UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

Mouvement brownien et copules

RAPPORT DE RECHERCHE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

MARIE-CLAUDE VACHON

NOVEMBRE 2008

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce document diplômant se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.07-2011). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier mes parents, Pierre et Jacline, pour l'amour, le support et les encouragements dont ils ont fait preuve au cours de ma vie. Je les remercie pour leur écoute et leur aide, tant financière que morale, tout au long de mes études. Merci également à mon frère, Jean-François, sa conjointe Marie-Ève et leur adorable petite fille, Laurianne, qui est un véritable rayon de soleil dans ma vie.

Il me fait plaisir de remercier mes directeurs, Matthieu Dufour et Michel Adès, pour m'avoir orientée dans la rédaction de ce mémoire et pour m'avoir transmis leur passion de la recherche. Je les remercie en tant que professeurs et chercheurs chevronnés, mais également pour leurs grandes qualités humaines. J'ai grandement apprécié l'atmosphère agréable et sympathique dans laquelle ils m'ont permis d'approfondir mes connaissances mathématiques, ainsi que leur soutien, leur intérêt, leurs encouragements et leur patience à l'égard de mon travail.

Je souhaite également faire mention de l'implication de M. Claude Pichet et Mme. Carole Turcotte dans mon cheminement académique. Je les remercie de m'avoir dirigée à mes débuts à la maîtrise ainsi que de m'avoir offert l'opportunité d'enseigner au baccalauréat en actuariat. Ce défi de taille a été un élément marquant de mon évolution en tant qu'étudiante. J'en profite pour remercier un grand professeur, M. Jacques Labelle, pour sa contribution à mes études, mais également pour son aide précieuse alors que je commençais dans le monde de l'enseignement.

Je remercie mes collègues et amis étudiants Sandrine Laskar, Simon Belzile et Vincent Benoniel pour les interminables discussions, les fous rires nécessaires et les passionnants séminaires qui m'ont permis d'approfondir les notions acquises en classes. Merci à vous d'avoir créé un climat des plus agréables tout au long de cette maîtrise.

Aussi, il m'importe de souligner l'appui financier de l'Institut de Finance Mathématique de Montréal, grâce auquel j'ai pu me concentrer pleinement sur mes études.

Ces remerciements ne seraient pas complets sans une pensée pour une amie d'enfance, Noémie Thibodeau, qui a passé plusieurs nuits blanches à relire et corriger les innombrables fautes de français qui émergeaient des premiers jets de ce travail, incluant cette page, et a ainsi évité plusieurs crises cardiaques à mes chers directeurs.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES vi

LISTE DES SYMBOLES vii

RÉSUMÉ ix

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I
COPULES BIVARIÉES 3

1.1 Notions préliminaires 4

1.2 Définitions et propriétés 7

1.3 Copules et variables aléatoires 11

1.3.1 Rappel sur les fonctions de répartition 11

1.3.2 Théorème de Sklar 13

1.3.3 Copule et fonction de densité conjointe 19

CHAPITRE II
MOUVEMENT BROWNIEN 21

2.1 Définition 21

2.2 Fonction de répartition conjointe du mouvement brownien avec sa valeur maximale 23

2.2.1 Temps d'arrêt et temps de passage 23

2.2.2 Mouvement brownien sans dérive 25

2.2.3 Mouvement brownien avec dérive 28

2.3 Famille de copule bivariée 33

CHAPITRE III
MOUVEMENTS BROWNIENS CORRÉLÉS 38

3.1 Loi normale multivariée 38

3.2 Fonction de répartition conjointe de $W_T^{(\mu,\sigma)}$ et $M_{(s,t)}^{(\mu,\sigma)}$ 43

3.3 Fonction de répartition conjointe de B_T^1 et $M_{(s,t)}^2$ 47

3.4 Copule bivariée 51

CONCLUSION 57

APPENDICE A
NOTATION ET TERMINOLOGIE 58

A.1 Notions préliminaires 58

A.2 Variables aléatoires et processus stochastiques 60

APPENDICE B
LOI NORMALE MULTIVARIÉE CONDITIONNELLE 63

RÉFÉRENCES 66

LISTE DES FIGURES

2.1 Densité de la copule engendrée par W_t et M_t. 34

2.2 Densité de la copule engendrée par $W_t^{(\mu,\sigma)}$ et $M_t^{(\mu,\sigma)}$ pour des valeurs croissantes du paramètre μ. 37

3.1 Copule engendrée par B_T^1 et $M_{(s,t)}^2$ pour des valeurs croissantes du paramètre ρ. 55

LISTE DES SYMBOLES

$\emptyset$ = l'ensemble vide

$\mathbb{N}$ = l'ensemble de tous les entiers naturels

$\mathbb{N}^*$ = l'ensemble de tous les entiers naturels excluant 0

$\mathbb{Q}$ = l'ensemble des nombres rationnels

$\mathbf{I}$ = $[0,1]$, l'intervalle unitaire sur la droite réelle

$\mathbb{R}$ = $(-\infty,+\infty)$, la droite réelle

$\mathbb{R}_+$ = l'ensemble des nombres réels positifs

$\overline{\mathbb{R}}$ = $[-\infty,+\infty]$, la droite réelle complétée

$\mathbf{I}^2$ = $[0,1]\times[0,1]$

$\mathbb{R}^2$ = $(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$

$\overline{\mathbb{R}}^2$ = $[-\infty,+\infty]\times[-\infty,+\infty]$

Dom F = le domaine de la fonction F

Im F = l'image de la fonction F

$\sim$ = égal en distribution

$\mathbf{1}_A(\omega)$ = $\begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, la fonction indicatrice

$F^{-1}(\cdot)$ = la quasi-inverse de la fonction F

$\phi(x)$ = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$,
la fonction de densité d'une loi normale standard

$\Phi(x)$ = $\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$,
la fonction de répartition d'une loi normale standard

$\Phi^{-1}(u) = \inf\{x \mid \Phi(x) \geq u\}$,

l'inverse de la fonction de répartition d'une loi normale standard

$\Phi_n(h_1, \ldots, h_n; \mathbf{R}) = \frac{|\mathbf{R}|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{h_n} \cdots \int_{-\infty}^{h_1} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}\right) dx_1 \cdots dx_n$,

la fonction de répartition d'une loi normale multivariée standard avec matrice de corrélation $\mathbf{R}$

$\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ = mouvement brownien standard

$M_t = \max_{0\leq s\leq t} W_s$

$\{W_t^{(\mu,\sigma)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ = mouvement brownien avec dérive μ et variance σ^2

$M_t^{(\mu,\sigma)} = \max_{0\leq s\leq t} W_s^{(\mu,\sigma)}$

$M_{(s,t)}^{(\mu,\sigma)} = \max_{s\leq u\leq t} W_u^{(\mu,\sigma)}$

$\left(B^1, B^2\right)'$ = mouvement brownien bidimensionnel dont les composantes sont corrélées

$M_{(s,t)}^2 = \max_{s\leq u\leq t} B_u^2$

RÉSUMÉ

L'objectif de ce rapport de recherche est principalement de relier différentes distributions conjointes qui se présentent dans les mouvements browniens aux copules.

Nous nous intéressons principalement aux mouvements browniens univarié et bivarié dont les composantes sont corrélées. Plus spécifiquement, nous trouvons la distribution conjointe du mouvement brownien avec dérive et sa valeur maximale. Par la suite, nous généralisons cette dernière distribution en raffinant l'intervalle de temps sur lequel la valeur maximale est considérée. Nous nous intéressons également aux mouvements browniens bi-dimensionnels corrélés et à la fonction de répartition conjointe d'un premier mouvement brownien avec le maximum d'un second. Finalement, à partir de ces distributions conjointes, nous construisons une nouvelle famille de copules bivariées.

INTRODUCTION

Le premier chapitre explique la relation qui existe entre les copules et les variables aléatoires. Tout d'abord, nous introduisons certaines notions préliminaires afin de redéfinir la notion de fonction croissante. Ensuite, nous étudions les différentes propriétés des copules. Nous exposons notamment de quelle manière il est possible de construire différentes familles de copules bivariées à partir de fonctions de répartition conjointes. Nous définissons aussi la fonction de densité conjointe de deux variables aléatoires en termes de leur copule, à partir de l'existence des dérivées partielles simples et mixtes.

Le deuxième chapitre consiste à établir un lien entre le mouvement brownien univarié et les copules. D'abord, nous définissons brièvement le mouvement brownien et ses propriétés. Ensuite, nous étudions le mouvement brownien standard et certaines fonctions de répartition conjointes qui en découlent. Nous nous intéressons principalement aux distributions conjointes engendrées par le mouvement brownien standard et son maximum. Nous étendons ensuite cette dernière distribution en y ajoutant un paramètre de dérive et étudions la copule engendrée par celle-ci.

Dans le troisième et dernier chapitre, nous considérons le mouvement brownien bidimensionnel dont les composantes sont corrélées. Tout d'abord, nous généralisons le résultat du chapitre précédent en raffinant l'intervalle de temps sur lequel la valeur maximale est observée. Cette distribution nous amènera à la distribution conjointe d'un premier mouvement brownien avec la valeur maximale d'un second mouvement brownien qui lui est corrélé. Par la suite, nous déduisons la nouvelle famille de copules engendrées par cette distribution.

L'appendice A donne la notation et la terminologie utilisées en ce qui a trait aux notions de variables aléatoires et de processus stochastiques. Enfin, dans l'appendice B,

nous étudions la loi normale multivariée conditionnelle et examinons en détails le cas quadridimensionnel.

CHAPITRE I

COPULES BIVARIÉES

Le mot copule fut employé pour la première fois par Sklar (1959) dans le théorème qui porte aujourd'hui son nom. L'idée était de relier les marginales à leur distribution multivariée. Les copules permettent de séparer en deux parties distinctes la fonction de répartition multivariée, soit la structure de dépendance et les marginales. Par conséquent, il est possible de construire une multitude de lois multivariées à partir de différentes lois marginales et d'une simple copule.

Comme le spécifient Denuit, Daehe, Goovaerts et Kass (2005), l'hypothèse de la distribution normale multivariée a longtemps dominé l'étude des lois multivariées par sa simplicité. Plusieurs autres lois multivariées existent, cependant leur construction requiert généralement que les marginales soient de même loi, ce qui est rarement observé dans la réalité. Les copules constituent ainsi un outil puissant en ce qui a trait à la construction de lois multivariées, parce qu'elles permettent non seulement de spécifier les fonctions de répartition marginales appropriées pour chacune des variables, mais aussi d'en modéliser séparément la structure de dépendance, et ce de façon beaucoup plus fidèle à la réalité que les mesures déjà existantes, telles que le coefficient de corrélation. À l'aide des copules, nous pouvons par exemple, capturer une dépendance non-linéaire entre les variables.

Finalement, l'intérêt grandissant pour les copules dans différents domaines, tels que la finance ou les sciences actuarielles, n'est pas surprenant étant donné la flexibilité que

celles-ci nous offrent au niveau de la modélisation. Elles permettent d'étudier de façon plus générale la dépendance, et sont un excellent point de départ pour la construction de distributions multivariées.

Dans ce chapitre, nous définissons formellement les copules et introduisons leurs propriétés de bases. Notons que pour cette première partie, nous suivons principalement l'approche de Nelsen (2006).

1.1 Notions préliminaires

Dans cette section, nous généralisons le concept de croissance monotone pour les fonctions bivariées, c'est-à-dire les fonctions appelées doublements-croissantes. Ensuite, nous définissons les fonctions que nous appelons arrimées au sol « grounded », et nous analysons les conséquences de ces deux propriétés sur les fonctions bivariées.

Dans cette section, nous considérons que les sous-ensembles A_1 et A_2 sont fermés.

Définition 1.1. Soient A_1, A_2 deux sous-ensembles non-vides tels que $A_i \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ pour $i = 1, 2$, et soit une fonction $F : A_1 \times A_2 \mapsto \mathbb{R}$. Nous disons que F est *doublement-croissante* si $\forall x_1, x_2 \in A_1$ tels que $x_1 \leq x_2$, et $\forall y_1, y_2 \in A_2$ tels que $y_1 \leq y_2$, alors

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0. \tag{1.1}$$

Remarquons que les points (x_2, y_2), (x_2, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_1) forment un rectangle dans $\overline{\mathbb{R}}^2$. Ainsi, une fonction doublement-croissante est une fonction F pour laquelle tous les rectangles dont les arrêtes font partie du domaine de F ont un volume toujours positif sous la « mesure » F. De plus, il est important de noter que cette propriété n'implique pas que la fonction F soit monotone croissante en chacun de ses arguments. En contrepartie, une fonction doublement-croissante est une fonction ayant des accroissements $(F(t, y_2) - F(t, y_1)$ et $F(x_2, t) - F(x_1, t))$ monotones croissants. Ce qui nous conduit à énoncer le lemme suivant :

Lemme 1.1.1. *Soient A_1 et A_2 deux sous-ensembles non-vides tels que $A_i \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ pour $i = 1, 2$, et soient $x_1, x_2 \in A_1$ avec $x_1 \leq x_2$, et $y_1, y_2 \in A_2$ avec $y_1 \leq y_2$. Considérons*

également une fonction doublement-croissante $F : A_1 \times A_2 \mapsto \mathbb{R}$. *Alors les fonctions* $t \mapsto F(t, y_2) - F(t, y_1)$ *et* $t \mapsto F(x_2, t) - F(x_1, t)$ *sont monotones croissantes sur* A_1 *et* A_2 *respectivement.*

Démonstration. Il suffit de réarranger les termes de l'équation (1.1). Soient y_1, $y_2 \in A_2$ avec $y_1 \leq y_2$, nous avons alors

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) \geq F(x_1, y_2) - F(x_1, y_1) \quad \forall x_1,\, x_2 \in A_1 \text{ tels que } x_1 \leq x_2.$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto F(t, y_2) - F(t, y_1)$ est monotone croissante sur A_1. Nous procédons de la même façon pour la fonction $t \mapsto F(x_2, t) - F(x_1, t)$. □

Afin qu'une fonction doublement-croissante ait la propriété plus forte d'être monotone croissante en chacun de ses arguments, nous avons besoin qu'elle soit arrimée au sol.

Définition 1.2. Soient A_1 et A_2 deux ensembles non-vides de $\overline{\mathbb{R}}$ et une fonction $F : A_1 \times A_2 \mapsto \mathbb{R}$. Notons par a_i le plus petit élément de A_i pour $i = 1, 2$. Nous disons que la fonction F est *arrimée au sol* si

$$\begin{aligned} F(x, a_2) &= 0 \quad \forall x \in A_1, \\ F(a_1, y) &= 0 \quad \forall y \in A_2. \end{aligned}$$

Et nous avons ainsi :

Lemme 1.1.2. *Soient* A_1 *et* A_2 *deux sous-ensembles non-vides de* $\overline{\mathbb{R}}$ *et le couple* $(x, y) \in A_1 \times A_2$. *Considérons aussi une fonction* $F : A_1 \times A_2 \mapsto \mathbb{R}$ *arrimée au sol et doublement-croissante. Alors, les fonctions* $t \mapsto F(t, y)$ *et* $t \mapsto F(x, t)$ *sont monotones croissantes sur* A_1 *et* A_2 *respectivement.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 1.1.1 avec $x_1 = a_1$ et $y_1 = a_2$, où a_i est le plus petit élément de A_i pour $i = 1, 2$.

Si $y \in A_2$, alors $a_2 \leq y$, et la fonction $t \mapsto F(t, y) - F(t, a_2)$ est monotone croissante sur A_1. Nous avons aussi que $F(t, a_2) = 0\ \forall t \in A_1$, par définition de l'arrimage au sol. Donc, la fonction $t \mapsto F(t, y)$ est monotone croissante sur A_1.

Le résultat pour $t \mapsto F(x,t)$ est obtenu de la même façon. □

Nous allons étendre la notion bien connue de marginale aux fonctions bivariées.

Définition 1.3. Soient A_1 et A_2 deux ensembles non-vides de $\overline{\mathbb{R}}$ et une fonction $F : A_1 \times A_2 \mapsto \mathbb{R}$. Notons par $\overline{a_i}$ le plus grand élément de A_i pour $i = 1, 2$. Les fonctions marginales $F_i : A_i \mapsto \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2$ de F sont définies par

$$\begin{aligned} F_1(x) &= F(x, \overline{a_2}) \quad \forall x \in A_1, \\ F_2(y) &= F(\overline{a_1}, y) \quad \forall y \in A_2. \end{aligned}$$

Le lemme suivant permettra de démontrer que les copules sont des *fonctions uniformément continues sur leurs domaines.*

Lemme 1.1.3. *Soient A_1 et A_2 deux ensembles non-vides de $\overline{\mathbb{R}}$ et une fonction $F : A_1 \times A_2 \mapsto \mathbb{R}$, doublement-croissante et arrimée. Alors $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A_1 \times A_2$, nous avons :*

$$|F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)| \leq |F_1(x_2) - F_1(x_1)| + |F_2(y_2) - F_2(y_1)| \tag{1.2}$$

Démonstration. Soient (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in A_1 \times A_2$ et $\overline{a_i}$ le plus grand élément de A_i pour $i = 1, 2$. Regardons le membre de gauche de l'équation 1.2.

$$\begin{aligned} |F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)| &= |F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_2) - F(x_1, y_1)| \\ &\leq |F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)| + |F(x_1, y_2) - F(x_1, y_1)| \\ &\quad \text{(par l'inégalité du triangle).} \end{aligned}$$

Si $x_1 \leq x_2$, alors par le lemme 1.1.1, la fonction $t \mapsto F(x_2, t) - F(x_1, t)$ est croissante sur A_2 pour x_1, $x_2 \in A_1$ avec $x_1 \leq x_2$, nous obtenons ainsi,

$$\begin{aligned} F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) &\leq F(x_2, \overline{a_2}) - F(x_1, \overline{a_2}) \\ &= F_1(x_2) - F_1(x_1). \end{aligned}$$

Remarquons également que

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) \geq 0$$

et

$$F_1(x_2) - F_1(x_1) = F(x_2, \overline{a_2}) - F(x_1, \overline{a_2}) \geq 0,$$

puisque si $y \in A_2$, alors par le lemme 1.1.2, la fonction $t \mapsto F(t, y)$ est croissante sur A_1. Ainsi, $|F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)| \leq |F_1(x_2) - F_1(x_1)|$.

Nous obtenons le même résultat si $x_1 > x_2$. Nous en concluons que

$$|F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)| \leq |F_1(x_2) - F_1(x_1)| \quad \forall\, x_1, x_2 \in A_1 \text{ et } y_2 \in A_2.$$

Nous pouvons montrer de manière similaire que $|F(x_1, y_2) - F(x_1, y_1)| \leq |F_2(y_2) - F_2(y_1)|$. En reprenant l'équation initiale et en appliquant les deux résultats obtenus ci-haut, nous parvenons à l'inégalité désirée, soit

$$\begin{aligned} |F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)| &= |F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_2) - F(x_1, y_1)| \\ &\leq |F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)| + |F(x_1, y_2) - F(x_1, y_1)| \\ &\leq |F_1(x_2) - F_1(x_1)| + |F_2(y_2) - F_2(y_1)|. \end{aligned}$$

□

Remarque 1.1. Si $\forall x \in A_1$, $F_1(x) = x$ et $\forall y \in A_2$, $F_2(y) = y$, alors l'équation 1.2 devient :

$$|F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)| \leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

Par conséquent, si $F : A_1 \times A_2 \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction doublement-croissante et arrimée, et si les marginales de F sont données par $F_1(x) = x\ \forall x \in A_1$ et $F_2(y) = y\ \forall y \in A_2$, alors nous pouvons conclure que F est uniformément continue sur son domaine.

