre et de la demande (quantités, prix, nombre d'ordres), comme on le voit dans le tableau 1.1. Les offres y sont identifiées comme des ordres de ventes, et les demandes, comme des ordres d'achat.

Le meilleur prix pour un ordre d'achat correspond au prix maximum qu'un agent est prêt à déboursier pour acquérir un titre. Tandis que le meilleur prix pour un ordre de vente correspond au prix minimum qu'un agent est prêt à accepter pour céder un titre. L'écart entre ces deux prix est appelé la fourchette.

Un agent patient émettra son ordre et attendra une contrepartie équivalente avant de

Tableau 1.1: Les 5 meilleures offres d'un carnet d'ordres limites d'Amazon, datant du 29-06-2021, à 13h47. Source : Simard et Rémillard (2019)

Achat			Vente		
Ordres	Prix	Quantité	Ordres	Prix	Quantité
7	227.53	100	16	227.64	100
45	227.47	200	33	227.65	100
2	227.45	100	51	227.67	300
20	227.44	200	1	227.69	400
84	227.43	100	9	227.72	100

conclure la transaction. En revanche, s'il souhaite négocier rapidement, il exécutera immédiatement ses ordres. Dans ce cas, il devra encaisser le coût de la fourchette et recevoir un montant moins avantageux. Dans le cas de notre carnet, la fourchette vaut 0.09. C'est aussi un indicateur de liquidité du carnet, plus elle est grande, plus le coût à supporter pour l'exécution d'un ordre sera élevé.

Sur un marché dirigé par les ordres, il existe 3 principaux types d'ordres

### 1. Les ordres au cours du marché

Un ordre au cours du marché est exécuté en totalité. Il est immédiatement transigé au meilleur prix offert par la contrepartie. Si la quantité disponible au meilleur prix de la contrepartie est inférieure à la taille de l'ordre soumis, la quantité restante est exécutée au second meilleur prix offert et ainsi de suite. Toutes les unités d'ordre ne sont donc pas nécessairement exécutées au même prix. Par exemple, reprenons le carnet présenté au tableau 1.1. Si un investisseur souhaite vendre 150 unités (respectivement acheter 150 unités), 100 unités seront vendues au prix de 227.53 et 50 au prix de 227.47 (respectivement 100 unités seront achetées au prix de 227.64 et 50 au prix de

227.65).

## 2. Les ordres à cours limité

Un investisseur émet un ordre d'achat (vente) en définissant la quantité et le prix maximal (minimal) auquel il souhaite acheter (vendre). Cet ordre ne sera exécuté que s'il existe une contrepartie équivalente ou plus avantageuse. Il peut être exécuté partiellement s'il n'y a pas assez de titres correspondant à sa demande dans le carnet. Les ordres non exécutés s'accumulent dans le carnet et seront exécutés lorsqu'une contrepartie équivalente ou plus avantageuse sera proposée, selon une priorité de prix puis de date.

## 3. Les ordres à la meilleure limite

À son introduction, l'ordre est uniquement exécuté au meilleur prix offert dans le carnet. Si la quantité disponible au meilleur prix est inférieure à la taille de la demande, les ordres non exécutés sont automatiquement enregistrés dans le carnet comme des ordres à cours limité à ce même prix. Il devient par la même occasion la meilleure offre.

C'est un mécanisme différent de ce qu'on observe sur les marchés classiques. En effet, sur un marché complet et parfaitement liquide, un titre est acheté et vendu au même prix. De plus, on peut y négocier une quantité infinie de titres, et le prix à l'unité sera le même.

### 1.2 Risque de liquidité

On constate au travers du mécanisme de fonctionnement des carnets d'ordres que le prix des actions est fortement influencé par la quantité transigée. Plus précisément, lors d'un achat, le coût par action augmente avec la taille de la transaction tandis

que pour la vente, la valeur par action diminue avec la taille de la transaction. Comparativement à ce qu'on observe sur les marchés complets et parfaitement liquides, les carnets d'ordres traduisent un comportement plus réaliste du cours des actions sur un marché.

Ainsi, un agent désirant acquérir/céder des parts d'actions sur un tel marché s'expose au risque de les revendre/racheter à perte ou pire encore, de ne trouver aucun preneur/revendeur lorsqu'il voudra les céder/acheter. Ce risque, appelé le risque de liquidité, doit être pris en compte par l'agent lorsqu'il prendra sa décision d'exercer ou pas son option.

### 1.3 Mode de paiement

Contrairement au marché parfaitement liquide, le prix d'une option dans un marché incomplet n'est pas le même selon que le paiement soit physique (transfert direct d'actions) ou en espèces (montant net généré par la position dans l'indice financier). En effet, il faut tenir compte du fait qu'il y ait deux processus de prix. Ainsi, pour un paiement en espèce, la notion de fonction de paiement qui dépendrait du prix courant de l'actif perd sa pertinence.

Pour notre étude, nous nous intéressons uniquement au mode de paiement physique qui permet de traduire des valeurs d'option plus cohérente avec la réalité. C'est d'ailleurs le moyen le plus utilisé sur les marchés d'options. Pour en savoir plus sur le mode de paiement en espèces, consulter Simard et Rémillard (2019).

## 1.4 Modélisation du marché

Considérons que le marché se compose de deux types d'investisseurs. Les premiers émettent des ordres à cours limité et on suppose qu'ils sont assez nombreux pour assurer la liquidité, une bonne résilience et donner de la profondeur au carnet d'ordres. Le second type d'investisseurs se constitue d'acheteurs et de vendeurs d'options européennes qui souhaitent eux couvrir leurs positions grâce aux ordres au cours du marché. On suppose également que ces derniers peuvent prêter ou emprunter de l'argent à la banque au même taux d'intérêt fixe dans le temps et que les transactions s'opèrent en temps discret. L'idée est de construire un modèle mathématique qui préserve la structure des carnets d'ordres tout en mettant en exergue l'impact des tailles de transaction sur le prix des actions.

Soit l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t=0,1,\dots,T}, \mathbf{P})$  et  $r$  le taux d'intérêt supposé constant. Dans le carnet, les ordres de vente sont rangés par ordre croissant tandis que les ordres d'achat sont rangés par ordre décroissant (voir tableau 1.1). Pour un nombre  $x$  d'actions à vendre ou à acheter, l'évolution du carnet d'ordres est décrit par deux processus définis de  $\{0, 1, \dots, T\} \times \Omega$  et à valeur dans l'espace de fonctions continues dérivables  $\mathcal{C}([0, +\infty))$

- **Le processus du coût d'achat :**

$$\begin{aligned}
 F^a : \{0, 1, \dots, T\} \times \Omega &\longrightarrow \mathcal{C}([0, +\infty)) \\
 (t, \omega) &\longrightarrow F^a(t, \omega, x) = F_t^a(x).
 \end{aligned}$$

• **Le processus de gain suite à une vente :**

$$F^v : \{0, 1, \dots, T\} \times \Omega \longrightarrow \mathcal{C}([0, +\infty))$$

$$(t, \omega) \longrightarrow F^v(t, \omega, x) = F_t^v(x).$$

Pour respecter la structure des carnets, certaines conditions doivent être respectées

**(C1)**  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto F_t^a(x)$  et  $t \mapsto F_t^v(x)$  sont des processus adaptés, c'est à dire que toute l'information jusqu'au temps  $t$  est connue.

**(C2)**  $\forall t \in \{0, 1, \dots, T\}$

$x \mapsto F_t^a(x)$  est positive, croissante et convexe,

$x \mapsto F_t^v(x)$  est positive, croissante et concave.

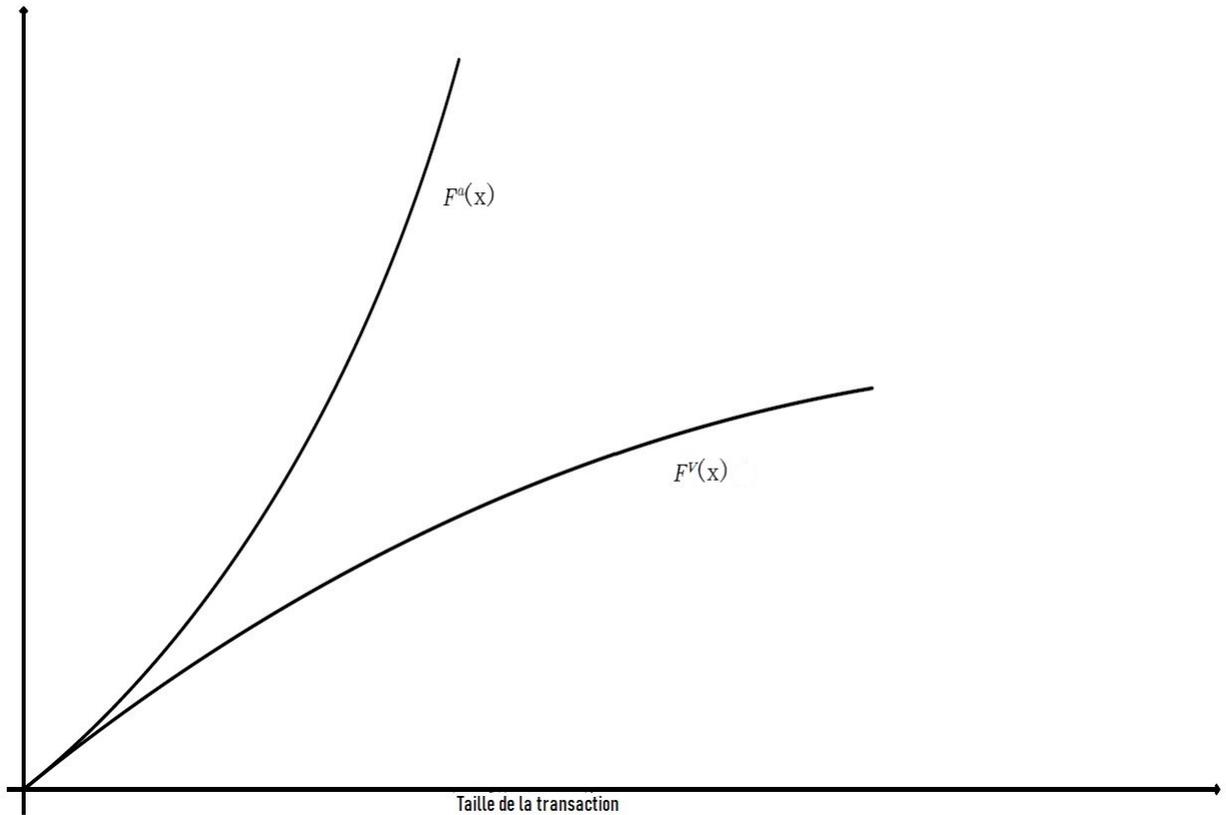


Figure 1.1: Évolution des prix des actions à l'achat et la vente

(C3) Enfin, une dernière condition est que le meilleur prix à l'achat doit toujours être supérieur au meilleur prix à la vente

