

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ANALYSE DE MANUELS SCOLAIRES QUÉBÉCOIS DU DÉBUT DU  
SECONDAIRE : ÉTUDE DU REGARD COVARIATIONNEL COMME  
PRÉCURSEUR AU CONCEPT DE FONCTION

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

STÉPHANE FONTAINE

MAI 2021

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.04-2020). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont tout particulièrement à mes deux formidables directrices Mireille et Mélanie. Je vous remercie (au moins 1000! fois) pour votre patience, votre compréhension, votre aide si précieuse, votre mentorat et votre support sous toutes ses formes. Vous êtes de grandes chercheuses et professeuses, vous êtes des modèles vraiment inspirants et je suis reconnaissant d'avoir pu travailler avec vous aussi longtemps.

Nous tenons aussi à remercier les évaluateurs, madame Lucie Deblois et monsieur Fernando Hitt, pour les précieux commentaires apportés. Je vous remercie personnellement pour votre lecture attentive et les pistes de réflexion proposées. Cela a permis de préciser notre pensée et de clarifier ce que nous entendons par représentation.

Je voulais aussi remercier deux autres femmes formidables, Catherine et Justine. Elles font partie de mon quotidien et elles m'ont aidé à passer à travers les moments plus difficiles de la rédaction de ce mémoire.

J'ajoute un petit mot pour remercier tous les professeurs, chargés de cours et enseignants qui ont marqué mon existence.

## TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| LISTE DES FIGURES.....                                                                                                                      | 7  |
| LISTE DES TABLEAUX.....                                                                                                                     | 12 |
| RÉSUMÉ .....                                                                                                                                | 14 |
| INTRODUCTION .....                                                                                                                          | 16 |
| CHAPITRE I                                                                                                                                  |    |
| PROBLÉMATIQUE .....                                                                                                                         | 19 |
| 1.1 Le concept de fonction : important mais complexe.....                                                                                   | 19 |
| 1.1.1 Des interprétations multiples du concept de fonction .....                                                                            | 20 |
| 1.2 Une compréhension du concept de fonction à travers ses deux regards :<br>correspondance et covariation .....                            | 21 |
| 1.2.1 Un exemple du déploiement des deux regards de la fonction dans la<br>situation de la bougie.....                                      | 24 |
| 1.3 Un questionnement sur les regards mis de l'avant dans les ressources<br>enseignantes.....                                               | 26 |
| 1.3.1 La covariation et la fonction dans le programme de formation de l'école<br>québécoise .....                                           | 29 |
| 1.3.2 Éléments reliés à la fonction dans le programme au premier cycle du<br>secondaire.....                                                | 29 |
| 1.3.3 La fonction dans le programme au deuxième cycle du secondaire.....                                                                    | 32 |
| 1.4 Quelques recherches portant sur le développement du raisonnement<br>covariationnel avant tout apprentissage formel de la fonction ..... | 34 |
| 1.5 Un intérêt pour analyser les manuels scolaires du premier cycle du secondaire<br>.....                                                  | 38 |
| 1.6 L'objectif et les questions de recherche.....                                                                                           | 39 |
| Ces questionnements font l'objet du deuxième chapitre.....                                                                                  | 40 |
| CHAPITRE II .....                                                                                                                           | 41 |
| CADRE CONCEPTUEL .....                                                                                                                      | 41 |
| 2.1 Les définitions de covariation et d'approche covariationnelle.....                                                                      | 42 |
| 2.1.1 Le raisonnement quantitatif de Thompson.....                                                                                          | 44 |
| 2.1.2 L'approche covariationnelle de Passaro.....                                                                                           | 46 |
| 2.2 L'importance d'un regard sur les grandeurs et sur leurs interactions pour le<br>développement d'un raisonnement covariationnel .....    | 47 |

|                  |                                                                                                                                                                        |     |
|------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.2.1            | Les différentes unités de raisonnement pour le déploiement d'un raisonnement covariationnel .....                                                                      | 48  |
| 2.2.2            | Discussion autour des unités de raisonnement retenues dans notre étude                                                                                                 | 52  |
| 2.2.3            | Une exemplification de la nature du raisonnement mobilisé et des unités de raisonnement sollicitées dans la situation de la bouteille et dans celle de la bougie ..... | 56  |
| 2.3              | L'importance de s'attarder aux représentations en jeu pour le développement du raisonnement covariationnel.....                                                        | 64  |
| 2.4              | D'autres variables didactiques pouvant être considérées dans les situations susceptibles de favoriser le déploiement d'un raisonnement covariationnel.....             | 69  |
| 2.4.1            | La définition de <i>variable didactique</i> .....                                                                                                                      | 69  |
| 2.4.2            | Un appui sur les variables didactiques présentées dans le recueil portant sur les situations travaillant la modélisation de Janvier et Pelletier (2003) .....          | 70  |
| 2.4.3            | Les variables didactiques autour des grandeurs en jeu .....                                                                                                            | 72  |
| 2.4.4            | Les variables didactiques autour de l'étude graphique .....                                                                                                            | 79  |
| 2.4.5            | Les variables didactiques autour des manipulations .....                                                                                                               | 83  |
| 2.4.6            | Les variables didactiques reliées aux connaissances nécessaires.....                                                                                                   | 85  |
| <br>CHAPITRE III |                                                                                                                                                                        |     |
| MÉTHODOLOGIE     |                                                                                                                                                                        |     |
| 3.1              | Un retour sur l'objectif et les questions de recherche.....                                                                                                            | 89  |
| 3.2              | Le choix méthodologique : vers la recherche qualitative .....                                                                                                          | 91  |
| 3.2.1            | La recherche qualitative .....                                                                                                                                         | 91  |
| 3.2.2            | L'analyse de contenu.....                                                                                                                                              | 91  |
| 3.3              | La présentation des collections retenues.....                                                                                                                          | 94  |
| 3.3.1            | La description des manuels <i>Perspective mathématique</i> .....                                                                                                       | 97  |
| 3.3.2            | La description des manuels <i>À vos maths</i> .....                                                                                                                    | 99  |
| 3.3.3            | La description des manuels <i>Panoram@th</i> .....                                                                                                                     | 100 |
| 3.4              | La présentation des grilles d'analyse .....                                                                                                                            | 102 |
| 3.4.1            | <i>Un premier regard</i> pour repérer les situations susceptibles de favoriser la covariation.....                                                                     | 103 |
| 3.4.2            | Un deuxième regard sur les passages entre les registres de représentation à travers le tableau de traduction entre les registres (Janvier, 1983).....                  | 108 |

### 3.4.3 Un troisième regard sur les 19 autres VD à travers le tableau des VD .. 110

## CHAPITRE IV

### RÉSULTATS ET ANALYSE

|       |                                                                                                                                                |     |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1   | L'analyse des manuels de la collection <i>Perspective mathématique</i> .....                                                                   | 114 |
| 4.1.1 | Un aperçu des chapitres sélectionnés pour l'analyse .....                                                                                      | 115 |
| 4.1.2 | Des exemples de situations rejetées pour l'analyse .....                                                                                       | 120 |
| 4.1.3 | L'analyse des situations retenues selon les registres de représentation en jeu .....                                                           | 123 |
| 4.1.4 | L'analyse des situations retenues selon les 19 autres VD .....                                                                                 | 132 |
| 4.1.5 | La synthèse sur le potentiel des situations proposées par <i>Perspective mathématique pour développer le raisonnement covariationnel</i> ..... | 152 |
| 4.2   | L'analyse des manuels <i>À vos maths</i> .....                                                                                                 | 157 |
| 4.2.1 | Un aperçu des chapitres sélectionnés pour l'analyse .....                                                                                      | 157 |
| 4.2.2 | Des exemples de situations rejetées pour l'analyse .....                                                                                       | 164 |
| 4.2.3 | L'analyse des situations retenues selon les registres de représentation en jeu .....                                                           | 169 |
| 4.2.4 | L'analyse des situations retenues selon les autres VD relevées dans le cadre conceptuel .....                                                  | 176 |
| 4.2.5 | La synthèse et discussion sur le travail proposé dans <i>À vos maths</i> autour de la covariation .....                                        | 182 |
| 4.3   | L'analyse des manuels de la collection <i>Panoram@th</i> .....                                                                                 | 186 |
| 4.3.1 | Un aperçu des Panoramas sélectionnés pour l'analyse .....                                                                                      | 186 |
| 4.3.2 | Des exemples de situations rejetées .....                                                                                                      | 196 |
| 4.3.3 | L'analyse des situations retenues selon les registres de représentation en jeu .....                                                           | 200 |
| 4.3.4 | La synthèse et discussion sur le potentiel des situations proposées dans <i>Panoram@th</i> autour de la covariation .....                      | 214 |

## CHAPITRE V

### INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

|     |                                                                                                                                                         |     |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1 | Les outils d'analyse sur la covariation et une analyse transversale des trois collections de manuels scolaires .....                                    | 219 |
| 5.2 | Une réflexion sur certaines situations qui ont été rejetées et d'autres que l'on retrouve dans deux des collections de manuels scolaires analysés ..... | 229 |

|                                                                                                                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.3 Une réflexion autour de la possibilité de modifier des situations présentées dans les manuels scolaires pour viser un travail sur la covariation .....           | 238 |
| CONCLUSION .....                                                                                                                                                     | 247 |
| ANNEXE A                                                                                                                                                             |     |
| Des difficultés recensées autour du concept de fonction.....                                                                                                         | 254 |
| ANNEXE B                                                                                                                                                             |     |
| Tableaux d'analyse des caractéristiques des situations utilisées dans les recherches antérieures sur la covariation. Tirée de Passaro (2017, Annexe 3, p. A-18) .... | 258 |
| ANNEXE C                                                                                                                                                             |     |
| Fiche Excel des situations retenues, exemple pour <i>Perspective mathématique</i> .....                                                                              | 259 |

## LISTE DES FIGURES

| Figure                                                                                                                                                                | Page |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1.1 Situation de la bougie tirée du manuel <i>Panoram@th</i> (Cadieux, Gendron et Ledoux), manuel B, volume 1, p. 14.....                                             | 24   |
| 1.2 Table de valeurs de la bougie tirée du manuel <i>Panoram@th</i> (Cadieux, Gendron et Ledoux), manuel B, volume 1, p. 14. ....                                     | 25   |
| 1.3 Extrait du PFEQ du 2 <sup>e</sup> cycle du secondaire (2006, p.51). ....                                                                                          | 33   |
| 1.4 Situation du randonneur issue de Hitt et Passaro (2007, p. 5).....                                                                                                | 36   |
| 2.1 Situation de la coureuse tirée de Thompson et Carlson (2017, p. 426) .....                                                                                        | 44   |
| 2.2 Cadre sur les unités de sens dégagées par Passaro (2015, p.89) et s'appuyant sur les actions mentales de Carlson (2002).....                                      | 50   |
| 2.3 Énoncé de la bouteille adaptée pour le premier cycle du secondaire. ....                                                                                          | 57   |
| 2.4 Séparation de la bouteille en trois phases de variation. ....                                                                                                     | 60   |
| 2.5 Figure représentant les variables didactiques pour l'étude portant sur le potentiel des situations susceptibles de développer le raisonnement covariationnel..... | 71   |
| 2.6 Situation des triangles et des allumettes tirée de <i>Panoram@th</i> , manuel A, volume 2, p. 154. ....                                                           | 75   |
| 2.7 Représentation graphique qui illustre le conflit objet-source, objet-cible (Tirée de Saboya, 2003, p. 21).....                                                    | 82   |
| 3.1 <i>Perspective mathématique, Manuel B, Partie 6. Les représentations graphiques. Vol. 2. p. 153. Situation retenue.....</i>                                       | 106  |
| 3.2 Situation tirée de <i>Perspective mathématique, Manuel B, Partie 8, les représentations graphiques d'une situation. Vol. 2. p. 418. Situation rejetée. ....</i>   | 107  |
| 4.1 Exercice d'application tiré de <i>Perspective mathématique, Manuel B, Partie 5. Les situations de proportionnalité. Vol. 1. p. 59.....</i>                        | 120  |



|      |                                                                                                                                                                                                       |     |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.2  | Table de valeurs avec les facteurs de changement entre quelques couples de valeurs de la situation de proportionnalité. ....                                                                          | 121 |
| 4.3  | <i>Perspective mathématique, Manuel B, Partie 6. Les représentations graphiques. Vol. 2. p.153. ....</i>                                                                                              | 125 |
| 4.4  | Activité tirée de <i>Perspective mathématique, Manuel B, Partie 8. Régularités et représentations. Vol. 2. p. 423. ....</i>                                                                           | 128 |
| 4.5  | Résolution dans la table de valeurs des questions a) et b) de l'activité tirée de <i>Perspective mathématique, Manuel B, Partie 8. Régularités et représentations. Vol. 2. p. 423. ....</i>           | 129 |
| 4.6  | Résolution dans la table de valeurs des questions a) et b) de l'activité tirée de <i>Perspective mathématique, Manuel B, Partie 8. Régularités et représentations. Vol. 2. p. 423. ....</i>           | 130 |
| 4.7  | Situation d'application tirée de <i>Perspective mathématique, Manuel B, Partie 6. Les représentations graphiques. Vol. 1. p. 155. ....</i>                                                            | 136 |
| 4.8  | Tracés de la relation entre la distance parcourue selon le temps écoulé des trains A et B. ....                                                                                                       | 138 |
| 4.9  | Situation des pendules tirée du manuel : <i>Perspective mathématique, Manuel B, Partie 5. Les situations de proportionnalité. Vol. 1. p.56. ....</i>                                                  | 140 |
| 4.10 | Situation d'application tirée de <i>Perspective mathématique, Manuel B, Partie 8. Régularités et représentations. Vol. 2. p. 428. ....</i>                                                            | 142 |
| 4.11 | Résolution dans la table de valeurs des questions a) de la situation d'application tirée de <i>Perspective mathématique, Manuel B, Partie 8. Régularités et représentations. Vol. 2. p. 428. ....</i> | 143 |
| 4.12 | La ballade de Léa, exercice d'application tiré de <i>Perspective mathématique, Manuel B, Partie 6. Les représentations graphiques. Vol. 1. p. 151. ....</i>                                           | 144 |
| 4.13 | La représentation graphique de la distance parcourue en voiture par Léa selon le temps écoulé, issue de la situation. ....                                                                            | 145 |
| 4.14 | La représentation graphique du temps écoulé en voiture selon la distance parcourue par Léa, issue de la situation. ....                                                                               | 146 |
| 4.15 | Les vases, problème d'application tiré de <i>Perspective mathématique, Manuel B, Partie 6. Les représentations graphiques. Vol. 2. p. 154. ....</i>                                                   | 148 |
| 4.16 | Situation d'application tirée de <i>Perspective mathématique, Manuel B, Partie 8. Régularités et représentations. Vol. 2. p. 428. ....</i>                                                            | 151 |

|      |                                                                                                                                         |     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.17 | Situation d'introduction tirée de <i>À vos maths, Manuel C, Chapitre 1, section 2 : La relation entre deux variables. p. 16.</i> .....  | 160 |
| 4.18 | Situation d'introduction tirée de <i>À vos maths, Manuel C, Chapitre 1, section 2 : La relation entre deux variables. p. 17.</i> .....  | 161 |
| 4.19 | Exercice d'application tiré de <i>À vos maths, Manuel C, Chapitre 3, Bric à maths : Réinvestissement section 2. p. 191.</i> .....       | 164 |
| 4.20 | Exercice d'application tiré de <i>À vos maths, Manuel C, Chapitre 2, Section 2: Les rapports et les taux constant. p. 87.</i> .....     | 166 |
| 4.21 | Situation d'introduction tiré de <i>À vos maths, Manuel C, Chapitre 2, Section 2. Les rapports et les taux constants. p. 100.</i> ..... | 168 |
| 4.22 | Situation d'introduction tirée de <i>À vos maths, Manuel C, Chapitre 2, Section 2. Les rapports et les taux constants. p. 79.</i> ..... | 171 |
| 4.23 | Exercice d'application tiré de <i>À vos maths, Manuel C, Chapitre 1, Section 2. La relation entre deux variables. p. 20.</i> .....      | 173 |
| 4.24 | Exercice d'application tiré de <i>À vos maths, Manuel C, Chapitre 2, Section 2. Les rapports et les taux constants. p. 98.</i> .....    | 178 |
| 4.25 | Exercice d'application tiré de <i>À vos maths, Manuel C, Chapitre 1, Section 2. La relation entre deux variables. p. 21.</i> .....      | 180 |
| 4.26 | Situation tirée de <i>Panoram@th, Manuel A, Panorama 6. Tour d'horizon. Vol. 2. p.115.</i> .....                                        | 188 |
| 4.27 | Situation tiré de <i>Panoram@th, Manuel A, Panorama 7. Tour d'horizon. Vol. 2. p.156.</i> .....                                         | 189 |
| 4.28 | Situation tirée de <i>Panoram@th, Manuel B, Panorama 9. Unité 9.2 – Une histoire à raconter. Vol. 1. p. 23.</i> .....                   | 190 |
| 4.29 | Situation tirée de <i>Panoram@th, Manuel A, Panorama 7. Tour d'horizon. Vol. 2. p. 120.</i> .....                                       | 193 |
| 4.30 | Situation tirée de <i>Panoram@th, Manuel A, Panorama 7. Tour d'horizon. Vol. 2. p.122.</i> .....                                        | 194 |
| 4.31 | Situation tirée de <i>Panoram@th, Manuel A, Panorama 7. Tour d'horizon. Vol. 2. p.123.</i> .....                                        | 195 |
| 4.32 | Situation tirée de <i>Panoram@th, Manuel A, Panorama 7. Unité 7.1 : Ainsi de suite. Vol. 2. p. 129.</i> .....                           | 197 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                           |     |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.33 | Situation tirée de <i>Panoram@th</i> , Manuel B, <i>Panorama 9. Unité 9.3 – Ciel et mer. Vol. 1. p. 34.</i> .....                                                                                                                                                         | 199 |
| 4.34 | Situation tirée de <i>Panoram@th</i> , Manuel B, <i>Panorama 9. Unité 9.2 – Une histoire à raconter. Vol. 1. p.19.</i> .....                                                                                                                                              | 202 |
| 4.35 | Situation tirée de <i>Panoram@th</i> , Manuel B, <i>Panorama 9. Unité 9.2 – Une histoire à raconter. Vol. 1. p. 22.</i> .....                                                                                                                                             | 204 |
| 4.36 | Situation tirée de <i>Panoram@th</i> , Manuel B, <i>Panorama 11. Unité 11.2 – Du pareil au même. Vol. 1. p. 116-117.</i> .....                                                                                                                                            | 206 |
| 4.37 | Table de valeurs avec les reports des valeurs de segments proposés dans la figure 4.36. ....                                                                                                                                                                              | 207 |
| 4.38 | Table de valeurs avec les reports avec les observations des variations concomitantes entre les plusieurs valeurs des grandeurs observées dans la figure 4.36. ....                                                                                                        | 207 |
| 4.39 | Situation tirée de <i>Panoram@th</i> , Manuel B, <i>Panorama 9. Unité 9.2 – Une histoire à raconter. Vol. 1. p. 23.</i> .....                                                                                                                                             | 210 |
| 4.40 | Tracé de la relation entre la hauteur du monorail selon le temps écoulé depuis le départ du manège. ....                                                                                                                                                                  | 211 |
| 4.41 | Situation tirée de <i>Panoram@th</i> , Manuel B, <i>Panorama 9. Unité 9.2 – Une histoire à raconter. Vol. 1. p.22.</i> .....                                                                                                                                              | 213 |
| 5.1  | Présentation de 19 variables didactiques visant à caractériser les situations susceptibles de développer le regard covariationnel.....                                                                                                                                    | 224 |
| 5.2  | À gauche : Situation tirée de <i>Panoram@th</i> , Manuel A, <i>Panorama 7. Unité 7.1 : Ainsi de suite. Vol. 2. p.129.</i> à droite : Activité tirée de <i>Perspective mathématique</i> , Manuel B, <i>Partie 8. Régularités et représentations. Vol. 2. p. 423.</i> ..... | 230 |
| 5.3  | Activité tirée d' <i>À vos maths</i> , Manuel C, p. 171.....                                                                                                                                                                                                              | 231 |
| 5.4  | Situation tirée de <i>Panoram@th</i> , Manuel B, <i>Panorama 13. Unité 13. : Prenez votre rang. Vol. 2, p. 6.</i> .....                                                                                                                                                   | 233 |
| 5.5  | Résolution de la situation dans une perspective correspondance de l'activité tirée de <i>Panoram@th</i> , <i>Panorama 13, Unité 13. Prenez votre rang, Vol. 2. p. 6.</i> .....                                                                                            | 235 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.6  | Résolution dans une perspective covariationnelle de la situation de l'activité tirée de <i>Panoram@th</i> , <i>Panorama 13</i> , <i>Unité 13. Prenez votre rang</i> , <i>Vol. 2</i> . p. 6 .....                                                                                                                      | 236 |
| 5.7  | Situation tirée de <i>Panoram@th</i> , Manuel A, <i>Panorama 7</i> . <i>Unité 7.3 : Prenez votre rang</i> . <i>Vol. 2</i> . p.146. ....                                                                                                                                                                               | 237 |
| 5.8  | À gauche : Situation tirée de <i>Perspective mathématique</i> , Manuel B, <i>Partie 6</i> . <i>Les représentations graphiques</i> . <i>Vol. 2</i> . p. 153 et à droite, Situation tirée de <i>Panoram@th</i> , Manuel B, <i>Panorama 9</i> . <i>Unité 9.2 – Une histoire à raconter</i> . <i>Vol. 1</i> . p. 19. .... | 239 |
| 5.9  | Situation tirée de <i>Panoram@th</i> , Manuel B, <i>Panorama 11</i> . <i>Unité 11.2 – Du pareil au même</i> . <i>Vol. 1</i> . p. 116-117.....                                                                                                                                                                         | 241 |
| 5.10 | Activité tirée de <i>Perspective mathématique</i> , Manuel B, <i>Partie 6</i> . <i>Les représentations graphiques</i> . <i>Vol. 2</i> . p.153.....                                                                                                                                                                    | 242 |
| 5.11 | Activité tirée des notes du cours, production interne (Hitt, 2021). <i>MAT3225 Didactique de la variable et des fonctions</i> . ....                                                                                                                                                                                  | 245 |
| 5.12 | Image provenant du logiciel tracker où l'on voit le déplacement du coureur ainsi que les représentations graphiques, tabulaires et sous forme de formule. ....                                                                                                                                                        | 246 |

## LISTE DES TABLEAUX

| Tableau                                                                                                                                                                                                                  | Page |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 2.1 Les points de vue global et local ainsi que le questionnaire associé aux unités de raisonnement U1 à U5. ....                                                                                                        | 53   |
| 2.2 La nature du raisonnement et le questionnaire associé aux unités de raisonnement U1 à U5 et de U8 et U9 .....                                                                                                        | 62   |
| 2.3 Définition et exemplification des représentations.....                                                                                                                                                               | 65   |
| 2.4 Définition et exemplification de l'expérience.....                                                                                                                                                                   | 67   |
| 2.5 Tableau des passages entre les représentations.....                                                                                                                                                                  | 68   |
| 3.1 Sections ou chapitres retenus provenant des trois collections de manuels scolaires. ....                                                                                                                             | 95   |
| 3.2 Chapitres sélectionnés pour l'analyse des volumes <i>Perspective mathématique</i> . ....                                                                                                                             | 98   |
| 3.3 Chapitres sélectionnés pour l'analyse d' <i>À vos maths</i> . ....                                                                                                                                                   | 99   |
| 3.4 Chapitres ou panoramas sélectionnés pour l'analyse des volumes de <i>Panoram@th</i> . ....                                                                                                                           | 101  |
| 3.5 Grille utilisée pour discerner les situations susceptibles de travailler la covariation. ....                                                                                                                        | 104  |
| 3.6 Codage de passages entre les registres de représentation de la situation du saut en parachute, <i>Perspective mathématique, Manuel B, Partie 6. Les représentations graphiques. Vol. 2. p. 153.</i> .....            | 109  |
| 3.7 Analyse de la situation du saut en parachute dans le tableau des variables didactiques, situation tirée de <i>Perspective mathématique, Manuel B, Partie 6. Les représentations graphiques. Vol. 2. p.153.</i> ..... | 112  |
| 4.1 Tableau des fréquences des situations retenues et analysées dans trois parties de <i>Perspective mathématique</i> . ....                                                                                             | 115  |
| 4.2 Tableau des fréquences des types situations retenues dans les parties 5, 6 et 8 de la collection <i>Perspective mathématique</i> . ....                                                                              | 117  |

|      |                                                                                                                                           |     |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.3  | Tableau des fréquences des différents types de situations retenues selon la partie de la collection <i>Perspective mathématique</i> ..... | 119 |
| 4.4  | Tableau de passages entre les registres de représentations pour les manuels <i>Perspective mathématique</i> .....                         | 123 |
| 4.5  | Tableau de fréquences des différentes VD pour les manuels <i>Perspective mathématique</i> .....                                           | 133 |
| 4.6  | Tableau des variables didactiques selon la partie du manuel de <i>Perspective mathématique</i> .....                                      | 155 |
| 4.7  | Tableau des fréquences des situations retenues et analysées dans trois chapitres sélectionnés dans <i>À vos maths, manuel C</i> .....     | 158 |
| 4.8  | Tableau des fréquences des types situations retenues dans les chapitres 1, 2 et 3 de la collection <i>À vos maths</i> .....               | 163 |
| 4.9  | Tableau de passages entre les registres de représentations pour les manuels <i>À vos maths</i> .....                                      | 169 |
| 4.10 | Tableau de fréquences des différentes VD pour les manuels <i>À vos maths</i> ..                                                           | 176 |
| 4.11 | Tableau des fréquences des situations retenues et analysées dans cinq Panoramas de <i>Panoram@th</i> .....                                | 187 |
| 4.12 | Tableau des fréquences des types situations retenues dans les <i>Panorama</i> 7, 9 et 11 de la collection <i>Panoram@th</i> .....         | 192 |
| 4.13 | Tableau des passages entre les registres de représentations pour les manuels pour les manuels <i>Panoram@th</i> .....                     | 201 |
| 4.14 | Tableau de fréquences des différentes VD pour les manuels <i>Panoram@th</i>                                                               | 208 |
| 4.15 | Tableau des variables didactiques selon le <i>Panorama</i> du manuel <i>Panoram@th</i> .....                                              | 217 |
| 5.1  | Les trois points de vue de la covariation et le questionnement associé aux unités de raisonnement U1 à U5 et de U8-U9.....                | 220 |
| 5.2  | Tableau des passages entre registres de représentation .....                                                                              | 223 |

## RÉSUMÉ

Le concept de fonction apparaît comme un incontournable au deuxième cycle du secondaire (élèves âgés de 14 à 17 ans), mais est également source de nombreuses difficultés. Confrey et Smith (1995) soulignent qu'il existe deux regards distincts, mais complémentaires, pour approcher la fonction : le regard correspondance et le regard covariationnel. À cet effet, des chercheurs (René de Cotret, 1988; Carlson, 1998; Hitt, González et Morasse, 2008; Passaro, 2015) préconisent un travail sur le regard covariationnel en s'intéressant au comportement des accroissements concomitants entre les grandeurs pour préparer les élèves au concept de fonction. Dans le prolongement de ces recherches, notre objectif est d'analyser des manuels du premier cycle du secondaire (élèves de 12-14 ans) pour en dégager leur potentiel quant aux situations susceptibles de développer un regard covariationnel pour préparer les élèves au concept de fonction avant son apprentissage formel. Trois collections de manuels ont été analysées. La sélection des situations pour leur potentiel covariationnel s'appuie sur la présence de points de vue de la covariation (global, local qualitatif et/ou local quantitatif). Par la suite, les situations retenues ont été étudiées à l'aide de 20 variables didactiques qui ont permis de se prononcer sur la variété des situations proposées. Nous avons pu remarquer qu'une emphase est mise sur le regard correspondance au détriment du regard covariationnel. De l'analyse émergente des situations retenues se dégagent des approches différentes pour chacune de ces collections, misant dans un cas sur le point de vue global, pour un autre sur le point de vue local qualitatif et pour le troisième sur le local quantitatif à travers essentiellement les registres *description verbale* et *graphique*. Dans plusieurs situations, la formulation des questions et le guidage proposé, s'attardent peu aux accroissements concomitants. Des suggestions de modification de ces situations sont proposées au niveau des variables didactiques et du questionnement pour favoriser la mobilisation du regard covariationnel.

**Mots clés**

Fonction, covariation, variables didactiques, registre de représentations, manuels scolaires, enseignement secondaire.



## INTRODUCTION

De nombreuses recherches se sont intéressées au concept de fonction. Certaines d'entre elles s'attardent à son importance dans les cursus scolaires et relèvent les difficultés constatées chez les élèves du secondaire et du post secondaire (Carlson, 2002; Sajka, 2003; Sierpinska, 1982; Thompson et Carlson, 2017). D'autres chercheurs ont mis en place des ingénieries didactiques (Castillo-Garsow, 2010 et 2012; Hitt et Morasse, 2009; Lévesque, 2001; Passaro, 2015; Soury-Lavergne, 2010; Soury-Lavergne et Bessot, 2012), d'autres se penchent sur l'analyse des ressources mises à la disposition des enseignants, comme les manuels scolaires (Drolet, 2012; Landry, 2016; Robert, 2018) et même sur les pratiques des enseignants (Dufour, 2012). Ces chercheurs soulignent l'importance d'un travail sur la covariation pour appréhender la fonction. Nous pouvons définir la covariation comme une manière dynamique d'observer la relation entre deux grandeurs mesurables (ou variables) en s'attardant aux variations entre les valeurs d'une grandeur (ou variable) et les valeurs correspondantes de l'autre grandeur (ou variable). La plupart des recherches observées prennent place au 2<sup>e</sup> cycle du secondaire (auprès d'élèves âgés de 15 ans et plus) et peu d'entre elles s'inscrivent au premier cycle du secondaire<sup>1</sup>. Au Québec, du côté de la formation des futurs enseignants, un recueil (Janvier et Pelletier, 2003)<sup>2</sup> offre des situations pour un travail sur la covariation et un regard sur différentes variables didactiques pour analyser ces situations. Ces dernières peuvent être utilisées au premier comme au deuxième cycle

---

<sup>1</sup> On peut noter la recherche de Passaro (2007) qui s'attarde aux représentations spontanées/fonctionnelles des élèves au premier cycle du secondaire (élèves de 13-14 ans). L'étude menée par Hitt et Morasse (2009) poursuit cette réflexion à la première année du deuxième cycle du secondaire (14-15 ans).

<sup>2</sup> Au baccalauréat en enseignement secondaire à l'Université du Québec À Montréal (BES-MATH UQAM), concentration mathématique, ce document prend place dans deux cours de didactique : MAT2226 Raisonnement proportionnel et concepts associés et MAT3225 Didactique de la variable et de la fonction.

du secondaire. Ce recueil témoigne de l'importance de réfléchir à l'introduction des fonctions dès le début du secondaire.

Nous considérons que de s'attarder à cerner le travail préalable possible avant l'étude formelle des fonctions au deuxième cycle peut aider à mieux préparer les élèves et ainsi amoindrir leurs difficultés. En effet, tel que rapporté par des enseignants impliqués dans un projet de formation continue<sup>3</sup>, les élèves vivent un « saut » entre le premier et le deuxième cycle du secondaire. Ils constatent que le taux de réussite chute entre ces deux cycles. Ce « saut » correspond à un passage entre un apprentissage axé sur la résolution d'équations au premier cycle à une réflexion qui repose sur la variable au deuxième cycle. Ainsi, les enseignants et chercheurs impliqués dans ce projet de formation continue en sont venus à constater l'importance d'un travail préalable à l'enseignement formel du concept de fonction qui prendrait place au premier cycle du secondaire. Quant à lui, notre projet se situe au premier cycle du secondaire et porte plus particulièrement sur une analyse des ressources mises à la disposition des enseignants, les manuels scolaires. Nous cherchons à cerner le potentiel des situations présentes dans les manuels pour développer le regard covariationnel. Ainsi, sous l'angle du niveau scolaire visé, notre étude se situe entre celle de Robert (2018, manuels scolaires du 3<sup>e</sup> cycle du primaire au Québec) et celle de Drolet (2012, manuels scolaires du 2<sup>e</sup> cycle du secondaire au Québec).

Le chapitre I sera l'occasion de présenter la problématique ayant menée à l'objectif et aux questions de recherche de ce mémoire. Nous explorons le concept de fonction et les différents regards que l'on peut y porter. L'importance du regard covariationnel comme précurseur au concept de fonction est discuté et nous justifions notre choix de procéder à une analyse de collections de manuels scolaires du premier cycle du secondaire au Québec. Le chapitre II expose le cadre conceptuel de la présente

---

<sup>3</sup> Projet de formation continue qui s'intitule « Co-construction, mise à l'essai, analyse et partage de situations didactiques visant à favoriser le développement de la pensée algébrique » sous la responsabilité de M. Tremblay (UQAR) et M. Saboya (UQAM), ce projet a pris place de 2013 à 2017.

recherche, lequel mènera à la présentation de leviers théoriques permettant de rendre compte de la mobilisation du regard covariationnel ainsi que de variables didactiques servant à caractériser les situations. Le chapitre III présente la méthodologie de recherche qualitative retenue soit l'analyse de contenu. Seront exposées les trois collections de manuels scolaires retenues. De même, on y présente les grilles d'analyse qui ont mené au choix et à la caractérisation des situations qui sont discutées au chapitre suivant. Le chapitre IV présente les résultats issus de l'étude de chacune des trois collections. Le Chapitre V est l'occasion de revenir sur l'objectif et les questions de recherche. Les outils d'analyse développés dans le cadre de ce mémoire sont d'abord discutés. S'en suit une discussion portant sur une analyse transversale permettant de comparer les résultats des trois collections. Ce chapitre se termine par la formulation de suggestions portant, d'une part, sur le questionnement accompagnant les situations des manuels et sur de possibles modifications et, d'autre part, sur la modification de situations afin qu'elles ciblent le regard covariationnel. Ce mémoire se termine par la conclusion qui est l'occasion de revenir sur les deux objectifs de la recherche, d'exposer des limites, des retombées et des prolongements possibles de cette recherche.

## CHAPITRE I

### PROBLÉMATIQUE

#### 1.1 Le concept de fonction : important mais complexe

Plusieurs recherches en didactique des mathématiques (Passaro, 2015; Sajka, 2003; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992; Thompson et Carlson, 2017; et bien d'autres) portent sur le concept de fonction ainsi que sur son enseignement-apprentissage. Une des premières œuvres importantes, le livre: *The Concept of Function : Aspects of Epistemology and Pedagogy* publié en 1992, regroupe différents textes de chercheurs (p. ex. Selden et Selden, Sierpinska, Sfard, Dubinsky) partageant leurs résultats de recherche et des réflexions théoriques en lien avec le concept de fonction, son introduction en classe et son apprentissage.

Malgré bien des différences entre ces recherches, un constat ressort : les fonctions jouent un rôle unificateur dans l'enseignement des mathématiques pour les élèves et les étudiants (Carlson, 1998; Eisenberg, 1992; Selden et Selden, 1992). Plus récemment, on y réitère l'importance de ce concept pour appréhender notamment les phénomènes réels et comme objet important pour la formation du citoyen (Passaro, 2015). Toutefois, même si les chercheurs s'entendent pour dire que le concept de fonction est un incontournable dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques, celui-ci est également complexe pour les élèves et les étudiants<sup>4</sup> :

*Most mathematicians and teachers of secondary and entry level college mathematics would probably agree that functions play an important role*

---

<sup>4</sup> Les « élèves » désignent ceux qui suivent le cursus du préscolaire jusqu'au secondaire et les « étudiants » désignent ceux qui poursuivent au post secondaire (collégial et/ou universitaire).

*in a student's mathematical education. It turns out that comprehension of the function concept is remarkably complex.* (Selden et Selden, 1992, p. 1)

Dreyfus et Eisenberg (1982) font ce même constat et l'expliquent notamment par le fait que ce concept recèle des interprétations multiples.

### 1.1.1 Des interprétations multiples du concept de fonction

Dubinsky et al. (1992) spécifient que la capacité de passer d'une interprétation à une autre s'avère importante, mais aussi difficile surtout pour les néophytes :

*[...] novices often lack the ability to go back and forth between different aspects (of the function), and there is some evidence to suggest that familiarity with one aspect of function can interfere with developing an understanding of others.* (Dubinsky et al., 1992, p. 6-7)

Selon eux, les fonctions peuvent être appréhendées comme un ensemble de paires de points ordonnés (définition issue de Bourbaki), d'autres fois elles sont vues comme une correspondance entre deux ensembles (définition issue de Dirichlet), elles peuvent également être reliées à un graphique, associées à une formule, elles peuvent être l'expression d'un processus ou d'un objet.

Sajka (2003) souligne que de nombreux chercheurs se sont intéressés à la multitude des interprétations et des représentations du concept de fonction afin d'y développer des situations d'apprentissage qui en tiennent compte. En 2017, Thompson et Carlson, offrent une contribution importante grâce à leur recension préalable de plusieurs recherches s'intéressant au concept de fonction. À partir des études de Carlson (2002), Castillo-Garsow (2010, 2012), Confrey et Smith (1994, 1995) et Saldanha et Thompson (1998), les différentes interprétations du concept sont mises en évidence et on y relève l'importance de s'attarder à la signification accordée à la fonction en tenant compte de la communauté qui y recourt et en prenant aussi en considération les manières de rendre compte de ses différents sens.

*There is nothing that can be called “the concept of function.” The phrase “concept of function,” regardless of its meaning, immediately calls into question whom we envision having it. Is it a mathematician, a teacher, a student, or a researcher in mathematics education? (Thompson et Carlson, 2017, p. 421)*

Nous utiliserons ainsi dans ce mémoire l’expression : « le concept de fonction », sachant qu’il renvoie à plusieurs interprétations et qu’il pourra être interprété de plusieurs façons selon le lecteur.