1.2 Définitions et propriétés

Définition 1.4. Soient A_1 et A_2 des sous-ensembles non-vides de $\mathbf{I}$ contenant 0 et 1. Nous appelons sous-copule la fonction $C' : A_1 \times A_2 \mapsto \mathbf{I}$ telle que

1. C' est arrimée,
2. $\forall (u, v) \in A_1 \times A_2$, $C'(u, 1) = u$ et $C'(1, v) = v$,

3. C' est doublement-croissante.

Puisque C' est une fonction doublement-croissante et arrimée ayant pour marginales $C'(u,1) = u$ et $C'(1,v) = v$, alors en vertu du lemme 1.1.3 et de la remarque 1.1, C' est uniformément continue sur son domaine. Formalisons ce résultat.

Théorème 1.2.1. *Soit C' une sous-copule, alors C' est uniformément continue sur son domaine, c'est-à-dire*

$$\left|C'(u_2,v_2) - C'(u_1,v_1)\right| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| \quad \forall (u_1,v_1),\ (u_2,v_2) \in \mathit{Dom}\ C'.$$

La démonstration est immédiate.

Les résultats techniques qui suivent permettent de définir l'existence des dérivées partielles simples et mixtes.

Définition 1.5. Soit C' une sous-copule ayant pour domaine $A_1 \times A_2$ où A_1 et A_2 sont deux sous-ensembles non-vides de $\mathbf{I}$ contenant 0 et 1, et soient $u \in A_1$ et $v \in A_2$. Nous appelons *section horizontale* à v, la fonction de A_1 dans I qui à t associe la valeur $C'(t,v)$, et *section verticale* à u, la fonction de A_2 dans I qui à t associe $C'(u,t)$.

Le corollaire suivant est une conséquence directe du théorème 1.2.1 et du lemme 1.1.2.

Corollaire 1.2.2. *Soit C' une sous-copule ayant pour domaine $A_1 \times A_2$ où A_1 et A_2 sont deux sous-ensembles non-vides de $\mathbf{I}$ contenant 0 et 1. Les sections horizontale et verticale de C' sont monotones croissantes et uniformément continues sur leur domaine respectif.*

Démonstration. Puisqu'une sous-copule est une fonction doublement-croissante et arrimée alors les sections horizontale et verticale sont monotones croissantes en vertu du lemme 1.1.2. De plus, par le théorème 1.2.1, nous avons l'inégalité

$$\left|C'(u_2,v_2) - C'(u_1,v_1)\right| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| \quad \forall (u_1,v_1),\ (u_2,v_2) \in \mathrm{Dom}\ C'.$$

Soit $v \in A_2$ et fixons $v_1 = v_2 = v$. Nous obtenons

$$\left|C'(u_2, v) - C'(u_1, v)\right| \leq |u_2 - u_1| \quad \forall u_1,\, u_2 \in A_1,$$

et la fonction $t \mapsto C'(t, v)$ est uniformément continue sur A_1. Le résultat pour la section verticale est obtenu de la même façon. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'existence des dérivées partielles.

Une propriété est dite vraie « presque partout » si l'ensemble des points sur lequel la propriété n'est pas respectée est un ensemble de mesure nulle au sens de Lebesgue.

Théorème 1.2.3. *Soit C' une sous-copule, alors les dérivées partielles de C' : $\frac{\partial C'}{\partial u}$ et $\frac{\partial C'}{\partial v}$ existent presque partout. Notons par $B_1 = \left\{(u, v) \in Dom\ C' \text{ tel que } \frac{\partial C'(u,v)}{\partial u} \text{ existe}\right\}$, et par $B_2 = \left\{(u, v) \in Dom\ C' \text{ tel que } \frac{\partial C'(u,v)}{\partial v} \text{ existe}\right\}$, alors :*

$$0 \leq \frac{\partial C'(u, v)}{\partial u} \leq 1 \quad \forall (u, v) \in B_1 \text{ et } 0 \leq \frac{\partial C'(u, v)}{\partial v} \leq 1 \quad \forall (u, v) \in B_2.$$

Démonstration. Nous savons par le corollaire 1.2.2 que les sections horizontale et verticale sont monotones croissantes, ainsi les dérivées partielles existent puisque les fonctions monotones sont différentiables presque partout.

Nous devons maintenant montrer que l'image des dérivées partielles est un sous-ensemble de **I**. Supposons $(u, v) \in B_1$, alors :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial C'(u, v)}{\partial u}\right| &= \lim_{h \to 0} \left|\frac{C'(u + h, v) - C'(u, v)}{h}\right| \\
&\leq \lim_{h \to 0} \left|\frac{h}{h}\right| \text{ (puisque } C' \text{ est uniformément continue)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

De plus, puisque la section horizontale est monotone croissante alors $\frac{\partial C'(u,v)}{\partial u} \geq 0$, et ainsi $\frac{\partial C'(u,v)}{\partial u} \in \mathbf{I}$. La démonstration pour $\frac{\partial C'}{\partial v}$ est similaire. □

Le lemme ci-dessous nous permet de démontrer que les dérivées partielles mixtes sont définies presque partout.

Lemme 1.2.4. *Soit C' une sous-copule telle que Dom $C' = A_1 \times A_2$ où A_i est un sous-ensemble de* $\mathbf{I}$ *contenant 0 et 1 pour $i = 1, 2$. Alors les fonctions $v \mapsto \frac{\partial C'(u,v)}{\partial u}$ et $u \mapsto \frac{\partial C'(u,v)}{\partial v}$ sont définies et sont monotones croissantes presque partout sur leur domaine respectif.*

Démonstration. Soient $v_1, v_2 \in A_2$ avec $v_1 \leq v_2$, tels que $\frac{\partial C'(u,v_1)}{\partial u}$ et $\frac{\partial C'(u,v_2)}{\partial u}$ existent.

Par définition, C' est une fonction doublement-croissante, alors nous savons que la fonction $u \mapsto C'(u, v_2) - C'(u, v_1)$ est monotone croissante sur A_1 (par le lemme 1.1.1). De plus, ses dérivées partielles existent presque partout et sont positives (puisque la fonction est monotone croissante), ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(C'(u, v_2) - C'(u, v_1)\right) \geq 0,$$

d'où

$$\frac{\partial C'(u, v_2)}{\partial u} \geq \frac{\partial C'(u, v_1)}{\partial u}.$$

Nous concluons donc que la fonction $v \mapsto \frac{\partial C'(u,v)}{\partial u}$ est définie et est monotone croissante presque partout sur A_2. Le raisonnement pour la fonction $u \mapsto \frac{\partial C'(u,v)}{\partial v}$ est identique. □

Il est maintenant trivial de démontrer l'existence des dérivées partielles mixtes. À ce sujet, énonçons le théorème suivant :

Théorème 1.2.5. *Soit C' une sous-copule, alors les dérivées partielles mixtes existent presque partout sur Dom C' et sont positives.*

L'existence des dérivées provient du fait que les fonctions $v \mapsto \frac{\partial C'(u,v)}{\partial u}$ et $u \mapsto \frac{\partial C'(u,v)}{\partial v}$ sont monotones (par lemme 1.2.4), alors que leur positivité résulte du fait qu'elles sont croissantes.

Finalement, la copule est simplement une sous-copule ayant pour domaine $\mathbf{I}^2$. Voici une définition plus formelle :

Définition 1.6. Nous appelons copule la fonction $C : \mathbf{I}^2 \mapsto \mathbf{I}$ telle que :

1. C est arrimée,

2. $C(u,1) = u$ et $C(1,v) = v$, $\forall u, v \in \mathbf{I}$,
3. C est doublement-croissante.

Finalement, les résultats techniques découlant de cette section nous ont permis essentiellement de définir l'existence des dérivées partielles simples et mixtes des copules. Ce qui nous permettra d'établir à la section suivante la relation qu'ont les copules avec les fonctions de densités conjointes des variables aléatoires.

1.3 Copules et variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires continues et F leur fonction de répartition conjointe. Nous avons alors que F est une fonction de $\overline{\mathbb{R}}^2$ dans $\mathbf{I}$ qui, au couple (x,y), associe un nombre $F(x,y)$. Pour ce même couple (x,y), nous pouvons considérer une autre fonction de $\overline{\mathbb{R}}^2$ dans $\mathbf{I}^2$ qui, à (x,y), fait correspondre $(F_1(x), F_2(y))$ où F_1 et F_2 sont respectivement les fonctions de répartition marginales de X et Y. Finalement, il est possible de montrer qu'il existe une autre fonction de $\mathbf{I}^2$ dans $\mathbf{I}$ qui associe les marginales à la distribution conjointe. Cette même fonction est une copule et est unique si les marginales sont continues.

Dans cette section, nous démontrons ce résultat et analysons l'impact de celui-ci sur les fonctions de densité conjointes.

1.3.1 Rappel sur les fonctions de répartition

L'objectif de cette sous-section est de rappeler brièvement la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire et ses propriétés. Nous commençons d'abord par le cas univarié pour ensuite généraliser le concept au cas bivarié.

Soit Ω un ensemble fondamental, $\mathfrak{F}$ une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité (voir appendice A pour les définitions de ces notions). Considérons également deux variables aléatoires $X : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ et $Y : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. De plus, posons $X^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq a\}$.

Définition 1.7. La fonction de répartition $F_X : \overline{\mathbb{R}} \mapsto \mathbf{I}$ de la variable aléatoire X est définie par

$$F_X(x) = \mathbb{P}\left\{X^{-1}((-\infty, x])\right\} \equiv \mathbb{P}\{X \leq x\}, \quad x \in \overline{\mathbb{R}}.$$

La fonction de répartition est donc la probabilité qu'une variable aléatoire X prenne des valeurs inférieures ou égales à x, et ses propriétés bien connues sont les suivantes :

Proposition 1.3.1. *Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, alors :*

1. *F_X est monotone croissante,*
2. *F_X est continue à droite,*
3. *$F_X(+\infty) = 1$ et $F_X(-\infty) = 0$.*

Définissons maintenant la quasi-inverse d'une fonction.

Définition 1.8. La fonction F_X^{-1} est *quasi-inverse* de la fonction de répartition F_X telle que

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{x | F_X(x) \geq u\} = \sup\{x | F_X(x) \leq u\}.$$

La définition et les propriétés d'une fonction de répartition conjointe sont sensiblement les mêmes que dans le cas univarié, cependant, le concept de croissance doit être défini différemment.

Définition 1.9. La *fonction de répartition* $F : \overline{\mathbb{R}}^2 \mapsto \mathbf{I}$ des variables aléatoires X et Y est égale à

$$F(x, y) = \mathbb{P}\left\{X^{-1}((-\infty, x]), Y^{-1}((-\infty, y])\right\} \equiv \mathbb{P}\{X \leq x, Y \leq y\}, \quad (x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2.$$

C'est donc la probabilité que X soit inférieure ou égale à x et Y soit inférieure ou égale à y simultanément.

Proposition 1.3.2. *Soit F la fonction de répartition conjointe des variables aléatoires X et Y, alors F doit satisfaire aux conditions suivantes :*

1. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$ *et* $F(+\infty, +\infty) = 1$,
2. F *est continue à droite sur* $\mathbb{R}^2$,
3. F *est doublement-croissante.*

Aussi, puisque F est doublement-croissante et arrimée, alors elle est monotone croissante en chacun de ses arguments.

Remarquons également qu'il est possible de retrouver les fonctions de répartition marginales de X et Y à partir de la fonction de répartition conjointe, c'est-à-dire

$$F_X(x) = F(x, +\infty) \text{ et } F_Y(y) = F(+\infty, y).$$

Finalement, en examinant les propriétés des fonctions de répartition conjointe et des copules, nous pouvons constater que $C(F_X(x), F_Y(y))$ est la fonction de répartition conjointe de deux variables aléatoires X et Y ayant pour marginales F_X et F_Y. Le théorème de Sklar, que nous énonçons à la section suivante, confirme ce résultat, mais également sa réciproque, à savoir que toute fonction de répartition conjointe peut être représentée à l'aide d'une copule et de ses marginales.

1.3.2 Théorème de Sklar

Le théorème de Sklar (1959) met en lumière la relation existante entre les variables aléatoires et les copules. Cependant, la preuve requiert les deux résultats supplémentaires suivants :

Lemme 1.3.3. *Soient X et Y deux variables aléatoires ayant pour fonction de répartition conjointe F et pour fonctions de répartition marginales F_X et F_Y respectivement. Alors, il existe une unique sous-copule C' sur Im $F_X \times$ Im F_Y telle que*

$$F(x, y) = C'(F_X(x), F_Y(y)) \quad \forall\, (x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2.$$

Démonstration. Selon la définition de fonction de répartition, nous savons que F est doublement-croissante et arrimée. Ainsi, par le lemme 1.1.3, nous avons l'inégalité

suivante $\forall (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$:

$$|F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)| \leq |F_X(x_2) - F_X(x_1)| + |F_Y(y_2) - F_Y(y_1)|.$$

Posons $F_X(x_1) = F_X(x_2)$ et $F_Y(y_1) = F_Y(y_2)$. Nous obtenons alors $|F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)| \leq 0$, donc $F(x_2, y_2) = F(x_1, y_1)$. Par conséquent, la fonction de répartition conjointe F est entièrement déterminée par la valeur des fonctions de répartition marginales F_X et F_Y. Autrement dit, il existe une fonction C' sur Im $F_X \times$ Im F_Y telle que $F(x, y) = C'(F_X(x), F_Y(y)) \quad \forall (x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

Il suffit maintenant de vérifier que C' est bien une sous-copule, c'est-à-dire C' répond aux conditions suivantes :

1. $C'(0, F_Y(y)) = F(-\infty, y) = 0$, puisque par définition $F_X(-\infty) = 0$ et $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$. De la même façon, nous obtenons que $C'(F_X(x), 0) = 0$. Ainsi, C' est arrimée.
2. $C'(1, F_Y(y)) = F(+\infty, y) = F_Y(y)$, car $F_X(+\infty) = 1$ et $F(+\infty, y) = F_Y(y)$ selon la définition de fonction de répartition marginale. De manière similaire, nous avons également que $C'(F_X(x), 1) = F(x, +\infty) = F_X(x)$.
3. De plus, puisque F est doublement-croissante et que F_X et F_Y sont des fonctions monotones croissantes, alors C' est doublement-croissante.

Donc, C' est une sous-copule. □

Nous avons montré que la fonction de répartition conjointe de deux variables aléatoires peut être représentée en terme de ses marginales et d'une unique sous-copule. Nous pouvons étendre cette relation aux copules par le lemme ci-dessous dont la démonstration se trouve dans Nelsen (2006).

Lemme 1.3.4. *Soit C' une sous-copule. Alors, il existe une copule C telle que $\forall (u, v) \in$ Dom C', $C(u, v) = C'(u, v)$.*

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer partiellement le théorème de Sklar permettant de lier les copules aux fonctions de répartition conjointes.

Théorème 1.3.5. *[Théorème de Sklar]*

1. *Soient C une copule et F_X, F_Y les fonctions de répartition marginales des variables aléatoires X et Y, alors :*

$$C(F_X(x), F_Y(y))$$

est une fonction de répartition conjointe ayant pour marginales F_X et F_Y.

2. *Soient X et Y deux variables aléatoires ayant pour fonction de répartition conjointe F et pour fonctions de répartition marginales F_X et F_Y respectivement. Alors, il existe une copule C telle que*

$$F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)) \quad \forall\, (x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2.$$

Si F_X et F_Y sont continues, alors C est unique.

Démonstration.

1. Nous voulons montrer que la fonction F définie par $F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$ est une fonction de répartition conjointe. Notons tout d'abord que Dom F = Dom $F_X \times$ Dom $F_Y = \overline{\mathbb{R}}^2$. En outre, F doit satisfaire aux propriétés ci-dessous :
   (a) $F(-\infty, y) = C(F_X(-\infty), F_Y(y)) = C(0, F_Y(y)) = 0$ et
   $F(x, -\infty) = C(F_X(x), 0) = 0$, selon la définition de copule.
   (b) $F(+\infty, +\infty) = C(F_X(+\infty), F_Y(+\infty)) = C(1, 1) = 1$, par définition de copule.
   (c) F est doublement-croissante puisque C est doublement-croissante et que les fonctions de répartition marginales F_X et F_Y sont monotones croissantes par définition.

(d) F est continue à droite sur $\overline{\mathbb{R}}^2$. En effet, soit $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ alors :

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0^+} F(x+h, y) &= \lim_{h \to 0^+} C(F_X(x+h), F_Y(y)) \\
&= C\left(\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h), F_Y(y)\right) \\
&\quad (C \text{ est uniformément continue.}) \\
&= C(F_X(x), F_Y(y)), \; F_X \text{ est continue à droite.} \\
&= F(x, y).
\end{aligned}$$

De façon similaire, nous obtenons $\lim_{h \to 0^+} F(x, y+h)$, donc F est continue à droite sur $\overline{\mathbb{R}}^2$.

Il suffit maintenant de montrer que les fonctions de répartition marginales de F sont F_X et F_Y. Plus précisément, $F(+\infty, y) = C(1, F_Y(y)) = F_Y(y)$ et $F(x, +\infty) = C(F_X(x), 1) = F_X(x)$. De ce fait, $F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$ est une fonction de répartition conjointe ayant pour marginales F_X et F_Y.

2. Par le lemme 1.3.3, nous savons qu'il existe une unique sous-copule sur Im $F_X \times$ Im F_Y, telle que $F(x, y) = C'(F_X(x), F_Y(y))$. De plus, si X et Y sont continues, alors Im F_X = Im F_Y = $\mathbf{I}$, et C' est une copule. Autrement, nous savons par le lemme 1.3.4 qu'il existe une copule C telle que $C(u, v) = C'(u, v) \; \forall (u, v) \in$ Dom C'. Ainsi, $F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)) \quad \forall (x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

□

Avant Sklar, il était généralement d'usage pour modéliser des phénomènes aléatoires multivariés d'utiliser des marginales de même loi. La première partie du théorème de Sklar nous permet de construire des fonctions de répartition conjointes ayant des lois de distributions marginales différentes à partir d'une simple copule, ce qui donne une grande flexibilité quant à la façon de modéliser divers phénomènes. Chacune d'entre elles aura cependant une structure de dépendance différente, définie par la copule sélectionnée. C'est pourquoi les copules sont aussi appelées fonctions de dépendance. Tel que démontré dans la deuxième partie du théorème de Sklar, il est toujours possible de représenter une fonction de répartition conjointe de deux variables aléatoires comme une fonction

de ses marginales et d'une unique sous-copule (celle-ci est une copule dans le cas où les variables aléatoires sont continues). Ainsi, la structure de dépendance est entièrement décrite par C et est dissociée du comportement marginal des variables aléatoires, lequel est représenté par F_X et F_Y.

La question qui s'impose maintenant est de savoir comment retrouver la copule ou la structure de dépendance entre les variables aléatoires, une fois la fonction de répartition conjointe donnée. Ce qui nous conduit à énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 1.3.6. *Soient X et Y deux variables aléatoires ayant pour fonction de répartition conjointe F et pour fonctions de répartition marginales F_X et F_Y respectivement. Considérons également l'unique sous-copule C' : $Im\ F_X \times Im\ F_Y \mapsto \mathbf{I}$ telle que définie au lemme 1.3.3. Alors, $\forall\,(u,v) \in Dom\ C'$*

$$C'(u,v) = F\left(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)\right). \tag{1.3}$$

Démonstration. Posons $F_X(x) = u$ et $F_Y(y) = v$. Soient F_X^{-1}, F_Y^{-1} les quasi-inverses des fonctions F_X et F_Y tels qu'énoncés à la définition 1.8. Alors, $F_X^{-1}(u) = x$ et $F_Y^{-1}(v) = y$. De plus, par le lemme 1.3.3, nous avons l'égalité suivante : $F(x,y) = C'(F_X(x), F_Y(y))$, donc :

$$C'(u,v) = C'(F_X(x), F_Y(y)) = F(x,y) = F(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)).$$

□

Ce résultat nous permet de construire plusieurs familles de copules bivariées populaires telle que la copule Gaussienne, en supposant que les variables aléatoires sont de distribution normale bivariée, ou encore la copule de Student, découlant de la distribution de Student bivariée.