$$\begin{cases} F_t^a(0) = F_t^v(0), \forall t \leq T, \\ F_t^a(x) \geq F_t^v(x), \forall t \leq T. \end{cases}$$

Dans un marché parfaitement liquide, cette condition serait une égalité.

## 1.5 Condition de non-arbitrage

Une opportunité d'arbitrage signifie qu'il est possible de faire des profits sans prendre de risque. La condition de non-arbitrage est donc importante car elle impose des conditions sur le processus de prix afin d'assurer la viabilité du marché.

Dans la théorie classique d'évaluation neutre au risque, la condition de non-arbitrage est l'existence d'une mesure de probabilité équivalente sous laquelle la valeur actualisée du prix de l'actif est une martingale, l'actualisation se faisant au taux sans risque. Cette définition est insuffisante dans un modèle de marché illiquide comme celui des carnets d'ordres. En effet, il faut prendre en compte le fait qu'il y ait deux processus de prix, avec des taux d'intérêt qui pourraient être différents. L'actualisation ne pourrait donc se faire sous un taux unique. Il faudrait dans ce cas trouver un taux d'intérêt intermédiaire qui servira de facteur d'actualisation.

Simard (2014) établit des conditions plus générales pour encadrer l'arbitrage. Il montre que l'existence d'une mesure martingale équivalente sous laquelle le cours d'achat et le cours de vente sont respectivement une sous-martingale et une sur-martingale est une condition suffisante pour éliminer toute possibilité d'arbitrage. Consulter l'article pour plus de détails.

## 1.6 Portefeuille de couverture

Sur un marché parfaitement liquide, la valeur de la position dans l'actif est simplement obtenue en multipliant le nombre d'actions par le prix. De plus, la valeur du portefeuille autofinancé peut être écrite sous forme d'une intégrale stochastique. Ce n'est pas possible dans le contexte des carnets d'ordres. Dans la suite de cette section,

nous montrerons comment se présente la dynamique du portefeuille de couverture dans le carnet d'ordres.

### 1.6.1 Coût de transaction

Soit  $\{X_t\}_{t=1,\dots,T}$  le processus prévisible représentant le nombre d'actions  $X_t$  que détient un investisseur dans son portefeuille au temps  $t$ . Notons  $\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \theta_t$ , le nombre d'actions échangées à  $t - 1$ . On définit les valeurs  $x^+ = \max(x, 0)$  et  $x^- = \max(-x, 0)$ . À  $t$ , le flux financier est donné par le coût des transactions effectuées

$$C_t(\theta_{t+1}) = F_t^a(\theta_{t+1}^+) - F_t^v(\theta_{t+1}^-). \quad (1.1)$$

On note que  $F_t^v(x) = F_t^a(x) = 0 \forall x \leq 0$ .

### 1.6.2 Coût de liquidation

Contrairement au marché parfaitement liquide, le coût de liquidation d'une action dans un marché dirigé par des ordres n'est pas fixe. En effet, le risque de liquidité a un impact considérable sur le prix des actions. Plus on négocie d'importantes quantités de titres, plus on est susceptible de plonger dans les profondeurs du carnet et plus le prix d'achat sera élevé (ou faible pour la revente).

Un investisseur averti n'exécutera donc pas de gros volumes d'actions en une même transaction. Il privilégiera plutôt plusieurs petites transactions afin de limiter ses pertes. Toutefois, cela signifie que la liquidation nécessitera beaucoup plus de temps rajoutant ainsi de l'incertitude sur les moments d'exécution.

Pour notre étude, on considère que le portefeuille est liquidé en une seule transaction,

donc pas de délai d'exécution. Au moment de liquider son portefeuille, l'agent est soit à découvert ( $X_t < 0$ ) soit en possession de titres ( $X_t > 0$ ). On définit alors le cout de liquidation des actions comme étant le montant qu'il reçoit de la vente de toutes ses actions ou le montant qu'il doit investir afin de combler ses dettes

$$L_t(X_t) = F_t^v(X_t^+) - F_t^a(X_t^-). \quad (1.2)$$

### 1.6.3 Autofinancement

Soit  $\{M_t\}_{t=1, \dots, T}$  le processus représentant le montant du compte en banque. À  $t$ , juste avant la transaction, la valeur du compte en banque vaut  $e^r M_{t-1}$ .  $M_t$  nous donne la valeur du compte en banque immédiatement après la transaction

$$M_t = e^r M_{t-1} - C_t(\theta_{t+1}), \quad (1.3)$$

$$M_0 = V_0 - C_0(\theta_1).$$

Ceci permet enfin de définir la valeur du portefeuille comme la somme du montant du compte en banque et du coût de liquidation

$$V_t = e^r M_{t-1} + L_t(X_t), \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, T\}, \quad (1.4)$$

$V_0$  est la valeur initiale du portefeuille.

De par la définition du compte en banque, nous constatons que le coût de rebalancement du portefeuille est égal au coût de la transaction réalisée. Ainsi, les variations de la valeur du portefeuille sont uniquement expliquées par les flux financiers de sorte que nous ayons un portefeuille autofinancé.

**Proposition 1.** *Soit  $V_0$ , la valeur initiale du portefeuille de couverture d'un investisseur. Dans un carnet d'ordres limites, la valeur de ce portefeuille pour tout  $t > 1$  est donnée par*

$$V_t = e^r V_{t-1} + L_t(X_{t-1} + \theta_t) - e^r L_{t-1}(X_{t-1}) - e^r C_{t-1}(\theta_t). \quad (1.5)$$

*Démonstration.* Par récursion de l'équation (1.3) on obtient

$$e^r M_{t-1} = e^{rt} V_0 - \sum_{i=0}^{t-1} e^{r(t-i)} C_i(\theta_{i+1}).$$

Par conséquent en remplaçant dans l'équation (1.4) on a

$$V_t = L_t(X_t) + e^{rt} V_0 - \sum_{i=0}^{t-1} e^{r(t-i)} C_i(\theta_{i+1}).$$

On actualise la valeur du portefeuille

$$e^{-rt} V_t = e^{-rt} L_t(X_t) + V_0 - \sum_{i=0}^{t-1} e^{-ir} C_i(\theta_{i+1}),$$

et on en déduit que

$$V_t = e^r V_{t-1} + L_t(X_{t-1} + \theta_t) - e^r L_{t-1}(X_{t-1}) - e^r C_{t-1}(\theta_t).$$

□

## 1.7 Valeur terminale du portefeuille

Contrairement aux marchés liquides, la valeur terminale du portefeuille de couverture n'est pas unique dans le carnet d'ordres. Considérons une option d'achat européenne de maturité  $T$ , de prix d'exercice  $K$  et pour un nombre  $m$  d'actions.

Dans un marché parfaitement liquide, le coût d'une option n'est pas influencé par la taille du contrat. Il suffit de multiplier le prix de l'option sur une action par le nombre total d'actions pour obtenir le prix du contrat. Il n'y a donc aucune différence entre négocier  $m$  options portant sur une action et une option portant sur  $m$  actions.

Cette généralité se perd dans un marché illiquide puisque nous savons que le volume de transaction impact la valeur de l'action. En effet, le coût de l'option sur la première action n'est pas forcément le même que la valeur de l'option sur la  $n^{\text{ème}}$  action ( $n \leq m$ ). En d'autres termes,  $F_T^v(1) > K$  n'implique pas nécessairement que  $F_T^v(n) - F_T^v(n-1) > K$ .

Afin d'identifier correctement la stratégie de couverture à mettre en place, il faut se mettre à la place de l'acheteur et du vendeur puis adopter leur point de vue.

### 1.7.1 Acheteur d'option d'achat

L'acheteur exercera son option d'achat si la revente des actions lui est profitable. C'est le cas si et seulement si  $\frac{F_T^v(m)}{m} > K$ . La valeur de son portefeuille à l'échéance

est alors

$$\begin{aligned}
V_T &= e^r V_{T-1} + L_T (X_{T-1} + \theta_T + m \mathbf{1}_{\{F_T^v(m) > mK\}}) - e^r L_{T-1} (X_{T-1}) - e^r C_{T-1}(\theta_T) \\
&\quad - mK \mathbf{1}_{\{F_T^v(m) > mK\}}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

En cas d'exercice de son option, il recevra  $m$  actions de la part du vendeur qui s'ajouteront à sa stratégie de liquidation. Ces actions lui coûteront la somme de  $mK$  qu'il devra retrancher de la valeur de son portefeuille.