## 1.2 Une compréhension du concept de fonction à travers ses deux regards : correspondance et covariation

Sous les différentes interprétations du concept de fonction, Confrey et Smith (1995) distinguent deux « regards » qui peuvent être portés sur la fonction lors de l’utilisation d’un logiciel de représentations graphiques de fonctions. Ces regards étant complémentaires :

- Le regard correspondance : associé à une vision statique où l’on observe les valeurs correspondantes d’un couple de grandeurs mises en relation.
- Le regard covariationnel : associé à une vision dynamique d’une fonction; l’observation de la relation comme étant une relation entre deux variables autour de quelques paramètres fixés.

Le regard correspondance de la fonction est relié à une idée de correspondance entre des valeurs et est souvent associé aux définitions « ensemblistes ». Cette approche est associée à une vision statique de la fonction. Cette dernière s’est imposée dans le milieu de l’enseignement secondaire (Confrey et Smith, 1995; Sierpinska, 1992; Soury-Lavergne et Bessot, 2012). Voici un exemple de définition provenant du manuel Point de vue mathématique (1<sup>re</sup> année du 2<sup>e</sup> cycle du secondaire, 2005) :

*Une fonction est une relation qui fait correspondre à chaque valeur de la variable indépendante au plus une valeur de la variable dépendante. Cette*

*correspondance s'exprime par un processus opératoire appelé « règle de correspondance. »* (Point de vue mathématique, 2005, p. 218)

Alors qu'il est facile d'observer des éléments portant sur la correspondance dans la définition précédente, l'idée de variation et de dépendance n'est pas aussi claire. Sous la formulation « Une fonction est une relation [...] » et « variable » se cachent plusieurs éléments implicites reposant sur les fondements du concept de fonction établis au cycle scolaire précédent.

Plusieurs recherches soulignent le potentiel du raisonnement covariationnel pour la compréhension du concept de fonction (Castillo-Garsow, 2010 et 2012; Hitt et Morasse, 2009; Hitt et Passaro, 2007; Krynska et Schneider, 2010; Passaro, 2007 et 2015; Saldanha et Thompson, 1998; Thompson et Carlson, 2017). Certains chercheurs (Confrey et Smith, 1995; Passaro, 2015; René de Cotret, 1988; Soury-Lavergne, 2010; Thompson, 1994) constatent qu'une approche mettant de l'avant les aspects covariationnels permet de développer un regard différent, mais complémentaire de la fonction. Voici comment Confrey et Smith (1995) font une distinction entre ces deux regards, correspondance et covariationnel :

*The covariation approach is in marked contrast to the correspondence approach that currently dominates the curriculum. Correspondence is based on an abstract and rather narrow definition of a function as a relation between two sets.* (Confrey et Smith, 1995, p. 79)

En particulier, Thompson et Carlson proposent de s'attarder aux aspects covariants<sup>5</sup> : « *We argue that ideas of continuous variation and continuous covariation are epistemologically necessary for students and teachers to develop useful and robust conceptions of functions* » (2017, p. 423). Ainsi, les auteurs définissent la fonction selon une perspective covariationnelle :

---

<sup>5</sup> Les auteurs distinguent les idées de « continuous variation and continuous covariation », nous reviendrons sur ces distinctions dans la section 2.1 portant sur les définitions associées à la covariation au chapitre 2.

*A function, covariationally, is a conception of two quantities varying simultaneously such that there is an invariant relationship between their values that has the property that, in the person's conception, every value of one quantity determines exactly one value of the other. (Thompson et Carlson, 2017, p. 444)*

Passaro (2015) définit quant à elle une « approche covariationnelle » qu'elle utilise dans sa thèse doctorale portant sur l'analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée chez les élèves du 2<sup>e</sup> cycle du secondaire:

*Nous montrerons comment ces analyses débouchent, selon nous, sur la mise en évidence d'un travail sur la covariation qui semble jouer un rôle crucial dans la co-construction des notions de fonction et de dérivée dans l'apprentissage des mathématiques scolaires. L'objectif général de la recherche sera donc orienté sur l'exploration d'une approche covariationnelle de la fonction caractérisée, notamment, par une étude des accroissements concomitants des deux grandeurs mises en relation par cette fonction. (Passaro, 2015, p. 1)*

Ainsi, bien que deux regards complémentaires de la fonction, la correspondance et la covariation, soient à prendre en considération lors de l'enseignement-apprentissage, les chercheurs précédemment cités mettent l'accent sur le regard covariationnel. Comme eux, nous choisissons de nous inscrire dans cette approche covariationnelle et nous expliquons ce choix dans les sections suivantes. Mais avant cela, nous exposerons un exemple favorisant la compréhension du lecteur du déploiement des deux regards.



### 1.2.1 Un exemple du déploiement des deux regards de la fonction dans la situation de la bougie

Considérons la situation suivante (voir figure 1.1) afin d'illustrer le déploiement des deux regards à l'aide d'une situation que l'on retrouve dans un des manuels scolaires analysés. Cette situation a été choisie parce qu'elle nous permet d'illustrer la façon dont les regards *correspondance* et *covariation* s'expriment de façon complémentaire dans une table de valeurs. Il s'agit de l'observation de la fonte d'une bougie « à un rythme de 1,5 cm/h ». Les grandeurs impliquées (et imposées par la tâche) sont : la longueur de la bougie et le nombre d'heures écoulées depuis que la bougie est allumée (le temps écoulé).

8. Pendant une panne de courant, on allume une bougie de 20 cm pour s'éclairer. On remarque qu'elle fond à un rythme de 1,5 cm/h.

a) Complète la table de valeurs ci-dessous.

**Panne de courant**

|                                                           |   |   |   |   |   |   |    |
|-----------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|----|
| Nombre d'heures écoulées depuis que la bougie est allumée | 0 | 1 | 2 | 3 | 7 | 9 | 12 |
| Longueur de la bougie (cm)                                |   |   |   |   |   |   |    |

b) Donne la règle qui permet de calculer la longueur  $l$  de la bougie selon le nombre  $n$  d'heures écoulées depuis que la bougie est allumée.

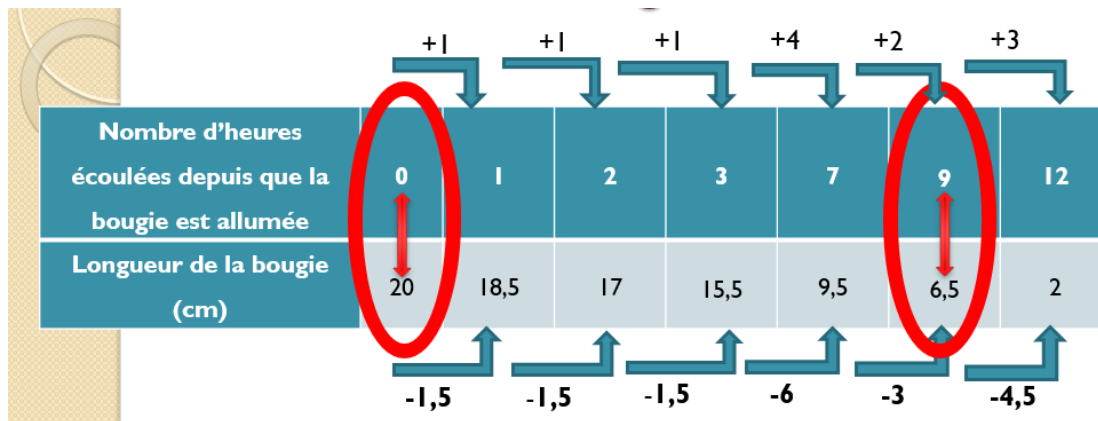
c) Combien de temps pourra-t-on s'éclairer avec cette bougie?



**Figure 1.1** Situation de la bougie tirée du manuel *Panoram@th* (Cadieux, Gendron et Ledoux), manuel B, volume 1, p. 14.

Dans cette situation, la relation entre les deux grandeurs est que la longueur de la bougie diminue selon le temps écoulé. Grâce à la compréhension implicite que le rythme de fonte est constant, il est possible de remplir la table de valeurs. En résumé, la tâche amène à reconnaître les éléments provenant d'un contexte en mots afin de remplir une table de valeurs. Puis, à la question b), il est demandé de représenter la relation sous

forme de formule (règle de correspondance). La figure 1.2 illustre comment les regards *correspondance* et *covariation* peuvent s'exprimer dans la table de valeurs.



**Figure 1.2** Table de valeurs de la bougie tirée du manuel *Panoram@th* (Cadieux, Gendron et Ledoux), manuel B, volume 1, p. 14.

Le regard *correspondance* se déploie par l'observation de valeurs associées aux longueurs de la bougie en un temps écoulé spécifique, fixé. Par exemple : Au moment d'allumer la bougie sa longueur initiale est de 20 cm, 9 heures après l'amorce de la bougie, sa longueur est de 6,5 cm et il serait possible d'observer les autres couples de valeurs selon le même regard en s'intéressant à la relation entre les valeurs correspondantes des deux grandeurs ou variables. Ces relations sont représentées par les flèches et les ellipses rouges.

Le regard *covariationnel* quant à lui s'intéresse plutôt aux écarts entre les différents couples des valeurs. Dans la situation précédente, le taux de variation est donné : « On remarque qu'elle [la bougie] fond à un rythme de 1,5 cm/h. ». Afin que le regard s'exerce, il faut supposer que ce rythme reste constant jusqu'à ce que la bougie s'éteigne. Ce faisant, en observant les variations concomitantes des deux variables, il est possible d'obtenir les différents écarts (représentés par les flèches horizontales bleues) signifiant les réductions de la bougie associées à un temps écoulé. Ainsi, on peut voir dans la table de valeurs qu'entre l'amorce de la bougie et la première heure,

la bougie a fondu de 1,5 cm. Comme ce rythme est constant, après une autre heure écoulée, la bougie a fondu encore de 1,5 cm. Ce regard s'intéresse à au moins deux couples de « valeurs » pour considérer les variations concomitantes. En combinant ces deux regards, il est possible d'accomplir la deuxième tâche du problème, obtenir la règle de correspondance décrivant la relation et ainsi trouver la valeur manquante en c).

$$f(x) = -1,5x + 20, \text{ avec } \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \text{Temps maximal}\}$$

Les deux questions de cette situation axent plutôt sur la recherche d'une règle de correspondance. Cependant, une réflexion sur les accroissements concomitants des grandeurs est essentielle pour déterminer les valeurs de la grandeur ou variable *longueur de la bougie*. L'étude s'appuie essentiellement sur la table de valeurs et passe par un regard sur le taux de variation de 1,5 cm/h. Comme le mentionne Passaro (2015, p.8), le taux de variation est relié à la covariation : « Le taux de variation est vu comme une mesure de la covariation (le taux de variation est une mesure des variations simultanées de deux ou plusieurs variables). »

### 1.3 Un questionnaire sur les regards mis de l'avant dans les ressources enseignantes

Les définitions proposées dans le milieu scolaire québécois portent presque uniquement sur le regard correspondance (Passaro, 2007; René de Cotret, 1988). Toutefois, Passaro (2015, p. 51) souligne l'importance du questionnaire qui peut mener à l'étude de la covariation : « Par ailleurs, étudier une fonction ne signifie pas forcément étudier les variations concomitantes de deux grandeurs. En fait, ce sont les questions qu'on se pose à propos de la fonction dans certaines situations qui engendrent ou non cette étude ». Le concept de fonction aurait au fil de son évolution et de l'évolution du symbolisme, atteint le stade « noble » d'objet mathématique

jusqu'à en perdre l'idée de variable : « The word "variable" thus has no justification in pure Analysis » (Frege, 1970, p. 111). Avec ce « nouveau statut », les définitions autour du concept de fonction s'adressent surtout au domaine de l'analyse mathématique et de la théorie des ensembles. Cette définition axée sur la correspondance entre deux ensembles permet de réduire l'utilisation des représentations graphiques et les aspects variés de la fonction en mettant l'accent sur les aspects analytiques, majoritairement pour l'enseignement auprès d'étudiants du post-secondaire.

*Unfortunately, the most efficient way to teach students to solve routine algebra and calculus problems is to ignore much of this richness of the function concept. However, an understanding of the many aspects of function is needed for modern mathematics, as well as for recognizing when mathematics may be applicable. (Selden et Selden, 1992, p. 4)*

Selden et Selden soulignent que « la méthode d'enseignement la plus efficace implique d'ignorer une grande partie de la richesse du concept de fonction<sup>6</sup> » (p.4). Cette approche évite probablement d'affronter les difficultés d'interprétations des élèves et des étudiants avec des problèmes ou situations différentes des « tâches routinières ». Ainsi, les définitions présentes dans le milieu de l'enseignement des mathématiques peuvent s'avérer moins concises tout en étant valables et suffisantes pour les élèves selon le niveau visé. Toutefois, René De Cotret (1988, p. 2) rapporte qu'un regard uniquement sur la correspondance ne suffit pas :

*Nous croyons que certains concepts qui ont été exprimés par la fonction sont mieux adaptés que d'autres à l'enseignement car ils en permettent une approche plus intuitive et plus pratique. Ils permettent de "voir", par l'expérience, des phénomènes impliquant des fonctions. En fait, il s'agit de redonner à la fonction ses composantes. La fonction, il y a à peine 100 ans, renfermait ces concepts, mais avec les mathématiques ensemblistes elle s'est départie des aspects variation et dépendance.*

---

<sup>6</sup> Traduction libre.

Elle relève l'importance d'un regard sur la fonction qui est lié à la variation, à la dépendance, à une vision dynamique de la fonction. Plusieurs auteurs dont Soury-Lavergne et Bessot (2012, p. 745) remontent même à la définition donnée par Euler pour décrire les fonctions dans cette perspective dynamique : « *Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonction de ces dernières.* » (Euler, 1755).

Cette définition est, à notre avis, intuitive et accessible pour un élève de niveau secondaire. Cette tendance à déléster le côté covariationnel de la fonction se retrouve également aux États-Unis. Thompson (1994) fait le constat dans les textes ministériels que la fonction n'est pas étudiée pour ses composantes covariationnelles :

*I wish to mention quickly that in today's K-14 mathematics curriculum there is no emphasis on function as covariation. In fact, there is no emphasis on variation. I examined the most recent editions of two popular K-9 text series and found that the closest they come to examining variation is to have students construct tables of data, and even then there is a profound confusion between the ideas of random variable and variable magnitude.* (Thompson, 1994, p. 11)

De plus, ce chercheur souligne que la table de valeurs est souvent la seule représentation offerte aux élèves afin d'observer la variation d'une grandeur. Ce faisant, une étude de la fonction à travers une diversité de registres, diversité dont l'importance est mise de l'avant par plusieurs chercheurs est escamoté (Duval, 1993; Hitt, Gonzalez et Morasse, 2008; Hitt et Morasse, 2009; Janvier, 1981a, 1981b et 1993; Soury-Lavergne, 2010; Passaro, 2007 et 2015).

Si l'on reconnaît que le regard covariationnel est moins exploité dans les manuels pour les raisons tout juste dégagées, nous nous penchons sur le programme de l'école québécoise afin de mieux comprendre les éléments associés à la covariation et la façon dont ils sont institutionnalisés.

### 1.3.1 La covariation et la fonction dans le programme de formation de l'école québécoise

Dans l'optique d'une recherche portant sur les éléments précurseurs au concept de fonction dans l'enseignement des mathématiques au Québec, il s'avère important de s'attarder à la place accordée ainsi qu'à la façon de présenter le concept de fonction et ses éléments précurseurs dans le Programme de Formation de l'École Québécoise (PFEQ). Dans le PFEQ, le mot « fonction » n'apparaît explicitement qu'au deuxième cycle du secondaire (élèves de 14 à 17 ans) et la « covariation » n'est pas explicitement nommée. Dans la lecture que nous avons menée du programme, nous avons recherché des terminologies rattachées à la covariation, il s'agit de *variable*, *quantité*, *grandeur*, *dépendance*, *relation* et *taux de variation*. Nous avons pu observer que certains de ces éléments sont introduits dès le premier cycle du secondaire (élèves de 12 à 14 ans).

### 1.3.2 Éléments reliés à la fonction dans le programme au premier cycle du secondaire

Dans l'extrait qui suit, tiré du programme du premier cycle de la section traitant d'arithmétique et l'algèbre, le programme incite à introduire la *variable*, la *dépendance* et à mener un travail autour de la *généralisation à l'aide d'une règle*, éléments rattachés à la covariation :

*Pour construire sa pensée algébrique, l'élève observe des régularités issues de situations diverses et représentées de différentes façons, comme des dessins, des tables de valeurs et des graphiques. Pour introduire les idées de variable, de dépendance entre des variables et de généralisation à l'aide d'une règle, l'utilisation de suites de nombres constitue un moyen privilégié. Par exemple, on peut utiliser les nombres polygonaux ou différentes situations géométriques pour généraliser à l'aide d'une ou de plusieurs règles équivalentes. (C'est nous qui soulignons). (PFEQ, 2005, p. 254)*

La *variable* et la *dépendance* apparaissent comme des ingrédients pour saisir la covariation, et donc la fonction, et qui prennent place au début du secondaire. De plus, le programme axe sur une diversité de façons de représenter des régularités en s'appuyant sur l'observation de ces régularités dans différents registres de représentation. Il est possible de rapprocher ces éléments du programme québécois aux « compréhensions » que Sierpiska (1992, p. 31-38) identifie comme étant à la base du concept de fonction. En effet, la chercheure établit une série de « compréhensions »<sup>7</sup> en se basant sur l'explicitation d'obstacles épistémologiques et sur des recherches antérieures telles que celles de Bergeron et Herscovics (1982), Freudenthal (1973), Janvier (1978), Sierpiska (1989) et d'autres. Les compréhensions 2, 3, 4 et 5 nous semblent en accord avec ce qui est proposé dans le programme :

U(f)-2 : Identification of regularities in relationships between changes as a way to deal with the changes.

U(f)-3: Identification of the subjects of change in studying changes.

U(f)-4 : Discrimination between two modes of mathematical thought: one in terms of known and unknown quantities, the other – in terms of variable and constant quantities.

U(f)-5: Discrimination between the dependant and the independent variables. (Sierpiska, 1992, p. 31-38).

Ces compréhensions sont à la base de la covariation. Ainsi, l'étude des régularités, des relations entre les différentes variables sont parmi les premiers pas de l'apprentissage du concept de fonction pour les élèves. Ce n'est pas tout, la section traitant du

---

<sup>7</sup> Sierpiska (1992) les nomme des « understandings » ou des « acts of understanding », elle établit 19 compréhensions essentielles au concept de fonction. Nous en relèverons plusieurs dans ce mémoire sans faire la liste explicite car plusieurs d'entre elles sont associées à une compréhension du concept de fonction qui dépasse celle ciblée par notre étude, qui s'attarde à des élèves du premier cycle du secondaire (12-14 ans).

raisonnement proportionnel cible d'autres aspects à la base des fonctions, une réflexion sur les quantités ainsi que les rapports entre ces quantités étant proposée (PFEQ, 2005, p. 255) :

*De plus, il [l'élève] déploie un raisonnement proportionnel lorsqu'il observe qu'une quantité ou une grandeur est liée à une autre par un rapport déterminé. Il fait usage de ce type de raisonnement pour **calculer un quotient, un taux** (pente, vitesse, débit, etc.) ou un indice, pour effectuer des opérations sur des suites de nombres ou en comparer des éléments[...] (c'est nous qui soulignons).*

Le programme recommande l'observation d'une « *quantité ou une grandeur* » par « *rapport* » à une autre. Cette phrase implique une connaissance de ce qu'est une grandeur<sup>8</sup> ainsi qu'un rapport. L'idée de « *grandeur* » est parmi les compréhensions à la base de la fonction comme l'explique Sierpinska (1992) à l'aide de son septième acte de compréhension : « *U(f)-7 : Discrimination between number and quantity* » (Sierpinska, 1992, p. 42). La quantité (grandeur) représente l'élément observé (une longueur par exemple) et sa quantification est exprimée par un nombre. Quant aux idées de rapports entre deux grandeurs, elles sont liées au raisonnement proportionnel qui était fort utile lors de l'étude des fonctions pour l'observation du mouvement d'un objet :

*In the 17th century, the study of motion, from Kepler's work on the planets to Huygen's work on the pendulum, was central, and functional*

---

<sup>8</sup> Nous retenons l'utilisation de « grandeur » que l'on retrouve dans différents travaux et documents ministériels (PFEQ, 2005; Passaro, 2007 et 2015 ; Janvier et Pelletier, 2003). Le mot quantité apparaît surtout dans les travaux anglophones pour parler de « variable » et de « grandeur ». Cependant nous trouvons qu'en français, l'utilisation du mot « grandeur » apporte une idée d'élément quantifiable sans donner automatiquement des valeurs numériques. Il est plus difficile de dissocier les valeurs numériques si on parle en termes de « quantité ». Aussi une grandeur peut prendre le rôle de variable, mais aussi de paramètre dans une situation et ses valeurs ne sont pas forcément numériques. De plus, Charnay et Mante (1996, p. 256) proposent de faire la distinction entre grandeur mesurable ou non. Ils font la distinction avec une grandeur non repérable, par exemple, on dira que la "gentillesse" est évidemment un caractère qui varie d'une personne à l'autre, mais qu'elle ne sera pas mesurable.



*relationships were expressed in words and the language of proportion. It took time before calculus was recast in an algebraic and symbolic mold with curves specified by formulas or equations.* (Selden et Selden, 1992, p. 4-5)

Les raisonnements algébriques et proportionnels tirés des extraits de programme du premier cycle du secondaire sont une assise intéressante dans la perspective d'une compréhension du concept de fonction à travers la covariation. À notre avis, il existe plusieurs opportunités de porter un regard sur les fonctions avant son enseignement et apprentissage formel au deuxième cycle du secondaire.

### 1.3.3 La fonction dans le programme au deuxième cycle du secondaire

La lecture du programme au deuxième cycle a été menée en vue d'observer une possible continuité et arrimage des éléments présents au 1<sup>er</sup> cycle, éléments considérés comme précurseurs à la fonction. Nous retrouvons à ce niveau, la *grandeur*, la *relation de dépendance* (fonctionnelle ou non), la *variable* ainsi que les différentes représentations. Le concept de fonction apparaît à plusieurs reprises autant dans les descriptifs de compétences que dans le contenu de formation. Il est possible d'observer grossièrement « l'évolution des principaux concepts liés à l'arithmétique et à l'algèbre au 2<sup>e</sup> cycle » grâce au tableau 1.1.

Les tableaux qui suivent présentent, pour chaque champ mathématique, les concepts introduits à chacune des années du cycle.

### ÉVOLUTION DES PRINCIPAUX CONCEPTS LIÉS À L'ARITHMÉTIQUE ET À L'ALGÈBRE AU 2<sup>e</sup> CYCLE

Au cours de sa formation, l'élève développe différents types de pensée. Il passe de la pensée arithmétique à la pensée algébrique. Par exemple, le statut du signe d'égalité évolue, dans son esprit, de l'annonce d'un résultat vers la relation d'équivalence. Il approfondit ainsi son sens du nombre, des opérations et de la proportionnalité, et il développe son habileté à modéliser des situations. Les contextes qui lui sont proposés sont sources d'images mentales permettant le développement de ces divers sens. Au fil des années, il améliore aussi sa capacité à évoquer une situation en faisant appel à plusieurs registres de représentation. Par exemple, les fonctions peuvent être représentées graphiquement ou sous forme de tableau ou de règle, et chacune de ces représentations est porteuse d'un point de vue qui lui est propre, complémentaire ou équivalente aux autres.

| DEUXIÈME CYCLE DU SECONDAIRE |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 <sup>re</sup> année        | <p><b>Nombres réels : rationnels et irrationnels; cube et racine cubique</b><br/> <b>Relation d'inégalité</b></p> <p><b>Relation, fonction et réciproque</b><br/>           – Variable dépendante et variable indépendante<br/>           – Fonction polynomiale de degré 0 ou 1 et système d'équations du 1<sup>er</sup> degré à deux variables de la forme <math>y = ax + b</math>, fonction rationnelle de la forme <math>f(x) = \frac{a}{x}</math> ou <math>xy = k</math></p>     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 2 <sup>e</sup> année         | <p><b>Séquence Culture, société et technique</b></p> <p><b>Relation, fonction et réciproque</b><br/>           – Fonction réelle : polynomiale de degré inférieur à 3, exponentielle, périodique, en escalier, définie par parties</p> <p><b>Système</b><br/>           – Système d'équations du 1<sup>er</sup> degré à deux variables</p>                                                                                                                                            | <p><b>Séquence Technico-sciences</b></p> <p><b>Expressions arithmétique et algébrique</b><br/>           – Nombres réels : radicaux, puissances de base 2 et 10<br/>           – Inéquation du 1<sup>er</sup> degré à deux variables</p> <p><b>Relation, fonction et réciproque</b><br/>           – Fonction réelle : polynomiale de degré 2 (forme canonique), exponentielle, partie entière, périodique, en escalier, définie par parties<br/>           – Paramètre multiplicatif</p> <p><b>Système</b><br/>           – Système d'équations du 1<sup>er</sup> degré à deux variables</p> | <p><b>Séquence Sciences naturelles</b></p> <p><b>Expression algébrique</b><br/>           – Identité algébrique, équation et inéquation du 2<sup>e</sup> degré à une ou deux variables</p> <p><b>Fonction réelle</b><br/>           – Fonction en escalier (partie entière); polynomiale de degré 2 (formes canonique, générale et factorisée)<br/>           – Paramètre</p> <p><b>Système</b><br/>           – Système d'équations du 1<sup>er</sup> degré à deux variables<br/>           – Système composé d'une équation du 1<sup>er</sup> degré et d'une équation du 2<sup>e</sup> degré à deux variables</p> |
|                              | <p><b>Expression arithmétique et algébrique</b><br/>           – Inéquation du 1<sup>er</sup> degré à deux variables<br/>           – Nombres réels : puissance et logarithme, définition et changement de base</p> <p><b>Mathématiques financières</b><br/>           – Taux d'intérêt, période d'intérêt, actualisation (valeur actuelle), capitalisation (valeur future)</p> <p><b>Système</b><br/>           – Système d'inéquations du 1<sup>er</sup> degré à deux variables</p> | <p><b>Relation, fonction et réciproque</b><br/>           – Fonction réelle : polynomiale de degré 2 (forme générale, canonique et factorisée), rationnelle, sinusoidale, tangente (ainsi que les fonctions introduites l'année précédente et leurs réciproques)<br/>           – Paramètre additif<br/>           – Opérations sur les fonctions</p> <p><b>Système</b><br/>           – Système d'inéquations du 1<sup>er</sup> degré à deux variables<br/>           – Système d'équations et d'inéquations faisant intervenir divers modèles fonctionnels</p>                              | <p><b>Expressions arithmétique et algébrique</b><br/>           – Nombres réels : valeur absolue, radicaux, exposants et logarithmes</p> <p><b>Relation, fonction et réciproque</b><br/>           – Fonction réelle : valeur absolue, racine carrée, rationnelle, exponentielle, logarithmique, sinusoidale, tangente, définie par parties<br/>           – Opérations sur les fonctions</p> <p><b>Système</b><br/>           – Système d'inéquations du 1<sup>er</sup> degré à deux variables<br/>           – Système d'équations du 2<sup>e</sup> degré (en relation avec les coniques)</p>                     |

Programme de formation de l'école québécoise

Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie

Mathématique

» 51  
Chapitre 6

**Figure 1.3** Extrait du PFEQ du 2<sup>e</sup> cycle du secondaire (2006, p.51).

Il est possible de remarquer plusieurs éléments explicites du concept de fonction, dans les différentes séquences<sup>9</sup> du deuxième cycle. Nous avons souligné, en rouge, certains des éléments mentionnés dans la section précédente. Certains ont été relevés au premier cycle comme précurseurs au concept de fonction alors que d'autres émergent au deuxième cycle : taux de variation - les relations entre les grandeurs, les paramètres – une grandeur fixée, les variables – une grandeur variable. Ainsi la *variable* et la *dépendance* qui sont constitutifs de la covariation sont introduits au premier cycle du secondaire et se précisent au deuxième cycle du secondaire. Si on se penche sur la

<sup>9</sup> À partir de la deuxième année du deuxième cycle du secondaire, les élèves peuvent choisir l'une des trois séquences (Culture, société et technique, Technico-sciences et Sciences naturelles) qui correspond à leurs intérêts et leurs aptitudes. L'objectif est d'ancrer les situations d'apprentissages dans des domaines spécifiques pour développer les compétences des élèves.

progression, on peut noter que dès la première année du deuxième cycle, les élèves abordent explicitement deux fonctions : polynomiale de degré 0 ou 1 (linéaire, affine) et la fonction rationnelle. Ces fonctions s'appuient sur les relations proportionnelles ainsi que sur l'étude des taux de variation. De plus, ces fonctions sont décrites explicitement selon différents registres de représentations :

*Par exemple, les fonctions peuvent être représentées graphiquement ou sous forme de tableau ou de règle, et chacune de ces représentations est porteuse d'un point de vue qui lui est propre, complémentaire ou équivalente aux autres. (PFEQ, 2005, p. 51)*

Nous retenons l'accent mis sur un travail au premier et deuxième cycle autour d'une diversité de registres de représentation pour notre étude sur la covariation. Au deuxième cycle du secondaire c'est, pour la majorité des élèves, le moment de rencontre avec l'expression fonctionnelle et la notation « $f(x)$ ». Elle fait suite aux débuts des écritures d'équations impliquant deux inconnues ainsi que les premières descriptions de relations à l'aide de divers registres de représentations. Cette notation pose toutefois de nombreuses difficultés aux élèves (voir annexe A).

#### 1.4 Quelques recherches portant sur le développement du raisonnement covariationnel avant tout apprentissage formel de la fonction

Les travaux qui s'intéressent à la covariation relèvent l'importance de mener un travail entre différents registres de représentations (Duval, 1993; Janvier, 1981a, 1981b et 1993). À cet effet, Duval (1993) souligne :

*Un système sémiotique peut être un registre de représentation, si celui-ci permet trois activités cognitives fondamentales liées à la sémiotique :*

- 1) La formation d'une représentation identifiable...*
- 2) Le traitement d'une représentation qui réfère à la transformation de cette représentation dans le registre même où a été formé...*
- 3) La conversion d'une représentation est la transformation de cette représentation vers une représentation d'un autre registre, cette dernière*

*conservant la totalité, ou bien une partie seulement du contenu de la représentation initiale...* (Duval, 1993, p. 41)

Duval (1993) identifie différents registres de représentation :

- a) La langue naturelle,
- b) Le registre de désignation du nombre<sup>10</sup>
- c) Le registre graphique des fonctions,
- d) Le registre algébrique,
- e) Le registre des figures géométriques ou constructibles à l'aide d'un instrument.

Les représentations sémiotiques mentionnées par Duval sont du type institutionnel, ce sont celles que l'on peut trouver par exemple dans les livres. Janvier (1981a, 1981b, 1993) considère quatre modes de représentations : description verbale, tableau (table de valeurs), graphique et équation/formule. Ce sont celles-ci qui seront retenues dans ce mémoire, en plus, de la représentation figurale ou schématique introduite par Janvier et Pelletier (2003)<sup>11</sup>. Des travaux (Hitt, 2003, 2004; Hitt et Morasse, 2009; Passaro, 2007, 2015) s'appuient sur les représentations. Dans leur recherche qui prend place au premier cycle du secondaire (Hitt et Passaro, 2007; Passaro, 2007), les chercheurs ciblent trois groupes d'élèves de la deuxième année du secondaire, donc avant l'enseignement formel du concept de fonction. Tel qu'ils le précisent, la covariation apparaît à ce niveau comme un concept à développer. Pour cela, ils ciblent plus précisément un travail autour des représentations verbale (vu comme l'énoncé de la situation) et graphique :

*[...] Puisque, pour nous, la compréhension et la maîtrise de ce concept [la covariation] est à la base de la conversion entre les registres de la « situation » et du « graphique », nous voulions trouver des pistes quant au moyen de développer ce concept dès la deuxième année du secondaire. (Passaro, 2007, p. 223).*

---

<sup>10</sup> On y distingue, entre autre, la représentation sous forme d'écriture fractionnaire de l'écriture décimale.

<sup>11</sup> Nous reviendrons dans le cadre conceptuel sur ces représentations.

Leur intérêt est d'étudier les représentations spontanées des élèves, l'objectif étant d'observer les passages vers les représentations institutionnelles. Hitt (2006) définit comme suit les représentations spontanées qui sont également appelées fonctionnelles :

*On the one hand, we defined functional representations, as the spontaneous representations that a student uses in a mathematical situation. On the other hand, we named institutional representations, the representations found in books or on computer screens, or those used by teachers when explaining to students on the blackboard... In this work, a conception is a personal knowledge, constructed by an individual, personally or in social interaction that is not equivalent to the institutionalized knowledge. It is possible to detect a conception of a person through the spontaneous representations a person uses when solving a mathematical task. (Hitt, 2006, p. 255-256).*

Hitt et Passaro (2007) et Passaro (2007) utilisent la situation du *randonneur*<sup>12</sup> (voir figure 1.4) afin d'observer et de recueillir des informations sur les représentations des élèves.

Situation 1 : Le randonneur

Un randonneur entreprend une longue randonnée en forêt. Il suit une **piste fermée** qui lui permet donc de revenir à son point de départ à la fin de la randonnée. En suivant cette piste, il ne repasse **jamais au même endroit** de la forêt. Il ne fait qu'un seul tour de piste. Un **poste de secours** est situé **à l'intérieur de la région délimitée par la piste**. Un grand mât avec un drapeau permet au randonneur de repérer l'emplacement du poste de secours quel que soit l'endroit où il se trouve sur la piste.

Afin de se sentir en sécurité, le randonneur s'intéresse à la distance le séparant du poste de secours selon la distance qu'il a parcourue sur la piste.

On a demandé d'abord aux élèves de faire:

- 1) *Le choix d'une piste de randonnée*
- 2) *Une description verbale du phénomène*

Puis, nous leur avons demandé de produire une représentation visuelle permettant de présenter les informations contenues dans les descriptions verbales.

**Figure 1.4** Situation du randonneur issue de Hitt et Passaro (2007, p. 5)

<sup>12</sup> Cette situation est reprise par Gonzalez, Hitt et Morasse (2008), par Hitt, Gonzales-Martin et Morasse (2008), Hitt et Morasse (2009), puis par Hitt et Gonzalez-Martin (2015).

Les deux grandeurs suivantes sont à l'étude : la distance parcourue et la distance entre la personne et un point de repère choisi. Il est précisé que le parcours du randonneur forme un carré. Les élèves ont répondu aux différentes questions verbalement (par écrit) et à l'aide de représentations spontanées (schémas) avant de viser les représentations graphiques pour décrire la situation de covariation entre les deux grandeurs. Les représentations verbal, schéma et graphique semblent ainsi au premier plan au premier cycle du secondaire. Ces représentations sont impliquées également au deuxième cycle du secondaire.

Dans la continuité de ces recherches, Hitt et Morasse (2009) rapportent les résultats d'une recherche qui a été menée sur un total de treize cours et qui a pris place auprès de deux groupes de troisième secondaire<sup>13</sup> au Québec avant l'apprentissage formel du concept de fonction. Ces chercheurs visaient :

*[...] to better understand the spontaneous representations used by pupils in grades 8 and 9 in the process of learning the concept of co-variation, as a prelude to the concept of function (see Carlson, 2002). The first results are given in a master thesis (Passaro, 2007) and in Hitt and Passaro (2007). (Hitt et Morasse, p. 251-252).*

Les chercheurs ont adapté cinq situations pour développer le concept de covariation. Ils ont amené les élèves à produire des représentations schématiques, verbales, graphiques et parfois, à l'aide de matériel physique permettant l'expérimentation en lien avec la situation. Ils déterminent que ces manipulations facilitent les passages entre les représentations et vers les modèles dits institutionnels. L'utilisation de matériel et donc de l'expérimentation semble propice au développement de la covariation. D'autres études donnent accès à des modèles réduits aux élèves, par exemple Piaget (1968) pour l'étude d'un rectangle qui change de dimensions, mais qui garde le même périmètre (enfants de 6 à 12 ans visés); Vollrath (1986) avec une boule qui roule sur un

---

<sup>13</sup> Les auteurs utilisent « 9th grade » dans la version anglaise de l'article. Les élèves sont considérés au 2<sup>e</sup> cycle du secondaire et, ont au moins 15 ans. Les deux groupes étaient composés, l'un de 24 élèves et l'autre de 36 élèves.

plan incliné (enfants de 4 à 16 ans); Monk (1992) avec une échelle qui glisse le long d'un mur (pour des étudiants au collégial)<sup>14</sup>. Toutes ces recherches s'attardent au raisonnement développé par les élèves, notre objectif est autre, on s'intéresse à l'analyse de manuels scolaires. Toutefois, nous retenons le regard porté dans ces études sur les représentations afin d'analyser les situations des manuels scolaires qui sont susceptibles de développer le regard covariationnel.

### 1.5 Un intérêt pour analyser les manuels scolaires du premier cycle du secondaire

Cette recherche s'inscrit parmi les travaux portant sur les ressources mises à la disposition des enseignants, dans le cas présent, ce sera les manuels scolaires. Ces derniers sont approuvés par le MEES<sup>15</sup>. Ainsi, la porte d'entrée est l'observation des manuels scolaires institutionnalisés. Ces derniers proposent-ils des situations qui présentent un potentiel pour préparer les élèves au concept de fonction dans une perspective covariationnelle? Mais pourquoi s'intéresser aux manuels scolaires?

