UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

INTERVENTIONS POUR ENSEIGNER LA FACTORISATION VISANT À DONNER DU SENS À CE CONCEPT À TRAVERS DES EXPLORATIONS SÉMANTIQUES : CO-ÉLABORATION ENTRE CHERCHEUSE ET ENSEIGNANTS DU SECONDAIRE

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

PAR
FLORENCE GENTET

DÉCEMBRE 2021

REMERCIEMENTS

L'écriture de ces remerciements marque la fin de la grande aventure de mon mémoire. Bien que la pandémie ait rendu mes rendez-vous avec mon ordinateur parfois pénibles, il faut le dire, c'est avec la plus grande fierté que je peux enfin affirmer que c'est terminé.

J'aimerais tout d'abord remercier mes directeurs de recherche Mireille et David pour leur support et leurs encouragements du début à la fin de ce projet. Merci de m'avoir encadré comme vous l'avez fait. Merci de vous être lancé tête première dans mes idées et dans ce (très) long mémoire. Merci pour votre enthousiasme contagieux et votre implication sans précédent ! Un gros merci aussi à tous les professeurs avec qui j'ai été en contact de proche ou de loin. Particulièrement à Brigitte et Fernando avec qui j'ai travaillé sur plusieurs démonstrations, et aussi à Doris pour m'avoir accueilli dans son équipe pour mon stage de recherche. Vous avez tous marqué mon parcours à la maîtrise et mon bref passage dans le monde de la didactique des mathématiques.

Cet accomplissement n'aurait pas été possible sans mon amoureux, Jean-Philippe. Une chance que nous avons traversé tout ça ensemble. Ta présence et ton écoute tous les jours lors de ces deux dernières années de travail acharné m'auront permis de continuer d'avancer dans les moments où j'aurais préféré tout lâcher. Merci d'avoir pris le temps de m'aider à démêler mes idées quand j'en avais besoin. Il y a un peu de toi dans ce mémoire après tout !

Un merci tout spécial à ma grande amie Audrey-Ann, qui a partagé avec moi de nombreuses journées de rédaction, faisant elle-même son mémoire en éducation. J'ai apprécié chacun de ces petits moments de bonheur à tes côtés. Nos discussions, nos rires et nos remises en question ont fait partie intégrante de mon cheminement et je n'aurais voulu les vivre avec personne d'autre.

Merci aussi à mes proches et ma famille de m'avoir enduré et épaulé dans les hauts et les bas, et de m'endurer et de m'épauler encore et pour toujours. La motivation n'a pas toujours été au rendez-vous, mais votre support, vos encouragements et votre fierté auront sufi à me permettre de continuer d'avancer.

Enfin, ce projet n'aurait pas pu voir le jour sans les deux enseignants participants de cette recherche collaborative, Annie et Francis. Merci d'avoir pris tout ce temps pour discuter d'enseignement de la factorisation avec moi pendant vos journées pédagogiques. Merci pour votre grande implication lors des rencontres. Et merci d'être encore aujourd'hui des enseignants merveilleux qui m'accompagnent dans mon début de carrière en enseignement des mathématiques !

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

La factorisation occupe une grande place dans le programme de formation de l'école québécoise, et plusieurs études rapportent des difficultés chez les élèves à ce sujet. Celles-ci semblent être reliées à un enseignement axé sur des manipulations et des procédures qui ne s'avère pas permettre, à lui seul, de *donner du sens* au concept et parait problématique pour alimenter la compréhension des élèves. De plus, la pratique enseignante et la recherche en didactique des mathématiques partagent des préoccupations communes autour de la factorisation. Mais bien que la recherche propose des pistes de solution, la voix aux enseignants du secondaire y est peu présente alors que ceux-ci sont les acteurs pivots de l'enseignement-apprentissage de la factorisation. C'est pourquoi ce projet de mémoire visait à travailler conjointement avec les enseignants à partir d'une approche collaborative. Plus précisément, il avait pour objectif, avec des enseignants du secondaire, la co-élaboration d'interventions pour enseigner la factorisation visant à *donner du sens* à ce concept chez les élèves. Pour atteindre cet objectif, des réflexions théoriques et conceptuelles approfondies ont été menées a priori. Elles m'ont permis de développer ce qui a été appelé le « cadre des explorations sémantiques ». Ce cadre permet d'aller, de différentes manières, au-delà du contrôle syntaxique prédominant dans les classes du secondaire, qui se traduit par l'importance accordée aux techniques de factorisation. Les explorations sémantiques portent notamment sur les représentations visuelles et le lien bidirectionnel entre la factorisation et le développement algébrique. Ma collaboration avec deux enseignants du secondaire a fait ressortir deux résultats majeurs : (1) un apport théorique pour la recherche en didactique des mathématiques à travers l'enrichissement du cadre des explorations sémantiques et (2) un apport pratique pour les enseignants grâce à la co-construction d'une séquence d'enseignement de la factorisation qui donnerait du sens au concept. La rencontre entre les cultures de recherche et d'enseignement a permis non seulement de documenter les pratiques enseignantes autour d'un sujet réputé difficile et central dans le curriculum, mais aussi de créer du matériel didactique concret pour le milieu scolaire.

Mots clés : Factorisation, enseignement de l'algèbre, contrôle sémantique/syntaxique, recherche collaborative, enseignement des mathématiques, enseignement au secondaire, pratiques enseignantes.

INTRODUCTION

Mes expériences personnelles dans les écoles ont généré chez moi plusieurs questionnements autour d'un concept bien précis du deuxième cycle du secondaire : la factorisation. Mes observations m'ont permis de remarquer le caractère très procédural et manipulatoire de ce concept, alors que les techniques de factorisation semblent prédominantes dans l'enseignement-apprentissage. Un survol du programme de formation de l'école québécoise (PFEQ) et de quelques manuels scolaires m'ont convaincu du manque de ressources pour guider les enseignants[1] sur le *comment* enseigner le concept et aussi sur la façon lui donner du sens pour justement aller plus loin que l'application des techniques de factorisation par les élèves. C'est ce manque apparent de sens accordé à la factorisation dans les classes du secondaire qui m'a poussé à faire de l'enseignement de ce concept le sujet de ce mémoire. Je m'intéresse donc aux façons possibles de *donner du sens* à la factorisation pour aider à la compréhension du concept par les élèves. L'expertise des enseignants me parait indispensable, ce qui fait en sorte que je désire travailler conjointement avec eux, dans le cadre d'une recherche collaborative autour de cet objet de la pratique qui semble préoccuper les deux mondes : la pratique enseignante et la recherche en didactique des mathématiques.

Le chapitre I, qui est la problématique de ce mémoire, comprendra d'abord mon questionnement de départ en lien avec la factorisation au secondaire. Je reviendrai sur

[1] Le générique masculin employé dans ce mémoire est de genre neutre pour désigner aussi bien les femmes que les hommes. Il est utilisé simplement pour alléger le texte et faciliter sa lecture.

la prévalence des manipulations algébriques et des procédures dans l'enseignement-apprentissage de ce concept. Bien que la factorisation occupe une grande place dans le PFEQ, on n'y trouve rien pour guider les enseignants quant à son enseignement. Pourtant, la factorisation possède plusieurs prolongements au secondaire en plus d'engendrer plusieurs difficultés chez les élèves. Un tour d'horizon des travaux réalisés autour de la factorisation sera aussi présent dans ce chapitre, alors qu'il révèle deux pistes de solution pour aider les élèves et éventuellement donner du sens à la factorisation : l'approche par des représentations visuelles (Hoong *et al.*, 2010 ; Hosson, 1999 ; Sharp, 1995 ; Simon, 2013) et l'utilisation de l'histoire des mathématiques (Barbin, 1997 ; Clark, 2012 ; Jankvist, 2009). Comme les enseignants ont un rôle des plus importants quant à l'enseignement-apprentissage de la factorisation et qu'un manque se fait ressentir dans la recherche par rapport au point de vue de ceux-ci, mon objectif est de co-élaborer, avec des enseignants, des interventions visant à donner du sens à la factorisation. Je désire ainsi aller voir si ces pistes provenant de la recherche sont fécondes dans le milieu scolaire, en prenant en considération les contraintes et les préoccupations des praticiens (et de la recherche).

Dans le chapitre II du cadre conceptuel, je débuterai par un portrait de la factorisation dans le contexte du Québec. De fait, c'est une vision très particulière du concept qui est privilégiée dans les écoles secondaires québécoises. Par exemple, ce sont seulement des techniques de factorisation qui sont présentes dans le PFEQ. Aussi, les polynômes rencontrés par les élèves sont très souvent du deuxième degré et leurs coefficients se limitent presque toujours à des nombres entiers ou des décimaux simples et familiers pour les élèves. Ces constats m'amènent à aborder les habiletés nécessaires pour factoriser. Mais bien qu'elles soient indispensables dans l'enseignement-apprentissage de la factorisation, elles ne sont pas suffisantes pour donner du sens au concept. En effet, ces habiletés font référence à la dimension syntaxique du contrôle en algèbre, alors que sa dimension sémantique semble absente. Toutefois, ces deux types de contrôle sont essentiels et indissociables (Kouki, 2018 ; Saboya *et al.*, 2015). Mes réflexions m'amènent ensuite à conclure la chose suivante : donner du sens à la factorisation, c'est développer une vision de la factorisation qui a trait à différentes caractéristiques d'ordre sémantique. Ceci a abouti au développement de ce que j'appellerai le « cadre des explorations sémantiques ». Celui-ci est composé de quatre explorations sémantiques autour de : (1) l'objet mathématique, le concept de factorisation, (2) les différentes représentations, (3) l'aspect historique de la factorisation et (4) l'utilité de la factorisation, situer le concept. Je terminerai ce chapitre en détaillant ces explorations et leurs composantes.

Comme je souhaite travailler *avec* les enseignants et non pas *sur* les enseignants comme certains chercheurs l'ont fait précédemment (Abou Raad et Mercier, 2009 ; Simon, 2013), une collaboration avec eux me parait essentielle. Mon choix méthodologique s'est donc arrêté sur la recherche collaborative selon le modèle développé par Desgagné-Bednarz (Bednarz, 2013b ; Desgagné, 1998, 2001 ; Desgagné *et al.*, 2001). Ainsi, le chapitre III sera l'occasion pour moi d'expliciter les fondements et la définition de la recherche collaborative. Aussi, j'aborderai plus en détail le sens de la collaboration dans le modèle de recherche choisi, où tous les partenaires de la recherche s'interinfluencent constamment (Desgagné *et al.*, 2001 ; Morrissette, 2013 ; Pepin et Desgagné, 2017). La description des étapes de ce type de recherche – qui sont les étapes de co-situation, de co-opération et de co-production – et du critère de double vraisemblance sera proposée. Ce critère se doit d'être respecté à toutes les étapes, alors qu'il s'agit de prendre en compte le point de vue, les contraintes et les préoccupations de la pratique et de la recherche (Bednarz, 2013a). Ceci me permettra d'ailleurs de préciser mon objectif de recherche, qui sera maintenant teinté du cadre des explorations sémantiques et de la recherche collaborative. Je décrirai ensuite le déroulement et les outils de la collecte de données, en plus de faire le portrait des participants. Les participants sont deux enseignants, Annie et Francis, qui ont enseigné à plus de quatre reprises la factorisation en quatrième secondaire de la séquence SN et qui possèdent des préoccupations communes aux miennes. Enfin, dans ce chapitre, j'expliquerai comment j'ai procédé l'analyse des données et y présenterai les deux grilles d'analyse.

L'analyse des données en soi se trouvera dans le chapitre IV de ce mémoire. J'y conduirais l'analyse des rencontres de co-situation menées avec chaque enseignant et celle des deux rencontres réflexives de co-opération entre tous les partenaires de la recherche. Pour y arriver, je m'appuie sur les balises conceptuelles du projet, qui sont les explorations sémantiques et les habiletés à développer pour factoriser. Je présenterai, après chacune des analyses, une synthèse de ce qui ressort des différentes rencontres du projet. Brièvement, plusieurs nouvelles composantes ont fait leur apparition et une cinquième exploration sémantique autour de l'utilisation de contextes qui mobilisent la factorisation a émergé. En plus, les enseignants et moi-même avons co-construit une séquence d'enseignement autour de ce concept pour lui donner du sens à travers la lunette des explorations sémantiques et des habiletés. Mes commentaires à chaud provenant de mon journal de bord pour rendre compte de mes impressions, réflexions et questionnements en tant que chercheuse collaborative seront aussi présents tout au long de ce chapitre, ainsi que les contraintes et préoccupations des enseignants que nous devions considérer.

À son tour, le chapitre V regroupera diverses discussions autour des résultats de la recherche. Après avoir pris le temps de situer mon projet par rapport aux autres recherches sur la factorisation, je mettrai en évidence les deux résultats importants de mon mémoire : (1) l'apport théorique pour la recherche en didactique des mathématiques avec le développement du cadre des explorations sémantiques et (2) l'apport pratique pour le milieu scolaire avec la co-élaboration de la séquence d'enseignement de la factorisation. D'une part, je ferai un retour sur l'évolution des explorations sémantiques et une mise à jour de ses composantes, en abordant par exemple celles qui sont les plus porteuses de sens et celles qui le sont moins selon les enseignants et moi-même. D'autre part, je reviendrai sur la façon dont la séquence d'enseignement a été co-construite en mentionnant l'apport de chaque partenaire dans ce travail. Pour clore ce chapitre, je partagerai mes réflexions autour de la collaboration vécue avec les enseignants et les défis que j'ai rencontrés pendant ce projet.

En conclusion de ce mémoire, en plus de revenir sur mon objectif (et mes questions) de recherche, j'exposerai les limites du projet, puis ses retombées pour les participants et aussi pour la recherche et la pratique enseignante au sens plus large. Entre autres, pour la recherche, il s'agit d'éclairer le monde de la didactique des mathématiques quant à l'enseignement-apprentissage de la factorisation au secondaire au Québec en proposant le cadre des explorations sémantiques qui visent à donner du sens à la factorisation.. Pour la pratique, les retombées sont la formation continue que les enseignants Annie et Francis ont reçue ainsi que le matériel didactique pour le milieu scolaire à travers la séquence d'enseignement co-construite. Je terminerai en exposant certains prolongements possibles à la recherche collaborative menée.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

Dans ce premier chapitre, je partagerai différentes observations provenant de mon passage dans les écoles secondaires. Elles concernent le sujet de ce mémoire – la factorisation et son enseignement – et sont à l'origine même de mon questionnement de départ. Sans vouloir dénoncer ou critiquer la pratique enseignante, j'ai remarqué la présence d'un caractère très procédural et manipulatoire dans l'enseignement de la factorisation, ce qui m'amène à m'interroger sur le sens accordé à ce concept de la part des élèves. De plus, la factorisation est un sujet de préoccupation pour les enseignants qui sont confrontés à de nombreuses difficultés des élèves, difficultés rapportées également par les chercheurs. Un tour d'horizon dans la recherche en didactique des mathématiques me permettra de faire ressortir deux éléments potentiellement intéressants pour donner du sens à la factorisation : les représentations visuelles et l'histoire des mathématiques. Toutefois, peu d'études se sont intéressées à la fois à la factorisation et à son enseignement, et ce bien que ce concept soit important dans le curriculum québécois.

Comme la littérature donne très peu d'information sur le sujet choisi, il me semble pertinent d'entreprendre une recherche qui s'allie à la pratique pour documenter un enseignement de la factorisation axé sur le sens. Cette initiative provient, d'une part, de ma volonté en temps que jeune enseignante d'axer sur le sens, alors que j'ai pu constater les difficultés d'une telle entreprise dans la pratique. D'autre part, de mon désir de travailler avec des enseignants préoccupés par la factorisation qu'ils décrivent comme ardue pour les élèves. Mon objectif est donc d'aller co-construire, avec des enseignants du secondaire, des interventions visant à donner du sens à la factorisation. Ceci me permettra de voir, je l'espère, ce qu'il est possible de faire concrètement en classe, grâce à une collaboration et un travail commun.

1.1 Questionnement de départ

La factorisation est l'un des concepts importants dans le programme de formation de l'école québécoise (PFEQ) de la quatrième et de la cinquième secondaire[2], dans les séquences Technico-sciences (TS) et Sciences naturelles (SN)[3]. Selon mon expérience personnelle dans les écoles, elle occupe un chapitre entier dans la planification des enseignants, principalement centrée sur la mise en évidence double et les identités algébriques du second degré, telles que le trinôme carré parfait et la différence de carrés. Ce chapitre précède celui sur la fonction du second degré, où les élèves sont alors amenés à réinvestir leurs acquis concernant la factorisation, notamment pour résoudre des équations du second degré et passer d'une forme d'écriture de la règle de la fonction à une autre. Dans la séquence SN, c'est en quatrième secondaire que sont travaillés ces deux chapitres et la complétion du carré, comme l'indique le programme de formation de l'école québécoise. En comparaison, pour la séquence TS, la fonction du second

[2] L'âge des élèves en quatrième secondaire est habituellement de 15-16 ans et de 16-17 ans pour les élèves de cinquième secondaire.

[3] Au Québec, la troisième secondaire (14-15 ans) est commune à tous les élèves. Ils doivent par la suite choisir entre trois séquences pour leur quatrième et cinquième secondaire : Culture, société et technique (CST), Technico-sciences (TS) et Sciences naturelles (SN). La séquence CST permet d'approfondir les connaissances de base des élèves, et est souvent associée au programme *régulier* dans les écoles. La séquence TS propose plutôt une approche près du quotidien, explorant l'application des concepts mathématiques. Elle prépare les élèves aux domaines techniques du marché du travail. La séquence SN est, quant à elle, souvent décrite comme programme *enrichi* dans les écoles. Elle amène les élèves à se questionner sur l'origine et le fonctionnement des phénomènes étudiés, et demande, de la part des élèves, une capacité d'abstraction supérieure aux deux autres séquences (MELS, 2007).

degré et la complétion du carré sont plutôt abordées dans la dernière année du deuxième cycle, en cinquième secondaire (MELS, 2007).

J'ai réalisé mon quatrième et dernier stage en enseignement des mathématiques au secondaire avec des groupes de quatrième secondaire en SN. Lors de ce stage, j'ai terminé le chapitre sur la factorisation avec les élèves et j'ai enseigné, par la suite, le chapitre complet de la fonction du second degré. Lorsque j'ai débuté mon stage, mon enseignante associée avait déjà terminé l'enseignement de la factorisation à proprement dit, puisque j'ai seulement enseigné, à mon tour, les expressions rationnelles. En ce sens, les élèves avaient déjà été initiés aux techniques de factorisation et c'est dès mes premiers cours que j'ai pu faire certains constats qui m'ont personnellement dérangée et qui me semblent problématiques. Ainsi, les élèves sont confrontés à ce sujet plutôt abstrait, habituellement présenté comme un ensemble de procédures dans l'objectif de développer chez eux des automatismes face aux polynômes présentés dans les exercices et les examens, d'après mes observations. Le résultat selon moi? Le sens accordé à la factorisation par les élèves m'a semblé pauvre. Ils ne ressentent pas la nécessité de comprendre la factorisation et les techniques qui y sont associées, car ce qu'il leur est demandé par les enseignants semble se limiter à l'application de manipulations apprises par cœur, à des *recettes* claires et qui fonctionnent à tous les coups pour factoriser n'importe quel polynôme.

Ce sont ces premiers constats qui m'ont d'abord amenés à me questionner sur le sens accordé à la factorisation dans son enseignement-apprentissage. En tant que jeune enseignante, et sans vouloir dénoncer ces pratiques, je m'interroge quant aux raisons sous-jacentes qui poussent les enseignants à axer leur enseignement sur des techniques de factorisation, et pas principalement sur le sens du concept.

C'est en côtoyant les élèves lors de mon quatrième stage que j'ai pu me rendre compte de leurs méthodes pour factoriser. Ceux-ci travaillaient à partir d'une feuille distribuée par leur enseignante, où des indications bien structurées étaient inscrites précisant les étapes à faire lorsqu'ils devaient factoriser un polynôme (voir figure 1.1[4]).

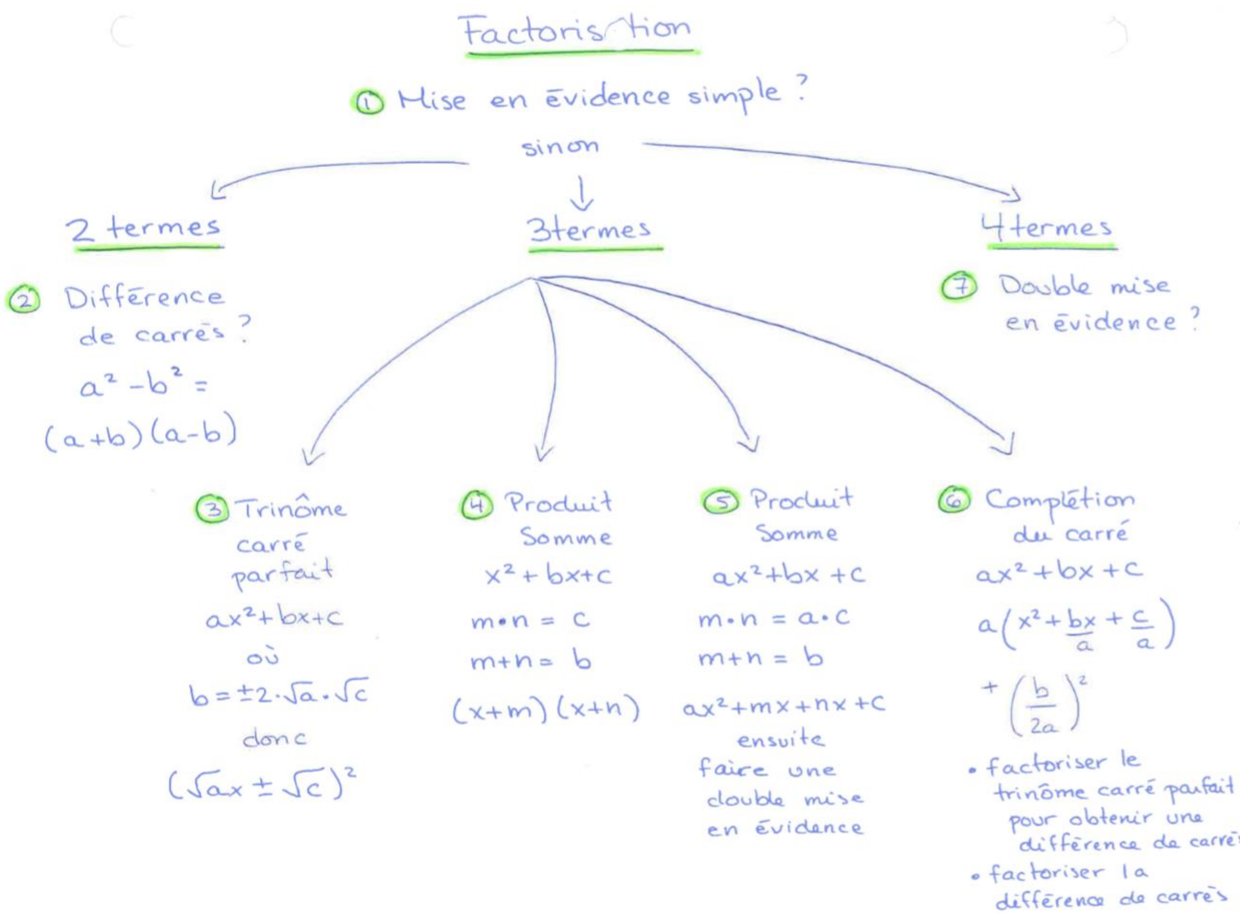


Figure 1.1 Feuille synthèse sur les différentes techniques de factorisation élaborée par une enseignante, Annie

[4] Annie est l'enseignante associée qui a encadré mon quatrième stage en enseignement des mathématiques. Elle a plus tard été recrutée comme participante pour cette recherche. Elle intervient à la deuxième année du deuxième cycle du secondaire dans la séquence Sciences naturelles (SN).

En premier lieu, l'élève regarde s'il peut effectuer une mise en évidence simple. Si ce n'est pas le cas, il devra identifier le nombre de termes du polynôme à factoriser. S'il a deux termes, il se questionnera à savoir s'il s'agit d'une différence de carrés. S'il est en présence de trois termes, les possibilités sont plus nombreuses : est-ce un trinôme carré parfait? Peut-on utiliser le « produit somme » (on distingue le cas où le coefficient du terme du deuxième degré est 1 de celui qui est autre que 1)? Si aucune de ces éventualités n'est satisfaite, il devra alors se tourner vers la complétion du carré. Le dernier cas de figure est celui où l'expression comporte 4 termes, il s'agira alors de regarder si on peut procéder à une double mise en évidence. Dans tous ces cas, l'étape d'après est de factoriser. Ainsi, sur la feuille de la « recette », plusieurs colonnes bien définies désignent ce qu'il faut faire selon le type de trinôme à factoriser. Chacune de ces colonnes est associée une technique de factorisation et décrit la procédure à utiliser pour l'appliquer[5]. Comme, entre autres, le « produit somme », ce truc algébrique qui fonctionne seulement avec des trinômes précis composés de coefficients entiers. J'emploie ici le mot *truc* puisque les élèves n'ont pas vraiment été amenés à comprendre d'où provient le « produit somme » et pourquoi il fonctionne en terme de sens mathématique. Seules les étapes à réaliser pour l'appliquer sont proposées. Ceci fait en sorte que les élèves se limitent généralement à exécuter la procédure enseignée.

Prenons un exemple de factorisation utilisant le « produit somme ». Le trinôme à factoriser, de la forme $ax^2 + bx + c$, est $3x^2 + 8x + 4$. L'idée dans cette méthode est de décomposer le deuxième terme, celui en x, pour être en mesure de réaliser ensuite une mise en évidence double, technique qui nécessite la présence de quatre termes dans l'expression algébrique à factoriser. Pour y arriver, il est nécessaire de trouver deux nombres qui additionnés ensemble donnent b, dans cet exemple 8, et qui multipliés ensemble donnent $a \cdot c$, ici $3 \cdot 4 = 12$. À ce moment, il faut effectuer des essais pour

[5] Je fais la distinction entre une technique et une procédure dans ce mémoire. Une procédure est constituée des étapes à suivre pour appliquer une certaine technique (de factorisation dans ce cas).

trouver les deux nombres qui respectent les deux contraintes, celle de la somme et celle du produit. Une fois que les deux nombres sont déterminés, dans l'exemple il s'agit de 6 et 2, il suffit de suivre la démarche algébrique présentée ci-dessous et d'effectuer la mise en évidence double.

$$3x^2 + 8x + 4 = 3x^2 + 6x + 2x + 4$$
$$3x^2 + 8x + 4 = 3x(x+2) + 2(x+2)$$
$$3x^2 + 8x + 4 = (3x+2)(x+2)$$

$$produit = 3 \cdot 4 = 12 = 6 \cdot 2$$
$$somme = 8 = 6 + 2$$

Les élèves de mon stage avaient presque tous leur feuille de « recette » devant eux quand venait le temps de factoriser un polynôme, pour être en mesure de suivre les étapes décrites. Une automatisation du processus de factorisation semblait être visée. Ceux qui réussissaient à factoriser sans la feuille avaient mémorisé les techniques enseignées. Dans ce cas, il me semble difficile d'affirmer que les élèves sont conscients du sens mathématique derrière les techniques et les trucs qu'ils utilisent. Dans cette optique, je me demande ce que les élèves comprennent de la factorisation.

Est-ce que l'enseignement de techniques prédéterminées présentées sous forme de « recettes » aux élèves, le tout au détriment du sens de la factorisation, pourrait avoir des retombées négatives sur les élèves? J'aurais tendance à croire que oui, mais qu'en pensent les enseignants? Comment s'y prennent-ils véritablement? Dès le chapitre suivant, celui portant sur la fonction de second degré, les élèves sont amenés à réinvestir leurs habiletés pour factoriser. En effet, que ce soit pour trouver les zéros de la fonction ou bien pour passer d'une forme d'écriture de la règle de la fonction à une autre (entre autres pour passer de la forme générale à la forme factorisée), les élèves réutilisent la factorisation. Cependant, comme j'ai pu le remarquer lors de mon quatrième stage, les élèves éprouvent des difficultés à le faire, puisqu'ils se retrouvent maintenant dans un contexte différent, dans un chapitre différent. Ils ont du mal à transférer leurs connaissances et compétences antérieures d'un chapitre à l'autre.

Comme ils n'ont majoritairement pas l'air d'avoir saisi le sens même de ce qu'est l'action de factoriser à travers les techniques apprises, il devient ardu pour eux de le faire de manière efficace et instinctive lorsqu'ils sont confrontés à des trinômes déguisés en règle d'une fonction de second degré. De fait, les retombées du côté abstrait de la factorisation se font déjà ressentir dans les semaines suivant l'enseignement du chapitre de la factorisation.

Ainsi, d'après mes observations dans quelques écoles, l'enseignement de la factorisation au secondaire semble, la plupart du temps, se centrer sur l'enseignement de certaines techniques choisies. L'objectif ne semble pas être la recherche du sens de la factorisation (et les techniques associées), ou d'aller au-delà de l'enseignement de procédures à mémoriser par les élèves. Tout ceci transparait par l'existence de feuilles de « recettes » (voir figure 1.1). Et ce ne sont pas non plus les manuels scolaires qui aideront les enseignants à se distancer de cet aspect procédural, malheureusement[6]. De fait, en observant brièvement les manuels, on retrouve souvent seulement la *procédure*. Ils expliquent la façon d'utiliser une certaine méthode ou technique sans toutefois mentionner d'où elle provient et pourquoi elle fonctionne. C'est principalement le cas avec le « produit somme », d'ailleurs. En revanche, mon but ici n'est pas de condamner l'existence de ces techniques de factorisation ou bien l'aspect manipulatoire de ce concept. Ce qui me préoccupe, c'est plutôt le fait que la factorisation se centre sur l'application de procédures, alors que, comme on le verra plus loin, elle mériterait d'être beaucoup plus développée que cela.

Tous ces éléments proviennent de ma brève expérience en tant qu'enseignante et stagiaire. Mais qu'en pensent réellement les enseignants qui enseignent la factorisation dans les écoles? Pourquoi certains d'entre eux axent leur enseignement sur des

---

[6] Une analyse sommaire de trois manuels scolaires de la quatrième année du secondaire pour la séquence SN sera présentée dans le chapitre 2 de ce mémoire (voir section 2.1.1).

techniques et des procédures? Croient-ils que l'enseignement des techniques de factorisation est suffisant pour la compréhension de ce concept par les élèves? Est-ce que les enseignants possèdent des manières différentes d'aborder la factorisation avec leurs élèves? Est-ce qu'ils détiennent des ressources sur lesquelles ils s'appuient lors de l'enseignement de la factorisation? Certains enseignants se sentent-ils démunis par rapport à l'enseignement de la factorisation, ou sont-ils plutôt confiants de leurs méthodes actuelles? Quelles pourraient être des manières efficaces et différentes pour l'enseignement de la factorisation au secondaire qui permettraient de donner plus de sens à ce concept? Ces nombreuses interrogations illustrent que ce sont les enseignants et leur savoir d'expérience qui m'intéressent et qui sont les premiers concernés quant à cette problématique autour du sens de la factorisation. Je me questionne particulièrement sur l'enseignement de la factorisation, toujours dans l'idée de donner du sens à la factorisation et aux techniques qui lui sont associées.

Pour approfondir ces questions et mes intérêts de recherche, je discuterai, dans ce chapitre, de l'importance de la factorisation en mathématiques. Je me pencherai ensuite sur ce qui a déjà été fait en recherche autour de la factorisation, ainsi que sur la place des enseignants dans ces recherches. Enfin, une synthèse de ces éléments me permettra d'établir en dernier lieu les objectifs de ce projet de recherche.

1.2 Importance de la factorisation

D'abord et avant tout, la factorisation est un concept important en mathématiques au secondaire. En plus de sa place significative dans le programme de formation de l'école québécoise et de ses nombreux prolongements, la factorisation est un concept relativement difficile pour les élèves, ce qui montre la nécessité de s'attarder à son enseignement-apprentissage.

1.2.1 La factorisation dans le programme de l'école québécoise

Pour les enseignants, et même dans plusieurs manuels scolaires[7], la factorisation compose un chapitre entier dans leur planification. Dans les séquences TS et SN de la quatrième secondaire, ce concept est toujours invoqué lors des examens ministériels de mathématiques, comme j'ai pu le constater en consultant les versions des années précédentes en stage. En plus, la factorisation est l'un des concepts qui différencient le programme enrichi du programme régulier de quatrième secondaire. Mais la factorisation est abordée pour la première fois à la troisième année du secondaire avec la mise en évidence simple. C'est d'ailleurs le principal préalable que les élèves doivent maîtriser pour se lancer dans l'apprentissage de la factorisation en quatrième secondaire. En plus, le PFEQ place la multiplication d'expressions algébriques de degré inférieur à 3 et la division d'expressions algébriques par un monôme en troisième secondaire. C'est aussi à ce niveau que les élèves sont amenés à effectuer diverses opérations sur des expressions algébriques (addition, soustraction, multiplication et division par une constante) (MELS, 2007).

Les élèves possèdent donc des préalables en algèbre et plus particulièrement pour la factorisation lorsqu'ils débutent en quatrième secondaire. Ils sont normalement à l'aise avec la manipulation d'expressions algébriques de degré inférieur à 3 et avec la mise en évidence simple. Ces acquis sont essentiels pour permettre aux élèves de factoriser avec les différentes techniques de factorisation prescrites par le programme de formation, dont la mise en évidence double, la complétion du carré, la substitution d'identités algébriques du second degré (trinôme carré parfait et différence de carrés) et les formules quadratiques. Ces techniques sont vues en quatrième secondaire dans la séquence SN et en quatrième et cinquième secondaire dans la séquence TS. Dans ces

[7] Je fais référence plus particulièrement aux manuels : *Intersection* (Boucher *et al.*, 2009), *Point de vue* (Guay *et al.*, 2008) et *Visions* (Cardin *et al.*, 2008).

deux séquences, les élèves sont aussi amenés à diviser un polynôme par un autre (MELS, 2007). Le tableau 1.1. présente une synthèse des éléments en lien direct avec la factorisation provenant de la progression des apprentissages, un document qui se veut être un complément du PFEQ. La progression des apprentissages permet d'avoir rapidement une vue d'ensemble des concepts mathématiques à enseigner.

Tableau 1.1 Progression des apprentissages concernant les connaissances associées à la factorisation en algèbre (MEES, 2016, p. 15)

→ L'élève apprend à le faire avec l'intervention de l'enseignante ou de l'enseignant.

★ L'élève le fait par lui-même à la fin de l'année scolaire.

L'élève réutilise cette connaissance.

	Primaire	Secondaire					
		1er cycle		2e cycle			
B. Manipulation d'expressions algébriques	6e	1re	2e	3e	4e	5e	
6. Factoriser des polynômes à l'aide							
a. de mises en évidence simples				★			
b. de la mise en évidence double (polynômes incluant les trinômes du second degré décomposables)							CST
					★		TS
					★		SN
c. de la complétion du carré (factorisation et passage d'une forme d'écriture à l'autre)							CST
						★	TS
					★		SN
d. de formules pour les trinômes de la forme $ax^2 + bx + c$: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$							CST
						★	TS
					★		SN
e. de la substitution d'identités algébriques du second degré (trinôme carré parfait et différence de deux carrés)							CST
					★		TS
					★		SN

Les éléments à enseigner en lien avec la factorisation sont clairs et bien exposés dans la progression des apprentissages (voir tableau 1.1) ainsi que dans le programme de formation. En effet, les termes *factoriser* et *factorisation* sont facilement repérables dans le PFEQ, et sont présents dans les concepts et processus du champ de l'algèbre et de l'arithmétique. Toutefois, il n'y a pas de précisions sur le « comment » aborder la factorisation avec les élèves dans le programme de formation. À ce sujet, Lajoie et Bednarz (2012, 2014) soulignent que dans les documents officiels au Québec du 20e siècle en mathématiques – et plus précisément autour de la résolution de problèmes – des conseils aux enseignants étaient présentés, mais que ceux-ci ont été de plus en plus évincés plus on s'approche de la fin du siècle. On ne sent donc plus ce souci de donner des conseils aux enseignants. En effet, pour la factorisation, aucune indication n'est présente dans les éléments de méthodes du PFEQ pour guider les enseignants dans leurs manières d'enseigner ce concept important (et les techniques associées).

1.2.2 Les prolongements de la factorisation

En plus d'occuper une place importante dans le programme de formation de l'école québécoise, la factorisation possède plusieurs prolongements. D'abord, la factorisation est essentielle pour la manipulation d'expressions rationnelles, où les élèves du secondaire sont amenés à factoriser les numérateurs et les dénominateurs de ces expressions pour être en mesure de les simplifier. Ensuite, le prolongement le plus apparent est l'étude de la fonction polynomiale de second degré. Comme j'ai eu l'occasion de le constater lors de mon quatrième stage en enseignement des mathématiques au secondaire, le chapitre sur la fonction de second degré suit généralement celui de la factorisation. La raison est fort simple : la factorisation est directement réinvestie dans l'étude de la fonction du second degré. De fait, les élèves sont notamment amenés à trouver les zéros de la fonction du second degré et à passer d'une forme d'écriture à une autre (la factorisation étant exploitée particulièrement pour aller vers la forme factorisée de la fonction). Toujours au secondaire, la factorisation est aussi réinvestie dans la résolution d'équations et d'inéquations du second degré à une et à deux variables, en quatrième secondaire dans la séquence SN et en cinquième secondaire dans la séquence TS. Enfin, à la dernière année du deuxième cycle, les élèves de la séquence SN travaillent les systèmes d'équations du second degré, où la factorisation devient un outil nécessaire pour faciliter leur résolution (MELS, 2007).

Au secondaire, les prolongements de la factorisation sont donc nombreux, mais ils le sont aussi au niveau collégial (élèves de 17 à 19 ans). Par exemple, particulièrement dans les cours de calcul intégral, les étudiants seront confrontés à toutes sortes d'expressions algébriques et d'expressions rationnelles qu'ils devront factoriser pour être en mesure d'intégrer. Ils devront passer par la factorisation pour appliquer certaines techniques d'intégration, comme l'intégration par parties ou par changement de variables. Entre autres, la factorisation est utilisée pour intégrer des fonctions rationnelles à l'aide de fractions partielles, comme le démontre l'exemple suivant, tiré du livre *Calcul intégral* (Stewart, 2014, p. 143). Dans ce livre destiné aux étudiants collégiaux, il est explicitement mentionné d'utiliser la factorisation dans la démarche pour intégrer le type suivant de fonction : « Comme le degré du polynôme au numérateur est plus petit que celui du dénominateur, il n'est pas nécessaire d'effectuer une division. On **factorise** le dénominateur. » (p. 143) Ici, l'idée est donc de factoriser le dénominateur de la fonction pour décomposer cette dernière en fractions partielles, qui sont plus faciles à intégrer. Voici un exemple d'intégrale à évaluer :

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$$

La première étape consiste à **factoriser** le dénominateur de la fonction rationnelle.

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

Il faut ensuite la décomposer en fractions partielles, puis déterminer les valeurs de A, de B, et de C.

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

$$x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

$$\begin{cases} 2A + B + 2C = 1 \\ 3A + 2B - C = 2 \\ -2A = -1 \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2} \qquad B = \frac{1}{5} \qquad C = -\frac{1}{10}$$

Il reste maintenant à évaluer l'intégrale de départ en passant par les fractions partielles.

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx = \int \left[\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x + 2} \right] dx$$

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|2x - 1| - \frac{1}{10}\ln|x + 2| + K$$

En bref, avec cet exemple, qui n'en est qu'un parmi d'autres, il est possible de montrer que la factorisation n'est pas un concept qui se limite à l'enseignement secondaire, mais qui est réinvesti dans des cours de mathématiques plus avancés.

1.2.3 Difficultés, erreurs et conceptions erronées associées à la factorisation

Bien que la factorisation occupe une place importante dans le PFEQ et qu'elle possède plusieurs prolongements, c'est un concept complexe pour les élèves dû aux nombreuses difficultés qui y sont associées. Avant de présenter des exemples de difficultés en lien avec la factorisation et son enseignement-apprentissage, il est nécessaire de mentionner que les manipulations algébriques de toutes sortes sont une grande source de difficultés chez les élèves (p. ex. Bednarz et Dufour-Janvier, 1992 ; Booth, 1984 ; Matz, 1982). Ces études présentent divers exemples qui peuvent être liés à la factorisation, comme l'erreur type $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ (Mejía Palomino, 2004 ; Simon, 2013). En fait, de manière générale, les lois des exposants sont problématiques pour les élèves lorsque vient le temps de factoriser (Janvier, 2010), ainsi que les propriétés algébriques de base (Matz, 1982), alors qu'elles sont essentielles pour manipuler les polynômes en jeu dans la factorisation. Il serait possible de soulever d'autres difficultés en lien avec l'algèbre.

Pour ne pas alourdir le texte, je vais plutôt me concentrer sur la présentation des conceptions et difficultés spécifiques à la factorisation.

Des conceptions erronées

Les élèves développent certaines conceptions erronées à propos de la factorisation, généralement causées par l'enseignement reçu. Par exemple, les élèves peuvent penser que la factorisation est un procédé exclusivement utilisé pour des expressions quadratiques et qui ne fait intervenir que des nombres entiers (Sanchez, 1997). Effectivement, d'après mon expérience et selon des manuels scolaires[8], les polynômes utilisés dans les exemples, les exercices et les examens en factorisation au secondaire sont presque toujours des trinômes du second degré, composés de coefficients entiers. Cette régularité peut mener les élèves à croire que ce sont les seules expressions qu'il est possible de factoriser. C'est donc aux enseignants de varier les polynômes choisis. De plus, comme le soulève Simon (2013), « 1 » n'est pas toujours perçu comme un carré par les élèves : « […] ainsi, devant l'expression $(x^2 - 1)$ les élèves diront ne pas pouvoir factoriser comme suit $(x - 1)(x + 1)$. » (p. 4) D'ailleurs, Croset (2007) soulève la difficulté à reconnaître que $(x^2 - 1)$ est en fait une différence de carrés.

Des difficultés

J'ai pu constater plusieurs difficultés vécues par les élèves lors de mon stage et portant sur le chapitre de la factorisation. En premier, le caractère bidirectionnel entre la factorisation et le développement est difficile à percevoir par les élèves : ils ne comprennent pas que l'un est l'inverse de l'autre (Matz, 1982 ; Mejía Palomino, 2004). Ainsi, les élèves ont tendance à plutôt croire que la forme factorisée et la forme développée sont deux expressions distinctes. Toutefois, reconnaître des formes

[8] Une analyse sommaire de manuels scolaires provenant de trois collections de la quatrième secondaire SN autour de la factorisation sera présentée au début du chapitre 2 de ce mémoire (voir section 2.1.1).

équivalentes est une habileté à développer pour factoriser (Simon, 2013). La figure 1.2 est un exemple de cette relation bidirectionnelle entre la factorisation et le développement :

DÉVELOPPER

$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$$

$$(x+4)(2x-3) = 2x^2 + 5x - 12$$

$$\leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow$$

FACTORISER

Figure 1.2 La relation bidirectionnelle entre la factorisation et le développement (Janvier, 2010)

Selon Bardini (2000), les élèves éprouvent aussi des difficultés à reconnaître si un polynôme se factorise ou non. En effet, ce ne sont pas toutes les expressions algébriques qui peuvent être factorisées. D'ailleurs, Simon (2013) soutient qu'une des habiletés à développer par les élèves pour factoriser est de reconnaître les formes qui se factorisent de celles qui ne se factorisent pas. Cette habileté est essentielle pour contrer la prochaine difficulté. De fait, il est difficile pour les élèves de factoriser « au maximum »[9] (Abou Raad et Mercier, 2009 ; Bardini, 2000). Ce que j'entends par là, c'est que certains polynômes nécessitent plusieurs factorisations successives pour être factorisés au maximum, afin d'obtenir la forme attendue par les enseignants dans les classes du secondaire. Prenons un exemple de polynôme qui se factorise plus d'une fois, $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$. Il est possible d'effectuer une mise en évidence double pour commencer, pour obtenir $x^2(x+5) - 4(x+5) = (x^2-4)(x+5)$. Par la suite, il est possible de faire une différence de carrés avec le facteur $x^2 - 4$, pour obtenir la forme finale factorisée voulue, $(x-2)(x+2)(x+5)$. C'est à cette deuxième étape que les élèves éprouvent de la difficulté. Plusieurs d'entre eux s'arrêtent après la mise en évidence double, croyant que la factorisation est terminée et ne reconnaissant pas que

[9] Je reviendrai sur la factorisation dite « au maximum » dans le cadre conceptuel (voir section 2.3.2)

$x^2 - 4$ se factorise à son tour. Dans le même ordre d'idées, il peut être difficile pour les élèves de reconnaître et sélectionner la bonne technique de factorisation pour factoriser une expression donnée (Janvier, 2010 ; Simon, 2013), et plus particulièrement avec les identités remarquables – comme la différence de carrés ou le trinôme carré parfait (Bardini, 2000). En fin d'apprentissage, les élèves sont confrontés à des polynômes de toutes sortes, nécessitant un travail de réflexion pour déterminer comment les factoriser. Ils ont appris plusieurs techniques de factorisation, mais il devient ardu pour eux de reconnaître quelle technique on peut utiliser.

Ensuite, en ce qui concerne les mises en évidence, une difficulté qui me paraît très fréquente chez les élèves est de trouver le plus grand facteur commun entre plusieurs termes algébriques (Janvier, 2010). Les élèves ont des difficultés lorsque vient le temps de déterminer « ce qu'ont en commun deux termes algébriques », autant par rapport aux variables qu'aux coefficients. Et c'est encore plus le cas quand le facteur commun n'est pas un monôme, mais un binôme! Comme le souligne Simon (2013) :

> Lors de certaines mises en évidence double, des élèves ne reconnaissent pas un binôme comme pouvant être le plus grand facteur commun. Par exemple, si on demande de factoriser $x(2x+3)+2y(2x+3)$, des élèves ne verront pas que $(2x+3)$ est le facteur commun.

Et même une fois le plus grand facteur commun trouvé, il peut s'avérer difficile pour les élèves d'effectuer la factorisation demandée, c'est le cas plus particulièrement lorsqu'il faut faire apparaitre le facteur « 1 » dans une mise en évidence, comme le montre l'exemple suivant : $(x-4)+(x-4)x=(x-4)(1+x)$ (Croset, 2007).

Enfin, le niveau de complexité d'une factorisation augmente considérablement selon la complexité des expressions à factoriser (Abou Raad et Mercier, 2009 ; Bardini, 2000). Par exemple, il peut être difficile pour les élèves d'effectuer une factorisation lorsque le polynôme a un degré ou un nombre de termes très élevé, ou que les coefficients sont grands, négatifs ou non entiers. La nature des variables peut aussi être un facteur à considérer, les élèves étant généralement habitués de travailler avec des lettres comme *x, y, a* et *b*, l'utilisation de lettres différentes pouvant mélanger les élèves.

Point de vue des enseignants autour des difficultés ressenties par les élèves

Le concept de factorisation préoccupe Line, une enseignante de quatrième secondaire en SN ayant participé à une étude portant sur la factorisation au secondaire (Simon, 2013)[10] et qui enseigne à ce niveau depuis une quinzaine d'années. L'enseignante souligne que le chapitre de la factorisation est ardu pour les élèves. D'ailleurs, cette enseignante enseigne la factorisation en début d'année scolaire pour permettre aux élèves de changer de séquence s'ils ont vécu trop de difficultés dans ce chapitre. Les élèves peuvent alors choisir de passer du cours enrichi vers le cours régulier. À ce titre, Simon explique que :

> Line enseigne la factorisation en début d'année scolaire. Elle précise que plusieurs élèves s'inscrivent dans la séquence *Sciences Naturelles* en mathématique sans avoir le niveau nécessaire pour pouvoir suivre. En présentant la factorisation dès le début, chapitre qui est considété comme assez ardu, plusieurs élèves décident de changer de séquence mathématique après avoir eu de la difficulté. Ce choix ne serait plus possible si l'année était plus avancée. (p. 53)

C'est d'ailleurs cette préoccupation de Line qui l'amène à s'impliquer dans la recherche de Simon autour de ce concept. Au final, les enseignants du secondaire sont confrontés à enseigner la factorisation sans avoir de balises de la part du programme de formation de l'école québécoise, de conseils sur les possibles façons d'enseigner le concept, alors que ce dernier pose de nombreuses difficultés aux élèves et est source d'erreurs et de conceptions erronées.

---

[10] Je reviendrai sur la recherche de Simon (2013) dans la section 1.3.1 de ce présent chapitre.

1.3 Tour d’horizon des travaux réalisés autour de la factorisation

Puisque la factorisation est un concept important en mathématiques au secondaire, il n’est pas surprenant que certains chercheurs aient réalisé des études autour de ce dernier, bien que celles portant exclusivement sur la factorisation ne soient pas très nombreuses. Parmi ces recherches, il est possible d’en retrouver quelques-unes qui vont dans le même sens que mes préoccupations énoncées dans la section 1.1 de mon questionnement de départ, alors qu’elles dénoncent l’aspect trop procédural de l’enseignement de la factorisation (Abou Raad et Mercier, 2009 ; Sharp, 1995)[11]. Entre autres, Abou Raad et Mercier (2009) ont réalisé une étude pour comparer l’enseignement de la factorisation en France et au Liban. Ils ont travaillé avec deux enseignants de chaque pays, dans le but de documenter comment les enseignants envisagent, expliquent et perçoivent le concept de la factorisation et ses techniques. Ils se sont intéressés aux interventions des enseignants en classe avec les élèves à travers le langage et le vocabulaire qu’ils utilisent pour enseigner la factorisation. Après leurs expérimentations dans les classes, les chercheurs ont conclu que les enseignants (et donc les élèves) manquent de termes techniques, mathématiques, pour parler de la factorisation. Le registre utilisé par les enseignants est trop familier et *de surface* selon Abou Raad et Mercier (2009), qui donnent comme exemple une explication telle que « le facteur commun est celui qu’on voit plus qu’une fois », qui n’est pas une définition rigoureuse de ce qu’est un facteur commun. Enfin, les chercheurs affirment que dans les deux pays, la factorisation semble dénuée de sens, alors que son enseignement se résume à la présentation de routines et de règles à appliquer par les élèves. Ils mentionnent que :

> C’est peu de dire que l'enseignement de la factorisation au Liban est formel et que le sens en est absent, mais les textes qui, en France, demandent que

---

[11] L’étude de Sharp (1995) sera résumée plus loin, dans la section 1.3.1.

> les pratiques algébriques prennent du sens parce qu'elles auront pour objet le travail d'un modèle, n'ont semble-t-il pas d'effet sur un enseignement de la factorisation qui apparaît toujours comme transmission d'une technique sans motif, silencieuse et muette, qui se présente comme routinière à qui la rencontre pour la première fois! C'est en tous cas ce que montrent, bien malgré eux parfois, les enseignants de toutes les classes observées. (Abou Raad et Mercier, 2009, p. 184-185)

Je me pose alors la question suivante : comment éviter cette « transmission d'une technique sans motif, silencieuse et muette »? Ce sont, pour moi, des constats bien alarmants. Il me semble y avoir une nécessité de changer le registre utilisé pour l'enseignement de la factorisation, une nécessité de s'éloigner des procédures, des règles, des routines et des *trucs*. Et pour y parvenir, certaines pistes ont déjà été étudiées par quelques chercheurs. En particulier pour aborder la factorisation, deux approches ont été exploitées dans différentes recherches : l'approche par des représentations visuelles, comme les tuiles algébriques par exemple, et l'approche historique en mathématiques.

1.3.1 Recherches en lien avec les représentations visuelles

La majorité des recherches portant sur la factorisation sont en lien avec diverses représentations visuelles. Elles visent principalement l'amélioration de l'apprentissage de la factorisation grâce au visuel, pour contrer les différentes difficultés des élèves et donner du sens à la factorisation.

Rejoignant mes constats et préoccupations (voir section 1.1), Sharp (1995) mentionne que dans la majorité des écoles secondaires, l'algèbre est enseignée comme un amalgame de procédures à mémoriser et de compétences isolées à développer. La chercheuse s'appuie sur Kaput (1989) pour affirmer que les élèves qui seraient en mesure de faire des liens entre les représentations physiques et les représentations mathématiques d'une idée mathématique donneraient du sens à cette idée. Ainsi, elle s'est intéressée à l'intégration d'une représentation physique dans l'enseignement de l'algèbre, plus précisément de la factorisation : les tuiles algébriques (voir figure 1.3 pour un exemple de factorisation avec des tuiles algébriques).

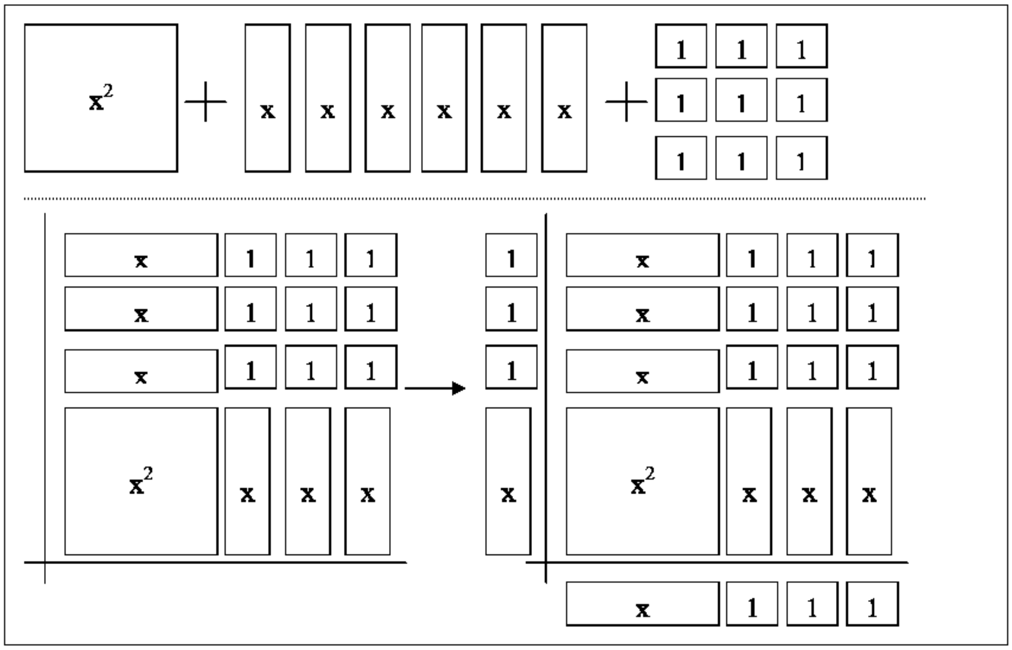


Figure 1.3 Exemple de l'utilisation des tuiles algébriques pour la factorisation du polynôme $x^2 + 6x + 9$ (Jeannotte, 2004, p. 22)

Pour son étude, Sharp a décidé de réaliser une recherche quantitative, où des groupes expérimentaux d'élèves ont utilisé les tuiles algébriques dans leur apprentissage de la factorisation, alors que des groupes contrôles n'ont utilisé aucune manipulation physique pour factoriser. Les groupes ont été comparés en fonction de leurs résultats à des examens identiques, après avoir travaillé sur les mêmes exemples et exercices en classe autour de la factorisation. L'analyse des résultats des examens des élèves n'a révélé aucune différence signifiante entre les groupes expérimentaux et les groupes contrôles. Cependant, grâce à l'analyse d'entrevues et de journaux d'élèves, Sharp a été en mesure de conclure que de manière générale, après les expérimentations, les élèves ne faisaient plus la distinction entre les tuiles algébriques et les mathématiques en jeu. C'est-à-dire que les élèves ne parlaient plus seulement de l'utilisation des tuiles algébriques, comme c'était le cas au départ, mais bel et bien des mathématiques qui étaient faites avec les tuiles. En ce sens, les tuiles sont devenues un outil qui leur permet de résoudre des problèmes mathématiques, et non seulement du matériel à manipuler. Bien que les tuiles algébriques ne fassent pas augmenter les résultats académiques des élèves, elles leur permettent de visualiser les manipulations algébriques associées à la factorisation, ce qui, selon les élèves, rendrait l'apprentissage plus facile :

> Results of diary narrative data indicated that the majority of students stated that the tiles added a mental imagery that made learning "easier". They indicated that they found it easy to think about algebraic manipulations when they visualized the tiles. (Sharp, 1995, p. 3)

Toujours sur les tuiles algébriques, Hosson (1999) a réalisé son mémoire de maîtrise sur l'étude des raisonnements des élèves lors de l'utilisation des tuiles algébriques dans l'enseignement-apprentissage de la multiplication et la division de polynômes. Cette étude ne concerne pas la factorisation en soi, mais elle permet de confirmer les résultats de Sharp quant à l'utilisation des tuiles algébriques dans l'enseignement-apprentissage de l'algèbre. En effet, Hosson conclut en affirmant que les tuiles algébriques peuvent contribuer à favoriser l'apprentissage de l'algèbre, si leur utilisation reste simple et que l'enseignant est présent pour aider les élèves à faire les liens entre les manipulations algébriques et les représentations visuelles. Je reviendrai sur l'apport de l'enseignant dans l'utilisation des tuiles algébriques à la section 1.4.

Les tuiles algébriques ne sont qu'un seul type de représentations dites visuelles pour travailler la factorisation. Par exemple, dans une étude, des chercheurs et des enseignants d'une école secondaire de Singapour ont transformé les tuiles algébriques pour obtenir ce qu'ils appellent le *Rectangle Diagram* (Hoong *et al.*, 2010). Ces derniers ont remarqué que l'enseignement de la factorisation était un défi, car les élèves éprouvaient des difficultés avec ce concept, alors que la majorité n'arrivait pas à factoriser correctement une expression quadratique. Le but de l'étude était donc de développer chez les élèves leurs compétences pour factoriser. Pour y arriver, un prétest a d'abord été réalisé avec des élèves pour voir l'ampleur de leurs difficultés. L'équipe de recherche désirait alors trouver une nouvelle approche pour aborder la factorisation avec les élèves, qui respecterait cinq critères bien précis qu'ils ont définis en se basant sur les difficultés ressorties des prétests. Cette nouvelle approche devait donc (1) apparaître concrète pour les élèves, (2) demander un minimum de prérequis en algèbre, (3) avoir du sens pour les élèves, (4) permettre de voir la factorisation comme étant l'inverse du développement et (5) être utilisable directement par les élèves dans un contexte d'évaluation.

En ce sens, l'équipe de recherche a exploré différentes approches visuelles pour factoriser, commençant par les *Algecards*, qui reviennent aux tuiles algébriques telles que présentées plus tôt. Les *Algecards* respectent bien les quatre premiers critères, mais pas le cinquième. Les chercheurs font alors une transition vers le *Rectangle Diagram*, une version simplifiée des *AlgeCards*. De cette manière, il devient possible de traiter plus facilement des polynômes avec des coefficients négatifs et très grands, ce qui était difficile avec l'approche précédente; les cinq critères étaient alors satisfaits. Le *Rectangle Diagram* se distingue des *Algecards* par la fusion des tuiles de même nature. Ainsi, dans le cas de la factorisation d'une équation quadratique de la forme $ax^2 + bx + c$, les tuiles en x^2 sont fusionnées ensemble, les tuiles unités aussi, alors que les tuiles en x sont plutôt fusionnées en deux groupes, pour construire un rectangle bien défini (voir figure 1.4 pour l'illustration de cette transition).

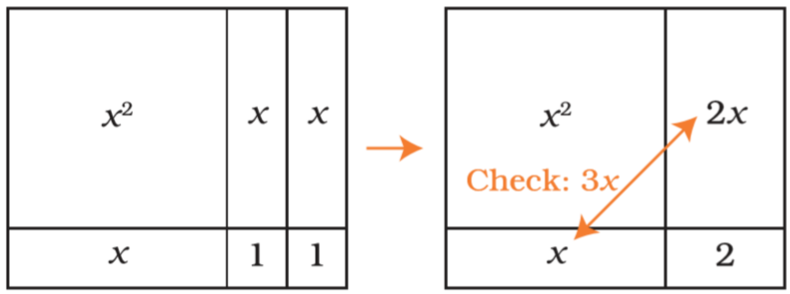


Figure 1.4 Illustration de la transition des Algecards (à gauche) vers le Rectangle Diagram (à droite) pour la factorisation du polynôme $x^2 + 3x + 2$ (Hoong *et al.*, 2010, p. 22)

La figure 1.5 illustre un exemple de factorisation utilisant la méthode du *Rectangle Diagram*. Pour représenter le polynôme $2x^2 + 7x + 6$, il faut séparer le terme en x en deux de façon réfléchie (ici $3x$ et $4x$), pour pouvoir obtenir un rectangle regroupant tous les termes du trinôme à factoriser et qui respecte tous les coefficients en jeu.

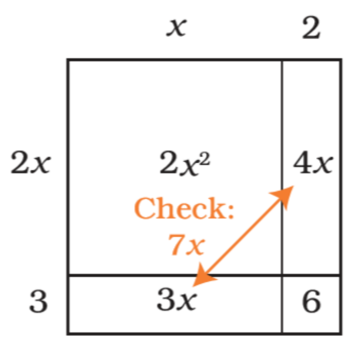


Figure 1.5 Exemple de l'utilisation du *Rectangle Diagram* pour la factorisation du polynôme $2x^2 + 7x + 6$ (Hoong *et al.*, 2010, p. 23)

Ensuite, les chercheurs et les enseignants ont pu tester cette nouvelle approche avec les élèves qui ont mal réussi au prétest, lors de deux leçons d'une heure chacune sur la factorisation. Les élèves étaient amenés à factoriser des polynômes en utilisant principalement l'approche visuelle du *Rectangle Diagram*. Après ces leçons, un post-test a été donné aux élèves participants. Des entrevues ont aussi été réalisées avec des élèves sélectionnés. Les résultats du post-test montrent des améliorations significatives et illustrent que l'utilisation de l'approche visuelle du *Rectangle Diagram* est un succès pour la factorisation. Certains élèves sont même devenus plus engagés et meilleurs dans les leçons. L'équipe de recherche a donc conclu que l'utilisation de cette approche visuelle est positive pour l'enseignement de la factorisation d'équations quadratiques.

Comme il a été souligné précédemment, Simon (2013) a réalisé une étude de cas avec une enseignante de quatrième secondaire, Line, dans l'objectif d'analyser son appropriation des représentations visuelles dans une séquence d'enseignement autour de la factorisation, en plus de dégager la place et le rôle des représentations visuelles en enseignement des mathématiques au secondaire. Elle s'est particulièrement intéressée à la méthode du rectangle, un modèle visuel proposé dans certains guides de l'enseignant pour contrer certaines erreurs ou difficultés des élèves en lien avec la factorisation et les manipulations algébriques. D'ailleurs, la méthode du rectangle semble être la même que l'approche du *Rectangle Diagram* de Hoong *et al.* (2010).

> La méthode du rectangle consiste à la construction d'un support visuel permettant aux élèves de se créer une image mentale. Ainsi, factoriser revient à trouver les dimensions d'un rectangle, l'aire de ce dernier étant donnée. Par exemple, l'expression algébrique $10x^2 + 5xy + 4x + 2y$ représente l'aie de quatre rectangles que l'on dispose comme suit pour obtenir un grand rectangle. L'aire de ce rectangle peut également s'écrire $(2 + 5x)(2x + y)$, qui est la forme factorisée de l'expression algébrique. (Simon, 2013, p. 5)

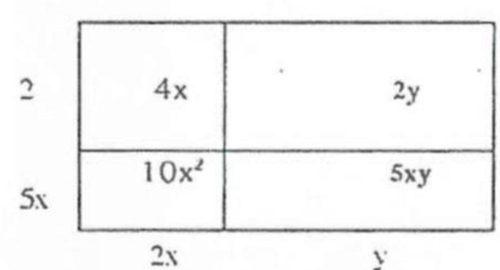


Figure 1.6 Exemple de l'utilisation de la méthode du rectangle pour la factorisation du polynôme $10x^2 + 5xy + 4x + 2y$ (Simon, 2013, p. 5)

L'expérimentation de la recherche de Simon s'est déroulée dans l'un des groupes de Line, soit un groupe de 25 élèves en quatrième secondaire de la séquence SN. Pour réaliser son étude de cas, elle a donc choisi d'analyser la séquence d'enseignement de Line pour le chapitre de la factorisation. Pour ce qui est de l'apport du visuel dans cette séquence, c'est en fait la chercheuse qui a créé des activités autour de la méthode du rectangle, qu'elle a intégrée dans la planification de Line. Cet ajout était nécessaire, puisque cette dernière n'utilisait pas les représentations visuelles dans son enseignement. Pour analyser ses données provenant de la pratique enseignante de Line, Simon a construit un cadre de référence en faisant ressortir trois composantes centrales dans l'étude de la pratique enseignante de Line, issues de l'intervention pédagogique de Lenoir (2009). Simon répond à ses objectifs de recherche en affirmant que Line s'est réellement approprié les représentations visuelles (la méthode du rectangle), allant jusqu'à les utiliser par elle-même dans ses exemples avec les élèves. Line désire même les intégrer dans sa planification future de la factorisation. Enfin, elle conclut que les représentations visuelles possèdent plusieurs rôles : elles supportent les démarches algébriques, elles donnent du sens à la factorisation, elles permettent de contrer des erreurs des élèves et peuvent permettre une meilleure rétention des savoirs, à long terme.

Toutes ces recherches portant sur la factorisation et les représentations visuelles suggèrent que l'approche par représentations visuelles est une voie prometteuse pour l'enseignement-apprentissage de la factorisation. Elle permettrait d'améliorer la compréhension des élèves face à ce concept important et difficile. Mais est-ce une voie possible et intéressante pour les enseignants? La recherche semble affirmer que oui, mais qu'en est-il de son application réelle dans les classes du secondaire et de la réception des enseignants de ces avenues pour l'enseignement? Line a trouvé que la méthode du rectangle avait du potentiel :

> Dans l'entrevue finale, Line souligne que l'expérimentation vécue va apporter un changement dans sa planification initiale où les représentations

> visuelles n'avaient pas leur place. Elle prévoit les introduire tout le long de l'enseignement des différentes techniques de factorisation après une présentation algébrique. Le support visuel permet alors de donner du sens, les élèves peuvent alors comprendre ce qui a été présenté précédemment. (Simon, 2013, p. 153)

Ce serait donc un sujet qui mériterait d'être discuté avec les enseignants. Cependant, ce n'est pas la seule approche intéressante qui a été exploitée en recherche. L'histoire des mathématiques pourrait aussi s'avérer pertinente pour l'étude de la factorisation au secondaire.

1.3.2 Recherches en lien avec l'histoire des mathématiques

Le champ de recherche sur l'histoire et l'enseignement des mathématiques s'est développé depuis les deux dernières décennies. Avant d'aller plus loin, il m'apparait important de présenter certains écrits fondamentaux qui abordent la question de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement-aprentissage des mathématiques. Plus précisément, deux articles centraux discutent du rôle et du potentiel de l'utilisation de l'histoire. Je pense aux textes de Barbin (1997) et de Jankvist (2009) qui proposent des catégorisations quant aux raisons et aux manières de convoquer l'histoire et l'enseignement des mathématiques.

Le texte de Barbin (1997) présente trois fonctions que l'histoire des mathématiques remplit : une fonction vicariante, une fonction dépaysante et une fonction culturelle. La première suggère que l'histoire des mathématiques permet aux mathématiques d'être vues et comprises comme une véritable activité humaine et scientifique, et non pas seulement comme une simple matière scolaire. La deuxième permet de s'*étonner de ce qui va de soi*, d'être dépaysé*,* grâce à l'histoire des mathématiques. Elle nous rappelle que les concepts mathématiques ont un passé et qu'ils ont été inventés. Elle permet ainsi de se réapproprier le sens des objets et des processus mathématiques en remettant en question des manières de faire et de penser qui vont de soi. La troisième fonction dite culturelle suggère plutôt que l'histoire nous transporte à travers la culture et l'époque dans lesquelles les mathématiques ont été produites et permet d'en saisir une compréhension davantage culturelle. Il est impossible de parler de l'histoire d'une notion mathématique sans parler du contexte social et scientifique dans lequel elle a été pensée.