### 1.7.2 Vendeur d'option d'achat

En cas d'exercice de l'acheteur, le vendeur doit lui céder les  $m$  actions. Il devra retirer ces  $m$  actions de sa stratégie de liquidation. En revanche il recevra le montant de  $mK$ , en échange des actions, qui s'ajoutera à la valeur de son portefeuille. La valeur de son portefeuille à l'échéance est alors

$$\begin{aligned}
V_T &= e^r V_{T-1} + L_T (X_{T-1} + \theta_T - m \mathbf{1}_{\{F_T^v(m) > mK\}}) - e^r L_{T-1} (X_{T-1}) - e^r C_{T-1}(\theta_T) \\
&\quad + mK \mathbf{1}_{\{F_T^v(m) > mK\}}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

### 1.7.3 Les agents avertis

Un agent averti préférera négocier  $m$  options portant sur une action plutôt qu'une option portant sur  $m$  actions. Il exercera ensuite un nombre  $n \leq m$  d'options tant que la revente de la  $n^{\text{ème}}$  action lui est profitable. En d'autres termes, il exercera un nombre  $n = \sup \{x \leq m : F_T^v(x) - F_T^v(x-1) > K\}$  d'options.

Ainsi, la valeur du portefeuille d'un acheteur d'option sera

$$V_T = L_T \left( X_T + \sum_{n=1}^m \mathbb{1}_{\{F_T^v(n) - F_T^v(n-1) > K\}} \right) + e^r M_{T-1} - K \sum_{n=1}^m \mathbb{1}_{\{F_T^v(n) - F_T^v(n-1) > K\}}.$$

Et la valeur du portefeuille du vendeur d'option sera

$$V_T = L_T \left( X_T + \sum_{n=1}^m \mathbb{1}_{\{F_T^v(n) - F_T^v(n-1) > K\}} \right) + e^r M_{T-1} + K \sum_{n=1}^m \mathbb{1}_{\{F_T^v(n) - F_T^v(n-1) > K\}}.$$

#### 1.7.4 Interprétation du portefeuille de couverture

Dans notre contexte, la valeur terminale du portefeuille  $V_T$  peut s'interpréter comme étant la somme entre la richesse de l'agent et le coût total des transactions qui ont permis de construire le portefeuille. Sa richesse est la somme de la valeur de liquidation du portefeuille qui contient l'option et du montant détenu dans son compte en banque. En d'autres termes, la valeur terminale représente l'erreur de couverture engendrée par la stratégie d'investissement. C'est cette erreur que voudra minimiser l'agent afin de couvrir sa position. Pour y arriver, il devra trouver la stratégie optimale de transactions à effectuer sur chaque période de temps.

Pour la suite des analyses, nous adopterons le point de vue d'un acheteur d'une option d'achat.

#### 1.8 Modèle pour la structure du carnet d'ordres

Afin de rendre l'utilisation des carnets d'ordres pratique et réaliste, Simard et Rémillard (2019) proposent un modèle paramétrique pour mener les expériences numé-

riques. Soit  $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$  un mouvement brownien géométrique.  $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$  est un processus stochastique défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  adapté à la filtration  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \{0, 1, \dots, T\}}$ .  $\mathbf{P}$  désigne la mesure de probabilité réelle.  $\forall t \leq T$ , on définit la structure des prix à l'achat et la vente dans le carnet d'ordres par les fonctions suivantes

$$\begin{cases} F_t^a(x) = S_t \left[ (1+x)^\alpha - 1 \right] & \text{avec } \alpha > 1, \\ F_t^v(x) = S_t \left[ (1+x)^\beta - 1 \right] & \text{avec } \beta \in (0, 1). \end{cases}$$

Le mouvement brownien induit de l'incertitude au niveau des processus de prix. Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  permettent de contrôler la force de convexité et de concavité des prix afin de mieux représenter la structure des carnets d'ordres limites.

On en déduit les expressions

$$\begin{cases} L_t(x) = S_t \left\{ (1+x^+)^\beta - (1+x^-)^\alpha \right\}, \\ C_t(x) = S_{t-1} \left\{ (1+x^+)^\alpha - (1+x^-)^\beta \right\}. \end{cases}$$

Et en remplaçant dans la Proposition 1 on obtient

$$\begin{aligned} V_t = e^r V_{t-1} + S_{t-1} & \left[ e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma Z} \left\{ (1 + (X_{t-1} + \theta_t)^+)^{\beta} - (1 + (X_{t-1} + \theta_t)^-)^{\alpha} \right\} \right. \\ & \left. - e^r \left\{ (1 + X_{t-1}^+)^{\beta} - (1 + X_{t-1}^-)^{\alpha} \right\} - e^r \left\{ (1 + \theta_t^+)^{\alpha} - (1 + \theta_t^-)^{\beta} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

À l'échéance, l'acheteur d'option exercera si

$$\begin{aligned}
& \frac{F_T^v(m)}{m} > K \\
\iff S_T \left[ (1+m)^\beta - 1 \right] &> mK \\
& \iff S_T > mK \left[ (1+m)^\beta - 1 \right]^{-1} \\
& \iff S_{T-1} e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma Z} > mK \left[ (1+m)^\beta - 1 \right]^{-1} \\
& \iff Z > \frac{\log \left[ \frac{mK}{S_{T-1}} \left[ (1+m)^\beta - 1 \right]^{-1} \right] - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma},
\end{aligned}$$

où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Posons  $ve = \frac{\log \left[ \frac{mK}{S_{T-1}} \left[ (1+m)^\beta - 1 \right]^{-1} \right] - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma}$ .

À ce moment, la valeur de son portefeuille de couverture sera

$$\begin{aligned}
V_T = e^r V_{T-1} + S_{T-1} & \left[ e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma Z} \left\{ \left( 1 + (X_{T-1} + \theta_T + m\mathbb{1}_{\{Z > ve\}})^+ \right)^\beta \right. \right. \\
& - \left. \left. \left( 1 + (X_{T-1} + \theta_T + m\mathbb{1}_{\{Z > ve\}})^- \right)^\alpha \right\} - e^r \left\{ (1 + X_{T-1}^+)^beta - (1 + X_{T-1}^-)^\alpha \right\} \right. \\
& \left. - e^r \left\{ (1 + \theta_T^+)^alpha - (1 + \theta_T^-)^\beta \right\} \right] - mK \mathbb{1}_{\{Z > ve\}}.
\end{aligned}$$

Dans le carnet d'ordres limites, cette valeur représente également l'erreur de couverture.

## CHAPITRE II

### PROGRAMMATION DYNAMIQUE

Dans ce chapitre, on décrit le principe de la programmation dynamique qui est un outil très puissant pour résoudre les problèmes d'optimisation récursifs. Nous allons y avoir recours pour évaluer la stratégie de couverture globale.

#### 2.1 Problème d'optimisation

Une stratégie est un processus de décision séquentiel dans lequel un agent prend des décisions optimales à certaines dates, en fonction des informations disponibles dans le système et dans le but d'optimiser une fonction objective.

La programmation dynamique consiste en l'ensemble des outils mathématiques et algorithmiques qui permettront d'évaluer séquentiellement ces prises de décisions.

Soit  $(\Omega, \{\mathcal{F}\}_{t=0,1,\dots,T}, \mathbf{P})$  un espace de probabilité filtré. On définit  $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_T\}$ , une stratégie à appliquer sur la période de temps  $T \in \mathbb{N}$  et une fonction de coût  $\Psi(\theta)$  qui dépend de cette stratégie. Supposons maintenant qu'un agent souhaite identifier la stratégie optimale  $\theta^* = \{\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_T^*\}$  qui minimisera sur cette période la valeur moyenne de cette fonction de coût.

En raison des changements qui interviennent dans l'environnement dans lequel on évolue, il est important qu'à chaque instant  $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ , la décision optimale à appliquer  $\theta_t^*$  soit déterminée selon l'ensemble des informations disponibles (l'état du système) à  $t - 1$ , afin qu'elle soit la meilleure possible. Notons  $E_k$  l'espace d'états possibles du système et  $D_k$  l'ensemble des décisions admissibles selon l'état du système observé à l'instant précédent  $k - 1$ , pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, T\}$ . À ce moment, l'agent observe que le système est dans un état  $\epsilon_k \in E_k$ . Avec cette information, il décidera d'appliquer de manière optimale la stratégie  $\theta_{k+1}^* \in D_{k+1}(\epsilon_k)$  à la période suivante. Une fois la décision traitée, le système transite vers un état  $\epsilon_{k+1} = g(\epsilon_k, \theta_{k+1}^*)$  avec

$$\begin{aligned} g : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \omega &\longrightarrow g(\epsilon_k, \theta_{k+1}, \omega) = g(\epsilon_k, \theta_{k+1}). \end{aligned}$$

où la fonction  $g(., .)$  décrit l'évolution du système pour n'importe quelle stratégie et  $n$  représente le nombre d'observations qui définit l'état du système.