Les enseignants du secondaire ne sont pas obligés d'utiliser un manuel scolaire dans le cadre de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Malgré tout, ces manuels regorgent de situations portant sur les concepts prévus au programme de formation de l'école québécoise (PFEQ). En outre, les manuels devraient refléter les idées promues par ce programme, du moins en grande partie, car ils doivent être évalués par le MEES avant d'être autorisés pour l'enseignement en classe. Langlois (2015) précise qu'il faut aussi porter un regard critique sur ces manuels scolaires :

*D'un côté, « le sceau d'approbation ministériel semble apporter une certitude aux enseignants que les manuels scolaires assurent une*

---

<sup>14</sup> Nous nous appuyons ici sur l'annexe 3 présentée dans la thèse de Passaro (2015, p. A-18) et que nous avons insérée dans ce mémoire à l'annexe B.

<sup>15</sup> À l'époque des modifications de programme, le ministère se nommait ministère de l'éducation, des loisirs et du sport (MELS).

*adéquation avec l'esprit, les orientations et les contenus des programmes d'études » (Lebrun, Lenoir et Desjardins, 2004, p. 510). D'un autre côté, une recherche menée par le Comité d'évaluation des ressources didactiques (CERD) (Ministère de l'Éducation, 2001b, 2002b) révèle « une continuité inquiétante, dans les critères retenus pour évaluer des manuels scolaires réformés » (Lebrun, Lenoir et Desjardins, 2004, p. 510). (Langlois, 2015, p. 11).*

Plusieurs chercheurs (Landry, 2016; Lebrun et al., 2002; Lenoir, 2002; Tremblay et Saboya, 2020) témoignent de l'importance des manuels autant sur les pratiques enseignantes que sur les contenus à enseigner. Heyneman (2006) affirme son importance, mais aussi la pertinence d'en faire l'analyse :

*Textbooks and ancillary materials will remain an instrument of extraordinary power. They may, in fact, be the most effective of educational technologies yet invented, and there is no reason to imagine a modern educational system where textbooks do not play a central role. It is therefore fitting and proper to pay close attention to their role and function, their content, cost, and finance. (Heyneman, 2006, p. 36)*

Nous sommes aussi d'avis du rôle des manuels scolaires dans le contexte scolaire et de la pertinence d'analyser les situations disponibles pour les enseignants.

## 1.6 L'objectif et les questions de recherche

Le concept de fonction est un incontournable dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et prend place au Québec de façon explicite au deuxième cycle du secondaire. Toutefois, ce concept est complexe et pose de nombreuses difficultés aux élèves. Nous proposons un travail en amont, au premier cycle, en nous attardant aux situations disponibles pour travailler le raisonnement covariationnel dans les manuels scolaires. Nous nous inscrivons dans la lignée de plusieurs recherches qui soulignent le potentiel du raisonnement covariationnel pour la compréhension du concept de fonction. Une lecture du programme de formation de l'école québécoise permet de constater qu'au premier cycle du secondaire, la *variable* et la *dépendance* entre autres



sont à l'étude, ceux-ci sont intimement reliés à la covariation. Ce niveau scolaire présente donc un terreau fertile pour l'étude de la covariation. Nous nous interrogeons sur le potentiel des situations présentes dans les manuels scolaires du Québec pour travailler la covariation. Pour nous prononcer sur le potentiel de ces situations, nous avons besoin de nous questionner sur la façon dont on va discriminer l'aspect covariationnel dans les situations des manuels scolaires. Ainsi, considérant le rôle des manuels scolaires dans l'enseignement et l'apprentissage, l'objectif de cette recherche s'énonce comme suit :

**Analyser les collections de manuels du premier cycle du secondaire pour en dégager leur potentiel quant aux situations susceptibles de développer une approche covariationnelle de la fonction.**

Les deux questions générales de recherche peuvent s'énoncer comme suit :

- 1. Avant tout apprentissage formel du concept de fonction, quels sont les indices (questions et contexte) qui permettent de relever un potentiel covariationnel dans une situation?**
- 2. Quelles sont les caractéristiques des situations issues de manuels scolaires du premier cycle du secondaire (élèves de 12-14 ans) pour développer la covariation?**

Ces questionnements font l'objet du deuxième chapitre.

## CHAPITRE II

### CADRE CONCEPTUEL

Dans le premier chapitre a été présenté l'argumentaire portant sur l'importance, dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques. En outre, dans le contexte scolaire québécois, au deuxième cycle du secondaire, la place de ce concept est centrale dans le PFEQ. Toutefois, les élèves rencontrent de multiples difficultés. Pour préparer les élèves au concept de fonction, plusieurs chercheurs soulignent qu'une piste intéressante est celle d'un travail autour de la covariation (Carlson, 2002; Gonzalez et al., 2008; Hitt et Passaro, 2007; Passaro, 2015, 2020; Thompson et Carlson, 2017). C'est dans cette perspective que s'inscrit ce mémoire. Il poursuit les réflexions de certaines études qui se sont penchées sur les manuels scolaires québécois (Passaro, 2007; René de Cotret, 1988; Robert, 2018) comme ressource non négligeable pour les enseignants. Ces analyses révèlent que les notions de dépendance et de variation sont souvent mises de côté dans les définitions de fonction proposées dans les manuels du secondaire (Passaro, 2007 pour les manuels de la réforme des années 90; René de Cotret, 1988 pour les manuels de la réforme des années 80). Notre recherche se situe au premier cycle du secondaire et cible l'étude de plusieurs éléments introduits dès ce niveau qui servent de prélude au concept de fonction, il s'agit notamment de l'étude des relations entre les grandeurs, de l'idée de variable et de dépendance.

Nous souhaitons, dans un premier temps, repérer les situations qui présentent du potentiel pour mener un travail sur la covariation (première question de recherche). Dans un deuxième temps, une fois ces situations répertoriées, nous allons les caractériser (deuxième question de recherche). Il s'agit d'observer si les manuels scolaires proposent une diversité de situations à possible caractère covariationnel, ce qui va mener vers des mobilisations diverses et variées de la covariation. En effet,

nous visons pour la covariation, la même idée que celle présentée par Passaro (2015) pour la variable (p. 14) :

*Krysinska et Schneider (2010) considèrent que la notion de variable est une notion paramathématique, au sens où l'entend Chevallard (1991), puisqu'elle n'est pas un objet d'étude comme la notion de fonction, par exemple, mais plutôt un outil au service de l'activité mathématique. La variable se définit donc à travers les différentes situations qui la mettent en jeu. C'est pourquoi il est important de fournir aux élèves les occasions d'analyser diverses situations fonctionnelles sous l'angle de la variation.*

Comme la *variable*, nous pensons que la *covariation* est paramathématique et se manifeste sous une diversité de situations. Nous parlerons en termes de variables didactiques pour étudier les différentes caractéristiques des situations (voir 2.4). Pour mener à bien cette analyse, nous avons besoin d'un cadre qui s'appuie, d'une part, sur la reconnaissance de la mobilisation d'un possible raisonnement covariationnel dans une situation et, d'autre part, sur l'identification de différentes variables didactiques. Dans une première section, nous allons nous attarder sur ce que signifie raisonner de façon covariationnelle en reprenant différentes recherches qui se sont intéressées à ce raisonnement. Il ressort de ces études un intérêt à s'intéresser aux grandeurs en jeu et à leurs relations (qui fera l'objet de la deuxième section) et à s'attarder aux représentations (troisième section). Finalement, dans une quatrième section seront présentées différentes variables didactiques qui peuvent être présentes dans une situation à caractère covariationnel.

## 2.1 Les définitions de covariation et d'approche covariationnelle

Le terme « covariation » apparaît dans plusieurs recherches. Il est cependant difficile de le définir et de bien cerner ce que le travail sur la covariation englobe. Dans sa thèse doctorale, Passaro (2015) revient sur plusieurs travaux dont ceux de Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, et Hsu (2002), Carlson, Larsen, et Jacobs (2001), Gonzalez-Martin, Hitt

et Morasse (2008), Hitt et Morasse (2009), Monk (1992), Oehrtman, Carlson, et Thompson (2008). Piaget, Grize, Szeminska, et Bang (1968) et Saldanha et Thompson (1998). Elle regroupe plusieurs idées entourant la conception et la mise en œuvre d'activités mathématiques portant sur la covariation et sur le déploiement d'un raisonnement covariationnel chez les élèves ou les étudiants. De leur côté, et tel que mentionné dans la section 1.1.1, Thompson et Carlson ont fait une synthèse des travaux portant sur la covariation en 2017. Il s'avère pertinent d'exposer brièvement les éléments importants relevés dans ces différentes publications que nous exposerons en terminant par l'étude menée par Passaro (2015, 2020).

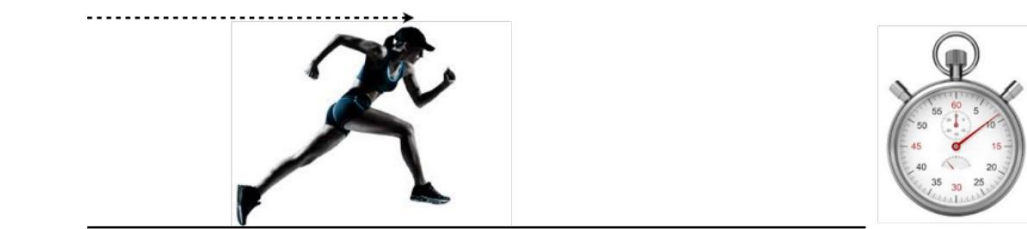
Les travaux en didactique des mathématiques s'intéressant au « raisonnement covariationnel » remontent au début des années 1990 avec Smith, Confrey et Thompson dans le cadre de l'enseignement-apprentissage des fonctions. Cependant, les approches de ces chercheurs étaient légèrement différentes en ce qui a trait à la signification de la covariation (Thompson et Carlson, 2017, p. 424) :

*Confrey characterized covariation in terms of coordinating two variables' values as they change. Thompson characterized covariation in terms of conceptualizing individual quantities' values as varying and then conceptualizing two or more quantities as varying simultaneously.*

L'approche de Confrey se base sur l'observation de la coordination entre les deux « variables » alors que la vision de Thompson et Carlson observe la variation d'une grandeur et l'associe ensuite à la variation d'une ou plusieurs autres grandeurs. Cette distinction semble subtile, mais elle a toute son importance, car l'approche de Smith et Confrey implique automatiquement une perspective sur les deux grandeurs qui varient ensemble donc qui covarient (Confrey et Smith, 1994, p. 337) : « *The elements and structure of the domain and range are cogenerated through simultaneous but independent actions, creating a covariation model of function* ». L'approche de Thompson amène une réflexion sur une grandeur qui varie puis une observation sur une deuxième grandeur qui varie sans tenir compte de la relation avec la première.

### 2.1.1 Le raisonnement quantitatif de Thompson

Dans son article de 2017, Thompson et Carlson présentent l'approche qu'il nomme le « *Quantitative reasoning* ». Comme mentionné dans le chapitre 1, certains chercheurs (dont Thompson et Saldhana) utilisent le terme « quantités » pour décrire les grandeurs. La figure suivante (voir figure 2.1) présente l'exemple utilisé par l'auteur pour exprimer sa vision de la covariation.



**Figure 2.1** Situation de la coureuse tirée de Thompson et Carlson (2017, p. 426)

Dans le raisonnement quantitatif de Thompson et Carlson, on raisonne de manière covariante lorsqu'on envisage deux valeurs de deux quantités qui varient et on les envisage simultanément. Dans l'exemple présenté dans la figure 2.1, on s'attarde à la variation de la distance parcourue par la coureuse selon un point fixe et à la variation du temps écoulé comme illustré par le chronomètre. Pour Saldanha et Thompson (1998), on forme un « *multiplicative object* » à partir de deux quantités lorsqu'on associe les attributs de ces deux quantités pour en faire un nouvel objet conceptuel qui est simultanément l'un et l'autre. Le « *multiplicative object* » qui s'en dégage dans l'exemple de la figure 2.1 est celui de l'étude de la vitesse (distance parcourue selon le temps écoulé).

Comme mentionné brièvement au premier chapitre, le terme « quantité » est difficile à séparer de l'idée de valeurs numériques en français. Bien que Thompson affirme qu'il est possible d'observer qualitativement les variations des grandeurs, la majorité de ses exemples visent l'interprétation quantitative du taux de variation comme objet multiplicatif. Une confusion langagière peut aussi survenir avec le terme « *multiplicative* » utilisé par Thompson et Carlson, il doit être en fait compris comme « objets multiples » ou « plusieurs objets » combinant les valeurs des variables simultanément. Nous parlerons dans ce cas plutôt d'objet à multiples grandeurs.

Thompson et Carlson (2017) s'appuient sur les études menées par Castillo-Garsow (2010, 2012) qui soulignent diverses difficultés chez les élèves pour revoir le cadre d'analyse proposé par Carlson (2002). Le travail de Castillo-Garsow les a amenés à distinguer différents types de variation lors de l'observation d'une grandeur unique. Thompson et Carlson caractérisent les raisonnements des élèves selon différents niveaux de compréhension des intervalles de l'objet à multiples grandeurs. Nous pouvons remarquer que ces auteurs ont une vision développementale de la covariation. Ils définissent les différents niveaux<sup>16</sup> pour le raisonnement covariationnel comme suit (Thompson, p. 441) :

*It [Major Levels of Covariational Reasoning] retains emphases on quantitative reasoning and multiplicative objects (Thompson) and coordination of changes in quantities' values (Confrey, Carlson) and adds ways in which an individual conceives quantities to vary (Castillo-Garsow). It also removes rate of change as part of a covariational framework. For students to conceptualize rate of change requires that they reason covariationally, but it also requires conceptualizations that go beyond covariational reasoning, such as conceptualizations of ratio, quotient, accumulation, and proportionality.*

---

<sup>16</sup> Nous ne nous attarderons pas à présenter ces niveaux pour le raisonnement covariationnel dû à notre objet d'étude qui porte sur l'identification des variables didactiques des situations des manuels scolaires qui favorisent le développement d'un raisonnement covariationnel. Nous ne sommes pas centrés sur l'élève mais sur les situations.

Afin d'illustrer l'apport des études de Castillo-Garsow dans leur modèle, Thompson et Carlson utilisent le raisonnement d'un élève qui reconnaît qu'une voiture se déplace de 65 miles en une heure par l'observation de deux couples distincts (distance parcourue et temps écoulé). L'élève reconnaît qu'il existe une relation entre les couples de valeurs, dépassant ainsi le niveau : *no coordination*. Toutefois son raisonnement ne lui permet pas de concevoir que la voiture peut prendre d'autres valeurs de vitesse durant cette période d'une heure, correspondant au niveau : *precoordination to coordination of values*. Ainsi, ce cadre s'intéresse au développement d'un raisonnement covariationnel par la coordination entre plusieurs grandeurs lors de l'étude de « grands intervalles » vers des intervalles de plus en plus petits de l'objet à multiples grandeurs pour tendre alors vers une variation simultanée et instantanée (*smooth continuous covariation*).

La fin de la citation précédente met de l'avant la nécessité qu'accordent les auteurs au raisonnement covariationnel pour la conceptualisation du taux de variation. Ils spécifient que, pour cette conceptualisation, le raisonnement covariationnel doit être associé aux idées de : « ratios, quotients, accumulations and proportionality » comme nous l'avons présenté dans la section 1.2.1 en abordant les éléments présents au premier cycle du secondaire (PFEQ) pour un travail sur la covariation.

### 2.1.2 L'approche covariationnelle de Passaro

Dans son travail doctoral, Passaro (2015) s'intéresse à ce qu'elle définit comme l'approche covariationnelle :

*Une approche covariationnelle est une manière de travailler la fonction en situation. Elle consiste en l'étude approfondie des variations concomitantes de deux grandeurs par l'intermédiaire d'un travail sur les accroissements concomitants de ces deux grandeurs dans des situations dans lesquelles on s'intéresse à déterminer comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante varie. (p. 53)*

Passaro reprend les actions mentales développées par Carlson (2002) pour en dégager treize « unités de raisonnement » qui permettent d'atteindre l'étude du taux de variation instantané. Sa définition de covariation dans une approche covariationnelle provient des travaux de Krysinska et Schneider (2010, p. 35-36) :

*Par ailleurs, associer l'idée de dépendance à celle de variation ne peut se concevoir sans l'existence d'une double variation concomitante : celle des deux variables dépendantes l'une de l'autre.*

C'est à travers cette idée « d'une double variation concomitante » qu'il apparaît possible d'étudier la covariation, importante pour le concept de fonction. La variation peut être observée à partir des deux grandeurs, mais le préfixe « co » indique la relation qui coexiste et qui se codéveloppe en considérant les deux grandeurs ensemble. De plus, Passaro met l'accent sur le déploiement d'un raisonnement en situation. Les caractéristiques des situations (mise en contexte, questions, matériel disponible) offrent un support pour les élèves afin d'étudier la relation entre les deux grandeurs.

## 2.2 L'importance d'un regard sur les grandeurs et sur leurs interactions pour le développement d'un raisonnement covariationnel

Malgré les différences énoncées dans les recherches précédentes portant sur la covariation, une chose demeure, il est important d'avoir un regard sur les grandeurs et sur les relations entre ces grandeurs. Le cadre d'analyse de Passaro (2015, 2020) est composé d'unités de raisonnement qui proviennent d'observations relatives à l'expression de raisonnements d'élèves et d'étudiants. L'objectif de Passaro est d'atteindre la conceptualisation de la notion de dérivée. Notre objectif est autre, il s'agit pour nous de dégager les caractéristiques des situations porteuses d'un raisonnement covariationnel ainsi que de cerner le questionnement permettant le déploiement de ce raisonnement. Les cinq premières unités de raisonnement (sur les treize) s'avèrent



intéressantes pour notre travail. Ces unités ciblent le travail autour des grandeurs en jeu et de leurs relations.

### 2.2.1 Les différentes unités de raisonnement pour le déploiement d'un raisonnement covariationnel

Les travaux de Carlson (1998, 2001, 2002) s'intéressent à la covariation ainsi qu'à la compréhension du concept de fonction. Ses différentes recherches l'ont amenée à caractériser le raisonnement covariationnel des étudiants dans les cours de calcul différentiel et intégral. Carlson (2002) établit une liste de cinq actions mentales qui ont été reprises par plusieurs auteurs (entre autres : Saldanha, Thompson), mais aussi par Passaro (2015, p. 56) qui rapporte ainsi la contribution de Carlson :

*[...] après avoir identifié les lacunes des élèves à percevoir les aspects covariants de la fonction (Carlson, 1998), Carlson s'est engagée dans une investigation de l'idée de covariation dans l'optique d'une restructuration des curricula scolaires. Étant l'une des pionnières de la recherche sur cet objet en didactique des mathématiques, elle s'est appuyée sur ses propres connaissances afin de développer « The Covariation Framework ».*

Passaro (2007, 2015, 2020) poursuit le travail de Carlson et propose une transformation de ce cadre pour permettre d'appréhender le déploiement d'un raisonnement covariationnel chez les élèves du secondaire. Elle reprend les cinq actions mentales de Carlson (2002) et élabore treize unités de raisonnement qui sont rattachées à ces actions mentales (voir figure 2.2). Ces unités vont lui permettre de caractériser les raisonnements d'élèves n'ayant pas été initiés au calcul différentiel. Le cadre a été également construit en ciblant les « tâches associées à une approche covariationnelle de la fonction » comme le précise Passaro (2015, p. 57) :

*Le cadre d'analyse du raisonnement covariationnel a été créé dans le but à la fois de constituer un outil d'analyse du raisonnement covariationnel mobilisé par des étudiants et d'offrir une structure de base pour la construction d'activités d'enseignement favorisant le développement de l'habileté à considérer la nature covariante de relations fonctionnelles. (c'est nous qui soulignons).*

Ainsi, son cadre n'est pas uniquement utile pour situer et décrire le raisonnement covariationnel des élèves et étudiants, il permet également l'analyse d'activités d'enseignement comme celles qui sont d'intérêt pour ce mémoire, les situations provenant des manuels scolaires. C'est en observant attentivement le questionnement qui sollicite le déploiement des cinq premières unités d'un raisonnement covariationnel que nous pourrions relever le potentiel des situations quant à leur possible mobilisation d'un raisonnement covariationnel.

| Cadre de Carlson |                                                                                                | Notre cadre |                                                                                                                                                                                  |
|------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Action mentale   | Description de l'action mentale                                                                | Unité       | Description de l'unité de raisonnement                                                                                                                                           |
| AM1              | Coordonner la valeur d'une variable avec les changements de l'autre variable                   | U1          | Identifier la grandeur indépendante et la grandeur dépendante                                                                                                                    |
|                  |                                                                                                | U2          | Identifier la présence de variations concomitantes de deux grandeurs                                                                                                             |
| AM2              | Coordonner la direction du changement d'une variable avec le changement de l'autre variable    | U3          | Qualifier le changement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente                                                                                      |
| AM3              | Coordonner la « quantité » de changement d'une variable avec le changement de l'autre variable | U4          | Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante                                               |
|                  |                                                                                                | U5          | Déterminer les différentes phases de variation (une phase est un intervalle de la grandeur indépendante sur lequel la « façon de varier » de la grandeur dépendante est la même) |
|                  |                                                                                                | U6          | Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants <b>de plus en plus petits</b> de la grandeur indépendante                 |
|                  |                                                                                                | U7          | Interpréter le changement des accroissements en termes de taux de variation et nommer la grandeur associée selon le contexte (vitesse, débit etc.)                               |

|     |                                                                                                                                                           |     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| AM4 | Coordonner le taux de variation moyen de la fonction pour des accroissements constants de la variable indépendante                                        | U8  | Quantifier un accroissement de la grandeur dépendante pour un accroissement précis de la grandeur indépendante                                                                                                                                                                                          |
|     |                                                                                                                                                           | U9  | Quantifier un accroissement de la grandeur dépendante pour un accroissement unitaire de la grandeur indépendante                                                                                                                                                                                        |
|     |                                                                                                                                                           | U10 | Quantifier le rapport entre l'accroissement correspondant (taux moyen) à un accroissement précis de la grandeur indépendante et ce dernier                                                                                                                                                              |
|     |                                                                                                                                                           | U11 | Quantifier le rapport entre les accroissements correspondants (taux de variation moyen) à des accroissements de plus en plus petits de la grandeur indépendante et ces derniers                                                                                                                         |
| AM5 | Coordonner le taux de variation instantané de la fonction avec le changement continu de la variable indépendante sur l'ensemble du domaine de la fonction | U12 | Déterminer une valeur de la grandeur indépendante pour laquelle on connaît la limite du rapport entre l'accroissement correspondant à un accroissement précis de la grandeur indépendante et ce dernier, lorsque l'accroissement de la grandeur indépendante tend vers 0 (taux de variation instantané) |
|     |                                                                                                                                                           | U13 | Déterminer, pour une valeur de la grandeur indépendante donnée, la limite du rapport entre l'accroissement correspondant à un accroissement précis de la grandeur indépendante et ce dernier, lorsque l'accroissement de la grandeur indépendante tend vers 0 (taux de variation instantané)            |

**Figure 2.2** Cadre sur les unités de sens dégagées par Passaro (2015, p.89) et s'appuyant sur les actions mentales de Carlson (2002)

Ces descriptions des unités de raisonnement permettent d'obtenir des informations générales sur le déploiement de la covariation chez les élèves, mais cela nous donne également des indications sur les éléments à observer dans l'analyse d'une situation pour ainsi juger de son potentiel pour le possible développement d'un raisonnement covariationnel. Pour ce mémoire, nous nous intéressons principalement aux quatre premières actions mentales (AM1, AM2, AM3 et AM4), aux cinq premières unités de raisonnement associées aux trois premières actions mentales, de U1 à U5, et aux unités U8 et U9 reliées à AM4. Dans notre étude, nous n'approfondirons pas le questionnaire associé aux unités U6 et U7 (de AM3) et U10 et U11 (de AM4) qui ciblent une analyse autour d'accroissements constants de plus en plus petits, du taux de variation et du taux de variation moyen. Les unités U12 et U13 s'attardent à la limite et donc au passage au taux de variation instantané et donc vers la dérivée. Ces unités de raisonnement (U6-U7 et de U10 à U13) dépassent l'objectif de ce mémoire.

Comme nous l'avons précisé, ce cadre a été conçu afin de décrire l'activité des élèves du deuxième cycle du secondaire (15 à 18 ans). Ces éléments (quantification du taux de variation instantané), bien que pertinents dans une approche covariationnelle, dépassent un raisonnement qualifié de « préalable aux fonctions » qui se situe plutôt au premier cycle du secondaire. Pour les élèves du premier cycle (12 à 14 ans), l'importance est de reconnaître les caractéristiques de variations globales de la situation.

Il se dégage de ce cadre l'importance de s'attarder aux grandeurs pour approcher le raisonnement covariationnel. De plus, Passaro (2015) précise que les premières unités servent d'appui aux suivantes. La chercheuse illustre ces liens entre les unités à l'aide d'une métaphore portant sur un arbre. Les deux premières unités (U1 et U2) représentent les racines du raisonnement tandis que les deux suivantes (U3 et U4) sont ce qui représente le tronc de l'arbre. Les unités U5 à U9 sont quant à elles des branches résultant du prolongement des unités précédentes.

Afin d'illustrer le possible déploiement des unités de raisonnement de U1 à U5 et de U8 à U9, nous utiliserons la situation de *La bouteille* et celle de *La bougie* (voir 1.2.2). La situation de la bouteille est rapportée dans plusieurs recherches portant sur l'étude de la covariation (Bell et Janvier, 1981; Janvier, 1981; Janvier et Pelletier, 2003; Passaro, 2015; Thompson et Carlson, 2017) avec certaines modifications selon le chercheur. Mais avant, nous proposons une discussion autour des unités de raisonnement telles que présentées par Passaro (2015, 2020). En effet, un ajustement de son cadre d'analyse nous est apparu nécessaire afin de l'adapter à l'analyse des situations tirées de manuels scolaires du premier cycle du secondaire, ce cadre sera revu lors de la résolution de la situation de la bouteille et celle de la bougie.

### 2.2.2 Discussion autour des unités de raisonnement retenues dans notre étude

Passaro (2015, 2020) organise ses unités de raisonnement autour de ce qu'elle nomme trois points de vue sur la fonction tirés de Chorlay (2007) et Vanderbrouck (2011) : *global, local et ponctuel*. Ainsi, Passaro regroupe les unités de raisonnements selon différentes questions qui mènent vers un point de vue global ou local ou ponctuel. Dans ses travaux, Passaro s'intéresse à l'articulation entre ces unités de raisonnement à travers l'observation d'élèves et étudiants lors de la résolution de situations à caractère covariationnel.

La première question cible un raisonnement qualifié de « *global* », il regroupe les trois premières unités de raisonnement (U1 à U3) (2015, p. 91) : « *Comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente ?* ». La deuxième question est, quant à elle, qualifiée de « *local qualitatif* » (2015, p. 92) : « *Comment se comportent les accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont constants ?* ». Les quatre unités de raisonnements (U4 à U7) relèvent les observations des accroissements de la grandeur conséquente pour des intervalles de la grandeur prédominante de plus en plus petits. L'objectif de ces unités est de décrire qualitativement les variations entre les grandeurs, et ce, de plus en plus finement.

Les unités (U8 à U11) ciblent quant à elles un raisonnement qualifié de « *local quantitatif* » et les unités (U12 et U13) de « *ponctuel* ». Comme nous l'avons déjà précisé, le raisonnement ponctuel ne sera pas retenu dans notre étude.

Le tableau 2.1 présente, pour les points de vue global, local qualitatif et local quantitatif, les unités de raisonnement qui leur sont associées ainsi que les questions les supportant.

**Tableau 2.1** Les points de vue global et local ainsi que le questionnement associé aux unités de raisonnement U1 à U5.

| Point de vue      | Questionnement                                                                                                                                           | Unités de raisonnement mobilisées                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Global            | <i>« Comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente? »</i>                                                               | U1 : Identifier la grandeur dépendante et indépendante                                                                                                                                                                                                                               |
|                   |                                                                                                                                                          | U2 : Identifier la présence de variations concomitantes des deux grandeurs                                                                                                                                                                                                           |
|                   |                                                                                                                                                          | U3 : Qualifier le changement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente                                                                                                                                                                                     |
| Local qualitatif  | <i>« Comment se comportent les accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont constants? »</i>     | U4 : Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante<br>U5 : Déterminer les différentes phases de variation                                                                                       |
| Local quantitatif | <i>« Quelle est la valeur du rapport des accroissements concomitants des deux grandeurs pour un certain accroissement de la grandeur indépendante? »</i> | U8 Quantifier un accroissement (ou un décroissement) de la grandeur dépendante pour un accroissement précis de la grandeur indépendante<br>U9 Quantifier un accroissement (ou un décroissement) de la grandeur dépendante pour un accroissement unitaire de la grandeur indépendante |

Passaro (2020) met de l'avant que le déploiement du raisonnement covariationnel chez des élèves de 15 à 18 ans passe par un mouvement de va-et-vient entre les différentes unités dont certaines ont une grande importance, ce sont les unités racines :

« L'organisation des unités de raisonnement montre que, bien qu'il n'y ait pas de hiérarchie développementale, certaines unités apparaissent en soutenir d'autres. Par exemple, la qualification du changement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente (U3) nous apparaît s'appuyer sur l'identification préalable de ces grandeurs (U1). » (p. 467)

Ainsi, le développement du raisonnement covariationnel semble nécessiter des retours fréquents aux premières unités de raisonnement. L'identification des grandeurs (U1) et du lien de dépendance entre ces grandeurs (U2) ne semblent pas être des étapes qui peuvent être contournées ni même être réglées au départ pour ensuite passer à autre chose. L'engagement des élèves dans un processus de modélisation implique une prise en compte des phénomènes observés et par conséquent une prise en compte de l'ensemble des grandeurs mises en jeu et des relations entre ces grandeurs. Ainsi, les deux unités U1 et U2 apparaissent de manière récurrente et sont présentes tout au long de la résolution d'une situation. L'unité U3 qualifie, quant à elle, la variation de la grandeur dépendante lorsque l'on a choisi quelle est la grandeur indépendante sur laquelle on s'appuie. Cette qualification est ici globale, elle permet d'établir une tendance générale sans observer finement les variations concomitantes.

Les unités U4 et U5 ainsi que les unités U8 et U9 sont mobilisées lorsqu'on précise la relation entre les deux grandeurs observées. En considérant des accroissements constants de la grandeur indépendante, on regarde comment varie la grandeur dépendante. Ainsi, le raisonnement s'appuie sur des accroissements constants de la grandeur sur laquelle on s'appuie (indépendante) pour qualifier les changements de l'autre grandeur (conséquence ou dépendante). Si nous prenons par exemple deux grandeurs qui augmentent toutes les deux, ces unités seront mobilisées lorsque l'on cherchera à déterminer comment s'expriment ces augmentations. Trois cas sont alors possibles, pour des accroissements constants de la grandeur sur laquelle on s'appuie (indépendante), les accroissements des valeurs de la grandeur dépendante sont soit 1) constants ou nuls, soit 2) ils diminuent soit 3) ils augmentent. Ce raisonnement est associé avec l'unité U5 qui est axé sur les phases de variation. Les phases présentent des changements de variation. Il s'agit de déterminer l'intervalle sur lequel lors d'accroissements constants de la grandeur indépendante, on constate par exemple des accroissements constants de la grandeur dépendante puis l'intervalle pour lequel les accroissements de la grandeur dépendante sont par exemple de plus en plus petits. Pour

l'analyse de manuels scolaires, nous nous interrogerons sur le regard suscité par la situation pour supporter la possible mobilisation d'un raisonnement covariationnel : s'agit-il d'un raisonnement global et/ou local qualitatif et/ou local quantitatif ? Un décodage en termes d'unités de raisonnement pourra venir en support à l'occasion quand ce sera possible de le faire.

Dans le travail de Passaro, les unités de raisonnement U1 et U2 s'attardent à l'étude de deux grandeurs qui sont déjà fixées. Il n'y a pas de réflexion sur la possibilité d'avoir plus de deux grandeurs pour l'étude d'un phénomène. Janvier et Pelletier (2003), qui ciblent autant le premier que le deuxième cycle du secondaire, vont plus loin en proposant d'amener les élèves du premier cycle à identifier toutes les grandeurs présentes dans une situation :

*[...] les élèves qui arrivent en quatrième secondaire peuvent avoir la conception qu'il n'y a que deux grandeurs dans n'importe quelle situation et ne voient donc pas la raison d'être des paramètres. [...] Pour remédier à cette lacune, nous prenons donc l'habitude de s'interroger, au début de chaque situation, sur les grandeurs qui sont présentes dans la situation, que nous les considérons ou pas. Dans la vie de tous les jours, rares sont les situations où il n'y a que deux grandeurs à considérer. (p. 7)*

Ainsi, ces interrogations, d'après les auteurs, peuvent couvrir plus largement la situation dans l'objectif de sensibiliser les élèves sur la possibilité d'observer plus que deux grandeurs pour un même phénomène. On peut amener les élèves à constater que pour l'étude du phénomène, il faut choisir deux grandeurs, les autres jouant alors le rôle de paramètres. Comme évoqué précédemment, il s'agit d'un choix entre les grandeurs possibles pour observer une relation entre deux d'entre elles. De plus, une réflexion peut être laissée aux élèves sur la grandeur qui sera prédominante (variable indépendante) et la grandeur qui sera conséquente (variable dépendante). Au deuxième cycle du secondaire, les grandeurs sont souvent choisies afin d'obtenir une relation fonctionnelle tel que le précisent Krynska et Schneider (2010, p.41) :



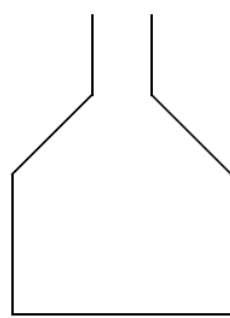
*La conceptualisation d'une variation en termes de fonction suppose l'identification de deux variables dont l'une sera choisie comme variable indépendante et l'autre comme variable dépendante de la première.*

Au premier cycle du secondaire, on peut ouvrir cette étude plus généralement aux relations. Ainsi, si l'on s'intéresse à la relation entre les grandeurs, il est possible d'observer des relations non-fonctionnelles (avec des représentations non-fonctionnelles).

L'étude des relations fait partie du programme du premier cycle du secondaire et prend place avant l'étude des fonctions (les fonctions étant des relations particulières). Cette distinction est parfois difficile à saisir et apporte des confusions surtout sur le plan des représentations graphiques qui peuvent être complètement différentes quand on inverse les grandeurs associées sur chacun des axes.

### 2.2.3 Une exemplification de la nature du raisonnement mobilisé et des unités de raisonnement sollicitées dans la situation de la bouteille et dans celle de la bougie

En considérant les remarques précédentes, il est possible de proposer un énoncé pour la situation de la bouteille qui ouvre aux réflexions discutées dans la précédente section : présence de plus que deux grandeurs possibles et possibilité de choisir les grandeurs prédominante (indépendante) et conséquente (dépendante) (voir figure 2.3).

|                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Énoncé du problème</b></p> <p>Nous avons une bouteille qui a la forme illustrée ci-contre.</p> <p>Quelles sont les grandeurs en jeu? (Identifies-en au moins 3)</p> <p>Parmi les grandeurs précédentes, choisis-en 2. Comment ces grandeurs interagissent-elles?</p> |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|

**Figure 2.3** Énoncé de la bouteille adaptée pour le premier cycle du secondaire.

Cet énoncé rejoint les recommandations de Janvier et Pelletier (2003) qui proposent une version similaire de l'activité :

*Demander aux élèves d'identifier les grandeurs qui sont présentes dans cette situation. Il est primordial que ce soient les élèves eux-mêmes qui énumèrent les grandeurs présentes afin de se préparer graduellement à l'étude des paramètres qui sera faite en quatrième secondaire. On peut ici s'attendre à des grandeurs diverses dont : le niveau d'eau dans la bouteille, le diamètre de la bouteille, le volume d'eau dans la bouteille, le rayon de la bouteille, la surface d'eau, la circonférence de la bouteille (p. 46).*

Ainsi, avant même d'observer la relation entre deux grandeurs, l'idée est de définir quelles grandeurs pourraient être observées dans la situation. Si nous reprenons les unités de sens de Passaro (2015), nous pouvons ajouter une unité préalable à celles proposées : U0 : Identifier plusieurs grandeurs possibles d'une situation (au moins 3). Ainsi, comme pour les unités précédentes, une question portant sur l'identification des grandeurs (U0) peut être formulée : *Quelles sont les grandeurs dont on peut étudier la variation dans cette situation ?*

Comme énoncé précédemment, l'intention est de faire ressortir qu'il est possible de choisir deux grandeurs parmi les grandeurs disponibles identifiées lors de l'unité de raisonnement U0 afin d'en étudier la relation (fonctionnelle ou non). Les autres grandeurs doivent être fixées pour permettre l'étude de la variation des deux grandeurs choisies (comme le diamètre de la bouteille par exemple), ce sont les paramètres de la situation. Pour le remplissage de la bouteille, nous allons nous attarder aux deux grandeurs : la hauteur du niveau de liquide et le volume de liquide dans la bouteille.

Ainsi, après avoir choisi de fixer ces deux grandeurs, une réflexion prend place autour de la relation entre ces deux grandeurs. Il est possible de demander aux élèves « Quelle est la relation entre ces deux grandeurs ? Sur laquelle des deux grandeurs veux-tu fixer ton regard pour ensuite, déduire à partir du comportement de celle-ci, le comportement de l'autre grandeur ? ». Nous sollicitons ici le raisonnement global. Ces questions amènent à décider laquelle des deux grandeurs sera la grandeur prédominante (indépendante) et en conséquence laquelle sera la grandeur conséquente (dépendante). Il s'agit ainsi de répondre à la question proposée par Passaro (2015) pour le raisonnement qualifié de global : « *Comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente ?* ». Dans le cas de la situation de la bouteille, deux formulations sont naturellement possibles. L'une d'elles est : « Plus le niveau de l'eau augmente et plus le volume augmente » (grandeur prédominante : niveau de l'eau et grandeur conséquente : volume de l'eau). L'autre étant « Plus le volume augmente et plus le niveau de l'eau augmente » (ici le volume est la grandeur prédominante et le niveau est la conséquente). Se met en place à cette étape une formulation de la relation de la forme « Plus.... plus » ou « Plus.... moins ». Cette formulation repose sur l'interprétation du schéma de la bouteille.