L'auteure propose ensuite deux manières d'utiliser l'histoire des mathématiques dans l'enseignement. Premièrement, par la lecture de textes anciens :

> La lecture des textes anciens produit un « choc culturel » qui peut satisfaire aux fonctions vicariantes et dépaysantes de l'histoire. À condition cependant que la lecture ne soit pas *téologique*, c'est-à-dire de ne pas analyser les textes uniquement d'après nos conceptions actuelles. Une telle lecture peut entraîner des interprétations erronées, l'auteur utilisant telle ou telle notion selon une conception différente de la nôtre. (Barbin, 1997, p. 22)

Barbin insiste donc sur le fait que les textes anciens se doivent d'être contextualisés, et qu'il est nécessaire de se distancier d'une analyse uniquement par nos conceptions actuelles des mathématiques. L'idée est plutôt de regarder les mathématiques comme elles étaient faites à l'époque du texte ancien lu. Deuxièmement, il est possible d'introduire l'histoire des mathématiques dans des travaux interdisciplinaires, ce qui fait intervenir la fonction culturelle de l'histoire.

Dans son texte, Jankvist (2009) s'applique à séparer très clairement le pourquoi et le comment utiliser l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques. Dans la littérature, plusieurs classifications des *whys* et des *hows* sont déjà existantes (comme celle de Barbin, 1997), mais elles ne présentent pas toutes une distinction claire entre ces deux aspects. Jankvist suggère que de les compartimenter permettrait de clarifier les liens entre les deux. L'auteur a donc construit sa catégorisation à partir de lectures et d'écrits antérieurs, en prenant soin de bien séparer les raisons et les manières d'utiliser l'histoire. D'abord, les raisons d'utiliser l'histoire sont divisées en deux catégories : les arguments référant à l'histoire comme un outil, et ceux référant à l'histoire comme un objectif en soi. Dans le premier cas, l'histoire est présente pour l'atteinte d'un but extrinsèque à l'histoire. Par exemple, elle peut servir de motivation pour faire des mathématiques, ou bien permettre une amélioration de l'apprentissage des mathématiques en proposant des points de vue différents ou des représentations différentes d'un certain concept.

> […] history may also play the role of a cognitive tool in supporting the actual learning of mathematics. For instance, one argument states that history can improve learning and teaching by providing a different point of view or mode of presentation (e.g., Helfgott, 2004, p. 161 ; Jahnke, 2001, p. 195 ; Kleiner, 2001, p. 143). (Jankvist, 2009, p. 238)

Alors que dans la deuxième catégorie, l'idée est plutôt de parler d'histoire des mathématiques ou de la faire appraitre en tant que telle, c'est-à-dire que l'historicité est l'objectif même de l'utilisation de l'histoire.

Ensuite, les manières d'utiliser l'histoire sont séparées en trois catégories : les approches « illumination », les approches par modules et les approches basées sur l'histoire. La première inclut toutes les façons d'intégrer l'histoire comme un supplément à l'enseignement, soit en surplus à ce qui est déjà fait dans les classes, en passant par des anecdotes historiques à des photos de mathématiciens célèbres. La deuxième catégorie suggère plus la planification d'un module entier, dédié à l'histoire d'un sujet mathématique. L'histoire est donc l'objet d'étude, pour quelques cours (la longueur peut varier). Alors que pour la troisième catégorie, l'histoire est présente indirectement, mais de façon intégrée par la réflexion didactique et pédagogique de l'enseignant. Il s'agit plutôt ici de la création d'une séquence d'enseignement inspirée ou basée sur le développement de l'histoire des mathématiques.

Enfin, ce sont les interrelations possibles entre les raisons et les manières d'utiliser l'histoire qui sont intéressantes. Chaque combinaison est présentée, mais évidemment, certaines sont bien plus naturelles que d'autres. Par exemple, l'ajout de suppléments historiques colle beaucoup mieux avec la visée d'utiliser l'histoire comme un outil. Aussi, pour utiliser l'histoire comme un but, les modules semblent être la meilleure manière pour y arriver.

Les écrits de Barbin (1997) et Jankvist (2009) discutent, de manière théorique, de la pertinence de l'utilisation de l'histoire des mathématiques, en plus de donner quelques pistes quant aux manières de le faire. Plusieurs raisons sont évoquées par ces deux chercheurs, ce qui suggère un certain potentiel de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques. Qu'en est-il de l'enseignement de l'algèbre et de la factorisation?

À ce sujet, Clark (2012) a mené une étude auprès de futurs enseignants de mathématiques, où elle s'est questionnée sur l'impact que l'étude de l'histoire des mathématiques pourrait avoir sur la compréhension des concepts que ces derniers auront à enseigner et aussi sur comment ils envisagent d'utiliser l'histoire dans leurs enseignements éventuels. Les participants de l'étude étaient 80 étudiants en enseignement des mathématiques qui ont suivi le cours d'histoire des mathématiques *Using History in the Teaching of Mathematics*, provenant de quatre sessions différentes. Ils ont été amenés à travailler sur des problèmes historiques et à s'investir dans leur résolution. Entre autres, ils ont étudié la résolution d'équations du second degré par la complétion du carré telle qu'utilisée par al-Khwarizmi.

L'exemple qui a été exploité est le suivant : quel est le carré qui, combiné avec 10 de ses racines, donne une somme de 39 unités? Avec notre écriture algébrique actuelle, il serait possible de traduire cette phrase par $x^2 + 10x = 39$, où ce qui est recherché est le carré x^2. La figure 1.7 illustre la résolution géométrique de cette équation du second degré, basée sur l'explication rhétorique et géométrique d'al-Khwarizmi. La première image (1) représente le carré de départ x^2. La deuxième image (2) montre les 10 racines $(10x)$ séparées en deux, disposées sur les côtés du carré x^2. La troisième image (3) montre la somme de 39, en pointillé, et la complétion du grand carré par 25 unités. En ce sens, le grand carré est de 64 unités $(39 + 25)$. La racine de 64 est connue, et sa valeur est de 8 unités. La racine du carré (x) recherchée est alors de 3 unités $(8 - 5)$, ce qui permet de conclure que le carré x^2 est 9.

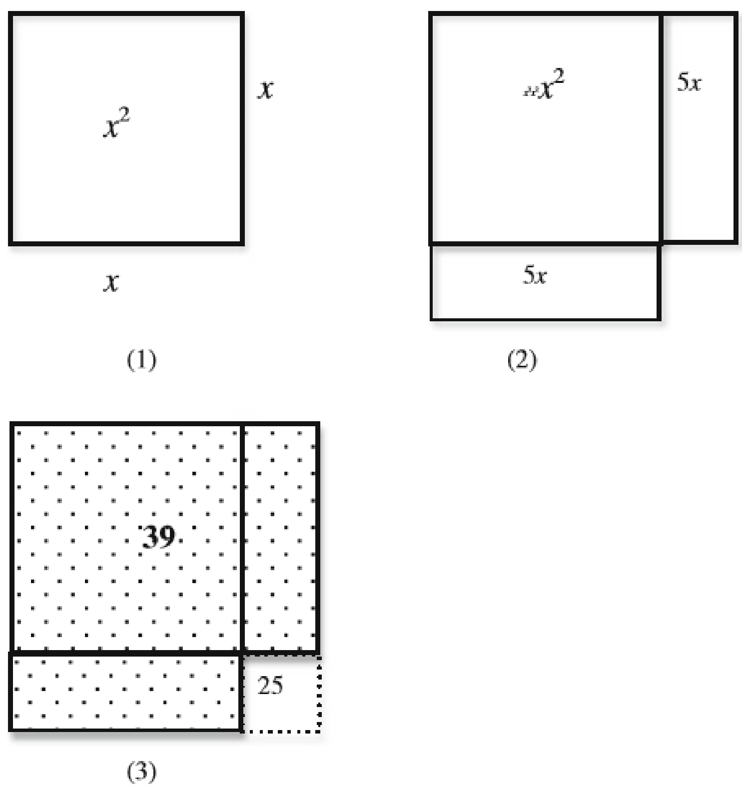


Figure 1.7 Résolution géométrique de l'équation du second degré $x^2 + 10 = 39$ selon la méthode de la complétion du carré d'al-Khwarizmi (Clark, 2012, p. 73)

Pour travailler sur cette équation du second degré, les étudiants n'ont pas eu accès aux images d'accompagnement présentées à la figure 1.7. En fait, ils devaient développer eux-mêmes une solution géométrique à partir de l'explication rhétorique (en mots) de la résolution de cette équation par al-Khwarizmi. Ensuite, les futurs enseignants étaient invités à rédiger un journal électronique autour de leurs réflexions par rapport à l'histoire et aux problèmes travaillés en classe. Les entrées de ces journaux constituent les données principales de la recherche de Clark. Ainsi, ce qui est intéressant de dégager de l'analyse de ces données, c'est que l'étude historique de la résolution d'équations de second degré a permis à plusieurs étudiants de comprendre l'origine de la complétion du carré en factorisation et pourquoi cette méthode fonctionne. Effectivement, un des résultats les plus saillants de l'étude est que plusieurs étudiants ont mentionné dans leurs journaux qu'ils avaient seulement appris les manipulations algébriques nécessaires à la complétion du carré, sans jamais en comprendre l'origine ou le sens. En plus, Clark conclut que c'est grâce à la représentation géométrique[12] que de nombreux étudiants ont compris la méthode de la complétion du carré, car elle propose un point de vue différent, un mode de représentation différent. Pour reprendre un argument de Jankvist (2009), l'histoire des mathématiques ici a donc permis d'améliorer l'apprentissage et la compréhension de la complétion du carré en factorisation des étudiants en enseignement des mathématiques.

Ce rapprochement entre la factorisation en algèbre et la géométrie n'est pas surprenante. Effectivement, Radford (1996) met en avant que le raisonnement algébrique s'est déployé d'abord dans le langage géométrique et arithmétique avant de prendre son indépendance. De fait, après une analyse historique de tablettes babyloniennes et d'écrits de Diophante à saveur algébrique, Radford conclut que les origines de l'algèbre semblent provenir de deux traditions : une géométrique et une autre numérique. Plus précisément, et en lien avec le courant géométrique qui m'intéresse, c'est la procédure « cut-and-paste », ou *copier-coller,* qui est prédominante en géométrie dans l'histoire de l'algèbre. Cette procédure consiste à découper une surface prédéfinie représentant

[12] La différence entre les représentations visuelles et les représentations géométriques sera explicitée plus loin dans le chapitre II, soit dans le cadre conceptuel (voir section 2.4).

les éléments du problème à résoudre pour ensuite les remanier et construire une nouvelle surface, dont l'aire n'a pas changé. Ici, l'égalité algébrique réfère donc à une égalité entre les aires des surfaces manipulées dans le problème. Je reviendrai sur cette procédure dans le prochain chapitre, celui de mon cadre conceptuel (voir section 2.4.2).

En lien avec l'enseignement-apprentissage de la factorisation en algèbre, les représentations visuelles et l'histoire des mathématiques (notamment par le recours à des représentations géométriques) ont été explorées par la recherche. Ces approches sont intéressantes et pourraient s'avérer pertinentes pour travailler la factorisation au secondaire, et même pour donner du sens à ce concept. L'étude de Clark montre que l'histoire permettrait d'appuyer l'enseignement de la factorisation en ce sens. Cela dit, comme pour les représentations visuelles, est-ce une voie possible et intéressante pour les enseignants? Qu'en est-il de l'application réelle dans les classes du secondaire et de la réception des enseignants de l'histoire pour l'enseignement ? C'est aux enseignants de choisir les méthodes d'enseignement qu'ils utiliseront en classe, qu'en pensent-ils donc ? La prochaine section portera justement sur les enseignants et sur les recherches qui se sont attardées à l'enseignement de la factorisation.

1.4 Les enseignants et leur place dans les recherches autour de la factorisation

Pour la factorisation, mais aussi pour tous les autres concepts en mathématiques, c'est à l'enseignant dans une classe du secondaire de planifier les cours et de décider de la façon dont les sujets sont abordés avec les élèves. C'est donc sur l'enseignant que pèse la nécessité de développer des réflexions et des outils pour l'enseignement du contenu du programme de formation de l'école québécoise.

Comme il en a été question plus tôt, la factorisation prend une grande place au secondaire. Non seulement plusieurs difficultés sont vécues par les élèves face à ce concept, mais il semble exister certaines lacunes quant au sens accordé à la factorisation et à ses techniques, comme je l'ai soulevé dans la section 1.1, constat qui est appuyé par d'autres chercheurs (Abou Raad et Mercier, 2009 ; Sharp, 1995). De plus, l'enseignement de la factorisation constitue également un chapitre préoccupant pour les enseignants, puisqu'il est ardu pour les élèves (voir section 1.2.3). Aussi, pour contrer les difficultés des élèves et pour aller au-delà de l'application de procédures et de la mémorisation de *trucs* de la part des apprenants, ce sont les enseignants qui ont le pouvoir d'y faire quelque chose. Bien que les élèves soient responsables des efforts, du travail et du temps qu'ils mettent dans leurs apprentissages, ce sont les enseignants qui se trouvent au cœur de la compréhension des élèves, par leurs explications, leurs approches, leur enseignement et leur support. Dans cette optique, il devient primordial de s'attarder aux enseignants pour pouvoir comprendre ce qui se passe réellement dans les classes du secondaire, lors de l'enseignement du chapitre de la factorisation.

Les recherches proposent des pistes pour l'enseignement de la factorisation, autour de l'utilisation de représentations physiques ou visuelles et une éventuelle utilisation de l'histoire des mathématiques. D'ailleurs, Simon (2013) souligne l'intérêt d'une enseignante, Line, pour explorer l'une de ces pistes, la méthode du rectangle, qu'elle a par la suite intégrée dans son enseignement de la factorisation. Ceci est un résultat très encourageant quant au potentiel des approches visuelles perçu par les enseignants. En plus, certaines études soulignent le rôle essentiel des enseignants pour permettre aux élèves de bien comprendre ce concept. Par exemple, pour ce qui est des tuiles algébriques, Hosson (1999) insiste sur le fait que les élèves éprouvent des difficultés à faire des ponts entre les manipulations algébriques et les manipulations des tuiles, et que ce sont donc aux enseignants d'aider les élèves à faire ces liens pendant leurs apprentissages. Ce simple exemple permet d'appuyer encore une fois la nécessité de s'attarder aux enseignants et à leur enseignement.

Toutefois, de manière générale en algèbre, les recherches qui ont été menées par le passé portent majoritairement sur les élèves (ou les apprenants), leurs difficultés et leurs apprentissages (Bednarz et Dufour-Janvier, 1992 ; Booth, 1984 ; Hosson, 1999 ; Matz, 1982 ; Mejía Palomino, 2004 ; etc.). Et ce constat n'est pas différent en ce qui a trait à la factorisation (Bardini, 2000 ; Clark, 2012; Hoong *et al.*, 2010 ; Sanchez, 1997 ; Sharp, 1995). Les études sont limitées sur ce concept très précis, et seulement deux d'entre elles portent à la fois sur la factorisation et sur les enseignants (Abou Raad et Mercier, 2009 ; Simon, 2013). La recherche d'Abou Raad et Mercier s'intéresse aux enseignants et à leur enseignement de la factorisation, mais en France et au Liban, pas au Québec. Ils se sont interrogés sur la manière dont les enseignants envisagent ce concept, ainsi que sur le langage utilisé par ces derniers principalement dans l'enseignement des techniques de factorisation. Quant à l'étude de Simon, elle est centrée sur les représentations visuelles et sur leur appropriation par une enseignante de quatrième secondaire. Dans les deux cas, les chercheurs n'ont pas réellement collaboré avec les enseignants participants. Ils ont plutôt adopté une posture externe et désengagée, observant ce qui se passe dans les classes. Mais au final, il semble y avoir un certain manque dans le milieu de la recherche au Québec, alors qu'il n'y a pas vraiment d'informations sur ce que font et ce que pensent les enseignants dans les classes du secondaire québécoises pour enseigner ce concept.

Ce bilan des recherches actuelles autour de la factorisation révèle un besoin de donner une voix aux enseignants pour le développement de l'enseignement-apprentissage de la factorisation au secondaire. De fait, la recherche propose déjà des pistes pour appuyer les pratiques (p. ex. les représentations visuelles ou l'histoire des mathématiques) et ces pistes semblent mures pour aller vers une collaboration avec les enseignants. Ce que j'entends par là, c'est qu'il est temps d'aller confronter ces pistes provenant de la recherche, ces manières d'enseigner la factorisation, avec les préoccupations et les contraintes du milieu scolaire. Il est temps d'aller rencontrer les enseignants pour travailler avec eux, dans le but d'explorer conjointement comment il pourrait être favorable d'enseigner la factorisation pour une meilleure compréhension de la part des élèves, à la croisée des deux mondes : la pratique et la recherche.

En considérant le rôle central des enseignants dans l'enseignement de la factorisation, la préoccupation des enseignants sur l'enseignement-apprentissage de ce concept et le peu de recherches s'attardant sur la pratique enseignante, plusieurs questions peuvent être posées. Comment les enseignants approchent-ils la factorisation? Existe-t-il une certaine diversité dans les façons d'aborder la factorisation dans les écoles québécoises? Est-ce que les enseignants croient qu'il pourrait être possible d'améliorer, de diversifier l'enseignement de la factorisation pour lui donner plus de sens? Si oui, comment croient-ils qu'il serait possible de le faire? Est-ce que les représentations visuelles et l'histoire des mathématiques pourraient être des approches intéressantes, pertinentes et exploitables du point de vue des enseignants? Et si oui, quelles seraient les interventions qui pourraient être bâties? Ces questions sont, malheureusement, sans réponse à l'heure actuelle, alors qu'il me semble que les enseignants devraient avoir une voix et que leur expertise pourrait grandement améliorer notre compréhension de l'enseignement-apprentissage de la factorisation en algèbre.

1.5 Synthèse des éléments de la problématique et objectif de recherche

Ce premier chapitre de problématique m'a permis d'explorer mon champ de recherche. Subséquemment, j'ai pu observer que la factorisation est importante au secondaire, occupant une grande place dans le PFEQ, et possédant même des prolongements dans certains cours de mathématiques au cégep. Toutefois, le programme de formation ne propose aucune piste sur la manière d'enseigner la factorisation, alors qu'un bref survol des manuels scolaires démontre seulement la présence de procédures très manipulatoires, sans explication du pourquoi elles fonctionnent ou d'où elles proviennent. Peu de ressources sont donc disponibles pour aider les enseignants. Et ce, même si la factorisation est un concept pour lequel les élèves ressentent plusieurs difficultés. De fait, les enseignants considèrent le chapitre de la factorisation comme étant ardu, ce qui montre que l'enseignement de ce concept est une préoccupation pour eux.

La recherche, quant à elle, propose quelques façons d'aborder et d'enseigner la factorisation : l'utilisation des représentations visuelles diverses et l'utilisation de l'histoire des mathématiques. Ce sont des pistes qui dépassent ce que j'ai pu voir dans le milieu scolaire, alors que j'ai plutôt constaté la présence de *trucs* et d'explications très manipulatoires et procédurales dénuées de sens. Toutefois, les recherches sont essentiellement centrées sur les élèves, alors que le rôle de l'enseignant est central dans cet objet d'étude (Hosson, 1999). Deux études seulement se sont déjà penchées sur les pratiques enseignantes (Abou Raad, 2009 ; Simon, 2013).

Somme toute, on a très peu d'informations sur ce qui est réellement fait dans les écoles pour l'enseignement de la factorisation, et on connait encore moins l'opinion des enseignants à ce sujet. Je me situe donc en continuité des études portant sur les enseignants et je cherche à en savoir plus sur l'enseignement de la factorisation au Québec, en travaillant conjointement avec des enseignants. En ce sens, qu'est-ce qui pourrait être mis en place dans les classes en considérant à la fois la recherche et la pratique enseignante et visant l'enseignement et l'apprentissage de la factorisation et s'appuyant sur le sens à donner à ce concept et à ses techniques ?

Pour mon projet de recherche, je désire donc travailler de pair avec des enseignants pour co-construire avec eux des interventions visant à donner du sens au concept de factorisation. Et par le fait même, comprendre leur vision de l'enseignement-apprentissage de la factorisation et de comprendre comment ils s'y prennent avec les élèves pour donner du sens à ce concept. Mon objectif de recherche peut être énoncé comme suit :

Co-élaborer, avec des enseignants du secondaire, des interventions pour enseigner la factorisation visant à donner du sens à ce concept pour les élèves.

Deux questions de recherche découlent de cet objectif :

1) *Comment les enseignants envisagent-ils et enseignent-ils la factorisation dans les écoles québécoises?*
2) *Comment se caractérisent les interventions co-construites?*

CHAPITRE II

CADRE CONCEPTUEL

Dans ce deuxième chapitre, je construirai un cadre conceptuel ancré sur des interventions possibles pour donner du sens à la factorisation au secondaire et que j'ai nommé le cadre des explorations sémantiques. Comme il en a été question dans la problématique de ce mémoire, la littérature n'offre que très peu d'éléments pour l'enseignement de ce concept. En plus, je désire travailler avec des enseignants, et pour accomplir une telle collaboration, il est essentiel que chaque partenaire de la recherche apporte son expertise provenant de son propre milieu. De mon côté, comme aucun cadre n'existe autour du sens accordé à la factorisation dans la recherche et pour être en mesure d'atteindre mon objectif de co-élaborer des interventions avec les enseignants, le développement d'un cadre conceptuel à ce sujet s'impose pour ce projet.

Avant de plonger dans le cadre, je dresserai un portrait de la factorisation à travers une définition de ce concept et une description de ce que recouvre la factorisation dans le contexte scolaire québécois. Pour l'écriture du cadre conceptuel, je me suis référée à un amalgame de sources, passant par des articles scientifiques et professionnels qui étant peu nombreux ont été complétés par une analyse de manuels scolaires, du programme de formation et par certains documents non publiés. De cette littérature ressort quatre explorations sémantiques dont les composantes sont des interventions visant à donner du sens à la factorisation. Cinq habiletés à développer pour factoriser accompagnent ces explorations sémantiques.

2.1 Portrait de la factorisation au secondaire

2.1.1 Définition et exemples de la factorisation au secondaire

D'abord et avant tout, il est important de mentionner que, dans ce mémoire, lorsqu'il est question de factorisation, je fais référence à la factorisation algébrique[13], c'est-à-dire à la factorisation de polynômes[14]. Le manuel scolaire *Intersection* de la deuxième année du deuxième cycle du secondaire de la séquence SN (Boucher, Coupal, Jacques et Marotte, 2009) stipule que « Factoriser un polynôme consiste à l'exprimer sous la forme d'un produit de facteurs. Par convention, les facteurs sont des polynômes de degré inférieur au polynôme de départ. » (p. 85) Les auteurs présentent, à la suite de la définition, un exemple de factorisation par deux binômes d'un polynôme de deux variables composé de quatre termes : $x^2 + xy + 2x + 2y = (x + 2)(x + y)$.

À son tour, le lexique mathématique de Netmath, une ressource disponible en ligne pour les enseignants de mathématiques au secondaire, mentionne que la factorisation d'un polynôme est un synonyme de décomposition d'un polynôme. Dans ce lexique, la décomposition est définie comme étant la « transformation d'une expression ou d'une représentation donnée en une expression ou une représentation équivalente généralement formée de composantes plus simples. » (Patenaude et Mathieu, 2020a) Pour préciser cette définition, dans le cas de la décomposition d'un polynôme, il s'agit de représenter ce dernier « sous la forme d'un produit de monômes, d'autres polynômes ou d'une combinaison des deux. » (Patenaude et Mathieu, 2020b) Cette forme est ce qu'on appelle la forme factorisée du polynôme. La forme de départ, quant à elle, est la forme développée du polynôme. Le processus de factorisation permet ainsi la transformation de la forme développée d'un polynôme vers sa forme factorisée, alors

[13] Je fais cette distinction, car il est aussi possible de factoriser des expressions numériques.

[14] Un polynôme est une somme de monômes, où un monôme est une « expression algébrique qui contient un seul terme. » (Patenaude et Mathieu, 2020d)

que le développement algébrique permet la transformation inverse, soit celle de la forme factorisée à la forme développée, ce qui implique une équivalence entre ces deux types d'expressions algébriques[15]. Voici quelques exemples de factorisation présents dans le lexique mathématique de Netmath (voir figure 2.1).

EXEMPLES

$$6ab + 4b = 2b\,(3a + 2)$$
$$16a^2 - 9b^2 = (4a + 3b)(4a - 3b)$$
$$15a^2 + a - 6 = (3a + 2)(5a - 3)$$

Figure 2.1 Exemples de factorisation provenant du lexique mathématique en ligne de Netmath pour les enseignants (Patenaude et Mathieu, 2020b)

Dans ces exemples, on retrouve la factorisation de deux binômes et d'un trinôme, tous de second degré. Le premier illustre une mise en évidence simple du facteur $2b$. Le deuxième montre l'identité algébrique de la différence de carrés, alors que le troisième est le cas de figure le plus fréquent au secondaire; la factorisation d'un trinôme du second degré à une variable. Dans les trois exemples, les formes factorisées sont composées de monômes ou de binômes, comme c'est généralement le cas au secondaire.

D'ailleurs, une analyse sommaire de trois collections de manuels scolaires de la deuxième année du deuxième cycle du secondaire, séquence SN, m'a permis d'en venir à la conclusion suivante : c'est une vision bien particulière de la factorisation qui est privilégiée dans les écoles. Les manuels *Intersection* (Boucher *et al.*, 2009), *Visions* (Cardin, Hamel, Dedoux et Lemay, 2008) et *Point de vue* (Guay, Van Moorhem,

[15] Le concept d'équivalence entre la forme factorisée et la forme développée d'un polynôme est important et découle directement du lien étroit entre la factorisation et le développement algébrique. Je reviendrai plus en profondeur sur ces éléments dans la section 2.3.1 qui leur est dédiée.

Amideneau, Dionne, Ducharme, Gagnon, Huot, Laplante, Le Nabec et Roy, 2008) m'ont éclairé sur la nature singulière de la factorisation vue au secondaire. Tout d'abord, les polynômes que les élèves sont amenés à factoriser sont soient des binômes, des trinômes (qui sont les plus fréquents) ou des polynômes à quatre termes. Il est très rare de rencontrer des polynômes à plus de quatre termes. En plus, ces polynômes ne dépassent presque jamais le troisième degré, alors que les polynômes du second degré à une variable sont les plus représentés dans les manuels (quelques exemples contiennent plus d'une variable, mais ils sont peu nombreux). Tout ceci fait en sorte que les facteurs de la forme factorisée d'un polynôme, qui sont au compte de deux, parfois trois, se limitent à des monômes, des binômes ou des trinômes du premier degré pour la plupart. Enfin, les coefficients des expressions algébriques manipulées par les élèves dans le chapitre de la factorisation sont des entiers, à quelques exceptions près. Dans les sections de présentation de la matière autant que dans les exercices et les problèmes à résoudre des manuels, les polynômes sont bien choisis pour s'assurer que leur forme développée et leur forme factorisée possèdent des coefficients entiers.

En considérant les caractéristiques de la factorisation d'un polynôme[16] au secondaire décrites plus haut, cette opération se résume donc en la décomposition de ce polynôme en facteurs de degrés inférieurs. Le résultat d'une factorisation est le produit de ces facteurs, qui sont des monômes, des polynômes ou un mélange des deux. Au secondaire, il est attendu, de la part des enseignants, que cette décomposition en facteurs soit maximale, ce qui implique une factorisation unique pour chaque polynôme[17].

[16] Il est intéressant de constater que les termes des polynômes à factoriser dans les manuels sont toujours dans le même ordre, soit en ordre décroissant selon leur degré. Par exemple, on verra $ax^2 + bx + c$, mais jamais $bx + c + ax^2$.

[17] Cet enjeu de « factorisation au maximum » sera expliqué plus loin, dans la section 2.3.2.

En soi, au deuxième cycle du secondaire, niveau scolaire où l'enseignement-apprentissage de la factorisation est explicite, la factorisation n'est pas un concept complètement nouveau pour les élèves. Comme la factorisation est l'inverse du développement algébrique, les élèves manipulent déjà la forme factorisée d'un polynôme pour être en mesure de le développer, et ce, depuis le début du secondaire. Or, au deuxième cycle du secondaire, ces derniers doivent faire le chemin inverse, apprendre à trouver la forme factorisée à partir de la forme développée d'un polynôme grâce au processus de factorisation, et à travers la mobilisation de plusieurs techniques de factorisation présentes dans le programme.

La section 2.1.2 suivante explicite les techniques de factorisation présentes dans le PFEQ. Elle permet un éclairage sur ce qui est vu au secondaire dans les écoles québécoises et ce qui est entendu par factorisation dans ce contexte spécifique, cette section poursuit la réflexion autour de la factorisation au secondaire.

2.1.2 La factorisation et ses techniques dans le PFEQ

Dans le PFEQ, la factorisation est définie comme un ensemble de techniques pour retrouver les facteurs d'un polynôme : la mise en évidence simple, la mise en évidence double, la complétion du carré, les formules quadratiques et les identités algébriques du second degré (trinôme carré parfait et différence de deux carrés). Le tableau 1.1 présenté à la section 1.2.1 du chapitre I montre bien la liste de ces techniques dans la progression des apprentissages. Malheureusement, comme il en a été question dans la problématique de ce mémoire, il n'est pas question du « comment » enseigner la factorisation dans le programme. On y retrouve seulement cette liste de techniques ou de méthodes, sans exemples ou indications pour leur enseignement dans les classes.

La première technique nommée dans le PFEQ est la mise en évidence simple. Elle consiste à trouver le plus grand facteur commun entre tous les termes du polynôme à factoriser, pour ensuite mettre en évidence ce facteur, comme dans l'exemple suivant : $7x^2 - 28x = 7x(x - 4)$. Quant à elle, la mise en évidence double est en fait la succession de deux mises en évidence simples. Voici un exemple de cette technique (voir figure 2.2) :

$$\begin{aligned} 4x + 10x^2 + 2y + 5xy &= (4x + 10x^2) + (2y + 5xy) \\ &= 2x(2 + 5x) + y(2 + 5x) && \text{1}^{\text{re}} \text{ mise en évidence simple.} \\ &= (2x + y)\,(2 + 5x) && \text{2}^{\text{e}} \text{ mise en évidence simple.} \end{aligned}$$

Figure 2.2 Exemple de mise en évidence double (Janvier, 2010, p. 7)

Les deux identités algébriques remarquables qui sont vues au secondaire sont le trinôme carré parfait et la différence de deux carrés. La première consiste en un trinôme qu'il est possible d'écrire comme étant un binôme élevé au carré, comme ceci : $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ ou $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$. La deuxième est en fait, comme son nom l'indique, la différence entre deux termes élevés au carré que l'on peut décomposer comme suit : $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x - 4)(x + 4)$. Les élèves doivent être capables non seulement de reconnaître ces identités, mais aussi de les utiliser pour factoriser. L'avantage de ces identités, c'est qu'il est possible d'effectuer une factorisation directement à partir de l'expression algébrique à factoriser, sans avoir à passer par la mise en évidence double ou le « produit somme »[18]. Ceci rend l'opération de factorisation plus rapide lorsque les identités sont bien utilisées.

La complétion du carré, quant à elle, est une technique particulière; elle permet de factoriser tous les trinômes à une variable qui se factorisent. Néanmoins, d'après mon

---

[18] Le « produit somme » est présenté et expliqué dans la section 1.1. C'est un *truc* qui est enseigné dans les classes du secondaire pour permettre aux élèves de factoriser des trinômes décomposables par mise en évidence double comme ceci : $3x^2 + 8x + 4 = 3x^2 + 6x + 2x + 4 = 3x(x + 2) + 2(x + 2) = (3x + 2)(x + 2)$, pour reprendre l'exemple de la section 1.1.

expérience en stage, elle apporte son lot de difficultés chez les élèves, de par les manipulations algébriques complexes nécessaires à son application.

La complétion du carré consiste justement à compléter l'expression à factoriser dans le but d'obtenir un trinôme carré parfait, pour ensuite être en mesure de terminer la factorisation avec une différence de carrés comme ceci :

$$x^2 + 12x + 27 = \left(x^2 + 12x + (27 + 9)\right) - 9$$

Complète le carré

$$x^2 + 12x + 27 = (x^2 + 12x + 36) - 9$$

$$x^2 + 12x + 27 = (x + 6)^2 - 9$$

Différence de deux carrés

$$x^2 + 12x + 27 = (x + 6 + 3)(x + 6 - 3)$$

$$x^2 + 12x + 27 = (x + 9)(x + 3)$$

Enfin, le ministère présente des formules quadratiques pour factoriser des polynômes dans la progression des apprentissages (MEES, 2016). Mais dans la pratique, selon mes observations et les manuels scolaires que j'ai analysés, elles ne sont pas enseignées pour factoriser, mais plutôt pour trouver les zéros d'une fonction du second degré. En ce sens, elles ne sont pas vraiment perçues, dans les écoles, comme une technique de factorisation. Pour ce mémoire, je les laisserai ainsi de côté, ne les considérant pas comme une technique de factorisation à proprement dit.

Dans l'ensemble, la factorisation est définie à travers différentes techniques dans le PFEQ et la progression des apprentissages. Pour factoriser un polynôme, les élèves du secondaire doivent non seulement connaître ces techniques, mais ils doivent aussi être capables de les appliquer. En plus de cette habileté à développer chez les élèves, l'apprentissage de la factorisation en nécessite plusieurs autres.

2.1.3 Les habiletés à considérer pour l'apprentissage de la factorisation au secondaire

Pour être en mesure d'effectuer l'opération de factoriser, il est nécessaire de maîtriser l'application des techniques de factorisation décrites dans la section précédente. C'est assurément l'habileté centrale pour l'apprentissage de ce concept mathématique. Or, ce n'est pas la seule qu'il faut développer pour y arriver ! Dans ce mémoire, on peut définir une habileté comme une aptitude à exécuter (ou à réaliser) une tâche avec aisance. Entre autres, avant même d'appliquer les techniques de factorisation, il faut être en mesure de trouver laquelle est la plus adéquate pour factoriser le polynôme en jeu. Simon (2013) décrit bien cette habileté, qu'elle nomme l'*habileté à reconnaître la forme de factorisation à utiliser selon l'expression à factoriser.*

Deux autres habiletés se démarquent du cadre de référence autour de la factorisation de Simon (2013). D'une part, l'auteure insiste sur l'*habileté à reconnaître des formes qui ne se factorisent pas*, comme le binôme $a^2 + b^2$, qui est souvent factorisé à tort comme étant $(a + b)(a + b)$. C'est d'ailleurs l'une des erreurs types de la part des élèves, comme il en a été question dans la section 1.2.3 autour des difficultés liées à la factorisation. D'autre part, l'*habileté à reconnaître des formes équivalentes* serait aussi une habileté importante à développer par les élèves. De fait, « différentes formes existent, comme la forme factorisée, développée et des formes « intermédiaires » entre ces deux formes. Il s'agit de voir qu'elles sont toutes équivalentes. » (Simon, 2013, p. 41) L'auteure utilise l'exemple suivant dans son texte pour illustrer quelques formes équivalentes : la forme factorisée $(2 + 5x)(3x + y)$ est équivalente à sa forme développée $4x + 2y + 10x^2 + 5xy$, mais aussi aux formes dites « intermédiaires » $2(2x + y) + 10x^2 + 5xy$ ou $4x + 2y + 5x(2x + y)$.

Dans l'ensemble, les habiletés spécifiques liées à l'apprentissage de la factorisation au secondaire résident dans la reconnaissance de la forme du polynôme à factoriser. Les élèves doivent ainsi être attentifs au type de polynôme qu'ils ont devant eux, car c'est grâce à cela qu'ils seront en mesure d'identifier si le polynôme se factorise, pour ensuite sélectionner et appliquer la technique de factorisation la plus efficace. Le tout dans le but de le transformer vers une de ses formes équivalentes (la forme factorisée est ici celle visée). Bien entendu, l'application des différentes techniques demande aussi le développement de diverses habiletés en lien avec les manipulations algébriques à exécuter lorsqu'on factorise. Par exemple, l'une des plus importantes est l'identification du plus grand facteur commun entre plusieurs termes algébriques pour effectuer une mise en évidence simple ou une mise en évidence double (Janvier, 2010).

On voit bien se dessiner ma problématique de recherche présente dans le chapitre I à travers ce recensement des habiletés pour factoriser et cette énumération des techniques présente dans le PFEQ. En effet, on semble miser sur une application des différentes techniques, alors qu'on sent un certain désir d'automatiser le processus de factorisation chez les élèves de la part des enseignants, au détriment du sens sous-jacent au concept. Ces constats sont en rupture avec les fondements épistémologiques du PFEQ, alors que ce qui est décrit plus tôt par rapport à la factorisation ne s'inscrit pas dans le paradigme (socio)constructiviste[19] dans lequel le programme se situe. En concordance avec le PFEQ et ses fondements, je crois qu'il est effectivement préférable d'approfondir le sens derrière les concepts mathématiques enseignés dans un contexte scolaire, et donc de favoriser la réelle compréhension des élèves et leur construction de connaissances (MELS, 2007). De fait, le PFEQ prône l'implication des élèves dans leurs apprentissages, pour qu'ils « deviennent de vrais créateurs et pas seulement, dans une

[19] J'établis le lien entre le socioconstructivisme et le PFEQ en toute réserve. Pour plus de détails à ce sujet, voir l'article de Jonnaert (2001) intitulé *La thèse socioconstructiviste dans les nouveaux programmes d'études au Québec : Un trompe l'œil épisté-mologique ?* (voir référence complète dans la bibliographie).

forme de psittacisme désuet, des *répétiteurs* d'un savoir codifié qu'ils n'auraient qu'à reproduire. » (Jonnaert, 2007b, p. 9)

Les habiletés autour de la factorisation sont indispensables pour permettre à quiconque de factoriser un polynôme, c'est évident. En revanche, elles ne semblent pas suffisantes pour permettre de donner du sens au concept pour les élèves du secondaire. Il serait intéressant d'aller plus loin, vers des aspects d'ordre sémantique, alors que la mobilisation des habiletés (par ex. l'application des techniques de factorisation) fait plutôt preuve d'un contrôle syntaxique. La prochaine section fera la distinction entre les contrôles syntaxique et sémantique en algèbre, dans le but d'approfondir ce qui est nécessaire à l'apprentissage et la compréhension de la factorisation au secondaire de la part des élèves.

2.2 Contrôles sémantique et syntaxique

L'apprentissage de l'algèbre, branche des mathématiques dans laquelle se place la factorisation de polynômes au secondaire, requiert la mobilisation de deux types de contrôle : le contrôle syntaxique et le contrôle sémantique.

> De son côté, Grugeon (1997) a montré que la compétence algébrique s'évalue par les capacités techniques renvoyant à la dimension syntaxique et par les capacités mettant en jeu l'interprétation, le sens et la dénotation et faisant appel à la dimension sémantique. (Kouki, 2018, p. 45)

Globalement, le contrôle syntaxique renvoie aux manipulations d'expressions algébriques. Il concerne tout de qui a trait au *langage mathématique* et aux règles qui lui sont associées (telles que les propriétés des opérations, la priorité des opérations, les lois des exposants, etc.) (Kouki, 2018). De manière plus spécifique à la factorisation, il est possible de dire que l'action même de factoriser fait preuve d'un contrôle syntaxique. Factoriser un polynôme demande un travail de transformation, alors que l'on passe de sa forme développée vers sa forme factorisée. Cette transformation implique plusieurs manipulations algébriques, alors que factoriser fait référence à différentes techniques qu'il faut appliquer pour y parvenir, comme il en a été question dans la section 2.1.2. Les habiletés de la section 2.1.3 sont aussi d'ordre syntaxique, alors qu'elles sont toutes liées à l'écriture, à la forme des expressions à factoriser.

Quant à lui, le contrôle sémantique renvoie à l'interprétation des situations en contexte et des concepts mathématiques en jeu. Exercer un contrôle sémantique démontre une compréhension du sens derrière ces situations et ces concepts. Prendre en compte des contraintes dans un problème, poser une équation à partir d'une relation en mots ou vérifier sa réponse sont des exemples de la dimension sémantique du contrôle en algèbre (Saboya, Bednarz et Hitt, 2015). En bref, le contrôle sémantique renvoit directement au sens des mathématiques et à leur compréhension. Il s'agit d'aller plus loin que l'application de procédures ou de règles d'écriture par exemple (qui sont d'ordre syntaxique) et de s'intéresser au pourquoi et au comment les mathématiques fonctionnent.

En ce qui concerne la factorisation, quelques pistes d'ordre sémantique se démarquent de la recherche pour son enseignement (voir section 1.3), comme les représentations visuelles ou l'histoire des mathématiques. Mais comme je l'ai mentionné dans la problématique de ce mémoire, on ne sait pas vraiment ce qui se fait dans les écoles secondaires en lien avec le sens de la factorisation, donc en lien avec la factorisation sur le plan sémantique. Je reviendrai plus loin sur cet aspect. Pour le moment, voici d'autres exemples de contrôles syntaxique et sémantique provenant de la recherche et qui permettent de bien discerner ces deux contrôles (voir tableau 2.1).

Tableau 2.1 Exemples de contrôles sémantique et syntaxique pour l'apprentissage de l'algèbre au secondaire (Kouki, 2018 ; Saboya *et al.*, 2015)

Exemples de contrôles syntaxiques	**Exemples de contrôles sémantiques**
- Manipulation d'expressions algébriques - Opérations de développement et de factorisation - Application de règles de calcul et de transformation algébrique - Conversion de quantités - Résolution d'une équation ou d'un système d'équations	- Interprétation d'une situation contextuelle ou d'un concept - Vérification d'une réponse - Reformulation d'une relation - Signification des grandeurs en jeu et symbolisation de la relation entre ces grandeurs - Mathématisation d'un problème - Mise en équation - Prise en compte des contraintes

Ces deux dimensions sont nécessaires et indissociables. Elles sont profondément imbriquées l'une dans l'autre (Kouki, 2018 ; Saboya *et al.*, 2015). Les élèves doivent donc développer autant leur contrôle sémantique que syntaxique en mathématiques. Sans condamner les techniques de factorisation et les habiletés pour son apprentissage (contrôle syntaxique), il est important de se pencher sur le sens de ce concept et ses techniques (contrôle sémantique).

La section précédente soutient l'importance d'approfondir le sens derrière les concepts mathématiques au secondaire. De fait, les élèves se doivent oui d'exercer un contrôle syntaxique à travers l'application des techniques de factorisation, mais ils doivent aussi être capables d'exercer un contrôle sémantique pour aller au-delà de ces techniques. Le tout dans le but de comprendre le sens de ces dernières et de l'action même de factoriser. **Dans cet ordre d'idée, donner du sens à la factorisation au secondaire, c'est développer une vision de la factorisation qui a trait à différentes caractéristiques d'ordre sémantique.**

À travers mes différentes lectures provenant de la recherche, mon analyse sommaire des manuels scolaires et mon expérience personnelle sur le terrain, j'ai pu identifier, ce que j'ai nommé, quatre possibles « explorations sémantiques » qui auraient le potentiel de donner du sens à la factorisation (voir tableau 2.2). Ces composantes des explorations sémantiques sont des interventions possibles de la part des enseignants de mathématiques qui semblent prometteuses pour donner du sens à la factorisation. Les sections suivantes permettront de pousser mes réflexions autour de ces explorations, qui ne sont, par ailleurs, pas hiérarchisées.

Tableau 2.2 Les explorations sémantiques pour donner du sens à la factorisation

Section	**Donner du sens à la factorisation à travers des explorations sémantiques…**
2.3	…autour de l'objet mathématique, du concept de factorisation.
2.4	…autour des différentes représentations.
2.5	…autour de l'aspect historique de la factorisation.
2.6	…pour situer la factorisation par rapport aux autres concepts mathématiques.

2.3 Première exploration sémantique : L'objet mathématique, le concept de factorisation

La toute première exploration sémantique pour donner du sens à la factorisation est en lien avec l'objet mathématique en tant que tel, c'est-à-dire la factorisation. Il s'agit de s'interroger sur le concept lui-même, sur ses caractéristiques et ses particularités. L'idée est d'aller un peu plus loin que la vision de la factorisation au secondaire telle qu'elle est présentée dans les manuels, dans les lexiques mathématiques et dans le PFEQ. De fait, la factorisation n'est pas unique ou bien limitée à des coefficients entiers. Elle n'est pas restreinte à l'application de techniques ou au développement d'habiletés d'ordre syntaxique non plus. Cette exploration sémantique comporte trois aspects : le lien entre le développement et la factorisation, les différentes formes factorisées d'un polynôme et enfin, les expressions algébriques qui ne se factorisent pas.

2.3.1 Le lien entre le développement et la factorisation

La factorisation de polynômes est le procédé inverse du développement algébrique, et vice versa. Les formes résultantes de ces deux transformations sont équivalentes. « Une expression représentée sous la forme d'un produit de plusieurs facteurs est appelée la *forme factorisée* de cette expression, par opposition à la *forme développée* qui est le résultat du produit de tous ces facteurs. » (Patenaude et Mathieu, 2020c) Cette forme factorisée est donc le résultat de la factorisation et la forme développée le résultat du développement. Voici un exemple des processus de factorisation de polynômes et du développement algébrique (voir figure 2.3).

$$(x+3)(y-2) \underset{\xleftarrow{\text{Factoriser}}}{\overset{\xrightarrow{\text{Développer}}}{=}} xy-2x+3y-6$$

Figure 2.3 Processus de factorisation et du développement algébrique

Dans cet exemple, lors du développement, on multiplie les binômes $(x + 3)$ et $(y - 2)$ pour obtenir la forme finale composée de quatre termes, soit la forme développée. À l'inverse, lors de la factorisation, on retrouve ces deux facteurs multipliés lors du développement, que l'on appelle la forme factorisée. Ceci illustre bien l'équivalence de ces deux formes d'écriture. D'ailleurs, les formes factorisée et développée ne sont pas les seules formes possibles que puisse prendre un polynôme, mais elles ont la particularité d'avoir un nom.

Cette relation bidirectionnelle entre la factorisation et le développement est importante. Bien qu'il soit difficile pour les élèves de percevoir ce lien (Matz, 1982 ; Mejía Palomino, 2004), il semble nécessaire de l'aborder et de l'approfondir avec les élèves pour contribuer à leur compréhension de la factorisation. Je parle ici d'aller plus loin que la simple reconnaissance de l'équivalence des formes factorisée et développée, par exemple, et donc d'aller plus loin que l'*habileté à reconnaître des formes équivalentes* proposée par Simon (2013), qui est d'ordre syntaxique. En effet, il n'est pas nécessaire de bien saisir ce lien entre le développement et la factorisation pour être en mesure de reconnaître que deux formes sont équivalentes (que ce soient les formes factorisées, développées ou « intermédiaires »), surtout avec la présence du symbole d'égalité entre ces différentes formes qui est familier pour les élèves.

L'idée est donc de miser sur les connaissances préalables des élèves, sachant que ces derniers sont normalement à l'aise avec le développement algébrique, comme le mentionne le programme (MELS, 2007). Ils sont habitués de manipuler la forme factorisée des polynômes, alors qu'il leur est demandé de la développer dans les trois premières années du secondaire. Selon Jonnaert (2009), le processus de construction des connaissances est interactif :

> La dimension interactive évoque les situations auxquelles le sujet est confronté et à l'intérieur desquelles ses connaissances se heurtent à de

> nouveaux « objets » […]. Il s'agit donc d'une mise en interaction des connaissances anciennes du sujet (sont déjà-là, ses représentations, ses théories dans la tête, ses conceptions) avec le « nouveau » à apprendre, rencontré dans des situations contextualisées. (p. 74-75)

En ce sens, insister sur le caractère bidirectionnel de la factorisation et du développement lors de l'enseignement de la factorisation rend possible cette rencontre de l'ancien (la maitrise du développement algébrique) et du nouveau (la factorisation de polynômes). Ceci permettrait la construction de connaissances autour de la factorisation, ce qui sous-entend une compréhension du concept de la part des élèves.

2.3.2 Différentes formes factorisées pour un même polynôme

La factorisation au secondaire possède une particularité qui n'apparait pas dans les définitions de ce concept, comme il en a été question plus tôt dans la section 2.1.1. Elle est implicite dans les écoles et n'est pas présente formellement dans les programmes.

> Les enseignants français, pour tenter de diriger l'action des élèves, expliquent que le mot « factoriser » sous-entend « pousser la factorisation au maximum » […] (Abou Raad et Mercier, 2009, p. 182)

Bien que la citation précédente parle de ce qui se passe en France, la situation est la même au Québec au deuxième cycle du secondaire. En effet, dans les écoles secondaires, il est demandé aux élèves de factoriser au maximum les expressions algébriques qui leur sont données. La factorisation d'un polynôme fait donc référence à la forme la plus factorisée possible de ce polynôme, ce qui implique une factorisation unique. Une question légitime est à soulever ici : quand a-t-on atteint la forme la plus factorisée? Dans les réels, il existe plutôt une infinité de factorisations pour un même polynôme. Prenons l'exemple suivant pour aborder cette question, qui représente la factorisation attendue au secondaire :

$$5x^2 - 180 = 5(x^2 - 36) = 5(x + 6)(x - 6)$$

Il serait possible de factoriser l'expression $5x^2 - 180$ comme étant plutôt $2{,}5(2x + 12)(x - 6)$ ou $5x^2\left(1 - \frac{36}{x^2}\right)$ [20]. Toutefois, ces formes factorisées ne respectent pas cette contrainte du secondaire de pousser la factorisation au maximum. En fait, il est attendu des élèves qu'ils (1) appliquent les techniques de factorisation enseignées jusqu'à ce qu'il leur soit impossible de continuer, et ce (2) dans les entiers.

Par exemple, les formes factorisées alternatives proposées pour $5x^2 - 180$ ne respectent pas la mise en évidence simple telle qu'elle est enseignée au secondaire, celle-ci se limitant à la mise en évidence du plus grand facteur commun des termes d'une expression algébrique donnée. Ainsi, $2{,}5(2x + 12)(x - 6)$ n'est pas la forme la plus factorisée, car il est encore possible de mettre le facteur 2 en évidence dans le binôme $(2x + 12)$. Pour ce qui est de $5x^2\left(1 - \frac{36}{x^2}\right)$, cette forme n'est pas non plus la forme attendue au secondaire, puisqu'il est impossible, dans $5x^2 - 180$, de mettre en évidence x^2 puisque ce n'est pas un facteur, à proprement parler, du terme -180. Enfin, la forme intermédiaire $5(x^2 - 36)$ n'est pas plus factorisée au maximum, car comme on peut le voir dans l'exemple, $x^2 - 36$ est une différence de carrés, qui s'avère être l'une des techniques de factorisation enseignées au secondaire. Aussi, comme j'en ai parlé plus tôt, les coefficients présents dans la factorisation au secondaire sont limités aux entiers et il n'est pas nécessaire, pour les enseignants, d'aller plus loin dans les réels. Par exemple, le polynôme $x^2 - 3$ déjà factorisé au maximum, même s'il est possible d'effectuer une différence de carrés en utilisant des irrationnels comme ceci : $x^2 - 3 = \left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$.

Cette vision limitée de la factorisation au secondaire apporte son lot de conceptions erronées et de difficultés (voir section 1.2.3), alors que les élèves pourraient croire qu'il

[20] Cette factorisation est celle requise au Cégep, par exemple, lorsqu'on recherche la limite de cette expression quand x tend vers l'infini.

est seulement possible de factoriser des polynômes à coefficients entiers, ou encore croire que la factorisation d'une expression algébrique est unique, ce qui n'est pas le cas. Dans cette optique, travailler des situations nécessitant diverses formes factorisées avec les élèves pourrait permettre d'élargir cette vision de la factorisation, et éventuellement, contribuer à la compréhension de ce concept. Il est important d'ajouter que le but est ici d'aller plus loin que l'*habileté à reconnaître des formes équivalentes* de la section 2.1.3 (contrôle syntaxique). De fait, l'idée n'est pas seulement d'amener les élèves à reconnaitre des égalités mathématiques entre deux expressions algébriques équivalentes, mais bien de les amener à comprendre qu'un polynôme peut avoir plusieurs formes factorisées et que le choix de la forme adéquate peut varier selon le contexte (contrôle sémantique).

À ce sujet, Hitt et Kieran (2009) rapportent que l'utilisation de calculatrices symboliques pourrait être une voie prometteuse pour travailler l'équivalence entre des expressions algébriques dont l'expression factorisée . Les réponses données par les calculatrices auraient le potentiel d'amener les élèves à argumenter, à justifier, à étendre et à valider leurs démarches papier-crayon. Toutefois, les activités que proposent les auteurs ne peuvent pas être exportées au secondaire, alors que les élèves sont rarement confrontés à des expressions de degré supérieur à deux à ce niveau scolaire.

2.3.3 Les expressions algébriques qui ne se factorisent pas

Évidemment, ce ne sont pas tous les polynômes qui se factorisent selon la définition de la factorisation au secondaire. Pour reprendre l'exemple de la section 2.1.4, le binôme $a^2 + b^2$ est déjà sous sa forme la plus factorisée, alors que les élèves tentent à tort de le transformer vers la forme $(a + b)^2$. Comme Simon (2013) le mentionne, *reconnaître des formes qui ne se factorisent pas* est une habileté à développer pour l'apprentissage de la factorisation. Mais cette habileté n'implique pas une compréhension de la part des élèves quant au pourquoi une expression ne se factorise pas, alors que ceux-ci ne doivent que déterminer si un polynôme se factorise ou non. Pour y arriver, il leur suffit d'essayer d'appliquer toutes les techniques de factorisation du PFEQ, ce qui demande finalement un contrôle syntaxique, et non sémantique.

En revanche, mon analyse sommaire des manuels scolaires (Boucher *et al.*, 2009 ; Cardin *et al.*, 2008 ; Guay *et al.*, 2008) indique que les exercices, les problèmes et les situations-problèmes proposés aux élèves n'impliquent que des polynômes qui se factorisent. La raison me parait fort simple : on veut faire factoriser les élèves, alors il ne semble pas pertinent de leur donner des expressions qui ne se factorisent pas. Par contre, il pourrait être intéressant d'élargir, encore une fois, cette vision de la factorisation présente au secondaire, en abordant cet aspect pourtant bien réel de la factorisation et qui pourrait être réinvesti au collégial.

2.4 Deuxième exploration sémantique : Les différentes représentations

Cette deuxième exploration sémantique porte sur différentes représentations qu'il serait possible d'exploiter pour factoriser au secondaire, et ainsi donner du sens à ce concept. Le but est d'ouvrir la définition de la factorisation pour être en mesure de changer la représentation des objets mathématiques présents, particulièrement pour laisser de côté un instant la représentation algébrique, que l'on pourrait qualifier de « classique » ou « habituelle ». Un survol de deux moments historiques importants dans le développement de l'algèbre me permettra de plonger dans la description des représentations géométriques, puis des représentations visuelles. Ces différentes représentations m'ont amenée à définir ce que j'ai nommé les représentations en forme.

2.4.1 Quelques éléments de l'histoire de l'algèbre

Un regard sur l'histoire des mathématiques est nécessaire ici pour me permettre d'introduire un premier type de représentation pour cette deuxième exploration sémantique : les représentations géométriques. Ces représentations sont présentes notamment dans les travaux de deux mathématiciens importants de l'histoire de l'algèbre, Diophante (basse antiquité) et al-Khwarizmi (haut moyen-âge). Ces deux hommes ont significativement contribué au développement de l'algèbre, et donc au développement de la factorisation. C'est pourquoi je présenterai, dans les lignes qui suivent, un bref résumé de leur apport respectif pour cette branche des mathématiques, tout en m'attardant particulièrement à son aspect géométrique.

Ancré dans la culture du monde Greco-Romain de son époque, Diophante (vers 250) serait d'origine syrienne et il aurait vécu à Alexandrie, en Égypte. Malheureusement, on en sait très peu sur lui et sur sa vie. Or, il nous est parvenu deux ouvrages de Diophante. Entre autres, les *Arithmétiques*, une collection de problèmes d'analyse algébrique divisée en 13 livres, dont 3 ont été perdus. Dans cet ouvrage, on retrouve l'invention d'un nouvel objet mathématique très important : l'*arithme*, qui est « une quantité indéterminée d'unités ». En d'autres mots, l'*arithme* représente l'inconnue dans un problème (Radford, 1996). Les *Arithmétiques* de Diophante ont été conservées et minutieusement étudiées par les mathématiciens arabes du Moyen-Âge, ainsi que par les mathématiciens européens de la renaissance et de l'époque moderne (p. ex. Bombelli, Fermat, Viète, Euler). Tous s'en inspireront fortement pour le développement de l'algèbre et de la théorie des nombres.

Dans son texte intitulé *The Roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective*, Radford (1996) exprime ses hypothèses quant aux origines des idées algébriques de Diophante dans les *Arithmétiques*. Selon les observations et les analyses historiques de l'auteur, ces origines proviendraient de deux traditions : une géométrique et une arithmétique. Dans le cadre de mon mémoire et en concordance avec ma deuxième exploration sémantique, c'est l'aspect géométrique qui m'intéresse. À ce sujet, l'auteur mentionne que les écrits de Diophante font référence à une procédure géométrique pour la résolution de ses problèmes : la procédure « cut-and-paste » ou *copier-coller*. Cette procédure consiste à découper une surface prédéfinie représentant le problème à résoudre pour la remanier et construire une nouvelle surface, dont l'aire n'a pas changé. Ici, l'égalité algébrique réfère donc à une égalité entre les aires des surfaces manipulées dans le problème. Cette procédure *copier-coller* sera décrite plus en profondeur et accompagnée d'un exemple d'un problème de Diophante (voir figure 2.4) dans la section 2.4.2 suivante portant sur les représentations géométriques.

Il est possible de retrouver cette procédure géométrique du *copier-coller* dans les travaux et les écrits d'autres auteurs, comme dans ceux d'al-Khwarizmi (vers 850). Ce mathématicien arabe est surtout connu pour son livre *L'Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*, qui marque le début de la formalisation de l'algèbre avec les premières règles d'application pour un ensemble de situations. Il s'agissait de résoudre des situations de la vie courante comme des problèmes concrets d'héritages, de partages de biens ou de transactions commerciales. La parution de cet ouvrage est souvent admise comme étant l'acte de naissance officiel de l'algèbre. Pour ce livre, al-Khwarizmi commence par définir les objets de l'algèbre : les nombres (entiers et rationnels positifs), l'inconnue (racine) et son carré (bien, entendu comme une possession). Il plonge ensuite dans la présentation du modèle de six équations du second degré :

> Puis, il présente, en phrase et sans aucun symbolisme, les six équations canoniques, selon un ordre qui tient compte de la nature et du nombre d'éléments dans les deux membres de l'équation. Chaque type d'équation est ensuite illustré par des exemples où l'auteur fait varier le coefficient du premier terme en le prenant égal, supérieur ou inférieur à un, puis pour

> chacun des exemples, l'auteur expose l'algorithme de résolution de l'équation. (Djebbar, 2005, p. 27)

C'est pour montrer le bien-fondé de ses résolutions qu'al-Khwarizmi emploie la géométrie. Les représentations géométriques sont alors utilisées pour illustrer les équations canoniques ainsi que pour les résoudre (Charbonneau, 1991). Par exemple, « pour résoudre l'équation $x^2 + xp = q$ où p et q sont des coefficients positifs, al-Kwarizmi complète géométriquement le carré un peu comme l'on rassemble un casse-tête. » (Charbonneau, 1991, p. 11) La figure 1.7 dans la problématique illustre la résolution d'une équation du second degré de ce type par la méthode de la complétion du carré d'al-Khwarizmi. Dans cet exemple, les représentations géométriques et la procédure *copier-coller* permettent la résolution de l'équation $x^2 + 10x = 39$.

Ce bref survol historique illustre bien l'existence, dans l'histoire de l'algèbre, d'une représentation différent que la représentation algébrique. Les représentations géométriques (et la procédure *copier-coller*) s'avèrent être un bon point de départ pour pousser mes réflexions en lien avec les différentes représentations.

2.4.2 Les représentations géométriques

Dans l'histoire des mathématiques

Les représentations géométriques prennent leur ancrage dans l'histoire des mathématiques, tel que le montre la section précédente. Radford (1996) mentionne d'ailleurs que c'est la procédure géométrique « cut-and-paste », ou *copier-coller* en français, qui est prédominante dans l'histoire de l'algèbre.

Voici un exemple de cette procédure *copier-coller* pour la résolution d'un problème de Diophante, provenant des *Arithmétiques*. Grossièrement, le but de ce problème est de retrouver deux nombres dont la somme est 20 et dont le produit est 96. Dans la première image (voir figure 2.4), un carré ayant des côtés mesurant la moitié de la somme (10) est construit. Dans la deuxième image (voir figure 2.4), l'excédent d'aires (4) présent pour obtenir une surface dont l'aire est le produit (96) est enlevé, pour parvenir à la troisième image (voir figure 2.4). Enfin, pour atteindre la quatrième image (voir figure 2.4), il suffit d'utiliser la procédure *copier-coller*, pour découper la surface de la troisième image dans l'objectif de la remanier et de construire un rectangle, et donc de retrouver les deux nombres recherchés, qui sont les mesures des côtés de ce rectangle final (12 et 8). Ce type de représentation pourrait être défini comme étant une représentation géométrique.

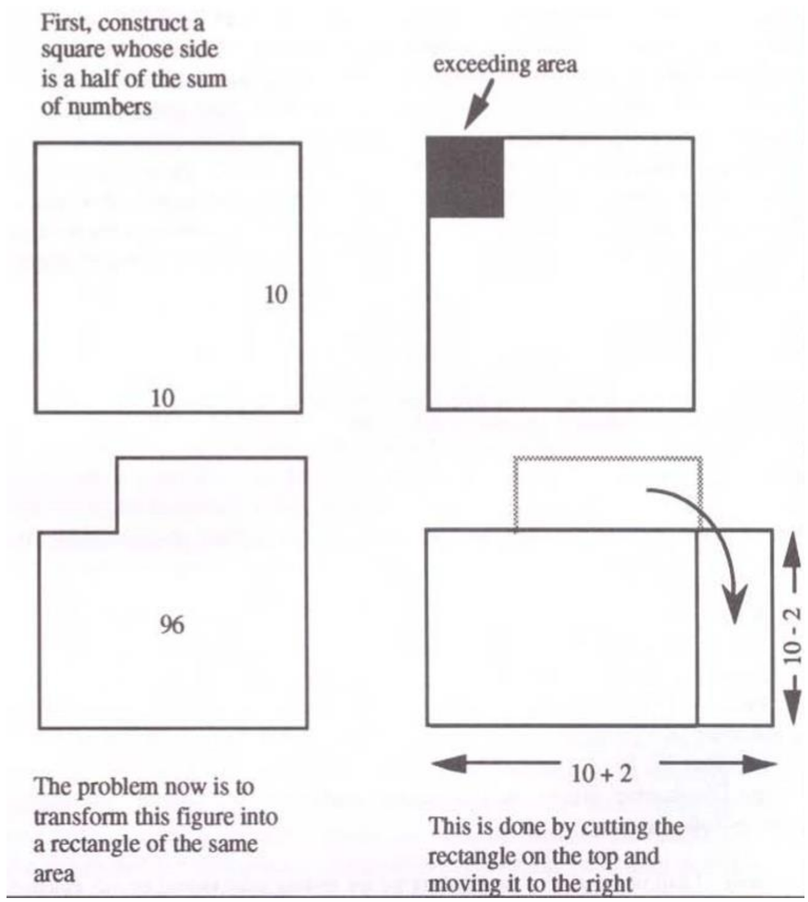


Figure 2.4 Exemple de la procédure « cut-and-paste » (Radford, 1996, p. 6)

Pour l'enseignement de la factorisation

Les représentations géométriques sont bien présentes dans l'histoire des mathématiques pour le développement de l'algèbre et donc pour la factorisation. Toutefois, il est possible de parler de représentations géométriques en se détachant quelque peu de l'histoire, pour les introduire dans l'enseignement de la factorisation au secondaire.

Dans ce cas, les représentations géométriques pourraient être définies comme des *manipulations d'aires*. Plus directement en lien avec leur utilisation pour factoriser, l'idée est ici d'ouvrir la définition de la factorisation pour la voir comme la recherche des mesures des côtés d'un rectangle dont l'aire est le polynôme à factoriser. Ainsi, l'objectif pour factoriser devient la construction d'un rectangle dont on veut déterminer les dimensions. C'est dans la construction de ce rectangle que les manipulations d'aires interviennent, où il devient possible d'ajouter, d'enlever ou de remanier des formes géométriques. Une fois que c'est fait, il suffit d'identifier les mesures des côtés de ce rectangle, qui sont en fait les facteurs du polynôme de départ.

La figure 2.5 est un exemple de factorisation avec les représentations géométriques. Dans cet exemple, le polynôme $x^2 - 9$ (une différence de carrés) doit être factorisé. Pour y arriver, il faut commencer par représenter le carré de départ, ici un carré de x unités par x unités (1). La deuxième image (2) illustre le retrait, en gris, du carré de 9 unités carrées au carré de départ (x^2)[21]. Cependant, une fois la soustraction effectuée, la forme résultante n'est pas un rectangle (3). Il est donc nécessaire de jouer avec la forme de la troisième image (3) pour être en mesure de reconstruire un rectangle et déterminer les dimensions de celui-ci. La procédure *copier-coller* est appliquée, où la

[21] On considère ici que x est plus grand que 3, pour le bien de la représentation géométrique. Mais en réalité, x peut prendre n'importe quelle valeur.

forme de la troisième image (3) est découpée, puis remaniée pour arriver à la quatrième et dernière image (4) de la factorisation. Les mesures des côtés du rectangle final, $(x + 3)$ unités et $(x - 3)$ unités, représentent les facteurs voulus du polynôme $x^2 - 9$.

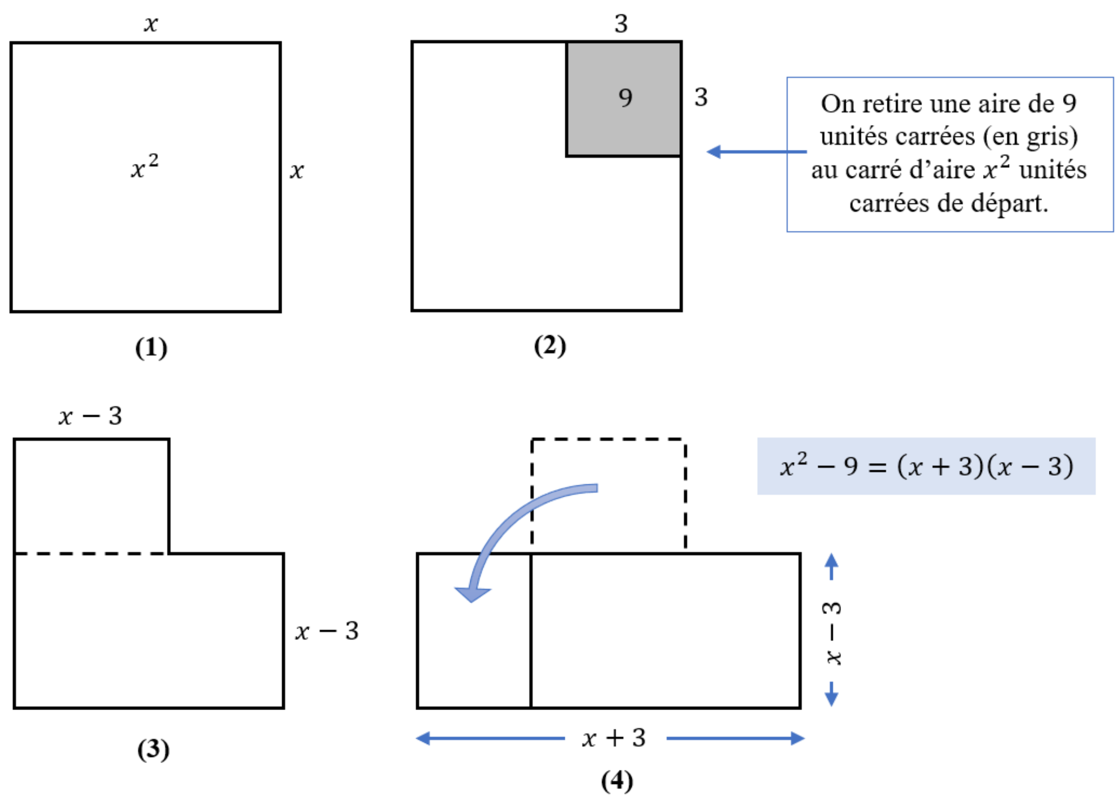


Figure 2.5 Utilisation des représentations géométriques pour la factorisation du polynôme $x^2 - 9$ (différence de carrés)

Dans cet exemple, deux types de manipulations d'aires sont présentes : le retrait d'aire et le repositionnement de rectangles. En effet, une portion de l'aire du carré x^2 de départ est coupée dans le passage de la deuxième image (2) à la troisième (3). Ensuite, la forme de la troisième image (3) est modifiée puis remaniée pour construire le rectangle final de la quatrième image (4).