Le problème d'optimisation auquel est confronté l'agent est le suivant

$$\begin{aligned} &\min_{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_T} \mathbb{E} [ \Psi(\theta) ], \\ &\text{sous contrainte } \theta_{k+1}^* \in D_{k+1}(\epsilon_k), \quad k = 0, \dots, T - 1, \\ &\text{où } \epsilon_{k+1} = g(\epsilon_k, \theta_{k+1}^*), \\ &\text{et } \epsilon_0 = \text{État initial du système.} \end{aligned}$$

À chaque étape  $k$ , si on suppose qu'il existe une stratégie  $\theta = \{\theta_k, \theta_{k+1}^*, \theta_{k+2}^*, \dots, \theta_T^*\}$  où toutes les décisions futures sont optimales, alors la meilleure décision à appliquer

à ce moment est telle que

$$\theta_k^* = \underset{\theta_k}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} [ \Psi (\theta) | \epsilon_{k-1} ] .$$

On définit ensuite la fonction valeur  $\Pi_k$  comme étant un sous problème d'optimisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_k(\epsilon_k) = \underset{\theta_{k+1}}{\operatorname{min}} \mathbb{E} [ \Psi (\theta) | \epsilon_k ] , \\ \theta = \{ \theta_{k+1}, \theta_{k+2}^*, \theta_{k+3}^*, \dots, \theta_T^* \} . \end{array} \right.$$

Ainsi à chaque temps  $k$ , on optimise la fonction objective qui est sous la forme d'une fonction basée sur toutes les évolutions futures du système. La résolution successive de ces équations satisfait au principe d'optimalité de Bellman. La stratégie optimale  $\theta^*$  est alors obtenue en combinant toutes les solutions des sous-problèmes.

## 2.2 Principe d'optimalité de Bellman

La technique de programmation dynamique a été développée dans les années 40 par Richard Bellman pour décrire les problèmes d'optimisation où l'on doit déterminer séquentiellement une suite de décisions à appliquer dans le temps. Au début des années 1950, il affine la méthode en proposant de décomposer le problème principal en sous problèmes imbriqués les uns dans les autres, du plus petit au plus grand. Les solutions de ces sous-problèmes sont stockées en mémoire puis combinées pour trouver la solution du problème principal. Ce principe est connu sous le nom de principe d'optimalité de Bellman et stipule qu'une politique optimale possède la propriété qui fait que peu importe la décision initiale, les décisions qui suivront doivent créer des résultats optimaux. En d'autres termes, si la stratégie  $\theta^* = \{ \theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_T^* \}$  est

solution du problème initial

$$\min_{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_T} \mathbb{E} [ \Psi (\theta) ],$$

alors pour tout  $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ , la stratégie tronquée  $\theta_{t,T}^* = \{\theta_t^*, \theta_{t+1}^*, \dots, \theta_T^*\}$  est solution du sous-problème

$$\min_{\theta_t, \theta_{t+1}, \dots, \theta_T} \mathbb{E} [ \Psi (\theta) \mid \epsilon_{t-1} ].$$

La résolution se fait généralement de manière récursive, à rebours, selon les étapes suivantes :

1. On commence par identifier la dernière décision  $\theta_T^*$  sachant l'état du système en  $T - 1$ , c'est à dire le plus petit sous-problème (à la maturité  $T$ ).
2. Étendre l'optimisation au plus petit sous ensemble suivant, c'est à dire celui impliquant les deux dernières étapes  $\{\theta_{T-1}^*, \theta_T^*\}$ .
3. Continuer ainsi à rebours jusqu'à avoir résolu le problème principal.

Mathématiquement, la méthode se résume à

$$\begin{cases} \Pi_T (\epsilon_T) = \Psi (\theta), \\ \Pi_{t-1} (\epsilon) = \min_{\theta_t} \mathbb{E} [ \Pi_t (\epsilon_t) \mid \epsilon_{t-1} = \epsilon ], \quad \forall t = T, \dots, 1, \end{cases}$$

À chaque instant  $t$ , la stratégie optimale à appliquer est donnée par

$$\theta_t^* = \underset{\theta_t}{\operatorname{argmin}} \Pi_{t-1} (\epsilon_{t-1}). \quad (2.1)$$

**Remarque.** *L'algorithme de programmation dynamique est un outil très puissant*

*qui permet de résoudre les problèmes d'optimisation, notamment lorsque la forme de la fonction objective est inconnue ou très complexe. Couplée à la simulation de Monte-Carlo, elle nous permettra d'estimer les espérances. En raison des difficultés computationnelles, l'algorithme nécessite également un espace d'état fini et discrétisé pour éviter que l'algorithme roule indéfiniment. Si des espérances doivent être calculées en des points qui ne font pas partie de l'espace d'état, on les approxime par interpolation. Tout ceci contribue à introduire dans l'algorithme des erreurs de simulations, d'estimations et d'approximations. Des détails seront apportés au chapitre suivant.*

## CHAPITRE III

### COUVERTURE GLOBALE

Dans ce chapitre, nous allons définir la stratégie couverture globale et nous verrons comment la programmation dynamique permet de résoudre le problème.

#### 3.1 Présentation

Soit  $\Theta = \{\{\theta_t\}_{t=1,\dots,T} \mid \theta_t \in \mathcal{F}_{t-1}\}$  un ensemble de stratégies admissibles. Pour une stratégie  $\theta \in \Theta$ , on note par  $V_t^\theta$  la valeur du portefeuille qui lui est associée. On note  $\tilde{V}_t^\theta = e^{-rt}V_t^\theta$  la valeur actualisée du portefeuille. Une stratégie  $\theta$  est dite admissible si le portefeuille associé est autofinancé et de carrée intégrable  $\left(\mathbb{E} \left[ \left( \tilde{V}_t^\theta \right)^2 \right] < \infty \text{ pour tout } t \in \{0, 1, \dots, T\}\right)$ .

La couverture globale vise à identifier la stratégie optimale  $\theta^* = \{\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_T^*\}$  et la valeur initiale  $V_0^{\theta^*}$  qui minimisent l'erreur de couverture à la maturité qui est noté  $V_T^\theta$ . On rappelle que dans notre modèle, la valeur terminale du portefeuille est aussi l'erreur de couverture. Mathématiquement, la couverture globale revient à résoudre

le problème d'optimisation suivant

$$\min_{V_0^\theta, \theta} \mathbb{E} \left[ \mathcal{G} \left( V_T^\theta \right) \right],$$

où  $\mathcal{G}$  est une fonction de pénalité qui sanctionne les erreurs de couverture.

Schweizer (1995) résout le problème en utilisant une fonction quadratique comme fonction de pénalité  $\mathcal{G}(x) = x^2$ . Il introduit ainsi la couverture globale quadratique

$$\min_{V_0^\theta, \theta} \mathbb{E} \left[ \left( V_T^\theta \right)^2 \right]. \quad (3.1)$$

Cette méthode est une généralisation des méthodes de couvertures et s'applique aussi bien sur des marchés complets que incomplets, liquides ou pas.

### 3.2 La programmation dynamique

Le problème (3.1) est un problème d'optimisation dans lequel des décisions optimales doivent être prises à chaque période de temps, selon l'information disponible à ce moment. Nous verrons dans cette section comment appliquer la programmation dynamique pour résoudre notre problème.

La valeur finale  $V_T^\theta$  est l'erreur de couverture qui résulte de l'application de la stratégie  $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_T\}$ , elle s'apparente donc à une fonction  $\Psi(\theta)$ . Soit  $E_t$  l'espace d'états possibles du système à  $t$ . Ici, l'état du système dépend des observations  $S_t, V_t$  et  $X_t$ , respectivement le prix de l'actif, la valeur du portefeuille de couverture et le nombre d'actions détenus par l'agent. On dira que le système est dans un état  $\epsilon_t = (S_t, V_t, X_t) \in E_t$ .

En appliquant le principe d'optimalité de Bellman vu à la Section 2.2

$$\begin{cases} \Pi_T(\epsilon_T) = V_T^\theta, \\ \Pi_{t-1}(s, v, x) = \min_{\theta_t} \mathbb{E} [\Pi_t(S_t, V_t, X_t) \mid (S_{t-1} = s, V_{t-1} = v, X_{t-1} = x)], \end{cases}$$

Pour tout  $t = T, \dots, 1$ .

La meilleure stratégie à appliquer à chaque instant  $t$  est donnée selon l'équation (2.1)

$$\theta_t^* = \underset{\theta_t}{\operatorname{argmin}} \Pi_{t-1}(s, v, x),$$

et la valeur initiale optimale du portefeuille par

$$V_0^{\theta^*} = \underset{V_0}{\operatorname{argmin}} \Pi_0(s, v, x). \quad (3.2)$$

### 3.2.1 Implémentation

Maintenant que nous savons comment déterminer la stratégie optimale, nous allons voir comment implémenter la procédure numériquement. Les espérances conditionnelles n'ayant pas de formes explicites, elles seront calculées via la simulation de Monte-Carlo. Les trajectoires des variables d'états sont en temps continus, mais il est impossible d'évaluer la stratégie à tout moment. En raison de cette complexité on limite l'espace d'état à une grille discrétisée et on évalue la stratégie optimale à des temps fixés. Si les variables d'états ne prennent pas des valeurs sur la grille, la stratégie optimale sera calculée par interpolation.

Supposons qu'à chaque date  $\{t = T, \dots, 1\}$  nous connaissons certaines valeurs que

peut prendre la stratégie  $\theta_t$  ainsi que l'état du système au temps précédent

$\epsilon_{t-1} = (S_{t-1} = s_i, V_{t-1} = v_j, X_{t-1} = x_k)$ . Ces valeurs sont respectivement posées sur des grilles  $G_\theta = \{\phi_1, \dots, \phi_b\}$ ,  $G_S = \{s_1, \dots, s_p\}$ ,  $G_V = \{v_1, \dots, v_q\}$  et  $G_X = \{x_1, \dots, x_d\}$  telles que  $\phi_0 = \infty < \phi_1 < \dots < 0 < \dots < \phi_b < \phi_{b+1} = \infty$ ,  $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_p < s_{p+1} = \infty$ ,  $v_0 = 0 < v_1 < \dots < v_q < v_{q+1} = \infty$  et  $x_0 = \infty < x_1 < \dots < 0 < \dots < x_d < x_{d+1} = \infty$ . On définit la grille d'états par  $G_{ijkl} = (s_i, v_j, x_k, \phi_l)_{i=1, \dots, p, j=1, \dots, q, k=1, \dots, d, l=1, \dots, b}$ .