Nous pouvons remarquer que dans le cas de cette situation, les grandeurs sont interchangeables,<sup>17</sup> car nous pouvons étudier autant le volume selon la hauteur que la

---

<sup>17</sup> La caractéristique « grandeurs interchangeables » sera une des variables didactiques que nous allons considérer dans l'étude du raisonnement covariationnel.

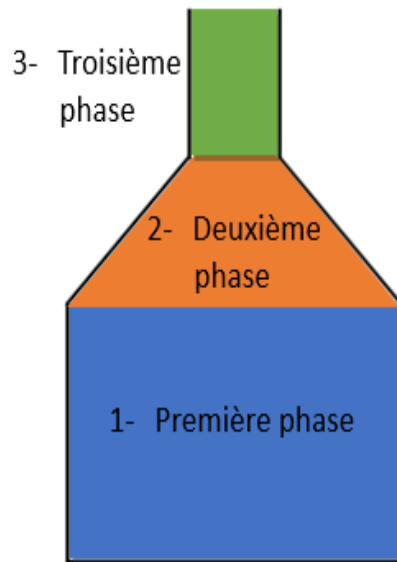
hauteur selon le volume. Ainsi, cette situation à travers les questions posées ouvre la possibilité d'une étude de relations avec une grandeur prédominante non imposée<sup>18</sup>. En effet, il est possible pour certaines situations d'énoncer la relation de deux façons de manière naturelle. Dans cette situation, on peut observer que le sens de variation ne change pas (toujours croissant). Toutefois, il peut arriver que ce regard sur le sens de variation amène à distinguer des phases dans lesquelles le sens de variation n'est pas le même (il s'agit ici de l'unité de raisonnement U5). Nous faisons donc le constat que dans la mobilisation de ce raisonnement global, les unités de raisonnement U1, U2 et U5 peuvent se manifester, mais pas dans un ordre précis. De plus, nous pouvons remarquer que, dans le cas de la bouteille, les deux relations sont fonctionnelles<sup>19</sup>. Ces caractéristiques de la situation sont intéressantes, car elles permettent différentes interprétations valides de la covariation qui reposent sur la grandeur prédominante choisie.

Poursuivons l'étude de la situation de la bouteille et supposons que nous choisissons d'observer le volume de l'eau (grandeur prédominante, indépendante) et d'en déduire le niveau de liquide (grandeur conséquente, dépendante). Une étude plus fine sur la façon de covarier des deux grandeurs amène à distinguer au moins trois phases (voir figure 2.4). On y observe alors le niveau de liquide dans la bouteille en considérant des accroissements constants du volume :

---

<sup>18</sup> La caractéristique « grandeurs imposées » sera une autre variable didactique retenue.

<sup>19</sup> Nous faisons face ici à une autre variable didactique quand les grandeurs sont interchangeables, on regarde si la relation est fonctionnelle.



**Figure 2.4** Séparation de la bouteille en trois phases de variation.

- 1- Dans la première phase de la bouteille (au bas de la bouteille, en bleu), pour un accroissement constant du volume de liquide dans la bouteille, il y aura un accroissement constant du niveau (hauteur) du liquide. Ceci se traduit dans la représentation graphique par une ligne droite ascendante.
- 2- Dans la deuxième phase (orange), pour un accroissement constant du volume de liquide (toujours le même pour cette phase), les accroissements du niveau de la hauteur du liquide seront de plus en plus grands. En utilisant des accroissements du volume identiques à ceux de la phase 1, il est possible de déterminer que les accroissements de la hauteur du liquide sont plus grands que ceux de la première phase. Dans la représentation graphique, ceci se traduit par une courbe ascendante ouverte vers le haut.
- 3- La troisième phase (verte) est cylindrique comme pour la première phase, impliquant un accroissement constant du niveau du liquide en fonction d'un accroissement constant du volume. En utilisant les mêmes accroissements du

volume pour toute la bouteille, il est possible de déterminer que les accroissements sont plus grands que ceux des phases 1 et 2. Nous retrouvons ici une ligne droite ascendante.

Se met ainsi en place ce que Passaro (2015, 2020) nomme le raisonnement local qualitatif, il s'agit de regarder « Comment se comportent les accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont constants ? ». Les unités de raisonnement U4 et U5 sont associés à ce raisonnement : Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante (U4) et Déterminer les différentes phases de variation (U5). Nous pouvons remarquer que ces unités ne s'expriment pas dans un ordre précis, elles sont entremêlées.

Dans la situation de la bougie (voir 1.2.2), nous avons vu qu'il est possible de mobiliser les unités de raisonnement U8 et U9 qui sont reliées à un raisonnement local quantitatif. Il s'agit pour U8 de Quantifier un accroissement (ou un décroissement) de la grandeur dépendante pour un accroissement précis de la grandeur indépendante et pour U9 de Quantifier un accroissement (ou un décroissement) de la grandeur dépendante pour un accroissement unitaire de la grandeur indépendante. La table de valeurs présente pour les quatre premières valeurs de la grandeur indépendante (le nombre d'heures écoulées depuis que la bougie est allumée) des accroissements constants d'une heure (unitaire). Il est alors possible de trouver les valeurs correspondantes pour la grandeur dépendante (la longueur de la bougie) en utilisant le fait que la bougie mesure 20 cm au départ et qu'elle fond à un rythme de 1,5 cm/h (qui représente le taux de variation). Se met ainsi en place un raisonnement local quantitatif qui est unitaire pour les quatre premières valeurs de la grandeur indépendante, mais qui ne l'est plus par la suite.

Le tableau 2.2 propose, suite à la résolution de la situation de la bouteille, un découpage des unités de raisonnement un peu différent de ce qui est proposé par Passaro (2015, 2020).

**Tableau 2.2** La nature du raisonnement et le questionnement associé aux unités de raisonnement U1 à U5 et de U8 et U9

| Point de vue | Unités de raisonnement mobilisées                                                                                                                                                                | Questions possibles                                                                                                                                                                                                                                                                             | Exemples de verbalisations possibles                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Global       | U0 : Identifier deux grandeurs à observer parmi d'autres grandeurs                                                                                                                               | « <i>Quelles sont les grandeurs observables dans la situation ?</i> »<br>« <i>Quelles sont les deux grandeurs choisies ?</i> »                                                                                                                                                                  | Sont énumérées différentes grandeurs (pas de verbalisation requise ici)<br><br>Deux grandeurs sont choisies pour en observer la relation                                                                                                                                                                |
|              | U1 : Identifier la grandeur dépendante et indépendante<br><br>U2 : Identifier la présence de valeurs concomitantes des deux grandeurs<br><br>U5 : Déterminer les différentes phases de variation | « <i>Quelle est la relation entre ces deux grandeurs ? Sur laquelle des deux grandeurs veux-tu fixer ton regard et déduire à partir de celle-ci le comportement de l'autre grandeur ?</i> ».<br><br>« <i>Comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente ?</i> » | <i>Plus les valeurs de la grandeur indépendante augmentent :</i><br><br><i>1- plus les valeurs de la grandeur dépendante augmentent</i><br><br><i>2- plus les valeurs de la grandeur dépendante diminuent</i><br><br><i>3- les valeurs de la grandeur dépendante restent constantes</i>                 |
|              | U4 : Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante                                                          | « <i>Comment se comportent les accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont constants ?</i> »                                                                                                                                           | <i>Trois cas sont possibles lorsque les valeurs des deux grandeurs augmentent :</i><br><br><i>Pour des accroissements constants des valeurs de la grandeur indépendante :</i><br><br><i>-On a des accroissements constants ou nuls des valeurs de la grandeur dépendante (droite dans le graphique)</i> |

|                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                          | U5 : Déterminer les différentes phases de variation                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                 | <p><i>-On a des accroissements de plus en plus grands des valeurs de la grandeur dépendante (courbe ouverte vers le haut)</i></p> <p><i>-On a des accroissements de plus en plus petits des valeurs de la grandeur dépendante (courbe ouverte vers le bas)</i></p> |
| <i>Local quantitatif</i> | <p>U5 : Déterminer les différentes phases de variation</p> <p>U8 : Quantifier un accroissement (ou un décroissement) de la grandeur dépendante pour un accroissement précis de la grandeur indépendante</p> <p>U9 Quantifier un accroissement (ou un décroissement) de la grandeur dépendante pour un accroissement unitaire de la grandeur indépendante</p> | <p><i>« Quelle est la valeur du rapport des accroissements concomitants des deux grandeurs pour un certain accroissement de la grandeur indépendante? »</i></p> | <p><i>Une verbalisation semblable peut être ici mobilisée, mais en y ajoutant des valeurs numériques.</i></p>                                                                                                                                                      |

Notre objectif ne sera pas de faire l'étude fine des unités de raisonnement qui pourraient être mobilisées par les élèves lorsque la tâche sera réalisée. Nous sélectionnerons les situations qui sont susceptibles de permettre à l'élève de porter soit un regard global, local qualitatif ou local quantitatif ou même plusieurs de ces raisonnements. Pour ces situations, nous nous attarderons particulièrement à la formulation des questions afin de qualifier la nature du raisonnement covariationnel sans toujours nous référer aux différentes unités.



Une fois les situations susceptibles de favoriser un raisonnement covariationnel sélectionnées, nous les caractériserons selon différentes variables didactiques afin d'observer la variété des situations proposées dans les manuels. Parmi ces variables didactiques, nous relevons les représentations sollicitées dans ces situations (Duval, 1993).

### 2.3 L'importance de s'attarder aux représentations en jeu pour le développement du raisonnement covariationnel

Tel que mentionné dans la problématique, les recherches qui s'inscrivent dans le développement du raisonnement covariationnel au premier cycle du secondaire, élèves de 12 à 14 ans (Passaro, 2005; Passaro et Hitt, 2007; Passaro, 2020) et au début du deuxième cycle, élèves de 15-16 ans, dans un contexte québécois (Gonzalez, Hitt et Morasse, 2008; Hitt et Gonzalez-Martin, 2015) soulignent l'importance d'un regard sur les représentations ainsi qu'aux passages entre ces représentations pour l'étude des fonctions. Passaro (2015) passe en revue les caractéristiques des situations utilisées dans des recherches antérieures portant sur le développement d'un raisonnement covariationnel. Elle rapporte dans l'annexe 3<sup>20</sup>(voir Annexe B), les caractéristiques de ces situations (dont les représentations utilisés) et, les caractéristiques du questionnement impliquant les représentations attendues. Nous pouvons remarquer que les situations proposées par les chercheurs « privilégient » habituellement les représentations : *verbal*, *graphique* et *figural*. Les représentations verbales sont utilisées afin d'exposer l'énoncé et les consignes, mais également pour décrire la relation entre les grandeurs. Les consignes sont souvent associées à une représentation figurale, sous forme de schéma, à l'échelle ou non, sur laquelle il est parfois possible

---

<sup>20</sup> Ce sont des tableaux d'analyse portant sur les caractéristiques des situations utilisées dans les recherches antérieures sur la covariation. (A-18 et A-19). Nous les avons repris à l'annexe B.

d'opérer. Voici une remarque importante à propos des représentations ciblées par les tâches provenant des recherches antérieures :

*Les tâches demandées sont variées et concernent majoritairement une étude globale qualitative de la fonction qui se concrétise par la production d'une description de la variation d'une grandeur ou des variations concomitantes de deux grandeurs (registre verbal) et par la construction de l'esquisse d'un graphique (registre graphique). Ainsi, les énoncés des questions ne permettent pas aux élèves d'approfondir leurs descriptions et le passage à une autre représentation est rapidement exigé. (Passaro, 2015, p. 103)*

Ainsi Passaro relève que ces tâches ciblent une interprétation qualitative, mais qu'elles se limitent à quelques représentations. De plus, une seule conversion entre les représentations semble être privilégiée, le passage d'une description verbale vers la représentation graphique. Cette analyse l'a amenée à concevoir des énoncés afin de favoriser le passage entre diverses représentations.

Afin d'analyser la variété des situations susceptibles de favoriser l'émergence d'un raisonnement covariationnel, nous observerons les représentations mobilisées dans les situations proposées par les manuels scolaires ainsi que les passages entre ces représentations. En considérant les recherches antérieures, nous avons établi le tableau suivant (voir tableau 2.3) regroupant les cinq représentations qui sont retenus pour notre cadre d'analyse.

**Tableau 2.3** Définition et exemplification des représentations

| Représentation | Définition et exemplification                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Verbal</b>  | <p>Écriture en mots : des textes, phrases, valeurs précises.</p> <p><i>Par exemple : nous avons considéré qu'une tâche ciblant l'explication d'un tracé graphique ou la rédaction d'un énoncé comme appartenant aux représentations verbales. Elle l'est au même titre qu'une réponse courte (ex : 10 mètres, 12, gauche,</i></p> |

|                         |                                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                         | <i>etc.). Cependant, les réponses courtes ont été identifiées différemment en raison du travail demandé pour la tâche.</i>                                                                                                              |
| <b>Figural/Schéma</b>   | Une figure approximative d'une situation.<br><br><i>Par exemple des schémas à l'échelle, des représentations spontanées figurales, des suites arithmétiques avec des dessins plutôt qu'avec des nombres, etc.</i>                       |
| <b>Table de valeurs</b> | Les séquences de nombres, les valeurs de deux variables ordonnées ou non sous forme de table.<br><br><i>Cette représentation comprend aussi les suites numériques représentées, même si elles ne sont pas sous forme de « table ».</i>  |
| <b>Graphique</b>        | Les plans définis selon un ou plusieurs systèmes d'axes.<br><br><i>Par exemple : le plan graphique cartésien. Au premier cycle du secondaire, les graphiques sont habituellement composés de deux axes orthogonaux (normée ou non).</i> |
| <b>Formel</b>           | Écritures d'expressions numériques ou symboliques algébriques pour exprimer la ou les relations de la situation.                                                                                                                        |

Mentionnons que Passaro (2015) discute de l'importance de présenter un schéma (représentation figurale) sur lequel les élèves peuvent travailler pour dégager la covariation entre deux grandeurs. De plus, elle s'appuie sur les travaux de Carlson (2002) et de Monk (1992) afin de relever l'importance de favoriser l'expérimentation à l'aide de modèles réduits pour appréhender la relation entre deux grandeurs en jeu tel que c'est fait dans les études de Hitt, Morasse et Gonzalez. Nous ajoutons donc une « représentation » se différenciant des autres : l'expérience. Les consignes de cette dernière pourront être données selon les cinq représentations précédentes, mais ces expérimentations seront considérées distinctes des autres représentations en raison de la présence d'artefacts permettant la simulation de la relation observée.

**Tableau 2.4** Définition et exemplification de l'expérience

|            |                                                                                                                                                                                                                       |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Expérience | <p>Manipulation d'objets physiques à l'aide de modèles réduits ou modèles physiques d'une situation.</p> <p><i>Par exemple, remplir une bouteille avec de l'eau pour l'étude du niveau de l'eau et du volume.</i></p> |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Pour analyser les représentations et les passages d'une représentation à l'autre sollicités dans les situations qui favorisent le développement d'un raisonnement covariationnel, nous utiliserons le tableau de traduction de Janvier (1983) que l'on retrouve dans le programme de formation des années 90 et que nous avons modifié pour y considérer la représentation schéma ou figurale.

**Tableau 2.5** Tableau des passages entre les représentations

|                                 | <b>Représentation d'arrivée</b> |               |                         |                  |                |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------|-------------------------|------------------|----------------|
| <b>Représentation de départ</b> | <b>Description verbale</b>      | <b>Schéma</b> | <b>Table de valeurs</b> | <b>Graphique</b> | <b>Formule</b> |
| <b>Description verbale</b>      |                                 |               |                         |                  |                |
| <b>Schéma</b>                   |                                 |               |                         |                  |                |
| <b>Table de valeurs</b>         |                                 |               |                         |                  |                |
| <b>Graphique</b>                |                                 |               |                         |                  |                |
| <b>Formule</b>                  |                                 |               |                         |                  |                |

Dans ce tableau, on peut voir qu'il y a des passages entre différentes représentations (toutes les cases sauf celle de la diagonale), mais également un travail qui peut être mené dans un même type de représentations (les cases de la diagonale). Il s'agit dans ce dernier cas d'un travail d'appropriation d'une représentation. Tel que nous l'avons précisé, les recherches font ressortir l'importance du schéma et de l'expérience. Nous aurons donc un regard sur les situations qui s'appuient sur une expérience. Ce cadre d'analyse permettra de décrire le travail proposé dans les manuels scolaires en termes de représentations dans les situations susceptibles de favoriser un travail sur le raisonnement covariationnel. Notre regard sur ces situations sera complété par une étude autour d'autres variables didactiques que les représentations. Nous en avons

exemplifié quelques-unes autour de la situation de la bouteille : présence de plus de deux grandeurs, grandeurs interchangeables, grandeurs imposées.

#### 2.4 D'autres variables didactiques pouvant être considérées dans les situations susceptibles de favoriser le déploiement d'un raisonnement covariationnel

Avant de présenter les variables didactiques retenues pour cette étude, attardons-nous sur ce que signifie le concept de *variable didactique*.

##### 2.4.1 La définition de *variable didactique*

Selon la définition proposée par Brousseau (2003), la variable didactique a un sens plutôt large allant d'une donnée du problème jusqu'aux éléments de consignes. L'idée est principalement, comme l'indiquent les auteurs du site de l'IREM de Montpellier<sup>21</sup> rapportant les propos de Brousseau, d'avoir un caractère variable donc modifiable pour l'enseignant :

*On qualifie de **variable didactique** d'une situation ou d'un problème une variable, pouvant être **modifiée par l'enseignant**, et dont les modifications (même légères) peuvent infléchir sensiblement le comportement des élèves et provoquer des procédures ou des types de réponses différentes. C'est en jouant sur des choix adéquats de ces variables que l'on peut provoquer de nouveaux apprentissages, en visant à faire émerger chez les élèves de nouvelles connaissances comme des outils nécessaires pour résoudre un problème. En fait, la notion de variable didactique traduit la nécessité de distinguer, classer et modéliser les situations dans une perspective didactique.*

Nous retenons cette définition de variable didactique, elle s'inscrit directement dans notre idée de répertorier et de classer les situations. Nous appliquons cette définition dans l'intention d'identifier les variables didactiques qui peuvent être intéressantes

---

<sup>21</sup> [http://www.math.univ-montp2.fr/sfodem/BibliothequeSfodem/sfodem\\_HTML/Chap2/fth2r1.html](http://www.math.univ-montp2.fr/sfodem/BibliothequeSfodem/sfodem_HTML/Chap2/fth2r1.html)

pour caractériser les situations à potentiel covariationnel. Nous avons recensé dix-sept variables didactiques possibles.

#### 2.4.2 Un appui sur les variables didactiques présentées dans le recueil portant sur les situations travaillant la modélisation de Janvier et Pelletier (2003)

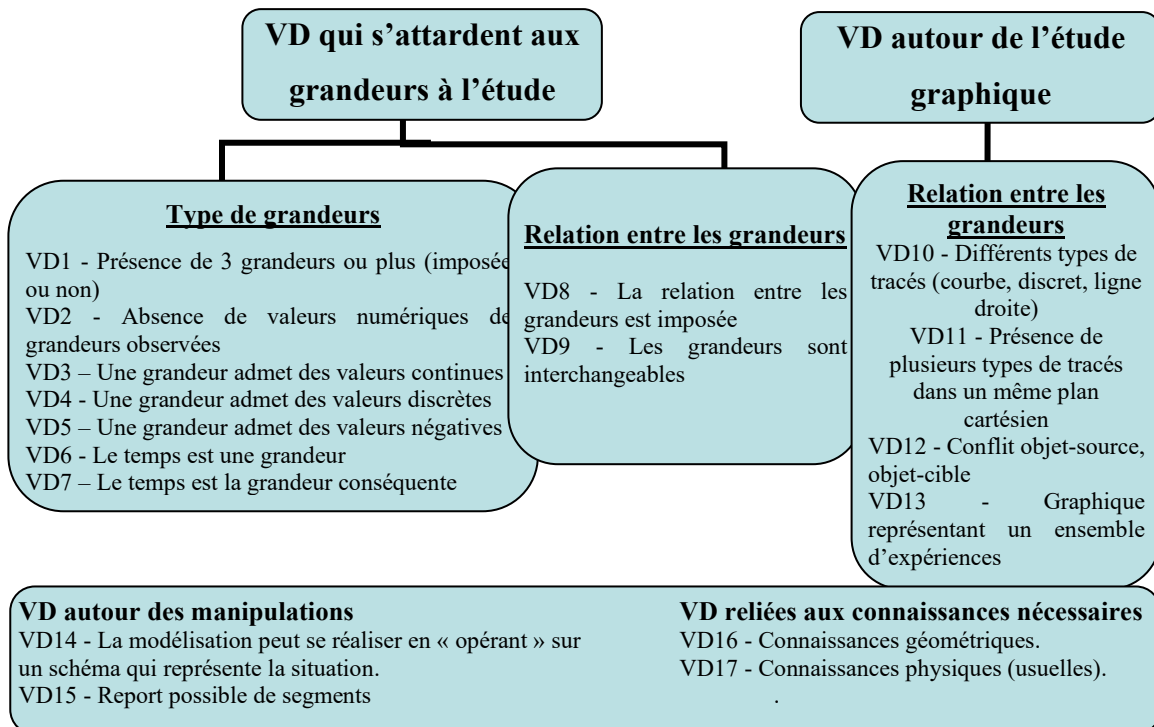
Les variables didactiques retenues dans notre étude proviennent à l'origine d'un tableau contenu dans un recueil de notes de cours conçu par Janvier et Pelletier (2003). Plusieurs situations de ce recueil sont utilisées et reprises dans le cadre d'au moins deux cours au programme de formation des étudiants en enseignement des mathématiques de l'Université du Québec à Montréal (UQAM) : MAT2226 - Raisonnement proportionnel et concepts associés et MAT3225 - Didactique de la variable et de la fonction. Voici comment les auteurs présentent ce recueil (Janvier et Pelletier, 2003, p. 1) :

*Ce recueil se veut un guide d'accompagnement pour les enseignants et les futurs enseignants dans leur enseignement de la modélisation. Nous y retrouvons deux principales parties : un répertoire de situations à travailler en classe et un document d'accompagnement qui explique en détail tous les aspects qui sont impliqués dans une tâche de modélisation.*

Dans la deuxième partie de ce recueil sont présentées sept variables didactiques que nous trouvons intéressantes pour une étude autour de la covariation, d'autres variables didactiques tirées de différentes recherches viennent compléter ce portrait. En tout 17 variables didactiques ont été considérées. Nous les avons regroupés autour de quatre catégories (voir figure 2.5) :

1. Variables didactiques qui s'attardent aux grandeurs à l'étude ;
2. Variables didactiques qui portent sur l'étude graphique ;
3. Variables didactiques reliées aux connaissances nécessaires ;
4. Variables didactiques autour des manipulations.

Des variables didactiques autour de l'étude graphique ont été retenues parce qu'au premier cycle du secondaire, la représentation graphique est explicitement présente dans le PFEQ. Nous utiliserons l'abréviation VD pour variable didactique.



**Figure 2.5** Figure représentant les variables didactiques pour l'étude portant sur le potentiel des situations susceptibles de développer le raisonnement covariationnel

La catégorie, les *VD qui s'attardent aux grandeurs à l'étude* regroupe le plus grand nombre de VD, neuf des 17 VD. Comme mentionné dans la section 2.2, les grandeurs et les relations entre elles sont centrales quand on s'attarde au raisonnement covariationnel. Dans cette catégorie, nous considérons des VD reliées au type de grandeurs et des VD qui se penchent sur la relation entre les grandeurs. Nous pourrions observer ces VD dans chacune des situations qui seront retenues pour l'analyse. Quatre VD s'attardent à l'étude graphique, soulignons que cette catégorie ne sera pas présente dans toutes les situations. La lecture, la compréhension ainsi que la représentation des relations dans un plan cartésien sont un enjeu d'apprentissage au premier cycle du secondaire tel que précisé dans la section 1.4.2. Les quatre dernières VD sont réparties



de façon égale dans deux autres catégories, les VD autour des manipulations et celles reliées aux connaissances nécessaires. Nous détaillons dans les sections suivantes les VD pour chacune de ces catégories. Ces VD vont permettre de statuer sur la diversité des situations retenues susceptibles de développer le raisonnement covariationnel.

### 2.4.3 Les variables didactiques autour des grandeurs en jeu

Tel que précisé, nous avons distingué dans les VD qui se rapportent aux grandeurs, celles qui traitent du type de grandeurs de celles qui ont trait aux relations entre ces grandeurs. Les grandeurs sont au cœur du raisonnement covariationnel puisqu'on s'attarde aux variations concomitantes des deux grandeurs, prédominante (indépendante) et conséquente (dépendante). Afin d'exemplifier certaines VD, nous reprenons les exemples de situations : la coureuse tirée de Thompson et Carlson (2017) (voir section 2.1.1), notre version de la bouteille (voir section 2.2.2.2) et la situation de la bougie (voir 1.2.2).

#### 2.4.3.1 Les VD reliées au type de grandeurs

##### VD1 – Présence de 3 grandeurs ou plus (imposées ou non)

Cette VD relève la présence de 3 grandeurs ou plus dans une situation donnée. Comme nous l'avons évoqué, lors de notre réflexion autour de ce que nous avons nommé l'unité de raisonnement U0, l'un des objectifs du raisonnement covariationnel est de permettre d'étudier la relation entre deux grandeurs choisies parmi celles qui peuvent être étudiées dans une situation. Les troisième, quatrième, cinquième et autres grandeurs seront alors considérées comme des paramètres, on doit les fixer pour permettre l'étude des changements pour les deux grandeurs choisies. Comme évoqué par Janvier et Pelletier (2003), cette réflexion sur les grandeurs à fixer avant l'observation des deux grandeurs variables aide à développer le concept de paramètre d'une fonction. Lorsque la situation énonce d'emblée les deux grandeurs à observer, cela escamote le

questionnement concernant le choix de ces grandeurs parmi d'autres grandeurs. Ainsi, nous relèverons les situations comportant explicitement trois grandeurs ou plus afin d'observer s'il est possible d'établir un questionnement sur le choix des deux grandeurs à étudier ou alors de noter lorsque les deux grandeurs sont imposées par les auteurs du manuel scolaire.

### VD2 - Absence de valeurs numériques des grandeurs observées

Cette VD relève l'absence de valeurs numériques pour les grandeurs en jeu dans la situation. Sans données numériques se met en place une interprétation qualitative de la relation entre les deux grandeurs. En effet, comme le précise Saboya (2003, p. 38) dans ce type de situations :

*L'élève doit contrôler les données de la situation les unes par rapport aux autres, les comparer entre elles pour ensuite aller les placer dans un plan cartésien en prenant en compte les grandeurs données sur les deux axes. Pour représenter les données, il doit avoir recours à tout un vocabulaire de comparaison comme « plus, moins,... ».*

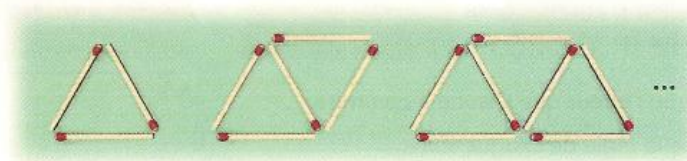
Ainsi cette VD amène la mise en place d'un vocabulaire relié aux grandeurs concomitantes et, à avoir un point de vue global de la relation. La présence de valeurs numériques sur lesquelles s'appuyer pour décrire la covariation n'amène pas la même réflexion. Janvier (1981a) et Carlson (2002) soulignent la difficulté des élèves à utiliser un langage axant sur une variation, sur une comparaison relative, sur une interprétation qualitative du graphique qui est marquée par l'emploi des mots « plus », « moins », « beaucoup » ou à produire des phrases du type « ça monte plus vite que... ». Ainsi, les situations dans lesquelles les valeurs des deux grandeurs ne sont pas numériques poussent à s'éloigner d'une lecture point par point et donc à plutôt mobiliser un regard qualitatif de la variation ou de la covariation entre les grandeurs au détriment d'un regard correspondance.

### VD3 – Une grandeur admet des valeurs continues et VD4 – Une grandeur admet des valeurs discrètes

Ces VD permettent de distinguer les grandeurs discrètes des grandeurs continues. L'interprétation des variations entre les grandeurs observées dans un contexte diffère si elles sont discrètes ou continues. En effet, il n'est pas possible d'observer des accroissements plus petits que ceux obtenus en prenant deux valeurs de la grandeur discrète, ce qui n'est pas le cas dans pour des grandeurs continues. Soulignons que l'absence de valeurs numériques (VD2) dans la situation n'aura pas d'influence sur la nature des valeurs possibles dans une situation. Il est possible de déterminer que, par exemple : le volume ou le temps sont des grandeurs qui admettent des valeurs continues, même si la situation ne leur associe pas de valeurs numériques. Les situations comportant des grandeurs discrètes amènent des interprétations et des représentations (par exemple graphique) elles aussi discrètes comme le rapporte Saboya (2003, p. 38) : « *On a recours ici à une modélisation point par point de la situation. L'élève doit comprendre qu'il n'y a pas de valeur possible entre deux points, c'est la raison pour laquelle on ne relie pas les points. On vise à développer l'esprit critique de l'élève pour qu'il donne du sens au graphique.* »

Une situation comportant des grandeurs discrètes se distingue ainsi des grandeurs continues en raison des valeurs admissibles. La représentation graphique associée sera alors discrète ou continue selon la nature des valeurs de la situation. En couplant les VD3 et VD4, nous pourrions observer trois possibilités pour les grandeurs impliquées : deux grandeurs discrètes, deux grandeurs continues ou l'une discrète et l'autre continue. Dans la situation de la coureuse, de la bouteille et de la bougie, les grandeurs observées sont continues. Si on observe la relation entre la somme de la mesure des angles d'un polygone et le nombre de côtés de ce polygone, il s'agit d'une grandeur continue et d'une grandeur discrète. Il n'est dans ce cas pas possible d'établir un intervalle du nombre de côtés compris entre 0 et 1, les accroissements minimaux du nombre de côtés étant de 1. Dans la situation suivante (voir figure 2.6) dans laquelle on observe la relation entre le nombre de triangles et le nombre d'allumettes, on peut remarquer qu'il s'agit de deux grandeurs discrètes.

10. On a construit cette suite de triangles avec des allumettes.



- a) Construis les deux formes suivantes.  
b) Complète cette table de valeurs.

| Nombre de triangles | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------------------|---|---|---|---|---|
| Nombre d'allumettes |   |   |   |   |   |

- c) Donne la règle qui permet de calculer le nombre d'allumettes d'après le nombre de triangles.  
d) Détermine le nombre d'allumettes nécessaires pour construire 30 triangles.  
e) L'une des formes de la suite est composée de 85 allumettes. Combien de triangles composent cette forme?



Caroline Herschel  
(1750-1848)

Caroline Herschel et son frère William

**Figure 2.6** Situation des triangles et des allumettes tirée de *Panoram@th*, manuel A, volume 2, p. 154.

### VD5 – Une grandeur admet des valeurs négatives

Cette VD relève si l'une des grandeurs observées admet des valeurs numériques négatives. Il s'agit d'explorer dans ce cas une relation entre des grandeurs sur des intervalles de valeurs négatives. Cela implique, par exemple pour la représentation graphique, une représentation de la relation dans un autre quadrant que le premier. Remarquons que les grandeurs sollicitées dans les situations de la vie réelle font appel majoritairement à des valeurs positives, la représentation graphique prend alors place dans le premier quadrant. Il est intéressant de travailler avec les élèves des situations qui proposent des grandeurs qui admettent comme valeurs les nombres négatifs comme c'est le cas avec des grandeurs comme la température ou le niveau de l'eau. Les élèves ne développent pas ainsi la conception que l'on travaille toujours dans un seul quadrant du graphique (Saboya, 2003). Ils doivent appuyer le raisonnement développé dans la

partie positive dans les autres parties. Carlson et al. (2002) propose l'étude d'une situation possédant cette VD, il s'agit de la variation de la température au cours du temps. La température observée peut être inférieure à 0 degrés Celsius.

#### VD6 – Le temps est une grandeur

La VD6 relève si le temps est l'une des grandeurs à observer dans la situation. Cette VD a été l'objet de certains travaux de Janvier (1993, 1998) qui s'intéressaient aux difficultés liées au *temps* (Janvier, 1998) comme grandeur. Janvier souligne qu'autant la présence que l'absence de la grandeur *temps* peut amener des difficultés d'interprétation dans une situation. En effet, il arrive dans certaines verbalisations que le temps soit présent et ce, même si ce n'est pas une grandeur observée. Ce phénomène a même été observé chez des enseignants (Janvier et Pelletier, 2003, p. 23) :

*Il s'agit d'une habitude que nous [enseignants] avons à vouloir traiter une situation comme une histoire qui se déroule dans le temps, à faire un lien de continuité entre les différents éléments de la situation.*

Par exemple, dans la situation de la bouteille qui s'intéresse aux grandeurs : *Volume de l'eau* et *Hauteur de l'eau*, l'enseignant ou l'élève peuvent décrire la relation en utilisant des expressions comme : « *au début, après, longtemps, pendant un certain temps, rapidement, de plus en plus vite, rapidement, lentement, ensuite, ...* » (Janvier et Pelletier, 2003, p. 22) alors que le temps n'est pas une grandeur à considérer dans la situation (c'est un paramètre, le temps est fixé). Sans nier qu'il s'écoulera un certain temps pour que l'eau entre dans la bouteille, cela n'influence pas la relation observée : pour un volume donné, une certaine hauteur du liquide dans la bouteille y est associée. Ainsi, cette utilisation faussée d'une implication temporelle amène une confusion lors de la lecture de tracés dans des graphiques. Thompson et Carlson (2017) relèvent des difficultés similaires avec cette grandeur.

Lorsque le temps est une des grandeurs observées et qu'elle est la grandeur prédominante la description de la situation à l'étude est alors chronologique. L'utilisation des termes mentionnés précédemment, « *au début, après, longtemps,*

*pendant un certain temps, rapidement, de plus en plus vite, rapidement, lentement, ensuite, ...»* est alors adéquate. Dans ce cas, le temps est associé à la notion de « chronique » décrite par Janvier (1998, p. 98) comme suit : « *I have presented in this paper the notion of chronicle as a frequent cause of mistakes in the reading or sketching of a graph meant to describe the relation between two variables. A chronicle is the description of a temporal change* ». L'auteur conclut que la « notion de chronique » est un obstacle épistémologique (Sierpinska, 1992) à l'apprentissage du concept de fonction, les étudiants ont de la difficulté à traiter cette grandeur et surtout lorsque c'est la grandeur conséquente. Ceci nous amène à la VD6 qui est reliée à la VD5.

#### VD7 - Le temps est la grandeur conséquente

En plus de l'intérêt d'observer si le temps est une grandeur de la situation, il est aussi intéressant de relever si elle est la grandeur conséquente. Lorsque le *temps* est la grandeur conséquente ou dépendante, cela requiert une interprétation qui ne se déroule pas comme dans une histoire (une chronicité). Dans ce cas, la grandeur *temps* prend une autre interprétation, on observe alors la durée plutôt d'un événement spécifique. On peut observer que Thompson utilise souvent le temps comme grandeur prédominante dans ses exemples pour décrire le raisonnement quantitatif (voir section 2.1.1).

Janvier (1998) s'est intéressé aux difficultés reliées à la donnée de la grandeur *temps* comme grandeur conséquente. Il propose une situation, le vol Paris-Montréal qui requiert une interprétation du temps comme grandeur conséquente (temps vu comme la durée d'une expérience).

Un avion transporte des passagers de Paris à Montréal.

Les grandeurs qui nous intéressent sont : le temps que met l'avion à franchir la distance Paris-Montréal et la vitesse moyenne de l'avion sur ce trajet. Comment ces grandeurs interagissent-elles ?

Dans cette situation, la distance entre Montréal et Paris est fixe, une représentation graphique de la relation entre la vitesse de l'avion en vol et la durée du vol est requise. Plusieurs difficultés surgissent lors de la modélisation de cette situation donc au niveau de la représentation graphique : soit des tracés pour seulement un vol, soit le temps est considéré comme chronique alors que c'est une interprétation du temps comme durée qui est adéquate.

#### 2.4.3.2 Les relations entre les grandeurs

Deux VD sont reliées aux relations entre les grandeurs.

##### VD8 – La relation entre les grandeurs est imposée

La VD8 révèle si la situation impose une relation entre les grandeurs. Ceci permet de savoir si le choix de la grandeur prédominante (indépendante) et conséquente (dépendante) est laissé à la charge de l'élève. Cette VD a été évoquée et illustrée dans la situation de la bouteille lors de la description de la première unité de raisonnement (U1) (voir section 2.2.2). Nous avons proposé un énoncé de cette situation sans imposer la relation. Janvier et Pelletier (2003) soulignent qu'en n'imposant pas les grandeurs indépendante et dépendante, différents raisonnements sont possibles, on amène ainsi les élèves à verbaliser la relation entre les grandeurs, à verbaliser la variation. En s'appuyant sur une grandeur différente, les interprétations et les représentations graphiques vont différer. Dans certains cas, nous pourrions observer des relations non fonctionnelles. Dans le cas où une situation impose la relation entre les grandeurs, le questionnement observé sera du type « selon », « en fonction de », la grandeur prédominante et la grandeur conséquente sont alors préétablies.