Un exemple avec l’ajout d’aire pour factoriser une complétion du carré est présent dans la section 2.4.4, lors de la distinction entre les représentations géométriques et les représentations visuelles, qui sont abordées dans la section suivante. Cet exemple (voir figure 2.11) permet de montrer le dernier type de manipulation d’aires possible avec les représentations géométriques.

2.4.3 Les représentations visuelles

Les représentations visuelles sont très présentes dans les recherches portant sur le concept de la factorisation au secondaire. Selon les études recensées dans la problématique de ce mémoire, leurs utilisations en classe visent majoritairement l’amélioration de l’apprentissage et de la compréhension des élèves, ainsi que la diminution des difficultés associées à la factorisation (voir section 1.2.3 pour ces difficultés).

Deux types de représentations visuelles se démarquent du tour d’horizon des travaux réalisés autour de la factorisation (voir section 1.3.1) : les tuiles algébriques et la méthode du rectangle. Dans les deux cas, la vision de la factorisation à adopter est la même que pour les représentations géométriques. C’est-à-dire que l’objectif est encore une fois la construction d’un rectangle dont l’aire est le polynôme à factoriser. L’action de factoriser devenant la recherche des dimensions de ce rectangle. C’est la façon dont le rectangle final est construit qui diffère entre les représentations géométriques et les représentations visuelles[22]. Ce qui suit permet d’expliquer l’utilisation des tuiles algébriques et celle de la méthode du rectangle pour factoriser.

[22] La section 2.4.4 discute de la distinction entre les représentations géométriques et les représentations visuelles.

Les tuiles algébriques

Les tuiles algébriques ont d'abord et avant tout été conçues comme du matériel didactique tangible que les élèves peuvent manipuler en classe pour l'apprentissage de divers concepts algébriques. Elles viennent majoritairement dans des ensembles où on retrouve des tuiles de différentes grosseurs (des tuiles unités, des tuiles x, x^2, y, y^2 et xy) pour permettre de représenter des termes algébriques, des expressions algébriques et même des égalités algébriques (Jeannotte, 2004). Pour la factorisation, ce sont les polynômes à factoriser qui sont représentés à l'aide des tuiles algébriques.

Toutefois, pour être en mesure de donner du sens à la factorisation, les tuiles algébriques ne devraient pas être perçues seulement comme du matériel. Il est important, selon moi, de considérer les tuiles algébriques (ou tout autre type de représentation) comme une façon plus large de concevoir les concepts mathématiques en jeu. Pour la factorisation, c'est le fait d'élargir la définition de l'action de factoriser vers la recherche des dimensions d'un rectangle qui permet aux tuiles d'être intéressantes et exploitables en classe avec des élèves du secondaire. L'extrait suivant exprime comment utiliser les tuiles algébriques pour factoriser :

> C'est par le modèle d'aire que l'élève est amené à découvrir les facteurs de certains polynômes. Cette technique permet de décomposer les polynômes en plusieurs facteurs lorsque c'est possible. […] Si l'élève doit factoriser le polynôme $x^2 + 6x + 9$, il débute en représentant le polynôme à l'aide des tuiles. L'étape suivante consiste à former un rectangle avec les tuiles dans le but de trouver les mesures des côtés de ce rectangle qui seront les facteurs recherchés. (Jeannotte, 2004, p. 21)

Pour présenter un exemple simple, la figure 2.6 illustre la factorisation du polynôme $x^2 + 5x + 6$ grâce à l'utilisation des tuiles algébriques. Comme le mentionne Jeannotte (2004) dans la citation précédente, la première étape consiste à représenter tous les éléments du polynôme à factoriser avec les tuiles, ici une tuile x^2, cinq tuiles

x et six tuiles unités. Il suffit ensuite de déplacer les tuiles pour former un rectangle et déterminer les dimensions de ce dernier, qui représentent les facteurs recherchés pour la factorisation (voir figure 2.6).

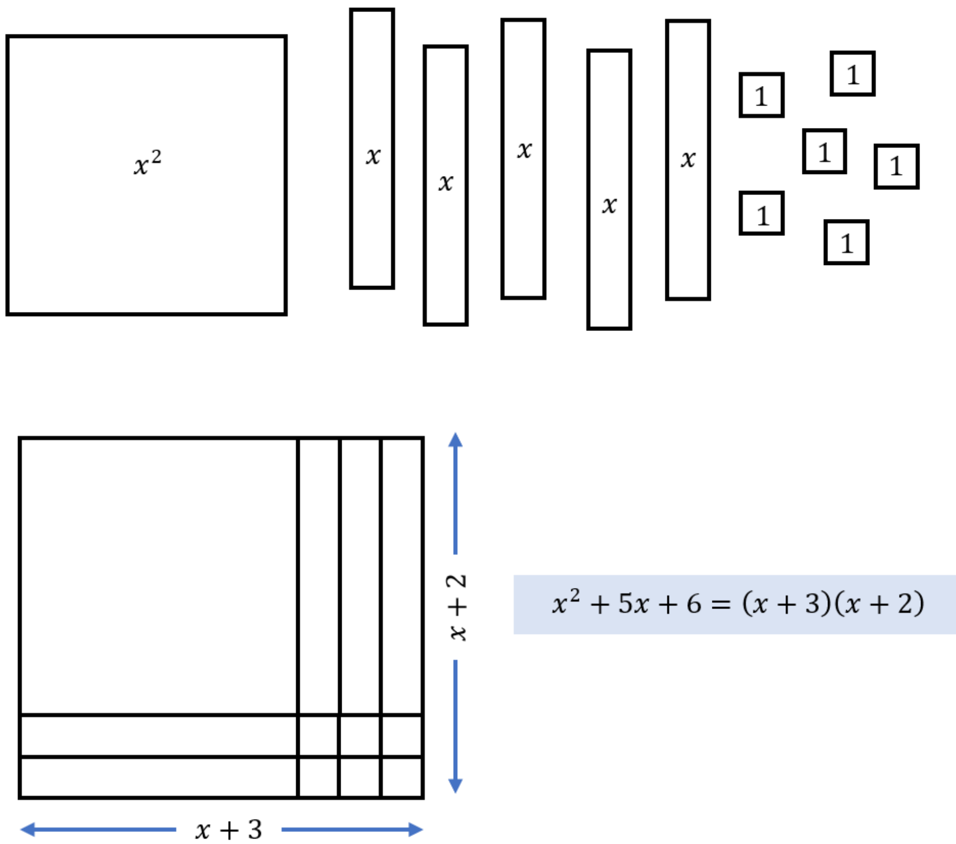


Figure 2.6 Utilisation des tuiles algébriques comme représentation visuelle pour la factorisation du polynôme $x^2 + 5x + 6$ (mise en évidence double)

La méthode du rectangle

La figure 2.7 reprend la factorisation du polynôme $x^2 + 5x + 6$ qui a été réalisée plus haut dans la figure 2.6 avec les tuiles algébriques. Cette fois-ci, c'est la méthode du rectangle qui est utilisée. Il est possible de voir que les deux représentations visuelles sont très proches, alors que la différence entre les deux est le fait que les tuiles x et les tuiles unités sont réunies ici pour permettre un visuel plus léger et plus facile à manipuler. Néanmoins, le travail derrière la manipulation des tuiles algébriques et de la méthode du rectangle est le même. Il faut d'abord représenter l'expression à factoriser par des rectangles prédéfinis, puis déplacer les éléments en jeu pour construire un rectangle final dont les dimensions sont les facteurs du polynôme recherchés (voir figure 2.7).

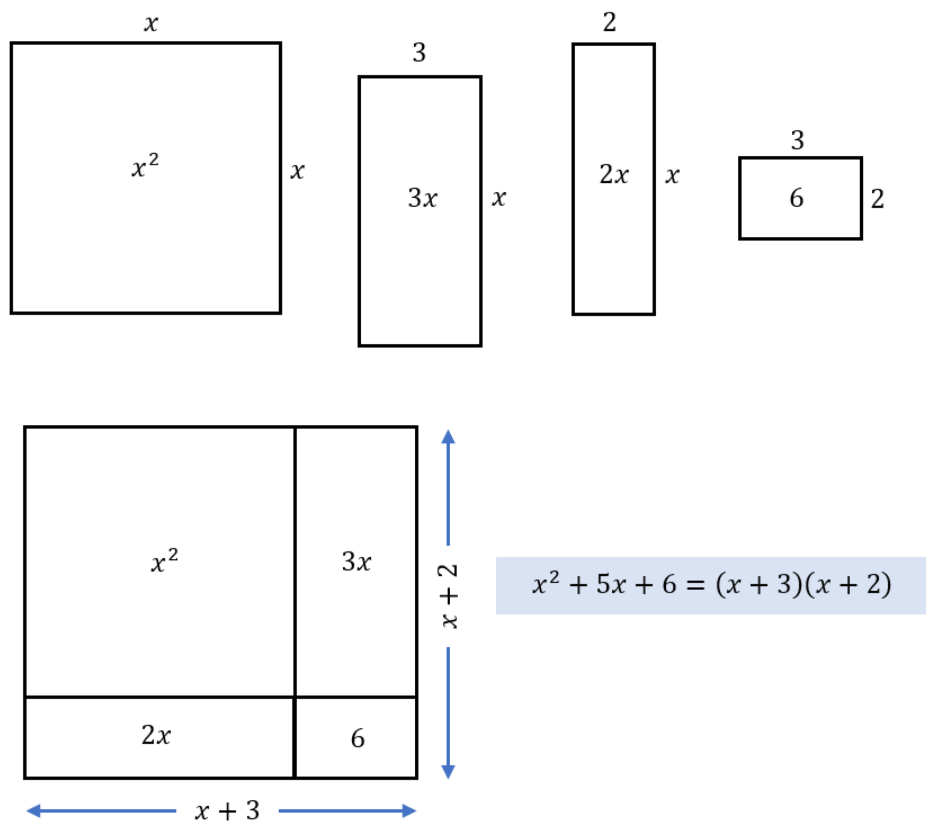


Figure 2.7 Utilisation de la méthode du rectangle comme représentation visuelle pour la factorisation du polynôme $x^2 + 5x + 6$ (mise en évidence double)

La méthode du rectangle est ainsi une simplification des tuiles algébriques. Comme le mentionnent Hoong *et al.* (2010), la méthode du rectangle étant nommé le *Rectangle Diagram* dans leur texte, les tuiles algébriques (*Algecards*) ne peuvent pas être utilisées directement par les élèves dans des situations d'évaluation, car elles sont difficiles (voire impossibles parfois) à utiliser avec des coefficients très grands :

> The AlgeCards in its original form, even when drown, is too cumbersome to deal with quadratic expressions with larger coefficients. As such, it has to be simplified into a form that is easily drawn and yet retain some links to the Algecards, especially the concept of finding length/breadth given area. […] We finally decided on the Rectangle Diagram, whitch initially is kind of visual simplification of the Algecards. (Hoong *et al.*, 2010, p. 21-22)

Dans son mémoire, Simon (2013) soutient aussi que la méthode du rectangle possède plusieurs avantages en comparaison aux tuiles algébriques. De fait, selon l'auteure, les tuiles algébriques nécessitent une trop grande quantité de matériel pour représenter des polynômes par tous les élèves d'un groupe. Il serait nécessaire d'avoir un ensemble de tuiles par élève (ou par deux élèves) pour permettre leur manipulation par tous. En plus, « l'utilisation des tuiles devient très laborieuse pour des expressions négatives ou avec des expressions plus complexes. » (Simon, 2013, p. 21)

Pour toutes les raisons évoquées plus tôt, l'utilisation en classe de la méthode du rectangle semble être plus simple et plus efficace que l'utilisation des tuiles algébriques. La méthode du rectangle ne nécessite aucun matériel supplémentaire pour les enseignants, puisqu'elle se représente sur papier, par des dessins. Elle permet aussi la représentation de polynômes complexes, de polynômes avec des coefficients très grands et même négatifs, et ce assez facilement en comparaison avec les tuiles algébriques. Ainsi, comme la méthode du rectangle n'est qu'une simplification des tuiles algébriques, je vais la préférer aux tuiles algébriques lorsque j'aborderai les représentations visuelles pour la suite.

2.4.4 L’émergence des représentations en forme

Il est intéressant de parler de l’aire d’un rectangle et de ses dimensions quand on aborde la factorisation avec les représentations géométriques et visuelles, car les élèves sont à l’aise avec cette figure plane et sont en mesure de la manipuler. Ils connaissent ses propriétés et peuvent calculer son aire. Ceci engendre, comme je l’ai déjà mentionné, une ouverture de la définition de la factorisation pour permettre un changement de représentation des objets mathématiques en jeu, ici du type algébrique (syntaxique) vers un type concret et visuel (sémantique). La factorisation peut maintenant être perçue comme étant la recherche des dimensions d’un rectangle dont l’aire est le polynôme à factoriser. Ce passage vers une forme concrète pour les élèves du secondaire est un avantage considérable des représentations géométriques et visuelles. En effet, comme le souligne Jeannotte (2004) dans son article, « Leitze et Kitt (2000) rapportent les dires de différents chercheurs qui mentionnent que l’utilisation de modèles concrets dans l’enseignement permet à l’élève de vraiment comprendre les concepts appris. » (p. 23)

Dans l’ensemble, les représentations géométriques et visuelles s’appuient donc sur la même conception, la même vision de la factorisation. Qu’est-ce qui les différencie alors? C’est en fait dans la façon de construire le rectangle final que les deux types de représentations se distinguent. Avec les représentations géométriques, c’est une manipulation d’aires qui est effectuée pour arriver à un rectangle à la fin. Il est possible de retirer de l’aire, d’en ajouter et même d’en découper (comme c’est le cas avec la procédure *copier-coller*). Alors que les représentations géométriques permettent de jouer avec les aires et de les modifier en cours de manipulations, les représentations visuelles ne le permettent pas, puisque l’aire de ce qui est représenté au départ est conservée du début à la fin. Ce que j’entends par là, c’est qu’avec les représentations visuelles, le polynôme de départ à factoriser est représenté (avec les tuiles algébriques ou la méthode du rectangle), mais aucun des éléments n’est enlevé ou ajouté. Il est question de travailler avec ce qui est là, ce qui implique que l'aire ne change pas. Les manipulations pour obtenir un rectangle final impliquent plutôt un réagencement des objets mathématiques pour les représentations visuelles. Des exemples suivent un peu plus bas pour illustrer cette différence.

D'ailleurs, c'est lors de la présence de coefficients négatifs d'une mise en évidence double qu'il devient possible de réellement voir une distinction entre l'utilisation des représentations visuelles et l'utilisation des représentations géométriques. Bien que le raisonnement sous-jacent soit le même pour la factorisation d'un polynôme, soit la recherche d'un rectangle pour être en mesure de déterminer ses dimensions et retrouver les facteurs du polynôme de départ, les manipulations derrières sont, quant à elles, très différentes. La figure 2.8 montre comment il est possible de factoriser le polynôme $2x^2 - 5x - 3$ avec la méthode du rectangle (représentations visuelles) alors que la figure 2.9 montre comment factoriser ce même polynôme, mais cette fois-ci avec les représentations géométriques.

Pour la méthode du rectangle, la factorisation d'un polynôme possédant des coefficients négatifs se traite de la même manière que s'il n'en avait pas, soit exactement comme dans la figure 2.7 précédente. Il suffit de représenter le polynôme à factoriser à l'aide de rectangles pour ensuite les déplacer et construire un rectangle final (voir figure 2.8). Il m'est important de mentionner que ma façon de faire avec la méthode du rectangle pour le traitement des coefficients négatifs diffère de celle de Simon (2013). De fait, cette dernière utilise plutôt les représentations géométriques lorsqu'elle travaille avec des coefficients négatifs (comme à la figure 2.9). Notre vision de la méthode du rectangle est donc la même pour les polynômes à coefficients positifs, mais elle ne l'est pas pour les polynômes à coefficients négatifs. Ainsi, le choix des rectangles en x, donc le choix de la séparation des éléments en x (ici $-6x$ et x), s'effectue dans le but de construire un rectangle final, ce qui implique qu'il est possible d'effectuer quelques essais avant de trouver la bonne combinaison. L'important est de s'assurer que la somme des éléments en x donne bel et bien le coefficient en x du polynôme à factoriser (ici $-6x + x = -5x$).

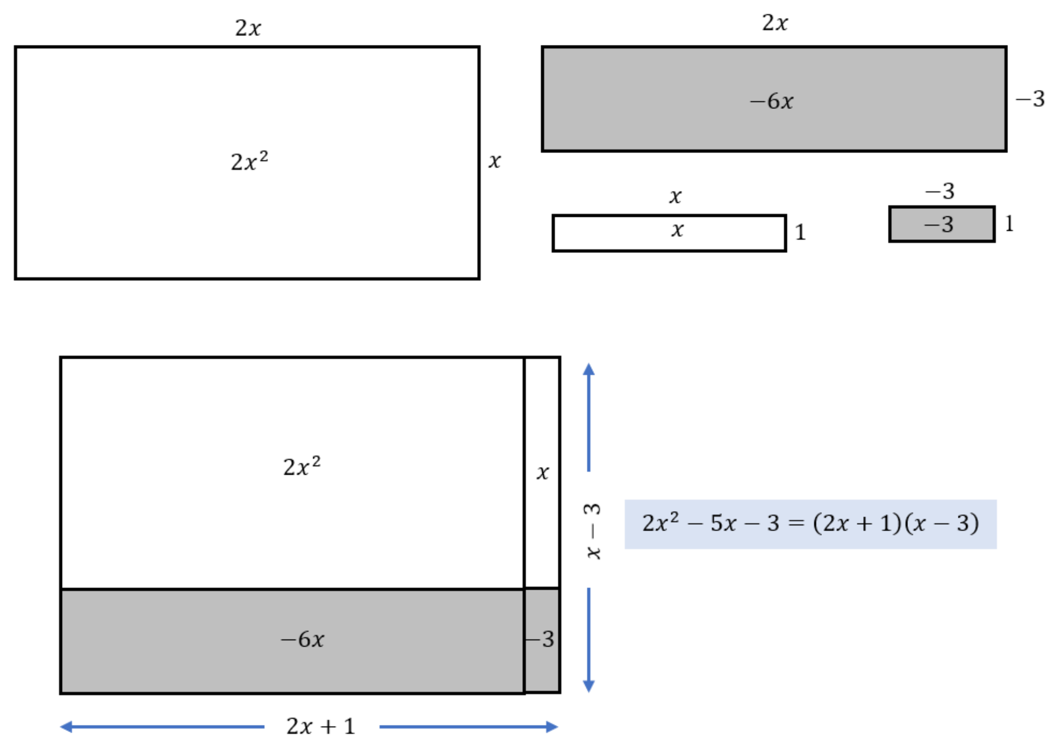


Figure 2.8 Factorisation du polynôme $2x^2 - 5x - 3$ en utilisant la méthode du rectangle (mise en évidence double)

Pour ce qui est des représentations géométriques avec des coefficients négatifs, la stratégie est différente. Il ne s'agit pas de tenter de construire un rectangle avec les éléments que l'on possède déjà, mais plutôt d'effectuer les soustractions d'aires du polynôme à factoriser. Dans l'exemple de la factorisation du polynôme $2x^2 - 5x - 3$, il s'agit de lire cette expression comme suit : je possède une aire de $2x^2$ et je lui enlève une aire de $(5x + 3)$. C'est exactement ce qui est fait grâce à l'utilisation des représentations géométriques (voir figure 2.9). La première image représente l'aire « de départ » $2x^2$ unités carrées (1). Dans la deuxième image, on voit le retrait d'une aire de $5x + 3$ unités carrées en gris (2). Avec une première manipulation d'aires, la troisième image illustre la forme résultante du retrait des éléments négatifs du polynôme (3). Une deuxième manipulation d'aires permet de découper la troisième image (3) pour la remanier et construire un rectangle à la quatrième image (4).

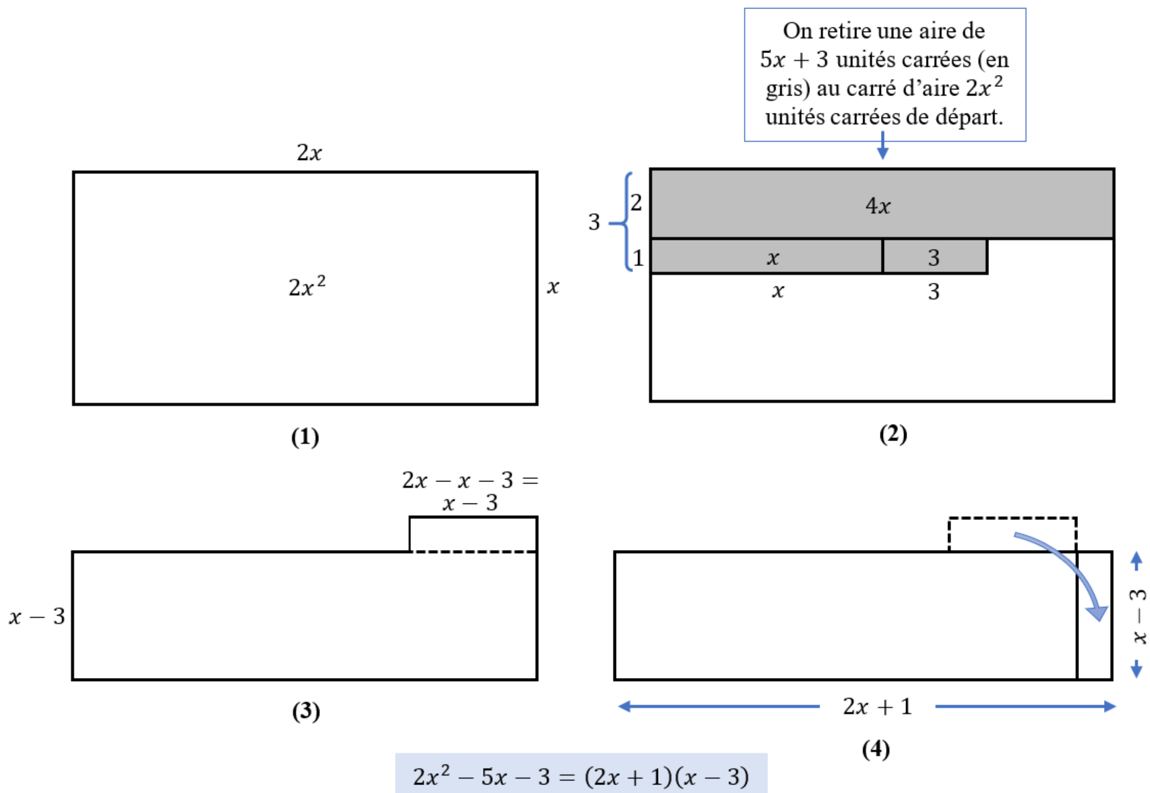


Figure 2.9 Factorisation du polynôme $2x^2 - 5x - 3$ en utilisant les représentations géométriques (mise en évidence double)

L'exemple de la différence de carrés est présenté à la figure 2.5. Pour sa part, une différence de carrés ne peut pas être factorisée avec les représentations visuelles, puisqu'il s'agit toujours d'un retrait d'aire.

Enfin, voici un exemple pour démontrer la nécessité d'utiliser les représentations géométriques pour factoriser une complétion du carré. La figure 2.10 montre une tentative d'utilisation de la méthode du rectangle pour factoriser le polynôme $x^2 + 4x + 2$. Avec la représentation visuelle du polynôme, il est impossible de former un rectangle. Il manque une portion d'aire! Mais le fait d'ajouter de l'aire fait référence à une manipulation d'aires, et donc aux représentations géométriques. La figure 2.11 illustre bien cet ajout, qui permet de compléter le carré et d'obtenir $x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2 - 2$. Il reste alors à effectuer une différence de carrés avec les représentations géométriques comme à la figure 2.5 plus haut. Dans ce cas précis, la différence de carrés fait intervenir des racines de 2. Au secondaire, il est peu probable de se retrouver face à ce type de polynôme, mais j'ai choisi cet exemple simplement pour illustrer qu'il n'est pas toujours possible d'utiliser la méthode du rectangle pour factoriser.

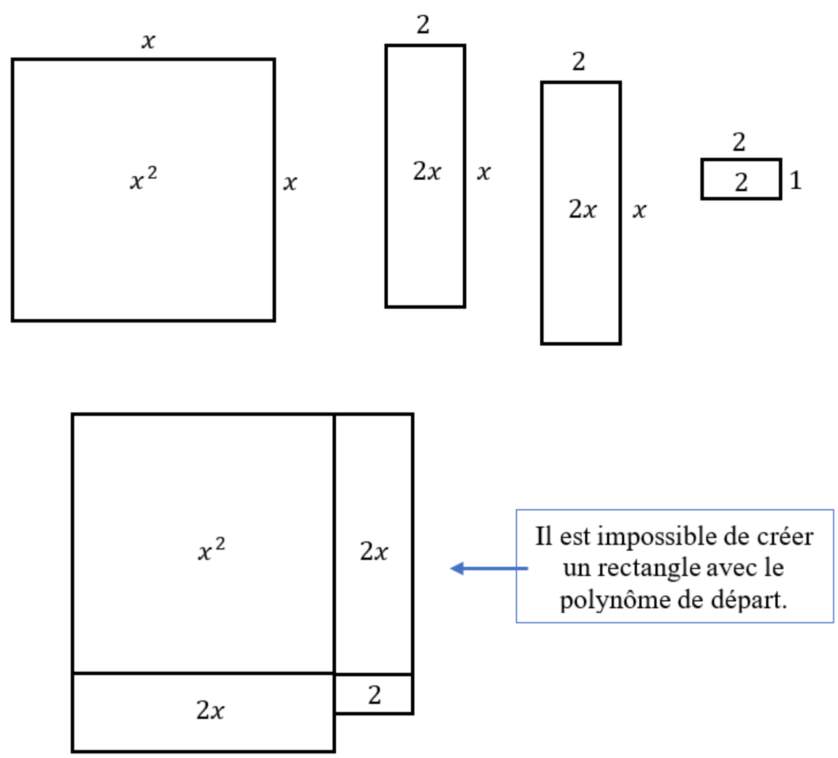


Figure 2.10 Tentative de factorisation du polynôme $x^2 + 4x + 2$ en utilisant la méthode du rectangle (complétion du carré)

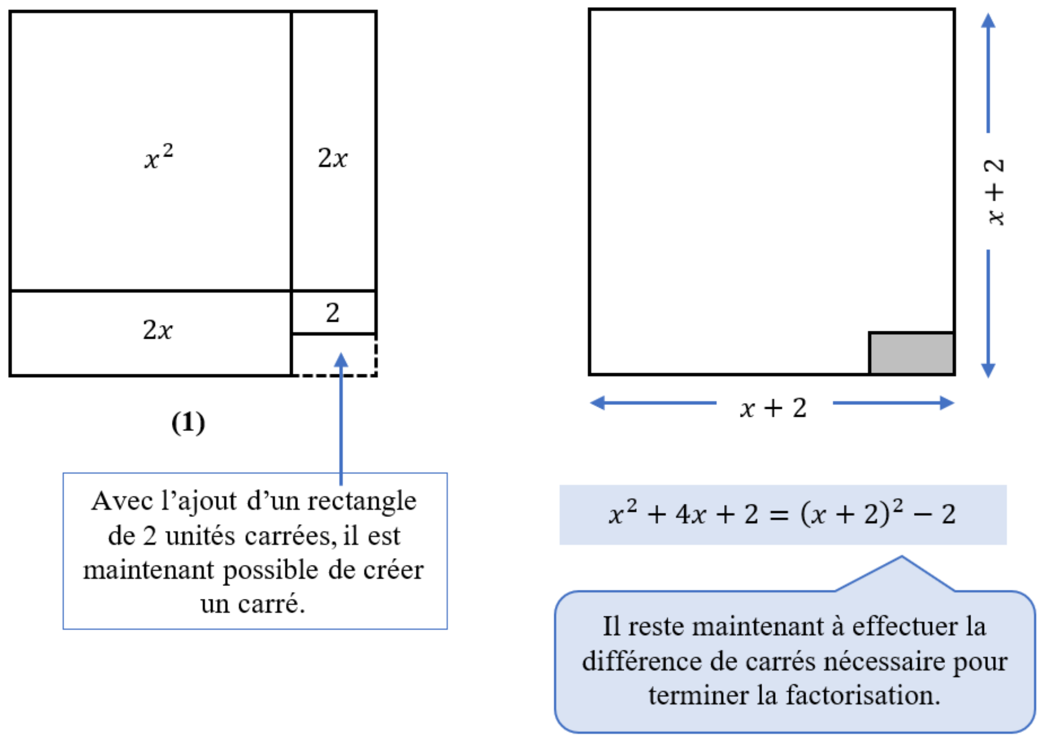


Figure 2.11 Factorisation du polynôme $x^2 + 4x + 2$ en utilisant les représentations géométriques (complétion du carré)

Une utilisation commune des représentations visuelles et géométriques

Bien que les représentations visuelles et les représentations géométriques sont en partie différentes, elles s'appuient tout de même sur le même raisonnement pour factoriser : retrouver les dimensions d'un rectangle dont l'aire est représentée par le polynôme à factoriser. En ce sens, je considère qu'il n'est pas essentiel de séparer ces approches concrètes pour l'enseignement-apprentissage de la factorisation. Il est possible de les combiner, et d'utiliser celle qui semble la plus appropriée pour chaque polynôme que l'on doit factoriser, sans vraiment se demander si c'est une approche plus visuelle ou plus géométrique. L'union de ces représentations sera nommée, dans le cadre de mon mémoire, les **représentations en forme**.

2.5 Troisième exploration sémantique : Aspect historique de la factorisation

Plusieurs auteurs voient un potentiel quant à l'utilisation de l'histoire des mathématiques pour l'enseignement-apprentissage des mathématiques (p. ex. Barbin, 1997 ; Clark, 2012 ; Fried, 2001 ; Guillemette, 2017 ; Jankvist, 2009). Comme il en a été discuté dans le premier chapitre, plusieurs proposent des raisons et des manières de faire pour introduire l'histoire des mathématiques dans l'enseignement de cette discipline. Pour cette troisième exploration sémantique, je m'attarderai principalement à la fonction dépaysante que peut avoir l'histoire des mathématiques, un argument initialement évoqué par Barbin (1997, 2006). Elle explique que :

> introduire l'histoire des mathématiques en classe remplacerait l'habituel par le différent et bousculerait les perspectives coutumières des étudiants sur les mathématiques en rendant le familier inusité. Comme cela survient lorsqu'une personne se trouve dans un contexte étranger, après une phase de confusion et de perplexité, des tentatives de reconstruction du sens émergent ». (Guillemette, 2016, p. 29)

Dans l'ensemble, l'histoire permettrait de voir les mathématiques différemment. Elle permettrait l'ouverture à de nouvelles conceptions des objets et des concepts mathématiques par les apprenants. Ce qui m'intéresse particulièrement de la fonction dépaysante de l'histoire est cette émergence de tentatives de reconstruction du sens de la part des apprenants après une rencontre avec l'histoire. L'histoire des mathématiques pourrait ainsi être une piste intéressante, d'un point de vue sémantique, pour favoriser la réflexion des élèves du secondaire et leur compréhension du sens des différentes notions mathématiques. La section suivante présente un exemple de reconstruction du sens de la part d'étudiants en enseignement des mathématiques en lien avec la factorisation grâce à un travail sur un texte historique et une tentative de l'utilisation de l'histoire dans le contexte de l'enseignement secondaire.

2.5.1 Exemple de l'apport de l'histoire auprès de futurs enseignants

D'emblée, Clark (2012) soutient que les futurs enseignants devraient avoir des connaissances sur l'origine et le développement historico-culturel des contenus et sujets mathématiques qu'ils devront enseigner. En ce sens, dans sa recherche, elle se questionne notamment sur l'impact que pourrait avoir l'étude de l'histoire des mathématiques sur la compréhension des concepts que les futurs enseignants auront à enseigner. Les participants (80 étudiants en enseignement des mathématiques qui ont suivi le cours d'histoire *Using History in the Teaching of Mathematics*, sur quatre sessions) ont alors été confrontés à un texte historique d'al-Khwarizmi provenant de son livre *L'Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison* sur la résolution d'une équation du second degré, que l'on pourrait écrire comme suit grâce à notre symbolisme d'aujourd'hui : $x^2 + 10 = 39$. Ces derniers avaient le mandat de s'engager dans la lecture du texte, d'analyser l'explication rhétorique (en mots) proposée par al-Khwarizmi, puis développer par eux-mêmes une solution géométrique de cette équation. Voici le texte historique en question :

> … a square and 10 roots are equal to 39 units. The question therefore in this type of equation is about as follows: what is the square which combined with ten of its roots will give a sum total of 39? The manner of solving this type of equation is to take one-half of the roots just mentioned. Now the roots in the problem before us are 10. Therefore take 5, which multiplied by itself gives 25, an amount which you add to 39 giving 64. Having taken then the square root of this, which is 8, subtract from it half the roots, 5 leaving 3. The number three therefore represents one root of this square, which itself, of course is 9. Nine therefore gives the square. (O'Connor et Robertson, 1999, cité dans Clark, 2012, p. 72-73)

La démarche proposée par al-Khwarizmi pour résoudre ce problème s'apparente à la méthode de la complétion du carré, qui s'avère être l'une des techniques de factorisation présente dans le PFEQ et qui doit être enseignée aux élèves du deuxième cycle du secondaire. Par contre, al-Khwarizmi ne résout pas cette équation à partir de manipulations algébriques telles que nous les connaissons, mais en proposant un raisonnement en mots comme le démontre la citation précédente. Toutefois, les explications proposées dans le texte historique suggèrent plutôt une résolution avec des représentations d'ordre géométrique[23] de l'équation $x^2 + 10 = 39$. En effet, al-Khwarizmi utilise la géométrie pour montrer le bien-fondé de ses résolutions des différentes équations canoniques présentes dans son livre *L'Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison* (Charbonneau, 1991), comme je l'ai mentionné plus tôt lors de la présentation de ce mathématicien (voir section 2.4.1).

Dans le cadre de leur cours *Using History*, les étudiants étaient amenés à rédiger un journal électronique autour de leurs réflexions sur les activités historiques vécues en classe. Les entrées de ces journaux électroniques ont constitué les données principales de cette recherche. Pour cette activité d'al-Khwarizmi, 32 des 80 participants ont discuté de leur expérience dans leur journal électronique. Les données ont été classées en quatre thèmes principaux (voir tableau 2.3) en lien avec leur vision de la résolution d'équations de second degré par la complétion du carré :

Tableau 2.3 Classification par thèmes des entrées des journaux électroniques des participants pour l'activité historique d'al-Khwarizmi (Clark, 2012, p. 75)

Theme	Fall 2006 excerpts[a]	Spring 2007 excerpts	Fall 2007 excerpts	Fall 2008 excerpts	Total
"Never learned"	2	0	1	6	9
"Just given the formula"	2	1	3	11	17
"Now I understand"	3	2	3	12	20
"Geometric interpretation"	1	4	1	9	15
Total PMTs represented by the excerpts (total PMTs included in analysis)	3 (15)	5 (24)	5 (17)	19 (24)	32 (80)

[a] Here "excerpt" is equivalent to all journal references for a particular PMT

[23] La figure 1.7 illustre la résolution géométrique de l'équation $x^2 + 10 = 39$ par la méthode de la complétion du carré d'al-Khwarizmi.

Selon les interprétations de Clark (2012), le thème « *never learned* » regroupe les étudiants qui n'ont jamais appris la provenance de la complétion du carré et encore moins le pourquoi cette méthode permet de résoudre des équations du second degré. Le thème « *just given the formula* » va dans le même sens que le premier, alors qu'il représente les étudiants qui se sont seulement fait donner la dans leur scolarisation (qui découle pourtant de la complétion du carré) avec des explications de comment l'appliquer. Ensuite, le thème « *now I understand* » regroupe les étudiants qui ont finalement compris pourquoi et comment la complétion du carré fonctionne pour résoudre des équations du second degré. Ils ont alors compris le sens derrière la méthode. Le dernier thème, « *geometric interpretation* », est fortement lié au troisième, alors qu'il est question des étudiants qui ont compris la complétion du carré et ce, grâce à la représentation géométrique associée.

Dans l'ensemble, ce qu'il est important de retenir de ces thèmes, c'est que les futurs enseignants qui ont participé à la recherche ont eu un changement de perspective vis-à-vis la méthode de la complétion du carré pour résoudre des équations du second degré. L'étude du texte historique d'al-Khwarizmi a permis à plusieurs étudiants d'aller au-delà de l'aspect manipulatoire de la complétion du carré, et de comprendre l'origine et le sens derrière cette technique. Ceci démontre une reconstruction du sens de la complétion du carré de la part des étudiants participants à la suite d'un dépaysement épistémologique, et ce grâce à la rencontre d'un texte historique. Ainsi, les conclusions de cette recherche représentent un bon exemple du potentiel de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques.

Cependant, comme plusieurs autres recherches liant l'histoire des mathématiques et l'enseignement des mathématiques, l'étude de Clark (2012) porte sur des étudiants universitaires, plus particulièrement sur des futurs enseignants. L'histoire semble avoir un potentiel pour ces populations, mais très peu de recherches s'attardent vraiment aux élèves du secondaire. La prochaine section amorce une réflexion à ce sujet.

2.5.2 Utilisation de l'histoire des mathématiques au secondaire

D'après ce que je connais de l'enseignement des mathématiques dans les écoles, l'histoire des mathématiques est très peu utilisée au secondaire. Les enseignants qui en parlent se limitent très souvent à des capsules historiques qui ont peu ou pas d'influence sur l'enseignement-apprentissage des mathématiques en tant que tel. En revanche, les programmes de formation du primaire et du secondaire au Québec font mention de l'histoire. D'ailleurs, Charbonneau (2006) s'est penché sur les programmes et son analyse lui a permis de conclure que non seulement l'histoire des mathématiques y est présente explicitement, mais elle y serait même prescrite.

Ces remarques suggèrent qu'il y a des avantages à utiliser l'histoire des mathématiques dans l'enseignement secondaire. Mon analyse sommaire des manuels scolaires de la deuxième année du deuxième cycle m'a permis de déceler certains passages à caractère historique, très souvent sous forme d'encadrés dans la marge des pages ou dans des activités d'exploration en début de chapitre (Boucher *et al.*, 2009 ; Cardin *et al.*, 2008 ; Guay *et al.*, 2008). C'est dans la collection *Visions* que j'ai trouvé une activité historique qui pourrait s'avérer intéressante pour l'amorce de l'enseignement de la factorisation, alors qu'on y retrouve des allusions à al-Khwarizmi et à la résolution d'équations du second degré par la complétion du carré. Voici un extrait de cette activité[24] (voir figure 2.12) :

[24] L'activité complète se trouve à l'annexe A.

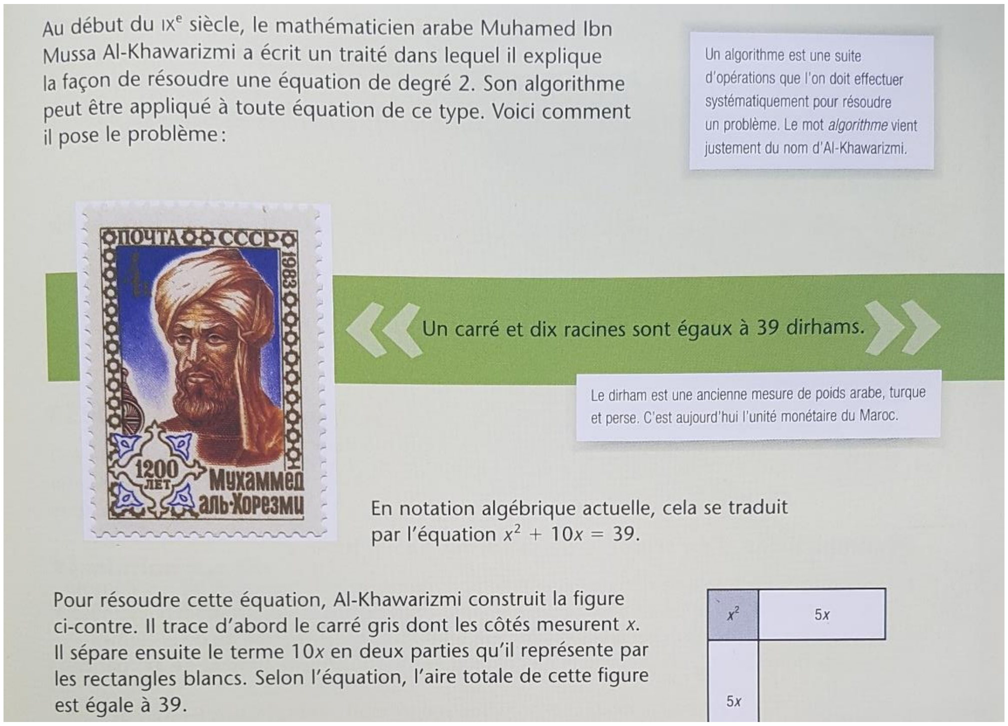


Figure 2.12 Activité à caractère historique dans le manuel *Visions* : L'algorithme d'al-Khwarizmi (Cardin *et al.*, 2008, p. 167)

Cette activité d'exploration au début du chapitre de la factorisation est un bon exemple de la présence de l'histoire dans les manuels. Cependant, il est important de rester critique face à ces allusions à l'histoire des mathématiques, alors que certains chercheurs (p. ex. Fried, 2001) soulignent des difficultés concernant l'introduction de l'histoire en enseignement, mais aussi des risques, comme celui de dénaturer l'histoire. En effet, dans le cas de la figure 2.12 ci-dessus, les références à al-Khwarizmi sont brèves et on passe très rapidement à la notation symbolique actuelle. L'histoire y est superflue. La résolution historique du mathématicien n'est pas présentée, alors qu'on propose directement une résolution géométrique en étapes accessible pour des élèves du secondaire. En plus, les questions qui suivent la présentation de l'activité sont très dirigées, ce qui ne semble pas laisser la place à un réel dépaysement épistémologique comme Barbin (1997) l'entend. Une adaptation de l'activité serait nécessaire pour aller dans le même sens que les recherches autour de l'histoire et l'enseignement des mathématiques. Malgré tout, cette tentative de l'utilisation de l'histoire pour l'enseignement secondaire a du potentiel, et je crois qu'il serait possible d'adapter ce qu'on trouve dans les manuels d'un point de vue historique, par exemple, pour donner du sens à la factorisation.

2.6 Quatrième exploration sémantique : L'utilité de la factorisation, situer le concept par rapport aux autres

Les explorations sémantiques précédentes portent principalement sur le concept même de la factorisation, sur ses caractéristiques et ses particularités, sur des façons de l'aborder ou de le représenter. Mais qu'en est-il de sa position par rapport aux autres concepts mathématiques? Cette quatrième et dernière exploration sémantique permet justement de situer la factorisation par rapport à d'autres concepts. L'idée ici est de discuter autour de l'utilité possible de la factorisation dans l'enseignement secondaire, pour répondre à cette fameuse question des élèves : à quoi ça sert? D'après mon expérience et ma brève analyse des manuels scolaires, les deux prolongements principaux de la factorisation au secondaire sont la résolution d'équations du second degré à une variable et l'étude de la fonction du second degré. La factorisation pourrait alors être perçue comme un outil pour travailler ces deux prolongements.

La factorisation semble souvent être enseignée comme un concept isolé qu'il faut apprendre avant de passer au suivant. J'émets alors l'hypothèse que d'insister sur l'utilité de la factorisation dès le début de son enseignement pourrait permettre de situer ce concept, pour aider les élèves à s'engager dans leurs apprentissages. Ceci favoriserait leur compréhension et donnerait du sens à la factorisation :

> Un contenu disciplinaire décontextualisé, c'est-à-dire mis « hors situation » peut difficilement être intéressant pour l'apprenant. Car, mis « hors situation » il est aussi, en quelque sorte, mis « hors jeu ». Il offre peu d'intérêt pour l'apprenant qui ne parvient pas à attribuer du sens à un objet

> décontextualisé. Pour revenir à l'exemple du texte, l'auteur n'écrit pas pour appliquer des règles de grammaire, il applique ces règles parce qu'il écrit. Inverser ce lien de cause à effet revient à confondre les moyens utilisés (des règles de grammaire) avec les fins poursuivies (la rédaction d'un texte) qui justifient l'utilisation de ces moyens. (Jonnaert, 2007a, p. 19-20)

Pour faire un parallèle avec la factorisation, les élèves devraient, par exemple, appliquer la factorisation (moyen utilisé) pour résoudre des équations du second degré (fin poursuivie) et non l'inverse. Dans les manuels *Intersection* (Boucher *et al.*, 2009), *Point de vue* (Guay *et al.*, 2008) et *Visions* (Cardin *et al.*, 2008), la factorisation est d'ailleurs toujours présentée avec certains de ses prolongements, ce qui lui octroie une utilité dès le début de l'apprentissage des élèves. Les prochaines sections décrivent sommairement comment la factorisation peut être utilisée pour ses deux prolongements principaux, soient la résolution d'équations du second degré à une variable et l'étude de la fonction du second degré.

2.6.1 Résolution d'équations du second degré à une variable

Au secondaire, diverses stratégies sont enseignées aux élèves pour leur permettre de résoudre des équations du second degré à une variable. L'une d'elles est l'utilisation de la factorisation. Une démarche possible pour y arriver est illustrée dans la figure 2.13, qui provient d'un « faire le point »[25] du manuel *Intersection* (Boucher *et al.*, 2009).

[25] Dans le manuel *Intersection* (Boucher *et al.*, 2009), les parties intitulées « faire le point » contiennent les concepts mathématiques à retenir de la part des élèves. On y trouve les éléments théoriques des différents sujets traités dans un chapitre.

La résolution d'équations quadratiques

Par factorisation

Soit $ax^2 + bx + c = 0$. Si le polynôme $ax^2 + bx + c$ se factorise, on peut transformer l'équation en un produit nul. Les solutions de l'équation sont les valeurs de x qui annulent les facteurs du polynôme.

Exemple :

Résoudre l'équation $4x^2 - 7x + 1 = 3$.

Étape	Démarche algébrique	
1. Transformer en une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.	$4x^2 - 7x - 2 = 0$	
2. Factoriser le polynôme.	$(4x + 1)(x - 2) = 0$	
3. Déterminer les valeurs pour lesquelles le produit est nul, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles l'un ou l'autre des facteurs est égal à 0.	$4x + 1 = 0$ $x = \frac{^-1}{4}$	$x - 2 = 0$ $x = 2$
4. Vérifier les solutions dans l'équation initiale.	Si $x = \frac{^-1}{4}$, alors $4\left(\frac{^-1}{4}\right)^2 - 7\left(\frac{^-1}{4}\right) + 1 = 3.$ $\frac{1}{4} + \frac{7}{4} + 1 = 3$	Si $x = 2$, alors $4(2)^2 - 7(2) + 1 = 3.$ $16 - 14 + 1 = 3$
5. Déterminer l'ensemble-solution.	$x \in \left\{\frac{^-1}{4}, 2\right\}$	

Figure 2.13 La factorisation comme méthode pour résoudre des équations quadratiques dans le manuel scolaire *Intersection* (p. 108)

La factorisation est ici un outil essentiel pour trouver les valeurs de x qui satisfont l'équation de départ. Elle nous permet de travailler avec des facteurs du premier degré, qui sont les deux binômes $4x + 1$ et $x - 2$ dans la figure 2.9, ce que les élèves ont l'habitude de faire depuis la deuxième année du secondaire. En ce sens, on voit bien l'utilité que peut avoir la factorisation dans ce type d'exemples.

2.6.2 La fonction du second degré

Dans l'étude de la fonction du second degré, c'est le passage entre les différentes formes d'écriture de la règle de la fonction du second degré qui nécessite l'utilisation de la factorisation. Plus spécifiquement, c'est dans le passage de la forme canonique ($f(x) = ax^2 + bx + c$) vers la forme factorisée ($f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$) qu'on se sert de la factorisation. Voici un exemple :

$$f(x) = 3x^2 + 18x - 21$$

$$f(x) = 3(x^2 + 6x - 7)$$

$$f(x) = 3(x^2 - x + 7x - 7)$$

$$f(x) = 3(x(x - 1) + 7(x - 1))$$

$$f(x) = 3(x + 7)(x - 1)$$

Grâce à ce changement de forme d'écriture, il devient plus facile de trouver les zéros de la fonction du second degré à l'étude. Effectivement, les abscisses à l'origine sont les valeurs de x_1 et x_2 dans la forme factorisée. Dans l'exemple ci-dessus, les zéros sont -7 et 1, car $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 3(x - (-7))(x - 1)$:

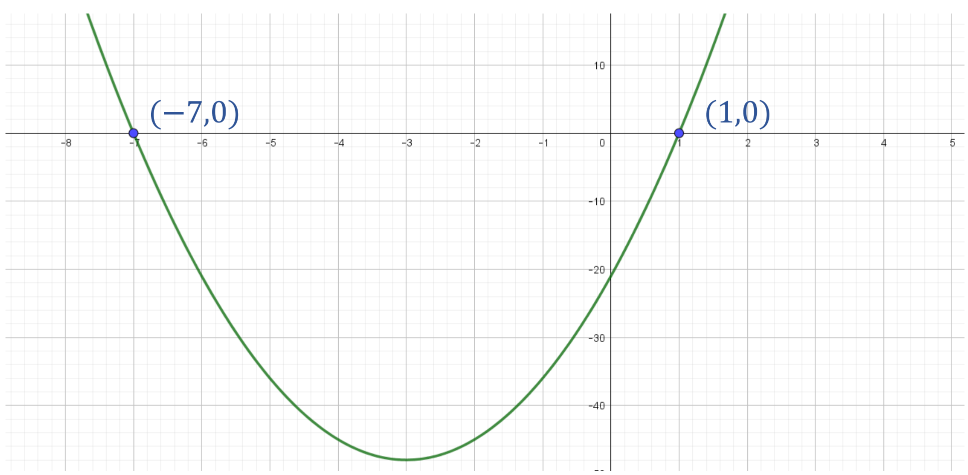


Figure 2.14 Représentation graphique de la fonction $f(x) = 3(x + 7)(x - 1)$ et de ses zéros $(-7,0)$ et $(1,0)$

2.7 Retour sur ce qu'est donner du sens et synthèse du cadre conceptuel

Le portrait de la factorisation au secondaire est singulier. Les polynômes qui y sont travaillés sont des polynômes particuliers, ils sont majoritairement composés de coefficients entiers, ne dépassant pas ou peu le quatrième degré et se limitent la plupart du temps à trois ou quatre termes. D'ailleurs, les polynômes les plus travaillés par les élèves sont des trinômes du deuxième degré à une variable. L'enseignement de la factorisation au secondaire, comme il est possible de le voir dans le PFEQ, est défini comme un ensemble de techniques, de la mise en évidence simple à la complétion du carré. En ce sens, les élèves se doivent de développer diverses habiletés, comme l'habileté à reconnaître quelles techniques appliquer face à une expression algébrique quelconque (voir tableau 2.4).

Tableau 2.4 Les habiletés à développer pour factoriser

Habiletés à développer	**Description**
1. Maîtriser l'application des techniques de factorisation	Plusieurs techniques de factorisation sont présentes dans le PFEQ. Il faut être capable de les appliquer toutes individuellement
2. Reconnaître la forme de factorisation à utiliser selon l'expression à factoriser	« Une expression algébrique étant donnée, on repère la ou les forme(s) de factorisation à utiliser parmi toutes les formes connues » (Simon, 2013, p. 41)
3. Reconnaître des formes qui ne se factorisent pas	« Dans l'ensemble des réels, certaines expressions ne sont pas factorisables, par exemple $a^2 + b^2$ » (*ibid.*)
4. Reconnaître des formes équivalentes	« Différentes formes existent, comme la forme factorisée, développée et les formes "intermédiaires" entre ces deux formes. Il s'agit de voir qu'elles sont toutes équivalentes » (*ibid.*)
5. Identifier le plus grand facteur commun entre plusieurs termes algébriques	Au secondaire, c'est le plus grand facteur commun qui est mis en évidence dans une mise en évidence simple ou double

Bien que les habiletés en lien avec l'apprentissage de la factorisation soient indispensables, elles ne semblent pas suffisantes pour permettre une réelle compréhension de la factorisation de la part des élèves. De fait, la mobilisation de ces habiletés relève essentiellement d'un contrôle syntaxique. Pourtant, les deux dimensions (syntaxique et sémantique) du contrôle en algèbre sont nécessaires pour l'apprentissage des élèves. Sans mettre de côté des habiletés, donner du sens à la factorisation, c'est donc aller au-delà des techniques, et développer une vision de la factorisation qui a trait à différentes caractéristiques d'ordre sémantique.

Dans ce cadre conceptuel, j'ai approfondi quatre « explorations sémantiques » qui m'apparaissent fécondes pour le développement du sens de la factorisation chez les élèves du secondaire. Ces explorations pourraient permettre d'élargir la vision, la définition et l'utilité de la factorisation telle qu'elle est enseignée dans les écoles actuellement. Elles offrent aussi une possibilité de redécouverte du concept à travers l'histoire des mathématiques et un changement de représentations. Je rappelle que les différentes composantes des explorations sémantiques sont en fait des interventions visant à donner du sens derrière la factorisation avec et par les élèves. Le tableau 2.5 suivant résume le cadre des explorations sémantiques et leurs composantes (interventions).

Tableau 2.5 Le cadre des explorations sémantiques et leurs composantes (interventions)

Explorations sémantiques	**Description**	**Composantes (Interventions)**
1. L'objet mathématique, le concept de factorisation (voir section 2.3)	Donner du sens à la factorisation en insistant sur certaines caractéristiques ou particularités de ce concept.	a. Amener à reconnaître la relation bidirectionnelle entre la factorisation et le développement
		b. Amener à reconnaître la présence de différentes formes dites factorisées pour un même polynôme (aller au-delà de la factorisation au maximum)
		c. Amener à comprendre pourquoi certaines expressions algébriques ne se factorisent pas
2. Les différentes représentations (voir section 2.4)	Donner du sens à la factorisation en utilisant les représentations en forme pour illustrer, de façon concrète, le concept et ses techniques.	a. Proposer le recours à des représentations géométriques
		b. Proposer le recours à des représentations visuelles
		c. Proposer le recours à des représentations en forme (union entre les représentations visuelles et géométriques)
3. Aspect historique de la factorisation (voir section 2.5)	Donner du sens à la factorisation grâce au dépaysement épistémologique généré chez les élèves par l'étude de l'histoire des mathématiques.	a. Proposer l'étude de textes historiques
		b. Présenter des activités d'explorations à caractère historique

4. L'utilité de la factorisation, situer le concept (voir section 2.6)	Donner du sens à la factorisation en présentant ce concept comme un outil à appliquer pour travailler d'autres concepts mathématiques, ce qui lui donnerait une certaine utilité.	a. Faire voir la factorisation comme un outil pour la résolution d'équations du second degré
		b. Faire voir la factorisation comme un outil pour l'étude de la fonction du second degré

À ce sujet, il m'est important de mentionner que ces explorations sémantiques sont, précisément, des explorations. C'est-à-dire que ses composantes ne constituent pas des interventions clé en main pour l'enseignement de la factorisation, mais plutôt des façons possibles de concevoir et d'aborder ce concept avec l'objectif de développer un contrôle davantage sémantique. Toujours dans le but de donner du sens à ce concept mathématique, et de s'éloigner d'un enseignement procédural et manipulatoire.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

Dans ce troisième chapitre, j'exposerai la méthodologie de recherche retenue pour ce mémoire : la recherche collaborative. En effet, l'objectif d'une co-construction avec des enseignants d'interventions pour donner du sens à la factorisation fait appel à une approche participative telle que la recherche collaborative. Le modèle de recherche collaborative développé par Desgagné et Bednarz sera celui privilégié. Une fois les étapes de la recherche collaborative explicitées , je préciserai mon objectif de recherche et les questions qui lui sont associées pour les teinter autant du cadre des explorations sémantiques que de la méthodologie choisie. Le déroulement de la collecte de données suivra, et une description des deux enseignants participants permettra de mettre la table pour l'analyse des données.

Dans une volonté de respecter le critère de double vraisemblance, un apport et des retombées sont à prévoir pour les deux mondes : la pratique et la recherche. D'une part, les enseignants apporteront des interventions qu'ils considèrent riches pour l'apprentissage de la factorisation, et nos rencontres seront une occasion de développement professionnel pour eux. D'autre part, ma contribution aux rencontres réflexives à travers le cadre des explorations sémantiques est une retombée importante pour la recherche. De fait, ce cadre contient non seulement les interventions donnant potentiellement du sens à la factorisation que je vais apporter lors des rencontres avec les enseignants pour voir si elles sont fécondes dans la pratique, mais il permettra aussi de documenter ce que font les enseignants pour donner du sens à ce concept.

3.1 Orientation méthodologique adoptée : la recherche collaborative

Rappelons que les composantes des cinq explorations sémantiques développées dans le cadre conceptuel représentent des interventions intéressantes provenant de la recherche pour aborder la factorisation et lui donner du sens. Par contre, on ne sait pas ce que font réellement les enseignants du secondaire avec les élèves à ce sujet et on sait encore moins ce qu'ils pensent de ces pistes et de leur utilisation en classe. De fait, très peu de recherches sur la factorisation rapportent la voix des enseignants, et aucune d'entre elles ne travaille en collaboration avec eux. Pourtant, leur expertise pratique aiderait assurément notre compréhension de l'enseignement-apprentissage de la factorisation. Ainsi, comme il en a été question dans le premier chapitre de ce mémoire, je cherche à travailler conjointement avec des enseignants du secondaire autour de la factorisation, pour aller voir ce qu'il est possible de faire dans les écoles pour donner du sens à ce concept. Et ce, tout en considérant l'apport de la recherche (les différentes explorations sémantiques) et l'apport du milieu scolaire (ce que les enseignants font en classe) et ses contraintes associées. Je désire ouvrir la discussion avec des enseignants et faire rencontrer les idées de la recherche et celles de la pratique enseignante.

Dans cette optique, pour me permettre d'atteindre mon objectif de recherche, qui est de co-élaborer avec des enseignants du secondaire des interventions visant à donner du sens à la factorisation, une collaboration avec ceux-ci est essentielle. Une méthodologie participative est appropriée, mon projet appelle plus particulièrement à une recherche collaborative. Pour mon mémoire, je prendrai apprui sur le modèle de recherche collaborative élaboré par Desgagné et Bednarz (Bednarz, 2013b ; Desgagné, 1998, 2001 ; Desgagné, Bednarz, Couture, Poitier et Lebuis, 2001). Dans la prochaine section, je présenterai d'abord les fondements et une définition de la recherche collaborative, pour ensuite décrire le sens de la collaboration dans ce type de recherche. L'activité réflexive, qui représente le cœur du modèle de Desgagné et Bednarz, sera enfin détaillée.

3.1.1 Fondements et définition de la recherche collaborative

D'abord et avant tout, en recherche collaborative, les enseignants sont considérés comme des partenaires, des collaborateurs, et non comme des objets d'étude pour la recherche. Pour reprendre les termes de Schön (1983), ils sont plutôt perçus comme des praticiens réflexifs :

> L'auteur [Schön] a en effet montré les limites du modèle dominant de la rationalité technique qui réserve aux praticiens des solutions toutes faites à appliquer à des problèmes, sans égard aux phénomènes singuliers et complexes qui caractérisent la pratique professionnelle. Il lui a opposé une épistémologie de l'agir qui s'appuie sur l'idée selon laquelle le répertoire d'actions du praticien se construit au fil de la succession de « conversations réflexives » qu'il entretient avec les situations problématiques qu'il rencontre en vue de définir une solution sur mesure. En mettant en relief la façon dont chaque situation nouvelle deviendra à son tour familière lorsque le praticien l'aura « gérée », c'est-à-dire lorsqu'elle finira par faire partie de son répertoire, Schön a mis en exergue le fait que la pratique est une forme d'expérimentation qui permet au praticien d'apprendre, la réflexion sur la pratique fournissant des connaissances sur l'action, lesquelles peuvent aboutir à une modification de l'action. (Morrissette, 2013, p. 38)

Ces praticiens réflexifs possèdent un certain « savoir d'expérience » de l'enseignement, et il devient important de le prendre en considération et de l'impliquer véritablement dans le processus de recherche (Desgagné *et al.*, 2001). « La voix des enseignants apparaît ici un incontournable pour avancer sur la compréhension de phénomènes liés à cette pratique, une compréhension à laquelle les enseignants eux-mêmes, avec les chercheurs, ont beaucoup à apporter. » (Bednarz, 2013c, p. 18)

Cette vision du praticien enseignant apporte un renouveau en recherche, où le chercheur[26] travaille *avec* les enseignants et non *sur* les enseignants. Et ce, autour d'un objet de la pratique, à la croisée des préoccupations du milieu de la recherche, mais aussi du milieu scolaire. Ces éléments centraux de la recherche collaborative prennent leurs fondements épistémologiques principalement dans la perspective socioconstructiviste et sur l'ethnométhodologie. Ce qui suit constitue un bref survol des éléments empruntés au socioconstructivisme et à l'ethnométhodologie. Ce survol me permettra alors d'aboutir à une définition de la recherche collaborative pour ce mémoire.

Éléments provenant du socioconstructivisme et repris dans la recherche collaborative

Dans la perspective socioconstructiviste, il est important de soulever que le savoir est social et qu'il est co-construit dans l'interaction humaine, « à travers une perpétuelle affirmation et négociation des points de vue. » (Desgagné, 2001, p. 64) C'est cette perspective sur le savoir qui est notamment reprise dans la recherche collaborative, où la recherche se rapproche de la pratique, dans la visée d'inclure et d'engager les praticiens dans la construction d'un savoir lié à cette pratique, ici l'enseignement. Ceci permet une collaboration entre chercheur et praticiens, où le point de vue des deux est pris en considération. Aussi, pour impliquer réellement les enseignants, le chercheur collaboratif considère qu'il n'est pas suffisant de réaliser des entrevues avec eux, pour, par exemple, les interroger sur leurs habitudes, leur expérience, leur pratique ou pour aller chercher leur point de vue. Comme la pratique est sociale, « elle exige du chercheur un souci de créer un espace d'interaction, entendu comme une négociation

[26] Il est possible de mener une recherche collaborative à plusieurs chercheurs. De fait, le terme « chercheur » au singulier est ici perçu comme un terme générique qui peut inclure la présence d'un ou de plusieurs chercheurs en recherche collaborative.

et un partage de significations avec et entre les membres. » (Desgagné, 2001, p. 57) Le chercheur va donc travailler *avec* les enseignants et non *sur* les enseignants.

Éléments provenant de l'ethnométhodologie et repris dans la recherche collaborative

Comme on vient de le voir, la recherche collaborative emprunte au socioconstructivisme le fait que le savoir est social. Mais l'idée d'une collaboration entre chercheurs et praticiens et la nature de cette collaboration provient de l'ethnométhodologie du domaine de la sociologie.

> L'ethnométhodologie, en tant que tradition de recherche sur le terrain, en sociologie, s'intéresse aux significations que les acteurs sociaux d'un groupe social donné construisent à propos des situations dans lesquelles ils évoluent quotidiennement. Ce sont ces significations qui leur permettent de se comprendre entre eux et qui se traduisent en termes de règles tacites et de routines partagées qui guident leur agir social. (Desgagné, 1998, p. 81)

D'emblée, l'ethnométhodologie soutient l'importance, pour le chercheur collaboratif, d'aller sur le terrain, justement l'endroit où se construisent ces significations communes des acteurs sociaux. Dans le cas de mon mémoire, ces acteurs sociaux sont les enseignants, les praticiens du milieu scolaire. En effet, c'est bel et bien dans les écoles que se construit le savoir d'action, le savoir d'expérience des enseignants. Mais le chercheur aussi est soumis à des règles et des routines partagées par son groupe social qu'est la communauté de la recherche. Ce savoir savant est tout aussi important pour le chercheur que le savoir d'action est important pour le praticien. L'approche ethnométhodologique incite donc le chercheur collaboratif à concilier ces deux mondes. dans le but de construire des significations doublement viables : tant en recherche qu'en pratique (Desgagné, 1998).

Il est possible de conclure que cette collaboration entre chercheur et praticiens possède plusieurs implications, qui vont au-delà d'une simple discussion entre ces partenaires.

Une description plus approfondie du sens de la collaboration en recherche collaborative sera présente un peu plus loin, dans la section 3.1.2.

Définition de la recherche collaborative selon le modèle Desgagné-Bednarz

La recherche collaborative consiste en une association, une collaboration entre un ou des chercheurs et un ou des praticiens[27], entre le monde de la recherche universitaire et le monde de la pratique enseignante, pour l'investigation d'un aspect de la pratique qui préoccupe et intéresse ces deux mondes (Desgagné *et al.*, 2001 ; Desgagné, 2001). Cette méthodologie de recherche implique que le chercheur tienne compte du point de vue des praticiens à toutes les étapes de la recherche. Ainsi, le produit d'une recherche collaborative est un produit combiné de la recherche et de la pratique.

3.1.2 Le sens de la collaboration en recherche collaborative

Dans le modèle de recherche collaborative choisi, celui développé par Desgagné et Bednarz, la collaboration a un sens particulier, elle ne se limite pas à une discussion ou un partenariat entre les acteurs de la recherche. La collaboration atteint un autre niveau en recherche collaborative, où les partenaires s'influencent les uns et les autres : le chercheur collaboratif est influencé par le point de vue et l'expérience des enseignants avec qui il collabore, alors qu'il influence aussi les praticiens par ce qu'il apporte de la recherche. Tout ceci est dû au fait que le chercheur et les enseignants ne proviennent pas de la même culture et qu'ils n'ont pas à répondre aux mêmes finalités dans leur milieu respectif (Desgagné *et al.*, 2001). Néanmoins, chacun respecte et reconnaît l'expertise de l'autre du début à la fin de la recherche, ce qui permet un véritable travail

---

[27] Les praticiens peuvent être des enseignants, mais aussi des orthopédagogues, des conseillers pédagogiques, des directeurs d'école, etc. Cette appellation peut faire référence à toute personne étant impliquée dans l'éducation scolaire des élèves.

d'équipe, où les partenaires se complètent, s'entraident, s'influencent et avancent ensemble vers un objectif commun (Pepin et Desgagné, 2017).

> Dans cette optique, les partenaires se concertent dans la poursuite de cibles communes, ils se reconnaissent mutuellement un champ de compétence par rapport à cette cible, et exercent ainsi un pouvoir d'influence les uns sur les autres. (Morrissette, 2013, p.42)

Ce pouvoir d'influence soulevé par Morrissette est ce qui rend la collaboration en recherche collaborative aussi unique et autant importante. C'est, entre autres, grâce à cette interinfluence que le chercheur collaboratif arrive à respecter et à refléter la logique des deux mondes à toutes les étapes de la recherche, ce qui fait référence au critère de double vraisemblance (voir section 3.2.4). Il est important de mentionner que dans ce mémoire, lorsqu'il est question de collaboration, je fais toujours référence à ce type de collaboration, où une interinfluence existe entre les acteurs de la recherche.

Cela dit, une mise en garde est importante. Cette caractérisation de la collaboration ne signifie pas que le chercheur et les praticiens effectuent les mêmes tâches dans la recherche. Au contraire, comme ils ont chacun leur champ de compétence, chaque partenaire possède ses tâches en lien avec son expertise. D'un côté, ce n'est pas aux enseignants de s'occuper des tâches formelles de recherche. Par exemple, c'est au chercheur de se soucier de la collecte de données. Les enseignants vont plutôt réaliser des tâches connexes à leur expertise pratique. Comme il a été mentionné plus tôt, l'engagement des praticiens dans une recherche collaborative a pour but d'inclure leur point de vue et de leur donner une voix, pour aider la communauté de la recherche à avancer sur sa compréhension des phénomènes liés à cette pratique enseignante. En conséquence, le chercheur collaboratif ne s'attend pas à ce que les enseignants participent aux tâches de recherche à proprement parler. D'un autre côté, le chercheur ne devient pas non plus un praticien, mais il « s'engage également dans un processus interactif avec des enseignants […] et se fait l'interprète de la voix des enseignants. » (Corriveau, 2013, p. 86)

3.1.3 L'activité réflexive au cœur de la recherche collaborative

Le cœur du modèle de recherche collaborative de Desgagné-Bednarz consiste en l'aménagement d'une activité réflexive, qui ne soit pas étrangère aux membres (Corriveau, 2013). Elle représente le moment où les partenaires de l'étude, le chercheur et les praticiens, interagissent et explorent ensemble un aspect de la pratique, dans le but de co-construire un savoir lié à cette pratique : ici l'enseignement de la factorisation. Cet aspect de la pratique doit intéresser et préoccuper les deux parties, autant le chercheur que les enseignants avec qui il travaille dans sa recherche. Pour y arriver, l'activité réflexive est aménagée entre le chercheur et les praticiens du milieu scolaire, et peut prendre diverses formes selon les projets de recherche collaborative. Dans le cas de ce mémoire, l'activité réflexive prend la forme de rencontres. Dans son sens ethnométhodologique, l'activité réflexive est un moment pour que les membres[28] de la communauté enseignante participant à la recherche collaborative livrent leur code de significations et leur mode de fonctionnement (Desgagné, 2001).