Théoriquement, il est naturel d'envisager que la grille soit aussi grande que possible. Néanmoins, comme mentionné à la Section 2.2, nous considérerons un espace d'états fini, de dimension raisonnable.

À chaque instant  $t = T, \dots, 1$ , on commence par générer un échantillon de variables aléatoires  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$  i.i.d selon une  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Pour chaque stratégie  $\theta_t \in \{\phi_1, \dots, \phi_b\}$  et connaissant l'état du système  $(S_{t-1} = s_i, V_{t-1} = v_j, X_{t-1} = x_k)$ , on peut déduire l'évolution du prix de l'actif  $S_t = s_i e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma Z}$ , l'évolution du nombre d'actions détenues par l'agent  $X_t = x_k + \phi_l$  et l'évolution de la valeur du portefeuille de couverture telle que décrit à l'équation (1.8). Ainsi pour chaque  $\theta_t = \phi_{l=1, \dots, b}$ , on estime  $\mathbb{E} [\Pi_t(S_t, V_t, X_t) \mid (S_{t-1} = s_i, V_{t-1} = v_j, X_{t-1} = x_k)]$  dans l'échantillon par

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \Pi_t \left( s_i e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma Z}, \right. \right. \\ & e^r v_j + s_i \left[ e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma Z} \left\{ (1 + (x_k + \phi_l)^+)^{\beta} - (1 + (x_k + \phi_l)^-)^{\alpha} \right\} \right. \\ & \left. \left. - e^r \left\{ (1 + x_k^+)^{\beta} - (1 + x_k^-)^{\alpha} \right\} - e^r \left\{ (1 + \phi_l^+)^{\alpha} - (1 + \phi_l^-)^{\beta} \right\} \right], \right. \\ & \left. x_k + \phi_l \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\simeq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Pi_t \left( s_i e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma Z^n}, \right. \\
&e^r v_j + s_i \left[ e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma Z^n} \left\{ (1 + (x_k + \phi_l)^+)^{\beta} - (1 + (x_k + \phi_l)^-)^{\alpha} \right\} \right. \\
&- e^r \left\{ (1 + x_k^+)^{\beta} - (1 + x_k^-)^{\alpha} \right\} - e^r \left\{ (1 + \phi_l^+)^{\alpha} - (1 + \phi_l^-)^{\beta} \right\} \left. \right], \\
&x_k + \phi_l) \\
&= \hat{\mathbb{E}} \left[ \Pi_t (S_t, V_t, X_t) \mid (S_{t-1} = s_i, V_{t-1} = v_j, X_{t-1} = x_k) \right],
\end{aligned}$$

où  $\hat{\mathbb{E}} \left[ \Pi_t (S_t, V_t, X_t) \mid (S_{t-1} = s_i, V_{t-1} = v_j, X_{t-1} = x_k) \right]$  est une estimation de  $\mathbb{E} \left[ \Pi_t (S_t, V_t, X_t) \mid (S_{t-1} = s_i, V_{t-1} = v_j, X_{t-1} = x_k) \right]$  avec  $x^+ = \max(x, 0)$  et  $x^- = \max(-x, 0) \forall x \in \mathbb{R}$

Ainsi

$$\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_j, x_k) = \min_{\phi_l} \hat{\mathbb{E}} \left[ \Pi_t (S_t, V_t, X_t) \mid (S_{t-1} = s_i, V_{t-1} = v_j, X_{t-1} = x_k) \right], \tag{3.3}$$

$$\hat{\theta}_t^* = \underset{\phi_l}{\operatorname{argmin}} \hat{\Pi}_t (s_i, v_j, x_k). \tag{3.4}$$

On obtient des approximations  $\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_j, x_k)$  et  $\hat{\theta}_t^*(s_i, v_j, x_k)$  de  $\Pi_{t-1}(s_i, v_j, x_k)$  et  $\theta_t^*(s_i, v_j, x_k)$  sur la grille de points  $G$ . Pour des points  $(s, v, x)$  d'une trajectoire quelconque, qui ne se retrouveraient pas sur la grille, des approximations de  $\Pi_{t-1}$  et  $\theta_t^*$  peuvent être obtenues en procédant par interpolation.

Pour notre étude, nous utiliserons l'interpolation linéaire lorsque cela se produit

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_{t-1}(s, v, x) &= \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^d \left( A_{t-1}^{0,ijk} + sA_{t-1}^{1,ijk} + vA_{t-1}^{2,ijk} + xA_{t-1}^{3,ijk} + svA_{t-1}^{4,ijk} + sxA_{t-1}^{5,ijk} \right. \\ &\quad \left. + vxA_{t-1}^{6,ijk} + svxA_{t-1}^{7,ijk} \right) \mathbb{1}_{s_i \leq s \leq s_{i+1}} \mathbb{1}_{v_j \leq v \leq v_{j+1}} \mathbb{1}_{x_k \leq x \leq x_{k+1}}, \\ \tilde{\theta}_{t-1}^*(s, v, x) &= \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^d \left( B_{t-1}^{0,ijk} + sB_{t-1}^{1,ijk} + vB_{t-1}^{2,ijk} + xB_{t-1}^{3,ijk} + svB_{t-1}^{4,ijk} + sxB_{t-1}^{5,ijk} \right. \\ &\quad \left. + vxB_{t-1}^{6,ijk} + svxB_{t-1}^{7,ijk} \right) \mathbb{1}_{s_i \leq s \leq s_{i+1}} \mathbb{1}_{v_j \leq v \leq v_{j+1}} \mathbb{1}_{x_k \leq x \leq x_{k+1}}.\end{aligned}$$

Le coefficients des fonctions d'interpolation sont déterminés de sorte que

$$\begin{cases} \tilde{\Pi}_{t-1}(s, v, x) = \hat{\Pi}_{t-1}(s, v, x) & \text{si } (s, v, x) \in (G_S, G_V, G_X), \\ \tilde{\theta}_{t-1}^*(s, v, x) = \hat{\theta}_{t-1}(s, v, x) & \text{si } (s, v, x) \in (G_S, G_V, G_X). \end{cases}$$

Voir Annexe A pour la définition des coefficients  $A_t^{ijk}$  et  $B_t^{ijk}$ .

À  $t = 0$ , on estime la valeur initiale optimale du portefeuille de couverture

$$\hat{V}_0^{\theta^*} = \underset{V_0}{\operatorname{argmin}} \hat{\Pi}_0(s_i, v_j, x_k). \quad (3.5)$$

On résume la démarche dans un algorithme pour avoir une meilleure lisibilité.

Pseudo algorithme

---

**Algorithme 1** Calcul de la couverture globale dans le carnet d'ordres limites

---

$$\tilde{\Pi}_T = (V_T^\theta)^2$$

**for**  $t = T, \dots, 1$  **do**

**for**  $i = 1, \dots, p$  **do**

**for**  $j = 1, \dots, q$  **do**

**for**  $k = 1, \dots, d$  **do**

**for**  $l = 1, \dots, b$  **do**

$$X_t = x_k + \phi_l$$

On génère  $Z^1, \dots, Z^N$

$$\begin{array}{l} \nearrow S_t^1 = s_i e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma Z^1} \\ Z^1 \searrow V_t^1 = e^r v_j + s_i [e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma Z^1} \dots \rightarrow \tilde{\Pi}_t^1(S_t^1, V_t^1, X_t) \end{array}$$

$\vdots$

$$\begin{array}{l} \nearrow S_t^N = s_i e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma Z^N} \\ Z^N \searrow V_t^N = e^r v_j + s_i [e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma Z^N} \dots \rightarrow \tilde{\Pi}_t^N(S_t^N, V_t^N, X_t) \end{array}$$

$$\hat{\mathbb{E}}_{t-1} [ \Pi_t(s_i, v_j, x_k) ] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{\Pi}_t^n(S_t^n, V_t^n, X_t)$$

**end for**

$$\hat{\Pi}_t(s_i, v_j, x_k) = \min_{\phi_l} \hat{\mathbb{E}}_{t-1} [ \Pi_t(S_t, V_t, X_t) ]$$

$$\hat{\theta}_t^* = \operatorname{argmin}_{\phi_l} \hat{\Pi}_t(s_i, v_j, x_k)$$

**end for**

**end for**

**end for**

**end for**

$$\hat{V}_0^{\theta^*} = \operatorname{argmin}_{V_0} \hat{\Pi}_0(S_0, V_0, X_0)$$

Pour une trajectoire donnée

**for**  $t = 1, \dots, T$  **do**

  Calcul  $\tilde{\theta}_{t-1}^*(s, v, x)$

**end for**

---

## CHAPITRE IV

### RÉSULTATS ET INTERPRÉTATION

La stratégie de couverture globale est une méthode qui généralise toutes les stratégies de couverture, notamment la couverture delta. De plus, cette méthode s'applique sur tous les marchés complets et incomplets, liquides ou pas. Notre analyse consistera à évaluer l'applicabilité de la programmation dynamique pour approximer la stratégie de couverture globale dans un carnet d'ordres, selon le modèle défini à la Section 1.8.