##### VD9 – Les grandeurs sont interchangeables

La VD9 révèle la possibilité dans la situation d'interchanger les deux grandeurs observées. Cette VD est liée à la VD8 parce qu'une situation qui impose la relation entre les grandeurs n'ouvrira pas la possibilité de se questionner sur la possibilité

d'interchanger les deux grandeurs. Cependant, la VD9 se distingue de la précédente, car elle observe si les grandeurs peuvent être interchangées de façon non forcée. Par exemple, dans la situation de la bouteille, il est possible de s'appuyer sur l'une ou l'autre des grandeurs (le volume ou la hauteur de l'eau) pour observer les accroissements, les grandeurs admettent ce changement. Une situation comme celle de la coureuse permet difficilement (du moins pas de façon évidente) de concevoir la distance parcourue comme grandeur prédominante et le temps comme grandeur conséquente. Pour la situation de la bougie, nous pouvons remarquer que les grandeurs sont préétablies par la présence de la table de valeurs qui présente la grandeur prédominante sur la première ligne et la grandeur conséquente sur la deuxième ligne. Sans cette table de valeurs, il est possible d'observer le temps écoulé pour des hauteurs différentes de la bougie.

#### 2.4.4 Les variables didactiques autour de l'étude graphique

Dans cette catégorie nous avons ciblé quatre VD. Trois d'entre elles proviennent des travaux de Saboya (2003, p. 39-40) qui s'est intéressée aux caractéristiques des situations de modélisation et d'interprétation. Ces trois VD sont *Types de tracés*, *Recours à plusieurs graphiques simultanés* et le *Statut iconique du graphique*. Nous avons repris ces trois VD avec de légères modifications au niveau de la nomenclature pour mieux soutenir nos propos.

##### VD10 – Différents types de tracés

La VD10 relève la présence de plusieurs « types » de tracés dans une situation. Cela implique par exemple qu'une représentation graphique admet au moins deux « tracés » parmi les suivants : segments, courbes et points. Dans la situation de la bouteille, il y a trois phases et deux types de tracés distincts. En raison de la forme similaire de la bouteille pour les phases 1 et 3 (deux parties cylindriques), la covariation est décrite de



manière similaire. Dans les deux cas, les accroissements constants de la quantité d'eau amènent des accroissements constants du niveau de l'eau menant à une représentation sous forme de segments de droite dans le graphique. En raison de la forme cylindrique plus étroite de phase 3, la première droite sera plus inclinée avec l'axe des ordonnées que la deuxième. Cependant, la phase conique de la bouteille est associée à une description distincte des deux tracés précédents. La covariation n'est pas la même au bas de la phase conique qu'en haut. Pour des accroissements constants de la quantité d'eau, les accroissements du niveau de l'eau seront de plus en plus grands. La représentation graphique mène donc à une courbe pour le tracé pour la 2<sup>e</sup> phase et un tracé rectiligne pour les deux autres phases. Ainsi cette situation admet plusieurs types de tracés, même si la représentation graphique présente un seul tracé continu. La présence de deux types de tracés dans une situation permet deux expressions différentes de la covariation en s'appuyant sur les deux mêmes grandeurs. Saboya (2003, p. 39) rapporte qu'il est important d'exposer différents tracés aux élèves :

*En effet, les élèves ont tendance à voir souvent des droites ou des segments de droite en mathématique alors que beaucoup de phénomènes physiques et de la vie quotidienne (courbes de croissance, culture de microbes ...) se représentent par d'autres types de tracés. On souhaite que l'élève devienne familier avec tout type de tracé.*

Comme la covariation ne s'exprime pas de la même façon dans chacun des cas, nous relevons l'importance d'exposer les élèves à plusieurs types de tracés dans la représentation graphique :

- Pour une droite ou un segment de droite non horizontal, on aura pour des accroissements constants de la grandeur prédominante, des accroissements constants de la grandeur conséquente.
- Pour une droite ou segment de droite horizontal, il n'y a pas d'accroissements de la grandeur conséquente
- Pour une courbe ouverte vers le haut, il y a des accroissements de plus en plus grands de la grandeur conséquente pour des accroissements constants de la grandeur prédominante (si la courbe est croissante)

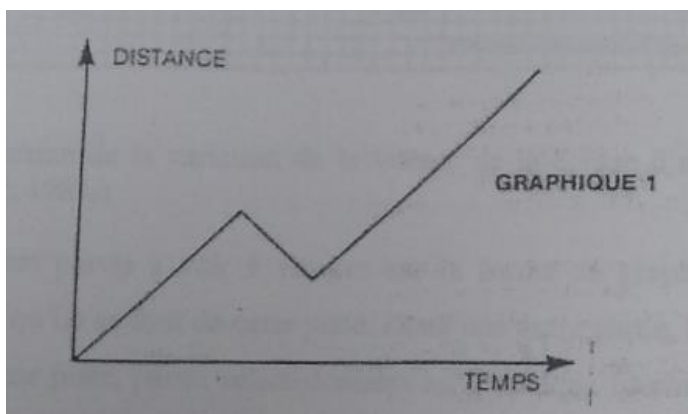
- Pour une courbe ouverte vers le bas, il y a des accroissements de plus en plus petits de la grandeur conséquente pour des accroissements constants de la grandeur prédominante (si la courbe est croissante)

#### VD11 – Présence de plusieurs tracés

La VD11 relève la présence de deux tracés ou plus dans un même repère ou dans au moins deux plans cartésiens. À noter qu'il ne faut pas la confondre avec la VD10 qui n'est pas influencée par le nombre de tracés « distincts », mais uniquement le type de tracés distincts. L'interprétation de plusieurs tracés dans un même repère ou dans au moins deux repères amène à comparer les tracés proposés. Il faut alors choisir les mêmes accroissements entre les valeurs des grandeurs pour pouvoir comparer.

#### VD12 – Conflit objet-source, objet-cible

La VD12 relève la présence d'un possible conflit suscité par un tracé. Ce conflit est nommé par Janvier (1981) « objet-source, objet-cible ». C'est le cas lorsque la représentation schématique de la situation est similaire à la représentation graphique, lorsqu'on peut confondre le tracé d'une représentation graphique avec le mouvement de ce qui est observé. Ce conflit mis de l'avant par Janvier (1981) a été repris dans différents travaux dont ceux de Janvier et Pelletier (2003) et de Saboya (2003). On assiste ici à l'emprise de la situation dans la lecture du graphique. Prenons par exemple le tracé présenté dans la figure 2.7 et qui représente le temps écoulé selon la distance parcourue lors d'une promenade en montagne.



**Figure 2.7** Représentation graphique qui illustre le conflit objet-source, objet-cible (Tirée de Saboya, 2003, p. 21)

Dans cette situation, il arrive que les élèves se laissent distraire par divers facteurs quand on leur demande de décrire la représentation graphique qui représente une promenade. Ils peuvent proposer l'interprétation suivante : « On monte une montagne, on descend et on remonte » (Janvier, 1981, p.35). Les traits dans le tracé sont interprétés comme un déplacement d'une personne sur une montagne. Ils ne voient pas la modélisation d'une variation celle de la distance par rapport au temps. La présence de situations comportant cette VD amène une réflexion sur les grandeurs en jeu ainsi que sur leurs variations.

### VD13 – Graphique représentant un ensemble d'expériences

La VD13 relève la présence de plusieurs expériences d'une même situation. Prenons l'exemple de l'observation du prix de l'essence selon la date du remplissage (une grandeur discrète) ou la situation du vol Montréal-Paris considérant la durée du vol selon la vitesse (deux grandeurs continues). Cette VD implique que l'on interprète la situation en considérant que l'on répète plusieurs fois « une expérience » afin d'établir la relation qui unit les deux grandeurs. Pour le vol Montréal-Paris, Janvier et Pelletier (2003, p.121) soulignent que :

*Contrairement aux autres situations, notre représentation en mode graphique ne représentera pas un déroulement unique d'expérience, mais bien un ensemble infini d'expériences. Chaque point de la courbe constituera un voyage en soi qui a été fait en un temps donné.*

Ainsi, comme la représentation graphique comportant plusieurs expériences est différente de celle provenant d'une expérience unique, nous considérons pertinent de repérer ces situations.

#### 2.4.5 Les variables didactiques autour des manipulations

Plusieurs chercheurs ont conçu des situations mobilisant le raisonnement covariationnel en proposant des manipulations. À cet effet, Janvier et Pelletier (2003, p. 12) ajoutent l'expérience<sup>22</sup> comme représentation possible:

*De plus, nous ajoutons l'expérience comme façon de représenter la situation étant donné qu'une expérience constitue souvent la situation en soi. [...] Ainsi, on se base tout d'abord sur l'observation d'un phénomène qui nous intéresse ou sur lequel on se questionne. Face à ces interrogations, les élèves formulent des hypothèses qu'ils vont tenter de vérifier à l'aide d'une expérimentation. En analysant les résultats obtenus et en représentant la situation dans différents modes de représentation, les élèves pourront confirmer ou corriger leur hypothèse de départ afin d'en arriver à une conclusion relative à la covariation des deux grandeurs prises comme variables.*

Certains chercheurs ont misé sur les manipulations soit d'objets physiques ou à travers un schéma qui représente la situation (Carlson, 2002; Gonzalez-Martin, Hitt, et Morasse, 2008; Hitt et Morasse, 2009; Monk, 1992 ; Passaro, 2015, 2020). Ainsi l'expérience et la schématisation peuvent être des représentations valides d'une situation où l'on étudie la covariation. Nous considérons que ces deux représentations engendrent deux VD portant particulièrement sur des manipulations physiques. La

---

<sup>22</sup> Comme nous l'avons mentionné à la section 2.2, nous avons nous aussi retenu l'expérience dans l'analyse des manuels scolaires comme registre de représentation. Cependant, elle sera considérée comme une description verbale avec une note indiquant qu'une expérience sera exécutée pour observer la relation entre les grandeurs. Cette représentation n'apparaît donc pas dans les tableaux d'analyses comme registre de départ ou d'arrivée.

première est la possibilité de faire varier les grandeurs en s'appuyant sur un schéma (VD14) et la deuxième (VD15) porte sur le report possible de segments.

VD14 - La modélisation peut se réaliser en « opérant » sur un schéma qui représente la situation

La VD14 relève la possibilité de travailler sur le schéma d'une situation afin d'observer la covariation entre les grandeurs. Il est possible de faire varier la grandeur prédominante en s'appuyant sur la schématisation proposée et estimer par la suite la variation sur la grandeur conséquente. Cette représentation ne sera pas toujours « à l'échelle », mais il est possible d'établir une tendance à l'aide de variations de la grandeur conséquente. En reprenant l'exemple de la bouteille, il est possible de s'appuyer sur le schéma de la bouteille pour ajouter une quantité hypothétique d'eau et par la suite estimer l'accroissement du niveau de l'eau. Des situations géométriques peuvent engendrer aussi une transformation dans la représentation schématique. Par exemple, la relation entre la mesure des côtés d'un rectangle pour un périmètre fixé permettrait d'exemplifier schématiquement la relation avec plusieurs rectangles. D'autres contextes géométriques comme les suites de figures permettent aussi le travail sur la représentation schématique tout en observant la relation entre deux grandeurs. Différents chercheurs présentent des situations dans lesquelles il est possible d'opérer sur le schéma. C'est le cas de Monk (1992) avec l'échelle qui glisse le long d'un mur, de Passaro (2007) avec un randonneur qui marche sur une piste et de Hitt et Morasse (2009) avec le photographe qui se déplace et photographie une statue et avec la situation de l'ombre de la personne qui marche dans la rue sous un lampadaire.

VD15 - Report possible de segments

La VD15 relève la possibilité d'un report de segments d'une grandeur vers une représentation graphique. Cette VD permet d'observer les situations ayant des longueurs proportionnelles définies dans une représentation schématique ou dans une

expérimentation physique. Janvier et Pelletier (2003, p. 14) rapportent l'intérêt de la représentation schématique et du report de mesures dans la représentation graphique :

*Si on fait notre schéma à l'échelle, c'est-à-dire que l'on connaît la relation de correspondance entre notre schéma et la réalité, il est possible de relever un certain nombre de données concernant la situation et même de faire la représentation sous mode graphique simplement en reportant des segments tirés de notre schéma.*

L'intérêt derrière le report est de mesurer et de déplacer ces segments à l'aide d'outils de mesures conventionnelles (règle, mètre, ruban) ou non-conventionnelles (ficelle, compas, écart entre deux doigts, gomme à effacer). C'est le cas de la situation de la bouteille où on peut reporter des accroissements de hauteur prises sur un schéma de la bouteille directement sur le graphique.

#### 2.4.6 Les variables didactiques reliées aux connaissances nécessaires

Certaines situations impliquent la mobilisation de connaissances physiques ou géométriques pour pouvoir étudier la covariation entre les grandeurs en jeu. Par exemple, l'étude de la relation entre la hauteur d'un triangle et son aire, implique d'utiliser la formule de l'aire d'un triangle. Deux VD sont ici distinguées, une qui sera reliée aux situations nécessitant des connaissances géométriques et l'autre pour des situations nécessitant des connaissances physiques.

##### VD16 – Des connaissances géométriques sont nécessaires

La VD16 relève la mobilisation dans une situation, d'une ou de plusieurs connaissances géométriques afin d'étudier la covariation entre les grandeurs. Janvier et Pelletier (2003, p. 14) soulignent l'importance dans ce cas de la représentation schématique pour étudier la relation entre les grandeurs :

*Le schéma est particulièrement utile dans le cas où nous sommes en présence d'une situation géométrique puisqu'il est possible de faire abstraction des éléments superflus de la situation pour ne visualiser que les éléments importants. Si nous percevons certaines formes géométriques sur notre schéma, il nous sera possible d'utiliser les connaissances que nous avons sur ces figures géométriques pour faire certaines déductions et déduire certaines mesures.*

Par exemple, la situation s'intéressant à la relation entre la mesure des côtés d'un rectangle, pour un périmètre fixé, demande une compréhension minimale de ce qu'est un périmètre et de la façon de l'obtenir dans le cas d'un rectangle avant de pouvoir établir la relation entre les deux grandeurs. C'est le cas également de la situation du rectangle qui change de dimensions, mais qui conserve le même périmètre (Piaget, 1968) ou des carrés mouvants de Hit et Morasse (2009). Sans ces connaissances géométriques, ces situations sont difficiles à étudier.

#### VD17 – Des connaissances physiques (usuelles) sont nécessaires

La VD17 relève la présence dans une situation, d'une ou de plusieurs connaissances physiques qualifiées d'usuelles afin d'étudier la covariation entre les grandeurs. Prenons comme exemple, lorsqu'on observe la chute d'un objet, on utilise alors implicitement la gravité comme principe. C'est également le cas de la situation de la boule qui roule sur un plan incliné de Vollrath (1986). Janvier (1981) a réalisé des entrevues auprès d'élèves qui étudiaient la relation entre la distance parcourue depuis le départ par une voiture de course et sa vitesse. Il indique qu'en raison de leurs connaissances sur le sujet, les garçons n'ont pas la même aisance à exprimer la relation:

*Interviews showed that familiarity with cars' performance helped some boys (but not all) to use the graph at the proper symbolic level while they were confused with other graphs. Even a far below average boy in 1st year answered quickly "3" showing a clear understanding in his explanations. (p. 118)*

En effet, pour interpréter la covariation entre les grandeurs, il faut savoir qu'avant un virage on freine et qu'on accélère en plein milieu du virage. La situation proposée par Thompson et Saldanha (1998), la voiture qui se déplace sur une route se rapprochant

et s'éloignant de deux villes situées de part et d'autre de la route requièrent également des connaissances sur la conduite d'une voiture.

Soulignons que certaines situations abordent des sujets que l'on peut juger d'« adultes » comme la consommation d'essence, les principes d'investissements en économie et d'autres situations qui peuvent nécessiter des précisions pour des élèves de niveau secondaire. Ces contextes sont beaucoup moins familiers pour les élèves qui n'ont pas fait face à cette situation dans leur vie quotidienne.



## CHAPITRE III

### MÉTHODOLOGIE

Tel que présenté dans les chapitres précédents, nous nous intéressons au développement de la covariation vu comme préalable à la notion de fonction. Plus précisément, nous cherchons à caractériser les situations présentes dans les manuels scolaires du premier cycle du secondaire qui offrent un potentiel pour faire appel à la covariation. Dans la première section de ce chapitre, nous allons rappeler l'objectif de notre recherche. À la lumière du cadre conceptuel, trois questions de recherche viendront préciser notre objet d'investigation. Dans la deuxième section, nous justifions les fondements méthodologiques ayant mené au choix d'une recherche qualitative, plus précisément, celle de l'analyse de contenu. Par la suite, les trois collections des manuels sélectionnés seront présentées. Notre analyse s'appuie sur le repérage de situations à potentialité covariationnelle et sur la présence de VD qui permettent de caractériser ces situations. La quatrième et dernière section de ce chapitre propose une grille qui va permettre de reconnaître si une situation est susceptible de susciter une covariation et si oui quel point de vue de la covariation est sollicité. Deux grilles d'analyse autour des différentes VD relevées dans le cadre conceptuel (voir chapitre II) complètent cette section. Elles vont permettre de caractériser les situations retenues pour l'analyse. Ces différentes grilles d'analyse vont être utilisées pour analyser les situations proposées dans trois collections de manuels scolaires.

### 3.1 Un retour sur l'objectif et les questions de recherche

Tout d'abord, rappelons l'objectif de cette recherche (voir section 1.6) :

Analyser les collections de manuels du premier cycle du secondaire pour en dégager leur potentiel quant aux situations susceptibles de développer une approche covariationnelle de la fonction. Les deux questions générales de recherche peuvent s'énoncer comme suit :

- 1. Avant tout apprentissage formel du concept de fonction, quels sont les indices (questions et contexte) qui permettent de relever un potentiel covariationnel dans une situation?**
- 2. Quelles sont les caractéristiques des situations issues de manuels scolaires du premier cycle du secondaire (élèves de 12-14 ans) pour développer la covariation?**

Notre objectif est de nature interprétative, nous souhaitons reconnaître des situations susceptibles de susciter une covariation et établir un portrait des situations à caractère covariationnel qui sont disponibles dans les manuels scolaires approuvés par le ministère de l'éducation et de l'enseignement supérieur (MEES). Nous allons caractériser les situations retenues selon les deux axes principaux présentés au chapitre 2 (voir 2.3 et 2.4) : les représentations et 17 autres VD. Deux autres VD ont été ajoutées suite à l'analyse d'une des trois collections et qui seront présentées dans ce chapitre à la section 3.4.3. Pour le premier axe, pour l'analyse autour des représentations et des passages entre celles sollicitées par la situation, nous nous attardons essentiellement à analyser les questions proposées dans la situation. Les autres VD qui sont reliées au deuxième axe d'analyse émergent de l'énoncé de la situation, des éléments contextuels. C'est la raison pour laquelle les représentations sont analysées à part des autres VD. Ainsi, pour une situation donnée, les 19 autres variables sont indépendantes des questions et soulignons qu'il est possible de cibler plus d'un passage entre les représentations pour une situation. L'étude de ces 20 VD va permettre de caractériser les situations à potentiel covariationnel.

Pour la deuxième question de recherche et suite au cadre conceptuel, nous pouvons énoncer trois sous-questions, deux sous-questions qui vont s'attarder aux variables didactiques dans chacune des collections et une troisième sous-question qui va mener vers une comparaison des collections sélectionnées, à porter un regard transversal sur ce qui est proposé dans les manuels scolaires sous l'angle de la covariation

- 1) Pour chacune des collections, quels sont les passages entre les représentations les plus présentes dans les situations ayant un potentiel pour développer la covariation dans les manuels du 1<sup>er</sup> cycle du secondaire?
- 2) Pour chacune des collections, quelles sont les autres<sup>23</sup> variables didactiques qui caractérisent les situations qui favorisent la covariation dans les manuels du 1<sup>er</sup> cycle du secondaire ?
- 3) En regard des questions 1) et 2), quelles sont les comparaisons et distinctions entre les différentes collections au regard de la covariation?

Ainsi, en répondant à ces questions, nous souhaitons établir un portrait détaillé des situations susceptibles de favoriser la covariation. Cette analyse va nous permettre de caractériser chacune des collections à l'étude en dégagant le rationnel (si possible) relié à l'ordre dans lequel les situations retenues est présenté. Nous nous attendons à ce que les représentations sollicitées soient diversifiées, mais comme l'étude cible le premier cycle du secondaire, les représentations verbal, graphique et la table de valeurs risquent d'être les plus fréquentes au détriment des représentations sous forme de formule. Ainsi, en considérant le niveau ciblé, l'importance donnée à la représentation des fonctions sous forme de formule ne devrait pas être très grande. Pour le deuxième axe, nous souhaitons étudier chacune des situations en les caractérisant selon 17 VD recensées dans le cadre conceptuel et les deux VD qui se sont ajoutées suite à l'analyse.

---

<sup>23</sup> Nous ajoutons « autre » afin de préciser que les registres ainsi que les passages sont des variables didactiques.

### 3.2 Le choix méthodologique : vers la recherche qualitative

Cette section s'attarde aux choix méthodologiques qui découlent directement de l'objectif et des questions de recherche précisés précédemment. Dans cette section, nous expliquons brièvement les fondements de la méthode de recherche retenue, la recherche qualitative. Puis, nous terminons cette section en expliquant l'analyse de contenu qui a été utilisée pour analyser les manuels scolaires sélectionnés.

#### 3.2.1 La recherche qualitative

Savoie-Zajc et Karsenti (2018) présentent les distinctions entre « deux grandes approches en recherche », la recherche qualitative et la recherche quantitative.

La recherche quantitative permettrait de commencer une étude avec des hypothèses et de chercher à les valider, tandis que la recherche qualitative permettrait, entre autres, de recueillir des données décrivant des situations d'intérêt (liées à la question de recherche ou au problème de recherche) et de laisser les explications « émerger » de ces descriptions. (p.146)

Le choix d'une méthode de recherche qualitative s'avère pertinent puisque nous souhaitons dégager les situations des manuels du 1<sup>er</sup> cycle du secondaire susceptibles de favoriser la covariation et y décrire ce travail en nous appuyant sur différentes VD. Il est à noter que plusieurs fréquences seront recueillies et présentées dans notre recherche sans qu'elles servent à valider une hypothèse particulière grâce à des tests d'inférences statistiques. Celles-ci serviront plutôt à décrire les situations et les manuels selon une approche covariationnelle.

#### 3.2.2 L'analyse de contenu

*L'analyse de contenu est définie par Bardin (2013) comme :*

« un ensemble de techniques d'analyse des communications. Il ne s'agit pas d'un instrument, mais d'un éventail d'outils ; ou plus précisément d'un même outil, mais marqué par une grande disparité dans les formes et adaptable à un champ d'application très étendu : les communications. » (p.35)

*Comme l'indique l'auteure, cet ensemble de techniques s'applique aux communications au sens large. Dans cette perspective, un livre par exemple devient une communication écrite disponible à un large public. Ainsi nous considérons les manuels scolaires comme une forme de communication écrite et disponible pour les enseignants et les élèves du premier cycle du secondaire, cette forme de communication étant approuvée par le ministère de l'éducation. Ces manuels contiennent des messages pouvant être analysés selon les procédures de l'analyse de contenu. Afin d'aider les chercheurs inexpérimentés, Bardin (2013) identifie cinq critères qui tracent un chemin pour la création de catégories permettant l'analyse du contenu.*

- homogènes : on ne mélange pas les « torchons avec les serviettes » pourrait-on dire ;
- exhaustives : épuiser la totalité du « texte » ;
- exclusives : un même élément du contenu ne peut être classé dans deux catégories différentes de manière aléatoire ;
- objectives : des codeurs différents doivent aboutir aux mêmes résultats ;
- adéquates ou pertinentes : c'est-à-dire adaptées au contenu et à l'objectif. (p. 40)

Bardin émet toutefois des réserves quant à l'objectivité et ainsi à l'application de ces critères : « les fameuses règles auxquelles doivent obéir les « catégories » du découpage de la communication pour que l'analyse soit valide [sont] rarement applicables en fait » (p. 40). Ainsi, il ne faut pas être candide et croire qu'il existe une objectivité absolue dans le découpage des catégories. *L'analogie de Sabourin (2009) qui porte sur le déménagement permet d'expliquer la catégorisation que nous avons choisie pour l'analyse des situations issues des manuels scolaires, cette analogie s'appuie sur les critères de l'analyse de contenu.*

*Vous avez décidé de déménager d'appartement. Vous voulez minimiser vos efforts. Pour ce faire, vous avez décidé de constituer des boîtes de déménagement dans lesquelles vous classerez systématiquement vos objets selon certaines de leurs caractéristiques afin de pouvoir les transporter dans la bonne pièce et au bon endroit de la pièce, c'est-à-dire au plus près de leur utilisation future. Afin d'être efficace, chacune de vos boîtes doit permettre de classer des objets selon des **critères explicites et homogènes** (p. ex., la boîte des instruments de cuisine). (p. 421-422)*

L'analogie débute avec l'idée de classer les objets que vous souhaitez déménager dans des boîtes qui vont aller dans différentes pièces de l'appartement. Une fois les objets classés par pièce, il faut réfléchir aux objets qui seront mis ensemble dans la boîte de déménagement en fonction de l'emplacement qui est prévu pour ces objets dans la pièce. Dans l'analyse des situations tirées de manuels scolaires, nous avons subdivisé les VD en quatre catégories (voir 2.4.2) qui peuvent être associées aux quatre pièces d'un appartement : celles portant sur les grandeurs à l'étude sur les grandeurs à l'étude (9)<sup>24</sup> ; celles autour de l'étude graphique (4); celles sur les connaissances nécessaires (2) et celles sur les manipulations (2).

Les représentations et les passages entre celles-ci (représentation de départ et d'arrivée) sont analysés dans une cinquième catégorie qui représente une cinquième pièce de l'appartement. En ce qui concerne le rangement des différents objets dans les boîtes (qui sont les 17 VD ressorties dans le cadre conceptuel), Sabourin (2009) précise :

*Votre série de boîtes doit être **exhaustive** : il ne faut pas que vous fassiez de « boîte diverse », car vous devrez ouvrir toutes les boîtes diverses pour retrouver certains objets plutôt qu'une seule boîte. De plus, les critères définissant vos boîtes devront être **exclusifs** : il ne faut pas qu'un objet puisse être classé dans deux boîtes différentes, sinon, il faudrait ouvrir les deux boîtes pour le retrouver. Il faut donc définir d'une façon plus détaillée les critères caractérisant chacune des boîtes pour éviter cette situation. (p. 422)*

À cet effet, nous pouvons constater que pour la catégorie des VD portant sur les grandeurs à l'étude, les 9 VD ont été classées en deux sous-catégories : celles portant sur le type de grandeur (7) et celles s'attardant sur la relation entre les grandeurs (2). Nous pouvons considérer que le classement de nos VD est exhaustif pour analyser les situations puisque les cinq catégories de VD permettent de caractériser la situation à la fois pour les questions proposées que pour le contexte. Notre analyse ne s'arrêtera pas « au contenu » (par exemple les textes et les images), mais prend également en compte le « contenant » puisque nous allons considérer l'ordre de présentation des situations ainsi que les significations qu'y attribuent les auteurs (si disponibles dans les guides d'accompagnements). Pour le critère d'exclusivité, chacune des VD est source d'une information distincte sur la situation

---

<sup>24</sup> Le nombre entre parenthèses représente le nombre de VD dans chacune des catégories.

observée. Les différentes catégories regroupent des VD qui ne se recoupent pas. Par exemple, on peut relever la présence d'une interprétation graphique dans la catégorie portant sur les passages entre les représentations, mais il faut avoir accès à des VD dans une autre catégorie pour pouvoir caractériser par exemple sur le tracé ou le type des grandeurs en jeu. Nous pensons que la catégorisation que nous proposons des VD permet d'atteindre le critère de catégories « adéquates ».

*Vous voulez vous faire aider dans votre déménagement ? Chaque personne qui vous aidera devra classer de la même façon les objets, afin que quelle que soit la personne qui classe, on puisse retrouver les objets pour les disposer dans le nouvel appartement.*

*Enfin, vous ne devez pas faire l'erreur de prendre des boîtes trop grandes. Il faut que celles-ci soient **adéquates**, que leur description « colle » à la fois aux principes généraux de disposition de vos objets dans votre appartement qui pourrait être une fonction par pièce et à la fois aux particularités des objets déménagés. Par exemple, si vous faites une boîte définie seulement par le critère cuisine, en plus d'être énorme, elle contiendra des objets très différents (livres de cuisine, ustensiles, vaisselle, aliments, petits électroménagers pour la cuisine). (p. 422)*

De plus, des recherches (voir 2.3 et 2.4) justifient pourquoi les VD sélectionnées sont pertinentes pour l'analyse de situations susceptibles de favoriser la covariation. À la section 3.4, nous proposons l'analyse d'une situation tirée d'un des manuels scolaires, analyse qui s'appuie sur ces différentes catégories. Un autre chercheur à qui on proposerait les cinq catégories d'analyse devrait arriver à une analyse similaire à celle que nous faisons.

Ainsi, toutes les étapes de la préparation du « déménagement » sont complétées, les critères de l'analyse de contenu sont remplis. Avant de présenter un exemple de codage d'une situation à l'aide des cinq catégories d'analyse, attardons-nous aux collections sélectionnées dans cette étude.

### 3.3 La présentation des collections retenues

Les enseignants utilisent ou, ont la possibilité d'utiliser différents manuels scolaires provenant de différentes maisons d'édition au 1<sup>er</sup> cycle du secondaire (12 à 14 ans). Les trois collections ciblées par notre étude proviennent de la 1<sup>re</sup> édition issue de la réforme au

Québec de 2003. Ces manuels ont été approuvés par le ministère de l'éducation de l'époque (MEES). Chacune des trois collections retenues subdivise le premier cycle en quatre volumes, deux pour chaque année<sup>25</sup>. Voici les trois collections retenues (auteurs, année de publication, titre de la collection et maison d'édition) :

1. Guay, S, Hamel, J.-C., Lemay, S. (2005). *Perspective mathématique*. Éditions Grand Duc HRW.
2. Coupal, M. (2005). *À vos maths!* Chenelière éducation.
3. Cadieux, R., Gendron, I et Ledoux, A. (2005). *Panoram@th*. Éditions CEC.

Le tableau 3.1 présente le nom des sections ou des chapitres retenus pour chacune des collections analysées. Nous avons ciblé les sections/chapitres intéressants du point de vue de la covariation. Notre regard a été guidé par notre lecture du programme de formation de l'école québécoise (voir 1.3).

**Tableau 3.1** Sections ou chapitres retenus provenant des trois collections de manuels scolaires.

| Nom de la collection             | <b>Perspective mathématique</b>                                                                                                                     | <b>À vos maths</b>                                                        | <b>Panoram@th</b>                                                                                                                                              |
|----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Titres des sections ou chapitres | Les situations de proportionnalité<br>Les représentations graphiques<br>La représentation graphique d'une situation<br>Régularité et représentation | Les situations à deux variables<br>Vers la proportionnalité<br>Les suites | Suivre les règles<br>Des tables de valeurs aux représentations graphiques<br>Des rapports aux figures semblables<br>De l'inconnue à la résolution d'équations. |

<sup>25</sup> Nous considérons qu'au moins une de ces collections de manuels est disponible dans les différents milieux scolaires. Nous sommes aussi conscients du récent engouement à propos des « nouveaux » cahiers d'apprentissage (comme par exemple Sommet - Chenelière éducation, Point de Mire - Éditions CEC et Objectif : Mathématique – Grand Duc, ainsi que Puissance- Grand Duc). Ces cahiers sont produits par les mêmes maisons d'édition qui ont produit les collections de manuels, il serait intéressant d'observer les différences entre ces deux ressources dans une prochaine étude. Nous avons aussi choisi de ne pas observer les cahiers d'exercices associés aux manuels, ces cahiers ne sont cependant pas nécessairement disponibles dans tous les établissements d'enseignement secondaire.



Ainsi, nous avons ciblé plus précisément les chapitres/sections portant sur le raisonnement proportionnel, sur l'étude des régularités et sur l'étude des différentes représentations (principalement sur la table de valeurs et sur le graphique). Chaque collection nomme ces thématiques de différentes façons. Qui plus est, chacune de ces collections utilise des terminologies distinctes pour la présentation et la classification des situations qu'ils proposent. Chacune des collections respecte néanmoins une ligne directrice en présentant trois « phases ou temps » d'apprentissage dans lesquels se retrouvent les différentes situations :

- 1- Préparation des apprentissages;
- 2- Réalisation des apprentissages;
- 3- Intégration et réinvestissement des apprentissages.

La première phase est une forme d'activation des connaissances antérieures. *Panoram@th* présente des situations qui se trouvent uniquement dans le guide de l'enseignant<sup>26</sup>. *À vos maths* s'attarde sur cette phase en une page contenant quelques encadrés composés : d'activités exploratoires, de concepts et processus<sup>27</sup> du chapitre et un sommaire des contenus. *Perspective mathématique* illustre, dans cette phase, la thématique du dossier qui servira de ligne directrice tout au long du chapitre. La présentation de cette thématique portée par un dossier est suivie de la description du « but du dossier » et d'une situation de préparation qui : « te prépare aux nouvelles notions à explorer dans le dossier. » (p.VII). Cette situation est aussi une amorce d'un projet de réalisation personnelle à compléter tout au long du dossier. Dans tous les cas, nous n'avons pas tenu bon de nous intéresser aux phases de préparation des apprentissages. Ces sections contiennent peu de questions et peu

---

<sup>26</sup> Le guide de l'enseignant est une ressource conçue par la maison d'édition et destiné uniquement aux enseignants. Ce guide regroupe des exercices supplémentaires, des stratégies d'enseignements, etc. Nous n'avons pas retenu ces situations pour la recherche puisque l'on s'intéresse seulement aux situations disponibles dans les cahiers de l'élève qui sont dans les manuels scolaires.

<sup>27</sup> Par exemple, au premier cycle en arithmétique, les concepts portant sur le sens de la proportionnalité sont : rapports et taux équivalents, taux unitaire, égalité de rapports et de taux, rapport et coefficient de proportionnalité, variation directe ou indirecte. Les processus incluent entre autres la comparaison de rapports et de taux et la reconnaissance d'une situation de proportionnalité notamment à l'aide d'un contexte, d'une table de valeurs ou d'un graphique. (PFEQ, p. 252-253)

de situations, nous n'en avons pas retracé qui sont intéressantes pour notre objet d'étude. Nous nous sommes plutôt concentrés sur les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> phases des apprentissages.

Nous avons choisi de conserver les noms des chapitres/sections tels que nommés par les auteurs. Une situation retenue est donc identifiée avec le chapitre/section d'où elle est issue. De plus, nous avons relevé la page et le numéro de chacune des situations. Ces précisions vont permettre de savoir à quel endroit du manuel se trouve la situation et retracer l'ordre dans lequel sont présentées les situations retenues. Ainsi, nous avons codé la situation analysée à l'aide d'un code alphanumérique par exemple SP1, SP2, A12, etc. (SP pour désigner *Situation-problème* et le nombre désigne la *énième* situation analysée dans l'ordre d'observation). Le fichier de codage comprend l'emplacement de chacune des situations (chapitre et numéro de la page) afin de repérer ces situations d'après leur ordre de présentation dans le manuel. Une fois que nous aurons identifié le type de situation tel que mentionné par les auteurs du manuel, *Situation-problème*, *Activité*, *Exercices*, etc., cette situation sera analysée par la suite, selon les différentes VD identifiées.

### 3.3.1 La description des manuels *Perspective mathématique*

La collection *Perspective mathématique* présente, comme les deux autres collections, quatre manuels au premier cycle du secondaire. Ces manuels sont identifiés comme les manuels *Panoramath* (Manuel A, volume 1; Manuel B volume 2...). Chaque manuel est subdivisé en deux parties numérotées de 1 à 8 selon l'ordre d'apparition dans la série de manuel. Nous avons relevé trois parties proposant un travail possible sur la covariation. Chacune des parties est composée d'un ou deux dossiers qui débutent par une phase de préparation des apprentissages contenant la page titre du dossier et une situation de préparation. Le dossier sert de ligne directrice pour les différentes séquences « zooms sur ... » recueillant les situations selon le domaine mathématique. Nous avons retenu les sous-parties du dossier ciblant le domaine de l'arithmétique et de l'algèbre (voir tableau 3.2).

**Tableau 3.2** Chapitres sélectionnés pour l'analyse des volumes *Perspective mathématique*.

| <i>Titre du manuel (Auteurs)</i>                              | <b>Manuel</b> | Volume | Titre des parties et dossiers sélectionnés                                                                                           | Pages                      |
|---------------------------------------------------------------|---------------|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| Perspective mathématique (Guay, Hamel et Lemay, 2005 et 2007) | B             | 1      | <b>Partie 5 :</b><br>Dossier : Silence, on tourne!<br>✓ Les situations de proportionnalité                                           | p.56 à 63                  |
|                                                               |               |        | <b>Partie 6 :</b><br>Dossier : Sports spectaculaires<br>✓ Les représentations graphiques<br>✓ Banque de situations-problèmes         | p.128 à 155<br>p.169       |
|                                                               |               | 2      | <b>Partie 8 :</b><br>Dossier : Surprenante nature<br>✓ La représentation graphique d'une situation<br>✓ Régularité et représentation | p.413 à 422<br>p.423 à 431 |

À l'intérieur de chaque dossier se trouve la phase de réalisation des apprentissages. Cette dernière est composée de trois *Situations-problèmes (codées SP-XX)*<sup>28</sup> puis d'une situation de *Réalisation Personnelle* et parfois d'*Une page d'histoire*. Les pages suivantes regroupent la section *Activité (codée A-XX)* qui présente un contexte d'introduction afin de présenter du nouveau contenu : « les séquences d'activités [...] te feront découvrir les concepts et les processus liés aux situations-problèmes du dossier » (p. IX). Cette section est suivie des *Exercices d'application (codés E-XX)* qui comme le nom l'indique, est utilisée pour l'application du nouveau concept provenant de l'activité ou des activités précédentes. Parfois avant la section *Exercices d'application* se trouve une section *Mes outils* présentant des définitions. À la suite des *Exercices d'application* est présentée une section *Situations d'application (codées P-XX)* qui représente la plus grande partie des problèmes des différents chapitres. Après ces trois sections, les auteurs ajoutent une

<sup>28</sup> Les « XX » correspondent au numéro attribué à la situation, par exemple : SP-1 ou SP-14. Les différentes situations sont numérotées selon l'ordre d'apparition en commençant par 1. Toutes les situations de la section sont numérotées qu'elles soient ou non retenues.

nouvelle section *Activité* pour passer au concept suivant jusqu'à la fin du dossier. Avant de terminer les dossiers, une banque de situations-problèmes permet de revenir sur les notions du dossier.