Par exemple, si X et Y sont continues et indépendantes ayant respectivement pour fonctions de répartition marginales F_X et F_Y alors $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)\ \forall\,(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, et d'après le corollaire 1.3.6, nous avons $C_I(u,v) = F(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)) = uv$. La copule C_I désigne donc la copule indépendante.

Tel que mentionné ci-haut, le théorème de Sklar nous permet de dissocier la structure de dépendance (la copule) des variables aléatoires X et Y du comportement marginal de chacune de celles-ci. Il peut être intéressant d'étudier l'impact qu'a sur cette copule une transformation strictement monotone des variables aléatoires X et Y.

Afin de différencier la copule unique engendrée par les variables aléatoires continues de l'extension non-unique du cas discret, nous considérons alors pour la suite que les variables aléatoires X et Y sont continues.

Théorème 1.3.7. *Soient X et Y deux variables aléatoires continues ayant pour fonctions de répartition marginales F_X et F_Y respectivement, et pour copule C. Considérons également α et β deux fonctions continues strictement monotones, et $C_{\alpha,\beta}$ la copule engendrée par les variables aléatoires $\alpha(X)$ et $\beta(Y)$.*

1. *Si α et β sont strictement croissantes, alors $C_{\alpha,\beta}(u,v) = C(u,v)$.*
2. *Si α est strictement croissante et β strictement décroissante, alors $C_{\alpha,\beta}(u,v) = u - C(u,1-v)$.*
3. *Si α est strictement décroissante et β strictement croissante, alors $C_{\alpha,\beta}(u,v) = v - C(1-u,v)$.*
4. *Si α et β sont strictement décroissantes, alors $C_{\alpha,\beta}(u,v) = u+v-1+C(1-u,1-v)$.*

Démonstration. Si α et β sont strictement croissantes, alors $F_{\alpha(X)}(x) = P(\alpha(X) \leq x) = P(X \leq \alpha^{-1}(x)) = F_X(\alpha^{-1}(x))$, et $F_{\beta(Y)}(y) = F_Y(\beta^{-1}(y))$. De plus, soient $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $(u,v) \in \mathbf{I}^2$ tels que $F_{\alpha(X)}(x) = u$ et $F_{\beta(Y)}(y) = v$, alors :

$$\begin{aligned} C_{\alpha,\beta}(u,v) &= C_{\alpha,\beta}(F_{\alpha(X)}(x), F_{\beta(Y)}(y)) \\ &= P(\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y) \\ &= P(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)) \\ &= C(F_X(\alpha^{-1}(x)), F_Y(\beta^{-1}(y))) \\ &= C(F_{\alpha(X)}(x), F_{\beta(Y)}(y)) \\ &= C(u,v). \end{aligned}$$

Les autres résultats sont obtenus de manière similaire. □

Nous remarquons que $C_{\alpha,\beta}$ ne dépend en aucun cas de α et de β. Ainsi, les copules changent de façon prévisible lors de transformations strictement monotones et sont invariantes aux transformations strictement croissantes.

1.3.3 Copule et fonction de densité conjointe

Nous sommes désormais en mesure de définir la fonction de densité conjointe de deux variables aléatoires continues X et Y en terme de leur unique copule.

Définition 1.10. La densité c de la copule C est telle que

$$c(u,v) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}.$$

Nous savons par le théorème 1.2.5, que les dérivées partielles mixtes existent presque partout sur $\mathbf{I}^2$ et sont positives.

Proposition 1.3.8. *Soient X et Y deux variables aléatoires continues ayant pour fonction de densité conjointe f et pour fonctions de répartition marginales F_X et F_Y respectivement. Notons par c la densité de l'unique copule C engendrée par ces variables aléatoires. Alors,*

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) c(F_X(x), F_Y(y)) \quad \forall (x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2,$$

où f_X et f_Y sont les fonctions de densité marginales de X et Y.

La démonstration est directe en utilisant le fait que $F(x,y) = C(F_x(x), F_Y(y))$ et $f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$.

Cette représentation met en évidence la raison pour laquelle les copules sont appelées fonctions de dépendances. Rappelons que la fonction de densité conjointe de deux variables aléatoires indépendantes est donnée par le produit des densités marginales. Par conséquent, « *[...] la fonction de densité conjointe à (x,y) est égale à la fonction de*

densité conjointe indépendante évaluée à (x, y)*, multipliée par* $c(F_X(x), F_Y(y))$*. Ce facteur déforme l'indépendance afin d'introduire la structure de dépendance : la fonction de densité conjointe* f *est donc obtenue de la fonction de densité conjointe indépendante* $f_X(x)f_Y(y)$ *« repondérée » à* (x, y) *par* $c(F_X(x), F_Y(y))$*.* » (Traduction libre de Denuit et al.(2005)).

CHAPITRE II

MOUVEMENT BROWNIEN

Le mouvement brownien est sans contredit l'un des sujets les plus importants dans la théorie des processus stochastiques. En effet, celui-ci est utlilisé dans divers domaines de la science tels que l'économie, la théorie de la communication, la biologie, les sciences administratives et bien entendu les mathématiques.

Dans ce chapitre, nous définissons le mouvement brownien pour ensuite étudier certaines distributions qui lui sont associées, d'où nous pouvons construire différentes familles de copules.

Notons que les notions concernant les processus stochastiques sont définies à l'appendice A.

2.1 Définition

Historiquement, le mouvement brownien se voulait une tentative de modéliser les trajectoires irrégulières d'une particule immergée dans un liquide. Ce phénomème fut observé pour la première fois en 1827, par Robert Brown, un botaniste anglais. Ce n'est qu'environ un siècle plus tard, soit en 1900, que Louis Jean Baptiste Alphonse Bachelier, indroduisit le mouvement brownien afin de modéliser l'évolution du prix d'un actif boursier. Sans avoir pris connaissance des travaux effectués par Bachelier, Albert Einstein donna, en 1905, la première description mathématique du mouvement brownien en utilisant les lois de la physique. Il démontra mathématiquement que le mouvement

brownien pouvait être expliqué en supposant qu'une particule était continuellement bombardée par les particules environnantes. Toutefois, la théorie d'Einstein supposait *a priori* l'existence d'un tel processus. Ce n'est que deux décennies plus tard, soit en 1918, que le mathématicien Norbert Wiener donna la formulation mathématique rigoureuse du mouvement brownien et démontra son existence. C'est pourquoi aujourd'hui, le mouvement brownien est aussi connu sous le nom de processus de Wiener.

Définition 2.1. Soient μ et σ deux constantes. Un mouvement brownien est un processus stochastique $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ tel que

1. $W_0 = 0$, $\mathbb{P}$-presque sûrement, c'est-à-dire $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | W_0(\omega) \neq 0\}) = 0$,
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}_+$ tels que $s \leq t$, la variable aléatoire $W_t - W_s$ est de loi normale de moyenne $\mu(t-s)$ et de variance $\sigma^2(t-s)$,
3. $\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \ldots \leq t_n$, les variables aléatoires $W_{t_1} - W_{t_0}$, $W_{t_2} - W_{t_1}$, $\ldots$, $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ sont indépendantes,
4. $\forall \omega \in \Omega$, la trajectoire $t \rightarrow W_t(\omega)$ est continue.

Les constantes μ et σ^2 sont les paramètres de dérive et de variance respectivement. Si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, nous parlons alors de mouvement brownien standard. De plus, notons que si $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard, alors le processus $\{\sigma W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien avec variance σ^2 et $\{\sigma W_t + \mu t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien avec dérive μ et variance σ^2.

Il n'est pas clair, *a priori*, qu'un tel processus stochastique existe. Plusieurs méthodes sont utilisées dans la littérature afin d'en démontrer l'existence, cependant chacune d'elles est longue et technique, et requiert généralement une bonne connaissance de la théorie de la mesure. La construction du mouvement brownien selon différentes méthodes peut être trouvée dans Itô et McKean (1974).

2.2 Fonction de répartition conjointe du mouvement brownien avec sa valeur maximale

Dans cette section, nous étudions la fonction de répartition conjointe du mouvement brownien avec son maximum. Tout d'abord, nous définissons la notion de temps d'arrêt, grâce à laquelle nous pourrons obtenir la distribution du mouvement brownien standard et sa valeur maximale. Cependant, la fonction de répartition conjointe du mouvement brownien avec dérive ne s'obtient pas si facilement en raison de l'absence de symétrie. Or, en effectuant un changement de mesure, il est possible de modifier la dérive d'un mouvement brownien. Ainsi, à partir de la distribution conjointe du mouvement brownien standard et de son maximum, nous obtenons la distribution conjointe du mouvement brownien avec dérive et sa valeur maximale.

2.2.1 Temps d'arrêt et temps de passage

Les temps d'arrêts sont des variables aléatoires déterminant le moment où un processus doit s'arrêter.

Définition 2.2. Soit $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espace probabilisable et $\mathbb{F} = \{\mathfrak{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ une filtration sur cet espace. Un temps d'arrêt par rapport à la filtration $\mathbb{F}$ est une variable aléatoire $T : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$ qui est $\mathfrak{F}$-mesurable et telle que

$$\{\omega \in \Omega | T(\omega) \leq t\} \in \mathfrak{F}_t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Remarque 2.1. Afin de caractériser un temps d'arrêt, nous devons avant tout spécifier la filtration sur laquelle il est défini. Nous notons par $\mathbb{F}^0 = \{\mathfrak{F}_t^0\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration engendrée par le mouvement brownien où

$$\mathfrak{F}_t^0 = \sigma(\{W_s, 0 \leq s \leq t\}) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Le premier temps de passage est un bon exemple de temps d'arrêt.

Proposition 2.2.1. *Soient $a \in \mathbb{R}$ une constante et $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien, alors le premier temps de passage à une valeur « a », $T_a \equiv \inf\{t \geq 0 | W_t = a\}$ est un*

temps d'arrêt par rapport à la filtration $\mathbb{F}^0$ engendrée par le mouvement brownien. Si $\inf\{t \geq 0 | W_t = a\} = \emptyset$ *(W n'atteint jamais la valeur a), nous considérons que* $T_a = +\infty$.

Notons que T_a est un temps d'arrêt par rapport à la filtration engendrée par le mouvement brownien, puisque l'événement $\{T_a \leq t\} = \{W_s = a$ pour un s quelconque, $0 \leq s \leq t\}$ dépend uniquement de $\{W_s, 0 \leq s \leq t\}$, soit l'ensemble des trajectoires jusqu'au temps t. Afin de formaliser cet argument, remarquons que $\{T_a \leq t\} = \{\max_{0 \leq s \leq t} W_s \geq a\}$. En effet, si le maximum sur $[0, t]$ est supérieur à a, il est certain que le processus a franchit la barrière a à un temps s, $0 \leq s \leq t$, puisque le processus est continu. Ainsi, il existe un temps s sur l'intervalle $[0, t]$ tel que $W_s = a$, donc $T_a \leq t$.

Démonstration. Afin d'alléger la notation, il est sous-entendu que $\{W_s \in A\} = \{\omega \in \Omega | W_s(\omega) \in A\}$ où $A \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle quelconque.

$$\begin{aligned} \{T_a \leq t\} &= \{\max_{0 \leq s \leq t} W_s \geq a\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\max_{0 \leq s \leq t} W_s > a - \frac{1}{n}\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r \leq t | r \in \mathbb{Q}} \{W_r > a - \frac{1}{n}\}. \end{aligned}$$

Notons que l'événement $\max_{0 \leq s \leq t} W_s > a - \frac{1}{n}$ implique qu'il existe au moins un nombre rationnel r inférieur à t tel que $W_r > a - \frac{1}{n}$. Aussi, par la définition de tribu engendrée, nous savons que l'événement $\{W_r \leq a - \frac{1}{n}\}$ est élément de $\mathfrak{F}_t$ puisque $r \leq t$. Il en résulte, par les propriétés de la tribu, que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{r \leq t | r \in \mathbb{Q}} \{W_r > a - \frac{1}{n}\} \in \mathfrak{F}_t$ entraînant ainsi que T_a est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $\mathbb{F}^0$. □

Certains calculs qui semblent difficiles à première vue sont grandement simplifiés par l'utilisation des temps d'arrêts et de différentes propriétés relatives à ceux-ci. Par exemple, soit $s > 0$ un temps fixé, il est relativement trivial de démontrer que le processus $\{W_{t+s} - W_s\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard. Il est possible d'étendre ce résultat au temps d'arrêt fini grâce à la propriété forte de Markov. C'est-à-dire, si T est un temps d'arrêt fini $\mathbb{P}\{T < \infty\} = 1$, alors le processus $\{W_{T+t} - W_T\}$ est un mouvement brownien standard pour $t \geq 0$, et est indépendant de $\mathfrak{F}_T$, la tribu engendrée par T. Nous

ferons référence à cette propriété à la section suivante afin de formaliser le principe de réflexion.

2.2.2 Mouvement brownien sans dérive

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la distribution conjointe du mouvement brownien standard et son maximum. Pour ce faire, nous utilisons l'argument appelé principe de réflexion. De façon heuristique, considérons la probabilité que W_t soit supérieure à un certain point a étant donné $W_s = a$ pour un $s < t$. Alors par symétrie, nous savons que cette probabilité est égale à $\frac{1}{2}$. C'est-à-dire,

$$\mathbb{P}(W_t > a | W_s = a) = \mathbb{P}(W_t - W_s > 0) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, en considérant la symétrie par rapport à la droite $y = a$ sur l'intervalle $[T_a,\ t]$, nous avons alors une correspondance biunivoque entre les trajectoires qui sont supérieures à a et celles qui sont inférieures à a au temps t, puisque celles qui sont exactement égales à a ont une probabilité nulle de se produire.

Soit $M_t = \max_{0 \leq s \leq t} W_s$, c'est-à-dire le maximum du mouvement brownien sur l'intervalle $[0,\ t]$. À l'aide du principe de réflexion, nous pouvons calculer la fonction de survie de M_t :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{M_t \geq a\} &= \mathbb{P}\{M_t \geq a, W_t \geq a\} + \mathbb{P}\{M_t \geq a, W_t < a\} \\ &= 2\mathbb{P}\{M_t \geq a, W_t \geq a\} \\ &= 2\mathbb{P}\{W_t \geq a\}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du fait que si $W_t \geq a$, alors nécessairement $M_t \geq a$, d'où $\{W_t \geq a\} \subset \{M_t \geq a\}$.

La proposition ci-dessous formalise l'argument du principe de réflexion énoncé précédemment.

Proposition 2.2.2. *[Principe de réflexion] Soient $a \in \mathbb{R}$ une constante, $\{W_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien standard et $T_a = \inf\{t \geq 0 | W_t = a\}$ le premier temps de passage*

à une valeur a. Le processus $\{\tilde{W}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini par :

$$\tilde{W}_t = \begin{cases} W_t & t < T_a \\ a + (a - W_t) & t \geq T_a, \end{cases}$$

est un mouvement brownien standard.

Le processus $\{\tilde{W}_t\}$ est donc une transformation du processus $\{W_t\}$ qui consiste à refléter les trajectoires sur la droite $y = a$ après le premier temps de passage à a. En effet, à partir du moment où le point a est atteint, c'est-à-dire lorsque $t \geq T_a$, il est alors possible de considérer une autre trajectoire d'égale probabilité se situant à une distance de $a - W_t$ du point a. Ainsi, lorsque $t > T_a$ et $W_t < a$, alors nécessairement $\tilde{W}_t > a$. La démonstration de la proposition 2.2.2 se trouve dans Rogers et Williams (2000a) et requiert l'analyse des processus markoviens avec trajectoire continue ainsi que l'utilisation de la propriété forte markovienne.

Nous pouvons maintenant formuler une preuve plus rigoureuse de la distribution du maximum.

Proposition 2.2.3. *Soit $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien standard, et $M_t = \max_{0\leq s\leq t} W_s$ le maximum du processus sur l'intervalle $[0, t]$. Alors pour $a > 0$,*

$$\mathbb{P}\{M_t \leq a\} = 2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) - 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

où $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

Démonstration. Rappelons que $\{M_t \geq a\} = \{T_a \leq t\}$ et calculons $\mathbb{P}\{M_t \geq a, W_t < a\}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{M_t \geq a, W_t < a\} &= \mathbb{P}\{T_a \leq t, W_t < a\} \\ &= \mathbb{P}\{T_a \leq t, \tilde{W}_t > a\} \\ &= \mathbb{P}\{\tilde{W}_t > a\} \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

De plus, $\mathbb{P}\{M_t \geq a, W_t \geq a\} = \mathbb{P}\{W_t \geq a\} = 1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{M_t \leq a\} &= 1 - \mathbb{P}\{M_t \geq a\} \\
&= 1 - [\mathbb{P}\{M_t \geq a, W_t \geq a\} + \mathbb{P}\{M_t \geq a, W_t < a\}] \text{ (puisque } \mathbb{P}\{M_t = a\} = 0) \\
&= 1 - \left[1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right] \\
&= 2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) - 1.
\end{aligned}$$

□

Naturellement, nous pouvons également obtenir la fonction de répartition conjointe du mouvement brownien standard et de son maximum.

Proposition 2.2.4. *Soient $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard et $M_t = \max_{0\leq s\leq t} W_s$ le maximum du processus sur l'intervalle $[0, t]$. Alors, pour $a > 0$, la fonction de répartition conjointe du mouvement brownien standard et de son maximum est donnée par :*

$$\mathbb{P}\{M_t \leq a, W_t \leq x\} = \begin{cases} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-2a}{\sqrt{t}}\right) & si\ x \leq a \\ 2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) - 1 & si\ x > a \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Démonstration. Considérons le cas où $x \leq a$ et notons que $\mathbb{P}\{M_t \leq a, W_t \leq x\} = \mathbb{P}\{W_t \leq x\} - \mathbb{P}\{M_t \geq a, W_t \leq x\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{M_t \geq a, W_t \leq x\} &= \mathbb{P}\{T_a \leq t, W_t \leq x\} \\
&= \mathbb{P}\{T_a \leq t, \tilde{W}_t \geq 2a - x\} \text{ (par la proposition 2.2.2)} \\
&= \mathbb{P}\{\tilde{W}_t \geq 2a - x\} \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{2a - x}{\sqrt{t}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{x - 2a}{\sqrt{t}}\right).
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{M_t \leq a, W_t \leq x\} &= \mathbb{P}\{W_t \leq x\} - \mathbb{P}\{M_t \geq a, W_t \leq x\} \\
&= \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - 2a}{\sqrt{t}}\right).
\end{aligned}$$

Le cas où $x \geq a$ est trivial, puisque si le maximum sur l'intervalle $[0, t]$ est inférieur ou égal à la valeur a, alors W_t est nécessairement inférieur ou égal à a, donc W_t est inférieur à x. De ce fait, $\{M_t \leq a\} \subset \{W_t \leq x\}$, et

$$\mathbb{P}\{M_t \leq a, W_t \leq x\} = \mathbb{P}\{M_t \leq a\} = 2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) - 1.$$

□

Rappelons que si $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard, alors pour $\sigma > 0$ le processus $\left\{W_t^{(\sigma)} = \sigma W_t\right\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien avec dérive nulle et variance σ^2. Ainsi, par un simple changement d'échelle nous pouvons étendre tous les résultats obtenus ci-haut au mouvement brownien avec variance σ^2. Par exemple, pour $a > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\max_{0\leq s\leq t} W_s^{(\sigma)} \leq a\} &= \mathbb{P}\{\max_{0\leq s\leq t} \sigma W_s \leq a\} \\
&= \mathbb{P}\{\max_{0\leq s\leq t} W_s \leq \frac{a}{\sigma}\} \\
&= 2\Phi\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{t}}\right) - 1 \text{ (par la proposition 2.2.3).}
\end{aligned}$$

Cependant, si la dérive est non-nulle ($\mu \neq 0$), alors le processus n'est pas symétrique et l'argument du principe de réflexion n'est plus valide. En revanche, en effectuant un changement de mesure, nous pouvons transformer un mouvement brownien avec dérive en un mouvement brownien sans dérive et ainsi obtenir la nouvelle distribution.