L'activité réflexive doit être aménagée pour servir deux fonctions : formation et recherche[29]. Ce que j'entends par là, c'est que l'activité réflexive doit agir de perfectionnement ou de développement professionnel pour les enseignants (portion formation), en plus de permettre l'émergence d'un matériau d'analyse pour investiguer un objet de la pratique de la part du chercheur et donc la production de connaissances

[28] La notion de *membre* ici ne signifie pas, en ethnométhodologie, l'appartenance à un groupe social (comme une communauté enseignante). Le point central de l'ethnométhodologie en recherche collaborative est lié au concept de réflexivité qui signifie qu'il faut placer l'enseignant en situation d'action, dans une activité qui ne les sort pas de leur rôle d'enseignant.

[29] Il est important de garder en tête que ces fonctions de formation et de recherche concernent les retombées de la recherche collaborative, et non sa visée principale.

autour de cet objet (portion recherche). Elle doit donc avoir des apports autant pour le milieu de la recherche que pour le milieu de la pratique (Desgagné *et al.*, 2001 ; Bednarz, 2013c). Dans ce modèle, le chercheur possède alors la fonction de formateur-chercheur : « celle de formateur, au sens de celui qui oriente et encadre l'activité de soutien, celle de chercheur, au sens de celui qui doit baliser la procédure de cueillette de données. » (Desgagné, 1998, p. 88) Les éléments de l'activité réflexive de mon projet seront présents dans la section 3.4.5.

3.2 Les étapes de la recherche collaborative

La recherche collaborative est une méthodologie de recherche particulière, où le chercheur se doit de tenir compte du point de vue des praticiens avec qui il travaille. Et ce, dans toutes les étapes de la recherche. Le modèle choisi, celui développé par Desgagné et Bednarz, possède trois étapes bien définies qui permettent au chercheur de mener à bien son projet : l'étape de co-situation, l'étape de co-opération et l'étape de co-production[30], et ce, tout en considérant les préoccupations, les contraintes et les intérêts des enseignants, mais aussi de la recherche. C'est ce qu'on appelle le critère de double vraisemblance, critère que le chercheur collaboratif se doit de respecter du début à la fin de sa recherche. Dans cette section, les étapes du modèle Desgagné-Bednarz seront détaillées, ainsi que le critère de double vraisemblance.

3.2.1 L'étape de co-situation

L'étape de co-situation peut être décrite à travers l'énonciation de la thématique générale de la recherche et la définition de l'objet de recherche dans la double

[30] Les textes sur la recherche collaborative ne s'entendent pas sur l'utilisation ou non du trait d'union pour l'écriture de ces trois étapes. En ce que qui me concerne, je préfère l'écriture composée, car d'une part, elle permet de mettre en évidence le préfixe « co- » de la collaboration. Et d'autre part, elle permet de distinguer le mot « coopération » (aide envers des pays en voie de développement) de l'étape de co-opération de la recherche collaborative.

dimension de formation et de recherche. Co-situer la recherche revient donc à (1) énoncer l'objet de la pratique qui sera investiguée par la collaboration du chercheur et des praticiens enseignants et (2) faire en sorte que la pratique explorée soit intéressante et pertinente pour les deux mondes, la recherche universitaire et la pratique enseignante. Une recherche collaborative peut être initiée par une demande provenant des praticiens ou bien par l'initiative du chercheur, comme c'est le cas pour mon projet.

> À l'étape de co-situation, où se définit l'objet même d'investigation, le chercheur collaboratif devra exercer sa double sensibilité à tenir compte des préoccupations des praticiens tout en voyant si ces préoccupations sont compatibles avec celles de son champ de recherche qui sont celles des chercheurs qui le constituent. Ou inversement, il verra à rendre compatibles ses propres préoccupations de chercheur avec celles des enseignants avec qui il souhaite travailler.

Aussi, comme il en a été question plus tôt, la recherche collaborative doit permettre un développement professionnel pour les acteurs du milieu scolaire et un avancement des connaissances sur le sujet pour la recherche (Desgagné, 1998 ; Desgagné *et al.*, 2001). Pour préciser cette étape de co-situation, Barry et Saboya (2015) proposent de séparer cette première étape de la recherche collaborative en trois moments clés : la préparation du projet, la mise à l'épreuve du projet et la mise en route de la recherche.

Moment 1 : la préparation du projet

La préparation du projet est un moment où le chercheur collaboratif travaille seul[31]. C'est à ce moment qu'il pense le projet « afin qu'il ait une pertinence à la fois pour le monde de la recherche et celui de la pratique, pour que le projet soit porteur d'un questionnement pratique pour les praticiens et d'un questionnement théorique pour les

[31] Je vais rapporter ici le cas où la recherche collaborative est initiée par le chercheur, ce qui est le cas de mon projet. Le premier moment de l'étape de co-situation est aussi valide dans le cas où la demande de recherche provient du milieu scolaire, mais le travail du chercheur est quelque peu différent.

chercheurs. » (Barry et Saboya, 2015, p. 51) Pour mon mémoire, ce premier moment pourrait être rattaché globalement à la problématique. C'est là que j'ai pris le temps de réfléchir à ce qui me préoccupe en tant que chercheuse, et c'est aussi à ce moment-là que je me suis posé plusieurs questions telles que : pourquoi le point de vue des praticiens est nécessaire à considérer dans une recherche à propos de l'enseignement-apprentissage de la factorisation au secondaire? Est-ce que la factorisation est un concept qui préoccupe les enseignants du secondaire? Pourquoi les enseignants voudraient-ils travailler sur mon projet? Comment présenter mon projet aux praticiens pour qu'ils se sentent interpelés? Quels enseignants pourraient être susceptibles d'être intéressés par mon projet? Etc.

Comme il est mentionné dans la problématique, la factorisation semble être un concept qui préoccupe les enseignants du secondaire, dû aux nombreuses difficultés engendrées par ce concept chez les élèves et au manque de ressources et d'outils disponibles pour eux. À travers un tour d'horizon des recherches autour de la factorisation, j'ai aussi pu soulever un manque du côté de la recherche à ce sujet. En ce sens, l'enseignement de la factorisation, et donc les façons d'enseigner ce concept pour lui donner du sens, est un objet de la pratique générant des questionnements pour moi en tant que chercheuse, et des questionnements pratiques pour les enseignants. En plus de ces questionnements, la participation à ce projet de recherche est bénéfique pour les deux mondes : pour moi, la chercheuse, cette recherche est un moyen d'analyse du potentiel, dans les écoles, des explorations sémantiques pour enseigner la factorisation au secondaire qui permettent de lui donner du sens (objet de recherche); pour les enseignants, cette recherche est une occasion de réflexion autour de l'enseignement de la factorisation (objet de formation). Des retombées pour les deux mondes sont aussi à prévoir.

Moment 2 : la mise à l'épreuve du projet

Le deuxième moment de l'étape de co-situation est la mise à l'épreuve du projet, « la rencontre effective entre les partenaires de la recherche où un objet co-situé sera négocié. » (Barry et Saboya, 2015, p.51) Ce moment se déroule dans la (ou les) première(s) rencontre(s) entre le chercheur collaboratif et les enseignants participants. Cette rencontre porte le nom de *rencontre de co-situation*. Ce deuxième moment débute par une présentation du projet en détail de la part du chercheur, puis se traduit par une discussion entre les partenaires de la recherche dans l'objectif de négocier, donc de préciser, l'objet exact de la pratique qui sera exploré dans la recherche, à la croisée des deux mondes : la pratique et la recherche. Barry et Saboya (2015) résument bien ce moment dans l'extrait suivant :

> Dans ce moment, le chercheur collaboratif passe de l'anticipation de l'intérêt, des raisons qui pourraient amener un ou des enseignants à s'associer à la recherche (le premier moment), à la mise à l'épreuve et à la négociation effective du projet initial, auprès de praticiens réels aux prises avec un contexte, des contraintes, des préoccupations données. Les discussions vont permettre de préciser l'objet de recherche. (p.59)

Par conséquent, ce moment pourrait être considéré comme le tournant de l'étape de co-situation, alors que l'objet de recherche prévu et réfléchi par le chercheur dans le premier moment de l'étape de co-situation est, d'une certaine façon, révisé, précisé puis approuvé par les enseignants participants avec l'aide du chercheur.

Moment 3 : la mise en route de la recherche

Ce troisième et dernier moment de l'étape de co-situation en recherche collaborative se déroule encore dans la (ou les) première(s) rencontre(s) avec les participants. Rendu au moment 3, le temps est venu de se pencher sur les modalités des prochaines rencontres (le nombre de rencontres, la durée de celles-ci, le moment choisi, l'endroit où elles se dérouleront, etc.), qui constituent l' « expérimentation » de la recherche. Le troisième moment est aussi le moment de discuter du fonctionnement, du déroulement des séances de collaboration et des rôles de chaque participant pour toute la durée du partenariat de la recherche. Tout ceci permet aux partenaires de conclure l'entente de recherche (Barry et Saboya, 2015). Les prochaines rencontres sont nommées *rencontres réflexives de co-opération* pour mon mémoire. C'est lors de ces rencontres qu'a pris place l'activité réflexive de la recherche collaborative.

Avant de poursuivre, un dernier volet compose le troisième moment de l'étape de co-situation. Ce volet « a ceci de particulier qu'il ne porte pas directement sur l'objet de recherche négocié jusqu'ici, mais bien sur les cadres de référence sous-jacents aux pratiques des enseignants et qui sont susceptibles d'orienter l'étape suivante de co-opération. » (Barry et Saboya, 2015, p. 62) C'est donc le moment où le chercheur collaboratif se doit de prendre connaissance des façons de faire des enseignants avec qui il collabore, de leur relation avec leurs élèves, de leur mode de fonctionnement en classe, des interventions qu'ils privilégient, etc. Ces informations sont essentielles pour le chercheur, qui désire tenir compte des contraintes, des préoccupations, des limites et du point de vue des enseignants du début à la fin de sa recherche collaborative.

Pour mon projet, une seule rencontre de co-situation a eu lieu avec chacun des participants de la recherche de manière individuelle. Lors de cette rencontre, les deuxième et troisième moments se sont entrecoupés. Voici un tableau résumé des trois moments de l'étape de co-situation pour situer brièvement ce mémoire dans l'étape de co-situation (voir tableau 3.1). Je reviendrai sur les éléments clés des moments 2 et 3 dans le déroulement de la rencontre de co-situation à la section 3.4.2, lors de la description de la collecte de données.

Tableau 3.1 Les trois moments de l'étape de co-situation de la recherche collaborative pour ce mémoire

Moment	**1**	**2**	**3**
Visée	Préparation du projet	Mise à l'épreuve du projet	Mise en route de la recherche
Qui	Chercheuse	Chercheuse et enseignants	Chercheuse et enseignants
Quand	Avant la rencontre effective avec les enseignants	Lors de la rencontre effective avec les enseignants (18 septembre 2020)	
Éléments clés	✓ Questionnement de départ de la chercheuse ✓ Énoncé d'un objet de recherche préoccupant pour la recherche et la pratique : L'enseignement de la factorisation ✓ Recrutement des participants	✓ Présentation détaillée du projet de recherche par la chercheuse ✓ Remise et signature du formulaire de consentement. ✓ Précision et approbation par les partenaires de l'objet de la pratique qui sera investigué lors des rencontres réflexives de la recherche	✓ Modalités des prochaines rencontres (nombre, durée, moment, endroit) ✓ Présentation du déroulement de l'expérimentation ✓ Portrait des participants ✓ Comment les participants enseignent la factorisation

3.2.2 L'étape de co-opération

Lors de l'étape de co-opération de la recherche prend place l'activité réflexive. Concrètement, c'est à cette étape que les participants de l'étude se rencontrent et interagissent à proprement parler pour la co-construction d'un savoir de la pratique d'intérêt commun entre le chercheur et les praticiens. Cette démarche de réflexion agit de perfectionnement pour les enseignants et de collecte de données pour le chercheur (Desgagné, 1998 ; Desgagné *et al.*, 2001). Pour mon projet, l'activité réflexive a pris la forme de deux rencontres réflexives de co-opération, lors desquelles les enseignants et moi-même avons interagi pour co-construire ensemble des interventions pour enseigner la factorisation pour donner du sens à ce concept pour les élèves à travers les explorations sémantiques, ce qui représente l'objectif principal de ma recherche. Les deux rencontres réflexives seront décrites plus loin, dans la section 3.4.5 lors de la description de la collecte de données.

Grâce à l'implication du chercheur, cette étape de co-opération doit permettre aux praticiens de livrer leur « code de significations », pour reprendre les termes de l'ethnométhodologie (Desgagné, 1998). Ce code représente le savoir pratique ou savoir d'action des praticiens. D'ailleurs, c'est le défi du chercheur collaboratif :

> En ethnométhodologie, le défi du chercheur qui s'immisce dans le milieu consiste à créer ce qu'on appelle une « situation réflexive », c'est-à-dire une situation qui, le plus possible, n'est pas étrangère aux acteurs, qui entre, si l'on peut dire, dans leur monde familier, activité par laquelle ils vont « naturellement » et, presque à leur insu, livrer leur « code ». Pour créer cette situation familière aux acteurs, le chercheur a donc besoin de se trouver une place de « membre » à l'intérieur de la communauté sociale ambiante, de sorte que sa présence même soit familière aux acteurs : cela peut vouloir dire prendre l'identité des acteurs eux-mêmes […], ou encore se donner une fonction d'intervenant auprès d'eux. (Desgagné, 1998, p. 89)

Mais il y a une nuance à poser quant au fait que le chercheur doit s'immiscer dans le milieu scolaire ici. En effet, le but en recherche collaborative est de concilier deux mondes, celui de la pratique et celui de la recherche. Le chercheur ne doit donc pas cacher son identité de chercheur. Il doit plutôt tenter d'avoir cette double identité de formateur-chercheur, soit une identité dans la pratique en tant qu'enseignant, par exemple, mais aussi une identité dans la recherche.

En ce sens, le chercheur collaboratif est un « membre actif » dans sa recherche, il s'implique dans les rencontres et dans l'exploration de l'objet de la pratique investigué (Corriveau, 2013). Ce n'est pas un « membre à part entière », car il n'emprunte pas complètement l'identité des praticiens, ni un « membre en périphérie », puisqu'il ne fait pas qu'observer les praticiens à distance (Adler et Adler, 1987). Encore une fois, il travaille *avec* les enseignants, et non *sur* les enseignants.

3.2.3 L'étape de co-production

L'étape de co-production de la recherche implique l'analyse des données et les retombées du projet commun, qui se doivent d'être doubles : autant pour la communauté de la recherche que pour la communauté de la pratique. Mais au-delà de ces retombées, l'une des visées de la recherche collaborative est l'idée d'une démarche transformatrice pour tous les participants, qui auront vécu une expérience enrichissante de collaboration et qui auront fort probablement cheminé par rapport à leur conception de la recherche et/ou de la pratique (Desgagné *et al.*, 2001). Pour illustrer cette démarche transformatrice, Bednarz (2013c) donne un exemple provenant de l'une de ses recherches sur la résolution de problèmes, qu'elle a réalisée avec une équipe d'enseignantes de 1re année du primaire, une orthopédagogue et une collègue chercheuse, Louise Poirier :

> Ce travail donnera lieu, par la suite, à la constitution d'un réseau d'enseignants et enseignantes provenant de ces différents milieux, des professionnels qui continueront de se rencontrer sur une base régulière, les chercheuses n'étant plus présentes à ce stade. Ces enseignants continueront d'échanger sur les différentes situations, les observations, les aménagements. Il s'agit là d'une retombée, importante à notre sens, du travail de recherche collaborative pour la pratique et le développement professionnel des enseignants. (p. 23)

Pour analyser les données récoltées lors de l'activité réflexive, le chercheur doit utiliser les balises théoriques et conceptuelles provenant de la recherche, soit la représentation qu'il s'est faite de son objet, pour analyser cet objet de la pratique explorée dans la recherche collaborative. C'est ce que je ferai dans le prochain chapitre avec l'aide des explorations sémantiques pour donner du sens à la factorisation au secondaire, qui sont mes balises conceptuelles. En plus, dans l'analyse de ses résultats, le chercheur collaboratif se doit d’établir un dialogue entre les catégories de sens des théoriciens-chercheurs (ses balises théoriques et conceptuelles provenant de la recherche) et les catégories de sens des praticiens (provenant de leur propre compréhension de l’objet investigué) (Barry et Saboya, 2015 ; Desgagné, 1998). De fait, pour la présentation des résultats de recherche, il est essentiel pour le chercheur collaboratif de sélectionner une mise en forme qui satisfait aux deux mondes, pour permettre une diffusion du savoir co-construit dans la communauté de la pratique et dans la communauté de la recherche, alors que le produit final doit bénéficier aux deux mondes (Desgagné, 1998). Les retombées d’une recherche collaborative doivent effectivement servir à la recherche et à la pratique. Les retombées escomptées de mon projet de recherche seront présentées plus loin, dans la section 3.5.

Ce portrait des trois étapes de la recherche collaborative selon le modèle développé par Desgagné et Bednarz montre très bien la place constante du point de vue des participants dans ce type de recherche. De fait, chacune des étapes tient compte des éléments de la recherche et des éléments de la pratique. Le chercheur collaboratif et les enseignants servent, en quelque sorte, de représentants de ces deux milieux. Toutefois, une nuance est importante à souligner. Bien que la participation des praticiens soit essentielle lors de l’étape de co-opération, donc lors de l’activité réflexive de la recherche, cette collaboration entre chercheur et enseignants ne signifie pas qu’ils sont présents physiquement pendant toutes les étapes de la recherche :

> Notre illustration a bien montré que le préfixe « co- » ne renvoie pas ici à l’idée que toute la démarche de recherche est effectuée conjointement entre le chercheur et les praticiens participants, mais qu’elle renvoie plutôt à l’attitude du chercheur à tenir compte, à toutes les étapes de la recherche, que ces étapes impliquent ou non les praticiens, des préoccupations du monde de la recherche et du monde de la pratique. (Desgagné, 1998, p. 99)

Cette attitude du chercheur soulevée dans l'extrait précédent par Desgagné renvoie au critère de double vraisemblance qui doit être respecté par tout chercheur collaboratif. La prochaine section portera justement sur la description de ce critère.

3.2.4 Le critère de double vraisemblance

Le rôle principal du chercheur collaboratif, mais aussi son plus gros défi, est de toujours prendre en compte le point de vue des praticiens et de considérer, à toutes les étapes de la recherche, les préoccupations, les ressources et les contraintes des deux mondes : la pratique et la recherche (Proulx, 2013). C'est ce qu'on appelle le critère de double vraisemblance dans l'approche collaborative de la recherche. Le chercheur doit alors s'assurer de maintenir le cap sur ce critère, pour respecter les points de vue de chaque partenaire, leur manière de voir le monde et leur champ de compétence respectif (Pepin et Desgagné, 2017).

> Dit autrement, le chercheur collaboratif sera constamment habité, dans le déroulement du projet, par un critère de « double vraisemblance » (voir Dubet, 1994, pour une définition du concept; voir Desgagné, 1998, pour une illustration du concept), soit ce souci de tenir compte et de rendre compte des préoccupations des deux « communautés » qu'il considère comme ayant une contribution à apporter à la construction d'un savoir pour la pratique enseignante : la communauté des praticiens et la communauté des chercheurs. (Desgagné, 2001, p. 59)

Ce critère de double vraisemblance « s'appuie sur l'idée que l'activité de recherche scientifique et l'activité de pratique professionnelle sont des activités différentes qui n'ont pas les mêmes enjeux et qui ne répondent pas aux mêmes exigences pour ceux et celles qui les exercent. » (Pépin et Desgagné, 2017, p.128) Ceci fait en sorte que les partenaires n'abordent pas l'objet de la recherche de la même façon, ayant chacun leur propre champ de compétence. C'est justement ce qui permet l'interinfluence dans la collaboration, comme il en a été question plus tôt dans la section 3.1.2. Mais c'est aussi ce qui rend la recherche collaborative aussi riche; chercheurs et praticiens enseignants unissent leurs forces, unissent leur expertise pour travailler ensemble vers la co-construction d'un objet de la pratique. Pour y arriver, il devient donc essentiel que le chercheur collaboratif considère les deux points de vue et respecte le champ de compétence des participants de sa recherche autant que le sien, dans tous les moments de la recherche. D'ailleurs, le critère de double vraisemblance peut être décortiqué pour chacune des étapes de la recherche collaborative, selon ce que doit faire le chercheur (voir figure 3.1).

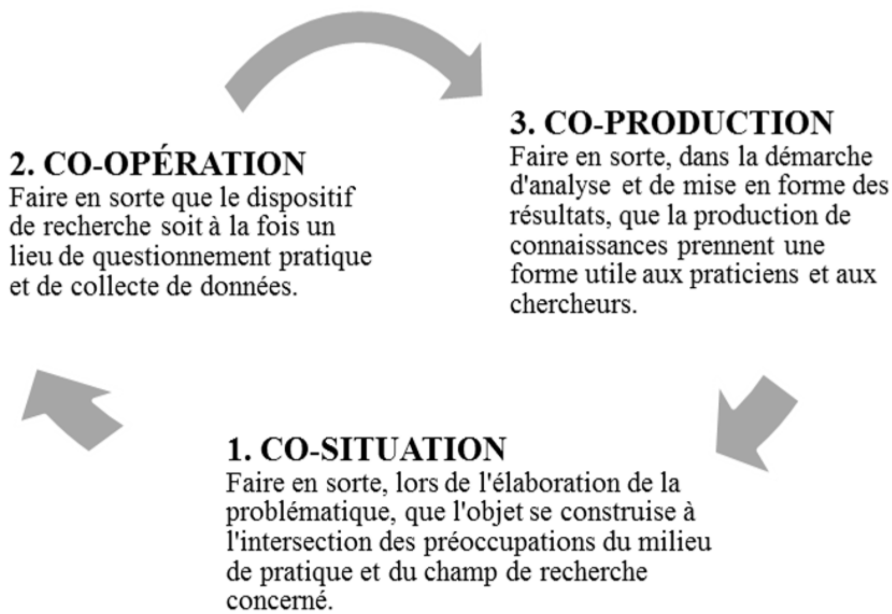


Figure 3.1 Le critère de double vraisemblance à chacune des trois étapes de la recherche collaborative (Barry et Saboya, 2015, p. 53)

Il est possible de retrouver tous les éléments de la figure 3.1 dans la description précédente des étapes de la recherche collaborative (voir section 3.2.1 pour l'étape de co-situation, la section 3.2.2 pour l'étape de co-opération et la section 3.2.3 pour l'étape de co-production). Dans les trois cas, ce critère de double vraisemblance est présent et bien détaillé, bien qu'il n'ait pas été nommé comme tel.

Toutefois, la présence de ce critère de double vraisemblance ne veut pas dire que les partenaires de la recherche s'entendent, ou doivent s'entendre sur tout. Un jeu de négociation s'installe entre le chercheur collaboratif et les praticiens, qui doivent faire des compromis pendant la recherche dans le but de trouver des solutions qui conviennent au milieu scolaire et au milieu de la recherche universitaire. Pepin et Desgagné (2017) soulèvent bien cette nuance :

> La collaboration de recherche, dans cette perspective, ne consiste pas à imposer son point de vue de chercheur au praticien, pas plus qu'elle ne suppose d'accepter à tout prix le point de vue du praticien. La collaboration repose plutôt sur un équilibre, délicat, à instaurer entre les différentes parties, où le point de vue de chacun dispose d'un poids relatif dans la coconstruction de la double vraisemblance du projet collaboratif. (p.137)

3.3 Objectif et questions de recherche

Le développement du cadre des explorations sémantiques et la description de la méthodologie adoptée dans ce projet m'amènent à préciser mon objectif de recherche et à revoir les questions qui lui sont associées. En ce sens, revoici mon objectif de recherche (et les questions de recherche) maintenant teinté du cadre des explorations sémantiques et de la recherche collaborative :

Co-élaborer, avec des enseignants du secondaire, des interventions pour enseigner la factorisation visant à donner du sens à ce concept pour les élèves à travers le cadre des explorations sémantiques.

1) *Avant les rencontres réflexives, comment les enseignants envisagent-ils et enseignent-ils la factorisation dans les écoles secondaires québécoises? Quelles composantes des explorations sémantiques sont mobilisées par les enseignants?*
2) *Dans les rencontres réflexives, quelles sont les interventions co-construites? Sur quelles explorations sémantiques du cadre conceptuel s'appuient-elles?*

La première question de recherche montre mon intérêt pour les enseignants et pour ce qu'ils font dans leur enseignement. Bien qu'elle ne soit pas propre à la recherche collaborative, cette méthodologie de recherche me donne accès à leur expérience et à leur pratique enseignante pour enrichir nos connaissances sur l'enseignement de la factorisation dans les écoles secondaires. Quant à la deuxième question de recherche, c'est elle qui justifie l'importance d'une collaboration entre chercheuse et enseignants. Elle me permet de mettre en lumière les pistes proposées par la recherche pour donner du sens à la factorisation en les confrontant avec l'expertise des praticiens du milieu scolaire, à travers le cadre des explorations sémantiques et ses composantes. Et ce toujours dans l'objectif principal de co-élaborer des interventions pour enseigner la factorisation avec les enseignants, tout en prenant en considération les limites, les contraintes et les préoccupations de la recherche et de la pratique.

3.4 Déroulement de la collecte de données et portrait des participants

Trois rencontres avec les enseignants ont été menées pour ce projet : une rencontre de co-situation avec chaque participant individuellement et deux rencontres de co-opération avec tous les partenaires de la recherche. Avec mon journal de bord, elles constituent les outils de collecte de données pour cette recherche collaborative. Les sections qui suivent me permettront de décrire le déroulement de la collecte de données et ses outils, en plus de dresser le portrait des enseignants participants.

3.4.1 Recrutement et description des participants

Pour mon projet, j'étais à la recherche de deux enseignants de mathématiques intervenant au deuxième cycle du secondaire. Comme c'est une recherche qualitative dont le but n'est pas de généraliser les résultats, deux participants semblent suffisants pour mener une recherche collaborative dans le cadre d'un mémoire de maîtrise. Il est aussi préférable de travailler avec deux enseignants au lieu d'un seul, car cela permet l’émergence d’opinions diverses et la confrontation des points de vue, ce qui favorise des discussions plus riches lors de rencontres. Les deux enseignants devaient, d’une part, avoir enseigné la factorisation au moins à deux reprises, et d’autre part, avoir des préoccupations communes aux miennes quant à l’enseignement et apprentissage de ce concept. J’ai d’abord contacté mon ancienne enseignante associée de stage 4 par courriel (voir Annexe B) en août 2020 pour lui parler de mon projet, puisqu’elle enseigne en quatrième secondaire dans la séquence SN (où la factorisation est enseignée) et qu’elle a signifié une volonté de donner du sens aux concepts mathématiques pendant mon stage. Celle-ci, que j’appellerai Annie pour conserver son anonymat, s’est montrée très intéressée envers mon projet et a accepté d’y prendre part. Elle a transmis mon courriel de recrutement à l’un de ses collègues susceptible d’être aussi intéressé par mon projet. Il s’est immédiatement porté volontaire pour être le deuxième enseignant participant de ma recherche, enseignant que je nommerai Francis.

Annie, qui a terminé son baccalauréat en enseignement des mathématiques au secondaire en 2003, travaille dans une école de la banlieue nord de Montréal depuis son ouverture. Dans les cinq dernières années, cette enseignante a toujours enseigné au deuxième cycle du secondaire, plus particulièrement en quatrième secondaire de la séquence SN. Elle a donc enseigné le concept de factorisation à cinq reprises. En plus de cette expérience dans les classes, Annie a travaillé pour le Cirque du Soleil en tant qu’enseignante de mathématiques pour les enfants des employés pendant quatre ans. L’enseignement était plutôt individualisé, mais elle mentionne avoir eu la chance d’aborder la factorisation avec certains de ses élèves du cirque.

Quant à lui, Francis est un enseignant de mathématiques et un ancien conseiller pédagogique au primaire très expérimenté; il en est à sa 28e année dans le domaine de l’enseignement. Il a travaillé avec des élèves de plusieurs niveaux dans sa carrière, dont, entre autres, des jeunes de la quatrième année du secondaire de la séquence SN. C’est dans les quatre dernières années que Francis a enseigné la factorisation dans ses classes. Au moment de la collecte de données, pour l'année scolaire 2020-2021, il est retourné enseigner en première secondaire. Francis travaille à la même école de la banlieue de Montréal qu'Annie. Ils sont collègues depuis plusieurs années et ils ont longtemps collaboré ensemble pour leur planification de cours lorsqu'ils enseignaient les mêmes concepts.

3.4.2 Rencontre de co-situation

Une première rencontre individuelle effective d'environ une heure avec les enseignants a eu lieu le 18 septembre 2020 (pour un total de deux rencontres) à l'école où travaillent Annie et Francis. La rencontre avec Annie et la rencontre avec Francis se sont déroulées à peu près de la même manière. Dès le départ, j'ai remis le formulaire de consentement[32] au participant. Après sa lecture, l'enseignant pouvait décider de signer le formulaire de consentement immédiatement, ou attendre et le signer plus tard. Aucune pression n'a été faite sur les enseignants. Dans les deux cas, Annie et Francis ont choisi de signer le formulaire tout de suite, ce qui m'a permis de démarrer l'enregistrement audio des deux rencontres.

Sous forme d'entrevue semi-dirigée, la rencontre de co-situation avec chaque enseignant comportait quatre points importants. En premier lieu, je me suis présentée pour ensuite décrire le projet de recherche et son objectif, dans le but de valider l'intérêt des participants envers la recherche. Pour y arriver, je me suis concentrée sur certains éléments de problématique importants et possiblement préoccupants pour les enseignants : (1) la présence de *trucs* dans l'enseignement de la factorisation, (2) l'aspect trop manipulatoire et procédural de la factorisation que j'ai observé dans mes expériences précédentes comme stagiaire, (3) l'importance de la factorisation dans le

---

[32] Le formulaire de consentement, présent à l'annexe C de ce mémoire, a été approuvé par le comité éthique de l'UQAM en août 2020.

PFEQ et (4) les difficultés soulevées par les chercheurs et celles constatées par les enseignants et rapportées dans certaines recherches). Une discussion autour de l'objectif et des raisons qui m'ont poussé à faire une recherche collaborative a aussi émergé avec les deux enseignants.

En deuxième lieu, j'ai proposé les modalités de la collaboration, c'est-à-dire les modalités des rencontres de co-opération, qui seront décrites plus en profondeur dans la section suivante. Nous avons alors discuté du nombre de rencontres, de leur durée et de leur moment. Nous avons aussi abordé le déroulement général de ces rencontres, pour me permettre d'entamer une discussion autour du rôle attendu de chaque partenaire pendant la recherche. J'ai particulièrement insisté sur le fait que nous allions travailler ensemble à partir de nos connaissances respectives. En recherche collaborative, chacun apporte son expertise et participe activement à l'atteinte d'un objectif commun, où les partenaires s'influencent les uns les autres (voir section 3.1.2).

En troisième lieu, j'ai posé différentes questions à chaque participant en lien avec son expérience dans les écoles, son enseignement de la factorisation, sa planification de cours, ses préoccupations envers la factorisation, etc. Le but étant d'inviter à la négociation de l'objet de la recherche. Les questions pour guider la rencontre de co-situation sont énumérées à l'annexe D. Plus précisément, ces dernières sont séparées en trois thématiques distinctes, trois visées différentes : des questions pour (1) cerner le participant et apprendre à le connaître en tant qu'enseignant, (2) connaître les préoccupations de l'enseignant face à la factorisation et (3) savoir comment chaque participant enseigne la factorisation. Ces questions m'ont servi de ligne directrice pour mener chaque rencontre. Je n'ai pas nécessairement eu à poser toutes ces questions explicitement, certaines ont été répondues par les enseignants sans mon intervention. En bref, les deux enseignants ont démontré un intérêt marqué pour mon projet. Nous partageons sensiblement les mêmes préoccupations pour l'enseignement-apprentissage de la factorisation (voir section 3.4.3), alors que nous voulons tous tenter de donner du sens à ce concept pour les élèves. En ce sens, l'objet de la recherche n'a pas eu à être précisé ou modifié. Il a plutôt été approuvé par Annie et Francis.

En quatrième et dernier lieu, j'ai demandé à chaque enseignant quelles étaient leurs attentes pour ce projet. Ceci nous a amené vers l'explicitation des retombées prévues autant pour la recherche que pour la pratique (voir section 3.5).

Les données recueillies lors de cette entrevue grâce aux différentes questions posées aux enseignants ont été ou seront reprises à trois endroits : dans la description des participants (voir section 3.4.1), dans la section suivante concernant les motivations des enseignants pour participer au projet (voir section 3.4.3) ainsi que lors de l'analyse de l'enseignement de la factorisation des enseignants rapporté par ceux-ci de façon individuelle (voir section 4.1).

3.4.3 Motivations des enseignants pour participer au projet

Comme il a été mentionné dans la section précédente, la rencontre de co-situation avec chacun des participants m'a permis non seulement de mieux les connaître en tant qu'enseignant de mathématiques, mais aussi d'en apprendre davantage sur leurs propres motivations pour participer à mon projet. Ces motivations découlent de deux choses : leurs préoccupations face à la factorisation et leurs attentes envers cette recherche collaborative.

Préoccupations et attentes d'Annie

Dans l'ensemble, Annie soutient que la factorisation est difficile pour les élèves du secondaire. La raison principale de ces difficultés est, selon elle, le manque d'utilité accordé à ce concept dans l'enseignement. Les élèves n'arrivent pas à voir et à comprendre à quoi sert la factorisation. De fait, elle affirme qu'il n'est pas obligatoire de réinvestir la factorisation dans les chapitres suivants. Elle est consciente que ce concept est essentiel pour les élèves qui feront des mathématiques au cégep, mais elle déplore le fait qu'il puisse être laissé de côté tout de suite après son apprentissage par les élèves du secondaire. Elle donne l'exemple du passage de la forme générale $(f(x) = ax^2 + bx + c)$ vers la forme factorisée $(f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ de la fonction du second degré : il est possible d'éviter la factorisation en utilisant directement la formule quadratique pour retrouver les zéros de la fonction. En effet, on peut trouver les zéros avec les formules suivantes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Une fois les zéros calculés, il suffit de remplacer leur valeur dans la forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Même si ces formules proviennent de la factorisation, et plus précisément de la complétion du carré, les élèves ne sont pas obligés d'utiliser la factorisation à proprement parler pour aller vers la forme factorisée. Pour Annie, le chapitre de la factorisation semble seulement présent dans le programme pour préparer les élèves à l'examen du Ministère à la fin de l'année, et non comme un outil pour travailler d'autres concepts. Et c'est quelque chose qui la préoccupe beaucoup.

En ce sens, pour elle, ma recherche est une belle façon de prendre le temps de discuter autour des mathématiques. C'est une occasion d'obtenir des ressources supplémentaires pour son enseignement, alors qu'elle affirme que les enseignants n'ont pas souvent le temps de faire des recherches approfondies pour élargir leurs outils pédagogiques. Sans avoir d'attentes précises quant à son implication dans mon projet, Annie espère, tout en m'aidant, que les discussions l'aideront dans son enseignement et lui permettront de développer de nouvelles façons de faire.

Préoccupations et attentes de Francis

Les préoccupations de Francis sont différentes de celles d'Annie. Pour Francis, c'est le fait que la factorisation au secondaire soit procédurale et qu'elle se résume à un amalgame de techniques d'application qui le dérange, ce qui n'est pas tout à fait le cas pour Annie. D'ailleurs, il raconte que lorsqu'il était conseiller pédagogique, il a travaillé avec une équipe de chercheurs à l'Université de Sherbrooke sur les *trucs* en enseignement des mathématiques. Souvent, les *trucs* vont apporter une perte de sens pour les élèves. Il soutient alors qu'il faut arrêter de donner des *trucs* ou des techniques aux élèves, et qu'il faut se concentrer sur le sens et le « pourquoi ça fonctionne ».

Donner du sens aux concepts mathématiques semble être important pour Francis, alors qu'on sent son malaise face aux techniques de factorisation présentes dans le PFEQ. Il mentionne tenter d'aller plus loin avec les élèves lorsqu'il enseigne ce concept, en ajoutant des notes de cours pour tenter d'y donner du sens (voir section 4.1.2 et annexe E). Je reviendrai sur ce point dans le chapitre suivant. En bref, Francis pense pouvoir apporter son point de vue à la discussion autour de l'enseignement-apprentissage de la factorisation. Il mentionne participer à mon projet en se disant qu'on arrivera peut-être à construire des outils pédagogiques complémentaires à ceux qu'il possède déjà, ce qui l'aiderait à enlever un niveau d'abstraction et un niveau de difficulté à la factorisation. Il mentionne se lancer dans cette recherche collaborative par curiosité.

3.4.4 Journal de bord

Dans les jours qui ont suivi chacune des rencontres de ce projet, j'ai écouté les enregistrements audios de celles-ci une première fois. Ce faisant, les échanges que nous avons eus les enseignants et moi-même lors les rencontres étaient toujours frais dans ma mémoire. Cette première écoute avait pour but premier de faire ressortir les éléments de discussions importants des quatre moments soulevés suivants : (1) la rencontre de co-situation avec Annie, (2) la rencontre de co-situation avec Francis, (3) la première rencontre de co-opération et (4) la deuxième rencontre de co-opération. Plus précisément, elle m'a permis de prendre des notes très détaillées des discussions, des allusions et de ce qui a été co-construit à l'intérieur même de ces moments – dans l'ordre dans lequel les éléments ont été abordés – en lien avec les explorations sémantiques et leurs composantes (voir tableau 2.5) et en lien avec les habiletés à développer pour factoriser (voir tableau 2.4). Également, cette première écoute a été l'occasion pour moi, en tant que chercheuse, de rédiger mes commentaires à chaud par rapport aux éléments de discussions retenus. Ces commentaires s'ajoutent à mes notes prises pendant et après les rencontres, et ces données constituent mon *journal de bord* pour cette recherche collaborative.

De fait, la rédaction de ce journal de bord m'a permis de documenter mes impressions, mes questionnements et mes sentiments vécus pendant les rencontres effectives avec les enseignants. Comme le souligne Savoie-Zajc (2000), le journal de bord est aussi une occasion de noter les évènements importants, comme je l'ai fait, qui servent alors de rappel au chercheur quand vient le temps d'analyser les données de la recherche :

> Le journal de bord détient ainsi trois fonctions : celle de garder le chercheur réflexif pendant sa recherche, celle de lui fournir un espace pour exprimer ses interrogations, ses prises de conscience, et celle de consigner les informations qu'il juge pertinentes. […] Avec le recul que permet de prendre le journal de bord, un chercheur peut ainsi mieux dégager les incidents critiques, comprendre les messages qui ont pu être communiqués subtilement. (p. 147-148)

De plus, dans notre contexte collaboratif, le journal de bord m'aura servi à guider mes interventions pendant les rencontres de co-opération pour que nos discussions soient d'intérêt à la fois pour la pratique et pour la recherche. Des extraits de ce journal de bord ponctuent la présentation de l'analyse des données au chapitre 4, les extraits y apparaissent en italique. Ils permettent de rendre compte de mon senti lors des rencontres et de mes préoccupations en tant que chercheuse collaborative, ainsi que de l’évolution de la recherche et celle de ma relation avec les enseignants (Savoie-Zajc, 2000). Voici quelques exemples de ce qui se trouve dans les passages en italique provenant de mon journal de bord :

- Des pistes possibles pour animer les discussions pour les rencontres suivantes ;
- Des interrogations ou des confirmations par rapport à certaines composantes des explorations sémantiques ;
- Des liens entre ce qui est dit dans les rencontres et le cadre des explorations sémantiques élaboré au chapitre 2 (j’ai fait ressortir des ressemblances, des nuances et des différences en plus de mes interrogations et confirmations à ce sujet);
- Des moments clés qui sont des moments dans lesquels j’ai senti des changements dans les propos des participants et des ouvertures face à certaines explorations sémantiques (ce sont des moments de co-construction);
- Des considérations d'ordre plus général comme par exemple l'intérêt manifesté par chacun des participants pour certaines composantes des explorations sémantiques.

3.4.5 Rencontres de co-opération

Deux rencontres réflexives d’environ deux heures et trente minutes ont eu lieu dans le cadre de cette recherche collaborative. Ces rencontres dites de co-opération, où a pris place l’activité réflexive de la recherche, représentent la source principale de collecte de données. Tout comme pour les rencontres de co-situation, elles ont été enregistrées de façon audio et ont eu lieu à l’école où travaillent Annie et Francis. La première rencontre de co-opération a eu lieu le 22 octobre 2020 et la deuxième le 13 novembre 2020.

Ces rencontres étaient des rencontres de groupe, avec tous les partenaires de la recherche. Les deux participants et moi-même étions ainsi présents, pour co-élaborer des interventions visant à donner du sens à la factorisation pour les élèves à travers les explorations sémantiques. En effet, les rencontres réflexives étaient des moments d'échanges et de travail en collaboration pour atteindre l'objectif de la recherche. Voici l'apport de chaque milieu pour permettre ces rencontres :

- Apport des enseignants participants (milieu de la pratique) :

  À la fin de la rencontre de co-situation, j'ai demandé aux enseignants d'apporter, lors de la première rencontre réflexive, des situations ou des interventions qui sont riches pour eux au niveau de l'apprentissage de la factorisation et d'autres qui sont difficiles pour les élèves. Ces situations et interventions des enseignants participants seront présentées plus en détail plus tard, dans l'analyse des données au chapitre IV.

- Apport de la chercheuse (milieu de la recherche) :

  Pour ma part, j'ai présenté aux enseignants ce que les recherches rapportent sur la factorisation, à travers les explorations sémantiques développées dans le cadre conceptuel. Les documents et les exemples que j'ai utilisés pour y arriver sont ceux présents tout au long du chapitre II dans les différentes sections dédiées aux explorations sémantiques. Tout ceci sera aussi repris et détaillé dans le chapitre IV de l'analyse des données.

Dans la première rencontre de coopération, nous avons commencé nos discussions, les enseignants et moi-même, autour d'une situation-problème apportée par les deux participants. Il s'agit d'une CD1[33] ayant comme titre *L'enclos* (voir figure 4.4). Cette évaluation portant sur la factorisation a permis l'émergence de plusieurs discussions autour des explorations sémantiques développées dans le cadre conceptuel. Entre autres, nous avons abordé le fait qu'un polynôme peut avoir plus d'une forme factorisée différente ainsi que l'importance du lien entre le développement et la factorisation. Grâce au contexte et au dessin inclus dans l'énoncé de la situation-problème de *L'enclos*, nous avons aussi plongé dans l'exploration des représentations en forme. À ce sujet, j'ai présenté les figures 2.5 à 2.11 aux enseignants pour alimenter la conversation. Dans la même lignée, Annie nous a montré deux problèmes géométriques sur la factorisation, problèmes qu'elle qualifie de difficiles pour les élèves (voir annexe F). Nous avons conclu cette rencontre en discutant du potentiel des représentations en forme pour donner du sens à ce concept dans l'enseignement-apprentissage de la factorisation en classe du secondaire.

Entre les deux rencontres, comme mentionné plus tôt dans la section 3.4.4 de mon journal de bord, j'ai procédé à l'écoute de l'enregistrement audio de la première rencontre réflexive. Une brève analyse de cette rencontre, qui sera présentée dans le chapitre IV de ce mémoire, m'a permis de relever ce qui a été co-construit jusque là. Lors de la deuxième rencontre réflexive, j'ai alors eu la chance de procéder à quelques validations avec les enseignants sur ce qui avait été fait lors de la précédente rencontre (voir section 4.3.1).

Dans la deuxième rencontre de co-opération, après avoir effectué ces validations avec les enseignants, nous nous sommes attaqués à deux explorations sémantiques qui n'avaient pas été traitées dans la rencontre précédente : l'utilité de la factorisation et

[33] Une CD1 est une évaluation de la première compétence disciplinaire en mathématiques au Québec, qui se nomme « résoudre une situation-problème ».

l'aspect historique de ce concept. Une discussion très riche sur l'ordre d'enseignement de la factorisation et de ses prolongements (surtout la résolution d'équations du second degré) nous a permis de nous questionner sur l'importance de présenter la factorisation comme un outil pour d'autres concepts. Au moment opportun, j'ai ensuite eu la chance d'aborder avec les enseignants l'histoire des mathématiques et son potentiel pour donner du sens à la factorisation soulevé par la recherche. Pour y arriver, nous avons, entre autres, regardé ensemble l'activité d'al-Khwarizmi présenté à la figure 2.12 (voir annexe A pour l'activité complète). Pour terminer l'expérimentation de cette recherche collaborative, nous avons fait une synthèse de nos discussions des deux rencontres de co-opération qui a fait émerger une séquence d'enseignement visant à donner du sens à la factorisation. Enfin, les enseignants ont partagé ce qu'ils retiennent de leur participation à ce projet de recherche.

Les données recueillies dans ces rencontres réflexives seront reprises lors de l'analyse de ce qui a été co-construit entre les enseignants et moi-même pour donner du sens à la factorisation (voir section 4.2 et 4.3). La figure 3.2 présente un schéma synthèse du déroulement de la collecte de données :

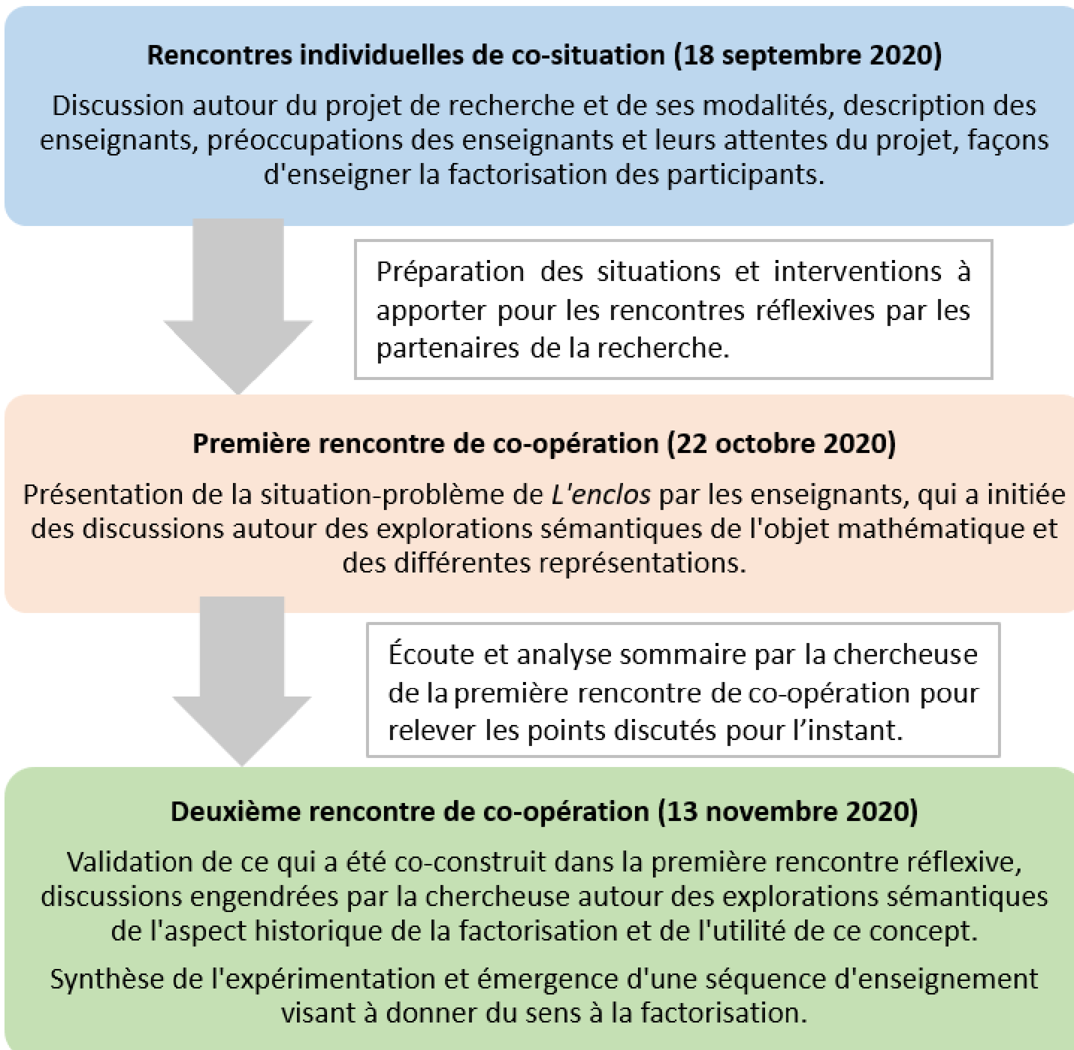


Figure 3.2 Synthèse du déroulement de la collecte de données du projet de recherche

3.5 Retombées escomptées du projet

Comme il en a été question dans la description de l'étape de co-production (voir section 3.2.3), une recherche collaborative doit bénéficier aux deux mondes. Voici donc les retombées escomptées du projet pour le monde de la recherche en didactique des mathématiques et pour le monde de la pratique enseignante.

3.5.1 Retombées pour le monde de la recherche

Le concept de factorisation est peu documenté du point de vue des enseignants. Les recherches à ce sujet sont majoritairement centrées sur les élèves, et donc sur l'apprentissage de la factorisation et sur les difficultés ressenties par les élèves. Cependant, pour contrer ces difficultés et aller au-delà de l'application de procédures et de la mémorisation de *trucs* de la part des élèves, ce sont les enseignants qui peuvent changer les choses et modifier leur enseignement. Ce sont eux qui se trouvent au cœur de la compréhension des élèves, par leurs explications, leurs approches, leur enseignement et leur support (voir section 1.4).

Ce projet devrait ainsi permettre d'éclairer la recherche en didactique des mathématiques quant à l'enseignement-apprentissage de la factorisation au secondaire au Québec, du point de vue des enseignants, en plus de documenter comment les enseignants envisagent et abordent la factorisation dans leurs classes. Le cadre des explorations sémantiques a d'ailleurs servi de balise théorique provenant de la recherche à travers duquel les partenaires de la recherche ont exploré des interventions pour enseigner la factorisation pour lui donner du sens, au carrefour des préoccupations et des contraintes de la pratique et de la recherche.

3.5.2 Retombées pour le monde de la pratique

Pour les enseignants participants, cette recherche collaborative devrait être une occasion de développement professionnel. En effet, les deux rencontres réflexives avec les enseignants visent à être des moments de réflexion autour de leur pratique enseignante. Les enseignants ont pu élargir leurs horizons et poser un regard nouveau sur l'enseignement-apprentissage de la factorisation. En plus, ils modifieront et amélioreront peut-être leur propre façon d'enseigner ce concept dans leurs classes pour lui donner plus de sens. Ce projet agirait ainsi de formation continue pour les participants.

Dans une visée plus large, la réussite de ce projet pourrait aussi permettre une plus grande ouverture de la part des enseignants vers des collaborations futures (p. ex. avec d'autres enseignants, avec d'autres chercheurs ou avec des conseillers pédagogiques). De plus, si les enseignants sont intéressés, il serait possible de présenter les résultats de notre projet dans des colloques professionnels, comme le GRMS (Groupe des responsables des mathématiques du secondaire) ou même de préparer une présentation à l'intérieur de différents centres de service auprès des enseignants intéressés par cette thématique. Il serait également possible d'écrire dans une revue professionnelle comme la revue Envol. Ces présentations et écritures pourraient se faire conjointement avec la chercheuse.

En plus des avantages directs sur les enseignants participants de ce projet de recherche, la co-construction d'interventions pour enseigner la factorisation au secondaire entre les enseignants participants et moi-même (la chercheuse) aurait des retombées sur la communauté de la pratique enseignante en mathématiques : elle constituerait du matériel didactique pour les acteurs du milieu scolaire. Ces interventions co-construites pourraient, entre autres, inspirer et faire réfléchir d'autres enseignants quant à leur enseignement de ce concept mathématique important, mais ardu pour les élèves. Enfin, une modification ou une amélioration de l'enseignement de la factorisation de la part des enseignants permettrait éventuellement une amélioration de la compréhension des élèves et une diminution des difficultés vécues par ceux-ci lors de l'apprentissage de ce concept mathématique. Les recherches collaboratives permettent un arrimage entre la pratique et la recherche, permettant à ces deux mondes de se parler et de co-construire ensemble ce qui ne peut être que bénéfique pour les communautés de pratique, de recherche et pour la société.

3.6 Schématisation du projet de recherche collaborative

En résumé, voici une schématisation de mon projet selon le modèle collaboratif développé par Desgagné et Bednarz (voir figure 3.3). Je me suis inspirée des exemples d'organigrammes présents dans le texte de Desgagné *et al.* (2001).

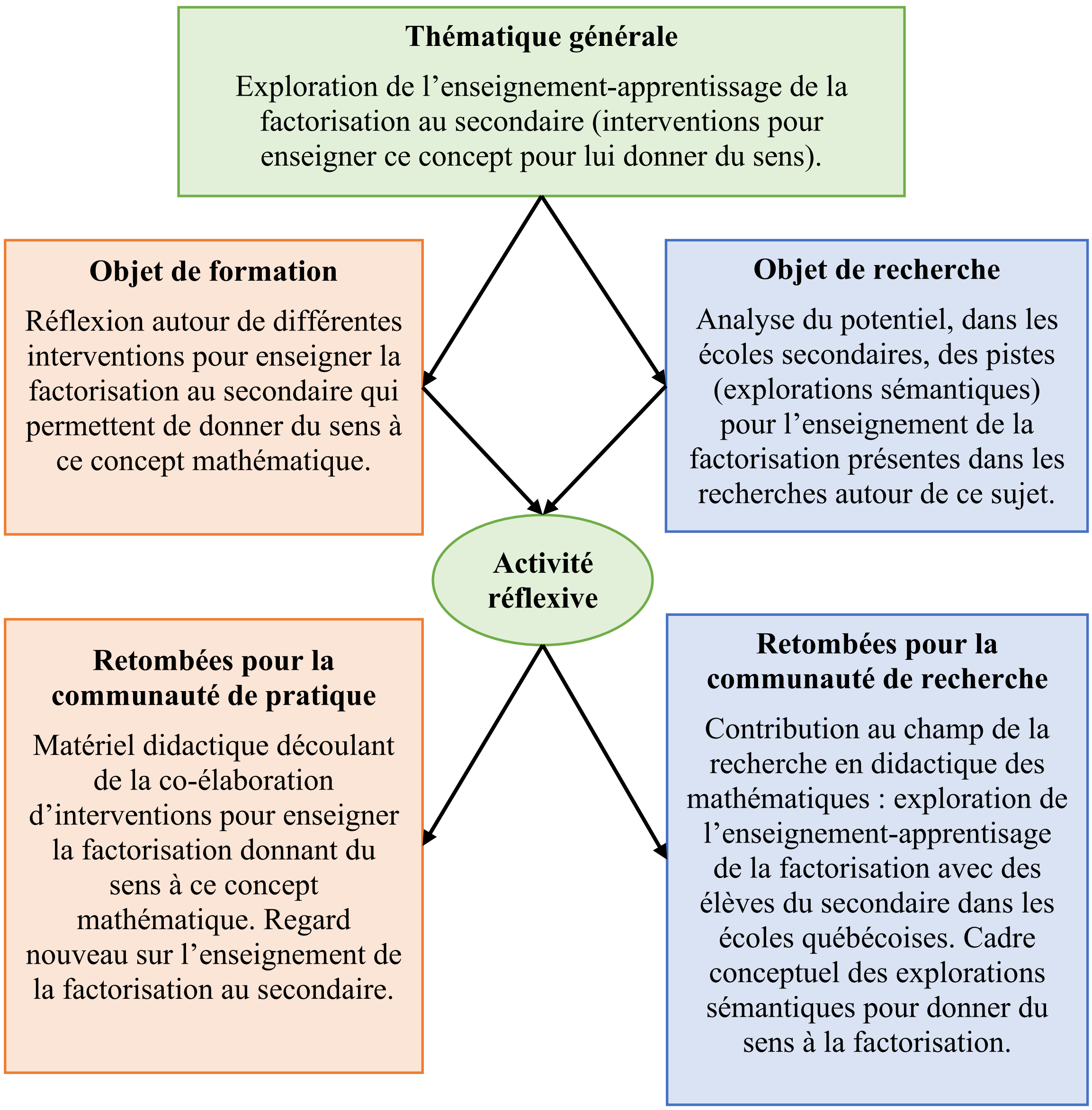


Figure 3.3 Schématisation du projet de cette recherche inspirée par les schématisations proposées par Desgagné et al. (2001)

3.7 Traitement et analyse des données

Pour cette recherche collaborative, je rappelle que toutes les rencontres avec les enseignants ont été enregistrées de manière audio. Ce sont ces enregistrements, entre autres, qui m'ont permis de me plonger dans l'analyse de mes données présentée au chapitre 4 suivant – qui sont plus précisément les notes consignées dans mon journal de bord et les retranscriptions de passages choisis des enregistrements audios des rencontres. Sans oublier mes notes personnelles et mes commentaires à chaud rédigés dans mon journal de bord, c'est la réécoute des échanges que les enseignants et moi-même avons eus qui m'a servi de base pour coder ce qui ressort des rencontres. Ce qui suit décrira plus finement comment je m'y suis prise pour traiter les données de ce projet. Mais avant tout, voici les deux grilles d'analyse utilisées dans ce mémoire.

3.7.1 Grilles d'analyse

Les explorations sémantiques développées dans le cadre conceptuel m'ont servi de cadre d'analyse pour cette recherche collaborative. De fait, c'est à travers cette lunette qu'il m'a été possible d'identifier et de décrire les interventions pour donner du sens à la factorisation qui ont été co-construites. Le tableau 3.2 suivant offre un résumé des quatre explorations sémantiques et les codes associés à chaque composante, ce qui constitue la grille d'analyse principale de ce projet. Néanmoins, comme les contrôles sémantiques et syntaxiques sont indissociables, il ne faut pas oublier les habiletés à développer pour factoriser au secondaire. Le tableau 3.3 ci-bas inclut ces habiletés soulevées dans le cadre conceptuel et le codage approprié, ce qui me permettra de rendre compte des aspects d'ordre plutôt syntaxique, au contraire de la grille des explorations sémantiques.

Tableau 3.2 Grille d'analyse des explorations sémantiques

Explorations sémantiques	**Composantes**	**Codage**
1. L'objet mathématique, le concept de factorisation (voir section 2.3)	a. Amener à reconnaître la relation bidirectionnelle entre la factorisation et le développement	(1, a)
	b. Amener à reconnaître la présence de différentes formes dites factorisées pour un même polynôme (aller au-delà de la factorisation au maximum)	(1, b)
	c. Amener à comprendre pourquoi certaines expressions algébriques ne se factorisent pas	(1, c)
2. Les différentes représentations (voir section 2.4)	a. Proposer le recours à des représentations géométriques	(2, a)
	b. Proposer le recours à des représentations visuelles	(2, b)
	c. Proposer le recours à des représentations en forme (union entre les représentations visuelles et géométriques)	(2, c)
3. L'aspect historique de la factorisation (voir section 2.5)	a. Proposer l'étude de textes historiques	(3, a)
	b. Présenter des activités d'explorations à caractère historique	(3, b)
4. L'utilité de la factorisation, situer le concept (voir section 2.6)	a. Faire voir la factorisation comme un outil pour la résolution d'équations du second degré	(4, a)
	b. Faire voir la factorisation comme un outil pour l'étude de la fonction du second degré	(4, b)

Tableau 3.3 Grille d'analyse des habiletés à développer pour factoriser

Habiletés à développer	**Codage**
1. Maîtriser l'application des techniques de factorisation	Habileté 1
2. Reconnaître la forme de factorisation à utiliser selon l'expression à factoriser	Habileté 2
3. Reconnaître des formes qui ne se factorisent pas	Habileté 3
4. Reconnaître des formes équivalentes	Habileté 4
5. Identifier le plus grand facteur commun entre plusieurs termes algébriques	Habileté 5

3.7.2 Traitement des données

Pour mener à bien mes analyses, plusieurs étapes ont été nécessaires. Pour rédiger mon journal de bord, j'ai d'abord procédé à une première écoute des enregistrements audios quelques jours après chacune des rencontres pour y relever de façon détaillée les différents éléments en lien avec les explorations sémantiques et les habiletés à développer pour factoriser qui ont été discutés. J'ai distingué quatre moments : (1) la rencontre de co-situation avec Annie, (2) la rencontre de co-situation avec Francis, (3) la première rencontre de co-opération et (4) la deuxième rencontre de co-opération. C'est à l'intérieur de chacun de ces moments que j'ai rapporté les éléments discutés dans l'ordre dans lequel ils ont été discutés. En plus, c'est évidemment lors de cette première écoute que j'ai rédigé mes commentaires à chaud par rapport à ces éléments (voir section 3.4.4). Une fois la collecte de données complètement terminée, j'ai procédé à une deuxième écoute des enregistrements audios pour compléter les notes prises lors de la première écoute et pour m'assurer que je n'avais rien laissé de côté.

Ensuite, je me suis lancée dans le codage des éléments ressortis dans mon journal de bord grâce aux deux premières écoutes pour les associer aux composantes des explorations sémantiques et aussi pour coder les habiletés. Pour y arriver, j'ai utilisé les codes présents dans les deux grilles d'analyse de la fin du chapitre 3 (voir section 3.7.1). Par exemple, lorsqu'Annie mentionne qu'elle introduit la factorisation aux élèves en faisant référence aux dimensions et à l'aire d'un rectangle à l'avant de la classe (voir section 4.1.1), elle touche à la composante **b** de la deuxième exploration sémantique, les représentations visuelles. Le code approprié pour cet élément est alors le couple **(2, b)**, où **2** est le numéro de l'exploration sémantique et **b** la composante appropriée. En ce sens, quand Annie soutient que les élèves doivent être en mesure de bien appliquer les différentes techniques de factorisation (voir section 4.1.1), le code approprié est plutôt **(habileté 1)**, car cet élément sous-entend l'importance de la première habileté à développer pour factoriser. C'est d'ailleurs ce type de codage qui sera aussi présent tout au long du chapitre 4 suivant, pour expliciter les explorations sémantiques et les habiletés qui se dégagent de nos échanges dans les rencontres.

Ce travail de codage m'a permis, pour chacune des rencontres, de distinguer différents moments à l'intérieur d'une même rencontre dans lesquelles des discussions ou certaines allusions prennent place autour d'une exploration sémantique (ou d'une habileté). D'une part, pour chaque rencontre individuelle avec les enseignants, j'ai fait ressortir quatre thématiques reliées à des explorations sémantiques ou des habiletés. Trois d'entre elles sont communes à Annie et Francis : la façon qu'ils ont d'introduire la factorisation avec les élèves, leur ordre de présentation des techniques de factorisation et leur avis sur les prolongements possibles de la factorisation au secondaire. Une thématique est propre à chacun des enseignants, alors que pour Annie, il s'agit de l'importance des manipulations algébriques, pour Francis, c'est plutôt l'enjeu de la factorisation avec des nombres entiers. Grâce à l'analyse des rencontres de co-situation (voir section 4.1), j'ai pu rendre compte de la façon dont les enseignants abordent et voient les explorations sémantiques et les habiletés pour factoriser dans leur pratique.

D'autre part, en ce qui concerne les rencontres de co-opération, j'ai repéré cinq épisodes qui font référence aux cinq explorations sémantiques. Ces épisodes constituent les points tournants des co-élaborations entre les enseignants et moi-même dans cette recherche collaborative :

Épisode I : L'importance des contextes, nouvelle exploration sémantique
Épisode II : Les représentations en forme, deuxième exploration sémantique
Épisode III : La factorisation au maximum, première exploration sémantique
Épisode IV : L'utilité de la factorisation, quatrième exploration sémantique
Épisode V : L'histoire des mathématiques, troisième exploration sémantique

C'est en effet lors de ces cinq épisodes que nous avons réussi à bâtir une séquence d'enseignement qui donnerait du sens à la factorisation au secondaire. Celle-ci contient plusieurs éléments de contenus et d'organisation qui, selon nous, pourraient contribuer à aider à la compréhension des élèves. L'analyse des rencontres de co-opération (voir section 4.2 et 4.3) m'a ainsi permis de caractériser les liens étroits de la séquence d'enseignement avec les explorations sémantiques et les habiletés à développer pour factoriser.

Enfin, il m'est important de mentionner qu'au fil de ce découpage à l'intérieur de chacune des rencontres, je suis revenue très fréquemment aux enregistrements audios soit pour préciser certains points provenant de mon journal de bord, soit pour retranscrire des propos des enseignants qui permettent de mieux comprendre les éléments de discussions. Ces retranscriptions viendront appuyer l'analyse dans le chapitre suivant.

CHAPITRE IV

ANALYSE DES DONNÉES

Dans ce quatrième chapitre, je présenterai l'analyse des données de cette recherche. Pour y arriver, comme il a été mentionné à la fin de la méthodologie, j'utiliserai la grille d'analyse du cadre des explorations sémantiques et celle des habiletés à développer pour factoriser. Guidée par ces deux grilles d'analyse, je passerai en revue les rencontres de co-situation et les deux rencontres de co-opération dont cinq épisodes ont été identifiés. Plus spécifiquement le cadre des explorations sémantiques permettra de caractériser les interventions co-construites par les enseignants et moi-même pour donner du sens à la factorisation. Ces interventions se retrouveront d'ailleurs dans la séquence d'enseignement finale résultant de ce projet. Le cadre agira donc de « lunette », d'appui conceptuel pour analyser les interventions discutées. Au final, le cadre se développera à son tour et deviendra un produit de la co-élaboration. Je consignerai aussi cette évolution du cadre des explorations sémantiques et de ses composantes dans ce chapitre.

Mes commentaires à chaud accompagneront l'analyse, mes impressions et interrogations provenant de mon journal de bord. Il ne s'agit pas de juger les enseignants et leurs choix pédagogiques, ces commentaires, qui seront en italique, m'aideront à illustrer mes réflexions personnelles et à soulever des questionnements dans le but de mieux comprendre ce que les enseignants font et pourquoi ils le font, en plus d'enrichir mon analyse.

4.1 Analyse des rencontres de co-situation avec chacun des deux enseignants

Avant d'aller vers la co-construction d'interventions visant à donner du sens à la factorisation avec les deux enseignants participants de cette recherche collaborative, il m'était primordial de connaître leur mode de fonctionnement en classe et leur façon individuelle d'aborder la factorisation avec les élèves. Comme il en a été question dans la section 3.2.1, lors de la description du troisième moment de l'étape de co-situation, ces informations sont cruciales pour le chercheur collaboratif, alors qu'il désire prendre en considération les contraintes, les préoccupations et le point de vue des acteurs du milieu scolaire. Dans cet ordre d'idées, cette section portera sur l'analyse des éléments recueillis lors de la rencontre de co-situation avec chaque participant, dans le but d'expliciter ce que font les enseignants en lien avec la factorisation dans leur pratique enseignante.

Pour y arriver, je vais m'appuyer sur les deux grilles d'analyse développées à la fin du chapitre précédent : la grille d'analyse des explorations sémantiques (tableau 3.2) et la grille d'analyse des habiletés à développer pour factoriser (tableau 3.3). Ces grilles m'ont permis de coder les divers éléments qui ressortent des rencontres de co-situation. J'inclurai aussi mes commentaires à chaud provenant de mon journal de bord. Ceux-ci ont été rédigés directement après la réécoute des enregistrements des rencontres (voir section 3.4.4). Ces commentaires seront en italiques dans ce chapitre, et ils permettent, je le rappelle, de mieux comprendre ce qui est rapporté par les enseignants. Ce sont sur ces commentaires que je me suis appuyée pour préparer la première rencontre réflexive et mener les discussions lors de cette rencontre de co-opération entre tous les participants, qui sont d'intérêt à la fois pour la pratique et pour la recherche.

4.1.1 Analyse de la rencontre de co-situation menée avec Annie

Pour entamer l'analyse de ce que fait Annie pour enseigner la factorisation, rappelons brièvement ses préoccupations (voir section 3.4.3). De fait, elle se questionne particulièrement sur l'utilité de la factorisation dans l'enseignement secondaire, alors qu'elle constate que les élèves ont du mal à comprendre à quoi sert ce concept plutôt abstrait et difficile pour eux. Malheureusement, elle a l'impression que le chapitre de la factorisation est enseigné seulement parce qu'il y a une question à ce sujet dans l'examen ministériel de fin d'année.