### 3.3.2 La description des manuels *À vos maths*

Comme nous l'avons précisé, la collection *À vos maths* est composée de quatre manuels qui sont identifiés par les lettres A, B, C et D. Les deux premiers volumes sont dédiés à la première année du secondaire tandis que les deux autres, à la deuxième année. Pour notre recherche, nous n'avons recensé des situations susceptibles de favoriser la covariation que dans le manuel C. Ce manuel est habituellement utilisé pour la première partie de la 2<sup>e</sup> année du premier cycle du secondaire. Les trois chapitres sélectionnés abordent des éléments reliés à la covariation : la proportionnalité, les suites, les variables, etc. Chaque chapitre est composé de sections, ces sections sont ensuite subdivisées en séquences (voir tableau 3.3).

**Tableau 3.3** Chapitres sélectionnés pour l'analyse d'*À vos maths*.

| <b>Titre du manuel<br/>(Auteurs)</b>          | <b>Titre du chapitre, sections et séquences sélectionnées</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <b>Pages</b>                                                                |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| À vos maths,<br>manuel C<br>(Coupal,<br>2005) | <b>Chapitre 1 – Les variables</b><br>Section 1 : Les situations à deux variables<br>✓ Séquence 1.2 : Les situations à deux variables<br>Section 2 : La relation entre deux variables<br>✓ Séquence 2.1 : L'influence d'une variable sur une autre variable<br>✓ Séquence 2.2 : La représentation graphique d'une situation à deux variables<br>Bric à maths : Réinvestissement Section 2 | p.8 à 15<br>p.16 à 19<br>p. 20 à 25<br>p. 26 à 35                           |
|                                               | <b>Chapitre 2 : Vers la proportionnalité</b><br>Section 2 : Les rapports et les taux constants<br>✓ Séquence 2.1 : Savoir décoder...<br>✓ Séquence 2.2 : Le modèle proportionnel<br>✓ Séquence 2.3 : D'autres situations à deux variables<br>Bric à maths : Réinvestissement Section 2<br>Bric à maths : Réinvestissement Section 3                                                      | p.76<br>p.77 à 87<br>p.88 à 97<br>p.98 à 101<br>p.102 à 109.<br>p.139 à 141 |
|                                               | <b>Chapitre 3 : Des modèles mathématiques</b><br>Section 2 : Les suites                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                             |
|                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                             |

|  |                                                           |             |
|--|-----------------------------------------------------------|-------------|
|  | ✓ Séquence 2.1 : Les suites numériques                    | p.166 à 168 |
|  | ✓ Séquence 2.2 : Les suites arithmétiques                 | p.169 à 172 |
|  | ✓ Séquence 2.3 : Le terme général ou la règle d'une suite | p.172 à 180 |
|  | ✓ Séquence 2.4 : À chaque terme son rang                  | p.181 à 185 |
|  | ✓ Séquence 2.5 : Les représentations graphiques           | p.186 à 190 |
|  | Bric à maths : Réinvestissement Section 2                 | p.191 à 194 |

Une séquence est constituée de **Situations d'introduction (codées I-XX)** puis d'une ou de plusieurs sections **Action (codées E-XX)**. Les auteurs distinguent les situations d'introduction comme suit : « Ces questions t'amènent à construire le sens des concepts et processus à l'étude » (p. IV) et les rubriques Action! : « te permettent de mettre en pratique tes conceptions et de les valider » (p.V). La phase de réalisation se poursuit par un encadré théorique et se termine avec une section composée d'**Activités (codées A-XX)**.

La phase d'intégration et de réinvestissement est composée d'une section **Bric à maths (codée P-XX)** qui réinvestit les problèmes de la section. Cette organisation est la même dans tous les chapitres. D'autres sections apparaissent parfois dans les chapitres :

- **TIC (codées TIC-XX)** regroupant des situations utilisant des notions mathématiques appliquées à l'informatique;
- **Dans la vie (codées DLV-XX)** regroupant des problèmes d'application des mathématiques dans la vie.<sup>29</sup>

### 3.3.3 La description des manuels *Panoram@th*

La collection des manuels *Panoram@th* est composée de quatre manuels identifiés par les lettres A et B, deux manuels portent la lettre A et deux autres manuels la lettre B. Pour distinguer chacun des deux manuels identifiés par A ou B, le volume est indiqué : volume 1 ou volume 2. On a donc par exemple Manuel A, volume 1; Manuel A, volume 2 et à l'identique pour le manuel B. La progression privilégiée par les auteurs est d'utiliser, dans l'ordre croissant, les deux volumes du manuel A lors de la première année puis ceux du

<sup>29</sup> Toutes les situations de ces sections ont été rejetées de l'analyse.

manuel B lors de la deuxième année du cycle. Chacun des volumes est subdivisé en quatre chapitres appelés des **Panoramas** (*De 1 à 12*), chaque panorama se déclinant en différentes unités. Ainsi, en considérant cet ordre, le premier chapitre d'intérêt pour notre étude se trouve dans le manuel A, Volume 2. Le tableau 3.4 présente les manuels avec les chapitres ou panoramas sélectionnés pour l'analyse.

**Tableau 3.4** Chapitres ou panoramas sélectionnés pour l'analyse des volumes de *Panoram@th*.

| <i><b>Titre du manuel<br/>(Auteurs)</b></i>               | <b>M</b> | <b>V</b> | <b>Titre du chapitre (ou panorama) et unités<br/>sélectionnées</b>                                                                                                                                | <b>Pages</b>                                                                |
|-----------------------------------------------------------|----------|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Panoram@th<br>(Cadieux,<br>Gendron et<br>Ledoux,<br>2005) | A        | 2        | <b>Panorama 6 : De la notation décimale au système international d'unités</b><br>Tour d'horizon – Panorama 6                                                                                      | p.112 à 118                                                                 |
|                                                           |          |          | <b>Panorama 7 : Des suites numériques aux équations</b><br>Unité 7.1 : Et ensuite...<br>Unité 7.2 : Suivre les règles<br>Unité 7.3 : Prenez votre rang<br>Tour d'horizon – Panorama 7             | p.119 à 123<br><br>p.124 à 132<br>p.133 à 140<br>p.141 à 149<br>p.152 à 156 |
|                                                           | B        | 1        | <b>Panorama 9 : Des tables de valeurs aux représentations graphiques</b><br>Unité 9.1 C'est la suite<br>Unité 9.2 Une histoire à raconter<br>Unité 9.3 Ciel et mer<br>Tour d'horizon – Panorama 9 | p.2 à 5<br>p.6 à 17<br>p.18 à 26<br>p.27 à 40<br>p.41 à 44                  |
|                                                           |          |          | <b>Panorama 11 : Des rapports aux figures semblables</b><br>Unité 11.2 Du pareil au même<br>Unité 11.3 : Prendre les grands moyens<br>Tour d'horizon – Panorama 11                                | p.113 à 123<br>p.124 à 134<br>p.160 à 164                                   |
|                                                           |          | 2        | <b>Panorama 13 : De l'inconnue à la résolution d'équations</b><br>Unité 13.1 De bonne résolutions<br>Tour d'horizon – Panorama 13                                                                 | p.6 à 8<br>p.34 à 38                                                        |

Avant d'aborder la première unité d'un **Panorama**, un **Projet (codé PR-XX)** est proposé aux élèves avec cet objectif (Panoram@th, p. V) : « Ce projet vise le développement des compétences transversales et l'appropriation des notions mathématiques abordées dans

chacune des unités du panorama ». Les unités débutent par une *Situation-problème (codée SP-XX)* suivie d'une ou plusieurs *Activités (codées A-XX)* portant sur une notion similaire. Voici la façon dont les auteurs décrivent la *Situation-problème* : « est un élément déclencheur comportant une seule question qui est accompagnée de pistes d'exploration » (p. V). Elle se distingue de l'activité par son nombre de questions et son rôle qui (ibid. p. VI) : « favorisent la compréhension des notions mathématiques ». La section suivante *Calepin des savoirs* présente les notions explicitement avec des définitions. Toutes les sections précédentes complètent la « réalisation des apprentissages » d'une unité.

Par la suite, les auteurs présentent la phase : « intégration et réinvestissement des apprentissages » qui est composée d'une section appelée *Coup d'œil (codée E-XX)*, celle-ci regroupe plusieurs problèmes avec ou sans contexte. Elle comprend aussi une section *Zoom (codée E-XX)* afin d'approfondir les notions et d'en discuter en groupe.

À la fin de chaque *Panorama*, une section *Tour d'horizon (codée P-XX)*, regroupe des problèmes semblables aux sections *Coup d'œil* du chapitre. Parmi les chapitres se retrouvent aussi des sections appelées (*Société des maths (codées SM-XX)* et *À qui ça sert (codées AQCS-XX)*) qui proposent des contextes mathématiques appliqués dans la vie courante. La première section aborde l'histoire des mathématiques et la vie de certains mathématiciens, alors que la deuxième aborde des professions courantes dans lesquelles les notions mathématiques sont utilisées.

### 3.4 La présentation des grilles d'analyse

Tel qu'énoncé précédemment, notre recherche vise tout d'abord à repérer les situations qui présentent un potentiel pour travailler la covariation. Par la suite, ces situations seront caractérisées à l'aide de différentes VD regroupées en cinq catégories : 1) les représentations sollicitées et les passages entre ces représentations, 2) les grandeurs en jeu, 3) l'étude graphique, 4) les manipulations et 5) les connaissances nécessaires. Rappelons que nous pourrions nous prononcer sur les deux premières catégories pour toutes les situations retenues (représentations et grandeurs en jeu), mais toutes les situations ne mobilisent pas les trois autres catégories de VD (autour des graphiques, des manipulations

et des connaissances nécessaires). Dans cette section, nous présentons les deux grilles qui ont servi à analyser les situations à travers les deux axes. Une grille qui va permettre d'analyser la situation sous l'angle des passages entre les représentations (catégorie 1, axe 1) et une grille sur 17 autres VD (qui sont divisées en quatre catégories, axe 2). Deux autres VD ont été ajoutées suite à l'analyse du manuel *À vos maths* (voir 3.4.3). Ces deux grilles ont permis de recueillir la fréquence des occurrences (soit des passages entre les représentations ou la présence des autres variables didactiques) pour chacune des collections. Ces fréquences permettront une analyse sur la variété des situations qui sont susceptibles de recourir à la covariation.

#### 3.4.1 *Un premier regard* pour repérer les situations susceptibles de favoriser la covariation

Une fois les chapitres des collections identifiés comme étant possiblement porteurs au niveau d'un travail sur la covariation (voir 3.3), nous avons sélectionné dans ces chapitres les situations susceptibles de recourir à la covariation. Cette sélection s'appuie sur les propos de Passaro (2015, p. 53) qui définit comme suit l'approche covariationnelle :

*« Une approche covariationnelle est une manière de travailler la fonction en situation. Elle consiste en l'étude approfondie des variations concomitantes de deux grandeurs par l'intermédiaire d'un travail sur les accroissements concomitants de ces deux grandeurs dans des situations dans lesquelles on s'intéresse à déterminer comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante varie. »*

Parmi les situations identifiées dans les manuels, nous souhaitons relever celles qui ont un potentiel pour développer la covariation. Comme le précise Passaro nous ne retiendrons que celles qui sont contextualisées. À la section 2.2.3, nous avons déterminé certaines questions qui vont permettre de déterminer le point de vue de la covariation possiblement sollicité par la situation. Ceci signifie qu'une situation sera sélectionnée si au moins l'une des questions de la situation touche aux points de vue, global, local qualitatif ou global quantitatif ou un mix de ces points de vue. Ces points de vue sont associés à des unités de raisonnement, mais il n'est pas toujours possible de distinguer les unités qui peuvent être sollicitées dans une situation, nous nous en tiendrons alors au point de vue possiblement



mobilisé. Le tableau 3.5 qui a été présenté dans le cadre conceptuel présente ces points de vue avec les questions, les unités de raisonnement associées et des exemples de verbalisation.

**Tableau 3.5** Grille utilisée pour discerner les situations susceptibles de travailler la covariation.

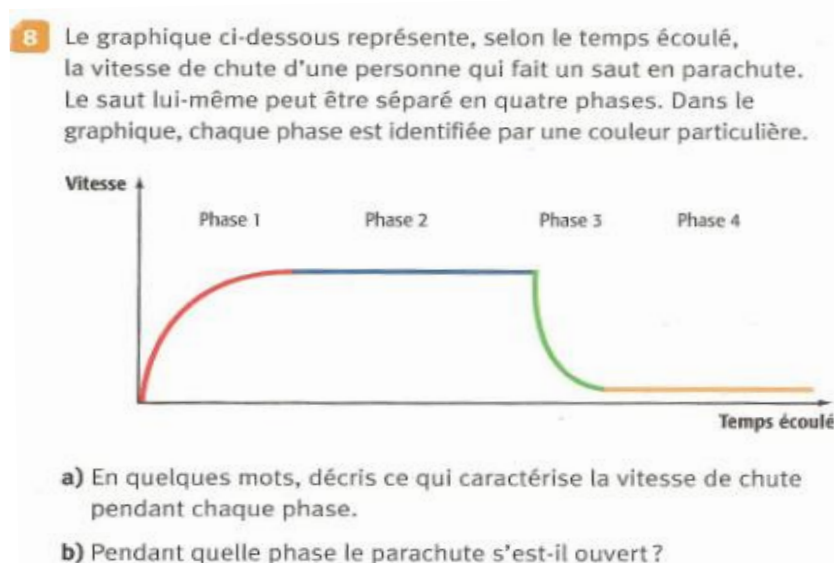
| Point de vue | Unités de raisonnement mobilisées                                                                                                                                                                  | Questions possibles                                                                                                                                                                                                                                                               | Exemples de verbalisations possibles                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Global       | U0 : Identifier deux grandeurs à observer parmi d'autres grandeurs                                                                                                                                 | « Quelles sont les grandeurs observables dans la situation ? »<br>« Quelles sont les deux grandeurs choisies ? »                                                                                                                                                                  | Sont énumérées différentes grandeurs (pas de verbalisation requise ici)<br>Deux grandeurs sont choisies pour en observer la relation                                                                                                                                        |
|              | U1 : Identifier la grandeur dépendante et indépendante<br><br>U2 : Identifier la présence de valeurs concomitantes des deux grandeurs<br><br>U5 : Déterminer les différentes phases de variation   | « Quelle est la relation entre ces deux grandeurs ? Sur laquelle des deux grandeurs veux-tu fixer ton regard et déduire à partir de celle-ci le comportement de l'autre grandeur ? ».<br><br>« Comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente ? » | Plus les valeurs de la grandeur indépendante augmentent :<br>1- plus les valeurs de la grandeur dépendante augmentent<br>2- plus les valeurs de la grandeur dépendante diminuent<br>3- les valeurs de la grandeur dépendante restent constantes                             |
|              | U4 : Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante<br><br>U5 : Déterminer les différentes phases de variation | « Comment se comportent les accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont constants ? »                                                                                                                                    | Trois cas sont possibles lorsque les valeurs des deux grandeurs augmentent :<br>Pour des accroissements constants des valeurs de la grandeur indépendante :<br>- On a des accroissements constants ou nuls des valeurs de la grandeur dépendante (droite dans le graphique) |

|                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                          | <p>-On a des accroissements de plus en plus grands des valeurs de la grandeur dépendante (courbe ouverte vers le haut)</p> <p>-On a des accroissements de plus en plus petits des valeurs de la grandeur dépendante (courbe ouverte vers le bas)</p> |
| <i>Local quantitatif</i> | <p>U8 : Quantifier un accroissement (ou un décroissement) de la grandeur dépendante pour un accroissement précis de la grandeur indépendante</p> <p>U9 Quantifier un accroissement (ou un décroissement) de la grandeur dépendante pour un accroissement unitaire de la grandeur indépendante</p> | <p>« Quelle est la valeur du rapport des accroissements concomitants des deux grandeurs pour un certain accroissement de la grandeur indépendante? »</p> | <p>Une verbalisation semblable peut être ici mobilisée, mais en y ajoutant des valeurs numériques.</p>                                                                                                                                               |

Nous présentons dans ce qui suit deux exemples de situations, une qui a été retenue et une situation rejetée pour illustrer la façon dont l'analyse a été menée pour retenir ou rejeter les situations.

### ***Un exemple de situation retenue***

Voici un exemple de situation retenue dont les deux questions sont susceptibles de recourir à la covariation. Cette situation est tirée de Perspective mathématique et est codée P-20. La situation est analysée brièvement dans cette section quant à son potentiel pour recourir à la covariation. Elle sera reprise pour une analyse plus fine au chapitre suivant portant sur les situations retenues de la collection *Perspective mathématique* (voir 4.1.1).



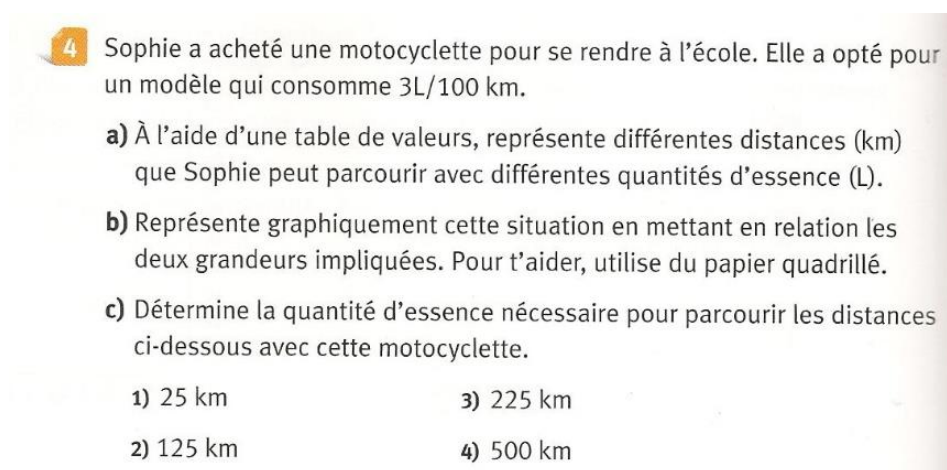
**Figure 3.1** *Perspective mathématique, Manuel B, Partie 6. Les représentations graphiques. Vol. 2. p. 153. Situation retenue.*

Cette situation requiert une interprétation graphique. Les grandeurs à l'étude sont le temps et la vitesse. Ces deux grandeurs sont qualitatives, l'élève n'a pas de nombres à sa disposition. Elle cible ainsi une description qualitative du tracé graphique représentant la relation entre la vitesse et le temps écoulé. Le tracé est identifié par quatre phases représentées par des couleurs différentes, ces phases correspondent à des courbes différentes. Nous pouvons remarquer que les deux questions proposées dans la situation ciblent la description des phases du saut d'un parachutiste, « pendant » son saut. Elles ont recours aux mêmes types de représentations, au départ : le graphique et à l'arrivée : l'élève doit arriver à une description verbale qui s'appuie sur différents intervalles illustrant le saut. Pour répondre à la première question, l'élève doit mettre en relation les deux grandeurs à l'étude (la vitesse du parachutiste et le temps écoulé depuis le saut de l'avion). Il doit se pencher sur la façon dont covarient ces deux grandeurs pour des intervalles de temps choisis. La description en a) sera d'ordre plus général afin de décrire les phases croissantes, constantes et décroissantes de la vitesse pour des intervalles donnés. Cette question cible le raisonnement global et aussi local qualitatif puisqu'il faut prendre en compte les deux grandeurs, la relation entre elles ainsi que les variations engendrées à la vitesse alors que le temps s'écoule. Spécifions que les grandeurs sont identifiées par le

contexte et la question a) et le graphique spécifient que l'on s'appuie sur le temps écoulé. Ainsi, il est possible de conclure en b) que : comme la vitesse du parachutiste a diminué grandement sur une courte période de temps et que la diminution est de moins en moins grande, alors le passage de la phase 2 à la phase 3 représente l'ouverture du parachute. Cette deuxième question cible un raisonnement local qualitatif puisqu'on s'intéresse à des décroissements de moins en moins grands de la vitesse pour des accroissements constants de temps. Si une situation amène ce type de questionnement sur les accroissements des grandeurs<sup>30</sup>, nous l'avons sélectionnée.

### *Un exemple de situation rejetée*

Nous avons rejeté, de notre analyse, la situation de la motocyclette (voir figure 3.2) provenant du même manuel que la situation précédente, *Perspective mathématique*. Cette situation se distingue de l'autre, car le questionnement proposé n'amène pas un travail sur la covariation.



**Figure 3.2** Situation tirée de *Perspective mathématique, Manuel B, Partie8, les représentations graphiques d'une situation. Vol. 2. p. 418. Situation rejetée.*

Dans cette situation, bien que l'élève soit amené à observer la relation entre le nombre de litres d'essence consommés pour une distance parcourue, le regard est porté uniquement

<sup>30</sup> À noter que les auteurs de *Perspective mathématique* utilisent le terme grandeur ou quantité dans les situations décontextualisées ou nomment explicitement, en contexte, les deux grandeurs ou quantités.

sur la correspondance entre les valeurs associées aux deux grandeurs. L'enseignant pourrait ajouter dans les questions a) et b) des réflexions portant sur la covariation, mais comme aucune indication n'est faite en ce sens, nous considérons que ces questions ne favorisent pas le développement du raisonnement covariationnel. Comme les autres questions, la question c) favorise plutôt le raisonnement correspondance, une lecture point par point du graphique tracé en b) puisque l'objectif est d'obtenir une valeur de la quantité d'essence pour une distance donnée. Comme nous l'évoquions précédemment, il serait possible de cibler la covariation en modifiant le questionnement lié à la situation. Voici un exemple, pour la question c) : « Si la voiture de Sophie consomme 3 litres pour 100 km et que ce taux est constant durant tous ses trajets, combien de litres de plus devra-t-elle utiliser pour parcourir 25 kilomètres supplémentaires? Et si elle souhaite parcourir 125 kilomètres supplémentaires? Etc. ». Ces questions sont susceptibles d'amener une observation des accroissements du nombre de litres pour des intervalles donnés plutôt que d'observer la relation comme une proportion. Ces questions suscitent la mobilisation d'un raisonnement global et local quantitatif de la relation entre les kilomètres parcourus et les litres d'essence utilisés. Il est possible de proposer des questions suscitant la covariation, mais nous nous limiterons dans le chapitre IV à l'analyse des situations telles que présentées dans les manuels. Au chapitre V (voir 5.2), nous proposons des pistes de réflexion sur un jeu autour du questionnement et du contexte pour susciter une covariation.

Une fois les situations qui sont susceptibles de favoriser la covariation sélectionnées, nous avons cherché à caractériser ces situations à travers une analyse des variables didactiques mobilisées. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur deux grilles d'analyse, l'une portant sur les passages entre les représentations (voir 3.4.2) et l'autre sur les 19 autres VD (voir 3.4.3), 17 qui proviennent du cadre conceptuel et deux autres qui sont ressorties après avoir analysé le manuel *À vos maths*.

### 3.4.2 Un deuxième regard sur les passages entre les représentations à travers le tableau de traduction (Janvier, 1983)

Le tableau de passages entre les représentations a été présenté dans le cadre conceptuel (voir 2.3). Il permet de noter les passages entre les représentations qui sont les plus

travaillées dans une collection de manuels scolaires et d'avoir accès aux situations qui mobilisent certains passages ciblés. Il est important de remarquer qu'une même situation peut mobiliser différents passages, elle se retrouvera donc dans plus de deux cases du tableau. Nous nous en sommes tenus aux questions posées dans la situation pour dégager les représentations possibles en jeu. Un travail sur les représentations spontanées aurait pu être intéressant, mais n'a pas été tenu compte dans notre analyse. Pour décrire la façon dont nous avons procédé pour utiliser ce tableau de passages entre les représentations, nous reprenons la situation retenue présentée en 3.4.1 (voir figure 3.1). Comme la situation P-20 propose deux questions, nous ajoutons le codage (P-20 devient P-20a et P-20b) pour considérer les différents passages possibles entre les représentations. Les deux questions ont pour représentation de départ le graphique. C'est par une lecture et interprétation du graphique qu'il est possible de répondre aux deux questions en s'appuyant sur une **description verbale** (représentation d'arrivée). Bien que la description associée à la question b) est plus succincte que celle en a), la représentation d'arrivée est la même. Ainsi, les codes P-20a et P-20b se retrouvent dans la quatrième rangée et première colonne du tableau représentant les passages entre les représentations (Graphique → Description verbale, voir tableau 3.6).

**Tableau 3.6** Codage de passages entre les représentations de la situation du saut en parachute, *Perspective mathématique, Manuel B, Partie 6. Les représentations graphiques. Vol. 2. p. 153.*

| <br><b>Représentation d'arrivée</b><br><b>Représentation de départ</b> | <b>Description verbale</b> | <b>Schéma</b> | <b>Table de valeurs</b> | <b>Graphique</b> | <b>Formule</b> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|---------------|-------------------------|------------------|----------------|
| <b>Description verbale</b>                                                                                                                                |                            |               |                         |                  |                |
| <b>Schéma</b>                                                                                                                                             |                            |               |                         |                  |                |

|                         |                              |  |  |  |  |
|-------------------------|------------------------------|--|--|--|--|
| <b>Table de valeurs</b> |                              |  |  |  |  |
| <b>Graphique</b>        | <b>P-20a</b><br><b>P-20b</b> |  |  |  |  |
| <b>Formule</b>          |                              |  |  |  |  |

N'oublions pas que nous aurons une préoccupation pour relever si les situations requièrent une expérience même si on ne retrouve pas l'expérience dans le tableau, nous avons voulu reprendre le tableau tel que présenté par Janvier (1983) et qu'on retrouve dans le programme de formation de l'école québécoise des années 90. Les passages entre les représentations de toutes les situations sont compilés dans un seul tableau. Chaque question proposée dans les situations a ainsi été codée dans le tableau. Ainsi, nous avons obtenu pour chaque collection des fréquences qui dénombrent les différents passages entre représentations. Ceci a permis de déterminer si certaines représentations sont plus utilisées que d'autres. Si les situations sont composées de questions dont la représentation de départ est la même que celle à l'arrivée, elles seront identifiées dans la diagonale. Comme le précise Janvier (1983), ce travail dans un même type de représentation est essentiel pour bien comprendre la représentation en question.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, notre étude cible le premier cycle du secondaire, nous nous attendons donc à ce que la représentation sous forme de formule ne soit pas trop présente, ni comme représentation de départ ni comme représentation d'arrivée. Nos attentes sont plutôt que les représentations graphiques et les tables de valeurs soient grandement sollicités puisque le programme porte une attention particulière sur ces représentations à ce niveau d'étude. En effet, on peut remarquer que certains titres des chapitres retenus contiennent les mots : graphique ou table de valeurs (voir 3.3).

### 3.4.3 Un troisième regard sur les 19 autres VD à travers le tableau des VD

Pour analyser les situations retenues selon les 17 VD identifiées dans le cadre conceptuel, nous avons eu recours à ce qui est nommé par Janvier et Pelletier (2003), le tableau des

VD. Pour chacune des situations, nous déterminerons l'absence ou la présence d'une VD de façon dichotomique (la valeur 0 étant attribuée pour l'absence et 1 pour la présence). Ainsi, il sera possible de cumuler les fréquences d'apparition (et d'absence) d'une VD dans les différents manuels. Pour décrire la façon dont nous avons utilisé ce tableau, reprenons encore la situation retenue présentée en 3.4.1 (voir figure 3.1, codé P-20). Pour l'analyse, on passe en revue les 19 VD ciblées, les 17 VD provenant du cadre et les deux qui sont ressorties de l'analyse. Dans la situation du saut en parachute, le contexte ne propose pas de valeurs numériques (VD2), les deux grandeurs identifiées admettent des valeurs continues (VD3), le temps est une des grandeurs (VD6) et il est possible (en combinant les VD6 et VD7) de déterminer qu'elle est prédominante. De plus, les deux grandeurs sont déjà placées dans un plan cartésien, ce qui impose la relation de prédominance entre les deux grandeurs (VD8). Le tracé du saut est unique (VD11), mais il est constitué de différents tracés (VD10). Ainsi, il y a deux courbes (une ouverte vers le haut et l'autre vers le bas) et deux parties rectilignes (VD10). Dans cette situation, il est possible de confondre le déplacement du parachutiste selon le temps avec sa représentation graphique si l'on considère que la phase 3 représente le parachutiste dont la hauteur diminue (VD12). Cette situation est à notre avis difficile à faire pour les élèves, car elle exige la connaissance de phénomènes physiques associés au saut en parachute et à la vitesse de chute d'un objet (VD17). Le tableau 3.7 présente le tableau des VD complété pour la situation du saut en parachute (voir figure 3.1). Nous y avons inséré les deux VD qui sont issus de l'analyse du manuel *À vos maths*. Il s'agit de la VD18 (Absence de relation) et la VD19 (Grandeurs définies par l'élève). La VD18 est dans la catégorie type de relations entre les grandeurs comme elle relève qu'aucune relation n'est possible entre elles. La VD19 est dans la catégorie type de grandeurs comme l'on s'intéresse à la façon dont les grandeurs sont fixées pour l'observation de la relation. Dans ce cas-ci, ce sera lorsque l'élève définira lui-même les grandeurs à observer.



**Tableau 3.7** Analyse de la situation du saut en parachute dans le tableau des variables didactiques, situation tirée de *Perspective mathématique, Manuel B, Partie 6. Les représentations graphiques. Vol. 2. p.153.*

| Catégories des variables didactiques    |                              | Codage | Variables didactiques                                                                      | Absence (0) ou Présence (1) |
|-----------------------------------------|------------------------------|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| Qui s'attardent aux grandeurs à l'étude | Type de grandeurs            | VD1    | Présence de 3 grandeurs ou plus (imposées ou non)                                          | 0                           |
|                                         |                              | VD2    | Absence de valeurs numériques des grandeurs observées                                      | 1                           |
|                                         |                              | VD3    | Une grandeur admet des valeurs continues                                                   | 1                           |
|                                         |                              | VD4    | Une grandeur admet des valeurs discrètes                                                   | 0                           |
|                                         |                              | VD5    | Une grandeur admet des valeurs négatives                                                   | 0                           |
|                                         |                              | VD6    | Le temps est une grandeur                                                                  | 1                           |
|                                         |                              | VD7    | Le temps est la grandeur conséquente                                                       | 0                           |
|                                         |                              | VD19   | Grandeurs définies par l'élève                                                             | 0                           |
|                                         | Relation entre les grandeurs | VD8    | La relation entre les grandeurs est imposée                                                | 1                           |
|                                         |                              | VD9    | Les grandeurs sont interchangeable                                                         | 0                           |
|                                         |                              | VD18   | Absence de relation                                                                        | 1                           |
| Autour de l'étude graphique             |                              | VD10   | Différents types de tracés (courbe, discret, ligne droite)                                 | 1                           |
|                                         |                              | VD11   | Présence de plusieurs types de tracés dans un même plan cartésien                          | 0                           |
|                                         |                              | VD12   | Conflit objet-source, objet-cible                                                          | 1                           |
|                                         |                              | VD13   | Graphique représentant un ensemble d'expériences fonctionnelles                            | 0                           |
| Autour des manipulations                |                              | VD14   | La modélisation peut se réaliser en « opérant » sur un schéma qui représente la situation. | 0                           |
|                                         |                              | VD15   | Report possible de segments                                                                | 0                           |
| Reliées aux connaissances nécessaires   |                              | VD16   | Connaissances géométriques                                                                 | 0                           |
|                                         |                              | VD17   | Connaissances physiques (usuelles)                                                         | 1                           |

Pour chaque situation retenue dans les trois collections, nous avons recompilé les VD mobilisées. Ce tableau permet d'obtenir les VD les plus fréquentes dans les collections (outre les représentations). Pour ces VD, il est difficile d'avoir une idée des tendances parce qu'il n'y a pas de prescription ministérielle quant à ces caractéristiques. Cependant, nous nous attendons et souhaitons que les situations utilisent des caractéristiques assez variées

pour que l'élève soit plongé dans une diversité de situations qui vont l'amener à développer le raisonnement covariationnel sur lequel il pourra s'appuyer au deuxième cycle du secondaire lors de l'introduction explicite du concept de fonction. Soulignons qu'avant de remplir le tableau des VD, nous avons analysé chacune des situations retenues dans un document Excel (voir Annexe C). Il est alors facile de retracer les situations selon les VD.

## CHAPITRE IV

### RÉSULTATS ET ANALYSE

Ce chapitre brosse un portrait des situations analysées dans trois collections de manuels : *Perspective mathématique*, *À vos maths* et *Panoram@th*. Pour chacune de ces trois collections, nous présentons d'abord le nombre de situations retenues, les chapitres dans lesquels ces situations prennent place ainsi que le type de situations, c'est-à-dire la nomenclature proposée par les auteurs des manuels. Par la suite, nous proposons des exemples de situations rejetées, accompagnés des raisons qui nous ont amenés à faire ce choix. Dans les sections qui suivent, nous nous attardons à analyser les situations retenues, en précisant d'une part la façon dont le raisonnement covariationnel peut se déployer et d'autre part en caractérisant ces situations selon les 20 VD que nous avons ressorties. Finalement, une synthèse et discussion sur ce qui est ressorti dans l'analyse est proposée.

#### 4.1 L'analyse des manuels de la collection *Perspective mathématique*

Tel que spécifié dans la méthodologie (voir 3.3.1), nous avons ciblé les parties 5, 6 et 8 provenant des deux manuels B (Volume 1 et Volume 2) de la collection *Perspective mathématique*. Ces manuels sont prévus pour la deuxième année du premier cycle (élèves de 13-14 ans).

#### 4.1.1 Un aperçu des chapitres sélectionnés pour l'analyse

Des soixante-dix-sept situations observées dans les parties 5, 6 et 8, nous en avons sélectionné vingt-quatre à caractère covariationnel (environ 31% des situations, voir tableau 4.1).

**Tableau 4.1** Tableau des fréquences des situations retenues et analysées dans trois parties de *Perspective mathématique*.

| Titre du chapitre (Partie)                                                                                                | Nombre de situations retenues | Nombre total de situations | Fréquence (% , arrondi à l'entier) |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| Partie 5 :<br>Dossier : Silence, on tourne!<br>Les situations de proportionnalité                                         | 1                             | 20                         | 5                                  |
| Partie 6 :<br>Dossier : Sports spectaculaires<br>Les représentations graphiques                                           | 17                            | 25                         | 68                                 |
| Partie 8 :<br>Dossier : Surprenante nature<br>La représentation graphique d'une situation<br>Régularité et représentation | 6                             | 32                         | 19                                 |
| Total                                                                                                                     | 24                            | 77                         | 31                                 |

Comme mentionné dans la méthodologie (voir 3.3.3), *Perspective mathématique* comprend quatre manuels pour le premier cycle du secondaire. Chacun des manuels est composé de deux différentes « parties » qui regroupent plusieurs domaines mathématiques (arithmétique, algèbre, géométrie, statistique, etc.). Les parties sont composées de plusieurs dossiers portant sur un sujet particulier, par exemple le dossier *Sports spectaculaires* met l'accent sur différentes activités sportives dans plusieurs domaines mathématiques. Les premières pages des dossiers regroupent trois *situations-problèmes* suivies par des *activités* portant sur les mêmes concepts et processus qui

sont en jeu dans les *situations-problèmes*. Ces deux types de situations sont suivis par des *exercices d'application* et des sections théoriques nommées « *mes outils* ». Après ces *exercices*, nous retrouvons des *situations d'application*. Ensuite, avant de terminer un dossier, d'autres *activités* sont proposées, puis est présentée une banque de *situations-problèmes*. Ces situations reviennent sur plusieurs concepts et processus qui ont été travaillés tout au long du dossier. Ainsi, nous pouvons constater que ce manuel garde la même structure à l'intérieur de chaque dossier avec des *situations-problèmes* et des *activités* à chaque début et fin d'un dossier. Les premières situations sont présentées en vue d'introduire le contenu alors que les dernières visent l'intégration et le réinvestissement des apprentissages faits dans le dossier. Le dossier sert de ligne directrice pour les différentes séquences « zooms sur ... » recueillant les situations selon le domaine mathématique. Nous avons retenu les sous-parties du dossier ciblant le domaine de l'arithmétique et de l'algèbre qui se retrouvent dans les parties 5, 6 et 8.

La partie 6 regroupe le plus grand nombre de situations à caractère covariationnel soit dix-sept (voir tableau 4.1). Cela représente dix-sept des vingt-cinq situations du dossier *Sports spectaculaires*, celui-ci met l'accent sur les représentations graphiques. Treize des dix-sept situations portent sur la représentation graphique et n'utilisent pas de valeurs numériques. Certaines situations demandent aux élèves de travailler à partir de tracés, d'interpréter des graphiques, d'autres requièrent de produire des tracés et d'autres, les deux. Nous avons spécifié au chapitre 2 (voir 2.4.3.1) comment le regard covariationnel peut se déployer dans des situations sans données numériques. Dans le cas particulier de la représentation graphique, afin de bien saisir les tracés, il est primordial de considérer les deux grandeurs qui varient conjointement, en d'autres mots, les deux grandeurs qui covarient. La situation du saut en parachute présentée au chapitre précédent (voir figure 3.1) est l'une des dix-sept situations retenues de la partie 6 portant sur l'interprétation d'un tracé sans valeurs numériques.