2.2.3 Mouvement brownien avec dérive

Dans cette section, nous étudions la fonction de répartition du mouvement brownien avec dérive et son maximum. Comme nous venons de le mentionner, l'absence de symétrie du mouvement brownien avec dérive rend l'étude de la distribution plus complexe. Considérons un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ et un mouvement standard $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ sur cet espace. Il est possible de construire une nouvelle mesure $\mathbb{Q}$, équivalente à $\mathbb{P}$, telle que le processus $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un $(\mu, 1)$ mouvement brownien sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{Q})$. Ainsi, en effectuant un changement de mesure, nous pouvons obtenir la distribution du mouvement brownien avec dérive et son maximum à partir de celle du mouvement sans

dérive. L'extension pour le cas où $\sigma^2 \neq 1$ est triviale puisqu'il suffit d'effectuer un changement d'échelle.

Nous énonçons maintenant le théorème de Girsanov qui nous permet d'établir le comportement d'un mouvement brownien standard sous un certain changement de mesure.

Théorème 2.2.5. *Soit $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien standard sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ et $\mathbb{F}^0 = \{\mathfrak{F}_t^0\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration engendrée par $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Considérons $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus $\mathbb{F}^0$-adapté tel que*

$$E^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_t^2 dt\right)\right] < \infty,$$

et soit

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right).$$

Posons

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(A) &= \int_A L_t(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \quad A \in \mathfrak{F}_t^0 \\ &= E^{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A L_t],\end{aligned}$$

où $\mathbf{1}$ est la fonction indicatrice, alors le processus $\{W_t^{\mathbb{Q}}\}_{0\leq t\leq T}$ défini par

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t + \int_0^t \theta_s ds$$

est un mouvement brownien standard sous la mesure $\mathbb{Q}$.

Remarque 2.2. Notons que le processus L_t est appelé la dérivée de Radon-Nikodym de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$, et est notée

$$L_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathfrak{F}_t}.$$

Si nous fixons $\theta = -\mu$, alors la dérivée de Radon-Nykodym devient :

$$L_t = e^{\mu W_t - \frac{1}{2}\mu^2 t}, \tag{2.1}$$

et le processus $\{W_t^{\mathbb{Q}}\}_{0\leq t\leq T}$ défini par

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t - \mu t \tag{2.2}$$

est un mouvement brownien standard sous la mesure $\mathbb{Q}$, ou encore, sous cette nouvelle mesure, le processus $\{W_t = W_t^{\mathbb{Q}} + \mu t\}_{0 \leq t \leq T}$ est un mouvement brownien avec dérive μ. Ainsi, le passage de la mesure $\mathbb{P}$ à la mesure $\mathbb{Q}$ permet de modifier la dérive d'un mouvement brownien.

Girsanov publia en 1960 « *On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures* », un article dans lequel il traita du célèbre théorème en question. Ce théorème est discuté et démontré selon différents degrés de généralité dans plusieurs ouvrages tels que Etheridge (2002), Elliott et Kopp (1999), Karatzas et Shereve (1991), Revuz et Yor (2005), ainsi que Rogers et Williams (2000b).

Nous sommes maintenant en mesure d'obtenir la distribution du mouvement brownien et de son maximum.

Proposition 2.2.6. *Soit $\{W_t^{(\mu,\sigma)}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien avec dérive μ et variance σ^2 sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, et soit $M_t^{(\mu,\sigma)} = \max_{0 \leq s \leq t} W_s^{(\mu,\sigma)}$ sa valeur maximale sur l'intervalle $[0, t]$. Alors, pour $y > 0$ et pour tout $t \geq 0$,*

$$\mathbb{P}\{W_t^{(\mu,\sigma)} \leq x, M_t^{(\mu,\sigma)} \leq y\} = \begin{cases} \Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{x-2y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) & si\ x \leq y \\ \Phi\left(\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) & si\ x > y. \end{cases} \tag{2.3}$$

Démonstration. Nous trouvons en premier lieu la distribution conjointe pour $\sigma = 1$. L'extension au cas $\sigma^2 \neq 1$ s'effectue par un simple changement d'échelle tout comme à la sous-section 2.2.2.

Soit $\{W_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien standard sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$.

Dans un premier temps, considérons le cas où $x \leq y$.

Nous savons par la proposition 2.2.4 que

$$\mathbb{P}\{W_t \leq x, M_t \leq y\} = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-2y}{\sqrt{t}}\right),$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{W_t \in dx, M_t \leq y\} &= \frac{\partial}{\partial x}\mathbb{P}\{W_t \leq x, M_t \leq y\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \phi\left(\frac{x-2y}{\sqrt{t}}\right)\right)dx, \qquad (2.4)\end{aligned}$$

où $\phi(\cdot)$ est la fonction de densité d'une loi normale centrée et réduite.

Posons maintenant

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A L_t(\omega)d\mathbb{P}(\omega)), \quad A \in \mathfrak{F}_t^0$$

où

$$L_t = e^{\mu W_t - \frac{1}{2}\mu^2 t}.$$

Alors, par le théorème 2.2.5 ainsi que les équations (2.1) et (2.2), nous savons que W_t est un mouvement brownien avec dérive μ sous cette nouvelle mesure $\mathbb{Q}$.

De ce fait, $\mathbb{Q}\{W_t \leq x, M_t \leq y\}$ est la probabilité qu'un mouvement brownien $(\mu, 1)$ et son maximum soient inférieurs à x et y respectivement. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}\{W_t \leq x, M_t \leq y\} &= \int_{\{W_t \leq x, M_t \leq y\}} L_t(\omega)d\mathbb{P}(\omega) \\ &= E^{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_{\{W_t \leq x, M_t \leq y\}}L_t] \\ &= \int_{-\infty}^{x} e^{\mu z - \frac{\mu^2 t}{2}}\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\phi\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) - \phi\left(\frac{z-2y}{\sqrt{t}}\right)\right)dz \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{\mu z - \frac{\mu^2 t}{2}}\left(e^{-\frac{z^2}{2t}} - e^{-\frac{(z-2y)^2}{2t}}\right)dz \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{\frac{-(z-\mu t)^2}{2t}}dz - e^{2\mu y}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{\frac{-(z-(2y+\mu t))^2}{2t}}dz \\ &= \Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y}\Phi\left(\frac{x-2y-\mu t}{\sqrt{t}}\right) \qquad (2.5)\end{aligned}$$

où la troisième égalité provient du fait que W_t est un mouvement brownien standard sous la mesure $\mathbb{P}$ et de l'équation (2.4).

De l'équation (2.5), nous pouvons déduire la probabilité que la valeur du maximum d'un mouvement brownien $(\mu, 1)$ sur l'intervalle $[0, t]$ soit inférieure à y. En effet,

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}\{M_t \leq y\} &= \lim_{x \to y}\mathbb{Q}\{W_t \leq x, M_t \leq y\} \qquad (2.6) \\ &= \Phi\left(\frac{y-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y}\Phi\left(\frac{-y-\mu t}{\sqrt{t}}\right). \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Dans un deuxième temps, si $x > y$, alors $\{M_t \leq y\} \subset \{W_t \leq x\}$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}\{W_t \leq x, M_t \leq y\} &= \mathbb{Q}\{M_t \leq y\} \text{ (puisque } \{M_t \leq y\} \subset \{W_t \leq x\}) \\ &= \Phi\left(\frac{y-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y}\Phi\left(\frac{-y-\mu t}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Par conséquent, si $\{W_t^{(\mu,1)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un $(\mu, 1)$ mouvement brownien sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ et $M_t^{(\mu,1)} = \max_{0\leq s\leq t} W_s^{(\mu,1)}$, alors en combinant les équations (2.5) et (2.8), nous avons

$$\mathbb{P}\{W_t^{(\mu,1)} \leq x, M_t^{(\mu,1)} \leq y\} = \begin{cases} \Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y}\Phi\left(\frac{x-2y-\mu t}{\sqrt{t}}\right) & \text{si } x \leq y \\ \Phi\left(\frac{y-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y}\Phi\left(\frac{-y-\mu t}{\sqrt{t}}\right) & \text{si } x > y. \end{cases} \tag{2.9}$$

Finalement, par un simple changement d'échelle, nous pouvons généraliser cette fonction de répartition conjointe pour un mouvement brownien avec dérive μ et variance σ^2 quelconque. En effet, soit $\{W_t^{(\frac{\mu}{\sigma},1)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un $(\frac{\mu}{\sigma}, 1)$ mouvement brownien, alors le processus $\{W_t^{(\mu,\sigma)} = \sigma W_t^{(\frac{\mu}{\sigma},1)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien avec dérive μ et variance σ^2. Ainsi,

$$\mathbb{P}\{W_t^{(\mu,\sigma)} \leq x, \max_{0\leq s\leq t} W_s^{(\mu,\sigma)} \leq y\} = \mathbb{P}\{W_t^{(\frac{\mu}{\sigma},1)} \leq \frac{x}{\sigma}, \max_{0\leq s\leq t} W_s^{(\frac{\mu}{\sigma},1)} \leq \frac{y}{\sigma}\}.$$

Par conséquent, il suffit de remplacer μ, x et y dans l'équation (2.9) par $\frac{\mu}{\sigma}$, $\frac{x}{\sigma}$ et $\frac{y}{\sigma}$ respectivement pour obtenir la distribution conjointe voulue. □

La fonction de répartition marginale du maximum d'un mouvement brownien avec dérive μ et variance σ^2 est facilement obtenue par la proposition 2.2.6. En effet, si $x > y$, alors $\mathbb{P}\{W_t^{(\mu,\sigma)} \leq x, M_t^{(\mu,\sigma)} \leq y\} = \mathbb{P}\{M_t^{(\mu,\sigma)} \leq y\}$. Énonçons de façon plus formelle ce résultat.

Corollaire 2.2.7. *Soit $\{W_t^{(\mu,\sigma)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien avec dérive μ et variance σ^2 sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, et soit $M_t^{(\mu,\sigma)} = \max_{0\leq s\leq t} W_s^{(\mu,\sigma)}$ la valeur maximum du mouvement brownien sur l'intervalle $[0, t]$. Alors pour $y > 0$ et pour tout $t \geq 0$:*

$$\mathbb{P}\{M_t^{(\mu,\sigma)} \leq y\} = \Phi\left(\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}}\Phi\left(\frac{-y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \tag{2.10}$$

La démonstration est directe par l'argument mentionné ci-haut et la proposition 2.2.6.

2.3 Famille de copule bivariée

Aux sections précédentes, nous avons étudié le mouvement brownien et différentes fonctions de répartition qui en découlent. Il est maintenant naturel de s'intéresser à la copule que nous pouvons construire à partir de ces fonctions de répartition univariées et conjointes.

Rappelons que par le corollaire 1.3.6, la sous-copule engendrée par la fonction de répartition conjointe F de deux variables aléatoires X et Y ayant pour marginales F_X et F_Y respectivement est donnée par :

$$C'(u,v) = F\left(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)\right).$$

Cette sous-copule est une copule lorsque les variables aléatoires X et Y sont continues. Ainsi, des distributions conjointes obtenues aux sections 2.2.2 et 2.2.3 résultent une nouvelle famille de copule.

Dans un premier temps, nous étudions la copule sans paramètre engendrée par le mouvement brownien standard et sa valeur maximale. Ensuite, nous généralisons cette dernière copule en introduisant un paramètre de dérive.

Rappelons que

$$F_{M_t}(a) = \mathbb{P}\{M_t \leq a\} = 2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) - 1, \quad F_{W_t}(x) = \mathbb{P}\{W_t \leq x\} = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

et

$$\begin{aligned} F_{W_t,M_t}(x,a) &= \mathbb{P}\{W_t \leq x,\, M_t \leq a\} \\ &= \begin{cases} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-2a}{\sqrt{t}}\right) & \text{si } x \leq a \\ 2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) - 1 & \text{si } x > a \end{cases} \end{aligned}$$

par les propositions 2.2.3 et 2.2.4. Ainsi,

$$F_{W_t}^{-1}(u) = \sqrt{t}\Phi^{-1}(u) \text{ et } F_{M_t}^{-1}(v) = \sqrt{t}\Phi^{-1}\left(\frac{v+1}{2}\right),$$

où Φ^{-1} est l'inverse de la fonction de répartition d'une loi normale centrée et réduite.

Par conséquent, la copule engendrée par la fonction de répartition conjointe du mouvement brownien standard et de son maximum $C_{M_t}(u,v) = F_{W_t,M_t}(F_{W_t}^{-1}(u), F_{M_t}^{-1}(v))$ est donnée par :

$$C_{M_t}(u,v) = \begin{cases} u - \Phi\left(\Phi^{-1}(u) - 2\Phi^{-1}\left(\frac{v+1}{2}\right)\right) & \text{si } u \leq \frac{v+1}{2} \\ v & \text{si } u > \frac{v+1}{2}, \end{cases} \tag{2.11}$$

et sa densité par :

$$\begin{aligned} c_{M_t}(u,v) &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_{M_t}(u,v) \\ &= \frac{\left[2\Phi^{-1}\left(\frac{v+1}{2}\right) - \Phi^{-1}(u)\right] \phi\left(2\Phi^{-1}\left(\frac{v+1}{2}\right) - \Phi^{-1}(u)\right)}{\phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{v+1}{2}\right)\right) \phi\left(\Phi^{-1}(u)\right)} \end{aligned} \tag{2.12}$$

avec $u \leq \frac{v+1}{2}$.

La figure 2.1 illustre graphiquement la densité de la copule engendrée par le mouvement brownien standard et sa valeur maximale.

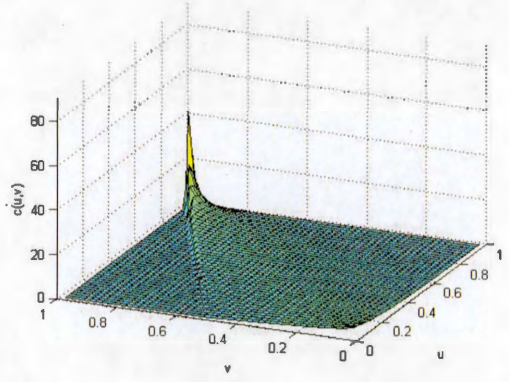

Figure 2.1 Densité de la copule engendrée par W_t et M_t.

Observons qu'une portion du graphe de la figure 2.1 est nulle. Cela découle du fait que le mouvement brownien W_t ne peut jamais être supérieur à son maximum sur l'intervalle $[0, t]$.

De plus, remarquons que si $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard alors

$\{W^{(\sigma)} = \sigma W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien avec dérive nulle et variance σ^2. Notons également que par le théorème 1.3.7, nous savons que les copules sont invariantes par rapport aux transformations strictement croissantes, ainsi la copule obtenue en (2.11) demeure inchangée par l'introduction d'un paramètre de variance σ^2. Toutefois, ce n'est plus le cas lorsque nous introduisons un paramètre de dérive. Or, par la proposition 2.2.6 et le corollaire 2.2.7, nous savons que

$$\begin{aligned} F_{W_t,M_t}(x,\, y;\, \mu) &= \mathbb{P}\{W_t^{(\mu,1)} \leq x, M_t^{(\mu,1)} \leq y\} \\ &= \begin{cases} \Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y}\Phi\left(\frac{x-2y-\mu t}{\sqrt{t}}\right) & \text{si } x \leq y \\ \Phi\left(\frac{y-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y}\Phi\left(\frac{-y-\mu t}{\sqrt{t}}\right) & \text{si } x > y, \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_{M_t}(y;\, \mu) &= \mathbb{P}\{M_t^{(\mu,1)} \leq y\} \\ &= \Phi\left(\frac{y-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y}\Phi\left(\frac{-y-\mu t}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Notons également que la fonction de densité du maximum d'un mouvement brownien avec dérive μ et variance $\sigma^2 = 1$ sur l'intervalle $[0,\, t]$ est donnée par :

$$\begin{aligned} f_{M_t}(y;\, \mu) &= \frac{\partial}{\partial y} F_{M_t}(y;\, \mu) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}}\phi\left(\frac{y-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y}\left[2\mu\Phi\left(\frac{-y-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{\sqrt{t}}\phi\left(\frac{-y-\mu t}{\sqrt{t}}\right)\right] \end{aligned}$$

pour $y > 0$. De plus, nous avons que

$$F_{W_t}(x;\, \mu) = \mathbb{P}\{W_t^{(\mu,1)} \leq x\} = \Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\right)$$

et donc,

$$F_{W_t}^{-1}(u;\mu) = \sqrt{t}\,\Phi^{-1}(u) + \mu t.$$

Nous supposons $\sigma^2 = 1$ puisque, tel que mentionné ci-haut, les copules sont invariantes sous les transformations croissantes et un mouvement brownien avec dérive μ et variance σ^2 peut être obtenu par $\left\{W_t^{(\mu,\sigma)} = \sigma W_t^{\left(\frac{\mu}{\sigma},1\right)}\right\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Il suffit donc de considérer un unique paramètre $\mu' = \frac{\mu}{\sigma}$ avec $\sigma' = 1$.

Par conséquent, si $C_{M_t}(u, v; \mu)$ est la copule engendrée par $W_t^{(\mu,1)}$ et $M_t^{(\mu,1)}$, et que $c_{M_t}(u, v; \mu)$ est sa densité, alors par le corollaire 1.3.6 nous avons

$$\begin{aligned} & C_{M_t}(u, v; \mu) \\ &= F_{W_t, M_t}\left(F_{W_t}^{-1}(u; \mu), F_{M_t}^{-1}(v; \mu); \mu\right) \\ &= \begin{cases} u - e^{2\mu\zeta(v)}\Phi\left(\Phi^{-1}(u) - \frac{2\zeta(v)}{\sqrt{t}}\right) & \text{si } u \leq \Phi\left(\frac{\zeta(v)-\mu t}{\sqrt{t}}\right) \\ v & \text{si } u > \Phi\left(\frac{\zeta(v)-\mu t}{\sqrt{t}}\right), \end{cases} \end{aligned} \tag{2.13}$$

et

$$\begin{aligned} c_{M_t}(u, v; \mu) &= \frac{2e^{2\mu\zeta(v)}\phi\left(\Phi^{-1}(u) - \frac{2\zeta(v)}{\sqrt{t}}\right)}{f_{M_t}\left(\zeta(v); \mu\right)\phi\left(\Phi^{-1}(u)\right)} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{2\zeta(v)}{\sqrt{t}} - \Phi^{-1}(u)\right) - \mu\right] \quad \text{si } u \leq \Phi\left(\frac{\zeta(v) - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right), \end{aligned} \tag{2.14}$$

où $\zeta(v) = F_{M_t}^{-1}(v; \mu)$ est l'inverse de la fonction de répartition de $M_t^{(\mu,1)}$.

La figure 2.2 illustre la densité de la copule $C_{M_t}(u, v; \mu)$ avec $t = 2$, et des valeurs croissantes de μ, soit $\mu = -2$, $\mu = 0$ et $\mu = 10$ respectivement.