Bien qu'elle démontre un désir d'améliorer sa pratique et d'agir face à ses préoccupations, Annie soulève une contrainte très importante du milieu scolaire qui, selon elle, a une influence sur ses choix pédagogiques. Il s'agit des différents types d'élèves rencontrés dans la séquence SN de la quatrième secondaire. Elle sépare les élèves en deux types : (1) ceux qui n'ont pas besoin et ne sont pas intéressés au sens derrière les concepts et qui aiment appliquer des techniques et des *trucs*, et (2) ceux qui ont besoin de comprendre ce qu'ils font et le pourquoi ils le font. Les élèves du premier groupe ne sont tout simplement pas intéressés par l'origine et l'utilité des concepts appris, ils préfèrent suivre une procédure prédéfinie. Au contraire, les élèves du deuxième groupe ne sont pas satisfaits quand il s'agit simplement de reproduire une technique ou une procédure. Ils ont besoin de plus, ils ont besoin de comprendre pour être capables de réussir en mathématiques. Comme le soutient Annie, il est certain que la recherche collaborative de ce mémoire s'adresse plutôt aux élèves du deuxième groupe. Ce qui est intéressant néanmoins, c'est qu'elle affirme que même si ce ne sont pas tous les élèves dans ses classes qui ressentent le besoin de trouver le sens derrière les concepts, ça vaut la peine de s'y attarder. En effet, la recherche du sens ne devrait pas nuire au premier groupe d'élèves tant qu'elle n'y consacre pas trop de temps parce qu'il ne faut pas perdre l'attention de ce type d'élèves, précise-t-elle, mais on sait qu'elle sera bénéfique pour les élèves du groupe deux. Cette nuance est importante et justifie, d'une certaine façon, la façon dont elle enseigne la factorisation.

Ce qui ressort des échanges avec Annie lors de la rencontre de co-situation se divise en quatre temps : la façon dont elle procède pour introduire la factorisation, l'importance pour cette enseignante des manipulations algébriques, l'ordre de présentation des techniques de factorisation et l'enjeu des prolongements de la factorisation au secondaire.

Introduction de la factorisation avec les élèves

Tout d'abord, Annie introduit la factorisation en s'appuyant sur la multiplication puis sur la division (par le crochet) d'expressions algébriques, en faisant un lien avec les dimensions et l'aire d'un rectangle **(2, b)**[34]. La factorisation devient alors, dès le début de l'apprentissage pour les élèves, une nouvelle technique, une façon alternative et plus efficace pour diviser un polynôme par un autre **(4, c[35]),** et par le fait même retrouver une dimension manquante d'un rectangle lorsqu'on connaît son aire et la mesure d'un de ses côtés. En ce sens, Annie insiste sur le fait qu'elle n'enseigne pas la factorisation pour amener les élèves à résoudre des équations du second degré **(4, a)**, alors qu'elle mentionne qu'il serait possible de le faire ainsi.

---

[34] Pour faciliter l'écriture et alléger le texte, je vais coder les références aux explorations sémantiques et à leurs composantes grâce à des couples **(*i*, *j*)** tels que présentés dans la grille d'analyse du tableau 3.2. Pour donner un exemple, ce premier code **(2, b)** signifie que le premier élément de l'introduction de la factorisation d'Annie avec les élèves se rattache à l'exploration sémantique 2 « les différentes représentations » et à sa composante b « proposer le recours à des représentations visuelles ».

[35] Ce code n'est pas présent dans la grille d'analyse des explorations sémantiques (voir tableau 3.2). Ceci signifie que cette grille ne contient pas de composante reliée à ce qui est amené par l'enseignante avec l'exploration sémantique 4. Annie apporte donc une façon de situer le concept de la factorisation qui n'avait pas été envisagée dans le cadre conceptuel. Ceci permet la création de la nouvelle composante « c » : faire voir la factorisation comme un outil plus efficace pour diviser des expressions algébriques.

Annie : Je suis dans ma section algèbre, puis on part avec la multiplication, puis après on voit la division…

Chercheuse : De binômes et de polynômes dans le fond ?

Annie : Ouais bien en fait la division d'un polynôme par un monôme, ça ils l'ont déjà vu, donc j'embarque dans un polynôme divisé par un polynôme. Puis là ben ça m'amène à la factorisation parce que ça peut être fait aussi, le début de la facto des fois ce qu'ils vont te donner ils vont dire « voici l'aire de telle affaire puis il y a un côté qui mesure ça, quelle est la mesure de l'autre côté ? ». Fais que là tu peux réfléchir en disant « ben je fais l'aire divisée par le côté et ça va me donner ça », ou tu peux réfléchir en disant « je vais factoriser ça, je vais trouver mes deux facteurs, puis il y en a un des deux qui va correspondre à lui, et voilà l'autre. » C'est un peu comme ça que, tu sais, c'est ma transition. On part à la division puis là je montre une autre technique pour trouver un autre facteur qui n'est pas la division. Parce que pour moi la division c'est hyper simple, mais ils ont de la misère. […] Je fais comme « OK, vous l'aimez pas la division? On va trouver une autre façon. » C'est là que j'introduis la mise en évidence simple pour qu'ils voient que la mise en évidence simple c'est quand tu as un monôme fais que c'est comme une division de monômes, mais là si c'est pas un monôme qui est là, ben c'est quoi tes autres techniques.

Chercheuse : Donc tu pars de l'amorce de la division.

Annie : Oui, je suis vraiment dans un mode algèbre. On joue avec les chiffres.

L'omniprésence des représentations visuelles dans les propos d'Annie est très intéressante et indique qu'elle aura probablement une ouverture face à la deuxième exploration sémantique qui traite de l'utilisation de représentations géométriques, visuelles ou en forme. Voici une porte d'entrée pour la rencontre de co-opération, la pertinence et la place possible des représentations visuelles et géométriques dans l'enseignement de la factorisation pourront être abordées avec les enseignants. Aussi, Annie semble accorder une grande importance à expliciter l'utilité de la factorisation, ce qui rejoint la quatrième exploration sémantique, l'utilité de la factorisation, situer le concept. Reste à voir s'il est possible pour elle d'introduire la factorisation autrement qu'avec la division d'expressions algébriques.

De plus, dans ses premiers exemples avec les élèves lorsqu'elle explique ce qu'est la factorisation, Annie fait le parallèle avec le domaine numérique. C'est-à-dire qu'elle donne des exemples de facteurs de nombres entiers, alors que c'est ce avec quoi les élèves sont habitués de travailler depuis le début de leurs études secondaires **(1, d[36])**. Par exemple, on sait que les facteurs de 24 peuvent être 2 et 12, 3 et 8 ou 4 et 6. Ce sont ces facteurs qu'on cherche à retrouver quand on factorise. Toutefois, Annie ajoute que la particularité avec les expressions algébriques, c'est qu'il n'y a qu'un seul couple de facteurs possibles **(1, b)**.

Cette précision pour la factorisation d'expressions algébriques suggère qu'Annie considère qu'il y a une seule forme factorisée pour un polynôme. C'est quelque chose qui sera intéressant d'aborder dans les prochaines rencontres.

Ce lien avec le domaine numérique lui permet aussi de mentionner aux élèves que la factorisation est l'inverse du développement algébrique, concept avec lequel ces derniers sont familiers **(1, a)**. Elle reprend ses exemples numériques pour expliquer cette relation bidirectionnelle, alors que le développement est l'action de multiplier les facteurs de 24 pour retrouver ce nombre **(1, d)**. Cependant, elle ne semble pas aller plus loin à ce sujet dans son amorce d'enseignement.

Importance des manipulations algébriques

Bien qu'Annie introduise la factorisation en lui accordant une certaine utilité en la proposant comme une technique alternative à la division (crochet) d'expressions algébriques, son approche reste basée sur les manipulations algébriques. Elle soutient que la factorisation est et doit être un concept manipulatoire, puisque les élèves de la

---

[36] Encore une fois, cette composante de la première exploration sémantique est inexistante dans la grille d'analyse du tableau 3.2. Ceci permet la création d'une nouvelle composante « d » : utiliser des exemples numériques, faire des liens avec les nombres.

séquence SN qui continueront à faire des mathématiques au cégep, par exemple, devront appliquer des formules abstraites. Ils ont donc besoin de développer leur habileté à appliquer des *trucs* et des techniques (comme les techniques de factorisation), sans nécessairement toujours comprendre pourquoi ils le font **(habileté 1)**.

La dimension syntaxique de la factorisation semble être très importante pour Annie, alors qu'elle met au premier plan les manipulations algébriques et même les exercices de « drill », qui sont des exercices sans contexte nécessaires pour faire pratiquer les élèves à effectuer les manipulations algébriques appropriées. Elle démontre un intérêt pour le sens oui, mais seulement au début de l'enseignement-apprentissage. Une fois le concept introduit aux élèves, il est nécessaire pour elle de revenir aux manipulations algébriques. Je me demande si elle conservera cette vision pendant les prochaines rencontres, lors des rencontres réflexives avec Francis. Il sera intéressant de suivre son évolution tout au long de cette recherche.

Ordre de présentation des techniques de factorisation

Pour comprendre le choix d'Annie en ce qui concerne son ordre de présentation des techniques de factorisation, il faut connaître sa vision du « produit somme ». De fait, cette dernière perçoit ce *truc* comme étant la dernière chose à essayer si les autres techniques (ici les identités algébriques du second degré) ne s'appliquent pas. En bref, selon elle, le « produit somme » doit être utilisé seulement en dernier recours pour factoriser un trinôme du deuxième degré à une variable.

Avant de poursuivre, revoici l'exemple qui a été présenté dans la problématique (voir section 1.1) pour permettre d'illustrer une fois de plus ce qu'est le « produit somme ». Brièvement, lorsqu'on est face à un trinôme du second degré à une variable comme $3x^2 + 8x + 4$, l'idée est de décomposer le terme en x pour permettre une mise en évidence double :

$$produit = 3 \cdot 4 = 12 = 6 \cdot 2$$
$$somme = 8 = 6 + 2$$

$$3x^2 + 8x + 4 = 3x^2 + 6x + 2x + 4$$

$$3x^2 + 8x + 4 = 3x(x + 2) + 2(x + 2)$$

$$3x^2 + 8x + 4 = (3x + 2)(x + 2)$$

Dans cette optique, la mise en évidence simple ayant déjà été apprise par les élèves en troisième secondaire, Annie préfère enseigner les identités algébriques en premier avec ses élèves de quatrième secondaire. Elle montre alors la différence de carrés et le trinôme carré parfait, pour ensuite traiter le « produit somme », *truc* qu'elle enseigne comme étant une technique alternative aux deux premières, pour des polynômes qu'elle considère « différents ». Seule la complétion du carré est vue par Annie après le « produit somme », pour la simple et bonne raison que cette technique n'est pas évaluée en examen, ce qui fait en sorte qu'elle n'est pas mise de l'avant par l'enseignante. Grâce à la feuille synthèse d'Annie (voir figure 1.1), le mandat de ses élèves devient alors d'identifier la bonne technique à appliquer dans la bonne situation **(habileté 2)**. Le « produit somme » n'est donc pas une technique à utiliser pour tous les polynômes à factoriser, mais bien pour factoriser les trinômes de la forme $x^2 + bx + c$ ou $ax^2 + bx + c$ qui ne sont pas des trinômes carrés parfaits ou des différences de carrés (où *b* est nul).

Je m'interroge sur l'impact de l'ordre de présentation des différentes techniques de factorisation pour l'apprentissage des élèves. Est-ce qu'une façon est plus favorable pour donner du sens au concept? Ce sera une discussion à avoir lors des prochaines rencontres avec les deux enseignants, pour comprendre leur point de vue à ce sujet et *du même coup éventuellement comprendre leur choix d'ordre d'enseignement des différentes techniques de factorisation.*

Prolongement de la factorisation au secondaire

Comme il a été rappelé au début de la présentation du cas d'Annie, cette enseignante est très préoccupée par l'utilité de la factorisation par rapport aux autres concepts. Elle soutient qu'elle ne voit pas bien les prolongements possibles de la factorisation dans l'enseignement secondaire, autant en mathématiques que dans les autres matières scolaires des élèves. La factorisation est normalement réinvestie dans les chapitres suivants, surtout dans le chapitre de la fonction du second degré lors du passage de la forme générale vers la forme factorisée de la règle **(4, b)**. Néanmoins, selon Annie, il est possible de ne pas considérer la factorisation et donner tout simplement la formule quadratique aux élèves, formule qu'ils peuvent appliquer directement pour retrouver les zéros de la fonction du second degré (voir section 3.4.3 pour les explications complètes de cet exemple). Pour Annie, les vrais prolongements de la factorisation sont plutôt au niveau collégial **(4, d[37])** (voir section 1.2.2), ce qui fait en sorte que le chapitre de la factorisation au secondaire se limite à être enseigné en vue de l'examen ministériel de fin d'année, malheureusement.

Annie remet en question ici la quatrième exploration sémantique sur l'utilité de la factorisation et sa place par rapport aux autres concepts mathématiques. Elle affirme que la factorisation reste implicite dans les chapitres suivants qui s'attardent à la fonction du second degré et à la résolution d'équations du second degré. Et si on rendait explicites les liens avec la factorisation? Est-ce que ce pourrait-être une façon

[37] Pour une seconde fois, cette composante de l'exploration sémantique 4 ne se trouve pas dans la grille d'analyse du tableau 3.2. Ceci permet la création de la nouvelle composante « d » : présenter des prolongements de la factorisation du cégep pour situer le concept.

de donner du sens à ce concept? Ce sera un sujet très intéressant à aborder avec cette enseignante.

4.1.2 Analyse de la rencontre de co-situation menée avec Francis

De manière générale, les préoccupations de Francis se rapprochent des miennes au tout début du projet, alors qu'il soutient le fait que la factorisation au secondaire est trop procédurale (voir section 3.4.3). En résumé, cet enseignant se questionne sur les techniques à enseigner que les élèves doivent appliquer et affirme que les *trucs* en mathématiques sont souvent accompagnés d'une perte de sens des concepts en jeu. Il tente le plus possible d'aller vers la compréhension des élèves et sur le « pourquoi ça fonctionne ».

Un peu dans le même sens qu'Annie et les deux types d'élèves qu'elle affirme rencontrer en SN de la quatrième secondaire, Francis discute de deux approches qu'il est possible de retrouver en enseignement des mathématiques au secondaire. Selon lui, il y a les enseignants qui veulent former de bons « appliquants » d'une part, et les enseignants qui désirent forger des « élèves réflexifs » de l'autre :

> Francis : On pourrait dire qu'il y a comme deux grandes approches. Il y a l'approche de est-ce que je veux que mon élève de math devienne un bon « appliquant » de formules ou de procédures, ou je veux un élève de math qui est capable de réfléchir. Puis à un moment donné un élève qui ne sera pas déstabilisé parce qu'il y a un petit paramètre qui change, puis là *pouf*…il est toujours habitué d'appliquer la même recette, puis là sa recette ne marche plus, parce qu'il y a un ingrédient qui a été modifié. Moi j'aime mieux un élève qui réfléchit qu'un élève qui applique.

Francis s'identifie donc à la deuxième approche de l'enseignement des mathématiques, ce qui justifie ses préoccupations en lien avec la factorisation. Toutefois, il est important de mentionner qu'il est conscient que ce n'est pas « à la portée de tous les élèves ». Certains deviendront de bons « appliquants », peu importe l'approche choisie par l'enseignant, et ce n'est pas grave. Ce qui semble important par contre, c'est justement le choix de l'enseignant pour l'une de ces deux approches, un choix qui est déterminant pour son orientation pédagogique et sa recherche éventuelle du sens en mathématiques.

Après ces informations à propos de Francis, il est temps de plonger dans l'analyse de ce que fait concrètement cet enseignant pour l'enseignement de la factorisation en classe. Ce qui ressort des échanges avec Francis pendant la rencontre de co-situation peut, tout comme pour Annie, être classé en quatre aspects : la façon dont il introduit la factorisation avec les élèves, l'ordre de présentation des différentes techniques de factorisation, l'enjeu de la factorisation avec des nombres entiers et les prolongements possibles de la factorisation au secondaire.

Introduction de la factorisation avec les élèves

Pour introduire le concept avec les élèves, Francis insiste particulièrement sur le lien entre le développement algébrique et la factorisation de polynômes **(1, a)**. La raison première de ce choix est l'importance pour cet enseignant de partir des connaissances antérieures des élèves. En effet, le développement algébrique est un concept bien connu des élèves depuis le tout début de leurs études secondaires (MEES, 2016). Il entame donc ses notes de cours avec la figure 4.1, tout en disant aux élèves qu'ils vont maintenant faire le contraire de ce qu'ils ont vu dans les années précédentes (surtout en troisième secondaire) lorsqu'ils multipliaient des expressions algébriques. Ils devront maintenant retrouver ces expressions de départ qui ont été multipliées pour obtenir la forme développée qu'ils auront devant eux.

Factoriser des polynômes, ça consiste à retrouver quelles expressions algébriques ont été multipliées pour obtenir ce polynôme.

Factoriser

$$x^2 + xy + 2x + 2y = (x+2)(x+y)$$

Développer

Figure 4.1 Lien bidirectionnel entre le développement et la factorisation dans les notes de cours de Francis

Toujours dans le but de réactiver les connaissances antérieures des élèves, Francis enchaine alors avec des exemples numériques simples de développement et de factorisation **(1, d)**. Comme c'est le cas d'Annie, il ajoute que la factorisation de polynômes admet une seule possibilité pour la factorisation **(1, b)**, dans le sens où la factorisation de polynômes serait unique, au contraire de la factorisation de certains nombres entiers, comme pour l'exemple avec le nombre 36 dans la figure 4.2, qui possède quatre formes factorisées différentes.

Pour faire un lien avec les nombres, c'est comme si je vous disais que la réponse est 36 et que je vous demandais quels nombres ont été multipliés pour obtenir ce nombre. Avec les nombres, il y a plusieurs possibilités d'obtenir un résultat de 36 :

2 x 18 = 36; 3 x 12 = 36; 4 x 9= 36; 6 x 6 = 36.

Toutefois, avec les polynômes, il n'y aura qu'une seule possibilité de résultats.

Figure 4.2 Lien avec le domaine numérique provenant des notes de cours de Francis

Il est très intéressant de voir l'importance que prennent les exemples numériques chez les enseignants participants. Ces exemples semblent être une façon incontournable de donner du sens à la factorisation. En plus, comme pour Annie, Francis considère que chaque polynôme possède une seule et unique forme factorisée. Il sera intéressant d'aborder ce point avec les deux enseignants lors de l'une des rencontres réflexives, *pour voir si c'est réellement le cas dans tout leur enseignement, ou s'ils vont un peu plus loin avec certains exercices ou problèmes.*

Pour terminer son introduction de la factorisation, Francis soutient qu'il fait quelques liens avec les représentations visuelles, mais qu'il le fait très rapidement **(2, b)**. Il mentionne aux élèves que la multiplication de polynômes peut correspondre au calcul de l'aire d'un rectangle, et donc que la factorisation consiste à retrouver les dimensions de départ du rectangle, mais sans plus. Pour lui, le visuel pourrait peut-être être une belle porte d'entrée pour ce chapitre, mais il affirme que chaque analogie atteint sa limite à un certain moment.

Ceci démontre déjà une ouverture de la part de Francis pour les représentations en forme de la deuxième exploration sémantique. Il semble réticent à une utilisation de ces représentations tout le temps, mais je me demande s'il serait enclin à les introduire en début d'enseignement de la factorisation pour donner du sens à ce concept.

Ordre de présentation des techniques de factorisation

Une fois le concept introduit, Francis passe à l'enseignement des différentes techniques de factorisation. Pour y arriver, il commence par une révision de la mise en évidence simple qui a été vue par les élèves en troisième secondaire, pour aller ensuite directement vers la présentation du « produit somme ». Pour lui, le « produit somme » est un *truc* mathématique et il est très facile de perdre le sens derrière. Comme c'est quelque chose qui le préoccupe beaucoup, il a décidé de modifier son enseignement du « produit somme » pour justement faire en sorte qu'il soit perçu moins comme un *truc*, mais comme une généralisation de cas pour factoriser des trinômes du second degré à une variable.

Conséquemment, dès le début du chapitre de la factorisation, il ajoute une feuille recto verso qu'il appelle « de multiplications » (voir annexe E). Cette feuille supplémentaire à ses notes de cours lui sert d'amorce pour le « produit somme ». D'abord, il fait développer la multiplication de deux binômes en demandant aux élèves de décrire toutes les étapes de leur démarche (voir figure 4.3). Une fois le développement de l'exemple complété, Francis questionne la classe quant au lien possible entre 6 et -4 (les coefficients en x dans l'étape intermédiaire) pour obtenir 2 et -24 (le coefficient en x et le terme constant dans l'étape finale). C'est alors qu'il part de la forme développée pour tenter de voir comment retrouver 6 et -4 dans la forme intermédiaire à partir de 2 et -24. Ce processus inverse lui permet de parler du « produit somme », où les élèves sont amenés à se rendre compte que dans l'étape du milieu, le produit de 6 et -4 est -24 et la somme de 6 et -4 est de 2. Il tente ainsi de faire ressortir le lien important entre le développement et la factorisation **(1, b)**, tout en insistant sur l'équivalence de ces trois étapes ou de ces trois formes **(habileté 4)**.

Effectue les multiplications suivantes.
Inscris <u>toutes</u> les étapes de ta démarche, car il y a des liens que tu dois voir.

<u>Exemple:</u>

$$(x+6)(x-4) = x^2+6x-4x-24 = x^2+2x-24$$

Que faire avec 6 et -4 pour obtenir 2 et -24 ?

Figure 4.3 Premières explications du « produit somme » de Francis avec les élèves, où il insiste sur le lien entre la factorisation et le développement

Francis soutient que cette façon de procéder avec l'enseignement du « produit somme » lui permet de donner du sens à ce truc, puisque les élèves l'auront trouvé par eux-mêmes, grâce à leurs observations et à leur raisonnement. Je me questionne tout *de même sur ce que fait Francis, à savoir si cela permet vraiment de donner du sens au « produit somme » ou si cela permet simplement une meilleure rétention du savoir par les élèves. Il aurait été intéressant d'en discuter davantage pour comprendre un peu plus comment il voit le « produit somme ».*

C'est après l'enseignement du « produit somme » que Francis aborde les identités algébriques du trinôme carré parfait et de la différence de carrés. Or, il n'enseigne pas ces identités comme des techniques de factorisation à part entière, mais plutôt comme des cas particuliers du « produit somme » **(habileté 2)**. En effet, il est toujours possible de factoriser un trinôme du second degré à une variable[38] grâce au « produit somme » sans passer par les identités algébriques **(habileté 1)**. Par exemple, dans une différence de carrés, il suffit de voir que le coefficient du terme en x est de zéro pour revenir à la forme connue d'un trinôme $ax^2 + bx + c$. Pour Francis, cette vision englobante du « produit somme » permet, tel qu'il le dit, « d'alléger la mémoire de travail des élèves ».

L'ordre de présentation des techniques de factorisation de Francis m'interpelle énormément, alors qu'il est vrai que les identités algébriques remarquables ne sont que des cas particuliers de polynômes du deuxième degré à une variable. Il serait intéressant d'avoir une discussion à ce sujet avec les deux enseignants, pour les entendre plus en profondeur sur les raisons de leur choix respectif.

Pour le moment, ce choix de Francis a un impact considérable sur l'apprentissage des élèves. D'une certaine façon, il n'est plus toujours nécessaire pour les élèves de reconnaître précisément la forme d'une expression algébrique, alors que le « produit somme » peut être appliqué pour factoriser la majorité des polynômes. Ceci implique aussi que les élèves ne sont pas obligés d'être en mesure d'appliquer chacune des

[38] Je rappelle au lecteur que les trinômes du second degré à une variable sont les polynômes rencontrés le plus fréquemment dans le chapitre de la factorisation au secondaire.

techniques de factorisation présentes dans le programme (les identités algébriques pouvant être mises de côté). Ceci remet particulièrement en question la deuxième habileté qui consiste à reconnaître la forme de factorisation à utiliser selon l'expression à factoriser.

Enjeu de la factorisation avec des nombres entiers

Une analyse sommaire de manuels de la quatrième secondaire en SN m'a permis, dans le cadre conceptuel (voir section 2.1.1), de dresser un portait de la factorisation au secondaire. Un élément important à retenir est la prévalence des coefficients entiers dans les polynômes présentés aux élèves. Cet enjeu fait partie intégrante du discours de Francis pendant la rencontre de co-situation. De fait, il confirme choisir des polynômes à factoriser composés de coefficients entiers ou, à quelques occasions, composés de coefficients décimaux simples et familiers pour les élèves (il donne comme exemple 0,5 ou 1,25). Mais ce n'est pas tout, il s'assure aussi que les formes factorisées de ces polynômes possèdent seulement des nombres entiers ou des décimaux simples et familiers. Les élèves ne rencontrent donc aucun irrationnel lors du chapitre de la factorisation.

Lors de notre rencontre, Francis a affirmé qu'il ne savait pas exactement pourquoi c'est comme ça pour le chapitre de la factorisation. Cet enjeu des coefficients entiers ou décimaux simples et familiers semble être une règle non écrite à suivre pour l'enseignement de ce concept. C'est un prérequis qu'il ne peut pas expliquer.

Cette particularité décrite par Francis possède toutefois une implication très importante quant à l'enseignement-apprentissage de la factorisation au secondaire : l'apparition de la factorisation unique et au maximum. De fait, il revient sur l'unicité de la factorisation en expliquant qu'on s'attend des élèves qu'ils factorisent le plus possible pour obtenir la forme la plus factorisée du polynôme de départ **(1, b)**. De ce point de vue, il n'existe qu'une seule factorisation possible pour les élèves du secondaire, et c'est celle au maximum. Par exemple, si les élèves se retrouvent devant le binôme $x^2 - 2$, Francis mentionne qu'ils doivent s'arrêter là. Les élèves n'ont pas à pousser plus loin et à écrire $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, car bien que ce soit une différence de carrés, la forme factorisée contient un nombre irrationnel qui est la racine carrée de 2. Le binôme $x^2 - 2$ est donc déjà factorisé au maximum selon les contraintes du secondaire, ou pourrait-on dire qu'il ne se factorise tout simplement pas **(habileté 3)**.

La factorisation au maximum semble être bien ancrée chez Francis. Or, il dégage un malaise face à cette particularité. Je me demande si ce malaise est assez fort pour lui permettre de revoir ou de remettre en question son enseignement de la factorisation, toujours dans le but de miser sur la compréhension des élèves.

Prolongement de la factorisation au secondaire

Francis parle beaucoup de l'étude de la fonction du second degré comme prolongement direct de la factorisation en quatrième secondaire **(4, b)**. Deux éléments ressortent de ses propos : la formule quadratique (qui n'est pas enseignée dans le chapitre de la factorisation, mais bien dans celui de la fonction du second degré) et le passage de la forme générale de la règle vers la forme factorisée. En ce qui concerne la formule quadratique, Francis prend le temps d'expliquer d'où elle provient en partant de la complétion du carré[39] d'abord avec un exemple numérique **(1, d)**, puis avec un cas général de la forme $ax^2 + bx + c$. Même si les élèves ne sont pas tous en mesure de

[39] Francis n'a pas vraiment abordé l'enseignement de la complétion du carré lors de la rencontre de co-situation. Il est possible de déduire ici qu'il la montre aux élèves, mais il n'en dit pas plus pour l'instant.

suivre la démonstration algébrique à partir du cas général pour obtenir la formule quadratique, il considère qu'il est très important de le faire quand même **(1, e[40])**.

> Francis : Je suis parfaitement conscient qu'il y en a que j'ai largué dans l'histoire [la démonstration algébrique de la formule quadratique]. Mais je sais qu'il y en a qui m'ont suivi. Mais moi, mon rôle de prof c'est de leur dire « regarde la formule elle vient de là ». Ça n'a pas été, c'est pas descendu du ciel…*pouf* ! C'est en lien avec ta factorisation et ça a donné ça. Maintenant, là ta job d'élève de secondaire quatre c'est applique là comme il le faut, au bon moment. En faisant les bonnes opérations dans le bon ordre et tout ça. Puis je leur explique toutes les formules. […] Je veux que les élèves sachent d'où viennent les formules. Ça n'a pas été le délire d'un mathématicien un moment donné.

Je trouve très intéressants les propos de Francis quant aux formules en mathématiques. C'est super qu'il montre l'origine de celles-ci aux élèves, ce qui permet, d'une certaine façon, d'humaniser les mathématiques. En revanche, une fois les explications terminées sur l'origine de ces formules, la dimension syntaxique redevient dominante très rapidement, alors qu'il mentionne que le travail des élèves est de savoir quand et comment appliquer les formules, tout simplement. Il me semble y avoir une coupure importante entre les deux types de contrôle, alors qu'ils devraient plutôt être entrecoupés. Est-ce que cette façon de faire de Francis permet réellement de donner du sens à la complétion du carré et à la formule quadratique ? Est-ce que d'expliquer l'origine des formules (et voir même des techniques de factorisation) permet d'améliorer la compréhension des élèves ? Il serait intéressant d'en discuter avec les enseignants participants dans les prochaines rencontres.

Enfin, une fois la formule quadratique montrée aux élèves, Francis soutient que ces derniers possèdent maintenant deux façons de transformer la règle générale de la

---

[40] Il est question ici de l'origine des formules. Ceci élargit encore la première exploration sémantique en lien avec l'objet mathématique qu'est la factorisation et permet la création d'une nouvelle composante « e » : montrer et expliquer l'origine des techniques de factorisation (et des formules en mathématiques).

fonction du second degré ($f(x) = ax^2 + bx + c$) vers sa forme factorisée ($f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$) **(4, b)**. D'une part en utilisant directement la formule quadratique, et d'autre part en factorisant le polynôme de la forme générale. Les élèves ont donc le choix de ne pas réinvestir la factorisation dans le chapitre de la fonction du second degré, alors que plusieurs d'entre eux préfèrent plutôt appliquer la formule quadratique.

4.1.3 Synthèse de l'analyse des rencontres de co-situation

Cette synthèse des rencontres de co-opération me permet de faire le point sur ce que font les enseignants quant à leur enseignement de la factorisation. Le tableau 4.1 compile les différentes explorations sémantiques et habiletés pour factoriser qu'Annie et Francis déclarent dans leur pratique, en plus de préciser la façon dont ils les abordent. Ce tableau est aussi une occasion de comparer les approches des deux participants. Les cases en vert représentent les nouvelles composantes qui ont émergé lors de l'analyse des rencontres de co-situation. Il est important de préciser que ce n'est pas parce que les enseignants ne discutent pas d'une composante que celle-ci est absente dans leur enseignement.

Tableau 4.1 Synthèse de l’analyse des rencontres de co-situation avec Annie et Francis

<table>
<tr><th></th><th>Annie</th><th>Francis</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Exploration sémantique 1
L’objet mathématique, le concept de factorisation</td><td>a. Annie parle du lien bidirectionnel entre la factorisation et le développement, mais seulement avec des exemples numériques, dans le but de rappeler aux élèves ce que sont des facteurs. Elle ne semble pas aller plus loin.</td><td>a. Le lien bidirectionnel entre la factorisation et le développement est central dans l’enseignement de la factorisation pour Francis. C’est sa porte d’entrée pour l’amorce de ce concept. Cela lui permet de partir des connaissances antérieures des élèves.</td></tr>
<tr><td>b. La factorisation de polynômes est unique (un seul couple de facteurs possibles).</td><td>b. La factorisation au secondaire est unique et maximale. Les élèves doivent factoriser au maximum, alors que les coefficients utilisés sont des entiers ou des décimaux simples et familiers.</td></tr>
<tr><td colspan="2">c. Non discutée.</td></tr>
<tr><td colspan="2">d. Les deux enseignants utilisent fréquemment des exemples numériques au début de leur enseignement de la factorisation. Ce lien avec le domaine numérique semble leur permettre de rendre le concept plus abordable pour les élèves.</td></tr>
<tr><td>e. Non discutée.</td><td>e. Francis considère qu’il est très important de montrer et d’expliquer l’origine des formules en mathématiques (et donc celle des techniques de factorisation). Pour lui, ceci semble être une façon de donner du sens à celles-ci.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">Exploration sémantique 2
Les représentations en forme</td><td colspan="2">a. Non discutée.</td></tr>
<tr><td>b. Elle aborde rapidement les représentations visuelles au début de son enseignement de la factorisation (on ne sait pas si elle le fait pour le reste de son enseignement), alors qu’elle fait le parallèle entre factoriser et retrouver les dimensions d’un rectangle dont on connaît son aire et la mesure d’un de ses côtés. Elle fait ce lien seule à l’avant avec un exemple visuel. Les élèves ne manipulent pas les représentations visuelles.</td><td>b. Il mentionne que la multiplication de polynômes correspond au calcul de l’aire d’un rectangle et que la factorisation est donc la recherche des dimensions de ce rectangle dont on connaît l’aire. Il fait ce lien rapidement à l’oral en début de chapitre, en insistant sur le fait que toute analogie possède une limite. Lui et les élèves ne manipulent pas les représentations visuelles en tant que telles.</td></tr>
<tr><td colspan="2">c. Non discutée.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Exploration sémantique 3
L’aspect historique de la factorisation</td><td colspan="2">a. Non discutée.</td></tr>
<tr><td colspan="2">b. Non discutée.</td></tr>
</table>

Exploration sémantique 4 *L'utilité de la factorisation, situer le concept*	a. Elle n'enseigne pas la factorisation pour résoudre des équations du second degré.	a. Non discutée.
	b. Pour Annie, il n'est pas nécessaire de réinvestir la factorisation dans l'enseignement de la fonction du second degré. Il est possible de la laisser de côté, ce qui fait en sorte que ce n'est pas réellement un prolongement de la factorisation au secondaire.	b. Le prolongement le plus important au secondaire pour Francis est la fonction du second degré. Il réinvestit la factorisation (et surtout la complétion du carré) dans ce chapitre avec les élèves, que ce soit pour passer de la forme générale de la règle de la fonction vers sa forme factorisée ou pour montrer la formule quadratique.
	c. Elle amorce l'enseignement de la factorisation comme une méthode alternative à la division d'expressions algébriques.	c. Non discutée.
	d. Les réels prolongements de la factorisation se trouvent au niveau collégial, et non au secondaire. Pour elle, la factorisation est donc enseignée pour ces élèves qui continueront leurs études en mathématiques après le secondaire.	d. Non discutée.
Habileté 1 *Maîtriser l'application des techniques de factorisation*	Cette habileté prend beaucoup de place dans son enseignement de la factorisation, c'est un incontournable. Pour Annie, les élèves se doivent d'être à l'aise avec l'application des différentes techniques de factorisation (elle insiste sur l'importance des manipulations algébriques). Le « produit somme » est secondaire pour cette enseignante, il vient après les autres techniques.	Les élèves ne sont pas obligés d'être capables d'appliquer toutes les techniques de factorisation. S'ils maîtrisent le « produit somme », ils peuvent l'utiliser tout le temps, comme c'est une technique qui englobe toutes les autres. Les identités algébriques ne sont que des cas particuliers du « produit somme ».

Habileté 2 *Reconnaître la forme de factorisation selon l'expression à factoriser*	Une feuille synthèse « de recettes » est remise aux élèves qui rend explicite ce qu'ils doivent regarder pour être en mesure de factoriser un polynôme. Ils ont des étapes bien claires sur cette feuille pour leur permettre de reconnaître la bonne technique de factorisation à appliquer (voir figure 1.1).	Les élèves ne sont pas nécessairement confrontés à un choix de technique, alors que Francis mentionne qu'il leur est possible d'appliquer le « produit somme » dans à peu près tous les cas (car les polynômes donnés aux élèves seront presque toujours factorisables avec ce *truc* selon les propos de Francis).
Habileté 3 *Reconnaître des formes qui ne se factorisent pas*	Non disctutée.	Les élèves semblent devoir savoir quand un polynôme ne se factorise pas (ou ne se factorise plus). Comme la factorisation est unique et au maximum, on arrive à un moment où il n'est plus possible de factoriser. Il y a une fin, et il est nécessaire pour les élèves de reconnaître quand il faut s'arrêter.
Habileté 4 *Reconnaître des formes équivalentes*	Non discutée.	Lors de son enseignement du « produit somme », il insiste sur l'équivalence entre les trois étapes présentes dans la factorisation d'un trinôme du second degré à une variable (forme factorisée, forme intermédiaire et forme développée).
Habileté 5 *Identifier le plus grand facteur commun entre plusieurs termes algébriques*	Non discuté.	

L'analyse des rencontres de co-situation avec chaque enseignant a permis de faire ressortir quatre nouvelles composantes pour les explorations sémantiques, qui sont celles en vert dans le tableau synthèse 4.1 ci-dessus : (1, d), (1, e), (4, c) et (4, d). Elles contribuent à élargir et à peaufiner le cadre des explorations sémantiques élaboré dans le chapitre II de ce mémoire. En revanche, la troisième exploration sémantique est absente du discours des deux enseignants pour le moment.

De manière générale, les enseignants ne perçoivent pas la factorisation toujours de la même façon et ils ne font pas tout à fait les mêmes choix quant à leur enseignement de ce concept. Pour l'exploration sémantique 1, ils sont sur la même longueur d'onde, alors qu'ils soutiennent l'importance du lien entre la factorisation et le développement algébrique, en plus de parler d'une factorisation unique (et maximale pour Francis). Ils insistent aussi tous les deux sur l'utilisation d'exemples numériques dans leur enseignement du concept. Francis mentionne en plus l'importance de montrer l'origine des formules et techniques aux élèves, ce que ne semble pas faire Annie. Pour l'exploration sémantique 2, les deux enseignants utilisent l'analogie entre la recherche des dimensions d'un rectangle et la factorisation au début de leur enseignement, mais ils le font très rapidement. Dans les deux cas, il n'est pas question de manipulation des représentations visuelles de la part des enseignants ou des élèves, mais plutôt d'explications à l'oral. Pour l'exploration sémantique 4, les enseignants ne se rejoignent pas : Annie semble très préoccupée par l'aspect utilitaire de la factorisation, ce qui n'est pas le cas de Francis. Elle l'introduit comme une méthode alternative pour diviser un polynôme. Elle s'interroge aussi sur les prolongements au cégep. Or, Francis soutient que c'est la fonction du second degré qui est le prolongement le plus important, alors qu'Annie explique que la factorisation n'est pas nécessaire pour son l'étude.

En lien avec les habiletés à développer pour factoriser, on remarque que les techniques de factorisation sont importantes pour les deux enseignants, mais ils n'accordent pas le même statut au « produit somme ». Annie perçoit ce *truc* comme étant la dernière chose à essayer si les autres techniques ne s'appliquent pas, alors que chez Francis, il voit le « produit somme » comme une technique qui englobe toutes les autres. Il propose une réflexion quant à la forme des expressions à factoriser qui sont présentées au secondaire. Enfin, il est possible de remarquer l'omniprésence des habiletés dans les propos des enseignants. En ce sens, les éléments du contrôle sémantique et ceux du contrôle syntaxique semblent être interreliés, comme nous en avons discuté (voir section 2.2). Il sera intéressant de se pencher sur ce point lors de l'analyse des rencontres réflexives.

4.2 Analyse de la première rencontre réflexive de co-opération

La première rencontre de co-opération est le début de l'activité réflexive en soi. C'est lors de cette rencontre que les enseignants et moi-même avons entamé la co-élaboration d'interventions visant à donner du sens à la factorisation au secondaire. Elle a été l'occasion d'initier des discussions à trois, à la croisée des préoccupations, contraintes et points de vue de la pratique et de la recherche. Pour ce faire, j'avais demandé aux enseignants d'apporter des situations ou des interventions qu'ils considèrent riches et intéressantes pour l'enseignement de la factorisation et d'autres qu'ils trouvent difficiles pour les élèves. Dans cet ordre d'idées, la rencontre a débuté par la présentation, de la part des enseignants, d'une situation-problème[41] donnée aux élèves lors du chapitre de la factorisation qui génère des difficultés et des questionnements chez ces derniers. Cette évaluation CD1 a donc tenu le rôle d'amorce pour la co-opération de cette recherche, alors que les discussions autour de *L'enclos* nous ont amenés à aborder deux explorations sémantiques : les représentations visuelles/géométriques (exploration sémantique 2 : les représentations en forme) et la factorisation au maximum (exploration sémantique 1 : l'objet mathématique, le

[41] Cette situation-problème, qui est un examen de la première compétence disciplinaire en mathématiques (CD1), se nomme *L'enclos*. Son énoncé est présent à la figure 4.4.

concept de factorisation). Ces discussions ont aussi fait émerger une nouvelle exploration sémantique autour de l'utilisation de contextes pour travailler la factorisation. Pour la structure de cette analyse, ces trois sujets de discussion constitueront les trois premiers « épisodes » de la co-opération.

Épisode I : L'importance des contextes, nouvelle exploration sémantique
Épisode II : Les représentations en forme, deuxième exploration sémantique
Épisode III : La factorisation au maximum, première exploration sémantique

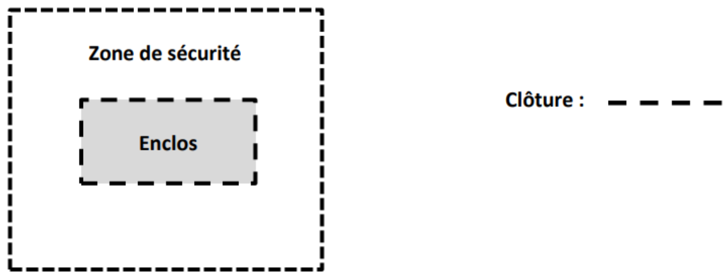
L'analyse qui suit débutera ainsi par une description de la CD1 de *L'enclos* et une présentation des discussions que nous avons eues autour de cette évaluation. Je détaillerai ensuite les trois épisodes soulevés plus haut, toujours en m'appuyant sur les deux grilles d'analyse présentées à la fin du chapitre 3 : la grille des explorations sémantiques (tableau 3.2) et la grille des habiletés à développer pour factoriser (tableau 3.3). Je terminerai par expliciter certaines contraintes et préoccupations importantes des enseignants qui ont été omniprésentes dans leurs propos tout au long de la rencontre. Encore une fois, j'inclurai dans cette analyse mes commentaires à chaud provenant de mon journal de bord, en italique (voir section 3.4.4).

4.2.1 Présentation de la situation-problème de *L'enclos*

La situation-problème de *L'enclos* initialement amenée par Annie nous a permis, aux enseignants et à moi-même, d'entrer dans le vif du sujet et de discuter dès le départ des difficultés et questionnements que les élèves peuvent rencontrer face à la factorisation, et plus précisément en évaluation d'une CD1 pour ce chapitre. Voici l'énoncé de la situation-problème (figure 4.4) :

Le propriétaire d'un zoo a acheté un nouveau terrain afin de relocaliser les tigres. Pour être sécuritaire, ce nouvel espace doit être délimité par deux clôtures, soit une pour la zone de sécurité et une pour l'enclos.

Voici un schéma du terrain :



Le propriétaire a déboursé ($4x^3 - 4x^2 - 15x + 18$)\$ pour l'achat de ce terrain au coût de $(x + 2)$\$ le mètre carré.

Pour respecter le bien être des tigres, la surface de l'enclos doit être de ($2x^2 - 6x - 56$) m^2 .

Sachant que le propriétaire a utilisé moins de 100 mètres de clôture au total et que x est un nombre entier, déterminez des dimensions possibles du terrain et de l'enclos.

NB. Les dimensions doivent être des valeurs numériques.

Figure 4.4 L'énoncé de la situation-problème de *L'enclos*

Pour résoudre cette situation-problème, il est nécessaire de connaître d'abord les dimensions algébriques de la zone de sécurité (en passant par son aire), puis celles de l'enclos. Ce sont ces premières étapes qui requièrent l'utilisation de la factorisation de polynômes.

1) <u>Aire de la zone de sécurité</u>

$$aire = \frac{prix\ du\ terrain}{coût\ pour\ 1\ m^2} = \frac{4x^3 - 4x^2 - 15x + 18}{x + 2} = 4x^2 - 12x + 9$$

L'aire de la zone de sécurité est de $(4x^2 - 12x + 9)$ m^2.

2) <u>Dimensions de la zone de sécurité</u>

$$aire = 4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$$

La zone de sécurité est un carré dont les côtés mesurent $(2x - 3)$ m.

3) <u>Dimensions de l'enclos</u>
   - Première factorisation possible : $aire = 2x^2 - 6x - 56 = (2x - 14)(x + 4)$
   - Deuxième factorisation possible : $aire = 2x^2 - 6x - 56 = (x - 7)(2x + 8)$

Dans le contexte de la situation-problème, les dimensions de l'enclos des tigres se doivent d'être de $(2x - 14)$ m par $(x + 4)$ m. De fait, elles ne peuvent pas être de $(x - 7)$ m par $(2x + 8)$ m, car la mesure de l'enclos $(2x + 8)$ m serait plus grande que la mesure des côtés de la zone de sécurité $(2x - 3)$ m. Or, cette zone se doit d'être plus grande que l'enclos, tel que le montre le dessin présent dans l'énoncé.

C'est lors de cette troisième étape de la résolution que les élèves éprouvent le plus de difficultés selon les enseignants. En effet, comme il y a deux réponses possibles à la factorisation de la surface de l'enclos **(1, b)**, et donc deux réponses éventuelles pour ses dimensions **(2, b)**, il est normal que plusieurs élèves effectuent la deuxième factorisation, qui est évidemment erronée. Cependant, ces élèves ne sont pas conscients de leur erreur, puisqu'ils ne prennent pas le temps – ou, plutôt, ils n'ont pas développé le réflexe – de vérifier leur réponse selon le contexte! En fait, selon ce que rapportent les enseignants, les élèves ne s'attardent pas à la forme factorisée qu'ils obtiennent pour les dimensions de l'enclos. Ils ne se rendent pas compte qu'il y a deux manières de factoriser, ce qui fait en sorte que même les élèves qui factorisent adéquatement dans le contexte (ceux qui effectuent la première factorisation) ne se posent pas de question quant à la validité de leur réponse. Comme le dit Annie, ces élèves ont été chanceux et sont tombés sur la bonne factorisation, alors que les autres sont tombés dans le « piège » et ont été malchanceux. Notre discussion sur le sujet nous a amenés à conclure que les élèves ne font qu'appliquer les techniques de factorisation par automatisme **(habileté 1),** sans prendre en considération le contexte qu'ils ont devant eux.

Deux erreurs supplémentaires fréquentes sont soulevées par les enseignants en lien avec la recherche des dimensions de l'enclos (la troisième étape de la résolution). Au-delà de l'existence de deux factorisations possibles pour l'aire de l'enclos, certains élèves éprouvent des difficultés à gérer le facteur 2 qui est commun entre tous les termes de l'expression de l'aire de l'enclos $2x^2 - 6x - 56$ **(habileté 5)**. En effet, il est possible de commencer par effectuer une mise en évidence simple pour obtenir $2(x^2 - 3x - 28)$ avant d'appliquer le « produit somme » pour terminer la factorisation, par exemple. La factorisation résultante et « finale » devient alors $2(x-7)(x+4)$, que l'on pourrait appeler la factorisation au maximum de l'aire de l'enclos **(1, b)**. Une fois cette forme factorisée obtenue, les élèves ne comprennent pas quoi faire avec le 2 qui se trouve devant les parenthèses. Annie mentionne que généralement, soit les élèves ne font qu'ignorer ce facteur et concluent que les dimensions de l'enclos sont de $(x-7)$ m par $(x+4)$ m, ou bien ils distribuent le facteur 2 aux deux binômes pour obtenir des dimensions de $(2x-14)$ m par $(2x+8)$ m. Dans les deux cas, les mesures des côtés de l'enclos ne sont pas les bonnes. Mais encore une fois, nous en avons conclu que les élèves ne font pas de travail de rétroaction, ou pourrait-on dire de contrôle, pour valider leur réponse, que ce soit en redéveloppant leur forme factorisée ou en se fiant au contexte de la situation-problème. Ils ne font qu'appliquer les techniques de factorisation, sans plus **(habilité 1)**. Ainsi, la factorisation ne semble pas avoir de sens pour les élèves, alors qu'ils ont du mal à faire le lien entre la factorisation, le concept de facteurs et les dimensions d'un rectangle[42]. Ceci montre une prévalence du contrôle syntaxique lorsque les élèves factorisent, au détriment du contrôle sémantique.

Le fait qu'il y ait deux formes factorisées possibles pour déterminer les dimensions de l'enclos dans la situation-problème va à l'encontre de ce qui a été dit par les deux

[42] Annie et Francis soutiennent que les contextes dans le chapitre de la factorisation sont presque toujours « géométriques ». C'est-à-dire qu'ils traitent, entre autres, d'aires ou de volumes. Je reviendrai sur ce point dans la section suivante 4.2.2 portant sur l'épisode des contextes.

enseignants lors des rencontres de co-situation. Effectivement, Annie et Francis ont mentionné qu'il n'y avait qu'un seul résultat possible pour la factorisation d'un polynôme, et qu'en plus, ce résultat était maximal. Pourtant, dans la situation-problème de l'enclos, il est possible de voir qu'il ne faut pas factoriser l'expression algébrique de l'aire de l'enclos au maximum pour retrouver ses dimensions dans le contexte, car on recherche simplement deux facteurs, et non trois, qui est le nombre de facteurs dans la factorisation au maximum $2(x-7)(x+4)$. *En revanche, si les élèves le font, on se rend compte qu'ils ne sont pas en mesure de distribuer adéquatement le facteur* 2 *provenant de la mise en évidence simple du polynôme* $2x^2-6x-56$ *pour retrouver les bonnes dimensions de l'enclos.*

Au final, je m'interroge sur la façon dont les enseignants traitent ce type de situations-problèmes. Est-ce qu'ils travaillent des polynômes qui possèdent plusieurs factorisations possibles avec les élèves, ou s'en tiennent-ils à l'enseignement d'une factorisation unique et maximale? Ce questionnement sera approfondi plus tard, dans l'épisode III de la première rencontre de co-opération en lien avec la factorisation au maximum.

À la suite des discussions sur la situation-problème de *L'enclos*, les enseignants et moi-même avons approfondi trois éléments importants en lien avec les explorations sémantiques dans la première rencontre de co-opération. D'abord, nous avons parlé de la place et de l'importance des contextes dans l'enseignement-apprentissage de la factorisation (nouvelle exploration sémantique). Comme il en a été question plus tôt, les élèves ne semblent pas être en mesure de faire le lien entre la factorisation obtenue et les éléments contextuels, mais il semblerait que de le faire sous-entendrait une compréhension du concept par les élèves. Ensuite, comme le thème de l'aire et des dimensions de rectangles est omniprésent dans l'évaluation CD1, nous avons décidé d'aller plus loin sur ce sujet, pour voir jusqu'où il serait possible d'aller avec cette analogie entre la factorisation et la recherche des mesures d'un rectangle (exploration sémantique 2). Enfin, mes questionnements quant à la factorisation unique et au maximum nous ont amenés à réfléchir à cette contrainte et cette particularité de la factorisation au secondaire (exploration sémantique 1).

4.2.2 Épisode I : L'importance des contextes, une nouvelle exploration sémantique

Un des éléments qui ressort le plus des discussions autour de la situation-problème de *L'enclos* est la place et l'importance des contextes lorsqu'il faut factoriser. En effet, comme il a été possible de le voir précédemment, il est impératif de revenir au contexte d'une situation lors de sa résolution pour être en mesure de la résoudre adéquatement. Pour la CD1 de *L'enclos*, par exemple, ce sont les dimensions de la zone de sécurité qui nous permettent de choisir les bonnes dimensions, et donc la bonne forme factorisée, pour l'enclos des tigres.

Néanmoins, Annie et Francis soutiennent que c'est en contexte que surviennent les difficultés des élèves. Autrement dit, lorsque ces derniers se rendent compte qu'ils doivent factoriser un polynôme, ils sont généralement capables de le faire et d'appliquer les bonnes techniques de factorisation au bon moment **(habiletés 1 et 2)**. Là n'est pas le cœur du problème. Ceci suggère plutôt que les élèves ne comprennent pas réellement ce qu'ils font lorsqu'ils factorisent, et ce même avec l'intervention de l'enseignant et l'utilisation d'exemples numériques pour faire le lien avec la factorisation en algèbre **(1, d)**.

> Annie : [Les élèves] font de la factorisation parce que tu es dans le chapitre de la factorisation. Puis ils se disent « ah c'est un examen sur le chapitre 3, je dois être obligé de faire de la facto quelque part », mais ils ne comprennent pas pourquoi ils factorisent. C'est comme si, je me trompe peut-être, ils ne comprennent même pas le sens de la factorisation. Puis je leur dis « trouver des facteurs. Tu étais en 4^{e} année, je te disais trouve les facteurs de 10, qu'est-ce que tu fais quand tu

> cherches des facteurs » […] c'est comme si, parce que c'est de l'algèbre, ils perdent le sens.

Les élèves du secondaire factorisent donc par automatisme. Ils le font parce qu'ils sont dans ce chapitre et que c'est sûrement ce qui est attendu d'eux. Ils ne semblent pas avoir de grandes difficultés d'un point de vue syntaxique, alors qu'ils sont capables d'appliquer les techniques de factorisation au bon moment dans la plupart des cas. C'est la dimension sémantique qui semble absente, encore une fois.

Nous nous sommes alors interrogés sur l'utilisation des contextes (ou du concret[43]) pour l'enseignement de la factorisation, et avons réfléchi au rôle qu'ils peuvent prendre dans l'apprentissage et la compréhension des élèves et déterminer le moment opportun de les introduire. Dans leurs enseignements habituels, les enseignants affirment donner des contextes aux élèves après avoir montré les différentes techniques de factorisation. L'application de ces techniques selon le type d'expressions algébriques à factoriser **(habiletés 1 et 2)** vient bien avant les problèmes et situations-problèmes contextualisés.

Pourtant, Annie soulève un constat intéressant : pour les autres concepts mathématiques de la quatrième secondaire en SN, elle commence très souvent son enseignement grâce à une situation avec un contexte, pour découvrir et introduire les concepts avec les élèves. Elle affirme ne pas vraiment savoir pourquoi elle ne le fait pas avec la factorisation, mais elle soutient, tout comme Francis, que de rattacher le concept à un contexte, ou au concret, vaudrait la peine.

> Annie : Je me suis ajustée sur la « partie entière » parce que je le voyais que l'élève n'avait aucune idée, ne comprenait pas ce qu'il faisait, fais que je me suis

[43] Pour les enseignants, les termes « contexte » et « concret » sont intimement liés. Il serait même possible de dire que ce sont des synonymes à certains moments, alors qu'ils utilisent l'un à la place de l'autre, et vice versa.

> rendu compte qu'avec des exemples concrets après ils étaient capables d'appliquer plus rapidement. Mais avec la factorisation, je ne le fais pas.
>
> Chercheuse : Mais tu penses que ça vaudrait la peine de le faire?
>
> Annie : Je pense que oui.
>
> Francis : Ben oui, ça vaut toujours la peine de le faire. Ça vaut toujours la peine d'ajouter du concret. Les élèves qui y restent accrochés…
>
> Annie : Puis pour certains ce n'est pas nécessaire, mais ça ne leur nuira pas.
>
> Chercheuse : Puis, est-ce que, mettons qu'on le fait au départ, partir avec un exemple concret, peut-être, je ne sais pas, si ça bloque par après… Bon il y en a que ça va bien aller, mais tu parlais de soutien tantôt, si on l'inclut au départ [le concret], on peut toujours y revenir et faire « hey te souviens-tu de… »
>
> Annie : Ouais!
>
> Francis : Oui, tu y reviens [au concret]. C'est ça!

Nous avons donc statué qu'il serait préférable de commencer l'enseignement de la factorisation avec l'aide de contextes ou du concret, dans le but de permettre aux élèves de mieux comprendre pourquoi on factorise et dans quel contexte il faut le faire, et ce, dès le départ. Ceci permettrait éventuellement une diminution des difficultés des élèves en contexte (et un gain de temps pour intervenir sur ces difficultés), mais aussi une compréhension plus profonde du concept de factorisation.

Cette discussion était très intéressante, alors que j'ai senti un changement dans le discours d'Annie. Elle a remis en question l'ordre dans lequel elle aborde le concept de factorisation, chose qu'elle a continué à faire tout au long des deux rencontres réflexives. Déjà, j'ai senti que notre travail de co-élaboration avait un impact considérable sur cette enseignante, et je trouve que c'est super!

Nouvelle et cinquième exploration sémantique

Ce premier résultat co-construit est très intéressant, mais il n'est pas présent dans le cadre des explorations sémantiques! Il s'agit alors d'une toute nouvelle exploration sémantique (la cinquième) qui n'avait pas été soulevée par la recherche : l'importance des contextes en factorisation. Deux composantes ressortent des discussions entre les partenaires de la recherche. D'une part, amener les élèves à modéliser une situation grâce à la factorisation **(5, a)** montrerait une maîtrise du concept par les élèves, alors qu'ils devraient aller au-delà de la simple application des techniques de factorisation. En effet, le passage d'une situation en mots vers sa représentation à l'aide de la factorisation (c'est-à-dire voir que c'est la factorisation qui permet de modéliser la situation) demande un contrôle sémantique et une bonne compréhension de ce qu'est la factorisation en soi.

D'autre part, faire réfléchir les élèves sur la forme que doit prendre la factorisation d'un polynôme en contexte **(5, b)** permettrait de leur montrer que ce concept ne se résume pas à la manipulation d'expressions algébriques. Il s'agit, par exemple, de déterminer le nombre de facteurs requis pour une factorisation dans un contexte quelconque ou de s'assurer que les facteurs trouvés fonctionnent avec les éléments conceptuels d'une situation. L'idée est d'amener les élèves à prendre en considération le contexte d'une situation pour la résoudre du début à la fin, comme il est nécessaire de le faire avec la CD1 de *L'enclos*. À ce sujet, les enseignants mentionnent que la majorité des contextes seraient « géométriques » dans le chapitre de la factorisation, pour reprendre le terme des enseignants. Le sens de la factorisation au secondaire est donc, la plupart du temps, lié à la recherche des dimensions d'une figure plane ou d'un solide **(2, c)**.

Voici un exemple apporté par Annie lors de la première rencontre réflexive provenant d'un devoir sommatif qu'elle donne aux élèves pour le chapitre de la factorisation (voir figure 4.5). Un autre exemple du même type, toujours apporté par Annie, est présent à l'annexe F. Ce problème permet d'illustrer les deux composantes de la cinquième (et nouvelle) exploration sémantique.

5 Le volume d'un prisme droit à base rectangulaire est représenté par le polynôme $(4x^3 - 12x^2 - 40x)cm^3$. Détermine les dimensions de ce solide.

Figure 4.5 Exemple d'un problème « géométrique » de la recherche des dimensions d'un prisme apporté par Annie

Le point tournant ici est de comprendre que les facteurs du polynôme représentant le volume du prisme à base rectangulaire sont en fait les dimensions de ce prisme, ce qui fait en sorte que les élèves doivent déduire que c'est la factorisation qui leur permettra de répondre à la question **(5, a)**. Selon les enseignants, cette modélisation de la situation n'est pas chose facile, alors qu'ils ne sont pas habitués de travailler avec le volume en factorisation. Les élèves éprouvent de la difficulté à identifier quand il leur est nécessaire de factoriser dans des situations contextuelles nouvelles. Voici la résolution du problème :

$$Volume = 4x^3 - 12x^2 - 40x$$

$$V = 4x(x^2 - 3x - 10)$$

$$V = 4x(x - 5)(x + 2)$$

Les dimensions du prisme sont donc de $(4x)$ m, $(x - 5)$ m et $(x + 2)$ m. Toutefois, même quand les élèves ont déterminé qu'ils devaient factoriser le polynôme du volume pour retrouver ses dimensions, plusieurs ne comprennent pas qu'ils doivent trouver trois facteurs. Dans leur résolution, ils ne voient pas directement la mise en évidence simple du monôme $4x$ **(habileté 5)**, et ils passent directement à l'application du *truc* du « produit somme » **(habileté 1)**. Ils se retrouvent alors avec deux facteurs et ne savent pas quoi faire après. Annie soutient que ce n'est pas naturel pour les élèves de rechercher deux facteurs quand on a l'aire et trois facteurs quand on a le volume. Il faut alors donner du sens à la factorisation dans ce contexte pour aider les élèves à se rendre compte que comme il est question d'un volume, alors ils doivent trouver trois dimensions **(5, b)**.

Dans ce problème, comme on est à la recherche des dimensions d'un prisme à base rectangulaire, on est à la recherche de trois dimensions, et non de deux comme dans la situation-problème de L'enclos. Il est important d'insister sur ce type de spécificité et de donner du sens à la factorisation selon le contexte, car on voit bien que les élèves ne sont pas en mesure de le faire et qu'ils ne font qu'appliquer les techniques de factorisation. L'émergence de la cinquième exploration sémantique : l'importance des contextes en factorisation, est une belle surprise. Je ne m'attendais pas à élargir autant mon cadre des explorations sémantiques. Ceci démontre une fois de plus la richesse de la recherche collaborative, alors que les enseignants apportent beaucoup à ce projet.

4.2.3 Épisode II : Les représentations en forme, la deuxième exploration sémantique

La recherche des dimensions de figures planes et même de solides occupe une place importante dans le chapitre de la factorisation dans les écoles, comme il a été possible de le discerner avec la situation-problème de *L'enclos* et dans la section 4.2.2 précédente traitant des contextes. Il faut aussi se rappeler qu'Annie et Francis abordent rapidement cet élément dans leur enseignement respectif. Ils illustrent la factorisation comme étant la recherche des mesures des côtés d'un rectangle dont on connaît l'aire, mais sans toutefois manipuler ces représentations que l'on pourrait qualifier de visuelles **(2, b)**. Les cours suivants des séquences des deux enseignants se concentrent sur les techniques de factorisation et leur application **(habiletés 1 et 2)**. Par contre, les rencontres de co-situation m'ont permis de mieux connaître les enseignants participants et mes analyses m'amènent à conclure la chose suivante : ils semblent ouverts et curieux face aux représentations visuelles (et géométriques) pour l'enseignement de la factorisation. J'ai donc eu l'opportunité de présenter les représentations en forme à Annie et Francis **(2, c)**, qui, je le rappelle, ont été développées a priori par moi-même à la suite d'une analyse des avancées en recherche sur le sujet (voir chapitre 2).

Les représentations visuelles

Nos discussions autour des contextes que les enseignants qualifient de « géométriques », c'est-à-dire les contextes qui concernent l'aire et le volume, ont permis de soulever que plusieurs élèves éprouvent des difficultés à faire le lien entre la factorisation et la recherche des dimensions de figures planes ou de solides. J'ai donc profité de l'occasion pour pousser cette réflexion avec les enseignants et leur proposer quelque chose qui, selon la recherche et moi-même, permettrait d'aider les élèves à ce sujet : les représentations en forme. Pour commencer, nous nous sommes lancés dans l'exploration des représentations visuelles telles que présentées dans le cadre conceptuel de ce mémoire **(2, b)**. Les enseignants n'étaient pas du tout familiers ni avec les tuiles, ni avec la méthode du rectangle. Ils n'avaient jamais utilisé les représentations visuelles pour enseigner la factorisation, ou même tout autre concept mathématique. J'ai donc proposé aux enseignants d'insister sur cette analogie entre la factorisation et la recherche des dimensions d'un rectangle au début de l'enseignement-apprentissage de ce concept à travers les représentations visuelles. Nous avons alors comparé ensemble les tuiles algébriques et la méthode du rectangle, en s'appuyant sur les figures 2.6 et 2.7 représentant la factorisation du polynôme $x^2 + 5x + 6$.

Les enseignants ont tout de suite démontré un intérêt marqué pour les représentations visuelles. À ce titre, Annie s'est exclamée « c'est sûr que ça donne du sens à un élève ça! ». Une fois que nous avons fait le tour des tuiles algébriques, j'ai introduit la méthode du rectangle aux enseignants comme étant une simplification des tuiles, comme une façon plus rapide et efficace de travailler avec le visuel. Mais, à ma plus grande surprise, ils ont préféré de loin les tuiles algébriques pour faire manipuler les élèves. Ils soutiennent que la méthode du rectangle serait trop complexe pour ces derniers, alors qu'il peut devenir ardu de bien séparer le terme en x pour pouvoir construire un rectangle.

Chercheuse : C’est ça un peu le questionnement que moi je vous apporte. C’est ce qu’il y a dans la recherche. Est-ce que c’est quelque chose [les représentations visuelles] qui, peut-être, qui vaudrait la peine d’être exploitée? Je voulais vous montrer les tuiles, mais si vous changez de bord, c’est le même polynôme, mais avec la méthode du rectangle. Les tuiles algébriques c’est beaucoup de matériel, c’est juste qu’il y a des limites, parce que je ne sais pas moi si ton trinôme il a $25x$, c’est parce qu’il faut que tu dessines 25 petits rectangles. Donc la méthode du rectangle vient un peu contrer cet effet-là, de lourdeur algébrique si on veut.

Francis : Donc tu as déjà des paquets de fait.

[…]

Chercheuse : La méthode du rectangle c’est vraiment la même chose que les tuiles, c’est ça, c’est juste qu’on va travailler avec des plus gros paquets, finalement, pour se faciliter la vie. Ça, c’est un autre débat : est-ce qu’on part des tuiles en premier parce que, je ne sais pas si c’est plus simple, mais tu représentes tous les x avec les tuiles, mais pas dans la méthode du rectangle. Est-ce que c’est de partir des tuiles vers la méthode du rectangle parce qu’on se simplifie la vie après?

Annie : Ouais, mais l’élève est-ce qu’il est capable de le faire par lui-même la méthode du rectangle?

Chercheuse : J’aurais tendance à dire que oui si on leur montre. Oui ils seraient capables d’après moi. Je ne sais pas. Au pire de rester sur les tuiles?

Annie : C’est parce que la méthode du rectangle…

Francis : Tu as moins de morceaux à placer.

Annie : Oui, sauf que pourquoi ils se dessinent un rectangle de $3x$ puis de $2x$, pourquoi ils ne se dessinent pas un rectangle de $5x$, parce que c’est marqué $5x$ en bas.

Chercheuse : Mais ils vont le faire en premier le rectangle de $5x$. L’idée de la méthode du rectangle c’est en fait, ça se peut, bien ça dépend des élèves, il y en a qui vont trouver ça plus rapide d’y aller direct avec les tuiles ou même de faire la méthode du rectangle. Mais c’est que, en fait, tu vas toujours, bien c’est sûr qu’au début peut-être qu’effectivement le $5x$ va apparaître, mais quand tu commences à faire des exemples, tu te rends compte que ton $5x$ va toujours être séparé en deux. […] Mais avec le « produit somme » on finit par partir d’un trinôme, et on va séparer le terme en x finalement pour avoir quatre termes après. Et après ça on va factoriser. Au début ça peut être difficile, mais l’idée c’est qu’avec la méthode du rectangle, ça se peut qu’il y ait des essais. Ça se peut que tu l’essaies.

> Annie : C'est clair! Parce que là tu as un 6 puis là tu as un 3 fois 2, mais ça aurait pu être un 1 fois 6. C'est correct parce que là c'est un 6. Mais mets un 36 là, il y a ben de la possibilité. Donc selon moi, ça peut expliquer visuellement d'où ça vient, mais je ne pense pas que ça peut aider les élèves de partir de la factorisation à trouver la réponse.

Grâce à la suite de nos discussions, nous sommes arrivés à la conclusion co-construite suivante : la méthode du rectangle serait plus efficace pour montrer pourquoi la factorisation et ses techniques fonctionnent en grand groupe que pour aider les élèves à factoriser des polynômes[44]. Bien que la recherche soutienne que la méthode du rectangle est mieux adaptée que les tuiles algébriques, les enseignants soulèvent le fait qu'elle serait trop complexe pour les élèves. En ce sens, il serait préférable que ce soient les enseignants qui manipulent pour montrer la méthode du rectangle à l'avant de la classe, dans la visée de donner du sens à ce que font les élèves quand ils factorisent et pour montrer d'où viennent les techniques de factorisation **(1, e)**.

Cette conclusion est surprenante, alors que la recherche ne va pas du tout dans ce sens. Des études comme celles de Simon (2013) m'ont convaincu des avantages de la méthode du rectangle face aux tuiles algébriques pour les élèves. Cependant, les contraintes et les préoccupations des enseignants nous ont amené à penser la méthode du rectangle différemment. Sans la mettre de côté, loin de là, la méthode du rectangle devrait plutôt être manipulée par les enseignants, et non par les élèves. Elle prend alors un statut différent, mais tout aussi important pour donner du sens à la factorisation.