Six des dix-sept situations retenues restantes se retrouvent dans la partie 8, cinq d'entre elles sont situées à la fin du chapitre (p. 420 à 431). La sixième situation est, quant à elle, une activité présentée en début de chapitre. Cette partie est la dernière du cycle et y sont proposées quelques situations qui reviennent sur les notions des parties précédentes (5 et 6 par exemple). Quant à la partie 5, une seule situation<sup>31</sup> a été retenue qui se trouve au début du chapitre portant sur les situations de proportionnalité. Les autres situations de cette partie se concentrent surtout sur la complétion de tables de valeurs, mais sans nécessairement mettre l'accent sur une approche covariationnelle (voir 4.1.2 pour des exemples de situations rejetées). Tel que nous l'avons précisé, les auteurs de *Perspective mathématique* identifient des *situations-problèmes*, des *activités*, des *exercices d'application* et des *situations d'application*. Le tableau 4.2 présente les fréquences de ces différents types de situations selon la terminologie utilisée par les auteurs de *Perspective mathématique*.

**Tableau 4.2** Tableau des fréquences des types situations retenues dans les parties 5, 6 et 8 de la collection *Perspective mathématique*.

| Type de situation               | Nombre de situations retenues | Nombre total de situations | Fréquence (% , arrondi à l'entier) |
|---------------------------------|-------------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| Situations-problèmes (SP-XX)    | 3                             | 7                          | 43                                 |
| Activités (A-XX)                | 7                             | 14                         | 50                                 |
| Exercices d'application (E-XX)  | 3                             | 16                         | 19                                 |
| Situations d'application (P-XX) | 11                            | 57                         | 19                                 |
| Total                           | 24                            | 77                         | 31                                 |

<sup>31</sup> Cette situation est qualifiée d'activité par les auteurs et amène les élèves à réaliser une expérimentation physique à l'aide d'un pendule. La situation s'intéresse à observer quelques relations entre les battements d'un pendule, le temps et la longueur de la corde du pendule. Dans la première partie de l'expérience, on observe la relation entre le nombre de battements du pendule et le temps écoulé. La deuxième expérience s'intéresse à la relation entre la longueur de la corde et le temps comme durée quand on effectue 20 battements de pendule. Nous reviendrons sur cette situation dans la section 4.1.4.

Plus d'un tiers des situations retenues sont des *Situations-problèmes* ou des *Activités* (10 situations-problèmes et Activités sur 24 situations retenues donc 42%), ce sont les deux types de situations qui ont une plus forte représentativité. On remarque que ce type de situations sont plus ouvertes, plus complexes autant dans le questionnement que dans les raisonnements à déployer. Par exemple, l'*activité* « les pendules » (voir figure 4.9) demande aux élèves de faire deux expériences portant sur les battements d'une pendule. Les élèves doivent compléter une table de valeurs pour la première expérience puis changer les paramètres de l'expérience (et les grandeurs à observer) afin d'en compléter une deuxième. Les élèves sont invités ensuite à répondre à des questions quant aux relations entre les grandeurs des expériences précédentes sans être vraiment guidés par les questions proposées. Les *exercices* et les *situations d'application*, quant à eux, ciblent divers aspects : 1) la reconnaissance de données dans un graphique ou dans une table de valeurs, 2) la construction de tables de valeurs ou de graphiques, 3) la description verbale d'une relation entre deux grandeurs, mais dans un cadre plus limité comme par exemple la *situation d'application* « les trains » (voir figure 4.7) qui présente deux graphiques à interpréter dans l'objectif que l'élève en produise un autre impliquant deux grandeurs déjà présentes dans les graphiques donnés.

Toutefois, la fréquence des différents types de situations dans le manuel a une influence sur le nombre de situations retenues. Bien que seulement 19% des *situations d'application* soient retenues, cela représente près de la moitié des situations à caractère covariationnel que nous avons identifiées (onze des 24, voir tableau 4.3). La faible fréquence des *situations-problèmes* qui ont du potentiel pour développer le raisonnement covariationnel (12,5%) s'explique en partie en raison du faible nombre de situations identifiées ainsi par les auteurs. Dans chacune des parties, le manuel propose trois *situations-problèmes* au début et une banque de *situations-problèmes* à la fin. Cependant, comme les différentes parties couvrent plusieurs thèmes dans un même chapitre (par exemple : la géométrie, l'arithmétique, les statistiques, etc.), certaines

*situations-problèmes* ont tout simplement été rejetées dès le premier tri puisqu'elles ne touchaient pas à des thématiques porteuses sous l'angle du raisonnement covariationnel comme l'étude de régularités, l'étude de relations entre les différentes grandeurs et les relations proportionnelles. Finalement, il restait sept situations-problèmes touchant à ces dernières thématiques et elles sont toutes dans la partie 6. Tel que précisé, seulement trois des sept *situations-problèmes* ont été retenues comme favorisant un travail sur le raisonnement covariationnel (voir tableau 4.3).

**Tableau 4.3** Tableau des fréquences des différents types de situations retenues selon la partie de la collection *Perspective mathématique*.

|                                    | Partie 5 | Partie 6 | Partie 8 |
|------------------------------------|----------|----------|----------|
| Nombre de Situations-problèmes     | 0        | 3        | 0        |
| Nombre d'activités                 | 1        | 3        | 3        |
| Nombre de situations d'application | 0        | 8        | 3        |
| Nombre d'exercices d'application   | 0        | 3        | 0        |

Le tableau 4.3 permet de constater la richesse du travail mené autour de la covariation qui peut prendre place à l'intérieur de différents types de situations, selon la nomenclature adoptée par les auteurs. Nous pouvons observer que la partie 6 regroupe le même nombre de *situations-problèmes*, d'*activités* et d'*exercices d'application* qui favorisent un travail sur le raisonnement covariationnel (trois situations de chaque type) ainsi qu'un grand nombre de *situations d'application* (huit en tout). Le travail mené dans les parties 5 et 6 sera réinvesti à travers des *activités* et des *situations d'application* dans la partie 8. Ainsi, les élèves peuvent être confrontés au raisonnement



covariationnel à travers essentiellement des *activités* et des *situations d'application* dans la collection *Perspective mathématique*.

#### 4.1.2 Des exemples de situations rejetées pour l'analyse

Plusieurs situations de la partie 8 et de la partie 5 ont été rejetées dans notre étude (19 situations pour la partie 5 et 26 pour la partie 8). Ces situations sont généralement décontextualisées, ou brièvement contextualisées, et elles contiennent uniquement de brèves directives ne nous permettant pas d'attribuer à la situation un caractère covariationnel.

À titre d'exemple, la figure 4.1 présente deux situations qui ont été rejetées, elles sont identifiées comme des *exercices d'application* par les auteurs.

**1** Reproduis les tableaux suivants et remplis-les afin qu'ils traduisent des situations de proportionnalité.

a)

|               |   |    |   |    |   |
|---------------|---|----|---|----|---|
| QUANTITÉ N° 1 |   | 12 |   | 28 |   |
| QUANTITÉ N° 2 | 1 | 3  | 5 |    | 9 |

b)

|               |    |   |    |    |   |
|---------------|----|---|----|----|---|
| QUANTITÉ N° 1 | 12 |   |    | 24 |   |
| QUANTITÉ N° 2 | 1  | 3 | 11 |    | 7 |

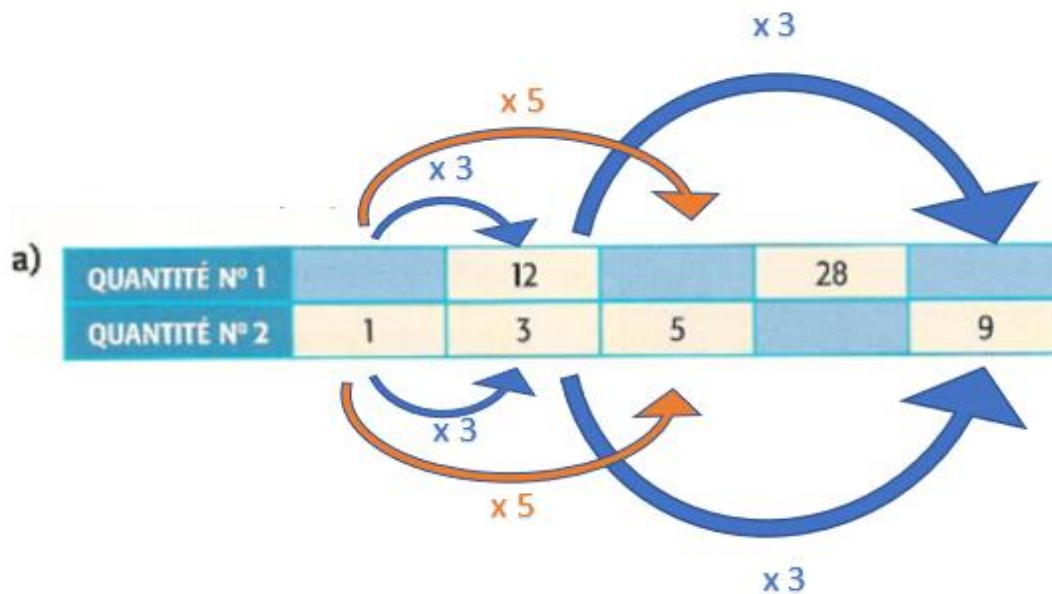
c)

|               |     |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| QUANTITÉ N° 1 | 0,2 | 0,4 | 4,2 |     |     |
| QUANTITÉ N° 2 | 5   |     |     | 200 | 550 |

**2** Si une photocopieuse te permet d'agrandir un trait de 100 mm à 140 mm, quelle sera, selon ce mode d'agrandissement, la longueur d'un trait de 12 mm une fois agrandi?

**Figure 4.1** Exercice d'application tiré de *Perspective mathématique, Manuel B, Partie 5. Les situations de proportionnalité. Vol. 1. p. 59.*

Ainsi pour la première situation, la complétion de la table de valeurs ne garantit pas la mise en place d'un raisonnement covariationnel. En effet, il est possible d'identifier le coefficient de proportionnalité entre deux valeurs correspondantes des deux grandeurs. Par exemple, pour la table de valeurs en 1a), le facteur permettant de passer de la quantité 1 à la quantité 2 doit être fixe pour que l'on soit en présence d'une situation de proportionnalité. Ainsi on a  $12 \times \text{coefficient de proportionnalité} = 3$ . Le coefficient de proportionnalité est de  $\frac{1}{4}$  et ce pour que tous les couples de la table, ces couples respectent la relation  $\text{Quantité 1} \times \frac{1}{4} = \text{Quantité 2}$ . Il aurait également été possible de raisonner en observant les accroissements constants entre les deux quantités. Dans le cas des situations de proportionnalité, pour un accroissement d'un facteur entre deux valeurs d'une grandeur, les deux valeurs associées de la deuxième grandeur croîtront du même facteur (voir figure 4.2). Ceci est possible parce que l'on sait que l'on est face à une situation de proportionnalité.



**Figure 4.2** Table de valeurs avec les facteurs de changement entre quelques couples de valeurs de la situation de proportionnalité.

Donc, pour remplir les tableaux proposés, les élèves appliquent le fait que dans une situation de proportionnalité, on observe une relation entre les valeurs correspondantes entre deux grandeurs (facteur de proportionnalité) et/ou des relations entre des couples de valeurs d'une grandeur et les couples des valeurs correspondantes de l'autre grandeur (facteur de changement). Bien qu'il soit possible de déployer ces deux stratégies, elles peuvent résulter d'une simple application et pas forcément de la mise en place d'un raisonnement covariationnel, aucune directive dans la situation ne va dans ce sens, c'est la raison pour laquelle ces situations n'ont pas été retenues dans notre étude.

La situation 2 (voir figure 4.1) a été rejetée, car même si elle est contextualisée (ne serait-ce que brièvement), il n'est pas nécessaire qu'un raisonnement covariationnel soit déployé pour y répondre. En effet, le lecteur doit reconnaître que l'agrandissement du trait sur la photocopieuse se fera avec le même facteur que celui proposé dans l'exemple. La question mène vers la recherche d'une valeur indéterminée qui correspond à l'agrandissement attendu. Nous sommes ici en présence d'un problème de recherche de quatrième proportionnelle. Il aurait toutefois été possible d'observer la relation entre les deux grandeurs dans plus de deux cas et y faire ressortir le caractère covariationnel. Cependant, notre intérêt n'est pas de modifier les caractéristiques des situations, mais bien de relever celles qui permettent le déploiement d'un raisonnement covariationnel en s'attardant essentiellement à l'énoncé et aux questions posées dans la question.

Plusieurs situations rejetées dans cette collection sont construites comme les deux exemples précédents (voir figure 4.1). Nous tenons à souligner que les interventions des enseignant.es sont essentielles dans l'animation de ces situations. En effet, ils peuvent les modifier pour favoriser une approche covariationnelle, nous reviendrons sur ce point au chapitre V.

#### 4.1.3 L'analyse des situations retenues selon les représentations en jeu

Comme nous l'avons souligné (voir 2.3 et 3.4.2), une seule situation peut mobiliser différents passages entre des représentations. Des 24 situations retenues, nous avons observé un total de 57 questions qui mobilisent un raisonnement covariationnel, ce qui consiste à 57 passages entre les représentations. Comme mentionné dans la section précédente, la partie portant sur la représentation graphique (partie 6), regroupe une grande proportion de situations favorisant le développement du raisonnement covariationnel. Il n'est donc pas surprenant que cette représentation soit parmi les plus sollicitées autant comme représentation de départ que comme celle d'arrivée. Le tableau 4.4 présente le nombre de passages d'une représentation à un autre, entre parenthèses est indiqué le nombre de passages dans respectivement les parties 5, 6 et 8. La notation (0-15-2) dans la case présentant le passage de graphique à description verbale signifie : zéro passage dans la partie 5, quinze passages recensés dans la partie 6 et deux dans la partie 8. Nous pouvons observer que c'est ce passage qui est le plus fréquent, on a recensé 17 passages dans les 24 situations.

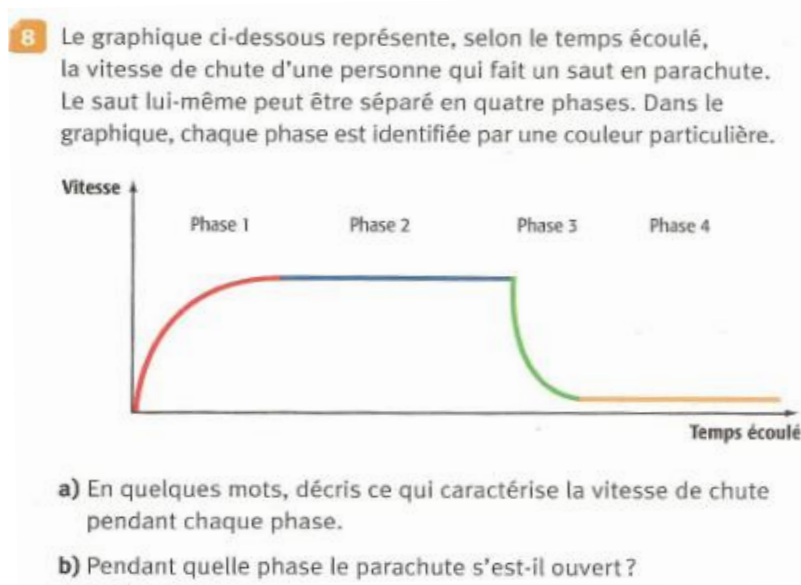
**Tableau 4.4** Tableau de passages entre les représentations pour les manuels  
*Perspective mathématique*

|                          | REPRÉSENTATION D'ARRIVÉE |              |                  |              |              |                |
|--------------------------|--------------------------|--------------|------------------|--------------|--------------|----------------|
| REPRÉSENTATION DE DÉPART | Description verbale      | Schéma       | Table de valeurs | Graphique    | Formule      | Totaux         |
| Description verbale      | 5<br>(0-5-0)             | 1<br>(0-0-1) | 2<br>(2-0-0)     | 5<br>(0-5-0) | 0<br>(0-0-0) | 13<br>(2-10-1) |
| Schéma                   | 2<br>(0-0-2)             | 0<br>(0-0-0) | 3<br>(0-0-3)     | 4<br>(0-2-2) | 0<br>(0-0-0) | 9<br>(0-2-7)   |

|                         |                              |              |                             |                              |              |                               |
|-------------------------|------------------------------|--------------|-----------------------------|------------------------------|--------------|-------------------------------|
| <b>Table de valeurs</b> | 2<br>(1-0-1)                 | 0<br>(0-0-0) | <b>5</b><br><b>(2-0-3)</b>  | 2<br>(0-0-2)                 | 4<br>(0-0-4) | <b>13</b><br><b>(3-0-10)</b>  |
| <b>Graphique</b>        | <b>17</b><br><b>(0-15-2)</b> | 0<br>(0-0-0) | 0<br>(0-0-0)                | <b>5</b><br><b>(0-5-0)</b>   | 0<br>(0-0-0) | <b>22</b><br><b>(0-20-2)</b>  |
| <b>Formule</b>          | 0<br>(0-0-0)                 | 0<br>(0-0-0) | 0<br>(0-0-0)                | 0<br>(0-0-0)                 | 0<br>(0-0-0) | 0<br>(0-0-0)                  |
| <b>Totaux</b>           | <b>26</b><br><b>(1-20-5)</b> | 1<br>(0-0-1) | <b>10</b><br><b>(4-0-6)</b> | <b>16</b><br><b>(0-12-4)</b> | 4<br>(0-0-4) | <b>57</b><br><b>(5-32-20)</b> |

Les représentations de départ les plus fréquentes sont (dans l'ordre) : le graphique, la description verbale, la table de valeurs et le schéma. Pour les représentations d'arrivée les plus fréquentes (dans l'ordre) sont : la description verbale, le graphique, la table de valeurs, la formule et le schéma. Ainsi ce sont essentiellement trois représentations qui sont sollicitées autant pour les représentations de départ que d'arrivée : le graphique, la description verbale et la table de valeurs. Tel que précisé, le passage entre les représentations le plus fréquent est celui de l'interprétation graphique (Graphique vers Description verbale). En effet, plusieurs questions de la partie 6 requièrent une description globale d'un tracé graphique. Le passage inverse, de Description verbale vers Graphique, est moins fréquent, on comptabilise cinq occurrences. Il faut noter que nous avons répertorié une expérimentation (*Les pendules* - figure 4.9) qui est comptabilisée comme ayant la représentation de départ : *description verbale* en raison des consignes présentées en mots comme les autres contextes sans expérimentation. Elle reste la seule situation retenue dans la collection amenant une expérimentation et des manipulations physiques afin d'observer des relations entre deux grandeurs. Nous l'analyserons plus finement selon les 19 autres VD dans la section 4.1.4.

La situation du saut en parachute présentée dans la section 3.1 et que nous reprenons dans la figure 4.3 est un exemple de situation qui requiert une interprétation graphique.



**Figure 4.3** *Perspective mathématique, Manuel B, Partie 6. Les représentations graphiques. Vol. 2. p.153.*

En effet, les deux questions ciblent un passage de la représentation graphique vers la description verbale, ce qui correspond à une interprétation graphique. Nous pouvons observer que les deux grandeurs à l'étude sont identifiées dans l'énoncé de la situation (il s'agit du temps écoulé et de la vitesse). De plus, on s'appuie sur le temps, c'est donc la grandeur indépendante puisque l'énoncé précise « selon le temps écoulé » et le graphique proposé présente le temps écoulé sur l'axe des abscisses. C'est une convention graphique : la grandeur indépendante est sur l'axe des abscisses et la grandeur dépendante sur l'axe des ordonnées. L'énoncé de la situation, la question a) par la formulation « pendant chaque phase » et les différentes couleurs du tracé amènent à se pencher sur les différentes phases (U5). Ces phases correspondent à différents types de courbes qui nécessiteront des interprétations différentes (U4). Nous remarquons que les deux questions proposées dans la situation ciblent la description des phases du saut d'un parachutiste, « pendant » son saut. Pour répondre à la première question, l'élève doit mettre en relation les deux grandeurs à l'étude : la vitesse du

parachutiste et le temps écoulé depuis le saut de l'avion (point de vue global - U1 et U2) et il doit se pencher sur la façon dont covarient ces deux grandeurs pour des intervalles de temps choisis (point de vue global U3 et point de vue local qualitatif U4) et ce dans chacune des phases (U5). Ainsi, par exemple, pour la première phase, on peut remarquer que plus le temps s'écoule et plus la vitesse augmente, ce qui correspond à la courbe croissante (U3). De façon plus précise, pour des accroissements de valeurs de temps constants, les accroissements des valeurs correspondantes de la vitesse diminuent de plus en plus jusqu'à atteindre une vitesse constante (phase en rouge), on mobilise ainsi le point de vue local qualitatif relié à U4. Il s'agit de décrire les phases croissantes, constantes et décroissantes de la vitesse pour des intervalles donnés. Il est alors possible de conclure en b) que lors du passage de la phase 2 à la phase 3, la vitesse du parachutiste diminue grandement sur une courte période de temps et que la diminution des valeurs de la vitesse pendant la troisième phase est de moins en moins grande, donc l'ouverture du parachute se fait au moment du passage entre la phase 2 (en bleue) et la phase 3 (en vert). Ainsi, le contexte et les questions associées à cette situation permettent de déployer un raisonnement covariationnel en ciblant l'interprétation graphique.

Nous pouvons remarquer que les questions des situations ciblent des représentations différentes selon la partie. Ainsi, la partie 5 sollicite essentiellement deux représentations, la description verbale et la table de valeurs. Pour la partie 6, il s'agit majoritairement de la description verbale et du graphique, avec la présence de quelques schémas. Nous ne retrouvons pas de tables de valeurs parmi les situations retenues dans cette partie. Dans la partie 8, toutes les représentations sont utilisées au moins une fois. Nous pouvons faire l'hypothèse que la partie 8 se concentre sur plusieurs représentations alors que les autres parties semblent viser la compréhension d'une représentation, la table de valeurs pour la partie 5 et le graphique pour la partie 6, toutes ces représentations étant arrimées souvent à des descriptions verbales.

De plus, nous pouvons remarquer que le graphique comme représentation d'arrivée est utilisée à seize reprises, mais avec des représentation de départ assez variées : Description verbale (5), Schéma (4), Table de valeurs (2) et Graphique (5). Contrairement à l'utilisation de la représentation graphique comme représentation de départ, celui-ci est relié essentiellement aux représentations d'arrivée *description verbale* et à quelques reprises aux représentations *graphiques*.

Outre la forte fréquence du passage Graphique vers Description verbale, les autres passages ne dépassent pas cinq occurrences. Notons qu'aucune question retenue ne provient de la représentation *formule* comme représentation de départ, mais nous retrouvons quatre questions portant sur l'expression de la relation entre deux grandeurs par une formule, de la *table de valeurs* vers la *formule*. Ces questions, bien que présentes, sont assez peu représentées, ce qui est compréhensible puisque nous ciblons le premier cycle du secondaire. Ces questions se situent toutes dans la dernière partie de la collection, la partie 8. Ce sont les dernières questions dans quatre situations qui visent une généralisation à des fins de formules.

À titre d'exemple, prenons la situation codée A-12 de la partie 8, c'est une activité qui vise un retour sur les différentes représentations des relations travaillées dans les parties précédentes (voir figure 4.4). Ces représentations sont la description verbale, la table de valeurs, le schéma et la formule.



### Activité 1 Des triangles, des segments et des points

Suis les directives ci-dessous.

- 1) Sur une feuille, place trois points non alignés. Relie ces points par des segments de droite pour former un triangle.
- 2) Place un autre point à l'intérieur de ce triangle et relie-le aux trois sommets par des segments de droite. La figure est maintenant divisée en trois régions triangulaires.
- 3) Choisis l'une de ces régions, place un point à l'intérieur et relie ce point aux trois sommets du triangle qui délimite la région.

- a) En combien de régions triangulaires la figure est-elle maintenant divisée ? Et si tu ajoutais d'autres points en répétant l'étape 3 ? Reproduis et complète la table de valeurs ci-contre en y inscrivant tes réponses.
- b) Chaque fois que tu ajoutes un point, quel est l'effet sur le nombre de régions triangulaires ?
- c) En combien de régions triangulaires la figure serait-elle divisée si l'on répétait l'étape 3 jusqu'à ce qu'il y ait 50 points au total ? Explique ton raisonnement.
- d) Et si l'on continuait jusqu'à  $n$  points ?

| NOMBRE DE POINTS | NOMBRE DE RÉGIONS TRIANGULAIRES |
|------------------|---------------------------------|
| 3                | 1                               |
| 4                | 3                               |
| 5                |                                 |
| 6                |                                 |
| 7                |                                 |

**Figure 4.4** Activité tirée de *Perspective mathématique, Manuel B, Partie 8. Régularités et représentations. Vol. 2. p. 423.*

Les directives de la situation et la question a) amènent l'élève à modifier le schéma qu'il a produit, un triangle en y ajoutant un point à l'intérieur de celui-ci afin d'observer le nombre total de régions triangulaires formées en reliant le point intérieur à chacun des trois points initiaux. Pour répondre à la question b), l'élève doit quantifier les accroissements du nombre de régions triangulaires alors qu'il y ajoute un point, donc pour un accroissement constant d'un pour la grandeur prédominante (indépendante). La réflexion qualitative globale autour des possibles grandeurs et l'identification des grandeurs indépendante et dépendante (U0 à U3) ne sont pas suscitées par des questions spécifiques. L'élève doit toutefois décoder ces informations mentionnées dans les directives, dans la table de valeurs et dans les questions. Nous avons fait préalablement

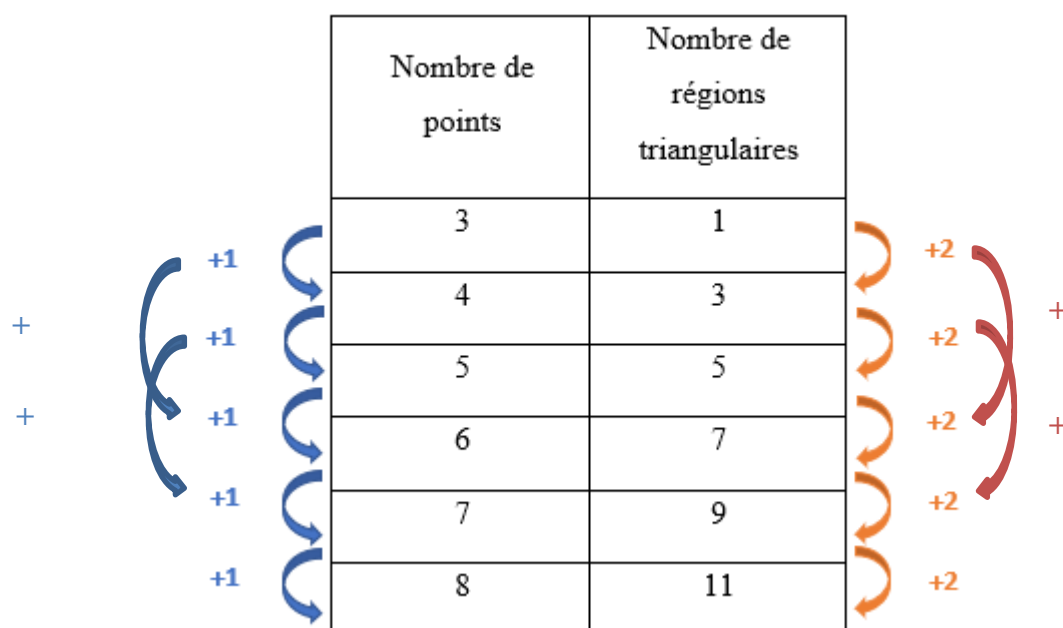
le même constat pour le graphique. Les conventions de la table de valeurs et du graphique font en sorte que les grandeurs prédominante et conséquente sont imposées.

Le point de vue local quantitatif se met en place ici dans la table de valeurs par l'observation des écarts de la grandeur dépendante pour des accroissements constants (unitaires) de la grandeur indépendante (U9). Initialement, à l'aide d'un minimum de trois points non-alignés nous construisons un triangle. Par l'ajout d'un point, nous transformons une région triangulaire en trois. Ceci nous permet de répondre aux questions a) et b). Ainsi nous ajoutons deux régions triangulaires à l'intérieur de celle déjà présente à chaque fois que l'on ajoute un point. Ceci nous permet d'établir qu'il y a deux régions de plus pour chaque point ajouté, ce qui revient au taux de variation. On peut représenter ces accroissements par des flèches dans la table de valeurs (voir figure 4.5).

|    | Nombre de points | Nombre de régions triangulaires |    |
|----|------------------|---------------------------------|----|
| +1 | 3                | 1                               | +2 |
| +1 | 4                | 3                               | +2 |
| +1 | 5                | 5                               | +2 |
| +1 | 6                | 7                               | +2 |
| +1 | 7                | 9                               | +2 |
| +1 | 8                | 11                              | +2 |

**Figure 4.5** Résolution dans la table de valeurs des questions a) et b) de l'activité tirée de *Perspective mathématique, Manuel B, Partie 8. Régularités et représentations. Vol. 2. p. 423.*

La complétion de la table de valeurs s'appuie sur un raisonnement covariationnel. La question c) demande de trouver la valeur correspondant au nombre de régions triangulaires pour 50 points. Comme il est demandé dans les questions précédentes de compléter la table par un regard covariationnel, on peut s'attendre que pour généraliser pour 50 points, on ait recours au même regard. Il est toutefois possible dans les questions c) et d) d'exercer un regard correspondance pour trouver la règle. Ainsi, si on exerce un regard covariationnel, dans la question c), on peut établir que pour un ajout de trois points, six régions triangulaires seront ajoutées.



| Nombre de points | Nombre de régions triangulaires |
|------------------|---------------------------------|
| 3                | 1                               |
| 4                | 3                               |
| 5                | 5                               |
| 6                | 7                               |
| 7                | 9                               |
| 8                | 11                              |

**Figure 4.6** Résolution dans la table de valeurs des questions a) et b) de l'activité tirée de *Perspective mathématique, Manuel B, Partie 8. Régularités et représentations. Vol. 2. p. 423.*

Pour arriver à 50 points, on peut partir de 8 points ou des 3 points pour lesquels on a trouvé le nombre de régions triangulaires (11 pour 8 points et 1 pour 3 points). On doit alors ajouter 42 points aux 8 déjà présents ou 47 aux 3 premiers points. Dans les deux cas, nous obtenons un ajout de 84 ou de 94 régions, on obtient ainsi un total de 95 régions triangulaires pour 50 points. Pour la question d), les auteurs demandent de

déterminer le nombre de régions triangulaires pour  $n$  points. Pour trouver la formule, on peut partir du premier couple de valeurs donné (3,1) qui signifie que pour 3 points on obtient 1 région triangulaire. On veut maintenant trouver le nombre de régions triangulaires si on a  $n$  points. En partant de 3 points, pour se rendre à  $n$  points, on doit faire  $(n-3)$  bonds de 1, l'écart entre 3 et  $n$  étant de  $(n-3)$ . Du côté du nombre de régions triangulaires, on peut remarquer qu'on a des bonds de deux quand on ajoute un point donc pour trouver le nombre de régions triangulaires, si on part du 1 qui représente une région triangulaire pour 3 points, on doit lui ajouter des bonds de 2,  $(n-3)$  fois. Le nombre de régions triangulaires pour  $n$  points est donc de  $1 + 2.(n-3)$ .

En adoptant un regard correspondance pour répondre aux questions c) et d), nous revenons tout de même à l'idée que l'ajout d'un point amène l'ajout de deux régions triangulaires supplémentaires. Cependant le passage du 3<sup>e</sup> au 4<sup>e</sup> point m'informe sur l'accroissement entre les valeurs des grandeurs correspondantes entre le nombre de points et le nombre total de régions triangulaires. Lorsqu'il y a quatre points, cela n'amène pas un total de huit régions triangulaires, mais cinq de moins pour un total de trois. On peut constater que le nombre de régions triangulaires sera toujours le double du nombre de points moins cinq. Il sera alors possible d'établir la correspondance entre deux fois le nombre de points moins cinq et le nombre total de régions triangulaires. Ce qui mène à la formule «  $2n - 5$  » qui représente le nombre de régions triangulaires pour  $n$  points, qui est une formule équivalente à celle que l'on a trouvé avec le regard covariationnel, mais elle n'est pas construite de la même façon. Cette situation est donc intéressante parce qu'elle est susceptible de développer le raisonnement covariationnel à travers un point de vue local quantitatif. Cette situation mobilise ainsi plusieurs passages entre divers représentations contrairement aux situations retenues des parties 5 et 6 qui se concentrent habituellement uniquement sur le passage entre deux représentations. En plus de cette caractéristique autour de la diversité des représentations en jeu, cette situation mobilise plusieurs autres VD (voir 4.3.3). Par exemple, dans cette situation, nous observons des grandeurs admettant des valeurs

discrètes, il est possible d'opérer sur le schéma et des connaissances géométriques sont nécessaires.

Les sections 4.1.2 et 4.1.3 ont permis de recenser les situations qui ont du potentiel à caractère covariationnel dans les trois parties retenues du manuel *Perspective mathématique*. Nous avons relevé les différents types de situations proposées ainsi qu'une analyse autour des représentations pour les situations à caractère covariationnel. Intéressons-nous maintenant aux 19 autres VD que nous avons répertoriées. Cette analyse permettra de caractériser plus en profondeur les situations qui présentent un potentiel pour le développement du raisonnement covariationnel.

#### 4.1.4 L'analyse des situations retenues selon les 19 autres VD

Comme nous l'avons précisé, les 19 VD autres que les représentations peuvent être dégagées du contexte de la situation, les questions de la situation sont plus secondaires dans cette analyse. Les questions proposées par la situation sont toutefois centrales pour l'analyse des passages entre les représentations (voir 4.1.2). Chacune des situations retenues dans *Perspective mathématique* cible un minimum de deux VD et jusqu'à un maximum de neuf. La situation ayant le plus grand nombre de VD sollicitées est la situation des vases (voir figure 4.15). Nous avons recensé onze situations avec au moins six VD, huit d'entre elles se trouvant dans la partie 6. Le tableau 4.5 présente le nombre d'occurrences des VD relevées dans les 24 situations retenues dans le manuel *Perspective mathématique*.

**Tableau 4.5** Tableau de fréquences des différentes VD pour les manuels*Perspective mathématique.*

| Variables didactiques                                          |                              | Codage | Variable didactique                                             | Nombre d'occurrences<br>(sur les 24 situations) |
|----------------------------------------------------------------|------------------------------|--------|-----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| <b>Qui<br/>s'attardent<br/>aux<br/>grandeurs<br/>à l'étude</b> | Type de<br>grandeurs         | VD1    | Présence de 3 grandeurs ou plus (imposées ou non)               | 13                                              |
|                                                                |                              | VD2    | Absence de valeurs numériques des grandeurs observées           | 13                                              |
|                                                                |                              | VD3    | Une grandeur admet des valeurs continues                        | 23                                              |
|                                                                |                              | VD4    | Une grandeur admet des valeurs discrètes                        | 2                                               |
|                                                                |                              | VD5    | Une grandeur admet des valeurs négatives                        | 0                                               |
|                                                                |                              | VD6    | Le temps est une grandeur                                       | 15                                              |
|                                                                |                              | VD7    | Le temps est la grandeur conséquente                            | 1                                               |
|                                                                |                              | VD19   | <i>Grandeurs définies par l'élève</i>                           | 0                                               |
|                                                                | Relation entre les grandeurs | VD8    | La relation entre les grandeurs n'est pas imposée               | 8                                               |
|                                                                |                              | VD9    | Les grandeurs sont interchangeables                             | 8                                               |
|                                                                |                              | VD18   | <i>Absence de relation</i>                                      | 0                                               |
| <b>Autour de l'étude graphique</b>                             |                              | VD10   | Différents types de tracés (courbe, discret, ligne droite)      | 6                                               |
|                                                                |                              | VD11   | Présence de plusieurs tracés dans un même plan cartésien        | 9                                               |
|                                                                |                              | VD12   | Conflit objet-source, objet-cible                               | 10                                              |
|                                                                |                              | VD13   | Graphique représentant un ensemble d'expériences fonctionnelles | 3                                               |
| <b>Autour des manipulations</b>                                |                              | VD14   | La modélisation peut se réaliser en « opérant » sur             | 9                                               |

|                                              |      |                                                |    |
|----------------------------------------------|------|------------------------------------------------|----|
|                                              |      | un schéma qui représente la situation.         |    |
|                                              | VD15 | Report possible de segments                    | 2  |
| <b>Reliées aux connaissances nécessaires</b> | VD16 | Connaissances géométriques nécessaires         | 8  |
|                                              | VD17 | Connaissances physiques (usuelles) nécessaires | 12 |

Ainsi, les situations retenues qui ont du potentiel pour travailler le raisonnement covariationnel sont variées :

- Des situations pour lesquelles au moins trois grandeurs sont proposées (VD1, nombre d'occurrences : 13)
- Une absence de valeurs numériques (VD2, nombre d'occurrences : 13)
- Presque toutes les situations proposent l'étude de grandeurs dont au moins l'une d'elles admet des valeurs continues (VD3, nombre d'occurrences : 23)
- La grandeur temps est souvent une des grandeurs (VD6, nombre d'occurrences : 15)
- La relation entre les grandeurs n'est pas imposée (VD8, nombre d'occurrences : 8)
- Des connaissances physiques sont nécessaires (VD17, nombre d'occurrences : 12).