Remarquons que l'augmentation de la dérive accroît l'ampleur de la dépendance, et lorsque μ tend vers 0 alors $C_{M_t}(u, v; \mu)$ converge vers $C_{M_t}(u, v)$.

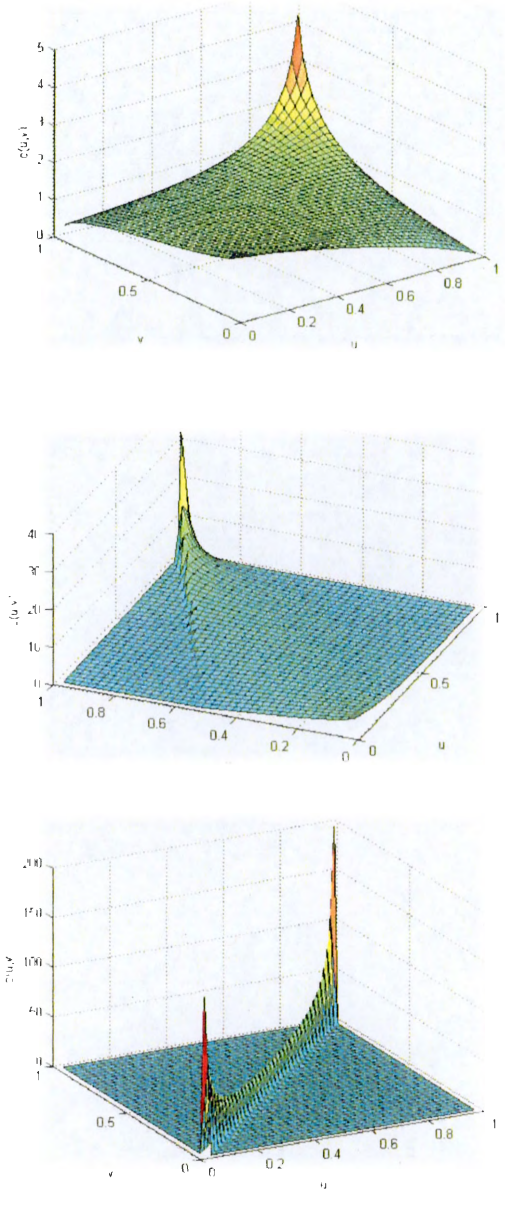

Figure 2.2 Densité de la copule engendrée par $W_t^{(\mu,\sigma)}$ et $M_t^{(\mu,\sigma)}$ pour des valeurs croissantes du paramètre μ.

CHAPITRE III

MOUVEMENTS BROWNIENS CORRÉLÉS

Au chapitre précédent, nous avons obtenu la copule bivariée engendrée par la distribution conjointe du mouvement brownien avec dérive et sa valeur maximale. Une extension naturelle consiste maintenant à considérer un mouvement brownien bidimensionnel corrélé $(B_t^1, B_t^2)'$, $t \in \mathbb{R}_+$, et de s'intéresser à la copule résultant de la fonction de répartition conjointe de B_T^1 et $M_{(s,t)}^2$, où $0 < s < t \leq T$ et $M_{(s,t)}^2 = \max_{s \leq u \leq t} B_u^2$.

Dans le présent chapitre, nous trouvons dans un premier temps la fonction de répartition conjointe de $W_T^{(\mu,\sigma)}$ et $M_t^{(\mu,\sigma)}$ où $W_T^{(\mu,\sigma)}$ représente la valeur du mouvement brownien au temps T que nous appelons la valeur à l'échéance du mouvement brownien, alors que $M_t^{(\mu,\sigma)}$ est son maximum sur l'intervalle $[0, t]$ pour $0 < t \leq T$. Nous pouvons alors généraliser cette dernière distribution en raffinant l'intervalle du temps sur lequel la valeur maximale du mouvement brownien est considérée. C'est-à-dire, nous étudions la fonction de répartition conjointe de $W_T^{(\mu,\sigma)}$ et $M_{(s,t)}^{(\mu,\sigma)}$ où $M_{(s,t)}^{(\mu,\sigma)} = \max_{s \leq u \leq t} W_u^{(\mu,\sigma)}$ avec $s < t \leq T$, et grâce à celle-ci, nous établissons la distribution conjointe B_T^1 et $M_{(s,t)}^2$. Finalement, nous nous intéressons à la copule bivariée engendrée par cette distribution.

3.1 Loi normale multivariée

L'étude des fonctions de répartition conjointes mentionnées ci-haut requiert l'intégration de fonctions particulières qui sont reliées à la loi normale multivariée. Nous examinons alors quelques propriétés en rapport avec les lois normales bivariées et trivariées, et

développons une solution générale pour une forme d'intégrale spécifique.

Soit $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)'$ un vecteur aléatoire de distribution normale standard et $\mathbf{R}$ la matrice de corrélation de $\mathbf{Z}$. Nous notons par

$$\Phi_n(z_1, z_2, \ldots, z_n; \mathbf{R}) = \mathbb{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(Z_i \leq z_i)\right\},$$

la fonction de répartition de $\mathbf{Z}$ évaluée en $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)'$. Dans la deuxième et la troisième dimension, la notation $\Phi_2(z_1, z_2; \rho)$ et $\Phi_3(z_1, z_2, z_3; \rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23})$ est couramment utilisée.

De plus, remarquons que

$$\Phi_2(z_1, z_2; \rho) = \Phi_2(z_2, z_1; \rho) \tag{3.1}$$

et

$$\Phi(z_1) - \Phi_2(z_1, z_2; \rho) = \Phi_2(z_1, -z_2; -\rho). \tag{3.2}$$

où la dernière égalité découle simplement du fait que

$$\begin{aligned}\Phi(z_1) - \Phi_2(z_1, z_2; \rho) &= \mathbb{P}\{Z_1 \leq z_1, Z_2 \geq z_2\} \\ &= \mathbb{P}\{Z_1 \leq z_1, -Z_2 \leq -z_2\} \\ &= \Phi_2(z_1, -z_2; -\rho).\end{aligned}$$

Le lemme suivant nous permettra de trouver la distribution conjointe de $M_t^{(\mu,\sigma)}$ et $W_T^{(\mu,\sigma)}$ à la prochaine section.

Lemme 3.1.1. *Soient z_1, z_2, z_3 des constantes réelles et $\rho \geq 0$. Si $z_1 = -\rho z_2 + \sqrt{1-\rho^2}\, z_3$, alors*

$$\Phi_2(z_1, z_2; -\rho) + \Phi_2(-z_1, z_3; -\sqrt{1-\rho^2}) = \Phi(z_2)\Phi(z_3) \tag{3.3}$$

et

$$\Phi_2(z_1, z_2; -\rho) + \Phi(-z_2)\Phi(z_3) = \Phi_2(z_1, z_3; \sqrt{1-\rho^2}) \tag{3.4}$$

Démonstration. Soient Z_2 et Z_3 deux variables aléatoires indépendantes de distribution normale standard, et soit Z_1 une troisième variable aléatoire définie par $Z_1 = -\rho Z_2 + \sqrt{1-\rho^2}Z_3$. Il est évident que Z_1 est aussi de loi normale standard et que les vecteurs aléatoires (Z_1, Z_2) et $(-Z_1, Z_3)$ sont de loi normale bivariée avec coefficient de corrélation $-\rho$ et $-\sqrt{1-\rho^2}$ respectivement. Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\Phi_2(z_1, z_2; -\rho) + \Phi_2(-z_1, z_3; -\sqrt{1-\rho^2}) \\
&\quad = \mathbb{P}\{Z_1 \le z_1, Z_2 \le z_2\} + \mathbb{P}\{-Z_1 \le -z_1, Z_3 \le z_3\} \\
&\quad = \mathbb{P}\{Z_1 \le z_1, Z_2 \le z_2, Z_3 \le z_3\} + \mathbb{P}\{Z_1 \le z_1, Z_2 \le z_2, Z_3 \ge z_3\} \\
&\qquad + \mathbb{P}\{Z_1 \ge z_1, Z_2 \le z_2, Z_3 \le z_3\} + \mathbb{P}\{Z_1 \ge z_1, Z_2 \ge z_2, Z_3 \le z_3\}.
\end{aligned}$$

En remplaçant Z_1 par $-\rho Z_2 + \sqrt{1-\rho^2}Z_3$ et z_1 par $-\rho z_2 + \sqrt{1-\rho}z_3$, nous voyons clairement que les événements $\{Z_1 \le z_1, Z_2 \le z_2, Z_3 \ge z_3\}$ et $\{Z_1 \ge z_1, Z_2 \ge z_2, Z_3 \le z_3\}$ sont vides, par conséquent leur probabilité d'occurence est nulle et nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
&\Phi_2(z_1, z_2; -\rho) + \Phi_2(-z_1, z_3; -\sqrt{1-\rho^2}) \\
&\quad = \mathbb{P}\{Z_1 \le z_1, Z_2 \le z_2, Z_3 \le z_3\} + \mathbb{P}\{Z_1 \ge z_1, Z_2 \le z_2, Z_3 \le z_3\} \\
&\quad = \mathbb{P}\{Z_2 \le z_2, Z_3 \le z_3\} = \Phi(z_2)\Phi(z_3) \text{ (par indépendance de } Z_2 \text{ et } Z_3).
\end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons (3.4) à partir des équations (3.2) et (3.3). En effet,

$$\begin{aligned}
&\Phi_2(z_1, z_2; -\rho) + \Phi_2(-z_1, z_3; -\sqrt{1-\rho^2}) = \Phi(z_2)\Phi(z_3) \\
&\quad \Rightarrow \Phi_2(z_1, z_2; -\rho) + \Phi(z_3) - \Phi_2(z_1, z_3; \sqrt{1-\rho^2}) = (1 - \Phi(-z_2))\Phi(z_3) \\
&\quad \Rightarrow \Phi_2(z_1, z_2; -\rho) + \Phi(-z_2)\Phi(z_3) = \Phi_2(z_1, z_3; \sqrt{1-\rho^2}).
\end{aligned}$$

□

De façon similaire, dans le cas tridimensionnel, nous avons

$$\Phi_3(z_1, z_2, z_3; \rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}) = \Phi_3(z_2, z_1, z_3; \rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{13}) = \Phi_3(z_3, z_1, z_2; \rho_{13}, \rho_{23}, \rho_{12}) \tag{3.5}$$

et

$$\Phi_2(z_2,\, z_3;\, \rho_{23}) - \Phi_3(z_1,\, z_2,\, z_3;\, \rho_{12},\, \rho_{13},\, \rho_{23}) = \Phi_3(-z_1,\, z_2,\, z_3;\, -\rho_{12},\, -\rho_{13},\, \rho_{23}). \quad (3.6)$$

La distribution conjointe de B_T^1 et $M_{(s,t)}^2$ renferme des intégrales qui sont reliées à la distribution normale quadrivariée. La proposition suivante donne une solution générale à cette forme d'intégrale.

Proposition 3.1.2. *Soient a, h, θ_i, $i = 1, 2, 3$, δ_j et $\eta_j > 0$, $j = 0, 1, 2, 3$ des constantes, et soient $\mathbf{R} = [\rho_{ij}]_{i,\,j=1,\,2,\,3}$ une matrice de corrélation alors*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{a} \exp(hs)\Phi_3\left(\frac{\delta_1+\theta_1 s}{\eta_1}, \frac{\delta_2+\theta_2 s}{\eta_2}, \frac{\delta_3+\theta_3 s}{\eta_3}; \mathbf{R}\right)\phi\left(\frac{s-\delta_0}{\eta_0}\right)\frac{ds}{\eta_0} \\ = \exp\left(h\delta_0 + \frac{h^2\eta_0^2}{2}\right)\Phi_4\left(\frac{a-\delta_0^*}{\eta_0}, \frac{\delta_1+\theta_1\delta_0^*}{\kappa_1}, \frac{\delta_2+\theta_2\delta_0^*}{\kappa_2}, \frac{\delta_3+\theta_3\delta_0^*}{\kappa_3}; \mathbf{R}^*\right)\end{aligned} \quad (3.7)$$

et

$$\begin{aligned}\int_{a}^{+\infty} \exp(hs)\Phi_3\left(\frac{\delta_1+\theta_1 s}{\eta_1}, \frac{\delta_2+\theta_2 s}{\eta_2}, \frac{\delta_3+\theta_3 s}{\eta_3}; \mathbf{R}\right)\phi\left(\frac{s-\delta_0}{\eta_0}\right)\frac{ds}{\eta_0} \\ = \exp\left(h\delta_0 + \frac{h^2\eta_0^2}{2}\right)\Phi_4\left(\frac{-a+\delta_0^*}{\eta_0}, \frac{\delta_1+\theta_1\delta_0^*}{\kappa_1}, \frac{\delta_2+\theta_2\delta_0^*}{\kappa_2}, \frac{\delta_3+\theta_3\delta_0^*}{\kappa_3}; \mathbf{R}^{**}\right)\end{aligned} \quad (3.8)$$

où $\delta_0^* = \delta_0 + h\eta_0^2$; $\kappa_i = \sqrt{\theta_i^2\eta_0^2 + \eta_i^2}$ pour $i = 1, 2, 3$; $\mathbf{R}^* = [\rho_{ij}^*]_{i,\,j=1,\,2,\,3,\,4}$ avec $\rho_{1\,i+1}^* = -\frac{\theta_i\eta_0}{\kappa_i}$ pour $i = 1, 2, 3$; $\rho_{2\,i+1}^* = \frac{\rho_{1i}\eta_1\eta_i + \theta_1\theta_i\eta_0^2}{\kappa_1\kappa_i}$ pour $i = 2, 3$; $\rho_{34}^* = \frac{\rho_{23}\eta_2\eta_3 + \theta_2\theta_3\eta_0^2}{\kappa_2\kappa_3}$; $\mathbf{R}^{**} = [\rho_{ij}^{**}]_{i,\,j=1,\,2,\,3,\,4}$ avec $\rho_{1i}^{**} = -\rho_{1i}^*$ pour $i = 2, 3, 4$ et $\rho_{ij}^{**} = \rho_{ij}^*$ pour $i, j = 2, 3, 4$.

Démonstration. Soit $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)'$ un vecteur aléatoire de loi normale quadrivarié de paramètres $E[X_i] = \mu_i$, $VAR[X_i] = \sigma_i^2$ et $\mathbf{R}^* = [\rho_{ij}^*]$ pour $i, j = 1, 2, 3, 4$. Alors la distribution conditionnelle de (X_2, X_3, X_4) étant donné $X_1 = x_1$ est de loi normale trivariée avec un vecteur moyenne et une matrice de variances-covariances définie à l'appendice B.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\Phi_4\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}, \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}, \frac{x_3-\mu_3}{\sigma_3}, \frac{x_4-\mu_4}{\sigma_4}; \mathbf{R}^*\right) \\
&= \mathbb{P}\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, X_3 \le x_3, X_4 \le x_4\} \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \mathbb{P}\{X_2 \le x_2, X_3 \le x_3, X_4 \le x_4 \,|\, X_1 = s\} \mathbb{P}\{X_1 \in ds\} \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \Phi_3\left(\frac{x_2-(\mu_2+\rho_{12}^*\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(s-\mu_1))}{\sigma_2\sqrt{1-(\rho_{12}^*)^2}}, \ldots, \frac{x_4-(\mu_4+\rho_{14}^*\frac{\sigma_4}{\sigma_1}(s-\mu_1))}{\sigma_4\sqrt{1-(\rho_{14}^*)^2}}; \right. \qquad (3.9) \\
&\quad \left. \frac{\rho_{23}^*-\rho_{12}^*\rho_{13}^*}{\sqrt{1-(\rho_{12}^*)^2}\sqrt{1-(\rho_{13}^*)^2}}, \frac{\rho_{24}^*-\rho_{12}^*\rho_{14}^*}{\sqrt{1-(\rho_{12}^*)^2}\sqrt{1-(\rho_{14}^*)^2}}, \frac{\rho_{34}^*-\rho_{13}^*\rho_{14}^*}{\sqrt{1-(\rho_{13}^*)^2}\sqrt{1-(\rho_{14}^*)^2}}\right) \\
&\quad \times \phi\left(\frac{s-\mu_1}{\sigma_1}\right)\frac{ds}{\sigma_1}.
\end{aligned}$$

En posant simplement $x_1 = a$, $x_{i+1} = \delta_i$, $\mu_1 = \delta_0$, $\mu_{i+1} = -\theta_i\delta_0$, $\sigma_1 = \eta_0$, $\sigma_{i+1} = \kappa_i$ pour $i = 1, 2, 3$ et remplaçant dans l'équation (3.9) les éléments de la matrice $\mathbf{R}^*$ par leurs valeurs respectives, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\Phi_4\left(\frac{a-\delta_0}{\eta_0}, \frac{\delta_1+\theta_1\delta_0}{\kappa_1}, \frac{\delta_2+\theta_2\delta_0}{\kappa_2}, \frac{\delta_3+\theta_3\delta_0}{\kappa_3}; \mathbf{R}^*\right) \\
&= \int_{-\infty}^{a} \Phi_3\left(\frac{\delta_1+\theta_1 s}{\eta_1}, \frac{\delta_2+\theta_2 s}{\eta_2}, \frac{\delta_3+\theta_3 s}{\eta_3}; \mathbf{R}\right)\phi\left(\frac{s-\delta_0}{\eta_0}\right)\frac{ds}{\eta_0}
\end{aligned}$$

Ce qui vérifie l'équation (3.7) pour $h = 0$.

Le cas où $h \neq 0$ découle du dernier résultat en complétant le carré du terme $\exp(hs)\phi\left(\frac{s-\delta_0}{\eta_0}\right)$, c'est-à-dire

$$\exp(hs)\phi\left(\frac{s-\delta_0}{\eta_0}\right) = \exp\left(h\delta_0 + \frac{h^2\eta_0^2}{2}\right)\phi\left(\frac{s-\delta_0^*}{\eta_0}\right).$$

Finalement, le résultat de l'équation (3.8) est obtenu de façon similaire, il suffit en fait, de remarquer que

$$\begin{aligned}
&\Phi_4\left(\frac{-x_1+\mu_1}{\sigma_1}, \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}, \frac{x_3-\mu_3}{\sigma_3}, \frac{x_4-\mu_4}{\sigma_4}; \mathbf{R}^{**}\right) \\
&= \mathbb{P}\{(-X_1) \le -x_1, X_2 \le x_2, X_3 \le x_3, X_4 \le x_4\} \\
&= \mathbb{P}\{X_1 \ge x_1, X_2 \le x_2, X_3 \le x_3, X_4 \le x_4\}.
\end{aligned}$$

□

Dans le cas particulier où δ_3 approche l'infini, les équations (3.7) et (3.8) deviennent alors

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{a} \exp(hs)\Phi_2\left(\frac{\delta_1+\theta_1 s}{\eta_1}, \frac{\delta_2+\theta_2 s}{\eta_2}; \rho_{12}\right) \\ \times \phi\left(\frac{s-\delta_0}{\eta_0}\right)\frac{ds}{\eta_0} \\ = \exp\left(h\delta_0+\frac{h^2\eta_0^2}{2}\right)\Phi_3\left(\frac{a-\delta_0^*}{\eta_0}, \frac{\delta_1+\theta_1\delta_0^*}{\kappa_1}; \rho_{12}^*, \rho_{13}^*, \rho_{23}^*\right)\end{aligned} \tag{3.10}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{a}^{+\infty} \exp(hs)\Phi_2\left(\frac{\delta_1+\theta_1 s}{\eta_1}, \frac{\delta_2+\theta_2 s}{\eta_2}; \rho_{12}\right) \\ \times \phi\left(\frac{s-\delta_0}{\eta_0}\right)\frac{ds}{\eta_0} \\ = \exp\left(h\delta_0+\frac{h^2\eta_0^2}{2}\right)\Phi_3\left(\frac{-a+\delta_0^*}{\eta_0}, \frac{\delta_1+\theta_1\delta_0^*}{\kappa_1}; -\rho_{12}^*, -\rho_{13}^*, \rho_{23}^*\right).\end{aligned} \tag{3.11}$$

De la même manière, en laissant δ_2 tendre vers l'infini dans (3.10) et (3.11), nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{a} \exp(hs)\Phi\left(\frac{\delta_1+\theta_1 s}{\eta_1}\right)\phi\left(\frac{s-\delta}{\eta}\right)\frac{ds}{\eta} \\ = \exp\left(h\delta+\frac{h^2\eta^2}{2}\right)\Phi_2\left(\frac{a-\delta^*}{\eta}, \frac{\delta_1+\theta_1\delta^*}{\kappa_1}; -\frac{\theta_1\eta}{\kappa_1}\right)\end{aligned} \tag{3.12}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{a}^{+\infty} \exp(hs)\Phi\left(\frac{\delta_1+\theta_1 s}{\eta_1}\right)\phi\left(\frac{s-\delta}{\eta}\right)\frac{ds}{\eta} \\ = \exp\left(h\delta+\frac{h^2\eta^2}{2}\right)\Phi_2\left(\frac{-a+\delta^*}{\eta}, \frac{\delta_1+\theta_1\delta^*}{\kappa_1}; \frac{\theta_1\eta}{\kappa_1}\right).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Nous utilisons ces derniers résultats afin de trouver la distribution conjointe de $W_T^{(\mu,\sigma)}$ et $M_t^{(\mu,\sigma)}$, et celle de $W_T^{(\mu,\sigma)}$ et $M_{(s,t)}^{(\mu,\sigma)}$.