En contrepartie, les tuiles algébriques constituent éventuellement un meilleur outil pour les élèves selon les enseignants. Annie propose l'utilisation de tuiles algébriques

[44] Les enseignants insistent principalement sur le fait de donner du sens au « produit somme ». Nous avons donc parlé à plusieurs reprises de ce *truc*, alors que la méthode du rectangle permettrait de montrer aux élèves pourquoi il fonctionne.

virtuelles, ce qui serait plus pratique et plus simple pour la réalité de la classe du secondaire actuelle (pas de matériel nécessaire de cette façon). Que ce soit sur ordinateur ou sur cellulaire, les élèves auraient la chance de manipuler eux-mêmes les tuiles. Les enseignants pourraient aussi projeter les tuiles au tableau pour montrer leur fonctionnement et faire des exemples avec les élèves. Du même coup, cette idée vient contrer une problématique soulevée par Francis, qui stipule que les élèves ne seraient pas à l'aise avec des dessins, qui ne seraient pas nécessairement à l'échelle.

Je ne croyais pas du tout que ce serait une préoccupation des enseignants. Pour moi, des dessins sont suffisants pour permettre une représentation visuelle des objets mathématiques en jeu pour factoriser. Je n'avais pas pensé au fait que les élèves pourraient être dérangés par le fait que ce ne serait pas parfaitement à l'échelle. Ceci démontre une nouvelle fois l'avantage d'une co-construction et l'importance de l'apport de tous les partenaires de la recherche.

Les représentations géométriques

Par la suite, nous nous sommes penchés sur les polynômes comportant des coefficients négatifs. J'ai d'abord montré la figure 2.8 aux enseignants, qui représente la factorisation du polynôme $2x^2 - 5x - 3$ avec la méthode du rectangle **(2, b)**. D'emblée, ils n'avaient pas l'air convaincus de la pertinence d'utiliser la méthode du rectangle de cette façon, si bien que Francis s'est exclamé : « Est-ce que l'élève aurait le réflexe de mettre les *tuiles* à l'intérieur? ». Nous avons donc laissé de côté la méthode du rectangle très rapidement pour s'attarder aux représentations géométriques **(2, a)**, qui permettent justement le retrait et la manipulation d'aires. La figure 2.9 a été utilisée pour montrer ce qui se passe avec les représentations géométriques pour factoriser le polynôme $2x^2 - 5x - 3$. Tout comme moi, les enseignants ont tout de suite été plus interpelés par les représentations géométriques lorsqu'il est question de coefficients négatifs. Nous avons ensuite regardé la représentation géométrique d'une différence de carrés grâce à la figure 2.5 illustrant la factorisation du binôme $x^2 - 9$.

> Chercheuse : Est-ce que ça, bon je laisse un peu le « produit somme » de côté, j'embarque sur la différence de carrés. Est-ce que le faire [montrer la différence de carrés avec les représentations géométriques], est-ce que c'est quelque chose que vous feriez? Juste un exemple, je ne sais pas.
>
> Annie : Bien c'est intéressant de le montrer en exemple, tout à fait, oui.
>
> Francis : Oui, $x^2 - 9$ au-delà d'une expression algébrique c'est quoi visuellement. Parce que tu sais l'aspect visuel de la chose dans tout ce qu'on fait de factorisation on est très axé sur, on trouve un sens qui ne se voit pas. On leur dit « ça représente ci, ça représente ça », mais on ne le voit jamais vraiment visuellement c'est quoi $x^2 - 9$.

Les représentations géométriques auraient donc la même fonction que la méthode du rectangle : montrer aux élèves pourquoi la factorisation et ses techniques fonctionnent, mais cette fois-ci pour les polynômes avec des coefficients négatifs. Dans les deux cas, les enseignants et moi-même sommes persuadés que les représentations en forme (qui incluent les représentations visuelles et géométriques, je le rappelle) pourraient servir à donner du sens au concept de la factorisation pour les élèves du secondaire **(2, c)**. En plus, comme les contextes sont majoritairement « géométriques » dans ce chapitre (voir section 4.2.2), elles aideront assurément les élèves à travailler en contexte, autant pour modéliser une situation grâce à la factorisation **(5, a)** que pour réfléchir à la forme que doit prendre la factorisation dans le contexte **(5, b)**.

Bien que les enseignants croient que les élèves pourraient manipuler des tuiles algébriques virtuelles pour les aider à factoriser, les représentations en forme seraient, au final, mieux adaptées pour être manipulées par les enseignants. L'une des raisons derrière cette conclusion est la présence de la contrainte du temps. Il serait plus rapide et plus efficace pour eux de faire les manipulations en grand groupe. Bien que ceci diffère de ce qui se trouve dans la recherche, c'est un résultat très intéressant qui se *situe à la croisée des deux mondes : celui de la recherche et celui de la pratique enseignante.*

En revanche, il est important de mentionner que les représentations en formes possèdent une limite. Nous en avons discuté lors de cette première rencontre réflexive, et nous nous entendons pour dire que leur utilisation pourrait devenir lourde et trop exigente en termes de temps si elles sont présentes du début à la fin de l'enseignement-apprentissage de la factorisation. Il serait préférable de les utiliser en début de chapitre. Les élèves qui en sentiront le besoin pourront continuer de s'y référer, alors que les autres pourront passer à autre chose. Comme Annie l'a dit, ce ne sont pas tous les élèves qui accrocheront là-dessus. Par contre, si une introduction avec les représentations en forme a été faite avec toute la classe, les enseignants pourront les réinvestir avec les élèves qui ont des difficultés pour la suite, soit en petits groupes ou de manière individuelle.

Le lien entre la factorisation et le développement

Les deux enseignants font le lien entre le développement algébrique et la factorisation de polynômes **(1, a)** pour introduire la factorisation aux élèves (voir sections 4.1.1 et 4.2.1). Ils sont revenus sur ce point lors de la rencontre réflexive, en mentionnant que c'est la meilleure façon qu'ils ont trouvée pour donner du sens à la factorisation jusqu'à maintenant. Toutefois, ils ajoutent que ce lien tend à être oublié et mis de côté au fur et à mesure que les élèves avancent dans le chapitre. Comme nous venions de discuter des représentations en forme, j'ai lancé l'idée qu'elles pourraient permettre de renforcer ce lien bidirectionnel qu'Annie et Francis trouvent très important. Leur réponse fut immédiate : effectivement, la méthode du rectangle et les représentations géométriques devraient être une belle façon d'insister sur ce lien, alors qu'on peut rattacher la factorisation à la recherche des côtés d'un rectangle et le développement à la redécouverte de l'aire de ce rectangle. Ceci permettrait aussi de montrer l'équivalence entre la forme factorisée et la forme développée du polynôme en jeu **(habileté 4)**.

Retour sur l'ordre de présentation des techniques de factorisation

Les discussions autour de la deuxième exploration sémantique m'ont permis de revenir sur l'ordre de présentation des techniques de factorisation avec Annie et Francis. En fait, il faut se rappeler que les deux enseignants n'ont pas la même approche à ce sujet, alors que Francis enseigne le « produit somme » comme une technique englobant toutes les autres, c'est-à-dire qu'entre autres, la différence de carré et le trinôme carré parfait ne sont que des cas particuliers du « produit somme » à ses yeux (voir section 4.1.2). Pour Annie, le « produit somme » est plutôt la dernière chose à essayer pour factoriser un trinôme, elle qui enseigne d'abord l'application des identités algébriques remarquables, au contraire de Francis (voir section 4.1.1).

Par contre, les représentations en formes semblent permettre de montrer, par exemple, qu'un trinôme carré parfait n'est qu'un cas particulier de factorisation (et du « produit somme ») où la figure en jeu est un carré au lieu d'un rectangle. Dans cet ordre d'idées, j'ai demandé à Annie si elle conserverait son ordre de présentation des techniques de factorisation si elle décidait d'utiliser les représentations en forme en début de chapitre. Après quelques hésitations, elle mentionne que oui en effet, elle pourrait adhérer à la façon de voir les techniques de factorisation de Francis et commencer par l'enseignement du « produit somme ». À la lumière de ce qui précède, c'est l'ordre de Francis que nous retenons pour la suite.

Encore une fois, il est intéressant de soulever qu'Annie remet en question certains aspects de son enseignement de la factorisation grâce à nos discussions autour des explorations sémantiques. Je suis agréablement surprise de l'impact que ces dernières *peuvent avoir sur les choix pédagogiques des enseignants participants. On voir déjà se dessiner quelques retombés du projet!*

4.2.4 Épisode III : La factorisation au maximum, la première exploration sémantique

Au secondaire, la factorisation possède des caractéristiques bien particulières qui lui sont propres (voir section 2.1.1), dont la prévalence de coefficients entiers ou décimaux familiers des polynômes à factoriser. Comme mentionné lors de l'analyse de la rencontre de co-situation avec Francis (voir section 4.1.2), cette particularité possède une implication importante : l'apparition de la factorisation unique et au maximum. Par contre, cette factorisation au maximum ne semble pas être présente en tout temps, du moins c'est ce que suggère la résolution de la situation-problème de *L'enclos.* Je me suis alors demandé si les enseignants ont l'habitude de travailler des polynômes qui possèdent plusieurs formes factorisées avec les élèves ou s'ils s'en tiennent à l'enseignement d'une factorisation unique et maximale. J'ai questionné les enseignants à ce sujet, et voici l'analyse de nos discussions.

D'emblée, Annie et Francis ont tenu à mentionner que les élèves n'ont pas de difficulté à factoriser au maximum lorsque c'est demandé. En fait, cet enjeu de factorisation au maximum est principalement présent dans les exercices de routine, les exercices sans contexte où les élèves n'ont qu'à choisir et appliquer les bonnes techniques de factorisation **(habiletés 1 et 2)**. À ce moment-là, les élèves savent qu'il n'y a qu'une seule réponse possible pour la factorisation d'une expression algébrique et que c'est celle au maximum **(1, b)**.

Les problèmes surviennent encore lorsqu'il y a des contextes ou du concret. Comme on a pu le voir avec la CD1 de *L'enclos* (voir section 4.2.1), plusieurs élèves tentent de factoriser l'aire de l'enclos le plus possible, alors qu'il n'est pas nécessaire de le faire

– voir qu'il est même préférable de ne pas le faire – dans cette situation précise. Annie affirme d'ailleurs qu'elle n'insiste pas vraiment sur la factorisation au maximum dans son enseignement, à part si c'est dans les consignes de la question. Elle tente le plus possible de lier la factorisation au contexte lorsqu'il y en a un. C'est donc seulement en contexte **(5, b)** que l'on peut retrouver plusieurs formes factorisées pour un même polynôme, ou bien des factorisations qui ne seraient pas au maximum **(1, b)**.

La problématique semble résider dans le fait que les élèves sont habitués de factoriser au maximum, car c'est ce qui leur est demandé de faire le plus souvent dans le chapitre de la factorisation. Lorsqu'ils arrivent en contexte, ils n'ont donc pas développé le réflexe de réfléchir s'ils doivent factoriser au maximum ou pas. On revient encore une fois à l'importance des contextes dans l'enseignement de la factorisation. Cette cinquième et nouvelle exploration sémantique m'apparait centrale dans la compréhension des élèves face à la factorisation.

Dans l'ensemble, les enseignants soutiennent qu'en plus d'exemples numériques (voir figure 4.2) pour montrer qu'il peut exister plusieurs couples de facteurs pour un nombre **(1, d)**, ils font quelques exemples avec les élèves où un polynôme possède plusieurs formes factorisées comme c'est le cas dans la situation-problème de *L'enclos*, mais sans plus. Ils traitent vraiment ce sujet quand c'est nécessaire, c'est-à-dire quand les élèves sont confrontés à une situation contextualisée qui admet plusieurs factorisations possibles pour une expression algébrique. Dans cette optique, nous nous sommes entendus pour dire que ce qui donnerait du sens aux élèves, c'est plutôt de comprendre si une factorisation se doit d'être maximale ou pas selon le contexte **(5, b)**, et non de comprendre qu'elle n'est pas nécessairement unique **(1, b)**.

Les polynômes qui ne se factorisent pas

L'une des composantes de la première exploration sémantique est le fait de comprendre pourquoi un polynôme ne se factorise pas **(1, c)**. Or, avec l'existence de la factorisation unique et maximale qui est demandée aux élèves surtout dans les exercices de « drill », je me suis demandé si les élèves rencontraient des polynômes qui ne se factorisent pas, alors que la question semble être toujours « factorise les polynômes suivants ». En fait, Annie et Francis m'ont confirmé que les élèves n'avaient jamais à reconnaître qu'une expression ne se factorise pas **(habileté 3)**. Ce serait une perte de temps de le faire selon Francis. Comme le soutiennent les enseignants, dans la tête des élèves, s'ils arrivent à une réponde impossible, c'est qu'ils se sont trompés quelque part. Ils éprouvent déjà des difficultés pour ce chapitre, il est donc inutile d'ajouter cet obstacle.

En contrepartie, les élèves possèdent des outils limités pour factoriser des polynômes, et donc pour tester s'ils se factorisent ou pas. Ils s'en tiennent au « produit somme », aux mises en évidence simple et double et aux identités algébriques remarquables (différence de carrés et trinôme carré parfait). Malheureusement, la complétion du carré, qui permet pourtant de factoriser un plus grand nombre de polynômes, n'est pas vraiment enseignée en SN de la quatrième secondaire, car elle n'est pas évaluée à l'examen ministériel de fin d'année. Et ce, même si elle est présente dans le PFEQ[45].

4.2.5 Des contraintes et préoccupations des enseignants

Plusieurs contraintes et préoccupations de la pratique ont dû être prises en considération tout au long de la rencontre. D'emblée, Annie et Francis ont fait référence au manque de temps qu'ils éprouvent généralement en classe. C'est l'une des contraintes les plus

[45] Les deux enseignants affirment montrer la complétion du carré quand même, car ce sera une technique importante pour les élèves qui continueront en mathématiques au cégep **(4, d)**.

importantes pour eux, ce qui fait en sorte que nous l'avons toujours prise en compte dans nos co-constructions.

La contrainte du temps n'est pas du tout une surprise pour moi. Je m'attendais à ce qu'elle soit évoquée par les enseignants, alors que je suis parfaitement consciente que c'est un enjeu important et préoccupant pour eux.

C'est d'ailleurs ce facteur temps qui contraint les enseignants à bien sélectionner leurs interventions en classe pour donner du sens aux concepts mathématiques. À ce sujet, Annie mentionne prendre plus le temps pour aborder le sens avec les élèves qui en ont réellement besoin, et ce surtout en soutien individuel (et en petit groupe) ou en récupération sur l'heure du midi. Pour les autres élèves, ce serait superflu, comme elle le soutient lorsqu'elle décrit les deux types d'élèves qu'il est possible de retrouver dans la séquence SN de la quatrième secondaire en mathématiques (voir section 4.1.1). En fait, certains élèves comprennent assez rapidement ce qu'ils ont à faire et ne s'intéressent tout simplement pas au sens derrière les concepts mathématiques appris. Ils sont capables d'appliquer les techniques de factorisation **(habiletés 1 et 2)**, par exemple, alors pourquoi vouloir comprendre le sens? Toutefois, il faut garder en tête que plusieurs élèves en ont besoin et c'est l'une des raisons qui fait en sorte qu'il faut s'attarder au sens des concepts mathématiques quand même en tant qu'enseignant. En plus, Francis mentionne qu'il est important de montrer aux élèves d'où proviennent les formules et les techniques enseignées, alors qu'elles ne sont pas « tombées du ciel ».

> Annie : Au-delà de manquer de temps, il y a un facteur de manque d'intérêt de la part des élèves de comprendre le sens. Moi là, au secondaire le sens ne m'intéressait pas du tout. Je comprenais, pourquoi j'aurais à avoir…Je suis capable de l'appliquer, je le comprends, fais que pourquoi j'ai besoin d'un sens. Ça ne me donne rien. Mais il y a des élèves qui, eux autres, recherchent ce sens-là. Fais que j'ai l'impression que si tu vas trop loin dans ta recherche de sens, donner du sens. Ben encore là tu as une dizaine d'élèves qui encore là ils sont

> capables de l'appliquer, tu sais il y en a des élèves qui disent ça parfois« donne-moi la recette », « donne-moi le *truc* ».
>
> […]
>
> Francis : Tu vois moi je ne me suis jamais buté à ça. Moi j'ai toujours persisté à leur dire d'où ça vient, en leur disant « regarde, l'important ce n'est pas que tu retiennes toute la démarche, je veux juste que tu saches que regarde, si on est partie d'une forme canonique pour la parabole voici comment on est arrivé à la forme factorisée, voici les étapes. C'est tout. Je veux juste te dire que ce n'est pas une lubie, ce n'est pas une invention… »
>
> Chercheuse : C'est ça, je pense que c'est quand même notre travail de prof d'au moins…ce serait plate si on faisait juste « allo voici les recettes ».
>
> Annie : Oui et je l'explique, je le montre comment le faire, mais je le sais qu'il y a une grande majorité de mes élèves qui sont comme « je m'en fous ».

Il est possible de retrouver ces contraintes et préoccupations dans tous les épisodes précédents, que ce soit de manière explicite ou implicite dans le discours d'Annie et Francis. De fait, elles teintent constamment les choix pédagogiques des enseignants, et donc, par le fait même, les co-élaborations de cette recherche collaborative.

4.2.6 Synthèse et conclusions de l'analyse de la première rencontre réflexive avec les enseignants

Cette première rencontre réflexive de co-opération avec les deux enseignants participants a été très enrichissante et je salue d'ailleurs la grande implication d'Annie et de Francis dans les discussions. Nous sommes déjà parvenus à co-élaborer certaines interventions pour donner du sens à la factorisation, qui se traduisent pour le moment en une séquence d'enseignement. Je reviendrai sur cette séquence un peu plus loin. Les lignes qui suivent proposent donc une synthèse de ce qui ressort de la première rencontre réflexive ainsi que les conclusions que nous retenons pour la suite.

Dans un premier temps, Annie et Francis ont apporté quelque chose de nouveau, quelque chose à laquelle je n'avais pas pensé du tout (et que je n'ai pas soulevé dans la recherche) dans l'élaboration du cadre conceptuel des explorations sémantiques, et c'est l'importance des contextes, ou du concret, dans l'enseignement-apprentissage de la factorisation (voir section 4.2.2). Cette cinquième exploration sémantique co-construite est au cœur des préoccupations des enseignants et s'y attarder serait une façon de donner du sens à la factorisation. Deux composantes se démarquent autour de celle-ci : amener les élèves à modéliser une situation grâce à la factorisation **(5, a)** et faire réfléchir les élèves sur la forme que doit prendre la factorisation d'un polynôme en contexte **(5, b)**. En plus, nos discussions par rapport à la factorisation unique et maximale (voir section 4.2.4) nous ont amenés à lier intimement cette composante de la première exploration sémantique aux contextes, car ce n'est qu'en contexte que les élèves peuvent rencontrer différentes formes factorisées pour un même polynôme. Ce serait donc en donnant du sens à la factorisation dans le contexte qu'il serait possible pour les élèves de bien comprendre pourquoi dans certaines situations on factorise au maximum et pourquoi dans d'autres on ne le fait pas et on retrouve plusieurs possibilités pour une factorisation **(1, b)**.

Dans un deuxième temps, j'ai à mon tour eu l'occasion de présenter quelque chose de nouveau aux enseignants (voir section 4.2.3). Il s'agit des représentations en forme **(2, c)**. La deuxième exploration sémantique est celle qui a occupé le plus nos discussions lors de la première rencontre réflexive. Voici les résultats de notre co-élaboration sur le sujet. Pour donner du sens à la factorisation, il serait tout d'abord important de travailler les représentations en forme dès le début de l'enseignement de la factorisation. D'une part pour présenter l'analogie entre la factorisation et les recherches des dimensions d'un rectangle dès le départ aux élèves et ainsi permettre un réinvestissement tout au long du chapitre et d'autre part, pour que les représentations en forme soient vraiment utilisées pour aider la compréhension des élèves et non qu'elles soient perçues comme un simple outil pour factoriser. Nous avons ensuite conclu qu'il serait préférable que ce soient les enseignants qui manipulent la méthode du rectangle **(2, b)** ainsi que les représentations géométriques pour les polynômes à coefficients négatifs **(2, a)**. Le tout dans le but d'expliquer efficacement ce qu'est la factorisation, d'où viennent les techniques et pourquoi elles fonctionnent **(1, e)**. Également, les représentations en forme pourraient être une occasion d'insister sur le lien bidirectionnel entre la factorisation et le développement **(1, a)**, qui est déjà une façon efficace selon eux de donner du sens à la factorisation, et par le fait même insister sur la notion d'expressions équivalentes **(habileté 4)**. Les enseignants soutiennent que le visuel et le géométrique pourraient permettre de conserver ce lien important grâce aux parallèles possibles entre le « visuel » et le côté algébrique, alors qu'il est normalement écarté rapidement dans les classes d'Annie et de Francis.

Dans un troisième et dernier temps, avec l'apport de chacun des partenaires de la recherche et grâce à nos discussions autour des trois épisodes de cette première rencontre de co-opération, nous avons été en mesure de co-construire le début d'une séquence d'enseignement pour donner du sens à la factorisation. Et ce, tout en prenant en considération les contraintes et les préoccupations des enseignants mentionnées plus haut. L'extrait suivant représente le point tournant de la co-élaboration de la séquence.

> Annie : L'erreur que je fais c'est justement de montrer la technique sans sens, et après de donner des exercices qui ont un sens, bien en fait qui ont un contexte. Fait que on montre la technique « voici c'est comme ça que je fais », puis là après tu prends cette technique-là, tu la donnes en exemple, puis là dans les exemples il y a un contexte. Tandis que si on commençait par ça, tu sais en disant $x^2 - 9$, de montrer un sens [avec les représentations en forme], puis là de dire « on ne va pas faire ça à chaque fois, ça va être trop long! Il y a une technique plus rapide que de faire ça à chaque fois, voici la technique. » Puis là après tu leur mets dans un contexte.
>
> Chercheuse : Tu penses que c'est quelque chose qui pourrait les aider?
>
> Francis : Ce serait une séquence plus complète.
>
> Annie : Plus logique. Ouais exactement. De donner un sens pour ensuite donner une technique pour aller mettre un contexte.
>
> Francis : Puis là la technique devient un gain de temps. Et en général c'est quand même une approche tu sais qui revient souvent quand tu enseignes les maths. Tu

> dis « regarde je vais te montrer quelque chose de plus rapide, parce que là toujours repartir de la réflexion du début, ça prend du temps, fais que regarde, on va tendre vers quelque chose de plus efficace. »
>
> Chercheuse : Je suis totalement d'accord avec vous, puis je suis d'accord qu'il est impossible de faire ça [utiliser les représentations en forme] de A à Z. Parce que la factorisation, ça reste une forme d'écriture qui existe pour quelque chose, on veut être capable de la manipuler, de la réinvestir.

Plus tôt dans la rencontre, nous avions statué qu'il serait préférable de commencer l'enseignement de la factorisation avec des contextes (voir section 4.2.2). Par contre, le travail sur les représentations en forme a fait en sorte de remettre en question ce préalable. Sans les mettre de côté, loin de là, les enseignants suggèrent de proposer des situations contextualisées encore après l'enseignement des techniques, comme ils le font normalement dans leur enseignement. Le tout parce que les enseignants commenceraient à donner du sens à la factorisation avec les représentations en forme en début de chapitre, et que ces représentions aideraient justement les élèves lorsqu'ils travailleraient en contextes par après. Dans cette optique, nous avons conclu qu'il serait mieux de débuter l'enseignement de la facorisation par les représentations en forme, pour ensuite enseigner les techniques de factorisation aux élèves et terminer avec des situations contextualisées.

Voici maintenant, dans le tableau 4.2 suivant, plus de détails concernant la séquence d'enseignement co-construite jusqu'à présent. Il contient les étapes de cette séquence ainsi que les composantes des explorations sémantiques et les habiletés qui sont mises de l'avant à chacune des étapes, qui sont celles que l'on pourrait qualifier de « principales ». J'ai aussi inclus celles qui sont présentes plutôt en arrière-plan, que j'appellerai « secondaires ».

Tableau 4.2 Début de la séquence d'enseignement de la factorisation pour donner du sens à ce concept

Étapes de la séquence d'enseignement	**Composantes des explorations sémantiques et habiletés « principales »**		**Composantes des explorations sémantiques et habiletés « secondaires »**	
1. Donner du sens à la factorisation avec les représentations en forme et son lien avec le développement.	(2, a) (2, b)	Utilisation de la méthode du rectangle (polynômes à coefficients positifs) et des représentations géométriques (polynômes à coefficients négatifs) par les enseignants pour montrer aux élèves ce qu'est la factorisation.	(1, d)	Des exemples numériques sont présents pour aborder le concept de facteurs avec les élèves.
	(1, a)	En tout temps, insister sur le lien bidirectionnel entre la factorisation et le développement grâce aux représentations en forme, en rattachant la factorisation à la recherche des dimensions d'un rectangle et le développement à la redécouverte de l'aire de ce rectangle.	Habileté 4	Le lien entre la factorisation et le développement sous-entend l'équivalence entre la forme factorisée et la forme développée d'un polynôme.
2. Une à la fois, montrer les techniques de factorisation avec les représentations en forme, puis algébriquement, car c'est plus rapide et plus efficace.	(2, c) (1, e)	Utilisation des représentations en forme par les enseignants pour montrer aux élèves d'où viennent les techniques de factorisation et pourquoi elles fonctionnent.	(1, d)	Des exemples numériques sont présents pour aborder le concept de facteurs avec les élèves.
	Habileté 1	Cette habileté est très importante pour les enseignants. Les élèves doivent être en mesure d'appliquer les différentes techniques de factorisation de manière algébrique.	Habileté 2	Lorsque les techniques de factorisation sont mélangées, les élèves doivent choisir une technique adéquate pour factoriser un polynôme.

3. Continuer de donner du sens à la factorisation en mettant les élèves face à la résolution de situations contextualisées.	(5, a) (5, b)	Proposer des situations contextualisées aux élèves pour les amener à modéliser des situations grâce à la factorisation et par le fait même les faire réfléchir à la forme que doit prendre la factorisation en contexte. Ceci permettrait aux élèves de développer une meilleure compréhension du concept.	Habileté 1	Les élèves doivent appliquer les techniques de factorisation même dans un contexte.
	(1, d)	Montrer aux élèves qu'un polynôme peut avoir plusieurs formes factorisées selon le contexte, c'est-à-dire qu'il peut avoir plusieurs factorisations possibles, en faisant le parallèle avec le domaine numérique. Par exemple, 36 possède plusieurs couples de facteurs, alors qu'il peut s'écrire comme étant 2×18, 4×9 ou encore 6×6.	Habileté 2	Les élèves doivent encore choisir une technique adéquate pour factoriser un polynôme en contexte.

La séquence d'enseignement que nous proposons met de l'avant le contrôle sémantique! En effet, la première et la troisième étape sont d'ordre sémantique et seulement la deuxième étape est d'ordre syntaxique. J'aime beaucoup cet effet « sandwich », alors que la recherche du sens est présente au début et à la fin. Ce constat est aussi en concordance avec les contrôles sémantique et syntaxique de la recherche, alors qu'on vise à donner du sens à la factorisation sans laisser de côté les manipulations algébriques et l'application des techniques de factorisation dans l'enseignement secondaire. Les deux contrôles sont indissociables et tout aussi importants.

4.3 Analyse de la deuxième rencontre réflexive de co-opération

Une deuxième et dernière rencontre réflexive était prévue pour cette étape de la co-opération de la recherche. Elle a permis aux enseignants et à moi-même de poursuivre puis de conclure nos discussions autour des différentes explorations sémantiques. Toujours en considérant autant les contraintes, les préoccupations et le point de vue de la recherche et de la pratique enseignante, nous avons continué de co-élaborer des interventions visant à donner du sens à la factorisation au secondaire. Avant cette deuxième rencontre, j'ai écouté l'enregistrement audio de la première rencontre réflexive[46], dans le but de relever les points qui ont été discutés et d'en faire une analyse sommaire. Ceci m'a alors permis de valider certains éléments avec Annie et Francis au début de la deuxième rencontre réflexive. Une fois ce retour fait, nous nous sommes plongés dans les deux explorations sémantiques qui n'avaient pas été abordées lors de la rencontre précédente : la résolution d'équations comme utilité de la factorisation (exploration sémantique 4 : l'utilité de la factorisation, situer le concept) et le potentiel de l'histoire des mathématiques pour l'enseignement du concept (exploration sémantique 3 : Aspect historique de la factorisation). Ces deux sujets de discussion constitueront les quatrième et cinquième « épisodes » de la recherche.

Épisode IV : L'utilité de la factorisation, quatrième exploration sémantique
Épisode V : L'histoire des mathématiques, troisième exploration sémantique

La prochaine analyse commencera donc avec un résumé du retour sur la première rencontre réflexive que j'ai mené avec Annie et Francis. Je présenterai les points importants, les validations et les ajustements qui ressortent de nos discussions. Je

---

[46] L'écoute de l'enregistrement audio de la première rencontre réflexive aura permis deux choses : (1) rédiger mes commentaires à chaud concernant la première rencontre réflexive dans mon journal de bord et (2) faire une analyse sommaire de la première rencontre réflexive pour faire un retour sur cette dernière au tout début de la deuxième rencontre réflexive (voir section 3.4.4).

détaillerai alors les deux derniers épisodes ci-dessus, en m'appuyant toujours sur la grille des explorations sémantiques (tableau 3.2) et la grille des habiletés à développer pour factoriser (tableau 3.3). Bien que les contraintes et préoccupations soulevées dans l'analyse de la première rencontre réflexive (voir section 4.2.5) se fassent toujours sentir dans cette deuxième rencontre, d'autres se sont ajoutées à ces dernières en cours de route. En ce sens, je terminerai mon analyse en explicitant ces nouvelles contraintes et préoccupations des enseignants. Pour la dernière fois, j'inclurai mes commentaires à chaud de cette rencontre, en italique (voir section 3.4.4).

4.3.1 Retour sur la première rencontre réflexive de co-opération

L'écoute de l'enregistrement audio de la première rencontre réflexive de co-opération – qui s'est déroulée avant la deuxième rencontre réflexive – m'a permis de faire une analyse sommaire de ce qui avait été co-élaboré jusque là dans cette recherche collaborative. En effet, ceci m'a donné la chance de revenir sur certains sujets avec les enseignants qui n'étaient pas tout à fait clairs pour moi ou qui manquaient de précisions. C'est dès le début de la deuxième rencontre réflexive que j'ai fait part de mes questionnements aux enseignants. Nous avons donc pris le temps de revenir sur la première rencontre dès le départ, dans le but de valider et de compléter certains éléments de la précédente rencontre. Entre autres, nous nous sommes demandé si ce que nous avions co-construit pour le moment donnait du sens à la factorisation ou plutôt à ses techniques. Nous avons aussi discuté autour de la portée des représentations en forme pour l'enseignement-apprentissage de la factorisation, pour finalement apporter quelques précisions autour des contextes et du type de situations contextualisées à prioriser en classe avec les élèves (nouvelle et cinquième exploration sémantique).

Donner du sens à la factorisation ou à ses techniques ?

Lors de l'écoute des enregistrements audios de la première rencontre, je me suis rendu compte que nous alternions entre le fait de « donner du sens à la factorisation en soi » et « donner du sens aux techniques de factorisation ». Je me suis demandé si une nuance existait vraiment entre ces deux éléments. Si la réponse est oui, elle n'est pas parfaitement définie dans nos propos. C'est pour cette raison que j'ai décidé de revenir sur le sujet avec Annie et Francis. Nos échanges me permettent de conclure la chose suivante : il semble essentiel de faire les deux, c'est-à-dire de donner du sens à la factorisation au début, puis de donner du sens aux techniques, pour montrer d'où elles viennent et pourquoi elles fonctionnent **(1, e)**. L'extrait suivant montre un exemple d'une discussion que nous avons eue autour des représentations en forme :

> Francis : Le donner du sens à la factorisation, tu sais quand on parlait que c'était mettons retrouver les dimensions à partir d'une aire, bien ça c'est donner du sens à la factorisation.
>
> […]
>
> Chercheuse : Bien là je parle du visuel et du géométrique parce que c'est de ça qu'on a parlé la dernière fois, mais même si on va sur les techniques, l'idée c'est quand même de rester toujours sur le sens de la factorisation plus au sens large, dans le sens de qu'est-ce que c'est, pourquoi ça marche, qu'est-ce qui se passe. Et après on le décortique puis on regarde manipulatoirement il y a plusieurs façons de le faire, mais on reste sur le général de la chose ?
>
> Francis : Mais probablement que la méthode du rectangle donne un sens à la technique de factorisation. Tu sais si tu pars avec, quand tu fais l'assemblage, tu as $2x^2 + 3x + 5$ mettons, puis là tu essaies de faire ton rectangle avec tes pièces du casse-tête, puis là tu arrives à dire « ah ce côté-là mesure tant, ce côté-là mesure tant. » Ça c'est une façon qui va venir confirmer ou qui va venir donner du sens à la technique de factorisation que tu utilises après pour dire « bon bien voici comment on part de cette expression algébrique là, puis qu'on retrouve les deux dimensions. »
>
> Chercheuse : Donc on fait les deux. Et la générale, et on arrive quand même à donner un sens à la technique. Ils sont capables de l'appliquer quand même, mais avec ça [la méthode du rectangle] peut-être qu'ils le voient un peu plus pourquoi la technique fonctionne.

Annie : Oui absolument.

Ce qui est intéressant, c'est que certaines composantes des explorations sémantiques permettent plus de donner du sens à la factorisation, alors que d'autres donnent plutôt du sens aux techniques de factorisation. Quelques composantes pourraient aussi donner du sens et à la factorisation, et à ses techniques, comme les représentations en forme **(2, c)**. Le tableau 4.3 suivant résume nos conclusions co-construites sur le sujet pour les composantes principales des explorations sémantiques qui ont été abordées dans la première rencontre réflexive.

Tableau 4.3 Les composantes des explorations sémantiques de la première rencontre réflexive selon si elles donneraient du sens à la factorisation ou à ses techniques

Composantes des explorations sémantiques	**Donnerait du sens au concept de la factorisation**	**Donnerait du sens aux techniques de factorisation**
Amener à reconnaître le lien entre la factorisation et le développement (1, a)	✕	
Faire des exemples numériques de factorisation (1, d)	✕	
Recours à des représentations en forme (2, c)	✕	✕
Travailler l'origine des techniques de factorisation (1, e)		✕
Proposer des situations contextualisées aux élèves (5, a et b)	✕	

Il est donc nécessaire de donner du sens à la factorisation, mais aussi à ses techniques, comme je le pensais. Les enseignants et moi-même nous entendons sur le sujet et il semblerait qu'il ne soit pas nécessaire de réellement faire une distinction entre « donner du sens à la factorisation » et « donner du sens aux techniques ». L'important est plutôt de s'assurer de faire les deux, pour aider les élèves au maximum dans leur compréhension du concept.

Les représentations en forme servent à plus que donner du sens

Dans la première rencontre de co-opération, les enseignants et moi-même avons passé beaucoup de temps à discuter autour des représentations visuelles **(2, b)** et des représentations géométriques **(2, a)**. Toutefois, nous nous sommes concentrés sur le fait qu'elles pourraient donner du sens à la factorisation, c'est-à-dire qu'elles pourraient permettre d'expliquer ce qu'est le concept et comment fonctionnent ses techniques. Au début de la deuxième rencontre, nous avons rediscuté brièvement des représentations en forme **(2, c)** et de leur portée dans la classe du secondaire. Entre autres, nous sommes revenus sur la pertinence d'utiliser les représentations géométriques pour illustrer ce qui se passe dans une différence de carrés. Dans leur enseignement habituel, les enseignants soutiennent que cette identité algébrique est trop souvent perçue comme un *truc* à apprendre par cœur. Cependant, avec les représentations géométriques, il deviendrait possible de montrer que l'on soustrait réellement un carré à un autre, que l'on prend vraiment la différence des carrés en jeu dans le polynôme à factoriser. Les manipulations géométriques de retrait et de déplacement d'aires montreraient bien, par la suite, l'égalité algébrique derrière la différence de carrés[47].

Bien que cette conclusion ci-haut soit importante, nous avons remarqué que les représentations en forme pourraient servir à plus que ça. Entre autres, elles pourraient

[47] Pour revoir un exemple de l'utilisation des représentations géométriques pour factoriser une différence de carrés (qui est celle de $x^2 - 9$), voir la figure 2.5 présente dans le chapitre 2.

aider à contrer certaines erreurs. À ce sujet, nous avons regardé l'erreur type soulevée précédemment dans la section 1.2.3 : $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Les représentations en forme devraient permettre de convaincre les élèves de l'invalidité de cette égalité algébrique − et leur permettre de reconnaître que $a^2 + b^2$ est un binôme qui ne se factorise pas **(habileté 3)** −alors que l'on peut représenter les deux côtés de l'égalité comme suit (voir figure 4.6) :

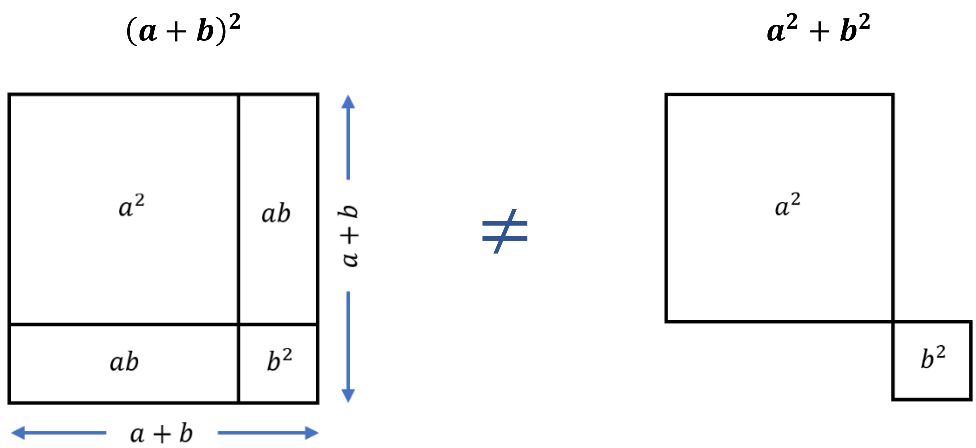


Figure 4.6 Utilisation des représentations en forme pour montrer la non-validité de l'équation $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

En plus, Francis propose que les représentations en fome pourraient agir de validation pour les élèves lorsqu'ils factorisent des polynômes plus complexes. De cette façon, une fois ledit polynôme factorisé avec l'aide des différentes techniques de factorisation, les représentations en forme pourraient éventuellement aider les élèves à valider leurs manipulations algébriques.

Lors de la première rencontre, j'ai senti que les enseignants n'étaient pas très chaud à l'idée de faire manipuler les représentations en forme aux élèves. Ils soutenaient qu'il serait préférable que ce soit eux qui les manipulent. Bien que ce soit encore le *cas dans la deuxième rencontre, Annie et Francis semblent être maintenant plus ouverts à ce que les élèves travaillent avec les tuiles algébriques, par exemple.*

La cinquième exploration sémantique : quelques précisions autour des contextes

L'écoute de l'enregistrement audio de la première rencontre réflexive m'a aussi permis de m'interroger sur ce que signifie réellement « donner du sens » pour les enseignants. Bien que nous ayons déjà abordé plusieurs approches qui, selon Annie et Francis, permettraient de donner du sens à la factorisation, jamais ils n'ont mentionné ce qu'implique pour eux donner du sens à un concept mathématique[48]. C'est en tentant de connaître leur définition à ce propos que nous avons réitéré l'importance des contextes dans le chapitre de la factorisation. De fait, nous avons confirmé que les difficultés des élèves se manifestent majoritairement lorsqu'ils sont confrontés à des situations contextualisées, et qu'il est donc impératif de travailler plus ces situations avec eux.

Nos discussions se sont centrées autour d'un court problème de périmètre faisant intervenir la factorisation. C'est Annie qui a apporté cet exemple : on demande aux élèves de retrouver l'aire numérique d'un rectangle dont l'aire algébrique est de $(15x^2 - 22x + 8)$ m^2 et dont le périmètre est de 52 m. Voici sa résolution.

1) <u>Dimensions algébriques du rectangle</u>

$$aire = 15x^2 - 22x + 8 = (3x - 2)(5x - 4)$$

Les dimensions algébriques du rectangle sont de $(3x - 2)$ m par $(5x - 4)$ m.

[48] Je reviendrai, dans la synthèse de l'analyse de la deuxième rencontre de co-opération (voir section 4.3.5), sur ce qu'entendent les enseignants par « donner du sens ». Ceci me donnera aussi l'occasion de comparer ma définition à la leur.

2) <u>Valeur de la variable x</u>

$$Périmètre = 2(longeur) + 2(largeur)$$
$$52 = 2(3x - 2) + 2(5x - 4)$$
$$52 = 6x - 4 + 10x - 8$$
$$52 = 16x - 12$$
$$x = 4$$

3) <u>Dimensions numériques du rectangle</u>

$$3x - 2 = 3 \cdot 4 - 2 = 10$$
$$5x - 4 = 5 \cdot 4 - 4 = 16$$

Les dimensions numériques du rectangle sont de 10 m par 16 m.

4) <u>Aire numérique du rectangle</u>

$$Aire = 10 \cdot 16 = 160$$

L'air numérique du rectangle est de 160 m^2.

Le premier obstacle des élèves est de trouver qu'ils doivent factoriser l'aire algébrique du rectangle qui leur est donnée dans la question pour être en mesure de connaître ses dimensions algébriques **(5, a)**. Parfois seuls ou avec un peu d'aide de l'enseignant, les élèves arrivent généralement à reconnaître qu'ils doivent le faire. Mais une fois qu'ils ont factorisé l'aire, ils ne comprennent pas ce qu'ils obtiennent grâce à la factorisation, ce qui fait en sorte qu'ils ne savent pas quoi faire ensuite avec les facteurs qu'ils ont trouvés **(5, b)**. Plusieurs élèves se retrouvent alors coincés à l'étape 1 de la résolution, alors que pourtant, une fois cette étape complétée, le reste de la résolution n'a plus rien à voir avec la factorisation. Le travail et la réflexion sur des situations contextualisées permettraient donc, encore une fois, de donner du sens à la factorisation et d'aider la compréhension des élèves par rapport à ce concept.

Une fois que nous avons eu terminé de parler du problème ci-haut, Francis a apporté un point très intéressant que nous n'avions pas soulevé auparavant en lien avec les contextes utilisés dans le chapitre de la factorisation. Il mentionne que les contextes ne doivent pas être seulement « géométriques », pour éviter de créer un automatisme chez les élèves. De fait, on veut éviter que dès qu'ils voient une situation avec l'aire ou le volume, ils se mettent à factoriser sans se poser de questions avant. Il faut amener plus loin la réflexion, comme c'est le cas avec la situation-problème de *L'enclos* par exemple (voir section 4.2.1), qui fait intervenir plusieurs formes factorisées différentes **(1, b)** mais équivalentes **(habileté 4)**, où une seule est adéquate dans le contexte.

> Chercheuse : Donc un élève quand même qui est capable, tu sais l'élève qui dans *L'enclos* le voit bien qu'il y a deux façons de l'écrire [les dimensions de l'enclos], si il est capable de raisonner et de se dire « ok mais là lui on le met le côté », de comprendre que « c'est la même affaire, mais je ne peux pas prendre les deux parce qu'il y en a juste un qui fonctionne dans le contexte ». Ce travail-là mental d'être vraiment conscient que les deux sont équivalents, les deux donnent les dimensions, mais il y en a juste un qui fonctionne dans le contexte, est-ce que cet élève-là à quand même compris un sens quelconque quand même de ce que c'est la factorisation?
>
> Annie : Oui
>
> Francis : Oui, mais je pense que, tu sais comme je disais tantôt, à un moment donné il faut aller plus loin que, tu sais comme le problème du périmètre [problème précédent], aller plus loin que juste trouver les dimensions. Un problème de même qu'un moment donné quand tu fais de la factorisation de polynômes puis que tu te rends compte que OK il y a une mise en évidence simple à faire, bien peut-être que ce qu'on devrait faire quand on est dans un contexte et qu'on voit ça, il faudrait peut-être qu'on dise à l'élève : « Là tu as un 2, puis là tu as un $x + 8$ et là un $x - 4$ mettons, bon et bien si le 2 tu l'attribues au $x + 8$ ça va te donner $2x + 16$ et $x - 4$, mais si tu l'attribues à l'autre ça va te donner $2x - 8$ fois $x + 8$. » Ça serait peut-être bien qu'ils voient si dans un contexte de problème laquelle des deux solutions a un sens.
>
> Chercheuse : Oui, tout à fait.
>
> Annie : Effectivement.
>
> Francis : Parce que souvent, quand on leur propose des problèmes de factorisation, l'aire c'est ça, tu factorises tu arrives à deux binômes et il n'y a pas de mise en évidence simple dedans. Fait qu'ils voient comme…ils ne sont pas souvent exposés à ça, cette réflexion là ils ne se la font pas souvent.

En plus de donner une plus grande place aux contextes dans l'enseignement de la factorisation, nous avons réalisé qu'il serait préférable de mettre les élèves face à des situations qui nécessitent des réflexions plus approfondies que de simplement demander les dimensions algébriques d'un carré ou un rectangle, par exemple. Car c'est dans ce type de situations contextualisées plus complexe qu'il serait possible de saisir le sens derrière la factorisation au secondaire. Malheureusement, nous n'avons pas eu le temps d'aller plus loin sur le sujet.

Cette précision me permet de pousser encore plus la cinquième (et nouvelle) exploration sémantique. Non seulement les contextes sont importants et permettraient d'aider les élèves dans leur compréhension de la factorisation, mais il est essentiel de bien choisir les situations qu'on leur présente. Le tout dans le but de faire réfléchir les élèves quant à leur choix pendant la résolution de situations contextualisées.

4.3.2 Épisode IV : L'utilité de la factorisation, la quatrième exploration sémantique

Jusqu'à maintenant, lors de la première rencontre réflexive et son retour, les enseignants et moi-même nous sommes concentrés sur le pourquoi la factorisation et ses techniques fonctionnent et même sur la façon dont elles fonctionnent. Or, nous n'avons pas encore abordé la question suivante qui, selon mon expérience, est souvent posée par les élèves du secondaire : à quoi ça sert ? De fait, nous sommes restés sur le concept même de la factorisation, sans aller vers ses prolongements et sur l'utilité qu'il pourrait avoir pour les autres concepts mathématiques **(4, a et b)**. Or, comme il est possible de le voir dans le chapitre 2, je crois que d'insister sur l'utilité de la factorisation permettrait de lui attribuer un statut différent (voir section 4.3.2). Elle pourrait alors être perçue comme un outil pour travailler d'autres concepts, et non comme une fin en soi. Et ceci permettrait possiblement de donner du sens à la factorisation pour les élèves.

J'ai fait part de la réflexion précédente aux enseignants tout de suite après le retour sur la première rencontre réflexive. C'est donc moi qui ai apporté ce nouvel élément à Annie et Francis. Sans laisser de côté tout ce qui a été discuté et co-construit dans la rencontre précédente[49], nous nous sommes plongés dans la quatrième exploration sémantique. En ce sens, j'ai débuté par énumérer les deux prolongements principaux de la factorisation de la quatrième secondaire en SN : la résolution d'équations du second degré à une variable **(4, a)** et l'étude de la fonction du second degré **(4, b)**. C'est à ce moment-là que j'ai proposé aux enseignants de mettre les élèves, en début de chapitre, devant une situation qui nécessite la factorisation pour la résoudre. Le tout dans le but de créer le besoin d'apprendre un nouveau concept pour les aider. La factorisation deviendrait alors indispensable pour les élèves.

Cette proposition vient du fait que les enseignants soutiennent qu'en dehors du chapitre de la factorisation, les élèves ont du mal à appliquer la factorisation. Comme ils ne comprennent pas à quoi elle sert réellement, il leur est difficile de la réinvestir dans les chapitres suivants. Comme Annie le dit dans sa rencontre de co-situation (voir section 4.1.1), il est possible de laisser de côté ce concept pour résoudre des équations du second degré et même pour l'étude de la fonction du second degré. Une alternative est toujours existante pour contourner la factorisation lorsqu'on sort de son chapitre. Je me suis donc demandé s'il était possible de remédier à cette situation et de lui octroyer une utilité dès le début, en la situant par rapport à ses prolongements.

---

[49] Toutes les pistes que nous explorons les enseignants et moi dans les rencontres de co-opération pourraient permettre de donner du sens à la factorisation. L'idée est de co-élaborer plusieurs interventions pour tenter d'atteindre le plus d'élèves possible. Il n'y a pas une seule façon de donner du sens aux concepts mathématiques, mais bien plusieurs. Je reviendrai sur le sujet dans la synthèse de la deuxième rencontre réflexive (voir section 4.3.5).

D’emblée, Francis affirme qu’il est fréquent de créer le besoin chez les élèves d’apprendre le prochain concept que l’on veut enseigner. C’est quelque chose qu’il fait beaucoup avec ses élèves de première secondaire.

> Francis : Ce questionnement-là de dire « regarde l’outil que je vais te montrer tu en as besoin », c’est un puissant moteur de compréhension des maths. Tu sais, puis je le sais, mettons en secondaire 1, il y a des matières plus de base ou justement on peut arriver avec ça : « voici je vais te proposer quelque chose de plus efficace, de plus économique. » Créer le besoin de ce que tu vas enseigner. Mais créer ce besoin-là pour la factorisation parce que tu ne peux pas contourner ça, puis parce que c’est un outil essentiel, je ne sais pas. Peut-être que ma connaissance des programmes n’est pas assez approfondie ou pointue, mais…parce que moi je pense que le prolongement de ça ce n’est pas au secondaire qu’on va le retrouver.

Francis démontre une certaine réticence face à ma proposition pour le concept de la factorisation. Pour lui (mais aussi pour Annie), les réels prolongements de la factorisation sont au cégep **(4, d)**. Les deux enseignants ne semblent pas convaincus qu’il est possible de lui donner une utilité en quatrième secondaire pour les deux prolongements explicités plus haut. Cependant, en faisant référence à sa séquence d’introduction de la factorisation grâce à la division d’expressions algébriques **(4, c)**, Annie partage que c’est un peu ce qu’elle tente de faire, donner une utilité à la factorisation pour les élèves (voir section 4.1.1). Par contre, elle ne crée pas tout à fait le besoin d’apprendre la factorisation à mon avis, alors qu’elle la propose plutôt comme une méthode plus rapide et plus efficace pour diviser des polynômes. Ce que j’entends par là, c’est que cette séquence n’amène pas Annie à parler d’un prolongement de la factorisation où elle sera réinvestie et nécessaire, mais bien d’un préalable déjà acquis par les élèves.

Bien que la séquence d’introduction de la factorisation d’Annie n’ait pas été retenue par les partenaires de la recherche pour donner une utilité à la factorisation, elle a permis d’entamer des discussions plus profondes sur le sujet. Je pourrais même dire *qu'elle a aidé les enseignants à laisser tranquillement de côté leur réticence face à la quatrième exploration sémantique développée dans le chapitre 2.*

La factorisation comme outil pour l'étude de la fonction du second degré

Nous nous sommes d'abord penchés sur le prolongement de l'étude de la fonction du second degré **(4, b)**. Pour être en mesure de rendre la factorisation indispensable aux yeux des élèves pour l'étude de cette fonction, nous nous sommes entendus pour dire qu'il faudrait commencer par ce chapitre, et non par le chapitre de la factorisation[50]. En effet, les élèves doivent connaître les fondements de la fonction du second degré avant de se rendre aux changements de forme de la règle de la fonction, qui est le moment où la factorisation est réinvestie (pour passer de la forme générale à la forme factorisée). C'est là que les problèmes surgissent. Une fois que la factorisation deviendrait indispensable pour continuer l'étude de la fonction du second degré, il serait nécessaire de faire une (longue) pause dans ce chapitre pour commencer celui de la factorisation. Néanmoins, les élèves seraient habitués de travailler avec des trinômes du deuxième degré à une variable qui représentent des fonctions du second degré. Il pourrait s'avérer difficile pour eux de devoir travailler avec des polynômes différents, alors qu'ils seraient en fait au cœur de l'étude de la fonction du second degré, je le rappelle. En plus, si, par exemple, on décidait d'utiliser les représentations en forme **(2, c)** pour l'amorce de la factorisation, cela représenterait une trop grosse coupure pour les élèves. Dans tous les cas, une fois le chapitre de la factorisation complété, il faudrait revenir sur la fonction du second degré pour terminer son enseignement et reprendre où on a laissé. Tout ceci dans l'optique où les élèves se souviennent ce qu'ils ont appris avant cette « pause factorisation ».

[50] Les deux enseignants possèdent la même séquence d'enseignement en quatrième secondaire en SN autour de ces sujets. Ils débutent normalement par la factorisation, pour ensuite enseigner la fonction du second degré et terminer par la résolution d'équations du second degré.

La mémoire des élèves est une contrainte des enseignants que je n'avais pas pris en considération en lien avec la quatrième exploration sémantique. Il est vrai que le chapitre de la factorisation peut prendre quelques semaines, ce qui fait en sorte qu'il devient difficile de l'intégrer à l'intérieur même d'un autre chapitre. Cela deviendrait trop lourd autant pour les élèves que pour les enseignants.

En fin de compte, nous avons conclu qu'il ne serait pas optimal de commencer par l'enseignement de la fonction du second degré pour ensuite faire une « pause factorisation ». En fait, les enseignants ont même mentionné que cela mélangerait les élèves et qu'au final, cela risquait de les confondre plus que de les aider. Nous avons alors écarté l'idée de créer le besoin d'apprendre la factorisation grâce à la fonction du second degré.

La factorisation comme outil pour la résolution d'équations du second degré

Le prolongement de la résolution d'équations du second degré **(4, a)** se distingue de celui de la fonction du second degré **(4, b)** par le fait qu'il ne demande aucune introduction à proprement parler. C'est-à-dire que les élèves n'ont pas besoin de préalables particuliers à part celui de la factorisation pour résoudre des équations du deuxième degré (alors que pour la fonction du second degré, il est essentiel de connaître ses fondements pour arriver aux formes d'écriture de sa règle). Dans cette optique, nous ne retrouvons pas les mêmes problèmes que pour le prolongement précédent. Nous nous sommes rapidement mis d'accord sur le fait qu'il semblerait que ce soit possible de créer le besoin de l'apprentissage de la factorisation simplement en mettant les élèves face à une équation du second degré qu'ils doivent résoudre pour répondre à la question d'une situation. Ceci ne constituerait pas une « pause factorisation » dans un chapitre déjà entamé, mais bien le début de celui de la factorisation. Nous avons donc co-élaboré l'ordre général suivant pour introduire la factorisation et lui donner une utilité (la résolution d'équation du second degré) dès le départ :

1. Présenter une situation qui demande aux élèves de résoudre une équation du second degré, dans le but de créer le besoin de l'apprentissage de la factorisation chez ces derniers.
2. Laisser les élèves tenter de résoudre la situation par eux-mêmes, jusqu'à ce qu'ils se rendent compte qu'il leur manque quelque chose.
3. Enseigner le chapitre de la factorisation pour combler ce besoin.
4. Revenir sur la situation en 1 et demander aux élèves de la résoudre avec les acquis qu'ils ont maintenant pour insister encore une fois sur l'utilité et la nécessité de la factorisation en mathématique.

Nous nous sommes entendus sur le fait qu'il serait préférable d'enseigner les formules quadratiques aux élèves après le chapitre de la factorisation (ou vraiment à la toute fin). Autrement, selon les enseignants, les élèves auraient tendance à n'appliquer que ces formules, sans considérer la factorisation. Ceci concorde avec ce qui a été dit dans le chapitre 2 (voir section 2.1.2), alors que les formules quadratiques ne sont pas considérées comme une technique de factorisation en soi pour ce mémoire.

Une fois cette structure en tête, il nous fallait trouver une situation adéquate pour la première étape, qui est le cœur de cette séquence. C'est sans surprise que nous nous sommes dirigés vers une situation contextualisée **(5, a et b)**. Aussi, avec toutes les discussions que nous avons eues autour des contextes et autour des représentations en forme **(2, c)**, il a été naturel pour les enseignants et moi-même de nous tourner plus spécifiquement vers une situation contextualisée à caractère « géométrique ».

C'est Annie qui a lancé la première idée : travailler avec l'aire algébrique et l'aire numérique d'un rectangle **(1, d)**, puis demander aux élèves de retrouver le périmètre de la figure. De cette façon, les élèves seraient amenés à créer une équation du second degré en mettant l'aire algébrique égale à l'aire numérique, pour ensuite retrouver (1) la valeur de la variable x et (2) les dimensions algébriques et numériques du rectangle. Une fois ces deux étapes faites, il devient possible de calculer le périmètre du rectangle. Mais ces deux étapes nécessitent la factorisation! Les élèves se retrouveraient alors devant une impasse et ils se rendraient compte qu'il leur manque quelque chose.

Ce que nous avons retenu de cette idée, c'est qu'elle est familière pour les élèves. En effet, ces derniers sont habitués de travailler avec l'aire, les dimensions et le périmètre d'un rectangle. En plus, ils savent comment résoudre ce type de problème parce qu'ils en font avec des expressions algébriques du premier degré depuis quelques années déjà selon les enseignants. En revanche, Francis est intervenu dans la discussion pour exposer un malaise face à l'idée d'Annie. Il soulève que les élèves pourraient faire des essais-erreurs pour trouver la bonne valeur de x et les dimensions du rectangle, puis résoudre la situation sans avoir besoin de la factorisation. Nos échanges sur le sujet nous ont permis de réaliser qu'en fait, il est vrai qu'ils pourraient trouver la valeur adéquate de x par tatonnage, mais il leur serait beaucoup plus difficile de retrouver les dimensions du rectangle sans la factorisation si l'aire numérique possède plusieurs couples de facteurs possibles. Et en même temps, même si les élèves réussissaient à résoudre la situation grâce à des essais-erreurs, cela leur prendrait beaucoup de temps. La factorisation arriverait tout de même comme un outil plus efficace et essentiel pour la résolution d'équations du second degré, sachant que les équations seront de plus en plus complexes.

> Francis : Moi ce que je dirais, c'est si on travaille avec ce parallèle-là algébrique et numérique, et bien il faudrait que le volet numérique ça soit une valeur où il y a plusieurs possibilités.
>
> Chercheuse : Ah oui, je suis d'accord!
>
> Francis : Ça déjà là, ça te tente moins de « gosser », parce qu'il y en a beaucoup des affaires dans la vie qui donnent 60, tu sais. Ça va rendre le « gossage » moins intéressant. Puis même s'ils trouvaient la valeur de x, ça ne donnerait pas nécessairement les dimensions de la figure, en « gossant ».

Voici maintenant la situation d'amorce qui a été co-élaborée par les partenaires de la recherche. Il m'est important de mentionner que c'est moi qui ai choisi l'aire algébrique du rectangle de la situation, en me basant sur les échanges que nous avons eus lors de la deuxième rencontre réflexive, les enseignants et moi. Somme toute, cette situation nous parait très riche et porteuse de sens pour le concept de factorisation.

> L'aire algébrique d'un rectangle est de $(2x^2 - 5x - 3)$ m². Sachant que l'aire numérique de ce rectangle est de 60 m², quel est son périmètre numérique?

1) <u>Trouver les valeurs de x</u>

$$aire = 2x^2 - 5x - 3$$
$$60 = 2x^2 - 5x - 3$$
$$0 = 2x^2 - 5x - 63$$

$$produit = 2 \cdot -63 = -126 = -14 \cdot 9$$
$$somme = -5 = -14 + 9$$

$$0 = 2x^2 + 9x - 14x - 63$$
$$0 = x(2x + 9) - 7(2x + 9)$$
$$0 = (2x + 9)(x - 7)$$

$$2x + 9 = 0 \qquad x - 7 = 0$$
$$2x = -9 \qquad x = 7$$
$$x = -4{,}5$$

2) <u>Dimensions algébriques du rectangle</u>

$$aire = 2x^2 - 5x - 3$$

$$produit = 2 \cdot -3 = -6 = -6 \cdot 1$$
$$somme = -5 = -6 + 1$$

$$aire = 2x^2 + x - 6x - 3$$
$$aire = x(2x + 1) - 3(2x + 1)$$
$$aire = (x - 3)(2x + 1)$$

Les dimensions algébriques du rectangle sont de $(x - 3)$ m par $(2x + 1)$ m.

3) <u>Dimensions numériques du rectangle</u>

On débute par rejeter la valeur négative de x de l'étape 1 parce qu'en la remplaçant dans les dimensions algébriques du rectangle, on obtient des mesures négatives. En ce sens, la valeur de x est 7.

$$x - 3 = 7 - 3 = 4$$

$$2x + 1 = 2 \cdot (7) + 1 = 15$$

Vérification : aire $= 4 \cdot 15 = 60$ m^2

Les dimensions numériques du rectangle sont de 4 m par 15 m.

4) Périmètre numérique du rectangle

$$Périmètre = 2 \cdot (longueur) + 2 \cdot (largeur) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 15 = 8 + 30 = 38$$

Le périmètre numérique du rectangle est de 38 m.

Je suis particulièrement satisfaite de la co-construction de cette situation contextualisée, alors qu'elle permettrait d'amorcer le chapitre de la factorisation sans s'attarder à la dimension syntaxique du concept. En plus de lui donner immédiatement une utilité, la situation s'insèrerait très bien dans la séquence d'enseignement que nous avons jusqu'à maintenant. Son caractère « géométrique » en lien avec un rectangle rendrait la transition vers les représentations en forme très facile! Ceci est une preuve qu'une fois de plus, les explorations sémantiques s'entrecoupent et qu'il peut être difficile de les regarder indépendamment les unes des autres.

4.3.3 Épisode V : L'histoire des mathématiques, la troisième exploration sémantique

Une fois que nous avons eu clos le sujet autour de l'utilité de la factorisation, j'ai entamé une discussion sur l'histoire des mathématiques pour l'enseignement-apprentissage du concept avec les enseignants **(3, a et b)**. Cette troisième exploration sémantique n'avait pas encore fait l'objet de réflexions dans cette recherche. J'ai alors commencé par informer les enseignants que l'histoire des mathématiques était prescrite par le PFEQ (voir section 2.5.2). Ils ont tout de suite été surpris par cette affirmation, en mentionnant qu'ils manquent déjà de temps en classe et qu'en plus, ils n'ont jamais reçu de formations sur le sujet. D'emblée, Annie et Francis ne se sentent pas outillés pour travailler l'histoire des mathématiques avec les élèves. Ils ont tout de même voulu en savoir plus par rapport à ce qui se trouve dans la recherche en didactique. En ce sens, j'ai apporté l'histoire des mathématiques plutôt comme un déclencheur dont le but est de générer le questionnement et la réflexion chez les élèves, et éventuellement d'engendrer un dépaysement épistémologique chez eux (Barbin, 1997). La recherche soutient que l'histoire pourrait permettre une reconstruction de sens de la part des élèves, ce qui les aiderait dans leur compréhension des différents concepts mathématiques.

J'ai alors eu la chance de présenter deux activités historiques à propos d'al-Khwarizmi aux enseignants. La première est la lecture d'un texte historique **(3, a)**, traduit de l'arabe par Djebbar (2005), qui contient la procédure par écrit proposée par al-Khwarizmi pour résoudre une équation du second degré du type $ax^2 + bx = c$ (voir figure 4.7 ci-dessous). Cet écrit provient d'une activité construite pour le cours d'histoire des mathématiques du baccalauréat en enseignement des mathématiques au secondaire de l'UQAM. En temps normal, elle s'adresse donc à des étudiants. L'activité complète se trouve à l'annexe G de ce document.

« Quant à la justification de "un bien et dix racines égalent trente-neuf dirhams", sa figure est une surface carrée de côtés inconnus, et c'est le bien que tu veux connaître et dont tu veux connaître la racine. C'est la surface (AB), et chacun de ses côtés est la racine. Chacun de ses côtés, si tu le multiplies par un nombre parmi les nombres, quels que soient les nombres, sera des nombres de racines, chaque racine étant comme la racine de cette surface. Comme on a dit qu'avec le bien il y a dix de ses racines, nous prenons le quart de dix – et c'est deux et un demi – et nous transformons chacun de ses quarts [en segment] avec l'un des côtés de la surface. Il y aura ainsi, avec la première surface, qui est la surface (AB), quatre surfaces égales, la longueur de chacune d'elles étant comme la racine de la surface (AB) et sa largeur deux et un demi, et ce sont les surfaces (H), (T), (K), (J). Il [en] résulte une surface à côtés égaux, inconnue aussi, et déficiente dans ses quatre coins, chaque coin étant déficient de deux et demi par deux et demi. Alors, ce dont on a besoin comme ajout afin que la surface soit carrée, sera deux et demi par lui-même, quatre fois ; et la valeur de tout cela est vingt-cinq. Or, nous avons appris que la première surface, qui est la surface du bien, et les quatre surfaces qui sont autour de lui et qui sont dix racines, sont [égales à] trente-neuf en nombre. Si on leur ajoute les vingt-cinq qui sont les quatre carrés qui sont dans les coins de la surface (AB), la quadrature de la surface la plus grande, et qui est (DE), sera alors achevée. Or nous savons que tout cela est soixante-quatre, et que l'un de ses côtés est sa racine, et c'est huit. Si on retranche de huit l'équivalent de deux fois le quart de dix – et c'est cinq –, aux extrémités du côté de la surface la plus grande qui est la surface (DE), il reste son côté trois, et c'est la racine de ce bien. »[1]

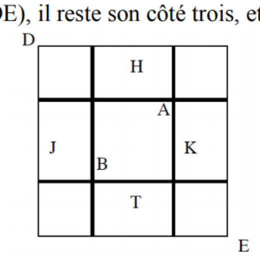


Figure 4.7 Texte historique d'al-Khwarizmi pour la résolution de l'équation du second degré $x^2 + 10x = 39$

J'ai beaucoup insisté sur le fait que la lecture de ce texte n'est pas quelque chose que je ferais faire aux élèves, loin de là. Plusieurs adaptations et modifications devraient être faites pour apporter ce texte dans une classe du secondaire. L'objectif de s'y attarder était plutôt de montrer à Annie et Francis ce qui est fait avec les futurs enseignants, en plus de leur permettre de s'engager sérieusement dans l'histoire des mathématiques. Toutefois, les enseignants ont trouvé cette tâche très difficile, ce qui a fait en sorte qu'elle ne les a pas vraiment interpelés. Nous n'avons donc pas approfondi nos discussions sur le sujet.

À cause de la complexité du texte original d'al-Khwarizmi, les enseignants n'ont pas tout à fait pris le temps de se concentrer pour décortiquer et comprendre chacune des phrases du texte. Cela n'a pas raisonné chez eux, ce qui fait en sorte qu'ils n'ont pas non plus accroché au principe de dépaysement épistémologique de Barbin (1997).

Je me suis alors tournée vers une deuxième activité plus proche du monde scolaire. Cette activité provient du manuel *Visions* (Cardin *et al.*, 2008, p. 167) et constitue une activité d'exploration pour introduire la complétion du carré à partir d'une situation à caractère historique[51] **(3, b)**. Globalement, elle porte sur le même sujet que le texte historique précédent. Ce qui les différencie énormément, c'est le niveau d'adaptation que l'on y trouve. Ce que j'entends par là, c'est que l'activité dans le manuel *Visions* ne fait que quelques allusions à l'histoire des mathématiques, alors que la notation algébrique actuelle arrive très (voire trop) rapidement et qu'on y voit qu'une seule phrase du texte original d'al-Khwarizmi (voir section 2.5.2). J'ai d'ailleurs mentionné aux enseignants que je crois qu'il est possible d'avoir un juste milieu entre les adaptations des deux activités : une activité moins complexe que la première, mais plus près de l'histoire que la deuxième.

L'histoire des mathématiques et les autres explorations sémantiques

Les enseignants rattachent beaucoup l'histoire des mathématiques à certaines composantes des explorations sémantiques que nous avons déjà abordées au cours des différentes rencontres. Spécifiquement en lien avec le contenu des deux activités antérieures, c'est la présence évidente des représentations géométriques **(2, a)** que les enseignants ont retenues. Dans les deux cas, la procédure proposée pour résoudre une équation du second degré fait référence à la complétion du carré. Pour les enseignants, ces activités pourraient permettre de montrer visuellement aux étudiants d'où vient cette technique de factorisation **(1, e)** et comment elle fonctionne. Dans la même lignée, Annie raconte qu'elle utilise l'histoire des mathématiques pour montrer d'où vient la base des logarithmes naturels (le nombre *e*) en cinquième secondaire et comment il a

[51] Cette activité est celle présentée précédemment dans la section 2.5.2 de la troisième exploration sémantique. La figure 2.12 du cadre conceptuel est un extrait de l'activité, alors que son intégralité se trouve à l'annexe A de ce mémoire.