#### 4.1 Cas particulier de liquidité parfaite du carnet d'ordres : $\alpha = \beta = 1$

Dans cette section, on veut comparer l'utilisation de couverture globale et de la couverture delta lorsque le carnet d'ordres est parfaitement liquide. Le modèle de structure utilisé dans ce mémoire pour décrire notre carnet d'ordre est judicieux en ce sens où il nous permet de le faire directement grâce aux paramètres du modèle. En effet, en posant  $\alpha = \beta = 1$ , la structure des fonctions de prix dans le carnet devient

$$\begin{cases} F_t^a(x) = xS_t, \\ F_t^v(x) = xS_t. \end{cases}$$

On constate qu'on retombe sur un modèle de Black-Scholes classique, où on achète et vend au même prix. On en déduit que

$$\begin{cases} L_t(x) = xS_t, \\ C_t(x) = xS_{t-1}. \end{cases}$$

La valeur du portefeuille de couverture devient dans ce cas

$$\begin{cases} V_t = e^r V_{t-1} + X_t \Delta_t, \quad \forall t < T, \\ V_T = e^r V_{T-1} + X_T \Delta_T - H_T. \end{cases}$$

Avec  $\Delta_t = S_t - e^r S_{t-1}$  et  $H_T = m(S_T - K)^+$  qui correspond à la valeur de paiement à l'échéance. Ce portefeuille correspond à celui du modèle de Black-Scholes. Néanmoins, sa valeur terminale est égale à l'erreur entre la valeur terminale du portefeuille de Black-Scholes et la valeur de paiement.

C'est une observation intéressante car rappelons-le, la couverture globale généralise la couverture delta. Nous pourrions donc évaluer la précision de notre algorithme en comparant la stratégie de couverture globale résultante avec la couverture delta.

## 4.2 Couverture delta dans le carnet d'ordre

Bien que la méthode de couverture globale soit théoriquement supérieure, sa complexité et les difficultés liées à son implémentation rendent son utilisation très difficile. Pour cette raison, la couverture delta demeure la stratégie souvent appliquée en pratique, même lorsque le marché est illiquide. Dans cette section, nous voulons mettre en exergue l'erreur de couverture supplémentaire générée par l'utilisation de la couverture delta dans le carnet d'ordres, lorsque ce dernier n'est pas liquide, c'est à dire

$(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$ .

Pour ce faire, on suppose maintenant qu'un agent souhaite couvrir ses positions en utilisant la couverture delta. Les échanges se faisant au travers du carnet d'ordres, le prix des actions dépendra de la taille de la transaction ainsi que de l'ordre soumis (achat/vente). Sauf qu'en calculant sa stratégie selon le modèle de Black-Scholes, il devrait pouvoir acheter et vendre toutes ses actions au même prix. Dès lors, la problématique de la dynamique d'un prix reflétant le prix unique du modèle de Black-Scholes tout en conservant la structure du carnet intervient.

Supposons que ce prix est noté  $P_t$ . Si l'agent veut négocier une seule action, son ordre sera exécuté au meilleur prix de la contrepartie existant dans le carnet (au meilleur prix d'achat  $F_t^a(1)$  ou de vente  $F_t^v(1)$ ). La littérature propose de définir  $P_t$  comme étant la moyenne entre ces deux prix

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{F_t^a(1) + F_t^v(1)}{2} \\ &= \gamma S_t \end{aligned}$$

Avec  $\gamma = (2^{\alpha-1} + 2^{\beta-1} - 1)$ .

Ce prix moyen suit également la dynamique d'un mouvement brownien géométrique mais contrairement au processus  $\{S_t\}_{t \geq 0}$ , il est soumis aux aléas du principe de l'offre et de la demande. Si on pose  $\alpha = \beta = 1$ , on retombe sur le cas classique du modèle de Black-Scholes  $P_t = S_t$ .

On en déduit la stratégie de couverture delta correspondante

$$X_{t+1}^{BS} = \Phi \left( \frac{\log \frac{P_t}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \right).$$

ainsi que la valeur du portefeuille qui y est associé

$$\begin{cases} V_t^{BS} = e^r V_{t-1}^{BS} + X_t^{BS} \Delta_t, \quad \forall t < T, \\ V_T^{BS} = e^r V_{T-1}^{BS} + X_T^{BS} \Delta_T - H_T. \end{cases}$$

### 4.3 Expériences numériques

Pour nos expériences, nous considérons une option d'achat européenne de maturité  $T = 3$  jours. La valeur initiale de l'actif est  $S_0 = 100$  et celle du prix d'exercice est  $K = 100$ . Nous faisons varier les paramètres d'ajustement de la structure de carnet d'ordres,  $\alpha \in \{1, 1.02\}$  et  $\beta \in \{1, 0.98\}$ , pour refléter différents scénarios de liquidités. Les autres paramètres de rendements que sont le taux sans risque  $r = 0\%$ , la dérive  $\mu = 0\%$  et la volatilité  $\sigma = 20\%$  sont supposés annuels. Vu que l'algorithme est très sensible aux valeurs du portefeuille, qui lui-même est extrêmement sensible aux variations du prix de l'indice, en posant  $r = 0$  et  $\mu = 0$ , on s'assure que les fluctuations de la trajectoire du prix de l'actif restent stable autour de la valeur initiale. Au cas où elle sortirait des bornes de la grille, on la tronque en la limitant aux frontières. Ces choix sont justifiés par les erreurs numériques constatées. Pour tous les points de trajectoire dont les valeurs ne seront pas sur la grille  $G$ , on procédera par interpolation linéaire pour approximer les résultats.

Nous considérons une grille fixe  $G = G_S \times G_V \times G_X \times G_\theta$  de taille  $61 \times 61 \times 61 \times 101$ , un pas de discrétisation fixe de 0.1 sur tous les axes de la grille. La grille  $G$  est

construite sur  $N = 3000$  simulations et les stratégies sont comparées sur  $M = 5000$  simulations.

Ainsi, en plus des erreurs d'estimations, l'algorithme sera fortement affecté par des erreurs d'approximations et de discrétisations. Il faudra en tenir lors de l'analyse des résultats.

Toutes les simulations sont réalisées sur l'environnement R.

### 4.3.1 Marché parfaitement liquide

Nous comparons ici nos deux stratégies lorsque le marché est liquide, c'est à dire  $\alpha = \beta = 1$ .

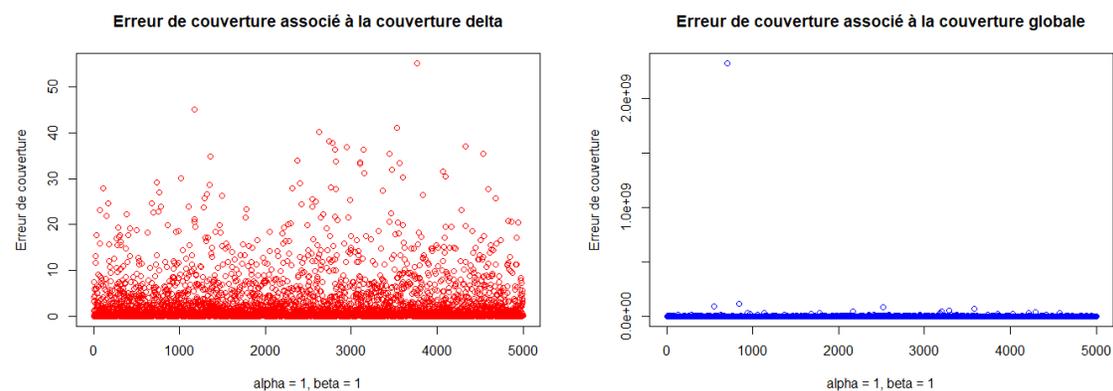


Figure 4.1: Comparaison des erreurs de couverture associées à la couverture delta et la couverture globale lorsque le marché est liquide.

On constate sur la figure 4.1 que les erreurs de couvertures obtenues avec la couverture delta sont dispersées entre 0 et 60, avec tout de même une forte concentration

des valeurs proches de 0 puisque la médiane est de 0.38374. On note également que 73% des observations sont en dessous de l'erreur moyenne qui est de 2.27. De manière générale, on peut dire que la couverture delta performe plutôt bien car l'erreur de couverture qu'elle génère est très souvent proche de 0.

Le constat est tout autre du côté de la couverture globale. Elle affiche une moyenne très élevée de 698600 bien que la majorité des valeurs oscillent sur le même intervalle que celles observées pour la couverture delta. Néanmoins, en comparant cette moyenne à l'erreur médiane qui est de 3, il est évident que certaines observations prennent des valeurs extrêmement grandes, ce qui entraîne l'explosion de la valeur moyenne de la stratégie. On peut voir sur la figure 4.1 qu'il y a par exemple une erreur de couverture qui atteint  $2.325 \times 10^9$ . Ces valeurs extrêmes sont observées lorsque la trajectoire de l'indice se rapproche des frontières de la grille  $G$ . La valeur du portefeuille qui est très sensible explose, ce qui nécessite de transiger une énorme quantité d'actions pour la ramener vers sa valeur optimale.

Pour avoir des résultats plus cohérents, on décide de ne conserver que les erreurs qui sont en dessous de la valeur maximale obtenue avec la stratégie delta. Ces valeurs qu'on voit sur la figure 4.2 représentent près de 83% des observations, ce qui est assez important pour soutenir une comparaison avec les résultats de la couverture delta. La nouvelle erreur moyenne calculée est désormais de 5.9 et la médiane se situe à 1.8587. Elle est certes toujours plus grande que l'erreur moyenne de la couverture delta mais l'écart entre les deux erreurs s'est considérablement réduit.

Il faut cependant noter que le calcul de la couverture delta ne souffre pas des erreurs d'estimations et d'approximations, puisqu'on utilise la formule explicite. Ce qui explique en partie pourquoi l'erreur de couverture qui y est associée est plus

faible.

Toutefois, les résultats produits par la couverture globale sont cohérents avec ceux de la couverture delta. On peut même penser que ces résultats seraient beaucoup plus proches sans toutes les difficultés computationnelles.