3.2 Fonction de répartition conjointe de $W_T^{(\mu,\sigma)}$ et $M_{(s,t)}^{(\mu,\sigma)}$

Nous sommes maintenant en mesure de généraliser la distribution conjointe du mouvement brownien avec dérive et sa valeur maximale obtenue au chapitre précédent.

Considérons dans un premier temps le cas où $s = 0$ et énonçons la proposition suivante :

Proposition 3.2.1. *Soit* $\{W_t^{(\mu,\sigma)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un mouvement brownien avec dérive* μ *et variance* σ^2 *sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, *et soit* $M_t^{(\mu,\sigma)} = \max_{0\le u\le t} W_u^{(\mu,\sigma)}$ *la valeur maximale du mouvement brownien sur l'intervalle* $[0, t]$. *Alors pour* $y > 0$ *et pour tout* $0 < t \le T$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{W_T^{(\mu,\sigma)} \le x,\, M_t^{(\mu,\sigma)} \le y\} &= \Phi_2\left(\frac{x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}, \frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}; \sqrt{\frac{t}{T}}\right) \\ &\quad - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}}\Phi_2\left(\frac{x-2y-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}, \frac{-y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}; \sqrt{\frac{t}{T}}\right).\end{aligned} \tag{3.14}$$

Démonstration. Pour débuter, notons que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ alors

$$\mathbb{P}\{X \in dx\} = f_X(x)dx = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\frac{dx}{\sigma}.$$

En appliquant maintenant la loi des probabilités totales nous obtenons

$$\begin{aligned}&P\{W_T^{(\mu,\sigma)} \le x,\, M_t^{(\mu,\sigma)} \le y\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P\{W_T^{(\mu,\sigma)} \le x,\, M_t^{(\mu,\sigma)} \le y | W_T^{(\mu,\,\sigma)} - W_t^{(\mu,\sigma)} = z\} P\{W_T^{(\mu,\,\sigma)} - W_t^{(\mu,\sigma)} \in dz\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P\{W_t^{(\mu,\sigma)} \le x - z,\, M_t^{(\mu,\sigma)} \le y | W_T^{(\mu,\,\sigma)} - W_t^{(\mu,\sigma)} = z\} \phi\left(\frac{z-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\frac{dz}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P\{W_t^{(\mu,\sigma)} \le x - z,\, M_t^{(\mu,\sigma)} \le y\} \phi\left(\frac{z-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\frac{dz}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \int_{-\infty}^{x-y} P\{W_t^{(\mu,\sigma)} \le x - z,\, M_t^{(\mu,\sigma)} \le y\} \phi\left(\frac{z-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\frac{dz}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &\quad + \int_{x-y}^{+\infty} P\{W_t^{(\mu,\sigma)} \le x - z,\, M_t^{(\mu,\sigma)} \le y\} \phi\left(\frac{z-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\frac{dz}{\sigma\sqrt{T-t}}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

En remplaçant dans (3.15) le résultat de la proposition 2.2.6, nous obtenons pour la première partie de l'équation :

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{x-y} P\{W_t^{(\mu,\sigma)} \le x - z,\, M_t^{(\mu,\sigma)} \le y\} \phi\left(\frac{z-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\frac{dz}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \int_{-\infty}^{x-y} \left[\Phi\left(\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}}\Phi\left(\frac{-y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right] \phi\left(\frac{z-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\frac{dz}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \Phi\left(\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\Phi\left(\frac{x-y-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &\quad - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}}\Phi\left(\frac{-y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\Phi\left(\frac{x-y-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),\end{aligned} \tag{3.16}$$

et pour la seconde :

$$\begin{aligned}
&\int_{x-y}^{+\infty} P\{W_t^{(\mu,\sigma)} \leq x-z,\, M_t^{(\mu,\sigma)} \leq y\}\phi\left(\frac{z-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\frac{dz}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
&= \int_{x-y}^{+\infty}\left[\Phi\left(\frac{x-z-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}}\Phi\left(\frac{x-z-2y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right]\phi\left(\frac{z-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\frac{dz}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
&= \int_{x-y}^{+\infty}\Phi\left(\frac{-z-(\mu t-x)}{\sigma\sqrt{t}}\right)\phi\left(\frac{z-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\frac{dz}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
&\quad - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}}\int_{x-y}^{+\infty}\Phi\left(\frac{-z-(2y+\mu t-x)}{\sigma\sqrt{t}}\right)\phi\left(\frac{z-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\frac{dz}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
&= \Phi_2\left(\frac{y-x+\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \frac{x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}; -\sqrt{1-\frac{t}{T}}\right) \qquad (3.17) \\
&\quad -e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}}\Phi_2\left(\frac{y-x+\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \frac{x-2y-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}; -\sqrt{1-\frac{t}{T}}\right)
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de l'équation (3.13). Finalement, en combinant les équations (3.16) et (3.17), nous avons

$$\begin{aligned}
&P\{W_T^{(\mu,\sigma)} \leq x,\, M_t^{(\mu,\sigma)} \leq y\} \\
&= \Phi\left(\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\Phi\left(\frac{x-y-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \Phi_2\left(\frac{y-x+\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \frac{x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}; -\sqrt{1-\frac{t}{T}}\right) \\
&\quad - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}}\left[\Phi\left(\frac{-y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\Phi\left(\frac{x-y-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right. \\
&\quad \left.+\Phi_2\left(\frac{y-x+\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \frac{x-2y-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}; -\sqrt{1-\frac{t}{T}}\right)\right] \\
&= \Phi_2\left(\frac{x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}, \frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}; \sqrt{\frac{t}{T}}\right) - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}}\Phi_2\left(\frac{x-2y-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}, \frac{-y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}; \sqrt{\frac{t}{T}}\right)
\end{aligned}$$

(en vertu du lemme 3.1.1).

□

Remarque 3.1. Lorsque $t \to T$, alors $\mathbb{P}\{W_T^{(\mu,\sigma)} \leq x,\, M_t^{(\mu,\sigma)} \leq y\} \to \mathbb{P}\{W_T^{(\mu,\sigma)} \leq x,\, M_T^{(\mu,\sigma)} \leq y\}$.

À présent, nous nous intéressons à la distribution conjointe de $W_T^{(\mu,\sigma)}$ et $M_{(s,t)}^{(\mu,\sigma)}$. À ce sujet voici la proposition suivante :

Proposition 3.2.2. *Soit $\{W_t^{(\mu,\sigma)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien avec dérive μ et variance σ^2 sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, et soit $M_{(s,t)}^{(\mu,\sigma)} = \max_{s\leq u\leq t} W_u^{(\mu,\sigma)}$ la valeur*

maximale du mouvement brownien sur l'intervalle $[s, t]$. *Alors pour* $y > 0$ *et pour tout* $0 < s < t \leq T$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{W_T^{(\mu,\sigma)} \leq x,\, M_{(s,t)}^{(\mu,\sigma)} \leq y\} \\
&= \Phi_3\left(\frac{x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}, \frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}, \frac{y-\mu s}{\sigma\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{t}{T}}, \sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right) \\
&\quad - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}}\Phi_3\left(\frac{x-2y-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}, \frac{-y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}, \frac{y+\mu s}{\sigma\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{t}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{t}}\right)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{M_{(s,t)}^{(\mu,\sigma)} \leq y\} &= \Phi_2\left(\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}, \frac{y-\mu s}{\sigma\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{s}{t}}\right) \\
&\quad - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}}\Phi_2\left(\frac{-y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}, \frac{y+\mu s}{\sigma\sqrt{s}}; -\sqrt{\frac{s}{t}}\right).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Démonstration. Tout d'abord, examinons la distribution conjointe du mouvement brownien et sa valeur maximale sur l'intervalle $[s, t]$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{W_T^{(\mu,\sigma)} \leq x,\, M_{(s,t)}^{(\mu,\sigma)} \leq y\} \\
&= \int_{-\infty}^{y} \mathbb{P}\{W_T^{(\mu,\sigma)} \leq x,\, M_{(s,t)}^{(\mu,\sigma)} \leq y | W_s^{(\mu,\sigma)} = z\}\mathbb{P}\{W_s^{(\mu,\sigma)} \in dz\} \\
&= \int_{-\infty}^{y} \mathbb{P}\{W_T^{(\mu,\sigma)} - W_s^{(\mu,\sigma)} \leq x-z,\, M_{(s,t)}^{(\mu,\sigma)} - W_s^{(\mu,\sigma)} \leq y-z | W_s^{(\mu,\sigma)} = z\} \\
&\quad \times \phi\left(\frac{z-\mu s}{\sigma\sqrt{s}}\right)\frac{dz}{\sigma\sqrt{s}} \\
&= \int_{-\infty}^{y} \mathbb{P}\{W_T^{(\mu,\sigma)} - W_s^{(\mu,\sigma)} \leq x-z,\, \max_{s\leq u\leq t}\{W_u^{(\mu,\sigma)} - W_s^{(\mu,\sigma)}\} \leq y-z\} \\
&\quad \times \phi\left(\frac{z-\mu s}{\sigma\sqrt{s}}\right)\frac{dz}{\sigma\sqrt{s}} \\
&= \int_{-\infty}^{y} \mathbb{P}\{W_{T-s}^{(\mu,\sigma)} \leq x-z,\, \max_{s\leq u\leq t} W_{u-s}^{(\mu,\sigma)} \leq y-z\}\phi\left(\frac{z-\mu s}{\sigma\sqrt{s}}\right)\frac{dz}{\sigma\sqrt{s}} \\
&= \int_{-\infty}^{y} \mathbb{P}\{W_{T-s}^{(\mu,\sigma)} \leq x-z,\, \max_{0\leq v\leq t-s} W_v^{(\mu,\sigma)} \leq y-z\}\phi\left(\frac{z-\mu s}{\sigma\sqrt{s}}\right)\frac{dz}{\sigma\sqrt{s}} \\
&= \int_{-\infty}^{y} \mathbb{P}\{W_{T-s}^{(\mu,\sigma)} \leq x-z,\, M_{t-s}^{(\mu,\sigma)} \leq y-z\}\phi\left(\frac{z-\mu s}{\sigma\sqrt{s}}\right)\frac{dz}{\sigma\sqrt{s}}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Remarquons que le premier terme de l'équation (3.20) correspond exactement à la distribution conjointe obtenue à la proposition 3.2.1 en remplaçant t, T, x et y par

$t-s$, $T-s$, $x-z$ et $y-z$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{W_T^{(\mu,\sigma)} \le x,\, M_{(s,t)}^{(\mu,\sigma)} \le y\} \\
&= \int_{-\infty}^{y} \Phi_2\left(\frac{x-z-\mu(T-s)}{\sigma\sqrt{T-s}}, \frac{y-z-\mu(t-s)}{\sigma\sqrt{t-s}}; \sqrt{\frac{t-s}{T-s}}\right) \qquad (3.21)\\
&\quad \times \phi\left(\frac{z-\mu s}{\sigma\sqrt{s}}\right)\frac{dz}{\sigma\sqrt{s}} \\
&\quad - \int_{-\infty}^{y} e^{\frac{2\mu(y-z)}{\sigma^2}} \Phi_2\left(\frac{x+z-2y-\mu(T-s)}{\sigma\sqrt{T-s}}, \frac{-y+z-\mu(t-s)}{\sigma\sqrt{t-s}}; \sqrt{\frac{t-s}{T-s}}\right) \\
&\quad \times \phi\left(\frac{z-\mu s}{\sigma\sqrt{s}}\right)\frac{dz}{\sigma\sqrt{s}} \\
&= \Phi_3\left(\frac{x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}, \frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}, \frac{y-\mu s}{\sigma\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{t}{T}}, \sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right) \qquad (3.22)\\
&\quad - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}} \Phi_3\left(\frac{x-2y-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}, \frac{-y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}, \frac{y+\mu s}{\sigma\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{t}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{t}}\right)
\end{aligned}$$

où l'équation (3.22) est obtenue en appliquant simplement le résultat (3.10) aux deux intégrales de l'équation (3.21).

Finalement, nous obtenons (3.19) en faisant tendre x vers l'infini dans (3.18). □

Remarque 3.2. Lorsque $s \to 0$, alors $\mathbb{P}\{W_T^{(\mu,\sigma)} \le x,\, M_{(s,t)}^{(\mu,\sigma)} \le y\} \to \mathbb{P}\{W_T^{(\mu,\sigma)} \le x,\, M_t^{(\mu,\sigma)} \le y\}$ et $\mathbb{P}\{M_{(s,t)}^{(\mu,\sigma)} \le y\} \to \mathbb{P}\{M_t^{(\mu,\sigma)} \le y\}$.

3.3 Fonction de répartition conjointe de B_T^1 et $M_{(s,t)}^2$

Considérons $\mathbf{W} = (W^1, W^2)'$ un vecteur composé de deux mouvements browniens standards indépendants sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. À partir de cette structure du mouvement brownien, il est possible de construire un mouvement brownien bidimensionnel dont les composantes sont corrélées. En effet, il suffit de poser $\{B_t^1 = \sigma_1(\rho W_t^2 + \sqrt{1-\rho^2}W_t^1) + \mu_1 t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $\{B_t^2 = \sigma_2 W_t^2 + \mu_2 t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Nous pouvons facilement vérifier que $\{B_t^i\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien avec dérive μ_i et variance σ_i^2 pour $i = 1, 2$, et que Corr $(B_t^1, B_t^2) = \rho$. Nous disons alors que $(B_t^1, B_t^2)'$, $t \in \mathbb{R}_+$, est un $(\mu, \mathbf{\Sigma})$ mouvement brownien sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ où Σ est la matrice de variances-covariances.

Proposition 3.3.1. *Soit* $(B_t^1, B_t^2)'$, $t \in \mathbb{R}_+$, *un* $(\mu, \mathbf{\Sigma})$ *mouvement brownien sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, *et soit* $M_{(s,t)}^2 = \max_{s \le u \le t} B_u^2$ *la valeur maximale du second mouvement brownien sur l'intervalle* $[s, t]$. *Alors pour* $y > 0$ *et pour tout* $0 < s < t \le T$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{B_T^1 \le x, M_{(s,t)}^2 \le y\} \\
&= \Phi_3\left(\frac{x-\mu_1 T}{\sigma_1\sqrt{T}}, \frac{y-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{y-\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \rho\sqrt{\frac{t}{T}}, \rho\sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right) \\
&\quad - e^{\frac{2\mu_2 y}{\sigma_2^2}} \Phi_3\left(\frac{x-2\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}y-\mu_1 T}{\sigma_1\sqrt{T}}, \frac{-y-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{y+\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \rho\sqrt{\frac{t}{T}}, -\rho\sqrt{\frac{s}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{t}}\right)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Démonstration. Soit $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus stochastique défini par

$$Z_t = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}B_t^1 - \rho B_t^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

En remplaçant B_t^1 et B_t^2 par $\sigma_1(\rho W_t^2 + \sqrt{1-\rho^2}W_t^1) + \mu_1 t$ et $\sigma_2 W_t^2 + \mu_2 t$ respectivement, nous avons alors $\forall t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
Z_t &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1}B_t^1 - \rho B_t^2 \\
&= \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}W_t^1 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 - \rho\mu_2\right)t
\end{aligned}$$

Donc, le processus Z est un mouvement brownien avec dérive $\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 - \rho\mu_2\right)$ et variance $\sigma_2^2(1-\rho^2)$ et est indépendant de B^2. Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{B_T^1 \le x, M_{(s,t)}^2 \le y\} \\
&= \mathbb{P}\{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(Z_T + \rho B_T^2\right) \le x, M_{(s,t)}^2 \le y\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\{\rho B_T^2 \le \frac{\sigma_2}{\sigma_1}x - z, M_{(s,t)}^2 \le y | Z_T = z\}\mathbb{P}\{Z_T \in dz\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\{\rho B_T^2 \le \frac{\sigma_2}{\sigma_1}x - z, M_{(s,t)}^2 \le y\} \\
&\quad \times \phi\left(\frac{z - \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 - \rho\mu_2\right)T}{\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)T}}\right)\frac{dz}{\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)T}}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Calculons maintenant la probabilité conjointe à l'intérieur de l'intégrale et posons $z^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}x - z$. Ainsi, dans le cas où $\rho > 0$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\rho B_T^2 \le \frac{\sigma_2}{\sigma_1}x - z,\, M_{(s,t)}^2 \le y\} \\
&\quad = \mathbb{P}\{B_T^2 \le \frac{1}{\rho}z^*,\, M_{(s,t)}^2 \le y\} \\
&\quad = \Phi_3\left(\frac{z^* - \rho\mu_2 T}{\rho\sigma_2\sqrt{T}}, \frac{y-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{y-\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{t}{T}}, \sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right) \\
&\qquad - e^{\frac{2\mu_2 y}{\sigma_2^2}}\Phi_3\left(\frac{z^* - \rho(2y+\mu_2 T)}{\rho\sigma_2\sqrt{T}}, \frac{-y-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{y+\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{t}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{t}}\right)
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

en vertu de la proposition 3.2.2.