été trouvé **(1, e)**[52]. Les élèves sont normalement intéressés et utiliseraient ce nombre par la suite en sachant un peu plus ce que c'est. Pour reprendre les termes de Francis, ceci permettrait de montrer que les mathématiques ne sont pas « tombées du ciel » et qu'il y a une histoire derrière les concepts. Somme toute, on ferait de l'histoire des mathématiques **(3, a et b)** pour montrer l'origine des mathématiques **(1, e).**

Une problématique émerge de la dernière conclusion : l'aspect historique des activités n'est pas toujours nécessaire pour arriver à cette fin. Par exemple, il est tout à fait possible de montrer d'où vient la complétion du carré seulement avec les représentations géométriques, sans faire intervenir l'histoire. Cette dernière pourrait devenir, d'une certaine façon, superflue.

L'histoire aurait une autre fonction dans les activités d'al-Khwarizmi présentées plus tôt : elle permettrait aussi de donner une utilité à la factorisation, car elle montrerait à quoi sert ce concept à la base. Dans les exemples que nous avons regardés, la factorisation sert à résoudre des équations du second degré **(4, a)**, ce qui rejoint ce que nous avons discuté dans l'épisode IV (voir section 4.3.2). D'ailleurs, les enseignants et moi-même avons soulevé qu'une activité à caractère historique pourrait agir de situation contextualisée pour faire naître le besoin de la factorisation en début d'enseignement-apprentissage du concept **(5, a et b)**.

> Chercheuse : Est-ce que d'aller vers l'histoire, est-ce que de présenter quelque chose d'un peu différent…
>
> Annie : Bien ça peut être intéressant, ils le font avec Pythagore, ils font toujours la démonstration de comment il est arrivé à ça. Tu sais c'est de montrer que tu as un carré là, puis là…Fais que oui, ça peut être intéressant pour eux de faire ça. Est-ce qu'après ça va les aider à comprendre un peu plus ce qu'ils font, moi j'ai

[52] Bien que les codes des explorations sémantiques soient en lien avec la factorisation, je me permets d'élargir la composante **(1, e)** aux autres concepts mathématiques. Elle se rattache à l'origine des formules, des techniques et des objets mathématiques au sens large.

> l'impression qu'il y a deux carcans dans leur cerveau puis ils font « ah oui c'est vrai ça c'est ça. » C'est intéressant, mais je ne suis pas sûre que ça va les aider, très honnêtement.
>
> Chercheuse : OK. Mais on parlait de l'idée d'aller prendre un contexte au début, de parler d'utilité. Est-ce que ce contexte-là pourrait être l'histoire? Ou on est mieux de rester sur un contexte plus…je ne le sais pas.
>
> Annie : L'histoire dans le fond…pourquoi on a trouvé que ça ça fonctionnait, c'est parce qu'un moment donné quelqu'un a eu un problème, il a essayé de le résoudre, puis il a fait quoi, il a fait ça. Donc oui, c'est sur que ça peut aider à mettre une utilité sur ce que tu fais. Comme là c'était le besoin de résoudre ça [une équation du second degré].

Tout compte fait, les enseignants voient du potentiel dans l'utilisation de l'histoire des mathématiques pour l'enseignement-apprentissage de la factorisation, mais pas comme une fin en soi. Ce que j'entends par là, c'est que l'histoire en tant que telle ne donne pas vraiment de sens au concept. Par contre, nos discussions nous ont permis d'arriver à la conclusion co-construite suivante : elle pourrait favoriser la compréhension des élèves à travers d'autres explorations sémantiques. Entre autres, l'histoire devrait permettre de montrer l'origine des techniques de factorisation **(1, e)** en plus d'insister sur l'utilité originale du concept, qui est la résolution d'équation du second degré en ce qui concerne al-Khwarizmi **(4, a)**. L'histoire pourrait aussi être intégrée dans diverses situations contextualisées pour créer le besoin d'apprendre la factorisation **(5, a et b)**.

Pour conclure, les enseignants soutiennent que s'ils avaient plus de temps et plus de ressources en lien avec l'histoire des mathématiques, ils seraient ouverts à l'intégrer dans leur enseignement pour le chapitre de la factorisation. C'est quelque chose qui pourrait s'avérer intéressant et formateur pour les élèves.

> Annie : si on m'offrait des situations simples où j'intègre de l'histoire avec le pourquoi on le fait, si j'avais accès à ça facilement, je pense que oui ça serait intéressant de passer quelques minutes en début, avant d'embarquer dans la facto. Ça intéresserait des élèves, il y en a d'autres qui s'en foutraient. Ça aiderait certains élèves, il y en a d'autres que ça n'aiderait pas. Mais ça ne pourrait pas

> nuire. Moi, si j'ai besoin de trouver quelque chose, je ne le ferais pas, parce que c'est ça, je ne saurais même pas par où commencer. Mais si on me fournissait quelque chose, je pense que oui, je m'en servirais.

Dans l'ensemble, ce n'est pas tout à fait ce qui est entendu dans la recherche sur le sujet, alors que l'histoire des mathématiques devrait bousculer les habitudes des élèves et leur permettre la reconstruction du sens grâce au dépaysement épistémologique engendré, comme il en est question dans le chapitre 2 (voir section 2.5). L'histoire m'apparait plutôt comme un « facilitateur » pour d'autres composantes des explorations sémantiques. Selon les enseignants, elle n'est pas suffisante pour donner à elle seule du sens à la factorisation dans les classes du secondaire.

4.3.4 Des contraintes et préoccupations des enseignants

Encore une fois, les contraintes et préoccupations des enseignants ont été omniprésentes du début à la fin de la deuxième rencontre réflexive. Bien sûr, celles que l'on retrouve dans la section 4.2.5 sont toujours présentes, alors que certaines se sont ajoutées. De manière générale, ce qui ressort beaucoup de nos échanges pour cette rencontre est le manque de ressources des enseignants. Surtout en lien avec l'histoire, Annie et Francis abordent le fait qu'ils ne se sentent pas bien outillés pour sortir des sentiers battus. Francis va même jusqu'à dire qu'il trouve difficile d'avoir une opinion sur le potentiel de l'histoire des mathématiques dans les classes puisqu'il ne possède aucun bagage sur le sujet. Même en connaissant ses bienfaits, il affirme qu'il ne saurait pas vraiment comment utiliser l'histoire avec les élèves.

À ceci s'ajoute la quantité croissante d'enseignants non qualifiés dans les écoles secondaires du Québec à cause de la pénurie d'enseignants que nous vivons présentement. Non seulement ces enseignants n'ont pas accès à énormément de ressources pédagogiques et didactiques, ils ne sont pas aussi « solides » en mathématiques que ceux qui ont étudié pour devenir enseignant de mathématiques.

> Annie : En plus, tu sais nous deux on a étudié en math aussi. Mais regarde la quantité de profs qui enseignent les maths et qui n'ont pas étudié en math. On est ailleurs là. […] Je pense que les deux on a une bonne compréhension des mathématiques et des fois les élèves vont nous poser des questions comme « d'où ça vient » puis « je ne comprends pas j'ai besoin d'avoir du sens », puis on est assez formé en maths, on va être capable sortir de notre manuel et de dire « attends une minute, je vais te l'expliquer». Puis on va être capable de verbaliser et de rendre quelque chose de concret. Mais encore là, il y a des profs qui ne sont pas du tout outillés en mathématiques, tu sais ils vont être capables d'expliquer à l'élève en regardant le corrigé. Ils ne comprennent pas assez ce qu'ils font pour pouvoir l'expliquer plus.

Enfin, les enseignants mentionnent que dans notre désir de donner du sens à la factorisation et de trouver des interventions qui favoriseraient l'émergence de sens chez les élèves, il faut toujours garder en tête que certains d'entre eux ont besoin d'être sécurisés et de se sentir en confiance (généralement les élèves les plus faibles). C'est notre devoir, en tant qu'enseignant, de les accompagner dans leurs apprentissages et il faut éviter de les mettre dans des situations où ils seraient complètement désemparés. Car autrement, il deviendrait difficile de les voir s'engager dans la tâche à accomplir.

Cette préoccupation des enseignants est l'une des plus importantes, sinon la plus importante de ce projet. De fait, ce sont les élèves que nous tentons d'aider dans cette démarche de recherche collaborative visant à donner du sens à la factorisation. Car l'amélioration de l'enseignement mènera assurément à une amélioration de l'apprentissage et de la compréhension des jeunes.

4.3.5 Synthèse et conclusions de l'analyse de la deuxième rencontre réflexive avec les enseignants

La deuxième rencontre réflexive de co-opération représente la fin des discussions entre les partenaires de la recherche. Nous y avons, les enseignants et moi-même, terminé la co-élaboration d'interventions pour donner du sens à la factorisation. La synthèse qui suit me permet de résumer ce qui ressort de la rencontre, pour ensuite clore l'analyse des données grâce à la présentation finale de la séquence d'enseignement de la factorisation co-construite.

Dans un premier temps, j'ai proposé aux enseignants de nous tourner vers la quatrième exploration sémantique, c'est-à-dire vers utilité de la factorisation, pour aller voir si répondre à la question des élèves « à quoi ça sert ? » permettrait de lui donner du sens (voir section 4.3.2). De fait, dans la rencontre précédente, nous nous étions concentrés sur la factorisation en soi et ses techniques, sans situer le concept par rapport aux autres. Nos échanges sur le sujet nous ont amenés à conclure qu'il serait préférable de voir la factorisation comme un outil pour résoudre des équations du second degré **(4, a)**, et non pour l'étude de la fonction du second degré **(4, b)**. Dans cette optique, il fallait trouver une façon de créer le besoin d'apprendre la factorisation chez les élèves avant même le début de ce chapitre, pour agir de déclencheur à l'enseignement de la factorisation. C'est à travers une situation contextualisée « géométrique » que nous avons co-construite lors de la deuxième rencontre que nous croyons qu'il serait possible de le faire **(2 et 5)**. L'idée derrière est de mettre les élèves devant une situation nécessitant la résolution d'une équation du second degré, pour qu'ils se rendent compte qu'il leur manque quelque chose : la factorisation. Ceci contribuerait à donner du sens au concept et aiderait à la compréhension des élèves.

Dans un deuxième temps, mon intérêt, mes interrogations et les recherches par rapport à l'histoire des mathématiques dans l'enseignement secondaire m'ont conduit à aborder le sujet avec Annie et Francis (voir section 4.3.3). Cette troisième exploration sémantique était, à ce moment-là, la seule qui n'avait pas encore été discutée. Les enseignants ont d'abord été surpris par le fait que l'histoire est prescrite par le PFEQ. Par la suite, leur curiosité a pris le dessus, ce qui m'a permis de leur présenter deux activités à propos d'al-Khwarizmi et de la complétion du carré : la lecture d'un texte historique traduit de l'arabe **(3, a)** et le survol d'une activité d'exploration provenant d'un manuel scolaire de la quatrième année du secondaire en SN **(3, b)**. Malgré un manque de ressources et de formation flagrant en lien avec l'histoire des mathématiques, les enseignants voient un potentiel dans son utilisation dans les classes, mais pas pour les mêmes raisons qui ont été évoquées dans le chapitre 2. De fait, le dépaysement épistémologique n'a pas vraiment raisonné chez les enseignants, alors que l'histoire serait plutôt un tremplin pour donner une utilité à la factorisation **(4, a)** et montrer l'origine de ses techniques **(1,e)**. Des situations historiques pourraient aussi agir de contextes dans le chapitre de la factorisation **(5, a et b)**.

Dans un troisième temps, en nous détachant quelque peu des diverses explorations sémantiques, nous nous sommes questionnés sur ce que signifie « donner du sens » à la factorisation. D'emblée, nous avons statué une fois de plus que les élèves n'avaient pas vraiment besoin de sens pour être en mesure d'appliquer les techniques de factorisation **(habileté 1)**. Bien qu'ils éprouvent quelques difficultés parfois à choisir la bonne technique **(habileté 2)**, les problèmes ne se manifestent pas lorsqu'ils doivent utiliser un contrôle syntaxique. C'est en contexte que ça se corse (voir section 4.2.2). Globalement, on donnerait du sens à la factorisation dès que l'on va au-delà des manipulations algébriques associées aux techniques. Pour reprendre les termes de la recherche, on donne du sens dès qu'on s'attarde à la dimension sémantique de l'enseignement de la factorisation.

En réalité, autant pour les enseignants que pour moi, donner du sens à la factorisation n'est pas lié à une seule chose, mais bien à un amalgame de plusieurs. Les élèves du secondaire sont tous très différents, et ils n'accrocheront pas tous à la même intervention. Par exemple, certains vont beaucoup aimer travailler avec les représentations en forme, alors que ça n'en intéressera pas d'autres. Travailler la factorisation en contexte en aidera probablement plusieurs, mais il est possible que ce soit plutôt l'utilité du concept qui raisonne chez les élèves. En bref, ils ne se sentiront pas interpelés pas tout ce qu'on leur présente. Et c'est pour cette raison qu'en tant qu'enseignant, il faut varier ses approches et ses interventions en classe, dans le but d'atteindre et d'aider le plus d'élèves possibles.

Ceci concorde avec le cadre des explorations sémantiques qui a été construit dans le chapitre 2. Il y aurait plusieurs façons de donner du sens à la factorisation, et non une seule qui fonctionnerait pour tous les élèves. Ce qui est intéressant, c'est qu'en fait, il ne serait pas possible de choisir une seule exploration sémantique à exploiter en classe; il serait impératif d'en combiner quelques-unes pour maximiser nos chances d'aider le plus grand nombre d'élèves.

Dans un quatrième et dernier temps, cette deuxième rencontre réflexive nous a permis d'élargir la séquence d'enseignement de la factorisation que nous avons commencé à co-construire dans la première rencontre. Cette séquence représente la synthèse des échanges que nous avons eus, les enseignants et moi-même. Elle reflète l'apport et le point de vue autant de la pratique que de la recherche, et ce toujours en considérant les contraintes et les préoccupations des enseignants. L'extrait suivant permet d'illustrer l'apport majeur de la deuxième rencontre à la séquence.

> Chercheuse : On part avec un problème, que ce soit historique ou pas, dépendamment de ce qui vous convient ou de ce que vous avez envie d'utiliser, pour parler d'utilité, c'est ça l'idée. Ça peut être aussi simple que le problème qu'on a parlé tantôt, on donne l'aire algébrique et on donne l'aire numérique…
>
> Francis : On jumelle résolution d'équations et besoin de factorisation.
>
> Chercheuse : En fait la résolution d'équations devient une utilité.
>
> Francis : Ouais, c'est ça.
>
> Annie : Même si on le fait à la fin [normalement], ça devrait être plus au début oui.
>
> Chercheuse : Mais sans dire qu'après on fait 40 millions de résolutions.
>
> Annie : Non pas du tout, c'est juste l'élément déclencheur.

> Francis : Ça fait une belle amorce.
>
> […]
>
> Chercheuse : Donc le premier morceau du casse-tête ce serait ça. Ce serait d'introduire, d'avoir une amorce comme ça, de montrer une utilité, « regarde, on a besoin de la factorisation pour résoudre…tu es capable de résoudre des équations du premier degré, mais quand tu arrives devant une équation du deuxième degré, il manque quelque chose ». Donc là ce serait d'introduire justement vers la factorisation.

La séquence finale marque ainsi le retour d'un contexte en début d'enseignement de la factorisation pour lui donner une utilité. À la fin de l'analyse de la rencontre précédente, nous avions conclu que le travail des situations contextualisées devrait se trouver à la dernière étape, après l'enseignement des techniques de factorisation. Mais en incorporant l'utilité de la factorisation à la séquence, il serait préférable d'inclure un contexte dès le début, comme déclencheur, pour faire naître le besoin d'apprendre un nouveau concept : la factorisation.

Le tableau 4.4 suivant regroupe toutes les étapes de la séquence d'enseignement de la factorisation que nous proposons à la suite des nombreuses discussions que nous avons eues tout au long de cette recherche collaborative. Elle permettrait, selon nous, de donner du sens au concept pour les élèves. Ce tableau est en fait une amélioration du tableau 4.2 précédent. Je n'ai fait qu'ajouter les éléments qui ressortent de la deuxième rencontre pour compléter la séquence d'enseignement.

Tableau 4.4 Séquence finale d'enseignement de la factorisation pour donner du sens au concept

<table>
<tr><th>Étapes de la séquence d'enseignement</th><th colspan="2">Composantes des explorations sémantiques et habiletés « principales »</th><th colspan="2">Composantes des explorations sémantiques et habiletés « secondaires »</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1. Proposer une situation contextuelle (historique ou non) faisant intervenir la résolution d'une équation du second degré pour créer le besoin d'apprendre la factorisation chez les élèves.</td><td rowspan="2">(4, a)</td><td rowspan="2">Donner une utilité à la factorisation en l'introduisant comme un outil pour résoudre des équations du second degré. Ceci permettrait, par le fait même, de situer le concept par rapport aux autres.</td><td>(3, b)
(1, e)</td><td>La situation pourrait être à caractère historique, pour montrer d'où vient ce concept.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2, c)</td><td rowspan="2">La situation porte sur l'aire, les dimensions et le périmètre d'un rectangle.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(5, a)
(5, b)</td><td rowspan="2">La situation choisie pour faire naître le besoin d'apprendre la factorisation chez les élèves est une situation avec un contexte.</td></tr>
<tr><td>(1, d)</td><td>Montrer aux élèves qu'il y a plusieurs façons de factoriser l'aire numérique de 60 m dans la situation contextualisée.</td></tr>
<tr><td>2. Donner du sens à la factorisation avec les représentations en forme et son lien avec le développement.</td><td>(2, a)
(2, b)</td><td>Utilisation de la méthode du rectangle (polynômes à coefficients positifs) et des représentations géométriques (polynômes à coefficients négatifs) par les enseignants pour montrer aux élèves ce qu'est la factorisation.</td><td>(1, d)</td><td>Des exemples numériques sont présents pour aborder le concept de facteurs avec les élèves.</td></tr>
</table>

	(1, a)	En tout temps, insister sur le lien bidirectionnel entre la factorisation et le développement grâce aux représentations en forme, en rattachant la factorisation à la recherche des dimensions d'un rectangle et le développement à la redécouverte de l'aire de ce rectangle.	Habileté 4	Le lien entre la factorisation et le développement sous-entend l'équivalence entre la forme factorisée et la forme développée d'un polynôme.
3. Une à la fois, montrer les techniques de factorisation avec les représentations en forme, puis algébriquement, car c'est plus rapide et plus efficace.	(2, c) (1, e)	Utilisation des représentations en forme par les enseignants pour montrer aux élèves d'où viennent les techniques de factorisation et pourquoi elles fonctionnent.	(1, d)	Des exemples numériques sont présents pour aborder le concept de facteurs avec les élèves.
	Habileté 1	Cette habileté est très importante pour les enseignants. Les élèves doivent être en mesure d'appliquer les différentes techniques de factorisation de manière algébrique.	Habileté 2	Lorsque les techniques de factorisation sont mélangées, les élèves doivent choisir une technique adéquate pour factoriser un polynôme.
4. Continuer de donner du sens à la factorisation en mettant les élèves face à la résolution de situations contextualisées.	(5, a) (5, b)	Proposer des situations contextualisées aux élèves pour les amener à modéliser des situations grâce à la factorisation et par le fait même les faire réfléchir à la forme que doit prendre la factorisation en contexte. Ceci permettrait aux élèves de développer une meilleure compréhension du concept.	Habileté 1	Les élèves doivent appliquer les techniques de factorisation même dans un contexte.
	(1, d)	Montrer aux élèves qu'un polynôme peut avoir plusieurs formes factorisées selon le contexte, c'est-à-dire qu'il peut avoir plusieurs factorisations possibles, en faisant le parallèle	Habileté 2	Les élèves doivent choisir une technique adéquate pour factoriser un polynôme en contexte.

		avec le domaine numérique. Par exemple, 36 possède plusieurs couples de facteurs, alors qu'il peut s'écrire comme étant 2×18, 4×9 ou encore 6×6.		
6. Retour sur la situation contextuelle de départ pour faire résoudre une équation du second degré aux élèves grâce à la factorisation.	(4, a)	Consolider le fait que la factorisation sert à résoudre des équations du second degré et donc qu'elle possède une utilité pour les autres concepts mathématiques.	(5, a)	Discuter avec les élèves ce que la factorisation à permis de trouver dans le contexte de la situation (ici les dimensions du rectangle).
	Habileté 1	Les élèves doivent être en mesure d'appliquer les techniques de factorisation pour résoudre la situation.	Habileté 2	Les élèves doivent choisir une technique adéquate pour factoriser l'aire algébrique du rectangle dans la situation.

Avec les ajouts provenant de la deuxième rencontre réflexive, la séquence d'enseignement met encore plus de l'avant le contrôle sémantique. De fait, la première et la dernière étape (qui sont de nouvelles étapes) sont liées à la dimension sémantique du contrôle en algèbre alors qu'elles permettraient de montrer l'utilité de la factorisation aux élèves et sa position par rapport aux autres concepts. Mais encore une fois, il est important de remarquer que le contrôle syntaxique n'est pas mis de côté, alors qu'il est réinvesti dans la dernière étape où les élèves doivent factoriser un polynôme pour résoudre une équation du second degré avec des manipulations algébriques.

CHAPITRE V

DISCUSSION AUTOUR DES RÉSULTATS

Dans ce cinquième et dernier chapitre, je ferai ressortir les deux résultats les plus importants qui se dégagent de l'analyse des données en lien avec l'objectif et les questions de la recherche. Le premier résultat est le développement du cadre des explorations sémantiques. De fait, ce sont les discussions entre les partenaires du projet qui ont mené à l'ajout et à la modification de certaines composantes du cadre, ces composantes étant des interventions visant à donner du sens à la factorisation. Le cadre des explorations sémantiques qui en résulte est alors le produit de la co-construction entre enseignants et chercheuse, les interventions qui s'y trouvent proviennent maintenant à la fois de la recherche et de la pratique. Il m'est important de mentionner que l'évolution de ce cadre s'est faite naturellement lors des différentes rencontres. C'est, pour moi, une conséquence positive de la collaboration qui s'est opérée.

Le deuxième résultat est la séquence d'enseignement de la factorisation qui a été élaborée conjointement. Là est le cœur de la recherche menée : elle contient les interventions retenues co-construites entre les enseignants et moi-même pour donner du sens à la factorisation. Ces interventions sélectionnées le sont dans un ordre bien réfléchi, et s'appuient sur des composantes (pas toutes) des explorations sémantiques et même sur certaines habiletés que nous avons jugées indispensables à l'enseignement de la factorisation. La séquence est batie autour des interventions que nous considérons viables dans la pratique et qui pourraient être utilisées en classe pour diversifier les méthodes d'enseignement et permettre au plus grand nombre d'élèves d'accéder au sens derrière la factorisation au secondaire.

Enfin, je proposerai une discussion sur la collaboration en recherche, dans le but de dévoiler quelques implications et retombées supplémentaires de cette recherche collaborative autant pour moi en tant que chercheuse, que pour les enseignants en tant que participants. Je reviendrai sur le critère de double vraisemblance et sur la difficulté de le respecter en tout temps. J'aborderai aussi les contraintes et les préoccupations des enseignants qui ont teintées et guidées les discussions pendant les rencontres réflexives. En bref, je désire expliciter, ce qui se cache derrière une recherche collaborative et aller un peu plus loin que les résultats liés à l'objectif de ce mémoire.

5.1 Mon projet par rapport aux recherches menées autour de la factorisation

Le tour d'horizon portant sur les différents travaux réalisés autour de la factorisation rapporté dans la problématique (voir section 1.3) m'a permis de faire ressortir deux types d'études sur le sujet. D'une part, il y a les recherches qui traitent de l'apprentissage en soi de la factorisation, donc orientées vers les élèves, (p. ex. Clark, 2012 ; Hoong *et al.*, 2010 ; Hosson, 1999 ; Sharp, 1995) et d'autre part, les recherches qui se concentrent sur les enseignants et l'enseignement du concept (Abou Raad et Mercier, 2009 ; Simon, 2013). Ces dernières ne sont pas nombreuses, seulement deux études ont comme sujet principal la factorisation et son enseignement. En résumé, Abou Raad et Mercier (2009) se sont intéressés à la façon dont les enseignants abordent la factorisation en France et au Liban. Leur comparaison leur a permis de conclure que la factorisation semble être dénuée de sens et que son enseignement se résumerait à la présentation de routines et de règles à appliquer par les élèves. Le but de la recherche était de documenter les pratiques enseignantes. Quant à Simon (2013), elle s'est intéressée à l'appropriation des représentations visuelles pour l'enseignement de la factorisation par une enseignante de quatrième secondaire. Ce sont le point de vue et la pratique de cette enseignante qui sont mis de l'avant dans l'étude.

Dans les deux études, il est possible de remarquer que les chercheurs ont plutôt eu un regard extérieur sur la pratique enseignante. Bien que d'une certaine façon, je rejoigne ces études puisque je me suis aussi intéressée à ce que font les enseignants du secondaire pour aborder la factorisation, je suis allée plus loin que cela. De fait, j'ai eu ce regard extérieur lors des rencontres de co-situation, mais je suis surtout allée travailler *avec* les enseignants dans les rencontres de co-opération autour d'un sujet peu exploré dans la littérature, et non pas *sur* les enseignants. Mon projet se démarque donc de ces recherches portant sur l'enseignement de la factorisation par l'implication et le rôle des partenaires dans le projet. Comme nous en savions trop peu sur le point de vue des praticiens et sur la viabilité (dans la pratique) des pistes provenant de la recherche pour donner du sens à la factorisation, il me semblait approprié de donner une voix aux enseignants, mais aussi à la recherche. C'est pour cela que je me suis lancée dans une recherche collaborative. Nous avons travaillé en collaboration dans chaque étape de la recherche pour l'investigation d'un objet de la pratique qui préoccupe les deux mondes (Desgagné, 2001 ; Desgagné *et al.*, 2001).

Les différentes analyses qui ont été conduites dans le chapitre précédent permettent d'apporter un regard nouveau, un regard double[53] en lien avec l'enseignement de la factorisation au secondaire pour cette troisième et dernière étape de la recherche, c'est-à-dire l'étape de co-production (voir section 3.2.3). Deux résultats principaux ressortent de ce projet : (1) un apport théorique pour la recherche en didactique des

[53] Ceci satisfait le critère de double vraisemblance que le chercheur collaboratif doit respecter tout au long de sa recherche (voir section 3.2.4). Je reviendrai plus en détail sur ce critère de double vraisemblance présent pour chacune des étapes de la recherche collaborative dans la section 5.4.

mathématiques en lien avec le sens à accorder à la factorisation à travers le cadre sur les explorations sémantiques et (2) un apport pour la pratique enseignante grâce à la séquence d'enseignement de la factorisation co-construite et qui considère différentes explorations sémantiques et donc différentes interventions possibles. Je discuterai, dans ce dernier chapitre, autour de ces deux contributions dans le but de rendre compte de leur évolution et de leur forme finale. Enfin, je traiterai de la collaboration qui a eu lieu entre Annie, Francis et moi.

5.2 Développement du cadre des explorations sémantiques

Le cadre conceptuel des explorations sémantiques élaboré dans le chapitre 2 a servi de ligne directrice pour cette recherche collaborative. C'est ce dernier qui nous a permis, aux enseignants et moi-même, de nous plonger dans la dimension sémantique du contrôle en algèbre dans le but de co-élaborer des interventions pour donner du sens à la factorisation. Nous avons réussi, je le crois, à aller au-delà des manipulations algébriques et des techniques liées à l'enseignement-apprentissage de ce concept. De fait, les habiletés à développer pour factoriser (voir tableau 2.4) n'ont pas été centrales, si bien qu'elles n'ont pas évolué à la suite de ce projet.

Au contraire des habiletés, les explorations sémantiques (voir tableau 2.5) se sont beaucoup développées grâce aux discussions que nous avons eues pendant les différentes rencontres. Il m'est important de mentionner que bien que le développement du cadre des explorations sémantiques à proprement dit n'était pas l'objectif premier de cette recherche collaborative, c'est un résultat très intéressant qui permet d'enrichir nos connaissances au sujet de la factorisation et son sens en recherche en didactique des mathématiques, Le tableau 5.1 représente d'ailleurs le produit final du cadre des explorations sémantiques pour donner du sens à la factorisation. Plusieurs changements ont eux lieu, alors que de nouvelles composantes ont fait leur apparition et même qu'une nouvelle exploration sémantique est née (en vert dans le tableau 5.1). Également, certaines composantes se sont révélées très riches pour donner du sens à la factorisation, alors que d'autres sont restées plus au second plan. Des liens importants ont aussi émergé entre certaines composantes des explorations sémantiques.

Tableau 5.1 Le cadre des explorations sémantiques final et leurs composantes

Explorations sémantiques	**Description**	**Composantes (Interventions)**
5. L'objet mathématique, le concept de factorisation (voir section 2.3)	Donner du sens à la factorisation en insistant sur certaines caractéristiques ou particularités de ce concept.	d. Amener à reconnaître la relation bidirectionnelle entre la factorisation et le développement
		e. Amener à reconnaître la présence de différentes formes dites factorisées pour un même polynôme (aller au-delà de la factorisation au maximum)
		f. Amener à comprendre pourquoi certaines expressions algébriques ne se factorisent pas
		g. Utiliser des exemples numériques, faire des liens avec les nombres
		h. Montrer et expliquer l'origine des techniques de factorisation (et des formules en mathématiques)
6. Les différentes représentations (voir section 2.4)	Donner du sens à la factorisation en utilisant les représentations en forme pour illustrer, de façon concrète, le concept et ses techniques.	d. Proposer le recours à des représentations géométriques
		e. Proposer le recours à des représentations visuelles
		f. Proposer le recours à des représentations en forme (union

		entre les représentations visuelles et géométriques)
7. Aspect historique de la factorisation (voir section 2.5)	Donner du sens à la factorisation grâce au dépaysement épistémologique généré chez les élèves par l'étude de l'histoire des mathématiques.	c. Proposer l'étude de textes historiques
		d. Présenter des activités d'explorations à caractère historique
8. L'utilité de la factorisation, situer le concept (voir section 2.6)	Donner du sens à la factorisation en présentant ce concept comme un outil à appliquer pour travailler d'autres concepts mathématiques, ce qui lui donnerait une certaine utilité.	c. Faire voir la factorisation comme un outil pour la résolution d'équations du second degré
		d. Faire voir la factorisation comme un outil pour l'étude de la fonction du second degré
		e. Faire voir la factorisation comme un outil plus efficace pour diviser des expressions algébriques
		f. Présenter des prolongements de la factorisation au cégep pour situer le concept
9. L'importance des contextes en factorisation (voir section 4.2.2)	Donner du sens à la factorisation en faisant travailler le concept dans des situations contextualisées.	a. Amener à modéliser une situation grâce à la factorisation
		b. Faire réfléchir sur la forme que doit prendre la factorisation d'un polynôme en contexte

5.2.1 Cinquième et nouvelle exploration sémantique : L'importance des contextes en factorisation

Le plus gros ajout au cadre des explorations sémantiques à la suite de cette recherche collaborative est sans aucun doute la cinquième exploration sémantique portant sur l'importance des contextes dans l'enseignement-apprentissage de la factorisation (voir section 4.2.2). Certes, les échanges que j'ai eus avec Annie et Francis lors de la première rencontre de co-opération ont permis de faire ressortir que c'est lors du traitement de la factorisation en contexte que les élèves éprouvent le plus de difficultés dans le chapitre de la factorisation. Or, grâce à la situation-problème de *L'enclos* (voir 4.2.1)*,* ces échanges nous ont aussi permis de conclure que les contextes pourraient être porteurs de sens et que de faire travailler des situations contextualisées aux élèves pourrait leur permettre de mieux comprendre le concept et ce que signifie réellement l'action de « factoriser ». D'ailleurs, plusieurs recherches en didactique des mathématiques portent sur les contextes et leur importance dans l'enseignement-apprentissage de la discipline (p. ex. Bednarz et Proulx, 2009 ; Janvier, 2009). L'émergence de la cinquième exploration sémantique est donc en concordance avec la recherche. Une étude plus approfondie sur les contextes serait nécessaire pour permettre une comparaison détaillée entre ce qui ressort des discussions avec les enseignants Annie et Francis et les conclusions qui émanent de la littérature (voir la conclusion pour les prolongements possibles de ce mémoire).

Chez les enseignants participants

Au cours des discussions, les enseignants ont pris conscience qu'ils utilisent habituellement des problèmes contextualisés pour introduire les concepts mathématiques dans leurs classes mais qu'ils ne le font pas avec la factorisation. Et ils ne savent pas pourquoi! Pourtant, la réflexion que peut générer le travail en contextes est importante selon eux. Elle permet d'amener les élèves plus loin que la simple application des techniques de factorisation. Ce sont les discussions que nous avons eues sur le sujet qui ont généré cette prise de conscience chez les enseignants et qui ont mené à l'émergence de la cinquième exploration sémantique. Francis apporte toutefois un bémol; il faut faire attention de ne pas rester sur des contextes trop simples ou trop répétitifs, pour éviter de créer des automatismes chez les élèves (voir section 4.3.1). Par exemple, il faudrait s'assurer que les contextes « géométriques » ne se limitent pas à la recherche des dimensions d'un rectangle dont on connait l'aire. Les élèves doivent avoir à réfléchir davantage, à faire preuve de discernement pour trouver la marche à suivre pour résoudre une situation. À ce propos, Annie propose un exemple de situation faisant intervenir l'aire d'un disque. La question est « quelle est la mesure algébrique du rayon d'un disque dont l'aire est représentée par l'expression $4\pi x^2 - 12\pi x + 9\pi$? » Voici la résolution :

$$Aire\ disque = \pi r^2$$

$$\frac{4\pi x^2 - 12\pi x + 9\pi}{\pi} = \frac{\pi r^2}{\pi}$$

$$4x^2 - 12x + 9 = r^2$$

$$(2x - 3)^2 = r^2$$

$$2x - 3 = r$$

Ici, même si la question semble simple et familière puisqu'on cherche uniquement la mesure du rayon d'un disque, les élèves ont du mal à déterminer qu'il leur faut utiliser la factorisation pour se rendre à la ligne 4 de la résolution **(5, a)**. Plusieurs ont tendance à vouloir appliquer une racine carrée des deux côtés de l'égalité pour passer de la ligne 3 à la ligne 4, ce qui est bien évidemment erroné. Ils ne voient pas le trinôme carré parfait qui se dessine devant eux. Toutefois, Annie mentionne qu'une fois que les élèves remarquent cette identité remarquable (souvent avec de l'aide), ils arrivent généralement à factoriser le polynôme sans problème et à trouver le rayon. Cependant, elle ajoute que certains élèves n'éliminent pas le facteur π comme fait à la ligne 2, puisqu'ils ne voient pas le lien direct avec la formule de l'aire d'un disque. Ils font plutôt une mise en évidence simple de π, puis factorisent le polynôme $4x^2 - 12x + 9$. Ces élèves se retrouvent donc avec la forme factorisée $\pi(2x - 3)^2$ de l'aire du disque et ils ne comprennent pas quelle est la mesure du rayon dans cette expression **(5, b)**. Dans tous les cas et pour les deux composantes de la cinquième exploration sémantique, il est possible de voir qu'une réflexion est nécessaire pour répondre à la question et c'est ce qui est primordial dans un travail en contexte. C'est justement ce qui donnerait du sens à la factorisation.

5.2.2 Mise à jour des composantes des explorations sémantiques

Comme le cadre des explorations sémantiques a beaucoup évolué, il est essentiel de faire une mise à jour de ses composantes. À la suite de la collaboration de la recherche et de l'analyse des données, il m'est possible de faire ressortir les composantes qui semblent être les plus porteuses de sens pour les élèves du secondaire ainsi que celles qui le seraient moins d'après les partenaires de la recherche. Des composantes dites « transversales » émergent aussi des rencontres avec les enseignants.

Les composantes les moins porteuses de sens

D'emblée, les enseignants ont été très clairs sur le fait que les élèves ne sont jamais confrontés à des expressions algébriques qui ne se factorisent pas (voir section 4.2.4). Ils ne voient pas la pertinence de leur proposer ce type d'expressions, puisque c'est la capacité des élèves à factoriser qu'ils veulent vérifier. En ce sens, ils soutiennent qu'ils n'abordent jamais la question en classe, ce qui fait en sorte que la composante d'amener les élèves à comprendre pourquoi certains polynômes ne se factorisent pas **(1, c)** n'a pas été retenue comme donnant du sens à la factorisation par les enseignants. Par contre, les élèves doivent savoir quand s'arrêter lorsqu'ils factorisent, ce qui implique qu'ils doivent reconnaître quand un polynôme ne se factorise plus **(habileté 3)**.

En plus, l'aspect historique de la factorisation n'a pas vraiment résonné chez les enseignants **(3, a et b)**. Même si la pertinence de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement de la discipline est défendue par plusieurs études (p. ex. Barbin, 1997 ; Clark, 2012 ; Fried, 2001 ; Guillemette, 2017 ; Jankvist, 2009), son intégration dans les pratiques enseignantes du secondaire s'avère être difficile. Les enseignants signalent un manque de ressources; ils ne se sentent pas outillés du tout pour utiliser l'histoire des mathématiques avec les élèves. Ils affirment aussi ne pas avoir le temps de faire des recherches approfondies pour bien l'intégrer dans leur enseignement. D'ailleurs, ces arguments ont déjà été soulevés dans la recherche, entre autres dans l'étude de Siu (2006), qui a documenté de point de vue d'enseignants par rapport à leurs réticences envers l'utilisation de l'histoire dans leurs classes. En revanche, si on met de côté ces appréhensions du milieu scolaire, Annie et Francis ont admis voir des avantages possibles de l'histoire pour la compréhension des élèves. Par contre, c'est à travers d'autres composantes des explorations sémantiques[54] qu'ils perçoivent ces avantages (voir section 4.3.3). De ce point de vue, pour reprendre les termes de Jankvist (2009), l'histoire serait utilisée comme un outil pour traiter ces autres composantes et non comme un objectif en soi[55]. De ce fait, ce n'est pas le dépaysement épistémologique évoqué par Barbin (1997, 2006) qui a intéressé les enseignants. Nous avons donc conclu que cette troisième exploration sémantique ne serait pas vraiment porteuse de sens à elle seule, mais elle agirait plutôt de « facilitateur » pour les autres explorations sémantiques du cadre.

[54] Les liens entre la troisième exploration sémantique de l'aspect historique de la factorisation et les autres composantes sont explicités dans le tableau 5.2.

[55] Ce constat m'amène à rappeler la mise en garde suivante : il faut faire attention de ne pas dénaturer l'histoire, comme le soutiennent certains chercheurs (p. ex. Fried, 2001).

Les composantes les plus riches pour donner du sens

Trois éléments se distinguent particulièrement de cette recherche collaborative pour donner du sens à la factorisation au secondaire :

1. La place des contextes dans l'enseignement de la factorisation
2. L'utilisation des représentations en forme pour illustrer la factorisation
3. La création du besoin d'apprendre la factorisation pour montrer son utilité

Dans un premier temps, les deux composantes de la nouvelle et cinquième exploration sémantique sont bien évidemment très porteuses de sens pour la factorisation pour les partenaires de la recherche **(5, a et b)**, comme il a été constaté dans la section 5.2.1. Sans entrer encore une fois dans les détails, le travail en contexte pourrait réellement aider les élèves à comprendre le concept et le sens sous-jacent, si on se fie à ce qui ressort de nos discussions lors des différentes rencontres. Ce qui ajoute à la richesse de cette exploration sémantique, c'est son lien étroit avec la présence de différentes formes factorisées pour un même polynôme **(1, b)** (voir tableau 5.1). C'est en effet en contexte que les élèves semblent amenés à reconnaître que la factorisation n'est pas toujours unique et maximale, que ça dépend de la situation en jeu.

Dans un deuxième temps, les représentations en forme, qui sont l'union entre les représentations visuelles et géométriques, ont beaucoup plu à Annie et Francis **(2, c)**. Elles permettraient de donner du sens autant à la factorisation qu'à ses techniques (voir section 4.2.3), ce qui est en concordance avec les différentes études sur le sujet (p. ex. Hoong *et al.*, 2010 ; Hosson, 1999 ; Sharp, 1995 ; Simon, 2013). Toutefois, cette deuxième exploration sémantique des représentations a subi quelques changements entre le chapitre 2 et ce qui a été co-construit dans la recherche. D'une part, selon Annie et Francis, ce seraient les enseignants qui manipuleraient le plus les représentations en forme, et non les élèves. Plus spécifiquement, la méthode du rectangle et les représentations géométriques devraient être utilisées par ceux-ci en grand groupe pour montrer d'où viennent les techniques de factorisation et surtout pourquoi elles fonctionnent. D'autre part, si jamais les enseignants voulaient faire manipuler les élèves à leur tour en début d'apprentissage, les tuiles algébriques – virtuelles[56] si possible – seraient le matériel le plus approprié pour y arriver. Enfin, nos discussions lors des rencontres de co-opération ont fait émerger deux habiletés supplémentaires qu'il faudrait développer pour travailler avec les représentations en forme ainsi que pour factoriser : (1) l'habileté à représenter « visuellement » une expression algébrique et (2) l'habileté à faire le lien entre le visuel ou le géométrique et l'écriture algébrique des polynômes. Ces habiletés rejoignent parfaitement deux de celles présentes dans le cadre de référence autour de la factorisation élaboré par Simon (2013) dans son mémoire.

Dans un troisième et dernier temps, les enseignants et moi-même sommes allés dans le même sens que ce que proposent les manuels scolaires de la quatrième secondaire en SN (p. ex. Boucher *et al.*, 2009 ; Cardin *et al.*, 2008 ; Guay *et al.*, 2008), c'est-à-dire d'introduire la factorisation comme un outil pour travailler un autre concept mathématique, ici la résolution d'équations du second degré **(4, a)**. Nous sommes même allés plus loin, alors que nous sommes parvenus à co-élaborer une situation pour créer le besoin d'apprendre la factorisation (voir section 4.3.2). Cet enrichissement de la quatrième exploration sémantique nous a amenés à conclure que cette approche pourrait donner du sens à la factorisation pour les élèves en leur montrant dès le départ la nécessité de ce concept et à quoi il sert.

[56] Un lien étroit pourrait être crée entre les représentations en forme et la technologie, ce qui pourrait devenir une piste intéressante pour une éventuelle étude sur la factorisation, et peut-être même pour le développement du cadre des explorations sémantiques.

Les composantes transversales

Deux composantes se démarquent du cadre des explorations sémantiques par leur caractère « transversal ». En d'autres mots, ces composantes semblent être omniprésentes en tout temps dans l'enseignement de la factorisation au secondaire. D'abord, l'utilisation d'exemples numériques **(1, d)**, qui a initialement été ajoutée au cadre grâce à Annie et Francis à la suite des rencontres de co-situation, est une stratégie qui revient beaucoup dans le discours des enseignants. Ces derniers font très souvent des liens avec les nombres généralement pour simplifier un concept ou une explication, et donc pour aider à la compréhension des élèves. Un peu dans la même lignée, la relation bidirectionnelle entre la factorisation et le développement algébrique **(1, a)** semble toujours présente dans leur enseignement. Bien que ce lien ressortirait un peu plus à certains moments[57], il parait ne jamais quitter l'esprit des enseignants, qui s'efforcent de renforcer ce lien chez les élèves du début à la fin du chapitre de la factorisation. Ceci permettrait, par le fait même, d'agir sur la difficulté des élèves à percevoir que la forme factorisée est équivalente à la forme développée d'un polynôme (Matz, 1982 ; Mejía Palomino, 2004 ; Simon, 2013).

5.2.3 Interrelation entre les explorations sémantiques

Les analyses menées dans le chapitre précédent ont fait émerger des liens entre les différentes explorations sémantiques. Même que certaines composantes ne peuvent pas être prises de manière individuelle, puisqu'elles sont intimement liées à d'autres. Le tableau 5.2 suivant résume les liens importants qui ressortent de la recherche.

[57] Comme lors de l'utilisation des représentations en forme par les enseignants, où le lien entre la factorisation et le développement peut être mis de l'avant (voir tableau 5.2).

Tableau 5.2 Les liens entre les composantes des explorations sémantiques

Composantes liées	Explications
(2, c) ↔ (1, a)	Le travail avec les représentations en forme est une bonne façon d'insister sur le lien existant entre la factorisation de polynômes et le développement algébrique. De fait, il est possible de rattacher la factorisation avec la recherche des dimensions d'un rectangle et le développement avec le calcul de l'aire de celui-ci.
(5, a et b) ↔ (2, c)	Les contextes utilisés dans le chapitre de la factorisation sont majoritairement des contextes dits « géométriques », c'est-à-dire qui font intervenir l'aire et les dimensions de figures planes et de solides. Les contextes font ainsi référence aux représentations en forme.
(5, b) ↔ (1, b)	Ce n'est qu'en contexte qu'il est possible pour les élèves de reconnaître qu'il existe plusieurs formes factorisées pour un même polynôme. C'est à ce moment-là qu'ils peuvent se questionner quant à la forme adéquate à choisir pour une situation contextuelle donnée. Ces deux composantes seraient ainsi indissociables.
(3, a et b) ↔ (1, e)	L'histoire des mathématiques serait un bon point de départ pour montrer aux élèves d'où viennent les techniques de factorisation. Par exemple, les activités historiques sur Al-Khwarizmi traitent de l'origine de la complétion du carré.
(3, a et b) ↔ (2, a)	Ce qui a été retenu des activités historiques sur Al-Khwarizmi est la présence des représentations géométriques dans les démarches du mathématicien.
(3, a et b) ↔ (4, a)	Les activités historiques sur Al-Khwarizmi permettraient, pour les enseignants, de montrer l'une des utilités de la factorisation au secondaire : la résolution d'équations du second degré. En effet, ces activités sont centrées sur la résolution d'équations du type $ax^2 + bx = c$.
(4, a) ↔ (5, a et b)	Il serait préférable d'utiliser une situation contextualisée faisant intervenir une utilité de la factorisation (comme la résolution d'équations du second degré dans la séquence

	d’enseignement co-élaborée) pour créer le besoin d’apprendre ce concept chez les élèves.
(3, a et b) ↔ (5, a et b)	Les contextes présentés aux élèves dans le chapitre de la factorisation pourraient être des situations ou des activités à caractère historique.

Bien que les explorations sémantiques puissent être séparées par type, le tableau 5.2 soutient que de nombreuses composantes ne peuvent pas être traitées en silo. Une combinaison de plusieurs d’entre elles semble alors être nécessaire pour donner du sens à la factorisation, comme il a été mentionné dans la synthèse de la deuxième rencontre de co-opération (voir section 4.3.5).

5.3 La séquence d’enseignement de la factorisation élaborée conjointement

La collaboration qui s’est opérée dans ce projet de recherche a mené à la co-construction d’une séquence d’enseignement de la factorisation visant à lui donner du sens (le produit final se trouvant dans le tableau 4.4 du chapitre précédent)[58]. Cette séquence représente le travail conjoint entre les enseignants et moi-même ainsi que sa synthèse, au carrefour des points de vue, préoccupations et contraintes de la pratique et de la recherche. Cette séquence est constituée des interventions co-construites retenues par les partenaires de la recherche, elles sont présentées dans un ordre précis pour donner du sens à la factorisation. Elle permet d’ailleurs de donner une dynamique au cadre des explorations sémantiques, les interventions que l’on y retrouve sont en fait les étapes de la séquence. Ainsi, les composantes sont bien plus que des objets

[58] Ceci est un résultat nouveau en recherche en didactique des mathématiques, car je le rappelle, aucun chercheur ne s’était attardé à ce concept et son enseignement dans le cadre d’une recherche collaborative, c’est-à-dire *avec* les enseignants, et non *sur* les enseignants telles que les études de Simon (2013) et d’Abou Raad et Mercier (2009).

théoriques du cadre conceptuel : elles sont des interventions lorsqu'elles sont dans un contexte scolaire (comme c'est le cas avec la séquence d'enseignement co-construite). Les composantes ont agi de base conceptuelle pour guider la co-construction des interventions à faire en classe dans la séquence d'enseignement pour donner du sens à la factorisation.

Il est possible d'y retrouver notamment les trois explorations retenues principalement pour donner du sens au concept de factorisation (voir section 5.2.2). De fait, les contextes, les représentations en forme et l'utilité de la factorisation sont au cœur de la séquence d'enseignement. Ceci appuie également, encore une fois, notre conception de ce que signifie « donner du sens » : c'est aller au-delà des techniques de factorisation grâce à un amalgame d'approches et d'interventions d'ordre sémantique, dans le but de rejoindre le plus d'élèves possible (voir section 4.3.5).

Bien que la séquence d'enseignement ait pour but principal de donner du sens à la factorisation au secondaire, il est impossible de mettre de côté les habiletés qui s'y dégagent. Il existe une interrelation évidente entre les contrôles sémantique et syntaxique dans les étapes de la séquence. Mais ceci n'est pas une surprise! Ces deux dimensions du contrôle en algèbre sont belles et bien indissociables et profondément imbriquées l'une dans l'autre (Kouki, 2018 ; Saboya *et al.*, 2015) (voir section 2.2). L'important est simplement d'atteindre un équilibre entre l'application manipulatoire des techniques de factorisation (ordre syntaxique) et la recherche du sens du concept (ordre sémantique). Comme je l'ai mentionné dans de nombreux commentaires à chaud provenant de mon journal de bord, la séquence co-construite dans ce projet tend vers cet équilibre. Pour y parvenir, tous les partenaires de la recherche ont dû se mobiliser en apportant leur expertise respective dans les rencontres. Mais un obstacle persistant est tout de même à prendre en considération : les habitudes d'apprentissage des élèves. Ce point sera discuté un peu plus loin, dans la section 5.3.2.

5.3.1 Apports de la recherche et de la pratique

La richesse de la recherche collaborative réside dans l'interinfluence qui existe entre les deux mondes : celui de la recherche en didactique des mathématiques et celui de la pratique enseignante (Desgagné *et al.*, 2001 ; Morrissette, 2013 ; Pepin et Desgagné, 2017). Ce sens particulier de la collaboration dans le modèle de Desgagné et Bednarz implique autant l'apport du chercheur que celui des enseignants participants (voir section 3.1.2). C'est grâce à ce qu'Annie, Francis et moi-même avons chacun apporté lors des rencontres de co-opération que nous sommes parvenus à échanger puis à co-élaborer la séquence d'enseignement de la factorisation pour lui donner du sens.

Le premier apport – et sans doute le plus important – des enseignants a été la situation-problème de *L'enclos* (voir section 4.2.1). Elle nous a permis d'entamer les rencontres de co-opération, en plus d'enclencher plusieurs discussions par rapport aux explorations sémantiques. En effet, c'est cette situation qui nous a non seulement amené à considérer l'importance des contextes dans l'enseignement-apprentissage de la factorisation, mais elle m'a aussi servi d'amorce pour présenter les représentations en forme provenant de mon cadre conceptuel aux enseignants. Ces deux sujets représentent de très bons exemples d'interinfluence entre les partenaires de la recherche. En ce qui concerne les contextes, ce sont les enseignants qui ont soulevé les difficultés et les questionnements auxquels les élèves font face quand ils sont dans des situations contextualisées comme celle de *L'enclos*. Mais par la suite, c'est moi qui me suis interrogée quant au potentiel des contextes pour donner du sens à la factorisation. D'une certaine façon, ceci a généré une prise de conscience chez Annie et Francis, alors que nos réflexions sur le sujet leur ont permis de se rendre compte qu'en fait, les contextes pourraient bel et bien être porteurs de sens. Les contextes ont donc changé de statut pour les enseignants, eux qui ne semblaient pas les avoir considérés de la sorte avant le projet. Pour ce qui est des représentations en forme, elles font bien sûr partie de mes apports à cette recherche. C'est moi qui les ai montrés aux enseignants à cause de la présence d’aires et de dimensions de rectangles dans la CD1 de *L’enclos*. Malgré cela, ce sont les savoirs pratiques des enseignants qui nous ont permis de confirmer la pertinence d’utiliser ce type de représentations en classe du secondaire. Et ce sont ces mêmes savoirs qui m’ont fait réaliser la complexité de la méthode du rectangle pour les élèves et qui m’ont convaincu qu’il serait mieux que ce soit les enseignants qui procèdent à la manipulation. En bref, les lignes qui précèdent montrent clairement le travail conjoint et d’influence qui se cache derrière nos co-constructions, et donc derrière chaque étape de la séquence d’enseignement de la factorisation.

De manière plus générale, les enseignants ont aussi apporté plusieurs problèmes nécessitant la factorisation pour les résoudre, comme ceux présents à l’annexe H. Il est possible de les retrouver tout au long de l’analyse des données du chapitre 4. Ces problèmes constituent des exemples que les enseignants utilisent avec leurs élèves dans le chapitre de la factorisation et témoignent de leur expérience sur l’enseignement du concept. Ce sont des problèmes qui génèrent des difficultés, des erreurs ou de mauvaises conceptions chez les élèves ou qui sont riches pour l’apprentissage du concept, et qui ont servi à alimenter les échanges pendant les rencontres réflexives. De mon côté, mon apport principal a évidemment été le cadre des explorations sémantiques et tout ce qui y est rattaché. Entre autres, outre les représentations en forme, j’ai eu la chance de partager mes idées en lien avec la factorisation au maximum puis sur la possibilité de voir la factorisation comme un outil pour d’autres concepts, en plus de proposer une réflexion sur l’histoire des mathématiques dans l’enseignement de la discipline à travers diverses activités à caractère historique.

Finalement, au-delà des apports dits « matériels », nos points de vue respectifs et nos expériences personnelles (nous n’oeuvrons pas dans le même milieu et n’avons pas le même champ de compétences) ont apporté une saveur différente aux discussions que nous avons eues et ont teinté considérablement les résultats de la recherche, comme il avait été prévu et rapporté dans le chapitre 3 de ce mémoire.

5.3.2 L’enjeu de l’apprentissage des élèves

Même avec l’expertise d’acteurs du milieu scolaire, certains obstacles de l’école secondaire ne peuvent pas être complètement contournés. Ce que j’entends par là, c’est que même en ayant pris en considération les voix d’Annie et Francis et en s’étant assuré qu’une co-élaboration s’est opérée pendant la recherche, des enjeux hors de notre contrôle pourraient venir influencer ce qui se passerait en classe si la séquence d’enseignement était testée. C’est le cas des habitudes d’apprentissage des élèves.

Comme nous en avons parlé à plusieurs reprises les enseignants et moi, il est possible de remarquer un manque d’intérêt de la part de plusieurs élèves envers la recherche de sens derrière les concepts mathématiques (voir section 4.2.5). La raison est simple : les élèves ne semblent tout simplement pas habitués de le faire. Ils auraient plutôt l’habitude d’appliquer des formules, des techniques ou des algorithmes sans vraiment en comprendre le sens, et ce souvent depuis le primaire. Dans cette optique, il peut devenir difficile pour les enseignants de mathématiques d’insister sur le sens avec des élèves rendus en quatrième secondaire.

> Francis : Ça c’est un réflexe qu’il faut installer bien avant. Ce n’est pas en secondaire 4 que tu commences à faire ça. Tu sais l’élève qui a toujours appris ses mathématiques depuis le primaire et qui n’a jamais été préoccupé par le sens, il ne commencera pas en secondaire 4 à trouver ça intéressant.

Ce serait donc les habitudes d’apprentissage des élèves qu’il faudrait modifier très tôt dans leur parcours scolaire pour espérer qu’ils soient réellement intéressés et préoccupés par le sens des concepts mathématiques au deuxième cycle du secondaire. Annie rajoute d’ailleurs que ses groupes d’élèves qui posent le plus de questions et qui tendent à vouloir savoir ce qu'ils font et le pourquoi ils le font ont tendance à mieux réussir que ceux qui ne s'en soucient pas.

Pour conclure, le travail sur le sens de la factorisation avec les élèves n'est pas une chose facile, loin de là. Les enseignants doivent jongler avec plusieurs contraintes et préoccupations, en plus d'habitudes persistantes des élèves comme celle de l'apprentissage en mathématiques à travers l'application de formules et techniques. Ce travail est colossal et nécessite, je le crois, la rencontre entre la pratique et la recherche comme c'est le cas dans cette recherche collaborative. La contribution des deux mondes me parait riche et inestimable, alors qu'on en a la preuve avec la séquence d'enseignement de la factorisation qui a été co-construite dans ce projet. Elle regroupe les idées de tous les partenaires de la recherche, dans l'objectif de donner du sens à la factorisation pour le plus grand nombre d'élèves.

5.4 Réflexion autour de la collaboration avec les enseignants

Certes, les deux résultats principaux de cette recherche présentés dans les sections précédentes sont très intéressants et ils apporteront beaucoup, je l'espère, tant à la communauté de la recherche qu'à la communauté de la pratique. Cependant, il ne faut pas oublier une autre visée de la recherche collaborative, qui est celle d'une démarche transformatrice pour tous les participants à la suite de la collaboration vécue pendant le projet (Bednarz, 2013b ; Desgagné *et al.*, 2001). Dans cette perspective, il semble pertinent de clore ce chapitre en revenant une dernière fois sur la collaboration entre Annie, Francis et moi. Pour y arriver, je reviendrai sur trois points : (1) les contraintes et les préoccupations des enseignants qui ont influencé le projet, (2) les perceptions des partenaires autour de la factorisation qui ont changé grâce à la recherche et (3) ma démarche en tant que chercheuse collaborative pour ce mémoire.

5.4.1 Les contraintes et préoccupations des enseignants dans le projet

Le métier d'enseignant comporte son lot de contraintes et génère une multitude de préoccupations pour les enseignants. Dans le cadre de cette recherche collaborative, ces contraintes et préoccupations – qui ont été omniprésentes du début à la fin – ont fait partie intégrante du projet et elles ont été prises en considération en tout temps dans les rencontres (voir section 4.2.5 et 4.3.4). Ceci est en harmonie avec le critère de double vraisemblance qui stipule que le chercheur collaboratif se doit de prendre en compte et de respecter, à toutes les étapes de la recherche, le point de vue et le champ de compétences de tous les partenaires impliqués dans la recherche (Pepin et Desgagné, 2017). En bref, les contraintes et préoccupations des enseignants ont eu, sans surprise, une grande influence sur nos co-constructions et notre collaboration. Le tableau 5.3 suivant reprend les principales contraintes et préoccupations qui se sont démarquées des propos d'Annie et Francis. Je commenterai ensuite ce tableau, en faisant ressortir les éléments les plus saillants.

Tableau 5.3 Les principales contraintes et préoccupations des enseignants

Contraintes des enseignants	**Préoccupations des enseignants**
- Le temps - Les types d'élèves en SN - L'intérêt (ou pas) des élèves pour la recherche sur le sens des concepts - Les habitudes d'apprentissage des élèves (section 5.3.2) - Le manque de ressources et de matériels pédagogiques	- La réussite des élèves à l'examen du ministère de fin d'année - Rejoindre le plus d'élèves possible - Former des « élèves réflexifs » et non que de « bons applicants » - La confiance des élèves - L'utilité de la factorisation - Les enseignants non qualifiés dans les écoles

La contrainte qui retient le plus mon attention est celle du temps. C'est définitivement celle qui a occupé le plus l'esprit des enseignants pendant la recherche, alors que ces derniers évoquent un manque de temps flagrant tout au long de l'année scolaire. En effet, ils sont limités dans le nombre de périodes qu'ils peuvent consacrer aux différents concepts à voir présents dans le PFEQ pour la quatrième année du secondaire. Cette contrainte a influencé beaucoup nos discussions et notre travail commun. Par exemple, le gain de temps possible en classe est l'une des raisons qui nous ont poussés à conclure qu'il serait mieux que ce soit les enseignants qui manipulent les représentations en forme au lieu des élèves. Un autre exemple est celui de l'histoire des mathématiques : les enseignants n'ont pas le temps de faire des recherches approfondies à ce sujet. Ceci fait un lien avec une autre contrainte, soit celle du manque de ressources et de matériels pédagogiques. De fait, les enseignants n'ont pas accès à tout ce qu'ils voudraient pour sortir des sentiers battus et essayer de nouvelles choses en classe. D'ailleurs, par rapport à l'histoire des mathématiques, Annie et Francis affirment ne pas se sentir assez outillés pour l'inclure dans leurs cours, ce qui est désolant.

Quant aux préoccupations, ce sont celles de rejoindre le plus d'élèves possible ainsi que la confiance de ceux-ci qui ont eu le plus d'impact dans le projet. En effet, nous avons dû tenir compte de l'accessibilité des interventions co-construites pour le plus grand nombre d'élèves. Car l'idée est d'aider les élèves en les insécurisant le moins possible, pour éventuellement les voir s'investir dans la recherche du sens derrière la factorisation. En fait, ce qu'il faut retenir ici, c'est que les élèves, leur bien-être et leur réussite ont constamment été pris en considération. Après tout, c'est pour eux et leur compréhension que nous nous sommes attardés à l'enseignement de la factorisation au secondaire dans cette recherche collaborative. Et comme Francis le soulève dans l'analyse de sa rencontre de co-situation (voir section 4.1.2), il serait préférable de former des « élèves réflexifs », et non seulement de « bons applicants » de formules et de techniques !

5.4.2 Évolution des perceptions des partenaires de la recherche

Malgré quelques idées divergentes au départ, Annie, Francis et moi avons tous été très ouverts aux apports des autres, et notre collaboration s'est très bien déroulée. D'ailleurs, les discussions que nous avons eues pendant les différentes rencontres autour des explorations sémantiques et de la séquence d'enseignement ont eu un impact sur certaines perceptions de l'enseignement-apprentissage de la factorisation des enseignants, mais aussi certaines des miennes. Ce qui suit me permettra d'expliciter l'évolution de ces perceptions à la suite de notre collaboration dans le projet.

Les changements dans les perceptions d'Annie et Francis

Ce sont les perceptions d'Annie qui semblent avoir le plus évolué. L'un des plus gros changements pour elle a été la modification de son ordre de présentation des techniques de factorisation si les représentations en forme sont utilisées (voir section 4.2.3). Nos discussions lui ont fait réaliser qu'il est préférable d'enseigner d'abord le « produit somme », puis de présenter les identités algébriques comme des cas particuliers de factorisation, comme le fait déjà Francis. Aussi, nous avons assisté à une prise de conscience de cette enseignante lorsqu'elle s'est rendu compte qu'elle introduit tous les concepts mathématiques avec l'aide d'un contexte, à l'exception de la factorisation (voir section 4.2.2). Ceci a mené à une remise en question du statut des contextes pour le chapitre de la factorisation et éventuellement le développement de la cinquième exploration sémantique. Un autre changement considérable dans les perceptions d'Annie se trouve dans l'importance qu'elle accorde aux manipulations algébriques en lien avec la factorisation. Dans sa rencontre de co-situation, elle a soutenu le fait que ce concept était et devait être très manipulatoire (voir section 4.1.1), rejoignant les conclusions rapportées par Abou Raad et Mercier (2009). Par contre, elle a démontré un intérêt de plus en plus marqué envers le sens de la factorisation dans la recherche. Sans mettre de côté le caractère algébrique du concept, j'ai senti une plus grande ouverture de sa part pour le contrôle sémantique.

De façon plus générale pour les deux enseignants, leur perception quant à l'utilité de la factorisation s'est beaucoup développée. De fait, aucun des deux ne voyait réellement ce concept comme un outil pour résoudre des équations du second degré. Ils ont même dit que les prolongements de la factorisation étaient plutôt au cégep, et non au secondaire. L'analyse de la deuxième rencontre réflexive, et plus précisément de l'épisode IV, démontre bien le chemin qu'ont parcouru les enseignants, alors que nous sommes parvenus à co-élaborer une situation nécessitant la résolution d'une équation du second degré pour créer le besoin d'apprendre la factorisation chez les élèves (voir section 4.3.2). Une conséquence de ceci réside dans la modification de leur ordre d'enseignement habituel de ces trois concepts : (1) la factorisation, (2) la fonction du second degré et (3) la résolution d'équations du second degré. Nous sommes arrivés à la conclusion qu'il serait mieux d'enseigner en premier la factorisation, en deuxième la résolution d'équations du second degré et en dernier la fonction du second degré, comme c'est le cas dans les manuels scolaires analysés dans le chapitre 2 (Boucher *et al.*, 2009 ; Cardin *et al.*, 2008 ; Guay *et al.*, 2008). Pour résumer, l'utilité de la factorisation a pris une place importante dans l'amorce du concept pour les deux enseignants, comme on peut le voir dans la séquence d'enseignement élaborée conjoinement.

Les changements dans les perceptions de la chercheuse

Au tout début de ce mémoire, dans la problématique, je voyais la factorisation comme un concept très abstrait où les élèves étaient amenés à seulement développer des automatismes pour factoriser (voir section 1.1). Le sens sous-jacent me semblait alors occulté et non compris par les élèves, alors qu'on enseigne des *trucs* comme le « produit somme ». Mais les échanges avec les enseignants m'ont permis de voir que certains enseignants tentent d'aller plus loin, comme Francis qui s'efforce de montrer d'où viennent les techniques et les formules qu'il enseigne. Aussi, j'ai pu voir qu'il est possible de donner du sens au « produit somme » à travers les représentations en forme, par exemple. De cette façon, on va plus loin que l'enseignement d'un *truc* en soi, tout en s'assurant que les élèves soient capables de l'appliquer correctement et au bon moment. On retrouve ici de nouveau l'interrelation nécessaire et inévitable entre les contrôles syntaxique et sémantique en algèbre (Kouki, 2018 ; Saboya *et al.*, 2015). Une autre perception que j'avais et qui a été modifiée concerne le niveau de difficulté du chapitre de la factorisation pour les élèves. J'avais dans l'idée que c'était un chapitre très ardu pour eux. Bien que plusieurs éprouvent des difficultés de toutes sortes quand vient le temps de factoriser un polynôme (voir section 1.2.3), ils sont majoritairement bons lors de l'application des techniques de factorisation dans des exercices dits de routine. Je rappelle que c'est en contexte que ça se corse, c'est-à-dire quand il faut comprendre ce qu'est la factorisation et à quoi elle sert, quand une réflexion est nécessaire et qu'il faut faire plus que des manipulations algébriques pour factoriser.

5.4.3 Ma démarche et mes défis en tant que chercheuse collaborative

L'engagement est grand pour le chercheur choisissant l'approche collaborative pour sa recherche. Il s'agit plus que d'un choix méthodologique. C'est une façon d'être en recherche, alors que l'objet de la pratique enseignante étudié se doit de l'être en collaboration avec des enseignants. La citation suivante, provenant d'un texte de Proulx (2013) sur diverses réflexions épistémologiques en lien avec la recherche collaborative, résume bien la raison fondamentale du chercheur de choisir cette approche.

> Il est donc question de tirer profit, de prendre avantage de « l'expertise », ou plutôt de la compréhension, du praticien pour faire avancer l'objet de recherche et étudier le problème avec ce praticien pour que la compréhension du phénomène étudié en soit bonifiée. C'est parce qu'il croit à ceci que le chercheur s'engage dans une recherche collaborative. Ce n'est donc pas parce qu'il se trouve limité pour conceptualiser ou parce que le praticien fait, ou sait, mieux que lui. C'est parce qu'au nom de la recherche, pour l'avancement des connaissances et la compréhension du phénomène étudié, en toute intégrité de chercheur, ce dernier a besoin d'étudier celui-ci avec le praticien.

Je me reconnais à travers cet extrait. Ce dernier exprime très bien mon sentiment au tout début de mon mémoire, au moment de problématiser, par rapport à la factorisation au secondaire. La participation (et la collaboration) de praticiens ayant enseigné plusieurs fois le concept me semblait essentielle pour mieux comprendre son enseignement-apprentissage et la façon dont les enseignants s'y prennent pour lui donner du sens. La décision de réaliser une recherche collaborative n'a donc pas été difficile à prendre, même qu'elle m'a semblée très naturelle.