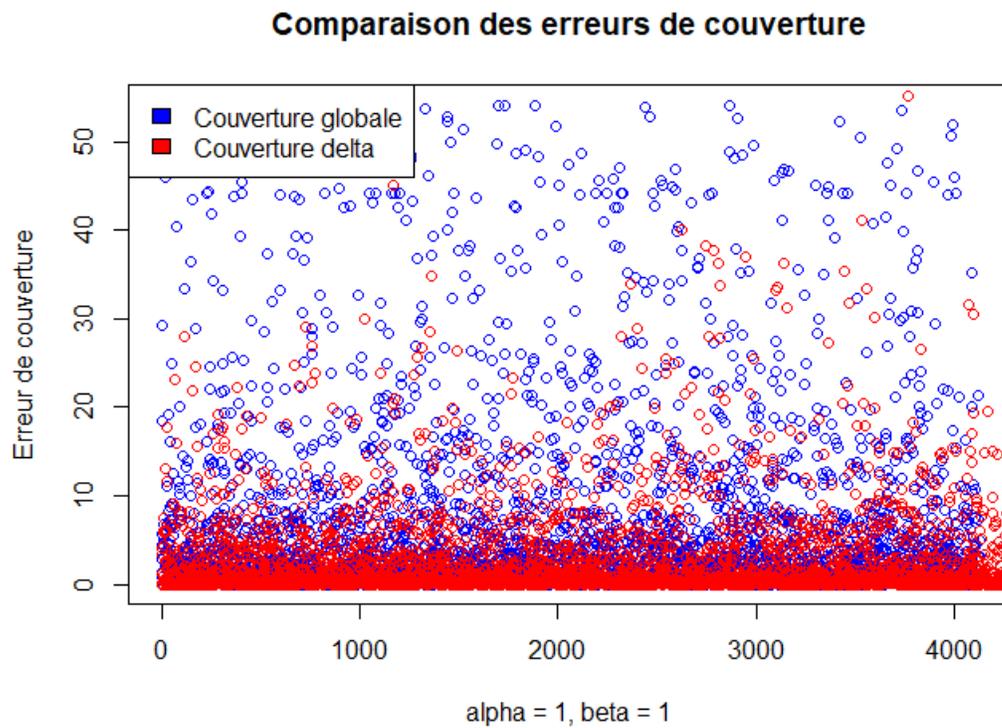


Figure 4.2: Comparaison des erreurs de couverture associées à la couverture delta et la couverture globale lorsque le marché est liquide.

### 4.3.2 Marché non liquide

On fixe maintenant les paramètres du modèle de sorte à ce que le marché ne soit plus liquide,  $(\alpha, \beta) = (1.02, 0.98)$ .

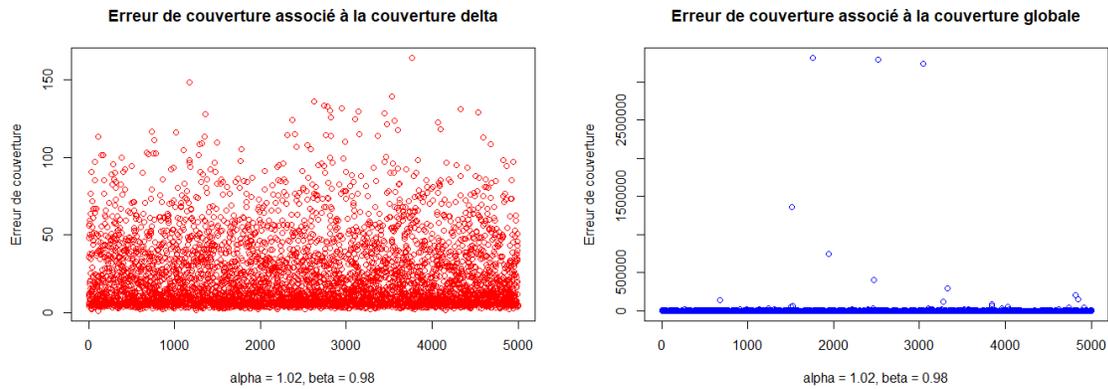


Figure 4.3: Comparaison des erreurs de couverture associées à la couverture delta et la couverture globale lorsque le marché n'est pas liquide.

On remarque ici que l'intervalle des valeurs a augmenté pour la stratégie delta tandis que celui de la couverture globale a baissé, avec une erreur médiane qui monte à 14.029 pour la première et qui baisse à 1 pour la seconde. Cela montre que dans l'ensemble, la couverture delta perd en précision, en témoigne l'erreur moyenne qui est désormais de 23.4. Étant donné que les prix d'achat et de vente des actions ne sont plus les mêmes, ils dépendent désormais de la quantité d'actions transigées, on peut en déduire que la stratégie delta n'est pas adaptée à ce changement de mécanisme du marché. En effet, le calcul de la stratégie delta nécessite que le marché soit complet et parfaitement liquide. La stratégie de couverture qui en découle n'est alors plus en accord avec la réalité du marché des ordres.

Du côté de la couverture globale, même si l'erreur moyenne a chuté à 2899.477, des valeurs aberrantes sont toujours observées lorsque les trajectoires sont proches des frontières de la grille. Comme dans le cas liquide, on choisit d'éliminer toutes les valeurs au-dessus de l'erreur maximale observée avec la couverture delta. Les valeurs conservées représentent cette fois-ci environ 93% des observations. Ce qui démontre que l'activité de la couverture globale est très proche de celle de couverture delta lorsque le marché n'est pas liquide.

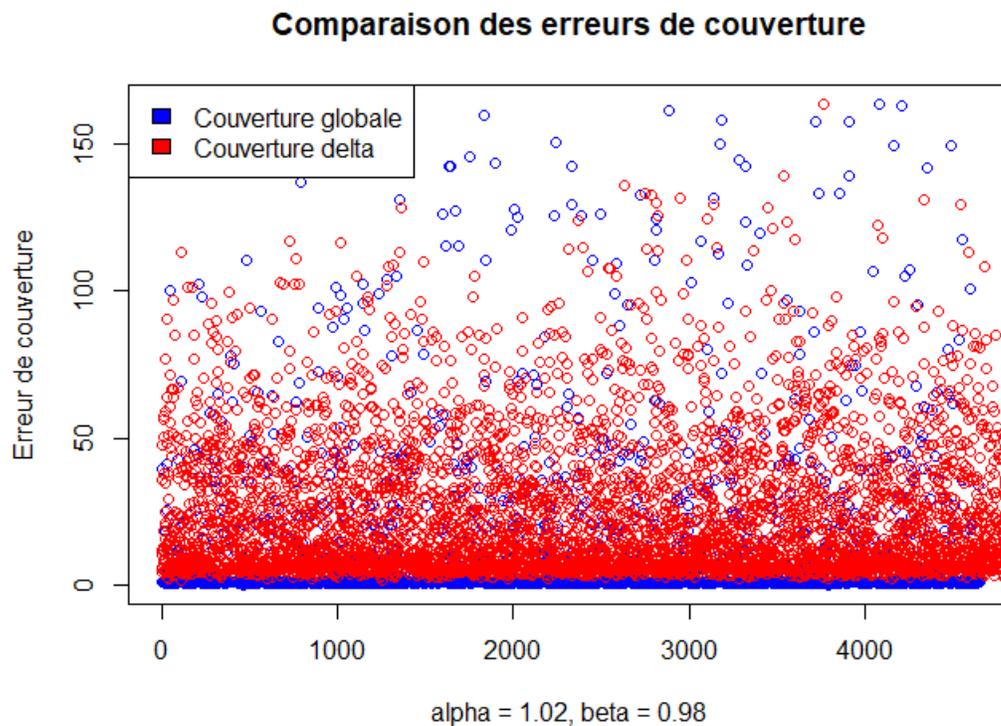


Figure 4.4: Comparaison des erreurs de couverture associées à la couverture delta et la couverture globale lorsque le marché n'est pas liquide.

Comme le montre la figure 4.4, il y a désormais beaucoup plus d'erreurs de couverture associées à la stratégie globale proche de 0 que celles associées à la stratégie delta. L'erreur médiane de 0.7512987 et l'erreur moyenne de couverture qui est de 5.82 viennent confirmer ce constat. Ceci est en tout point meilleur que les résultats observés avec la couverture delta.

Malgré les valeurs aberrantes constatées, nos expériences numériques ont démontré le potentiel de l'algorithme à fournir une stratégie de couverture pour un modèle de carnet d'ordres limites fiables. Cette stratégie respecte la structure des transactions dans le carnet, ce qui lui permet de mieux représenter la réalité du marché.

**Remarque.** *Plus le marché devient illiquide, c'est-à-dire pour des valeurs de  $\alpha$  plus grandes et des valeurs de  $\beta$  plus petites, plus les variations des trajectoires des variables d'état deviennent de plus en plus instables et extrêmes. On se retrouve alors beaucoup plus vite aux frontières de la grille. On devrait dans ce cas agrandir les grilles mais on ne serait plus capables de gérer les trajectoires et le rebalancement du portefeuille. Ainsi, pour de raisons numériques et computationnelles, nous nous limiterons à un niveau d'illiquidité raisonnable.*

## CONCLUSION

La couverture globale est une stratégie de couverture très complexe et ambitieuse qui généralise la couverture delta. Elle est très puissante en ce sens où elle peut être appliquée sur des marchés liquides ou non. Son implémentation nécessite un algorithme compliqué et l'utilisation d'un outil théorique très puissant qu'est la programmation dynamique.

Cependant, les difficultés computationnelles liées à sa mise en œuvre font qu'on lui privilégie la couverture delta par exemple, même lorsque le marché est illiquide.

L'objectif de ce travail de recherche était d'évaluer la pertinence de l'utilisation de la couverture globale comme stratégie de couverture dans un carnet d'ordre limite en lieu et place de la couverture delta.