De la même façon, si $\rho < 0$ nous avons alors

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\rho B_T^2 \le \frac{\sigma_2}{\sigma_1}x - z,\, M_{(s,t)}^2 \le y\} \\
&\quad = \mathbb{P}\{B_T^2 \ge \frac{1}{\rho}z^*,\, M_{(s,t)}^2 \le y\} \\
&\quad = \mathbb{P}\{M_{(s,t)}^2 \le y\} - \mathbb{P}\{B_T^2 \le \frac{1}{\rho}z^*,\, M_{(s,t)}^2 \le y\} \\
&\quad = \left[\Phi_2\left(\frac{y-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{y-\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{s}{t}}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \Phi_3\left(\frac{\frac{1}{\rho}z^* - \mu_2 T}{\sigma_2\sqrt{T}}, \frac{y-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{y-\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{t}{T}}, \sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right)\right] \\
&\qquad - e^{\frac{2\mu_2 y}{\sigma_2^2}}\left[\Phi_2\left(\frac{-y-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{y+\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; -\sqrt{\frac{s}{t}}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \Phi_3\left(\frac{\frac{1}{\rho}z^* - 2y - \mu_2 T}{\sigma_2\sqrt{T}}, \frac{-y-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{y+\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{t}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{t}}\right)\right].
\end{aligned}
$$

À cette étape, il suffit d'appliquer le résultat de l'équation (3.6) afin de regrouper Φ_2 et Φ_3 ; cela donne

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\rho B_T^2 \le \frac{\sigma_2}{\sigma_1}x - z,\, M_{(s,t)}^2 \le y\} \\
&\quad = \Phi_3\left(\frac{-(z^* - \rho\mu_2 T)}{\rho\sigma_2\sqrt{T}}, \frac{y-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{y-\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; -\sqrt{\frac{t}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right) \\
&\qquad - e^{\frac{2\mu_2 y}{\sigma_2^2}}\Phi_3\left(\frac{-(z^* - \rho(2y+\mu_2 T))}{\rho\sigma_2\sqrt{T}}, \frac{-y-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{y+\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; -\sqrt{\frac{t}{T}}, \sqrt{\frac{s}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{t}}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \Phi_3\left(\frac{z^* - \rho\mu_2 T}{|\rho|\sigma_2\sqrt{T}}, \frac{y-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{y-\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; -\sqrt{\frac{t}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right) \tag{3.26}$$
$$- e^{\frac{2\mu_2 y}{\sigma_2^2}} \Phi_3\left(\frac{z^* - \rho(2y+\mu_2 T)}{|\rho|\sigma_2\sqrt{T}}, \frac{-y-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{y+\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; -\sqrt{\frac{t}{T}}, \sqrt{\frac{s}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{t}}\right).$$

Or, en combinant les équations (3.25) et (3.26), nous avons

$$\mathbb{P}\{\rho B_T^2 \leq \frac{\sigma_2}{\sigma_1}x - z,\, M_{(s,t)}^2 \leq y\}$$
$$= \Phi_3\left(\frac{z^* - \rho\mu_2 T}{|\rho|\sigma_2\sqrt{T}}, \frac{y-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{y-\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; s(\rho)\sqrt{\frac{t}{T}}, s(\rho)\sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right) \tag{3.27}$$
$$- e^{\frac{2\mu_2 y}{\sigma_2^2}} \Phi_3\left(\frac{z^* - \rho(2y+\mu_2 T)}{|\rho|\sigma_2\sqrt{T}}, \frac{-y-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{y+\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; s(\rho)\sqrt{\frac{t}{T}}, -s(\rho)\sqrt{\frac{s}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{t}}\right)$$

où $s(\rho) = 1$ si $\rho > 0$ et -1 sinon.

En remplaçant maintenant (3.27) dans (3.24), nous obtenons

$$\mathbb{P}\{B_T^1 \leq x,\, M_{(s,t)}^2 \leq y\}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_3\left(\frac{z^* - \rho\mu_2 T}{|\rho|\sigma_2\sqrt{T}}, \frac{y-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{y-\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; s(\rho)\sqrt{\frac{t}{T}}, s(\rho)\sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right)$$
$$\times\phi\left(\frac{z - \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 - \rho\mu_2\right)T}{\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)T}}\right)\frac{dz}{\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)T}}$$
$$- e^{\frac{2\mu_2 y}{\sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_3\left(\frac{z^* - \rho(2y+\mu_2 T)}{|\rho|\sigma_2\sqrt{T}}, \frac{-y-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{y+\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; s(\rho)\sqrt{\frac{t}{T}}, -s(\rho)\sqrt{\frac{s}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{t}}\right)$$
$$\times\,\phi\left(\frac{z - \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 - \rho\mu_2\right)T}{\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)T}}\right)\frac{dz}{\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)T}}$$
$$= \Phi_3\left(\frac{x-\mu_1 T}{\sigma_1\sqrt{T}}, \frac{y-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{y-\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \rho\sqrt{\frac{t}{T}}, \rho\sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right)$$
$$- e^{\frac{2\mu_2 y}{\sigma_2^2}} \Phi_3\left(\frac{x - 2\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}y - \mu_1 T}{\sigma_1\sqrt{T}}, \frac{-y-\mu_2 t}{\sigma_2\sqrt{t}}, \frac{y+\mu_2 s}{\sigma_2\sqrt{s}}; \rho\sqrt{\frac{t}{T}}, -\rho\sqrt{\frac{s}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{t}}\right)$$

où la dernière égalité découle de la proposition 3.1.2 avec $a = +\infty$. □

Remarque 3.3. Il est plutôt trivial de démontrer que si $\rho = 0$ dans la distribution obtenue à la proposition 3.3.1 alors

$$\mathbb{P}\{B_T^1 \leq x,\, M_{(s,t)}^2 \leq y\} = \mathbb{P}\{B_T^1 \leq x\}\mathbb{P}\{M_{(s,t)}^2 \leq y\}.$$

Notons également que si $\mu_1 = \mu_2$, $\sigma_1 = \sigma_2$ et $\rho = 1$, alors

$$\mathbb{P}\{B_T^1 \leq x,\, M_{(s,t)}^2 \leq y\} = \mathbb{P}\{W_T^{(\mu_1,\sigma_1)} \leq x,\, M_{(s,t)}^{(\mu_1,\sigma_1)} \leq y\}.$$

Ainsi, le résultat de la proposition 3.3.1 est une simple généralisation des distributions obtenues à la section précédente.

3.4 Copule bivariée

Dans cette section, nous étudions principalement la copule engendrée par la fonction de répartition conjointe d'un premier mouvement brownien au temps T avec le maximum d'un second brownien sur l'intervalle $[s,\, t]$ où $0 < s < t \leq T$.

Notons que pour les besoins de cette section, nous considérons que les mouvements browniens sont de variance $\sigma^2 = 1$, puisque les copules sont invariantes par rapport aux transformations croissantes (théorème 1.3.7).

Rappelons que par le corollaire 2.2.7 et les propositions 3.2.1 et 3.2.2, nous savons que

$$\begin{aligned}
F_{M_t}(y;\, \mu) &= \mathbb{P}\{M_t^{(\mu,1)} \leq y\} \\
&= \Phi\left(\frac{y-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu y}\Phi\left(\frac{-y-\mu t}{\sqrt{t}}\right), \qquad (3.28)\\
F_{W_T,\, M_t}(x,\, y;\, \mu) &= \mathbb{P}\{W_T^{(\mu,1)} \leq x,\, M_t^{(\mu,\,1)} \leq y\} \\
&= \Phi_2\left(\frac{x-\mu T}{\sqrt{T}}, \frac{y-\mu t}{\sqrt{t}}; \sqrt{\frac{t}{T}}\right) \qquad (3.29)\\
&\quad - e^{2\mu y}\Phi_2\left(\frac{x-2y-\mu T}{\sqrt{T}}, \frac{-y-\mu t}{\sqrt{t}}; \sqrt{\frac{t}{T}}\right), \\
F_{W_T,\, M_{(s,\,t)}}(x,\, y;\, \mu) &= \mathbb{P}\{W_T^{(\mu,1)} \leq x,\, M_{(s,\,t)}^{(\mu,\,1)} \leq y\} \\
&= \Phi_3\left(\frac{x-\mu T}{\sqrt{T}}, \frac{y-\mu t}{\sqrt{t}}, \frac{y-\mu s}{\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{t}{T}}, \sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right) \qquad (3.30)\\
&\quad - e^{2\mu y}\Phi_3\left(\frac{x-2y-\mu T}{\sqrt{T}}, \frac{-y-\mu t}{\sqrt{t}}, \frac{y+\mu s}{\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{t}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{t}}\right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_{M_{(s,\,t)}}(y;\,\mu) &= \mathbb{P}\{M_{(s,\,t)}^{(\mu,1)} \leq y\} \\ &= \Phi_2\left(\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}, \frac{y-\mu s}{\sigma\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{s}{t}}\right) \\ &\quad - e^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}}\Phi_2\left(\frac{-y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}, \frac{y+\mu s}{\sigma\sqrt{s}}; -\sqrt{\frac{s}{t}}\right). \end{aligned} \tag{3.31}$$

De plus, la fonction de répartition marginale d'un mouvement brownien avec dérive μ et variance $\sigma^2 = 1$ est donnée par

$$F_{W_t}(x;\,\mu) = \Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

donc

$$F_{W_t}^{-1}(u;\mu) = \sqrt{t}\,\Phi^{-1}(u) + \mu t.$$

Ainsi, en vertu du corollaire 1.3.6 et des résultats énoncés précédemment, il est possible de déduire la copule $C_{W_T,\,M_t}(u,\,v;\mu)$ (resp. $C_{W_T,\,M_{(s,\,t)}}(u,\,v;\mu)$) engendrée par la fonction de répartition conjointe du mouvement brownien avec dérive μ au temps T et sa valeur maximale sur l'intervalle $[0,\,t]$ (resp. $[s,\,t]$).

En effet,

$$\begin{aligned} C_{W_T,\,M_t}(u,\,v;\mu) &= F_{W_t,\,M_t}\left(F_{W_T}^{-1}(u;\,\mu),\,F_{M_t}^{-1}(v;\,\mu);\,\mu\right) \\ &= \Phi_2\left(\Phi^{-1}(u), \frac{\zeta_1(v)-\mu t}{\sqrt{t}}; \sqrt{\frac{t}{T}}\right) \\ &\quad - e^{2\mu\zeta_1(v)}\Phi_2\left(\Phi^{-1}(u) - \frac{2\zeta_1(v)}{\sqrt{T}}, \frac{-\zeta_1(v)-\mu t}{\sqrt{t}}; \sqrt{\frac{t}{T}}\right), \end{aligned} \tag{3.32}$$

et

$$\begin{aligned} &C_{W_T,\,M_{(s,\,t)}}(u,\,v;\mu) \\ &= F_{W_t,\,M_{(s,\,t)}}\left(F_{W_T}^{-1}(u;\,\mu),\,F_{M_t}^{-1}(v;\,\mu);\,\mu\right) \\ &= \Phi_3\left(\Phi^{-1}(u), \frac{\zeta_2(v)-\mu t}{\sqrt{t}}, \frac{\zeta_2(v)-\mu s}{\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{t}{T}}, \sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right) \\ &\quad - e^{2\mu\zeta_2(v)}\Phi_3\left(\Phi^{-1}(u) - \frac{2\zeta_2(v)}{\sqrt{T}}, \frac{-\zeta_2(v)-\mu t}{\sqrt{t}}, \frac{\zeta_2(v)+\mu s}{\sqrt{s}}; \sqrt{\frac{t}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{t}}\right), \end{aligned} \tag{3.33}$$

où $\zeta_1(v) = F^{-1}_{M_t}(v;\, \mu)$ et $\zeta_2(v) = F^{-1}_{M_{(s,\,t)}}(v;\, \mu)$ sont les inverses des fonctions $F_{M_t}(y;\, \mu)$ et $F_{M_{(s,\,t)}}(y;\, \mu)$ respectivement.

De façon similaire, considérons deux mouvements browniens corrélés $(B^1_t,\, B^2_t)'$, $t \in \mathbb{R}_+$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} E[B^1_t] &= 0 \\ E[B^2_t] &= \mu t \\ VAR[B^i_t] &= t \text{ pour } i = 1,\, 2 \\ \text{Corr}(B^1_t, B^2_t) &= \rho. \end{aligned}$$

En nous référant une fois de plus à la propriété d'invariance des copules par rapport aux transformations croissantes, nous supposons que le premier mouvement brownien est de moyenne nulle. Ainsi, par la proposition 3.3.1, la fonction de répartition conjointe entre le premier mouvement brownien et le maximum du second sur l'intervalle $[s,\, t]$ est donnée par

$$\begin{aligned} & F_{B^1_T,\, M^2_{(s,t)}}(x, y; \mu,\, \rho) \\ &= \mathbb{P}\{B^1_T \le x,\, M^2_{(s,t)} \le y\} \\ &= \Phi_3\left(\frac{x}{\sqrt{T}}, \frac{y-\mu t}{\sqrt{t}}, \frac{y-\mu s}{\sqrt{s}}; \rho\sqrt{\frac{t}{T}}, \rho\sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right) \\ &\quad - e^{2\mu y}\Phi_3\left(\frac{x-2\rho y}{\sqrt{T}}, \frac{-y-\mu t}{\sqrt{t}}, \frac{y+\mu s}{\sqrt{s}}; \rho\sqrt{\frac{t}{T}}, -\rho\sqrt{\frac{s}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{t}}\right). \end{aligned}$$

De plus, si nous notons par

$$F_{B^1_T}(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{T}}\right)$$

la fonction de répartition marginale de B^1_T, alors

$$F^{-1}_{B^1_T}(u) = \sqrt{T}\,\Phi^{-1}(u).$$

Remarquons également que la fonction de répartition de $M^2_{(s,t)}$, soit $F_{M^2_{(s,\,t)}}(y;\, \mu)$, est exactement la même que celle de l'équation (3.31).

Ainsi, par le corollaire 1.3.6, nous avons que

$$C_{B_T^1, M_{(s,t)}^2}(u, v; \mu, \rho) = F_{B_T^1, M_{(s,t)}^2}\left(F_{B_T^1}^{-1}(u), F_{M_{(s,t)}^2}^{-1}(v; \mu); \mu, \rho\right)$$

donc

$$\begin{aligned} & C_{B_T^1, M_{(s,t)}^2}(u, v; \mu, \rho) \\ &= \Phi_3\left(\Phi^{-1}(u), \frac{\zeta(v) - \mu t}{\sqrt{t}}, \frac{\zeta(v) - \mu s}{\sqrt{s}}; \rho\sqrt{\frac{t}{T}}, \rho\sqrt{\frac{s}{T}}, \sqrt{\frac{s}{t}}\right) \\ &\quad - e^{2\mu\zeta(v)}\Phi_3\left(\Phi^{-1}(u) - \frac{2\rho\zeta(v)}{\sqrt{T}}, \frac{-\zeta(v) - \mu t}{\sqrt{t}}, \frac{\zeta(v) + \mu s}{\sqrt{s}}; \rho\sqrt{\frac{t}{T}}, -\rho\sqrt{\frac{s}{T}}, -\sqrt{\frac{s}{t}}\right) \end{aligned} \tag{3.34}$$

où $\zeta(v) = F_{M_{(s,t)}^2}^{-1}(v; \mu)$ est l'inverse de la fonction de répartition marginale de $M_{(s,t)}^2$.

Malgré sa complexité, l'équation (3.34) résume le contenu des chapitres 2 et 3. En effet, cette équation définit la copule entre :

1. La position d'un premier mouvement brownien $\{B_t^1\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ au temps T ;
2. Le maximum sur l'intervalle $[s, t]$, avec $0 < s < t \leq T$, d'un second brownien $\{B_t^2\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ avec dérive μ, lié au premier par un coefficient de corrélation ρ.

Ainsi, en posant $\rho = 1$, les deux browniens se confondent et l'équation (3.34) devient alors la copule entre un mouvement brownien avec dérive μ au temps T et son propre maximum sur l'intervalle $[s, t]$, qui a déjà été donnée à l'équation (3.32). En faisant par la suite tendre s vers 0, nous obtenons la copule entre le mouvement brownien avec dérive μ au temps T et son propre maximum sur l'intervalle $[0, t]$ (équation (3.32)). Finalement, lorsque $\rho = 1$, $s \to 0$ et $t \to T$, nous obtenons la copule principale du chapitre 2, soit l'équation (2.13).

La figure 3.1 illustre la copule $C_{B_T^1, M_{(s,t)}^2}(u, v; \mu)$ avec $\mu = 0.5$, $s = 1$, $t = 2$, $T = 3$, et des valeurs croissantes de ρ, soit $\rho = -0.99$, $\rho = 0$ et $\rho = 0.99$ respectivement.

Lorsque $\rho = 0$ alors $C_{B_T^1, M_{(s,t)}^2}(u, v; \mu, \rho) = C_I(u, v)$ où C_I est la copule indépendante.

L'étude de la dépendance entre certaines fonctionnelles du mouvement brownien bi-dimensionnel corrélé est, aujourd'hui encore, l'objet de diverses recherches. À titre

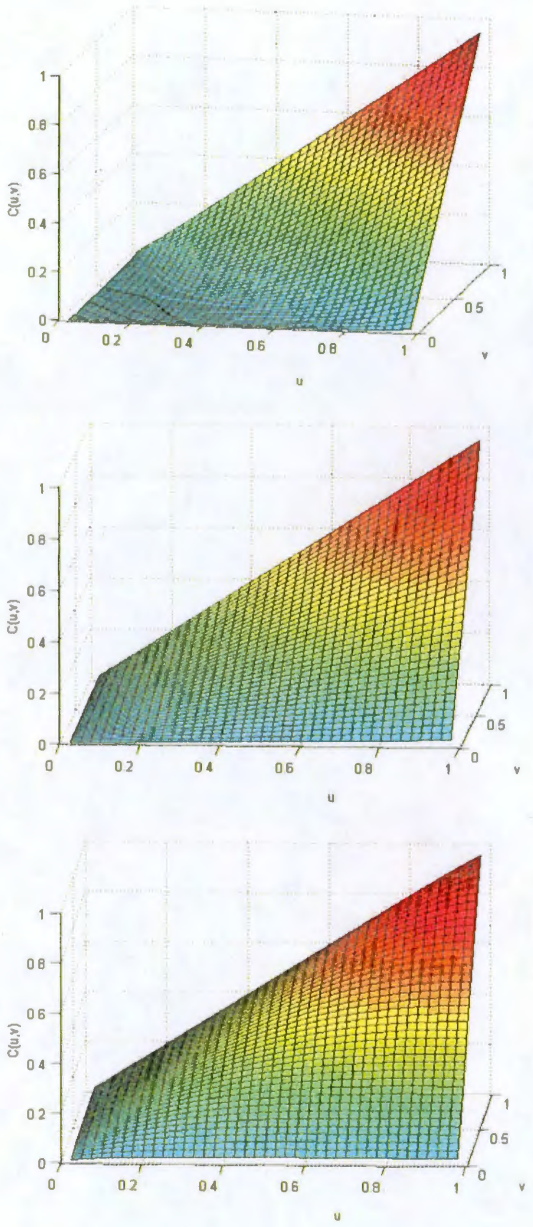

Figure 3.1 Copule engendrée par B_T^1 et $M_{(s,t)}^2$ pour des valeurs croissantes du paramètre ρ.

d'exemple, Rogers et Shepp (2006) ont obtenu une expression générale pour calculer la corrélation entre les maximums de deux mouvements browniens standards corrélés. De façon plus précise, considérons $(B_t^1, B_t^2)'$, $t \in \mathbb{R}_+$, un mouvement brownien standard bidimensionnel dont les composantes sont corrélées et tel que

$$\forall\, s, t \in \mathbb{R}_+ \quad E\left[B_t^1 B_t^2\right] = \rho \min\{s, t\},$$

et soient $M_t^i = \max_{0 \leq s \leq t} B_s^i$. Dans ce contexte, Rogers et Shepp obtiennent une solution analytique pour $E\left[M_t^1 M_t^2\right]$ donnée par

$$c(\rho) = \cos\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\cosh \nu\alpha \tanh \nu\gamma}{\sinh \nu\frac{\pi}{2}} d\nu$$

où $c(\rho)t = E\left[M_t^1 M_t^2\right]$, $\rho = \sin\alpha$, $\alpha \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ et $2\gamma = \alpha + \frac{\pi}{2}$. Notons que les auteurs ont élaboré une série d'étapes pour arriver à ce résultat, dont les détails sont beaucoup trop longs pour le présent travail. Une application naturelle de ce type de problème survient en finance lors de l'estimation de la corrélation entre deux actifs financiers. Ainsi, poursuivant dans le même domaine, Rogers et Zhou (2008) estiment ce coefficient.