Ceci étant dit, la préparation nécessaire pour mener ce type de recherche m'a surpris. Entre autres, l'élaboration du cadre des explorations sémantiques fut longue et ardue. Pourtant, elle s'est révélée indispensable (1) pour mon apport provenant de la recherche dans les rencontres avec les enseignants et (2) pour l'avancement des connaissances sur le sens de la factorisation en didactique des mathématiques. C'est ce cadre conceptuel qui m'a habité tout au long de mon projet et qui a guidé mes interactions avec Annie et Francis. J'ai pu le mettre de l'avant (et le mettre à l'épreuve) aux moments opportuns dans les rencontres, sans perdre de vue l'intérêt des enseignants (Corriveau, 2013). Mais en plus de la préparation exigeante, plusieurs défis se sont dressés devant moi.

Quelques défis importants rencontrés pendant la recherche

D'abord et avant tout, le premier défi auquel j'ai fait face concerne le climat relationnel à instaurer dans les rencontres réflexives d'une recherche collaborative. Dans sa thèse doctorale, Corriveau (2013) décrit bien cet enjeu :

> Cependant, le fait de regrouper les enseignants n'est pas garant d'une réelle collaboration. Bien que la recherche collaborative est en soi une invitation à coopérer, à travailler ensemble (Maheux, sous presse)[59], il est nécessaire d'installer un véritable climat de travail conjoint. […] Il y a donc un climat

[59] Ce chapitre de livre a été publié en 2013 (voir bibliographie).

> de dialogue à installer au sein du groupe – une valorisation des contributions des uns et des autres, une attitude d'ouverture – qui constitue un véritable défi. (Corriveau, 2013, p. 85)

Pour ma part, ce qui m'a grandement aidé à instaurer ce climat de travail conjoint repose dans le fait que je connaissais les enseignants avant le projet, et aussi dans le fait qu'Annie et Francis sont collègues depuis plusieurs années et qu'ils se connaissent donc très bien. Le climat de collaboration était, en ce sens, déjà prometteur.

Ensuite, c'est le rôle principal du chercheur collaboratif qui est son plus gros défi : le respect du critère de double vraisemblance à toutes les étapes de la recherche (voir section 3.2.4). L'idée derrière ce critère est la prise en compte en tout temps des contraintes, des préoccupations, des limites et des ressources autant de la recherche que de la pratique enseignante (Bednarz, 2013a). Sans cela, comme le soutient Proulx (2013), on passerait à côté des intentions de l'approche collaborative. Il est vrai que de maintenir le cap sur la double vraisemblance n'est pas chose facile. Personnellement, c'est dans l'étape de co-production que j'ai eu le plus de difficulté à le faire, où « l'enjeu pour le chercheur collaboratif [est] de faire en sorte, à travers l'analyse des données et la mise en forme des résultats, que les savoirs produits prennent une forme utile à la fois aux praticiens et aux chercheurs. » (Barry et Saboya, 2015, p. 52) Pour ma part, j'ai trouvé la tâche d'expliciter mon apport dans les co-constructions très complexe. En connaissant, bien évidemment, mon point de vue sur le sens de la factorisation, j'ai eu tendance à vouloir seulement montrer celui des enseignants dans les chapitres 4 et 5. Or, ceci ne témoignerait pas d'une collaboration, alors qu'il y en a bel et bien eu une. Ce qui m'a réellement aidé à surmonter ce défi, c'est l'inclusion de mes commentaires à chaud en italique dans l'analyse des données provenant de mon journal de bord (voir section 3.4.4). En me donnant l'opportunité de partager mes pensées, mes impressions et mes réflexions autour des discussions que nous avons eues, j'ai pu me recentrer sur le rôle que j'ai eu dans le projet.

À la lumière de ce qui précède, un dernier défi s'est manifesté pendant l'étape de co-opération cette fois-ci. J'ai dû me remémorer, à quelques reprises pendant les rencontres réflexives, que je n'étais pas là pour former les enseignants en leur présentant des « solutions » grâce à mon cadre des explorations sémantiques, mais bien pour partager mon expertise avec les praticiens pour avancer sur un objet qui touche et intéresse la pratique et la recherche. Proulx (2013) soulève d'ailleurs ce danger :

> De plus, dans cette collaboration, le danger est grand de perdre son orientation de chercheur et de s'investir dans la formation, ou dans la participation à l'évolution du praticien. C'est dans ce glissement que le chercheur en didactique devient alors plus intéressé à changer les choses en participant à leur amélioration, qu'à contribuer à son domaine de recherche. […] Son objectif n'est pas directement d'aider la pratique, mais de mieux comprendre un phénomène à investiguer. (Proulx, 2013, p. 341)

Effectivement, il ne faut jamais oublier que la collaboration sert oui à questionner la pratique et à tenter de l'améliorer, mais elle est d'abord et avant tout le lieu de collecte de données pour le chercheur collaboratif. D'une certaine façon, il s'agit encore une fois de respecter le critère de double vraisemblance.

CONCLUSION

Une lacune au niveau du sens à accorder à la factorisation au secondaire a été mise en évidence dans la problématique de ce mémoire. La prédominance des techniques de factorisation et de l'aspect manipulatoire et procédural de l'enseignement-apprentissage de ce concept (ordre syntaxique) m'a amené à me questionner sur ce qui est réellement fait dans les écoles par les enseignants à ce sujet. Plusieurs difficultés ont aussi été soulevées dans des études antérieures, telles que reconnaître des expressions équivalentes, identifier si un polynôme se factorise ou s'il est déjà factorisé au maximum, choisir la bonne technique de factorisation ou trouver les facteurs communs entre plusieurs termes algébriques, et semblent démontrer une certaine préoccupation de la part des praticiens enseignants.

Quoique mes recherches approfondies aient permis de faire ressortir quelques pistes de solution dans la recherche en didactique des mathématiques pour améliorer l'apprentissage et la compréhension des élèves face à la factorisation (p. ex. l'approche par les représentations visuelles et l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement de la discipline), aucun chercheur n'a adopté une approche *in vivo*, pour reprendre les termes de Proulx (2013). En effet, aucune recherche ne permet d'aller chercher le point de vue des enseignants grâce à une collaboration avec eux. Il m'a alors semblé pertinent et important d'aller confronter ces pistes de solution, ces interventions pour donner du sens à la factorisation provenant de la recherche avec les préoccupations et les contraintes du milieu scolaire. Ainsi, un manque dans les recherches s'est fait ressentir concernant cet enjeu et il me paraissait indispensable de travailler conjointement *avec* les enseignants, et non *sur* les enseignants comme l'ont fait Abou Raad et Mercier (2009) et Simon (2013) par le passé, par exemple. D'où la nécessité, pour moi, de mener une recherche collaborative pour faire rencontrer les expertises de la recherche et de la pratique pour investiguer un objet de la pratique enseignante qui intéresse et préoccupe ces deux mondes : l'enseignement-apprentissage de la factorisation au secondaire. Le tout dans l'objectif de co-élaborer des interventions pour donner du sens au concept à travers le cadre des explorations sémantiques.

Pour mieux comprendre ce que signifie *donner du sens* à la factorisation – et pour me donner des balises à ce sujet – j'ai été amenée à bâtir un cadre conceptuel à travers les recherches portant sur la factorisation. J'y ai dégagé ce que j'ai appelé des « explorations sémantiques ». Voici les quatre de départ (voir tableau 2.5) : (1) l'objet mathématique, le concept de factorisation, (2) les différentes représentations, (3) l'aspect historique de la factorisation et (4) l'utilité de la factorisation, situer le concept. Chacune de ces explorations sémantiques regroupe de deux à trois composantes qui sont en fait des interventions provenant de la recherche qui visent à donner du sens à la factorisation au secondaire et qui permettraient d'aller au-delà de la dimension syntaxique de l'enseignement du concept. « Amener les élèves à reconnaître la relation bidirectionnelle entre la factorisation et le développement » est un exemple de composante pour la première exploration sémantique et « proposer le recours à des représentations visuelles » en est un autre, mais cette fois-ci pour la deuxième exploration sémantique. En plus, les contrôles sémantiques et syntaxiques étant interreliés et indissociables (Kouki, 2018 ; Saboya *et al.*, 2015), ces quatre explorations sémantiques sont liées à cinq habiletés qu'il est nécessaire de développer pour factoriser des polynômes (voir tableau 2.4). Dans l'ensemble, le cadre des explorations sémantiques ainsi que celui des habiletés m'ont guidé tout au long de cette recherche collaborative.

Une fois mes réflexions conceptuelles autour de la factorisation abouties en un cadre sur les explorations sémantiques, il est venu le temps de mettre à l'épreuve l'objet de recherche pour m'assurer qu'il est bel et bien un objet de préoccupation pour les enseignants. Les rencontres de co-situation individuelles menées avec Annie et Francis ont été menées à cette fin. Lors de ces rencontres, j'ai aussi eu l'occasion de discuter avec eux sur la façon dont ils envisagent et enseignent la factorisation. C'est ce qui a clos la première étape de la recherche collaborative, l'étape de co-situation. La deuxième étape de la recherche collaborative, soit l'étape de co-opération, comprend deux rencontres de co-opération entre tous les partenaires de la recherche où a pris place l'activité réflexive. C'est à ce moment-là que nous avons partagé nos connaissances, nos points de vue et nos expériences provenant de nos milieux respectifs pour co-élaborer des interventions visant à donner du sens à la factorisation (objectif de la recherche), à travers le cadre des explorations sémantiques développé et ce, toujours en prenant en considération les contraintes et préoccupations de tous.

Enfin, j'ai pu me lancer dans l'analyse des données récoltées, en commençant par l'écoute des enregistrements audios qui ont servi à la rédaction de mon journal de bord. Puis, brièvement, un travail de codage de mes notes avec la grille d'analyse des explorations sémantiques (voir tableau 3.2) et celle des habiletés à développer pour factoriser (voir tableau 3.3) m'a permis d'une part d'identifier quelles composantes des explorations sémantiques et quelles habiletés les enseignants touchaient dans leur pratique avant la recherche, et d'autre part de faire ressortir cinq épisodes dans les rencontres réflexives qui représentent des points tournants pour la co-construction. Lors de l'analyse des données, le point de vue des enseignants et celui de la chercheuse ont toujours été pris en considération (critère de double vraisemblance). À la lumière de ce qui précède, pour ce qui est de la dernière étape de la recherche collaborative, l'étape de co-production, les résultats saillants du projet sont doubles : (1) pour la recherche avec le développement du cadre des explorations sémantiques (voir tableau

5.1) – et la naissance de la cinquième exploration sémantique liée aux contextes – et (2) pour la pratique avec la séquence d'enseignement co-élaborée de la factorisation pour lui donner du sens (voir tableau 4.4). Il m'est important d'ajouter que la séquence d'enseignement prend ses ancrages sur les composantes des explorations sémantiques qui ont été discutées conjointement pendant les rencontres réflexives.

Retour sur l'objectif et les questions de recherche

Mon objectif de recherche est de **co-élaborer, avec des enseignants du secondaire, des interventions pour enseigner la factorisation visant à donner du sens à ce concept pour les élèves à travers le cadre des explorations sémantiques.**

L'objectif de la recherche se décline en deux questions de recherche.

1) *Avant les rencontres réflexives, comment les enseignants envisagent-ils et enseignent-ils la factorisation dans les écoles secondaires québécoises? Quelles composantes des explorations sémantiques sont mobilisées par les enseignants?*

Les rencontres individuelles de co-situation avec chaque enseignant participant me permettent de répondre à cette première question. De fait, les analyses de la rencontre avec Annie (voir section 4.1.1) et de celle avec Francis (voir section 4.1.2) ont fait ressortir plusieurs éléments à ce sujet : comment les enseignants introduisent la factorisation avec les élèves, l'ordre de présentation des techniques de factorisation, les prolongements du concept qu'ils trouvent importants au secondaire et plus encore. En bref, ces deux enseignants n'ont pas tout à fait la même vision et ne proposent pas exactement le même enseignement de la factorisation. D'une part, Annie insiste sur l'utilité de la factorisation comme méthode alternative pour diviser des polynômes et voit le concept comme étant très manipulatoire. Les habiletés pour factoriser sont importantes pour elle, elle veut s'assurer que les élèves sont en mesure de bien appliquer les techniques de factorisation au bon moment. D'autre part, Francis s'intéresse un peu plus au sens de la factorisation et il insiste sur le *pourquoi* et le *comment* les techniques pour factoriser fonctionnent. Mais dans l'ensemble, les deux enseignants sont préoccupés par l'enseignement-apprentissage de la factorisation, si bien qu'ils se sont montrés très ouverts face aux pistes de solution issues de la recherche que j'ai apportées à base de discussion. Ils se sont impliqués pleinement dans les réflexions et les discussions du projet. Le tableau 4.1, qui correspond à la synthèse des rencontres de co-situation avec chacun des deux enseignants compile les différentes explorations sémantiques qu'Annie et Francis touchent dans leur pratique. Ce tableau m'a permis de faire le point sur ce que font exactement les enseignants à travers le cadre des explorations sémantiques et ses composantes avant les rencontres réflexives de co-opération. Ainsi, il ressort que trois des quatre explorations sémantiques sont abordées par les enseignants dans leur enseignement, seule l'exploration portant sur l'aspect historique n'est pas présente dans leur pratique (exploration 3). Toutefois, plusieurs composantes de ces trois explorations sémantiques (explorations 1, 2 et 4) ne sont pas mentionnées dans le discours d'Annie et de Francis et celles qui le sont ne sont pas toujours exprimées et traitées de la même façon par les deux enseignants.

En outre, dès l'étape de co-situation, quatre nouvelles composantes non prévues dans le cadre des explorations sémantiques sont apportées par les enseignants. Deux d'entre elles concernent la première exploration sémantique : « utiliser des exemples numériques, faire des liens avec les nombres » et « montrer et expliquer l'origine des techniques de factorisation (et des formules en mathématiques) ». Les deux autres se placent sous la quatrième exploration sémantique : « faire voir la factorisation comme un outil plus efficace pour diviser des expressions algébriques » et « présenter des prolongements de la factorisation au cégep pour situer le concept ».

Pour ce qui est de l'exploration sémantique 1, les deux enseignants insistent sur le lien bidirectionnel entre la factorisation et le développement algébrique et utilisent des exemples numériques dans leur enseignement. Ils introduisent une factorisation au secondaire qui serait unique (et même maximale pour Francis). Francis mentionne en plus l'importance de montrer l'origine des techniques de factorisation, ce qu'Annie ne semble pas faire. En ce qui concerne l'exploration sémantique 2, bien qu'il ne soit pas question de manipulations de représentations visuelles, les deux enseignants font des liens – la plupart du temps oralement – entre la factorisation et la recherche des dimensions d'un rectangle.

L'exploration sémantique 4 touchant à l'utilité de la factorisation est centrale pour Annie, ce qui n'est pas le cas de Francis. De fait, je le rappelle, celle-ci introduit la factorisation comme étant un outil, une méthode alternative pour diviser des polynômes. Mais elle déplore le fait que les prolongements sont, à son avis, plutôt présents au cégep et non au secondaire. En revanche, Francis soutient que c'est plutôt l'étude de la fonction du second degré qui est le prolongement le plus important de la factorisation. Annie précise que la fonction du second degré n'est pas un prolongement de la factorisation alors que c'est le cas pour Francis.

L'apport et ajout de ces nouvelles composantes et l'expression des autres composantes des explorations sémantiques par les enseignants ont contribué à élargir et à peaufiner le cadre des explorations sémantiques élaboré dans le chapitre II de ce mémoire.

2) *Dans les rencontres réflexives, comment se caractérisent les interventions co-construites? Sur quelles explorations sémantiques du cadre conceptuel s'appuient-elles?*

Les enseignants et moi-même avons réussi à co-élaborer [60] une séquence d'enseignement de la factorisation composée de plusieurs interventions qui lui

[60] Il s'agit bel et bien d'un travail collaboratif au sens du modèle de Desgagné et Bednarz, alors que chaque partenaire de la recherche a contribué à l'élaboration de la séquence en apportant son expertise

donnerait du sens, tout en nous appuyant sur les composantes des explorations sémantiques qui ont été discutées dans les rencontres (voir tableau 4.4). Plus spécifiquement, cette séquence est composée de plusieurs étapes d'ordre sémantique qui sont en fait des interventions présentées dans un ordre précis qui donneraient du sens à la factorisation. Par exemple, la présentation – et la manipulation par les enseignants – de la factorisation avec les représentations en forme ou encore l'exploitation des contextes pour travailler la compréhension des élèves. Ces interventions reposent non seulement sur les diverses composantes des explorations sémantiques, mais aussi sur le savoir d'expérience des enseignants. De fait, comme je l'ai mentionnée dans le chapitre précédent (voir section 5.3), les composantes sont des interventions possibles en classe lorsqu'elles sont caractérisées dans la séquence d'enseignement.

En plus d'interventions, les enseignants et moi-même avons retenu quelques situations qui aideraient à donner du sens à la factorisation. Notamment, nous avons co-construit une mise en situation faisant intervenir la résolution d'une équation du second degré pour l'amorce du chapitre de la factorisation dans le but de créer le besoin d'apprendre le concept par les élèves (voir section 4.3.2). Nous avons aussi conservé plusieurs situations à contextes dits « géométriques » dans notre séquence, comme celle de *L'enclos*.

De manière générale, je crois qu'il est même possible d'affirmer que nous sommes allés plus loin que l'objectif de la recherche : les rencontres de cette recherche collaborative nous ont permis d'élargir et de peaufiner le cadre des explorations sémantiques. En effet, de nouvelles composantes ont fait leur apparition qui sont celles relevées lors de la rencontre de co-situation avec les enseignants. De plus, une nouvelle

---

provenant de son milieu, dans une optique d'interinfluence. Pour plus de détails concernant l'apport de la recherche et l'apport de la pratique dans cette co-élaboration, voir la section 5.3.1.

exploration sémantique a été développée – qui est l'importance des contextes en factorisation et dont les composantes sont « amener à modéliser une situation grâce à la factorisation » et « faire réfléchir sur la forme que doit prendre la factorisation d'un polynôme en contexte » – et certaines composantes se sont révélées moins porteuses de sens que prévu, comme « amener à comprendre pourquoi certaines expressions algébriques ne se factorisent pas » ou « proposer la lecture de textes historiques ». Le développement du cadre des explorations est ainsi un résultat tout aussi important que la séquence d'enseignement, puisque cette dernière a été co-construite à travers l'ensemble des composantes (celles de départ et les nouvelles). Somme toute, l'objectif de la recherche a été atteint !

Les retombées directes : ce que les enseignants retiennent du projet

À la toute fin de la deuxième et dernière rencontre de co-opération, j'ai demandé aux enseignants ce qu'ils retiennent de leur participation au projet et ce qu'elle leur a apporté. Francis a d'abord mentionné que la recherche lui a permis de se rendre compte qu'il « n'était pas pire » pour créer un fil conducteur porteur de sens dans son enseignement de la factorisation. Il trouve que certaines de ses interventions étaient déjà très bien en comparaison avec ce que nous avons fait dans les rencontres. Mais ce qu'il retient le plus de nouveau, ce sont les représentations en forme. Il affirme être content d'avoir découvert leur utilité, alors qu'il croyait auparavant qu'elles étaient un outil purement théorique. Selon Francis, les représentations visuelles et géométriques ont leur place dans l'enseignement-apprentissage de la factorisation, car elles permettent de ne pas rester strictement dans le *manipulatoire*. Annie va dans le même sens que Francis à ce sujet : elle croyait que les tuiles algébriques, par exemple, étaient impertinentes pour des élèves en SN de la quatrième secondaire. Or, nos échanges lui ont fait voir qu'elles pouvaient être très pertinentes pour les élèves qui ont besoin de comprendre le sens des concepts mathématiques. Elle confirme vouloir les utiliser pour le chapitre de la factorisation l'année prochaine. En résumé, les deux enseignants voient un bénéfice pour l'élève dans la manipulation des représentations en forme dans la classe du secondaire.

Ultimement, Annie a raconté les difficultés d'une de ses élèves en lien avec les techniques de factorisation, où cette dernière est en mesure d'appliquer ces techniques une à la fois, mais pas lorsqu'elles sont toutes mélangées (comme en examen). Dans ce cas, l'élève semble perdre ses repères et n'arrive pas à factoriser les polynômes en jeu, car elle ne comprend pas ce qu'elle fait normalement quand elle factorise. Pour Annie, notre collaboration lui a donc fourni des outils pour intervenir avec ce type d'élève, comme le soutient la référence suivante :

> Annie : Au travers nos rencontres, je trouve des moyens de lui expliquer pour qu'elle comprenne ce qu'elle est en train de faire. Je pense que des trois rencontres, c'est ça qui va me servir le plus dans mon enseignement l'année prochaine, parce que là j'ai fini la factorisation. Mais c'est ça qui va me servir le plus, d'aller verbaliser et mettre du sens à un élève qui est en difficulté.

Cette affirmation de l'enseignante montre une fois de plus l'évolution de ses perceptions de la factorisation grâce au projet (voir section 5.4.2). Comme Annie avait une vision plutôt manipulatoire du concept, le fait qu'elle retienne des « moyens » de donner du sens à la factorisation pour les élèves en difficulté est super !

Les retombées générales de la recherche

Les retombées de cette recherche collaborative sont doubles : pour le monde de la recherche (voir section 3.5.1) et pour le monde de la pratique (voir section 3.5.2). D'un côté, l'étude a permis d'éclairer la recherche en didactique des mathématiques quant à la façon dont les enseignants envisagent et enseignent le concept en classe du secondaire, à travers les explorations sémantiques. Ceci étant dit, l'apport principal de ce mémoire pour la recherche en didactique est sans aucun doute l'élaboration et le développement du cadre conceptuel des explorations sémantiques et de ses composantes. Ce cadre a agi de ligne directrice tout au long de cette recherche et a contribué à élargir nos connaissances autour de l'enseignement-apprentissage de la factorisation et du sens derrière ce concept, et ce, du point de vue des enseignants.

D'un autre côté, la retombée la plus importante pour la pratique enseignante[61] est sans surprise la séquence d'enseignement de la factorisation pour lui donner du sens qui a été co-construite par les enseignants participants et moi-même et ses interventions. En plus d'avoir agi, d'une certaine façon, de développement professionnel pour Annie et Francis, cette séquence constitue du matériel didactique pour la communauté enseignante. De façon plus large encore, une éventuelle modification (et amélioration) de l'enseignement de la factorisation de la part des enseignants grâce à cette séquence pourrait avoir un grand impact sur l'apprentissage et la compréhension des élèves face à ce concept difficile et abstrait. Et ceci serait, bien évidemment, une conséquence fantastique et inespérée.

Tout compte fait, la diffusion des résultats de cette recherche collaborative pourrait servir à ouvrir le dialogue autour de l'enseignement-apprentissage et du sens de la factorisation au secondaire, et ce autant dans la formation initiale des futurs enseignants de mathématiques que dans la formation continue des enseignants en exercice.

Les limites de la recherche et de ses résultats

Bien que le cadre des explorations sémantiques ait beaucoup été enrichi grâce à l'expertise des enseignants praticiens et à la collaboration de la recherche, les cinq explorations sémantiques et leurs composantes demeurent tout de même des « explorations ». C'est-à-dire qu'elles sont des pistes de solution, des suggestions pour

[61] L'apport direct du projet pour Annie et Francis est explicité dans le point précédent, sous le titre « Les retombées directes - Ce que les enseignants retiennent du projet ». Pour cette raison, je ne reviendrai pas en détail sur les retombées de la recherche pour les deux enseignants participants.

donner du sens à la factorisation, puisqu'elles n'ont pas fait l'objet d'une expérimentation dans les écoles. En fait, la même limite s'applique à l'autre résultat important de cette recherche, soit la séquence d'enseignement de la factorisation. Certes, cette séquence a été co-construite au carrefour des préoccupations et des contraintes de la pratique et de la recherche, et nous croyons fortement qu'elle permette de donner du sens à la factorisation et à ses techniques pour les élèves. Mais, encore une fois, elle n'a pas été testée avec des élèves de la quatrième secondaire. Il n'a pas été possible, dans le cadre de cette étude, de reconnaître sa portée véritable en classe du secondaire, ni les manières dont les enseignants pourraient la déployer effectivement en classe ou même comment les élèves la recevraient.

D'ailleurs, une autre limite du projet réside dans le fait que l'expérience des deux enseignants participants en plus des manuels scolaires sommairement analysés dans le chapitre 2 de ce mémoire sont en lien seulement à la séquence SN de la quatrième secondaire. Pourtant, la factorisation est un concept qui se doit d'être vu aussi en quatrième et cinquième secondaire de la séquence TS selon le programme de formation (MELS, 2007).

Enfin, une dernière limite porte sur l'absence de la technologie dans le cadre des explorations sémantiques. Plusieurs études se sont déjà intéressées à la technologie dans l'enseignement-apprentissage de l'algèbre et même de la factorisation (Hitt et Kieran, 2009 ; Kieran et Drijvers, 2006), mais elle n'a pas fait l'objet d'une recherche approfondie pour ce mémoire.

Les prolongements de la recherche

Comme premier prolongement, et pour aller au-delà de la limite principale de cette recherche, il serait intéressant d'aller voir la viabilité de la séquence d'enseignement de la factorisation dans des classes du secondaire, avec des élèves. En plus, comme l'histoire des mathématiques n'a pas beaucoup résonné chez les enseignants et que nous n'avons pas eu le temps de pousser très loin nos réflexions sur le sujet, elle pourrait certainement être le cœur d'une recherche subséquente. Le but pourrait être de creuser plus loin la troisième exploration sémantique et son potentiel pour donner du sens à la factorisation, tout en développant des activités signifiantes à caractère historique par exemple.

Comme je l'ai mentionné à plusieurs reprises, les contextes sont importants dans l'enseignement-apprentissage de la factorisation, mais ils semblent limités et peu nombreux. Il serait alors intéressant d'analyser les contextes qui sont réellement utilisés dans ce chapitre – peut-être à travers l'analyse de manuels scolaires – et tenter d'en trouver des nouveaux qui aideraient à donner du sens au concept pour les élèves. Ceci pourrait permettre de diversifier les situations contextuelles choisies par les enseignants pour éviter le développement d'automatismes chez les élèves, comme ça peut être le cas avec la présence unique de contextes dits « géométriques », pour reprendre le terme de Francis. Plusieurs liens seraient aussi à tisser avec ce qui existe déjà dans la recherche en didactique des mathématniques (p. ex Bednarz et Proulx, 2009 ; Janvier, 2009), pour appuyer et éclairer cette cinquième et nouvelle exploration sémantique.

Enfin, l'utilisation de la technologie permettrait sûrement de bonifier le cadre des explorations sémantiques développé pour donner du sens à la factorisation. Une recherche centrée sur cet aspect laissé de côté dans ce mémoire ne pourrait qu'être positive pour la compréhension éventuelle des élèves lorsqu'ils factorisent.

ANNEXE A

ACTIVITÉ À CARACTÈRE HISTORIQUE DU MANUEL VISIONS : L'ALGORITHME D'AL-KHWARIZMI[62]

[62] (Cardin *et al.*, 2008, p. 167)

ACTIVITÉ 3 L'algorithme d'Al-Khawarizmi

Au début du IX^{e} siècle, le mathématicien arabe Muhamed Ibn Mussa Al-Khawarizmi a écrit un traité dans lequel il explique la façon de résoudre une équation de degré 2. Son algorithme peut être appliqué à toute équation de ce type. Voici comment il pose le problème :

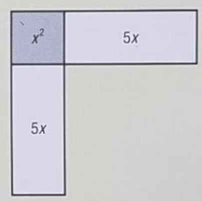
Un algorithme est une suite d'opérations que l'on doit effectuer systématiquement pour résoudre un problème. Le mot *algorithme* vient justement du nom d'Al-Khawarizmi.

« Un carré et dix racines sont égaux à 39 dirhams. »

Le dirham est une ancienne mesure de poids arabe, turque et perse. C'est aujourd'hui l'unité monétaire du Maroc.

En notation algébrique actuelle, cela se traduit par l'équation $x^2 + 10x = 39$.

Pour résoudre cette équation, Al-Khawarizmi construit la figure ci-contre. Il trace d'abord le carré gris dont les côtés mesurent x. Il sépare ensuite le terme $10x$ en deux parties qu'il représente par les rectangles blancs. Selon l'équation, l'aire totale de cette figure est égale à 39.



a. Reproduisez cette figure et, comme le propose Al-Khawarizmi, complétez-la pour former un carré. Quelle est l'aire de la partie que vous avez ajoutée ? Quelle est l'aire du carré ainsi obtenu ? Déduisez-en la valeur de x.

b. Al-Khawarizmi ne tenait compte que des solutions positives. Quelle est la solution négative de cette équation ?

c. Il est possible de représenter cet algorithme à l'aide d'une suite d'équations équivalentes comme il est illustré ci-dessous. Complétez ces équations en expliquant chaque étape.

$$x^2 + 10x + \square = 39 + \square$$
$$(\square + \square)^2 = \square$$
$$\square = \square \text{ ou } \square = \square$$
$$x = \square \text{ ou } x = \square$$

d. Utilisez la même démarche pour résoudre l'équation $x^2 + 8x = 4$.

e. Transformez l'équation $2x^2 - 12x + 10 = 0$ en une équation équivalente qu'on pourrait résoudre en suivant les étapes décrites en **c.** Résolvez ensuite cette équation.

ANNEXE B

LE COURRIEL DE RECRUTEMENT DESTINÉ AUX ENSEIGNANTS

Bonjour,

Je suis une étudiante à la maîtrise en didactique des mathématiques à l'Université du Québec à Montréal. Dans le cadre de ce programme de deuxième cycle, j'ai le plaisir de mener un projet de recherche dans mon domaine pour l'écriture de mon mémoire, autour d'un sujet qui me préoccupe : l'enseignement de la factorisation au secondaire.

Je suis présentement en recrutement pour la réalisation de cette recherche collaborative, je désire travailler avec deux enseignant(e)s de mathématiques au secondaire. L'idée dans ce type de recherche est d'établir un climat de collaboration et de partenariat entre chercheuse et participants, où les contraintes et les préoccupations des deux mondes, celui de la recherche et celui de la pratique enseignante, sont prises en considération.

Avant de vous exposer les modalités de participation de ce projet, voici une brève description de la recherche, de sa problématique et de ses objectifs.

La factorisation est importante au secondaire. En effet, elle occupe une grande place dans le programme de formation de l'école québécoise en quatrième et cinquième secondaire, dans les séquences Sciences Naturelles (SN) et Technico-Sciences (TS). Elle possède aussi de nombreux prolongements, comme la fonction du second degré et la résolution d'équations et d'inéquations du second degré à une ou deux variables. Pourtant, il est soulevé, par plusieurs recherches ainsi que par mes propres observations et par les dires d'enseignants, que les élèves éprouvent diverses difficultés face à ce concept mathématique. Malheureusement, il est possible de constater que le programme de formation ne propose aucune piste sur comment enseigner la factorisation, alors qu'un bref survol des manuels scolaires souligne la présence de procédures manipulatoires, sans explication du pourquoi celles-ci fonctionnent et d'où elles proviennent. Peu de ressources sont donc disponibles pour aider les enseignants à donner du sens à la factorisation et ainsi pouvoir agir sur les difficultés.

La recherche, quant à elle, propose quelques pistes pour aborder et enseigner la factorisation pour lui donner du sens : par exemple l'utilisation des représentations visuelles diverses ou l'utilisation de l'histoire des mathématiques. J'aimerais pouvoir en discuter avec vous pour avoir vos impressions, les potentialités de telles explorations. Car en fait, le monde de la recherche a très peu d'informations sur ce qui est réellement fait dans les écoles, et il a encore moins d'informations quant à l'opinion des enseignants sur ces pistes provenant de la recherche autour de la factorisation.

Je cherche donc à en savoir plus sur l'enseignement de la factorisation au Québec, en travaillant conjointement avec deux enseignant(e)s de mathématiques qui enseignent (ou ont enseigné) la factorisation dans leurs classes et qui sont préoccupés et intéressés par ce concept. Je veux travailler de pair avec eux pour d'une part, comprendre leur vision de l'enseignement-apprentissage de la factorisation et comprendre comment ils s'y prennent avec les élèves pour donner du sens à ce concept. Et d'autre part, co-construire avec eux des interventions visant à donner du sens au concept de factorisation, en considérant à la fois la recherche et la pratique.

En ce sens, j'aimerais explorer avec vous les pistes que la recherche propose (par ex. les représentations visuelles ou l'histoire des mathématiques) en plus d'explorer les ce que vous faites en classe et ce que vous trouvez intéressant pour travailler la factorisation. Ce partage d'expertise entre chercheuse et enseignant(e)s nous permettrait de co-élaborer des interventions pour aborder et enseigner la factorisation en lui donnant plus de sens pour les élèves. L'utilisation de ces interventions en classe pourrait entrainer une diminution des difficultés ressenties par les élèves et une meilleure compréhension de ces derniers.

La participation à ce projet de recherche implique la présence à trois rencontres espacées d'environ un mois. La première rencontre est une rencontre individuelle d'au plus une heure, vers la fin du mois de septembre 2020, selon vos disponibilités. Elle se déroulerait à votre école, si possible avec les mesures sanitaires en place dues à la Covid-19 (tout en respectant la distanciation physique de 2 mètres et le port du masque si nécessaire). Autrement, elle aurait lieu en ligne, sur la plateforme de votre choix entre Zoom et Microsoft Teams. Cette rencontre me permettrait de vous présenter le projet plus en détail et de répondre à vos possibles questions. Je vous remettrais aussi le formulaire de consentement avec toutes les informations nécessaires à la protection de votre identité. Cette première rencontre est une occasion de discuter du projet, de votre enseignement de la factorisation et de votre intérêt pour le projet de recherche.

Les deux autres rencontres sont des rencontres réflexives avec tous les partenaires de la recherche d'une durée approximative de 2h30. Elles prendraient place au sein de l'école d'un des participants, toujours si cela est possible avec les mesures sanitaires de la pandémie. Si ce n'est pas le cas, tout comme pour la première rencontre, les rencontres réflexives auraient lieu en ligne sur Zoom ou Teams. La première rencontre réflexive serait vers la fin du mois d'octobre 2020 et la deuxième vers la fin du mois de novembre 2020. Ces rencontres constitueraient l'expérimentation de la recherche à proprement dit. Ce seraient des moments d'interactions entre les partenaires de la recherche menant à la co-construction d'interventions pour l'enseignement de la factorisation.

Ainsi, je suis à la recherche d'enseignants collaborateurs intéressés par mon projet de recherche et qui voudraient venir explorer avec moi l'enseignement de la factorisation au secondaire. Si c'est votre cas et que vous avez des questions, n'hésitez pas à me contacter par courriel.

Merci beaucoup pour votre temps,
Au plaisir de collaborer avec vous!

Florence Gentet
Étudiante à la maîtrise en didactique des mathématiques à l'UQÀM
gentet.florence@courrier.uqam.ca

ANNEXE C

FORMULAIRE DE CONSENTEMENT APPROUVÉ PAR LE COMITÉ ÉTHIQUE DE L'UQAM

UQÀM | Université du Québec à Montréal

FORMULAIRE DE CONSENTEMENT

Titre du projet de recherche

Interventions pour enseigner la factorisation visant à donner du sens à ce concept à travers des explorations sémantiques : co-élaboration entre chercheuse et enseignants du secondaire

Étudiant-chercheur

Florence Gentet

Maîtrise en mathématiques, concentration didactique

(450) 280-0031

gentet.florence@courrier.uqam.ca

Direction de recherche

Mireille Saboya Mandico
Département de mathématiques
(514) 987-3000 poste 2374
saboya.mireille@uqam.ca

David Guillemette
Département de mathématiques
(514) 987-3000 poste 6935
guillemette.david@uqam.ca

Préambule

Nous vous demandons de participer à un projet de recherche qui implique votre présence lors de trois rencontres avec la chercheuse, où vous serez amenés à discuter autour d'un objet de la pratique enseignante : la factorisation au secondaire. Vous aurez alors l'occasion de collaborer avec la chercheuse de ce projet dans l'objectif de co-construire des interventions pour enseigner la factorisation qui permettent de donner du sens à ce concept pour les élèves. Il s'agit d'un projet qui s'inscrit dans le cadre d'études de 2[e] cycle et qui aboutira à la rédaction d'un mémoire de maîtrise.

Avant d'accepter de participer à ce projet de recherche, veuillez prendre le temps de comprendre et de considérer attentivement les renseignements qui suivent.

Ce formulaire de consentement vous explique le but de cette étude, les procédures, les avantages, les risques et inconvénients, de même que les personnes avec qui communiquer au besoin.

Le présent formulaire de consentement peut contenir des mots que vous ne comprenez pas. Nous vous invitons à poser toutes les questions que vous jugerez utiles.

Description du projet et de ses objectifs

Ce projet s'inscrit en didactique des mathématiques et s'intéresse au concept de factorisation. En effet, la factorisation est importante au secondaire, occupant une grande place dans le PFEQ du deuxième cycle du secondaire. Pourtant, plusieurs difficultés existent chez les élèves quant à ce concept mathématique, considéré par plusieurs enseignants comme ardu pour les élèves. De plus, il est possible de constater que le programme de formation ne propose aucune piste sur comment enseigner la factorisation. Un bref survol des manuels scolaires souligne aussi la présence de procédures manipulatoires, sans explication du pourquoi celles-ci fonctionnent et d'où elles proviennent. Peu de ressources sont donc disponibles pour aider les enseignants à donner du sens à la factorisation et ainsi pouvoir agir sur les difficultés. Quant à elle, la recherche propose quelques pistes pour aborder la factorisation en lui donnant du sens : l'utilisation de représentations visuelles diverses et l'utilisation de l'histoire des mathématiques. Ces pistes dépassent l'enseignement de procédures et de *trucs* qui sont souvent dénués de sens. Mais la recherche a très peu d'informations sur ce qui est réellement fait dans les écoles et encore moins d'informations quant à l'opinion des enseignants sur les résultats de la recherche autour de la factorisation.

Nous cherchons donc à en savoir plus sur l'enseignement de la factorisation au Québec, en travaillant conjointement avec deux enseignants de mathématiques qui enseignent ou ont enseigné la factorisation dans leur carrière et qui sont préoccupés et intéressés par ce concept. La chercheuse désire travailler de pair avec eux pour d'une part, comprendre leur vision de l'enseignement-apprentissage de la factorisation et comprendre comment ils s'y prennent avec les élèves pour donner du sens à ce concept. Et d'autre part, co-construire avec eux des interventions visant à donner du sens au concept de factorisation, en considérant à la fois la recherche et la pratique.

Ce projet est une recherche collaborative, où chercheuse et enseignants participants travailleront ensemble lors de trois rencontres, dans l'objectif de discuter autour de l'objet de recherche, la factorisation au secondaire. Le projet de recherche s'échelonnera de la fin du mois de septembre à la fin du mois de novembre, selon les disponibilités des enseignants, où un mois séparera chacune des rencontres du projet.

Nature et durée de votre participation

Vous devrez prendre part à trois rencontres avec la chercheuse. Chacune d'entre elles sera enregistrée de façon audio.

D'abord, la première rencontre consiste en une rencontre individuelle d'une durée d'environ une heure avec chaque participant, vers la fin du mois de septembre, date à fixer à la convenance de l'enseignant. Elle se déroulera à l'école où il travaille, si possible avec les mesures sanitaires en place dues à la Covid-19 (en respectant la distanciation physique de deux mètres et le port du masque si nécessaire). Sinon, la rencontre aura lieu en ligne sur la plateforme Zoom ou Microsoft Teams, selon la préférence de l'enseignant. Cette rencontre est une occasion pour la chercheuse et les enseignants participants de discuter autour de ce projet, c'est-à-dire de poser les balises de la collaboration entre les deux parties. C'est lors de cette première rencontre que les partenaires discuteront du déroulement de l'expérimentation de ce projet et qu'ils négocieront l'objet de la recherche en fonction de leurs contraintes respectives. Plus précisément, lors de cette première rencontre, vous serez amené à parler de votre expérience en tant qu'enseignant et plus particulièrement de votre expérience en enseignement de la factorisation. Vous aurez l'occasion d'expliquer comment vous percevez l'enseignement de la factorisation ainsi que ce que vous faites concrètement dans vos classes avec les élèves à propos de ce concept mathématique. Les modalités des prochaines rencontres seront aussi abordées.

Ensuite, vous serez convié à participer à deux autres rencontres de groupe impliquant la chercheuse et les deux enseignants participants, d'une durée d'environ deux heures et trente minutes. La première rencontre de groupe se déroulera vers la fin du mois d'octobre et la deuxième rencontre vers la fin du mois de novembre, dans l'une des écoles où travaillent les enseignants, encore une fois si les conditions et les mesures liées à la Covid-19 le permettent. Autrement, les rencontres auront lieu en ligne sur Zoom ou Teams. Les moments exacts seront déterminés selon les disponibilités des partenaires de la recherche. Ainsi, à la suite de la rencontre individuelle, il vous aura été demandé de réfléchir à des situations ou à des interventions qui sont riches pour vous au niveau de l'apprentissage de la factorisation et d'autres qui sont difficiles pour les élèves. Lors des rencontres réflexives, vous devrez apporter ces situations et expliciter ces interventions. Pour ce qui est de la chercheuse, elle apportera ce que les recherches proposent autour de la factorisation et de son enseignement-apprentissage. Une discussion s'enclenchera alors autour de ces situations et interventions proposées par différents partenaires. Certaines d'entre elles peuvent même être expérimentées en classe entre les deux rencontres réflexives si jamais vous êtes, au moment de la collecte de données, en train d'enseigner la factorisation. Il s'agira de moments d'interaction entre la chercheuse et les participants, dans une visée de co-élaboration de situations et d'interventions pour enseigner la factorisation visant à lui donner du sens, au carrefour des préoccupations et des contraintes de la pratique et la recherche.

Avantages liés à la participation

Cette recherche collaborative est une occasion de développement professionnel. En effet, les deux rencontres réflexives de groupe prévues seront des moments de réflexion autour de votre pratique enseignante. Vous aurez l'occasion d'élargir vos horizons grâce aux rencontres prévues et poser un regard nouveau sur l'enseignement-apprentissage de la factorisation. Et peut-être même de modifier et d'améliorer vos propres manières d'enseigner ce concept dans vos classes. Ce projet est ainsi une occasion de formation continue.

En plus, la co-construction d'interventions pour enseigner la factorisation au secondaire entre la chercheuse et les enseignants participants aura des retombées sur toute la communauté de la pratique enseignante : elle constituera du matériel didactique pour tous les acteurs du milieu scolaire. Ces manières co-construites d'enseigner la factorisation pourront, entre autres, inspirer et faire réfléchir d'autres enseignants quant à leur enseignement de ce concept mathématique important, mais ardu pour les élèves. Enfin, une modification ou une amélioration de l'enseignement de la factorisation de la part des enseignants permettra éventuellement une amélioration de la compréhension des élèves et une diminution des difficultés vécues par ceux-ci lors de l'apprentissage de ce concept mathématique. Les recherches collaboratives permettent un arrimage entre la pratique et la recherche, permettant à ces deux mondes de se parler et de co-construire ensemble ce qui ne peut être que bénéfique pour les communautés de pratique, de recherche et pour la société.

Risques liés à la participation

En principe, aucun risque n'est lié à la participation à cette recherche.

Confidentialité

Vos informations personnelles ne seront connues que de la chercheuse et ne seront pas dévoilées lors de la diffusion des résultats. Nous procèderons à l'utilisation de noms fictifs pour le mémoire, les transcriptions des rencontres, mais également lors des discussions avec le comité de recherche. De plus, l'école dans laquelle vous travaillez ne sera pas nommée.

Les enregistrements audios et tous les documents relatifs à votre participation à cette recherche seront conservés sous clef durant la durée de l'étude. Les enregistrements seront détruits après les retranscriptions lors de l'analyse des données. L'ensemble des documents seront détruits cinq ans après la fin du dépôt du mémoire.

Participation volontaire et retrait

Votre participation est entièrement libre et volontaire. Vous pouvez refuser d'y participer ou vous retirer en tout temps sans devoir justifier votre décision. Si vous décidez de vous retirer de l'étude, vous n'avez qu'à aviser Florence Gentet verbalement ou par courriel ; toutes les données vous concernant seront détruites.

Indemnité compensatoire

Aucune indemnité compensatoire n'est prévue.

Des questions sur le projet?

Pour toute question additionnelle sur le projet et sur votre participation vous pouvez communiquer avec les responsables du projet: Mireille Saboya Mandico, ((514) 987-3000 poste 2374 ou saboya.mireille@uqam.ca); David Guillemette ((514) 987-3000 poste 6935 ou guillemette.david@uqam.ca); Florence Gentet ((450) 280-0031 ou gentet.florence@courrier.uqam.ca).

Des questions sur vos droits ? Le Comité d'éthique de la recherche pour les projets étudiants impliquant des êtres humains (CERPE) a approuvé le projet de recherche auquel vous allez participer. Pour des informations concernant les responsabilités de l'équipe de recherche sur le plan de l'éthique de la recherche avec des êtres humains ou pour formuler une painte, vous pouvez contacter la coordination du CERPE: (514) 987-3000 poste 6188 ou cerpe-pluri@uqam.ca

Remerciements

Votre collaboration est essentielle à la réalisation de notre projet et l'équipe de recherche tient à vous en remercier.

Consentement

Je déclare avoir lu et compris le présent projet, la nature et l'ampleur de ma participation, ainsi que les risques et les inconvénients auxquels je m'expose tels que présentés dans le présent formulaire. J'ai eu l'occasion de poser toutes les questions concernant les différents aspects de l'étude et de recevoir des réponses à ma satisfaction.

Je, soussigné(e), accepte volontairement de participer à cette étude. Je peux me retirer en tout temps sans préjudice d'aucune sorte. Je certifie qu'on m'a laissé le temps voulu pour prendre ma décision.

Une copie signée de ce formulaire d'information et de consentement doit m'être remise.

____

Prénom Nom

____

Signature

____

Date

Engagement du chercheur

Je, soussignée certifie

(a) avoir expliqué au signataire les termes du présent formulaire; (b) avoir répondu aux questions qu'il m'a posées à cet égard;

(c) lui avoir clairement indiqué qu'il reste, à tout moment, libre de mettre un terme à sa participation au projet de recherche décrit ci-dessus;

(d) que je lui remettrai une copie signée et datée du présent formulaire.

____

Prénom Nom

____

Signature

____

Date

ANNEXE D

QUESTIONS POUR GUIDER LA RENCONTRE DE CO-SITUATION DE CHAQUE ENSEIGNANT PARTICIPANT

<u>Questions pour cerner le participant et apprendre à le connaître en tant qu'enseignant :</u>

- Depuis combien d'années enseignez-vous?
- À quel niveau avez-vous enseigné?
- Combien de fois avez-vous enseigné la factorisation dans votre carrière?
- Enseignez-vous la factorisation cette année?
- Quelles sont vos attentes par rapport au projet?

<u>Questions pour connaître les préoccupations de l'enseignant face à la factorisation :</u>

- Trouvez-vous que le concept de la factorisation est difficile pour les élèves?
- Avez-vous soulevé plusieurs difficultés chez les élèves lors de l'enseignement-apprentissage de la factorisation?
- Êtes-vous préoccupé par l'enseignement-apprentissage de la factorisation?
- Qu'est-ce qui vous préoccupe quant à l'enseignement-apprentissage de la factorisation?
- Avez-vous remarqué certains éléments problématiques lors de votre enseignement de la factorisation?
- Vous sentez-vous bien outillé en ce qui concerne les ressources pédagogiques pour enseigner la factorisation?

Questions pour savoir comment le participant enseigne la factorisation :

- Est-ce que la factorisation est un concept important dans votre planification?
- Comment percevez-vous la factorisation?
- Est-ce que la factorisation est un concept nécessairement manipulatoire et procédural pour vous?
- Comment enseignez-vous la factorisation?
- Utilisez-vous des outils particuliers pour l'enseignement de la factorisation?
- Les techniques présentes dans le PFEQ sont-elles suffisantes pour la compréhension de la factorisation de la part des élèves?
- Comment donnez-vous du sens aux différentes techniques de factorisation?
- Avez-vous déjà utilisé les représentations visuelles ou l'histoire des mathématiques dans votre enseignement de la factorisation?

ANNEXE E

FEUILLES DE MULTIPLICATIONS DE FRANCIS POUR DÉBUTER SON ENSEIGNEMENT DU « PRODUIT SOMME » ET FAIRE DES LIENS ENTRE LE DÉVELOPPEMENT ET LA FACTORISATION

Effectue les multiplications suivantes.
Inscris toutes les étapes de ta démarche, car il y a des liens que tu dois voir.

Exemple:

$$(x+6)(x-4) = x^2+6x-4x-24 = x^2+2x-24$$

Que faire avec 6 et -4 pour obtenir 2 et -24 ?

1) $(x-5)(x-3)$

2) $(x+3)(x+7)$

3) $(x-8)(x+2)$

Effectue les multiplications suivantes, en laissant toutes les traces de ta démarche.

Ex.: $(3x+2)(2x-5) = 6x^2 \boxed{-15x + 4x} - 10$

Comment trouver -15 et 4 $= 6x^2 - 11x - 10$

1) $(-2x+3)(4x-9) =$

2) $(-2x-4)(-2x+6) =$

3) $(4x-1)(3x-6) =$

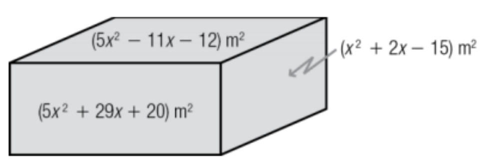
ANNEXE F

LES PROBLÈMES GÉOMÉTRIQUES APPORTÉS PAR ANNIE LORS DE L'ACTIVITÉ RÉFLEXIVE

Ces deux problèmes proviennent d'un devoir sommatif remis par Annie à ses élèves de quatrième secondaire de la séquence SN pour le chapitre de la factorisation. Le premier a fait l'objet d'une discussion lors de la première rencontre réflexive (voir section 4.2.2)

5 Le volume d'un prisme droit à base rectangulaire est représenté par le polynôme $(4x^3 - 12x^2 - 40x)cm^3$. Détermine les dimensions de ce solide.

6 Dans le prisme droit à base rectangulaire ci-dessous, l'aire de chaque face est définie par une expression algébrique. Déterminez les expressions algébriques pouvant correspondre à la longueur, à la largeur et à la hauteur de ce prisme.



ANNEXE G

L'ACTIVITÉ D'AL-KHWARIZMI DU COURS D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Cette activité a été développée par le professeur David Guillemette dans le cadre du cours de quatrième année du baccalauréat en enseignement des mathématiques au secondaire à l'UQAM d'histoire des mathématiques (MAT6221).

UQÀM
Département de mathématiques **Hiver 2020**

MAT 6221 – Histoire des mathématiques.

Activité : Al-Khwārizmī et l'algèbre du monde arabe.

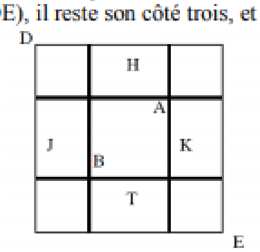
La formation de l'école algébrique arabe a lieu à partir du IXe siècle. Le principal personnage en est sans doute Abū ʿAbdallāh Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (780-850). Le nom, al-Khwārizmī, désigne son lieu de naissance ou, du moins, celui de ses ancêtres, Khwārizm, région d'Asie centrale situé au sud de la mer d'Aral (aujourd'hui Ouzbékistan). On ne sait rien de son enfance ni de son adolescence, ni pour quelle raison et à quel moment de sa vie il se rendit à Bagdad, pour joindre La Maison de la sagesse, une prestigieuse institution scientifique de l'empire arabe de l'époque.

Al-Khwārizmī a d'abord été astronome. Il a écrit plusieurs livres importants d'astronomie, dont un contenant les plus anciennes tables astronomiques arabes de la tradition indienne qui nous soient parvenues. Son ouvrage le plus connu reste cependant l'Abrégé sur le calcul par la restauration et la comparaison. Sa parution est souvent citée comme l'acte de naissance officiel de l'algèbre. Plusieurs copies arabes manuscrites de l'époque nous sont parvenues. Le livre comprend deux grandes parties précédées d'une introduction. Cette dernière commence par les traditionnelles louanges à Dieu et à son Prophète Muhammad. Elle se poursuit par un éloge du calife al-Ma'mûm qui est présenté comme un mécène cultivé et généreux. On apprend que c'est ce dernier qui aurait commandé l'ouvrage à l'auteur « pour rendre plus clair ce qui était obscur et pour faciliter ce qui était difficile ».

Dans la première partie du livre, al-Khwārizmī commence par définir les objets de l'algèbre, c'est-à-dire les nombres (entiers et rationnels positifs, on fait parfois référence à des dirhams la monnaie de l'empire), l'inconnue (racine) et son carré (bien, entendu comme une possession). Puis il présente en phrases, sans symbolisme, le modèle de six équations canoniques, où a, b et c sont des entiers positifs.

Exercice 1 : Voici la procédure qu'al-Khwārizmī propose pour la résolution du 4ᵉ modèle : $ax^2 + bx = c$. Il donne en exemple l'équation à résoudre $x^2 + 10x = 39$.

« Quant à la justification de "un bien et dix racines égalent trente-neuf dirhams", sa figure est une surface carrée de côtés inconnus, et c'est le bien que tu veux connaître et dont tu veux connaître la racine. C'est la surface (AB), et chacun de ses côtés est la racine. Chacun de ses côtés, si tu le multiplies par un nombre parmi les nombres, quels que soient les nombres, sera des nombres de racines, chaque racine étant comme la racine de cette surface. Comme on a dit qu'avec le bien il y a dix de ses racines, nous prenons le quart de dix – et c'est deux et un demi – et nous transformons chacun de ses quarts [en segment] avec l'un des côtés de la surface. Il y aura ainsi, avec la première surface, qui est la surface (AB), quatre surfaces égales, la longueur de chacune d'elles étant comme la racine de la surface (AB) et sa largeur deux et un demi, et ce sont les surfaces (H), (T), (K), (J). Il [en] résulte une surface à côtés égaux, inconnue aussi, et déficiente dans ses quatre coins, chaque coin étant déficient de deux et demi par deux et demi. Alors, ce dont on a besoin comme ajout afin que la surface soit carrée, sera deux et demi par lui-même, quatre fois ; et la valeur de tout cela est vingt-cinq. Or, nous avons appris que la première surface, qui est la surface du bien, et les quatre surfaces qui sont autour de lui et qui sont dix racines, sont [égales à] trente-neuf en nombre. Si on leur ajoute les vingt-cinq qui sont les quatre carrés qui sont dans les coins de la surface (AB), la quadrature de la surface la plus grande, et qui est (DE), sera alors achevée. Or nous savons que tout cela est soixante-quatre, et que l'un de ses côtés est sa racine, et c'est huit. Si on retranche de huit l'équivalent de deux fois le quart de dix – et c'est cinq –, aux extrémités du côté de la surface la plus grande qui est la surface (DE), il reste son côté trois, et c'est la racine de ce bien. »[1]



a) Analysez et exposez la démarche que propose al-Khwārizmī pour la résolution de l'équation.
b) En quoi l'héritage grec influence-t-il la démarche du mathématicien ? En quoi ce dernier s'en éloigne ?

Exercice 2 : Voici maintenant la procédure qu'al-Khwārizmī propose pour la résolution du 5ᵉ modèle : $ax^2 + c= bx$. Il donne en exemple l'équation à résoudre $x^2 + 21 = 10x$.

Quel sera le bien qui lorsqu'on lui ajoute 21 dirhams équivaut à 10 racines de ce montant ? Divise en deux les racines, ce qui donne 5; multiplie 5 par lui-même, tu obtiens 25; retire les 21 qui sont ajoutés au carré; il reste 4; extrais la racine - cela donne 2 - et retire-la de la moitié de la racine, c'est-à-dire de 5; il reste 3; c'est la racine du carré que tu cherches et le carré est 9. Si tu le désires, ajoute cela à la moitié de la racine, ce qui donne 7, qui est la racine du carré que tu cherches et dont le carré est 49. Si tu rencontres un problème qui se ramène à ce cas, examine alors sa justesse à l'aide de l'addition; si tu ne le peux, tu obtiendras certainement (la solution) à l'aide de la soustraction. Parmi les trois cas dans lesquels on doit diviser en deux les racines, c'est le seul où l'on se serve de l'addition et de la soustraction. Sache en outre que si dans ce cas, tu divises en deux la racine, que tu la multiplies par elle-même et que le produit soit plus petit que les dirhams qui sont ajoutés au carré, alors le problème est impossible. Mais s'il est égal aux dirhams, la racine du carré est égale à la moitié de la racine, sans qu'on ajoute ou retire quoi que ce soit.[2]

a) Analysez et exposez la démarche que propose al-Khwārizmī pour la résolution de l'équation.
b) Expliquez les possibles problèmes dont il nous met en garde lors de la résolution.

[1] Traduction française issue de Djebbar, A. (2005). L'algèbre arabe : la genèse d'un art, Paris : Vuibert, pp. 28-29.
[2] A.P. Youschkevitch, Les mathématiques arabes (VIIIe - XVe siècles), Paris : Vrin, 1976.

BIBLIOGRAPHIE

Abou Raad, N. et Mercier, A. (2009). Étude comparée de l’enseignement de la factorisation par un facteur commun binôme, en France et au Liban. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *29*(2), 155-188.

Adler, A. et Adler, P. (1987). *Membership roles in field research* (Qualitative research methods, vol. 6). Sage University papers.

Barbin, E. (1997). Histoire et enseignement des mathématiques : Pourquoi? Comment? *Bulletin AMQ*, *37*(1), 20-25.

Barbin, E. (2006). Apports de l’histoire des mathématiques et de l’histoire des sciences dans l’enseignement. *Tréma*, *26*(1), 20-28.

Bardini, C. (2000). *Le rapport des élèves à la factorisation en fin de Troisième* [Diplôme d’études approfondies, Université de Paris 7 - Denis Diderot].

Barry, S. et Saboya, M. (2015). Un éclairage sur l’étape de co-situation de la recherche collaborative à travers une analyse comparative de deux études en didactique des mathématiques. *Recherches Qualitatives*, *34*(1), 49-73.

Bednarz, N. (2013a). La construction d’une intervention en mathématiques auprès de classes faibles : affronter la double vraisemblance. Dans N. Bednarz (dir.), *Recherche collaboratibe et pratique enseignante : regarder ensemble autrement* (p. 87-95). L’Harmattan.

Bednarz, N. (dir.). (2013b). *Recherche collaborative et pratique enseignante : regarder ensemble autrement*. L’Harmattan.

Bednarz, N. (2013c). Regarder ensemble autrement : ancrage et développement des recherches collaboratives en éducation au Québec. Dans N. Bednarz (dir.), *Recherche collaborative et pratique enseignante : regarder ensemble autrement* (p. 13-29). L’Harmattan.

Bednarz, N. et Dufour-Janvier, B. (1992). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. Dans A. Daife et al. (dir.), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants: didactique des mathématiques, histoire des mathématiques, informatique et enseignement des mathématiques : actes du colloque international du 20 au 22 mai 1992* (p. 21-40). École Normale Supérieure de Marrakech.

Bednarz, N. et Proulx, J. (2009). Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement: Clarifications conceptuelles et épistémologiques. *For the Learning of Mathematics*, *29*(3), 11-17.

Booth, L. (1984). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x*, (5), 5-17.

Boucher, C., Coupal, M., Jacques, M. et Marotte, L. (2009). *Intersection : Mathématique, 2e cycle du secondaire, 2e année, Sciences naturelles (Manuel de l'élève A)*. Graficor Chenelière éducation.

Cardin, J.-F., Hamel, J.-C., Ledoux, A. et Lemay, S. (2008). *Visions : Mathématique Sciences naturelles, manuel de l'élève, volume 1, 2e année du 2e cycle du secondaire*. Les Éditions CEC.

Charbonneau, L. (1991). Du raisonnement laissé à lui-même au raisonnement outillé : l'algèbre depuis Babylone jusqu'à Viète. *Bulletin AMQ*, *décembre*, 9-15.

Charbonneau, L. (2006). Histoire des mathématiques et les nouveaux programmes au Québec : un défi de taille. Dans *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés : Actes du colloque EMF*. Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke.

Clark, K. M. (2012). History of mathematics: illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(1), 67-84.

Corriveau, C. (2013). *Des manières de faire des mathématiques comme enseignants abordées dans une perspective ethnométhodologique pour explorer la transition secondaire collégial* [Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal].

Croset, M.-C. (2007). Prise en compte du contexte algébrique dans la modélisation des connaissances d'un élève. Le cas de la factorisation. *Actes de la conférence EIAH Lausanne 2007, Environnements Informatiques pour l'apprentissage Humain*.

Desgagné, S. (1998). La position du chercheur en recherche collaborative : illustration d'une démarche de médiation entre culture universitaire et culture scolaire. *Recherches Qualitatives*, *18*, 77-105.

Desgagné, S. (2001). La recherche collaborative : nouvelle dynamique de recherche en éducation. Dans M. Anadon et M. L'Hostie (dir.), *Nouvelles dynamiques de recherche en éducation* (p. 51-76). Presses de l'Université Laval.

Desgagné, S., Bednarz, N., Couture, C., Poirier, L. et Lebuis, P. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, *27*(1), 33-64.

Djebbar, A. (2005). *L'algèbre arabe : genèse d'un art*. Vuibert.

Dubet, F. (1994). *Sociologie de l'expérience*. Éditions du Seuil.

Fried, M. N. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science and Education*, *10*(4), 391-408.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *17*(2).

Guay, S., Van Moorhem, A., Amideneau, S., Dionne, F., Ducharme, M., Gagnon, D., Huot, M., Laplante, S., Le Nabec, M. et Roy, M. (2008). *Point de vue : Mathématique séquence sciences naturelles, 2e cycle du secondaire, 2e année, manuel de l'élève*. Éditions Grand Duc.

Guillemette, D. (2016). Épistémologie historique, humanisme et approches socioculturelle: dialogue sur l'histoire des mathématiques. *For the Learning of Mathematics*, *36*(1), 29-33.

Guillemette, D. (2017). History of mathematics in secondary school teachers' training: towards a nonviolent mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *96*, 349-365.

Helfgott, M. (2004). Two examples from the natural sciences and their relationship to the history and pedagogy of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *3*(1-2), 147-164.

Hitt, F. et Kieran, C. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a task-technique theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *14*(2), 121-152.

Hoong, L. Y., Fwe, Y. S., Yvonne, T. M. L., Subramaniam, T., Zaini, I. K. B. M., Chiew, Q. E. et Karen, T. K. L. (2010). Concretising factorisation of quadratic expressions. *Australian Association of Mathematics Teachers*, *66*(3), 19-24.

Hosson, N. (1999). *Raisonnements des élèves lors de l'utilisation d'un matériel de type tuiles algébriques dans la multiplication et la division de polynômes* [Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal].

Jahnke, H. N. (2001). Cantor's cardinal and ordinal infinies: An epistemological and didactic view. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 175-197.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the « whys » and « hows » of using history in teaching mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 235-261.

Janvier, B. (2010). *Analyse conceptuelle : Factorisation (Secondaire IV) [avec la collaboration de Louis Trottier]* [Document non publié]. Université du Québec à Montréal.

Janvier, C. (2009). Contextualisation et représentation dans l'utilisation des mathématiques. Dans C. Garnier et et al. (dir.), *Après Vygotski et Piaget: Perspectives sociale et constructiviste* (3e éd., p. 133-150). De Boeck Supérieur.

Jeannotte, D. (2004). Les tuiles algébriques : un matériel didactique pour l'apprentissage de l'algèbre. *Envol*, *126*, 19-24.

Jonnaert, P. (2001). La thèse socioconstructiviste dans les nouveaux programmes d'études au Québec: Un trompe l'oeil épisté-mologique ? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technilogy Education*, *1*(2), 223-230.

Jonnaert, P. (2007a). *Le concept de compétence revisité*. Éditions des Écoles Nouvelles Africaines-Sénégal.

Jonnaert, P. (2007b). *Le constructivisme comme fondement des réformes contemporaines des systèmes éducatifs*. Éditions des Écoles Nouvelles Africaines-Sénégal.

Jonnaert, P. (2009). Un cadre de référence socioconstructiviste pour les compétences. Dans *Compétences et socioconstructivisme : Un cadre théorique*. De Boeck Supérieur.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbols system of algebra. Dans S. Wagener et C. Kieran (dir.), *Research Issues of the Learning and Teaching of Algebra* (1re éd., p. 167-194). NCTM.

Kieran, C. et Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*(2), 205.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 137-174.

Kouki, R. (2018). L'articulation des dimensions syntaxique et sémantique en algèbre du secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *38*(1), 43-78.

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2012). Évolution de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques au Québec: un parcours sur cent ans des programmes et documents pédagogiques. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *12*(2), 178-213.

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2014). La résolution de problèmes en mathématiques au Québec: évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants. *Éducation et francophonie*, *42*(2), 7-23.

Leitze, A. et Kitt, N. (2000). Using Homemade Algebra Tiles to Develop Algebra and Prealgebra Concepts. *Algebra for All*, *93*(6), 462 à 466-520.

Lenoir, Y. (2009). L'intervention éducative, un construit théorique pour analyser les pratiques d'enseignement. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *12*(1), 9-29.

Maheux, J.-F. (2013). Trois mouvements éthiques en recherche collaborative. Dans N. Bednarz (dir.), *Recherche collaboratibe et pratique enseignante : regarder ensemble autrement*. L'Harmattan.

Matz, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. Dans D. Sleeman et J. S. Brown (dir.), *Intelligent Tutoring Systems* (p. 25-50). Acedemic Press.

Mejía Palomino, M. F. (2004). *Análisis didáctico de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas* [Mémoire de maîtrise, Universidad del Valle].

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS). (2007). *Programme de formation de l'École québécoise: Enseignement secondaire, deuxième cycle*. Québec: Les publications du Québec.

Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (MEES). (2016). *Progression des apprentissages*. Québec: Les publications du Québec.

Morrissette, J. (2013). Recherche-action et recherche collaborative. Quel rapport aux savoirs et à la production de savoirs? *Nouvelles pratiques sociales*, *25*(2), 35-49. https://doi.org/10.7202/1020820ar

O'Connor, J. et Robertson, E. F. (1999). *Al-Khwarizmi biography*. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi/

Patenaude, P. et Mathieu, P. (2020a). Décomposition. Dans *Lexique de mathématique*. Scolab. https://lexique.netmath.ca

Patenaude, P. et Mathieu, P. (2020b). Décomposition d'un polynôme. Dans *Lexique de mathématique*. Scolab. https://lexique.netmath.ca

Patenaude, P. et Mathieu, P. (2020c). Factorisation. Dans *Lexique de mathématique*. Scolab. https://lexique.netmath.ca

Patenaude, P. et Mathieu, P. (2020d). Monôme. Dans *Lexique de mathématique*. Scolab. https://lexique.netmath.ca

Pepin, M. et Desgagné, S. (2017). La double vraisemblance au fondement de la collaboration de recherche : retour sur la démarche de coconstruction d'un projet entrepreneurial à l'école primaire. *Phronesis*, *6*(1-2), 126-139.

Proulx, J. (2013). Réflexions épistémologiques sur la recherche collaborative en didactique : possibilités et excès. Dans N. Bednarz (dir.), *Recherche collaboratibe et pratique enseignante : regarder ensemble autrement* (p. 327-349). L'Harmattan.

Radford, L. (1996). The Roles of Geometry and Arithmeric in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approches to Algebra: perspectives for research and teaching* (p. 39-53). Kluwer Academic Publishers.

Saboya, M., Bednarz, N. et Hitt, F. (2015). Le contrôle exercé en algèbre: analyse de ses manifestations chez les élèves, éclairage sur sa conceptualisation. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *20*, 61-100.

Sanchez, E. (1997). *El graficador como apoyo a la comprension de conceptos algebraicos*. Mexique. CINVESTAV-IPN.

Savoie-Zajc, L. (2000). La recherche qualitative/interprétative en éducation. Dans T. Karsenti et L. Savoie-Zajc (dir.), *Introduction à la recherche en éducation* (p. 123-150). Éditions du CRP.

Schön, D. A. (1983). *The reflextive practitioner*. Basic Books.

Sharp, J. M. (1995). Results of Using Algebra Tiles as Meaningful Representation of Algebra Concepts. Annual Meeting of the Mid-Western Education Research Association. https://eric.ed.gov/?id=ED398080

Simon, P. (2013). *Appropriation des représentations visuelles par une enseignante dans une séquence d'enseignement portant sur la factorisation en algèbre* [Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal]. https://archipel.uqam.ca/5495/1/M12849.pdf

Siu, M.-K. (2006). No, I don't use history of mathematics in my class. Why? Dans F. Furinghetti, S. Kaijser et C. Tzanakis (dir.), *Proceedings HPM 2004 & ESU (revised edition)* (p. 268-277). Université d'Uppsala.

Stewart, J. (2014). *Calcul intégral* (7e éd., P. Mayer, trad.). Modulo.