Pour construire l'algorithme de programmation, il a fallu tenir compte de certaines considérations pour assurer son bon fonctionnement. En effet, pour réduire les problèmes de dimensions et éviter les longs temps de calcul, nous avons limité l'espace d'état à une grille d'état finie et discrétisée. L'algorithme qui en ressort présente une forte sensibilité aux valeurs du portefeuille et de rebalancement, particulièrement pour les valeurs proches des bords de la grille. On constate par exemple qu'il faut transiger d'importantes quantités d'actions pour ramener la valeur du portefeuille vers sa valeur optimale. Pour modérer ce phénomène, nous avons dû tronquer le prix de l'actif en le limitant aux frontières de la grille.

Tout ceci contribue à introduire de nombreuses erreurs de discrétisations et d'approximations à l'algorithme en plus des erreurs d'estimations. Raison pour laquelle on observe plusieurs valeurs aberrantes lorsque l'algorithme performe, particulièrement lorsque les trajectoires sont aux abords de la grille. Répétée sur chaque période de temps, l'accumulation de toutes ces erreurs conduit à l'explosion de la valeur terminale de portefeuille de couverture. Au vu de cette constatation, nous avons décidé de ne pas tenir compte des erreurs aberrantes puisqu'elles proviennent d'une capacité de calcul trop limitée.

Dans un premier temps, lorsque le carnet d'ordres est parfaitement liquide, la stratégie de couverture global aboutit à une erreur de couverture beaucoup plus grande que celle obtenue avec la couverture delta. Après filtration des observations par élimination des valeurs aberrantes, on constate une nette amélioration de l'erreur de couverture globale qui se rapproche de celle de la couverture delta. Sachant que la stratégie de couverture delta est calculée de façon explicite, on peut juger que cet écart observé est très satisfaisant. Théoriquement les deux erreurs de couverture seraient égales sans toutes les erreurs introduites dans l'algorithme de programmation.

En revanche, lorsque le carnet d'ordre devient illiquide, on constate que l'erreur de couverture générée par la stratégie globale est plus petite que celle produite par la couverture delta. En effet, la couverture delta dans le calcul de sa stratégie suggère que le marché est complet et parfaitement liquide. Cette considération dissipe certaines caractéristiques du carnet d'ordres, ce qui fait que la stratégie qui suit a du mal à capter toutes les spécificités du marché.

Inversement, la couverture globale respecte la structure de prix du carnet d'ordres. Ce qui lui permet de capter toutes les spécificités des transactions et de rester cohérente avec le marché.

En conclusion, il est d'abord important que noter que l'algorithme de programmation présentée dans ce mémoire n'est pas parfait. Il induit de nombreuses erreurs et nécessite plusieurs considérations. Mais malgré tous ces défauts, les résultats que produit l'utilisation de la couverture globale reste très encourageante et conforte le bien-fondé de son utilisation sur les marchés d'ordres.

Au vu de ces observations, notre algorithme mérite d'être optimisé, par exemple en agrandissant les grilles, en considérant des pas de discrétisation plus fin ou en utilisant d'autres fonctions d'interpolations. Par ailleurs on pourrait également s'interroger sur la pertinence de notre modèle de structure. N'existe t-il pas d'autres modèles de structure qui seraient plus flexibles, plus fidèles et plus cohérents des transactions dans le carnet d'ordres? Il serait intéressant d'explorer toutes ces pistes lors de travaux futures.

## APPENDICE A

### COEFFICIENTS D'INTERPOLATION

Comme mentionné à la section 3.2.1, pour des points  $(s, v, x)$  d'une trajectoire quelconque, des approximations de  $\Pi_{t-1}$  et  $\theta_t^*$  peuvent être obtenues on procédant par interpolation linéaire. Les coefficients d'interpolation  $A_{t-1}^{ijk}$  sont définis comme suit

$$\begin{aligned}
 A_{t-1}^{0,ijk} &= \frac{-s_{i+1}v_{j+1}x_{k+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_j, x_k) + s_{i+1}v_jx_k\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_j, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
 &+ \frac{+s_{i+1}v_jx_{k+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_{j+1}, x_k) - s_{i+1}v_jx_k\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_{j+1}, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
 &+ \frac{+s_i v_{j+1} x_{k+1} \hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_j, x_k) - s_i v_{j+1} x_k \hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_j, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
 &+ \frac{-s_i v_j x_{k+1} \hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_{j+1}, x_k) + s_i v_j x_k \hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_{j+1}, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{t-1}^{1,ijk} &= \frac{v_{j+1}x_{k+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_j, x_k) - v_{j+1}x_k\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_j, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
&+ \frac{-v_jx_{k+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_{j+1}, x_k) + v_jx_k\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_{j+1}, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
&+ \frac{-v_{j+1}x_{k+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_j, x_k) + v_{j+1}x_k\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_j, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j + v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
&+ \frac{+v_jx_{k+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_{j+1}, x_k) - v_jx_k\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_{j+1}, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{t-1}^{2,ijk} &= \frac{s_{i+1}x_{k+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_j, x_k) - s_{i+1}x_k\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_j, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
&+ \frac{-s_{i+1}x_{k+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_{j+1}, x_k) + s_{i+1}x_k\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_{j+1}, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
&+ \frac{-s_ix_{k+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_j, x_k) + s_ix_k\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_j, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j + v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
&+ \frac{+s_ix_{k+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_{j+1}, x_k) - s_ix_k\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_{j+1}, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{t-1}^{3,ijk} &= \frac{s_{i+1}v_{j+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_j, x_k) - s_{i+1}v_j\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_j, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
&+ \frac{-s_{i+1}v_j\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_{j+1}, x_k) + s_{i+1}v_{j+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_{j+1}, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
&+ \frac{-s_iv_{j+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_j, x_k) + s_iv_j\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_j, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j + v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
&+ \frac{+s_iv_j\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_{j+1}, x_k) - s_iv_{j+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_{j+1}, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{t-1}^{4,ijk} &= \frac{-x_{k+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_j, x_k) + x_k\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_j, x_{k+1}) + x_{k+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_{j+1}, x_k)}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
&+ \frac{-x_k\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_{j+1}, x_{k+1}) + x_{k+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_j, x_k) - x_k\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_j, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
&+ \frac{-x_{k+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_{j+1}, x_k) + x_k\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_{j+1}, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{t-1}^{5,ijk} &= \frac{-v_{j+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_j, x_k) + v_{j+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_j, x_{k+1}) + v_j\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_{j+1}, x_k)}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
&+ \frac{-v_j\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_{j+1}, x_{k+1}) + v_{j+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_j, x_k) - v_{j+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_j, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
&+ \frac{-v_j\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_{j+1}, x_k) + v_j\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_{j+1}, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{t-1}^{6,ijk} &= \frac{-s_{i+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_j, x_k) + s_{i+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_j, x_{k+1}) + s_{i+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_{j+1}, x_k)}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
&+ \frac{-s_{i+1}\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_{j+1}, x_{k+1}) + s_i\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_j, x_k) - s_i\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_j, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
&+ \frac{-s_i\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_{j+1}, x_k) + s_i\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_{j+1}, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{t-1}^{7,ijk} &= \frac{\hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_j, x_k) - \hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_j, x_{k+1}) - \hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_{j+1}, x_k) + \hat{\Pi}_{t-1}(s_i, v_{j+1}, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j - v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
&+ \frac{-\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_j, x_k) + \hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_j, x_{k+1}) + \hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_{j+1}, x_k)}{(s_i - s_{i+1})(v_j + v_{j+1})(x_k - x_{k+1})} \\
&+ \frac{-\hat{\Pi}_{t-1}(s_{i+1}, v_{j+1}, x_{k+1})}{(s_i - s_{i+1})(v_j + v_{j+1})(x_k - x_{k+1})}
\end{aligned}$$

Les coefficients d'interpolation  $B_{t-1}^{ijk}$  sont décrits de manière analogue en remplaçant  $\hat{\Pi}_{t-1}$  par  $\hat{\theta}_{t-1}^*$ .

## RÉFÉRENCES

- Agliardi, R. et Gençay, R. (2017). Optimal trading strategies with limit orders. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 20(01), 1750005.
- Alfonsi, A., Fruth, A. et Schied, A. (2010). Optimal execution strategies in limit order books with general shape functions. *Quantitative finance*, 10(2), 143–157.
- Basak, S. et Chabakauri, G. (2012). Dynamic hedging in incomplete markets : a simple solution. *The review of financial studies*, 25(6), 1845–1896.
- Bayraktar, E. et Ludkovski, M. (2011). Optimal trade execution in illiquid markets. *Mathematical Finance : An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 21(4), 681–701.
- Bertsimas, D. et Lo, A. W. (1998). Optimal control of execution costs. *Journal of Financial Markets*, 1(1), 1–50.
- Black, F. et Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
- Černỳ, A. (2004). Dynamic programming and mean-variance hedging in discrete time. *Applied Mathematical Finance*, 11(1), 1–25.
- Cont, R., Stoikov, S. et Talreja, R. (2010). A stochastic model for order book dynamics. *Operations research*, 58(3), 549–563.
- Gökay, S. et Soner, H. M. (2014). Hedging in an illiquid binomial market. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 16, 1–16.
- Obizhaeva, A. A. et Wang, J. (2013). Optimal trading strategy and supply/demand dynamics. *Journal of Financial Markets*, 16(1), 1–32.
- Schweizer, M. (1995). Variance-optimal hedging in discrete time. *Mathematics of Operations Research*, 20(1), 1–32.
- Simard, C. (2014). General model for limit order books and market orders. *Available at SSRN 2435198*.

Simard, C. et Rémillard, B. (2019). Pricing european options in a discrete time model for the limit order book. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 21(3), 985–1005.