CONCLUSION

La nouveauté dans ce rapport de recherche est l'établissement des copules aux différentes situations qui se présentent dans le ou les mouvements browniens. À partir de certaines distributions conjointes, nous avons construit une famille de copules bivariées illustrant la structure de dépendance liant différentes variables aléatoires issues du mouvement brownien. La formule (3.34) contient toutes les autres formules obtenues dans les chapitres précédents. Nous pouvons donc affirmer qu'il s'agit là du résultat majeur de ce travail, puisque tout le reste en découle, et à notre connaissance, ce résultat est nouveau. S'agissant du mouvement brownien et des copules, nous avons utilisé plusieurs outils relatifs à la finance mathématique.

En effet, la recherche dans les copules en finance est un sujet en pleine effervescence. L'approche des copules dans la modélisation de distributions multivariées offre une plus grande flexibilité puisqu'elle permet d'obtenir différentes structures de dépendance et différentes distributions marginales. Pour des raisons de simplicité, l'hypothèse de la distribution normale multivariée a longtemps dominé l'étude des lois multivariées. Une telle hypothèse induit généralement une sous-estimation du risque du portefeuille et peut-être évité par un choix adéquat de distribution multivariée.

Les copules obtenues pourraient trouver des applications dans tout autre domaine relié à la modélisation, notamment parce que notre copule décrite en (3.34) est paramétrique. Il resterait maintenant à développer en profondeur les tests d'adéquation qui permettraient au modélisateur de mesurer l'efficacité de cette copule à décrire la réalité.

APPENDICE A

NOTATION ET TERMINOLOGIE

L'objectif de cet appendice est de clarifier la notation et la terminologie utilisées en ce qui a trait aux notions de variables aléatoires et de processus stochastiques. Nous énonçons pour ce faire quelques définitions relativement à ces deux notions.

Notons que les différents sujets couverts dans cet appendice sont traités en profondeur dans différents ouvrages tels que Billingsley (1995) ou encore Karlin et Taylor (1975).

A.1 Notions préliminaires

Définition A.1. Nous appelons ensemble fondamental Ω, l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Lorsque nous effectuons une expérience aléatoire, nous nous intéressons plus particulièrement à certains événements qui peuvent se produire. Par exemple, lors du lancer d'un dé, l'ensemble de tous les résultats possibles est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dans ce cas, nous pouvons nous intéresser uniquement aux événements suivants : obtenir une face paire ou impaire. Il est donc possible de former un ensemble contenant seulement les événements auxquels nous sommes intéressés que nous nommons tribu.

Définition A.2. Nous appelons tribu $\mathfrak{F}$ sur un espace fondamental Ω, un ensemble de sous-ensembles de Ω tel que :

1. $\emptyset \in \mathfrak{F}$,

2. Si $A \in \mathfrak{F}$, alors $A^c \in \mathfrak{F}$,
3. Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille d'éléments de $\mathfrak{F}$, alors $\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i \in \mathfrak{F}$.

Remarque A.1. Nous appelons le couple $(\Omega, \mathfrak{F})$ espace probabilisable.

À présent, si on dispose d'un sous-ensemble de Ω, il est bien naturel de se demander s'il existe une plus petite tribu contenant ce sous-ensemble ? La réponse à cette supputation est affirmative comme en fait foi les deux résultats qui suivent.

Proposition A.1.1. *Soit $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ une famille de tribus sur Ω où $\mathcal{I}$ est un ensemble d'indices quelconques, alors $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{F}_i$ est une tribu sur Ω.*

Démonstration. Par la définition de tribu, $\emptyset \in \mathfrak{F}_i \ \forall i \in \mathcal{I}$, donc $\emptyset \in \mathfrak{F}$. De plus, si $A \in \mathfrak{F}$, alors $A \in \mathfrak{F}_i \ \forall i \in \mathcal{I}$ et $A^c \in \mathfrak{F}_i \ \forall i \in \mathcal{I}$, ainsi $A^c \in \mathfrak{F}$. Finalement, soit $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'éléments de $\mathfrak{F}$, alors pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, nous avons $A_j \in \mathfrak{F}_i \ \forall i \in \mathcal{I}$ et par la définition de tribu, nous savons que $\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} A_j \in \mathfrak{F}_i \ \forall i \in \mathcal{I}$, donc $\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} A_j \in \mathfrak{F}$. Ainsi, $\mathfrak{F}$ est une tribu. □

Proposition A.1.2. *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de sous-ensembles de Ω. Il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$. Celle-ci est appelée la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et est notée $\sigma(\mathcal{A})$.*

Démonstration. Considérons la tribu formée de tous les sous-ensembles de Ω. Puisque $\mathcal{A}$ est un ensemble de sous-ensembles de Ω, alors $\mathcal{A}$ est inclus dans cette tribu. Nous savons donc qu'il existe au moins une tribu contenant $\mathcal{A}$. Considérons $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ l'ensemble des tribus sur Ω tel que $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{F}_i \ \forall i \in \mathcal{I}$, où $\mathcal{I}$ est un ensemble d'indices arbitraires, alors par la proposition A.1.1, nous savons que l'intersection d'un nombre arbitraire de tribus demeure une tribu, donc $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{F}_i$. Nous disons que $\sigma(\mathcal{A})$ est la plus petite tribu au sens où, si $\mathfrak{G}$ est une tribu sur Ω telle que $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{G}$, alors nécessairement $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathfrak{G}$. □

Après avoir donné une structure aux événements qui nous intéressent (la tribu), nous voulons maintenant quantifier la probabilité que chacun de ceux-ci arrive.

Définition A.3. Nous appelons mesure de probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathfrak{F})$, la fonction $\mathbb{P} : \mathfrak{F} \to \mathbf{I}$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. $\forall\, A \in \mathfrak{F},\ 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$,
3. Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une famille d'éléments de $\mathfrak{F}$ telle que $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(A_i)$.

En d'autres termes, une mesure de probabilité est une fonction qui associe à chaque événement la probabilité de son occurrence.

Remarque A.2. Le triplet $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

A.2 Variables aléatoires et processus stochastiques

Une variable aléatoire est une fonction qui associe une valeur réelle à chacun des éléments de l'ensemble fondamental Ω. Par exemple, considérons un jeu qui, lors du lancer d'un dé, verse une unité si une face pair est obtenue, et 0 sinon. Nous sommes alors concernés par le gain engendré par ce jeu. Ce sera donc la fonction qui associe un nombre réel au résultat de l'expérimentation (variable aléatoire) qui nous intéressera, et non le résultat de l'expérimentation en soi.

Définition A.4. Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire sur cet espace est une fonction à valeur réelle $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ qui est $\mathfrak{F}$-mesurable, c'est-à-dire :

$$X^{-1}([-\infty, x]) \equiv \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F} \quad \forall\, x \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Définition A.5. Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathfrak{F})$. La tribu $\sigma(X)$ définie par

$$\sigma(X) = \sigma\left(\{X^{-1}([-\infty, x]) | x \in \overline{\mathbb{R}}\}\right),$$

est appelée la tribu engendrée par X.

Ainsi, $\sigma(X)$ est la tribu engendrée par l'ensemble $\{X^{-1}([-\infty, x]) | x \in \overline{\mathbb{R}}\}$.

Remarque A.3. Il est clair que $\sigma(X)$ est la plus petite tribu faisant en sorte que X soit une variable aléatoire sur l'espace probabilisable $(\Omega, \sigma(X))$.

La tribu engendrée par la variable aléatoire X est donc constituée de tous les événements que nous pouvons déduire en connaissant le résultat de celle-ci. Nous pouvons donc interpréter $\sigma(X)$ comme étant l'information générée par la variable aléatoire X. De plus, par la définition de variable aléatoire, nous constatons qu'il peut exister plusieurs variables aléatoires sur un même espace probabilisé.

Définition A.6. Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $X = \{X_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, où $\mathcal{T}$ représente un ensemble d'indices ordonnés.

Dans plusieurs cas, nous pouvons interpréter $\mathcal{T}$ comme un paramètre temporel. Par exemple, $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ ou encore $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$. Ainsi, lors d'une expérimentation, il est possible que l'information se révèle à nous progressivement dans le temps.

Définition A.7. Une filtration sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathfrak{F})$ est une famille de tribus $\mathbb{F} = \{\mathfrak{F}_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ telle que :

1. $\forall t \in \mathcal{T}$, $\mathfrak{F}_t \subseteq \mathfrak{F}$,
2. $\forall s, t \in \mathcal{T}$ tels que $s \leq t$, $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t$.

La sous-tribu $\mathfrak{F}_t$ représente donc l'information connue jusqu'au temps t, alors que $\mathbb{F}$ est l'évolution de l'information dans le temps.

Définition A.8. Soient $X = \{X_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ un processus stochastique et $\mathbb{F} = \{\mathfrak{F}_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ une filtration . Nous disons que X est adapté à la filtration $\mathbb{F}$ si X_t est $\mathfrak{F}_t$-mesurable $\forall t \in \mathcal{T}$.

Considérons $X_t(\omega)$ la valeur de X au temps t si l'événement ω se produit et $X(\omega) \equiv \{X_t(\omega)\}_{t\geq 0}$ est la trajectoire de X pour ce même événement. Rappelons que X_t est $\mathfrak{F}_t$-mesurable si $X_t^{-1}([-\infty, x]) \in \mathfrak{F}_t$ $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire si l'information engendrée par X_t est contenue dans $\mathfrak{F}_t$ et ce pour tout t. Nous savons également, par la définition

de filtration, que $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t \ \forall s \leq t$. Par conséquent, $\mathfrak{F}_t$ contient également l'information engendrée par chacune des variables aléatoires X_s avec $s \leq t$. En d'autres termes, l'information disponible au temps t ($\mathfrak{F}_t$) contient l'histoire de X jusqu'à cet instant.

Remarque A.4. Nous appelons espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$, l'espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ muni de la filtration $\mathbb{F} = \{\mathfrak{F}_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ sur $(\Omega, \mathfrak{F})$.

Définition A.9. Soit $X = \{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ un processus stochastique défini sur $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, alors la filtration $\mathbb{F} = \{\mathfrak{F}_t\}_{t \in T}$ est dite engendrée par X si

$$\mathfrak{F}_t = \sigma(\{X_s | s \in T, s \leq t\}), \quad \forall t \in \mathcal{T}.$$

Ainsi, chacune des tribus $\mathfrak{F}_t$, composant la filtration, est uniquement composée des événements que nous pouvons déduire en connaissant le résultat des variables aléatoires X_s avec $s \leq t$. Autrement dit, l'histoire de X jusqu'à t définit entièrement l'information disponible jusqu'à cet instant.

APPENDICE B

LOI NORMALE MULTIVARIÉE CONDITIONNELLE

Certaines distributions conjointes que nous étudions dans le troisième chapitre nécessitent l'évaluation d'intégrale reliée à la loi normale bivariée, trivariée et quadrivariée. L'objectif de cet appendice est de faire un bref rappel sur la loi normale multivariée conditonnelle. Nous portons une attention particulière au cas quadridimensionnel puisque les résultats pour les dimensions inférieures en découlent.

Soit $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire à p composantes distribué selon une loi $N(\mu, \mathbf{\Sigma})$. Considérons une partition de $\mathbf{X}$ en deux sous-vecteurs $\mathbf{X}^{(1)}$ et $\mathbf{X}^{(2)}$ à q et $p-q$ composantes respectivement. Posons maintenant

$$\begin{aligned}
\mu^{(i)} &= E\left[\mathbf{X}^{(i)}\right] \text{ pour } i = 1, 2, \\
\mathbf{\Sigma}_{11} &= E\left[\left(\mathbf{X}^{(1)} - \mu^{(1)}\right)\left(\mathbf{X}^{(1)} - \mu^{(1)}\right)'\right], \\
\mathbf{\Sigma}_{22} &= E\left[\left(\mathbf{X}^{(2)} - \mu^{(2)}\right)\left(\mathbf{X}^{(2)} - \mu^{(2)}\right)'\right], \\
\mathbf{\Sigma}_{12} &= E\left[\left(\mathbf{X}^{(1)} - \mu^{(1)}\right)\left(\mathbf{X}^{(2)} - \mu^{(2)}\right)'\right].
\end{aligned}$$

Comme le vecteur $\mathbf{X}$ est partitionné en deux sous-vecteurs $\mathbf{X}^{(1)}$ et $\mathbf{X}^{(2)}$, il en est de même pour le vecteur moyenne

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{bmatrix}.$$

De façon semblable, la matrice de variances-covariances est partionnée en sous-matrice

dont la représentation est

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}.$$

où $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{12}$ et $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ sont les matrices de variances-covariances de $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(1)}$ et $\mathbf{X}^{(2)}$, et $\mathbf{X}^{(2)}$ respectivement. Suivant le contexte que nous venons d'énoncer, la distribution conditionnelle de $\mathbf{X}^{(1)}$ étant donné $\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{x}^{(2)}$ est de loi normale multivariée q-dimensionnelles avec un vecteur moyenne $\mu^{(1)} + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(2)} - \mu^{(2)}\right)$ et une matrice de variances-covariances $\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}$, où $\boldsymbol{\Sigma}_{21} = \boldsymbol{\Sigma}_{12}'$.

Ce résultat est le théorème 2.5.1 d'Anderson (2003).

À titre d'illustration, considérons $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)'$ un vecteur aléatoire de loi normale quadrivariée dont les paramètres sont $E[X_i] = \mu_i$, $\text{VAR}[X_i] = \sigma_i^2$ et $\text{Corr}(X_i, X_j) = \rho_{ij}$ pour $i, j = 1, 2, 3, 4$, et posons $\mathbf{X}^{(1)} = (X_2, X_3, X_4)'$ et $\mathbf{X}^{(2)} = X_1$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\mu^{(1)} &= (\mu_2, \mu_3, \mu_4)', \\
\mu^{(2)} &= \mu_1, \\
\boldsymbol{\Sigma}_{11} &= \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & \sigma_2\sigma_3\rho_{23} & \sigma_2\sigma_4\rho_{24} \\ \sigma_2\sigma_3\rho_{23} & \sigma_3^2 & \sigma_3\sigma_4\rho_{34} \\ \sigma_2\sigma_4\rho_{24} & \sigma_3\sigma_4\rho_{34} & \sigma_4^2 \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{\Sigma}_{22} &= \sigma_1^2, \\
\boldsymbol{\Sigma}_{12} &= \begin{bmatrix} \sigma_1\sigma_2\rho_{12} \\ \sigma_1\sigma_3\rho_{13} \\ \sigma_1\sigma_4\rho_{14} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la distribution conditionnelle de $(X_2, X_3, X_4)'$ étant donné $X_1 = x_1$ est de loi normale trivariée de vecteur moyenne

$$\mu^{(1)} + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\left(\mathbf{x}^{(2)} - \mu^{(2)}\right) = \begin{bmatrix} \mu_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho_{12}(x_1 - \mu_1) \\ \mu_3 + \frac{\sigma_3}{\sigma_1}\rho_{13}(x_1 - \mu_1) \\ \mu_4 + \frac{\sigma_4}{\sigma_1}\rho_{14}(x_1 - \mu_1) \end{bmatrix}$$

et de matrice variances-covariances

$$\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} = \begin{bmatrix} \sigma_2^2(1-\rho_{12}^2) & \sigma_2\sigma_3(\rho_{23}-\rho_{12}\rho_{13}) & \sigma_2\sigma_4(\rho_{24}-\rho_{12}\rho_{14}) \\ \sigma_2\sigma_3(\rho_{23}-\rho_{12}\rho_{13}) & \sigma_3^2(1-\rho_{13}^2) & \sigma_3\sigma_4(\rho_{34}-\rho_{13}\rho_{14}) \\ \sigma_2\sigma_4(\rho_{24}-\rho_{12}\rho_{14}) & \sigma_3\sigma_4(\rho_{34}-\rho_{13}\rho_{14}) & \sigma_4^2(1-\rho_{14}^2) \end{bmatrix}.$$

La loi normale multivariée et ses différentes propriétés sont discutées et démontrées dans plusieurs ouvrages tels que Anderson (2003) et Kotz, Balakrishnan et Johnson (2000). Notons que Kotz, Balakrishnan et Johnson font une étude détaillée sur les lois bivariée et trivariée, et consacrent un chapitre entier sur les dites lois et les sujets connexes.

RÉFÉRENCES

Anderson, T. W. 2003. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, 3^e éd. John Wiley & Sons.

Billingsley, P. 1995. *Probability and Measure*, 3^e éd. John Wiley & Sons.

Bingham, N. H. et Kiesel, R. 1998. *Risk-Neutral Valuation : Pricing and Hedging of Financial Derivatives.* Springer.

Borodin, A. N. et Salminen, P. 2002. *Handbook of Brownian Motion- Facts and Formulae*, 2^e éd. Birkhäuser.

Chuang, C. S. 1996. « Joint distribution of brownian motion and its maximum, with generalization to correlated BM and applications to barrier options ». *Statistics & Probability letters*, vol. 28, p. 81-90.

Cherubini, U., Luciano, E. et Vecchiato, W. 2004. *Copula methods in finance.* John Wiley & Sons.

Denuit, M., Daehe, J., Goovaerts, M. et Kaas, R. 2005. *Actuarial Theory for Dependent Risks : Measures, Orders and Models.* John Wiley & Sons.

Elliott, R.J et Kopp, E. P. 1999. *Mathematics of Financial Markets.* Springer.

Etheridge, A. 2002. *A Course in Financial Calculus.* Cambridge University Press.

Girsanov, I. V. 1960. « On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures ». *Theory of Probability and its Applications*, vol. 3, no. 3, p. 285-301.

Harrison, M. 1990. *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems.* Robert E. Krieger.

Itô, K. et McKean, H. P. Jr. 1974. *Diffusion Processes and thier Sample Paths.* Springer-Verlag.

Iyengar, S. 1985. « Hitting lines with two-dimensional brownian motion », *Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 45, no. 6, 983-989.

Karatzas, I. et Shreve S. 1991. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2^e éd. Springer.

Karlin, S. et Taylor, H. M. 1975. *A First Course in Stochastic Processes*, 2^e éd. Academic Press.

Korn, R. et Korn, E. 2000. *Option Pricing and Portfolio Optimization : Modern Methods of Financial Mathematics.* « Graduate Studies in Mathematics », vol. 31. American Mathematical Society.

Kotz, S., Balakrishnan, N. et Johnson, N. L. 2000. *Continuous Multivariate Distributions.* Vol. 1 *Models and Applications*, 2^e éd. John Wiley & Sons.

Lee, H. 2003. « Pricing equity-indexed annuities with path-dependant options ». *Insurance : Mathematics and Economics*, vol. 33, p. 677-690.

Lee, H. 2004. « A joint distribution of two-dimensional brownian motion with an application to an outside barrier option ». *Journal of the Korean Statistical Society*, vol. 33, no 2, p. 245-254.

Nelsen, R.B. 2006. *An Introduction to Copulas*, 2^e éd. Springer.

Revuz, D. et Yor, M. 2005. *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 3^e éd. Springer.

Rogers, L. C. G. et Shepp, L. 2006. « The correlation of the maxima of correlated brownian motions », *Journal of Applied Probability*, vol. 43, p. 880-883.

Rogers, L. C. G. et Williams, D. 2000a. *Diffusions, Markov Processes and Martingales.* Vol. 1 *Fondations*, 2^e éd. Cambridge University Press.

Rogers, L. C. G. et Williams, D. 2000b. *Diffusions, Markov Processes and Martingales.* Vol. 2 *Itô Calculus*, 2^e éd. Cambridge University Press.

Rogers, L. C. G. et Zhou, F. 2008. « Estimating correlation from high, low, opening and closing prices ». *The Annals of Applied Probability*, vol. 18, no 2, p. 813-823.

Sklar, A. 1959. « Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges ». *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris 8*, p. 229-231.