Si on analyse la situation du Saut de parachute (voir figure 4.3), on observe que la situation a le temps comme grandeur (VD6) indépendante et qu'il n'y a pas de valeurs numériques associées aux deux grandeurs (VD2) et que ce sont deux grandeurs admettant des valeurs continues (VD3). Ainsi, nous considérons que la situation cible une description qualitative du tracé graphique représentant la relation entre la vitesse et le temps écoulé selon différentes phases. Ces phases correspondent à des différents types de courbes (VD10) qui nécessiteront des interprétations différentes (U4). De plus, cette situation présente une possibilité de conflit objet-source objet-cible (VD12). En effet, il serait possible de confondre le tracé avec la trajectoire de chute du parachutiste. L'élève doit mobiliser des connaissances physiques usuelles (VD17) afin de s'imaginer adéquatement les interactions entre ces deux grandeurs dans le cas d'un saut en

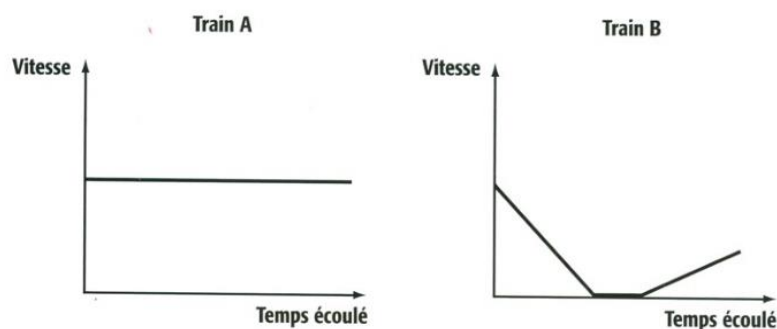
parachute, qui ressemble à la chute d'un objet avec une résistance lors de l'ouverture du parachute.

Dans ce qui suit, nous proposons différentes situations qui illustrent l'analyse menée selon les 19 VD. Nous allons débiter par l'analyse autour de la catégorie *VD qui s'attarde aux grandeurs à l'étude*, cette analyse relève plusieurs aspects intéressants. Nous ferons mention des autres catégories de VD, *les VD autour de l'étude graphique*, *les VD autour de la manipulation* et celles reliées à *des connaissances nécessaires* quand nous rapporterons des exemples de situations.

Tout d'abord, vingt-trois des vingt-quatre situations possèdent au moins une grandeur qui admet des valeurs continues (VD3). De plus, treize situations proposent l'observation des grandeurs sans la présence de valeurs numériques (VD2). Ces treize situations sont dans la partie 6 du manuel. Douze de ces treize situations s'appuient sur la *représentation graphique* (quatre reposent sur une interprétation d'une représentation graphique, quatre autres situations demandent de produire un graphique et les quatre autres font les deux : interpréter et modéliser). La treizième situation, sans valeurs numériques pour les grandeurs observées, va d'une description verbale vers une autre description verbale. Nous relevons que pour dix des treize situations, les deux grandeurs observées sont : une distance parcourue, une vitesse ou une autre mesure comme grandeurs conséquentes avec le temps écoulé comme grandeur prédominante. Pour donner suite à ces observations, voici une situation (voir figure 4.7) qui requiert d'abord une interprétation de deux graphiques et ensuite la production d'une représentation graphique avec des grandeurs sans valeurs numériques (VD2), le temps étant la grandeur conséquente (VD7).



- 13 Les deux graphiques ci-dessous représentent la vitesse de deux trains selon le temps écoulé.



À l'aide de deux autres graphiques, représente globalement la distance parcourue par ces deux trains selon le temps écoulé.



**Figure 4.7** Situation d'application tirée de *Perspective mathématique, Manuel B, Partie 6. Les représentations graphiques. Vol. 1. p. 155.*

L'absence de valeurs numériques dans cette situation force une interprétation qualitative des accroissements de temps afin d'observer les accroissements de la vitesse des trains. Cette situation requiert la mise en place de connaissances physiques usuelles (VD17) : quels effets ont les grandeurs temps, vitesse et distance les unes sur les autres ? Sans ces connaissances, il est difficile de bien saisir la relation entre toutes les grandeurs de la situation. Rappelons que douze des 24 situations possèdent cette particularité nécessitant une compréhension de certaines connaissances physiques. Notons aussi que cette situation peut amener le conflit objet-source, objet-cible (VD12). La représentation graphique de la vitesse du train selon le temps écoulé pourrait être confondue avec le parcours du train. Neuf autres situations ayant des représentations graphiques possèdent cette VD qui peut mener à une interprétation

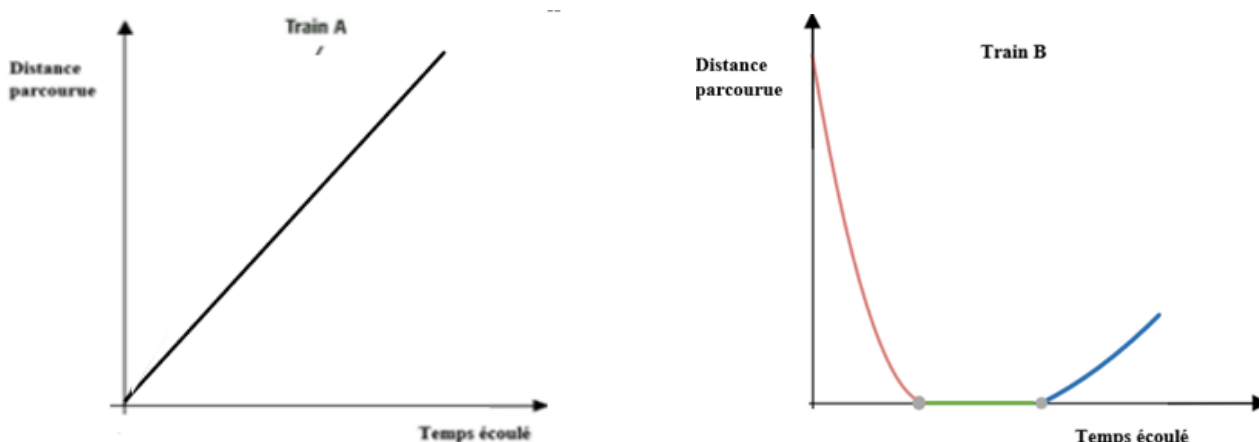
fausse de la situation en raison du déplacement physique d'un objet. La présence des représentations graphiques ainsi que de la phrase stipulant « selon le temps écoulé » demande aux élèves d'interpréter globalement la présence de deux grandeurs et de reconnaître que le temps écoulé est la grandeur indépendante. Ces raisonnements ne font pas l'objet de questions spécifiques, mais il est nécessaire de le reconnaître pour faire une interprétation adéquate de la représentation graphique. C'est le point de vue global qui est mobilisé à travers les premières unités de raisonnement (U2 et U3), celui-ci précède le point de vue local qualitatif (U4 et U5) qui est sollicité pour pouvoir tracer les graphiques qui représentent la distance parcourue par les deux trains selon le temps écoulé.

Considérons le graphique décrivant la relation entre la vitesse et le temps écoulé du train A. On remarque que pendant que le temps s'écoule, la vitesse est constante, elle ne change pas (point de vue global). Au niveau des accroissements, pour des accroissements constants entre les valeurs du temps, les accroissements entre les valeurs correspondantes de la vitesse sont nuls (point de vue local qualitatif). Donc, nous pouvons dire que pour des accroissements constants entre les valeurs du temps, les accroissements entre les valeurs correspondantes de la grandeur distance parcourue sont aussi constants. Ceci permet de tracer le graphique de la distance parcourue selon le temps écoulé (voir figure 4.8 à gauche).

Pour le train B, l'interprétation n'est pas aussi simple (voir figure 4.8 à droite). Tout d'abord, nous constatons qu'il y a trois phases dans le graphique (point de vue global U5). Pour la première phase, plus le temps s'écoule et plus la vitesse diminue (point de vue global). De façon plus fine, pour des accroissements constants entre les valeurs du temps écoulé, la vitesse diminue selon des accroissements constants (point de vue local qualitatif, U4). Cela veut dire que le train freine en réduisant sa vitesse constamment pour des intervalles constants de temps. Ainsi, la relation entre la distance parcourue et le temps écoulé peut s'exprimer comme suit : plus le temps écoulé augmente, plus la distance parcourue diminue; pour des accroissements constants de la grandeur temps,

la grandeur distance diminue, mais de moins en moins. On obtient alors une courbe ouverte vers le bas pour la première phase.

Dans la phase suivante, la vitesse est nulle et constante ce qui signifie que le train est arrêté. Cela se traduira dans le graphique *distance parcourue selon le temps écoulé*, par un tracé droit horizontal, la distance parcourue étant nulle. La dernière phase est l'inverse de la phase de décélération (phase 1), le train reprend de la vitesse à un rythme constant. Ainsi, plus le temps écoulé augmente, plus la distance parcourue augmente. Le tracé bleu exprime l'accroissement de plus en plus grand de la distance (courbe ouverte vers le haut, voir figure 4.8 à droite).



**Figure 4.8** Tracés de la relation entre la distance parcourue selon le temps écoulé des trains A et B.

Cette modélisation met de l'avant une autre VD, la présence de plusieurs types de courbes (VD10) : courbe décroissante ouverte vers le haut, courbe croissante ouverte vers le haut, une ligne droite croissante et une ligne horizontale. Les différentes représentations ainsi que leur description mettent de l'avant-plan le déploiement d'un raisonnement covariationnel sous l'angle de l'effet d'accroissements constants entre les valeurs de la grandeur indépendante sur les accroissements entre les valeurs correspondantes de la grandeur dépendante (U4). Comme c'est le cas pour la situation du saut en parachute (voir figure 4.3), la situation requiert le recours à un point de vue

local qualitatif qui repose préalablement sur un point de vue global. Nous considérons que cette situation mobilise trois grandeurs de façon explicite : la vitesse, le temps écoulé et la distance parcourue (VD1). Toutefois, ces trois grandeurs ne sont pas indépendantes, la vitesse étant définie comme le taux entre la distance et le temps.

Par ailleurs, en observant les situations sans valeurs numériques qui impliquent le temps (dix au total), nous constatons que la relation entre les grandeurs est imposée avec le temps comme grandeur prédominante. Ceci arrive souvent quand les situations requièrent l'observation de phénomènes physiques (comme le déplacement d'un train ou le saut en parachute), la grandeur prédominante intuitive est le temps considéré comme temps écoulé.

Revenons maintenant aux situations admettant au moins une grandeur continue (23 des 24 situations retenues), quinze ont « le temps » comme une des deux grandeurs (VD6) et quatorze des quinze ont le temps comme grandeur prédominante (VD7). C'est le cas des situations : la situation d'application des trains (voir figure 4.7), du saut en parachute (voir figure 3.1) et de la première partie de l'expérience du pendule (voir figure 4.9) où l'on observe le nombre de battements d'une pendule selon le temps écoulé. Quatorze des quinze situations avec le temps comme l'une des grandeurs se retrouvent dans la partie 6. De plus, comme mentionné précédemment, dix de ces situations n'admettent pas de valeurs numériques pour les grandeurs amenant une interprétation qualitative du temps selon une autre grandeur continue (la distance, la quantité d'eau, la masse, la vitesse, la hauteur).

Parmi les situations ayant le temps comme grandeur (VD6), la situation des pendules (voir figure 4.9) a retenu notre attention, car le temps est considéré comme la grandeur conséquente (VD7) dans la deuxième partie de l'expérience. C'est la seule situation retenue avec cette VD. Cette situation est composée de deux expériences où les élèves observent les trois grandeurs suivantes : le nombre de battements d'un pendule, le temps et la longueur de la corde. Les trois grandeurs présentes dans la situation des pendules (voir figure 4.9) sont le nombre de battements d'un pendule, la longueur de

la corde et le temps. Aucune de ces grandeurs n'est un taux, donc dépendante des deux autres grandeurs comme c'est le cas de la situation des trains pour laquelle la vitesse est un taux, elle est définie par la distance parcourue selon le temps écoulé pendant cette distance.



### Activité 1 Les pendules

Fais équipe avec un ou une camarade. Ensemble, effectuez l'une des deux expériences ci-dessous. Assurez-vous de bien comprendre l'expérience à réaliser et respectez les consignes suivantes.

- Sur la feuille qu'on vous remet, il manque des données dans la table de valeurs. Déterminez-en deux en réalisant l'expérience.
- Pour chacune des autres données manquantes, faites d'abord une prédiction, puis validez-la en réalisant l'expérience.

#### Expérience 1

Prévoir le nombre de battements d'un pendule dont la corde a une longueur de 30 cm selon différents temps.

#### Expérience 2

Prévoir le temps que met un pendule pour effectuer 20 battements selon différentes longueurs de corde.

Votre expérience correspond-elle à une situation de proportionnalité ? Si oui, répondez aux deux questions ci-dessous. Sinon, expliquez pourquoi.

- Exprimez par un **taux** le lien entre les deux quantités mises en relation.
- Par quel facteur faut-il multiplier le nombre d'unités de l'une des quantités pour obtenir le nombre d'unités de la quantité correspondante ?

**Matériel nécessaire :**  
Ficelle, poids (pince-notes, clé, etc.), règle graduée et chronomètre.

Souviens-toi, un **taux** est une comparaison de deux quantités de nature différente. Par exemple, la vitesse en km/h est un taux.

**Figure 4.9** Situation des pendules tirée du manuel : *Perspective mathématique, Manuel B, Partie 5. Les situations de proportionnalité. Vol. 1. p.56.*

Au niveau du point de vue global, les grandeurs sont données dans la situation et l'on ne questionne pas les élèves sur la grandeur qui pourrait être la grandeur indépendante. Elle sera imposée par les auteurs lors des deux expériences et changera d'une expérience à l'autre. Les élèves sont en présence de trois grandeurs (VD1), dont le temps (VD6). Cette situation est intéressante, car elle amène une réflexion à propos de deux tables de valeurs différentes obtenues à la suite d'expérimentations. L'expérience 1 considère le nombre de battements selon le temps écoulé (la longueur de la corde est

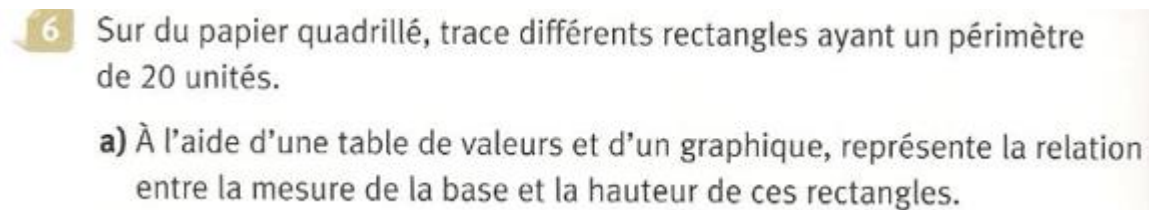
fixée) et l'expérience 2 étudie le temps (en durée) selon différentes longueurs de cordes (le nombre de battements est fixé).

Dans la première expérience, la grandeur « temps » est observée de façon chronique comme le déroulement d'une histoire alors que le temps est interprété comme une durée dans la deuxième expérience. Cette situation est intéressante, car comme le précise Janvier (1998), les élèves sont peu confrontés à des situations où le temps est une grandeur conséquente, donc vue comme une durée. Nous considérons qu'il est possible d'interchanger les grandeurs dans cette situation (VD9), comme cela a été fait d'ailleurs par les auteurs avec la grandeur « temps ». Cependant, dans les deux expériences, la relation est imposée avec une formulation qui utilise le terme « selon » (VD8). Afin de prévoir les tendances des phénomènes observés, nous considérons que l'élève aura besoin de connaissances usuelles (VD17) pour bien mener à terme l'expérience. En effet, il doit mener l'expérimentation en tenant compte de la gravité, du positionnement du pendule au départ, de ce que signifie « un battement », et des autres paramètres de l'expérience précisés par les auteurs au début de l'activité. Pour répondre aux questions des deux expériences, on doit réaliser ces expériences en prenant en considération des accroissements constants entre les valeurs de la grandeur indépendante. Pour la première expérience, il s'agit de prendre une corde de longueur 30 cm (grandeur fixée qui sera un paramètre) et de prendre des accroissements constants entre les valeurs de la grandeur temps. Pour chaque temps considéré, on prend en note dans une table de valeurs le nombre de battements. C'est en regardant les accroissements entre les valeurs correspondantes pour le nombre de battements que l'on peut faire une prédiction. La mise en place d'un point de vue local qualitatif permet donc de compléter la table de valeurs et de déduire une tendance.

Plusieurs situations qui mobilisent des grandeurs continues reposent sur l'observation de phénomènes physiques tels que : une bouteille que l'on remplit, un saut en parachute, le déplacement d'un train, les battements de pendules, etc. Les autres types

de situations retenues ayant des grandeurs continues sont des contextes géométriques comme : l'observation de la hauteur d'un triangle et/ou la mesure de la base pour des triangles isocèles. En résumé, outre le temps, les différentes grandeurs continues répertoriées sont les suivantes : la distance, la hauteur, le niveau de l'eau, la masse, la quantité d'eau et la vitesse (donc implicitement le temps).

Tel que nous l'avons précisé, la situation des pendules amène à interchanger les grandeurs (VD9) comme c'est le cas pour huit situations de ces manuels. Cependant, les grandeurs à observer et la relation de prédominance entre elles sont majoritairement prédéterminées par les auteurs. Nous avons retenu uniquement huit situations pour lesquelles la contextualisation n'indique pas à l'élève le sens de la relation (VD8), mais seulement trois de ces huit situations (comme la suivante) permettent naturellement de choisir les deux grandeurs comme prédominantes. Par exemple, la situation des rectangles (voir figure 4.10) illustre des grandeurs qui sont interchangeable et non imposées. Cette situation mobilise des connaissances géométriques (VD16), car il est indispensable de connaître la définition du périmètre d'un rectangle et ses implications sur les mesures des côtés. Sept autres situations retenues possèdent cette caractéristique.



**Figure 4.10** Situation d'application tirée de *Perspective mathématique, Manuel B, Partie 8. Régularités et représentations. Vol. 2. p. 428.*

L'élève peut choisir la mesure de la base comme grandeur prédominante ou conséquente (point de vue global). Ainsi, en utilisant une formulation dans la question a) qui exclut le mot « selon », les auteurs ne déterminent pas la grandeur qui est

prédominante. Un élève pourrait faire varier la mesure de la base ou la mesure de la hauteur. Dans les deux cas, on arrive à la même table de valeurs, ce qui est intéressant à observer. Voici un exemple de table de valeurs que l'on peut obtenir :

|             |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mesure base | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Hauteur     | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

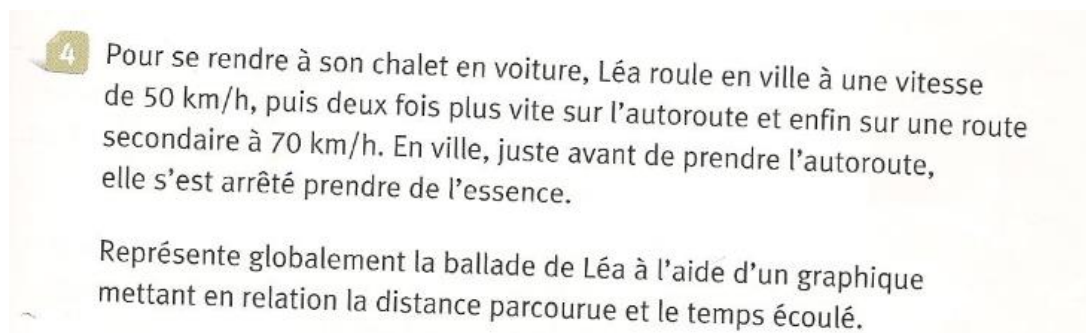
**Figure 4.11** Résolution dans la table de valeurs des questions a) de la *situation d'application* tirée de *Perspective mathématique, Manuel B, Partie 8. Régularités et représentations. Vol. 2. p. 428.*

Il faut noter que la mesure de la base et de la hauteur sont des grandeurs continues, il faut donc se dire que l'on peut considérer tous les points entre ceux choisis dans la table de valeurs. Pour résoudre cette situation, on a considéré des accroissements constants entre les valeurs de la grandeur « mesure de la base » et on observe les accroissements pour les valeurs correspondantes de la hauteur (point de vue local qualitatif). On peut constater que plus les valeurs de la mesure de la base augmentent et plus les valeurs correspondantes de la hauteur diminuent (point de vue global). Les écarts entre ces valeurs pour les deux grandeurs sont de un. La table de valeurs pousse également à un regard correspondance puisqu'on s'aperçoit que la somme entre les valeurs correspondantes est la même.

Le grandeur périmètre agit dans cette situation comme un paramètre. Cette 3<sup>e</sup> grandeur est explicitement présente (VD1), mais elle n'est pas utilisée pour observer une nouvelle relation entre deux grandeurs en fixant la hauteur par exemple comme c'est le cas pour la situation des pendules. Ainsi nous constatons que les grandeurs qui sont facilement interchangeables sont, par exemple : le niveau et la quantité d'eau dans une bouteille, la base et la hauteur d'une figure géométrique (triangle, rectangle, carré, octogone) et des suites de figures géométriques avec une régularité. Cependant, bien que les situations aient un potentiel d'interchanger les deux grandeurs observées, cela n'implique pas nécessairement que la situation prend en considération cette VD.



Nous retrouvons aussi la situation inverse (cinq situations) lorsque la relation entre les grandeurs n'est pas imposée, mais qu'il est difficile d'interchanger les grandeurs. C'est le cas de l'exercice d'application E-8, la ballade de Léa (voir figure 4.12).

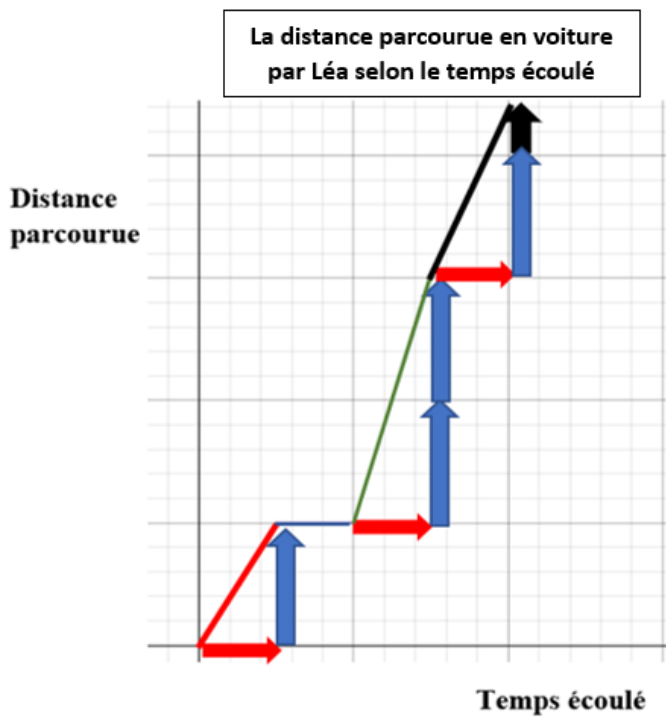


**Figure 4.12** La ballade de Léa, exercice d'application tiré de *Perspective mathématique, Manuel B, Partie 6. Les représentations graphiques. Vol. 1. p. 151.*

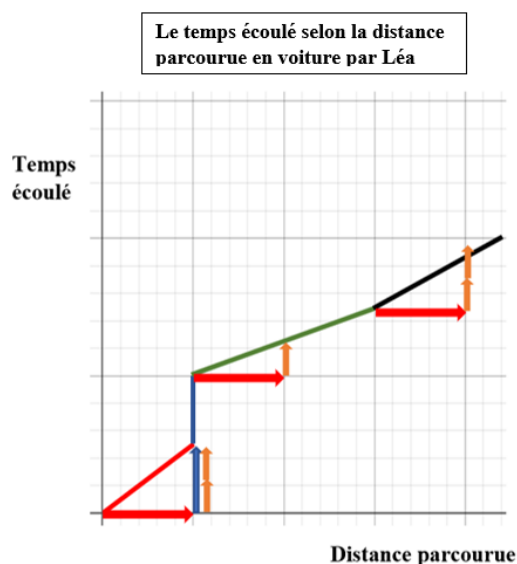
Bien qu'il soit possible d'attribuer des valeurs aux grandeurs observées, l'intérêt de la question porte sur la représentation graphique des différentes vitesses. Il n'est pas nécessaire de déterminer des valeurs exactes de distance parcourue et de temps pour faire un tracé qui représente la relation entre les grandeurs. Aucune information du contexte ne nous permet de déterminer un temps écoulé « exact » ou une distance « exacte » pour l'associer avec la vitesse de la voiture de Léa. Plusieurs temps fictifs sont donc valides, on peut considérer les deux représentations graphiques (voir figure 4.13 et figure 4.14) exprimant le même déplacement, mais en interchangeant les grandeurs (VD9). Notons ainsi que pour représenter la distance parcourue et le temps écoulé, il est possible de se donner des valeurs numériques. Cette situation comme celle des trains mobilise des grandeurs qui sont liées entre elles, le temps, la vitesse et la distance.

L'énoncé amène à considérer quatre phases : quand Léa roule en ville, quand elle roule sur l'autoroute, quand elle roule sur une route secondaire et enfin quand elle s'arrête (point de vue global associé à U5). On peut déduire que plus le temps s'écoule et plus la distance augmente, le tracé sera donc croissant (point de vue global). La question est

de savoir la façon dont ça croît dans chacune des phases. C'est à ce moment que prend place le point de vue local qualitatif puisqu'on doit prendre en considération les accroissements entre les valeurs d'une grandeur et les accroissements entre les valeurs correspondantes de l'autre grandeur.



**Figure 4.13** La représentation graphique de la distance parcourue en voiture par Léa selon le temps écoulé, issue de la situation.



**Figure 4.14** La représentation graphique du temps écoulé en voiture selon la distance parcourue par Léa, issue de la situation.

Comme l'intention est de représenter graphiquement la relation entre les deux grandeurs, on peut s'appuyer soit sur le temps écoulé (voir figure 4.13) soit sur la distance parcourue (voir figure 4.14). Le tracé du graphique se fait qualitativement, on observe l'expression des taux de variation des différentes phases (représentées par les tracés rouge, bleu, vert et noir). Nous considérons que la relation entre les grandeurs n'est pas imposée en raison de la formulation suivante : « mettant en relation la distance parcourue et le temps écoulé. » Cependant, bien que la relation ne soit pas imposée (VD8), l'observation conventionnelle de la vitesse en **kilomètres par heure** amène plus facilement vers la relation exprimée par la représentation de la distance parcourue selon le temps écoulé (voir figure 4.13).

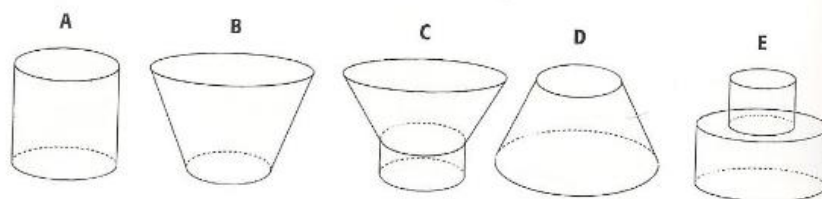
En s'appuyant sur un accroissement de temps écoulé représenté par la flèche horizontale rouge (voir figure 4.13), il est possible de comparer les différentes phases. Le temps écoulé choisi aurait pu être différent du nôtre et aurait aussi pu varier d'une phase à l'autre. Observons le tracé en rouge exprimant la vitesse de la voiture de Léa

dans la 1<sup>re</sup> phase (lorsqu'elle roule en ville à 50 km/h). Pour un certain temps écoulé choisi (exprimée par la marche d'accroissement - flèche horizontale rouge), elle a parcouru une certaine distance (exprimée par la marche d'état - flèche verticale bleue). Le tracé bleu horizontal représente l'arrêt d'une durée indéterminée pour mettre de l'essence. Durant cette phase, pour un certain temps écoulé la distance parcourue ne change pas. La 3<sup>e</sup> phase de déplacement (sur l'autoroute) est représentée par le tracé vert. Ainsi, pour un même intervalle de temps écoulé qu'à la 1<sup>re</sup> phase, Léa parcourt le double de la distance parcourue précédemment (flèche verticale bleue). La vitesse lors de la dernière phase (tracé noir) est 1,4 fois plus rapide que dans la 1<sup>re</sup> phase. Ainsi, pour un accroissement donné de temps (flèche rouge), la distance parcourue sera approximativement d'un peu moins qu'une fois et demie la distance représentée par la flèche bleue.

Dans la figure 4.14, la représentation graphique exprime la relation entre ces deux grandeurs, mais en s'appuyant sur la distance parcourue plutôt que sur le temps écoulé. La comparaison entre les phases 1 et 3 est maintenant : pour une même distance parcourue (la flèche horizontale rouge), il s'écoule deux fois moins de temps. Pour la 4<sup>e</sup> phase (lors du déplacement à une vitesse de 70 km/h), il est possible d'observer que pour une même distance parcourue l'augmentation du temps écoulé sera comprise entre celles de la phase 1 et 3. La 2<sup>e</sup> phase représentant l'arrêt à la station-service indique dans cette représentation que malgré une absence de déplacement, le temps s'écoule. Ainsi, cette situation, la ballade de Léa, requiert des interprétations qualitatives des relations entre deux grandeurs et une prise en compte des accroissements. Le point de vue global et le point de vue local qualitatif sont ici sollicités. Plusieurs situations de la partie 6 possèdent cette même caractéristique. Par ailleurs, nous avons remarqué que les situations de la partie 6 qui disposent de valeurs numériques mènent à une modélisation et/ou interprétation pour laquelle les nombres donnés sont relativement accessoires.

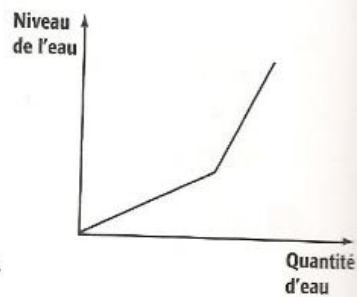
Si on s'attarde à la VD autour de l'imposition de la relation entre les grandeurs (VD8), seize des 24 situations présentent des graphiques ou des tables de valeurs, ces représentations imposent automatiquement la relation entre les grandeurs, c'est le cas du saut en parachute (voir figure 3.1), des pendules (voir figure 4.9). Six de ces situations utilisent des grandeurs qui sont plus facilement interchangeables, par exemple, la situation des vases (voir figure 4.15) similaire au contexte du remplissage de la bouteille (voir chapitre 2). Dans la situation des vases, les deux grandeurs observées pourraient être prédominantes, mais cette situation impose le sens de la relation (la VD8 n'est pas présente) en stipulant d'observer : « le niveau d'eau selon la quantité d'eau qu'il contient ».

**10** Examine les vases ci-dessous. Si l'on y verse de l'eau à un débit régulier, on constate que le niveau de l'eau n'augmente pas de la même façon dans chacun.



Pour l'un de ces vases, le graphique ci-dessous représente le niveau de l'eau selon la quantité d'eau qu'il contient.

- De quel vase s'agit-il ? Justifie ta réponse.
- À l'aide de quatre graphiques, représente globalement le niveau de l'eau dans les autres vases selon la quantité d'eau qu'ils contiennent.
- Décris en mots chacun de ces graphiques.



**Figure 4.15** Les vases, problème d'application tiré de *Perspective mathématique, Manuel B, Partie 6. Les représentations graphiques. Vol. 2. p. 154.*

Dans ce problème d'application, les élèves doivent reconnaître, produire et décrire des représentations graphiques à partir de l'analyse de différentes schématisations. Les deux grandeurs de la situation, la quantité d'eau et le niveau de l'eau, ne sont pas quantifiées (VD2) et ces deux grandeurs peuvent admettre des valeurs numériques continues (VD3). Les auteurs ont choisi de fixer la quantité d'eau comme la grandeur prédominante comme il est possible de le voir dans le graphique et dans la formulation « selon la quantité d'eau ». En observant la forme des cinq solides composés représentant les schémas des vases, il est possible de constater que différents types de relations sont exprimés. Ces types de relations amèneront différents types de tracés (VD10) puisque la représentation graphique est requise dans cette situation. Ainsi pour les vases cylindriques, les tracés seront des droites avec des taux de variation distincts selon le vase. Pour les vases B, C et D (en forme de cône tronqué), les tracés représentant la relation seront des courbes croissantes ouvertes vers le bas (B et C) ou des courbes croissantes ouvertes vers le haut (D). De plus, cette situation cible aussi la VD11 qui s'intéresse à la représentation graphique de plusieurs relations tout en considérant les mêmes deux grandeurs dans le graphique. Pour représenter les quatre relations entre le niveau de l'eau et la quantité d'eau, l'élève devra produire quatre graphiques avec ces deux grandeurs (ou distinguer les tracés dans un seul repère). Le contexte permet aussi la modélisation en opérant sur le schéma (VD14) et en reportant des segments (VD15) puisqu'on peut y reporter dans le graphique le niveau de l'eau relevé à partir du schéma. Huit autres situations possèdent la caractéristique que le tracé du graphique peut se réaliser en opérant sur un schéma. Dans seulement une autre situation, les reports de segments sont possibles.

La situation précédente amène une réflexion sur plusieurs types de relations résultant de plusieurs tracés. Dans cette situation et comme c'est le cas dans les autres situations analysées, le point de vue global est sollicité. L'élève doit interpréter en situation les grandeurs à l'étude et leur relation : « Plus la quantité d'eau augmente et plus le niveau augmente ». Pour reconnaître le vase qui est modélisé par le graphique proposé (interprétation) et pour tracer les graphiques des autres vases (modélisation), on doit

recourir aux accroissements constants des valeurs de la quantité d'eau et voir l'effet sur les accroissements des valeurs correspondantes du niveau de l'eau. Cette situation requiert donc la mise en place d'un point de vue local qualitatif.

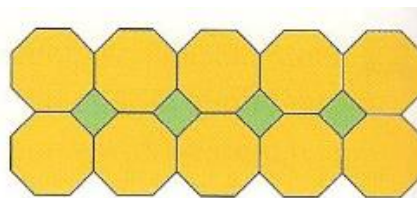
Nous avons relevé que six des 24 situations retenues proposent différents types de tracés (VD10), comme dans la situation précédente. Cependant, seulement trois de ces six situations<sup>32</sup> observent les deux grandeurs dans le même repère (VD11). Neuf situations présentent plusieurs tracés dans un même repère (VD11) et six d'entre elles présentent seulement un type de tracé dans la situation (cinq des six uniquement des droites, l'autre étant uniquement des courbes).

Nous avons rapporté les différents types de tracés présents dans les manuels de la collection *Perspective mathématique*, mais les seuls que nous avons décrits sont les tracés continus puisqu'on s'intéressait à des grandeurs continues. En fait, seulement deux situations retenues utilisent une grandeur admettant des valeurs discrètes (VD4). Ces deux situations (voir figures 4.4 et 4.16) se retrouvent dans la partie 8, elles observent la relation entre deux grandeurs reliées à des « figures géométriques ». Pour le premier contexte (voir figure 4.4), les deux grandeurs sont : le nombre de régions et le nombre de points d'un triangle. Pour la deuxième situation P-48 (voir figure 4.16), les grandeurs sont : le nombre de carrés et le nombre d'octogones.

---

<sup>32</sup> Il s'agit de la situation des trains (voir figure 4.7), de la situation des vases (voir figure 4.15) et la troisième situation est un exercice d'application présentant trois tracés à associer à trois représentations de la vitesse d'un cycliste.

Dans la figure ci-contre, 4 carrés alignés sont entourés de 10 octogones réguliers. On peut faire varier le nombre de carrés et observer le nombre d'octogones qui les entourent.



- a) À l'aide d'une table de valeurs et d'un graphique, représente la relation entre le nombre de carrés et le nombre d'octogones.
- b) Décris cette relation dans tes propres mots.
- c) Avec 25 carrés alignés, combien d'octogones y aurait-il ? Explique ton raisonnement.
- d) Imagine la figure décrite en c). Sachant que les côtés des octogones et des carrés mesurent 0,5 cm chacun et que l'aire d'un octogone est de  $1,45 \text{ cm}^2$ , détermine
  - 1) le périmètre de cette figure ;
  - 2) l'aire de cette figure.
- e) Détermine les expressions algébriques représentant le périmètre et l'aire d'une figure du même type comportant  $n$  carrés alignés.

**Figure 4.16** Situation d'application tirée de *Perspective mathématique, Manuel B, Partie 8. Régularités et représentations. Vol. 2. p. 428.*

Dans la situation précédente (voir figure 4.4), on fait varier le nombre de carrés (grandeur indépendante) et on observe le nombre d'octogones (grandeur dépendante). Dans la question a), il s'agit de constater qu'à chaque fois qu'on ajoute un carré, on ajoute deux octogones (point de vue local quantitatif). Cette relation en mots doit être déduite en b) d'après la construction d'une table de valeurs et d'un graphique. Il s'agit de faire un tracé discret puisque les deux grandeurs considérées admettent des valeurs discrètes. Pour répondre à la question c), on peut procéder de façon covariationnelle comme nous l'avons fait pour la situation qui s'intéresse au nombre de points et au



nombre de régions triangulaires. On considère les valeurs correspondantes de dix octogones pour quatre carrés. Pour 25 carrés, on va avoir 21 carrés de plus, on fait dans la table de valeurs des bonds de deux carré à chaque fois, on fait 21 bonds (écart entre quatre et 25). Il faut faire le même nombre de bonds en partant de la valeur correspondante à quatre carrés donc dix octogones, mais le bond est cette fois-ci de deux. Pour trouver le nombre d'octogones pour 25 carrés, on part donc de un et on lui ajoute deux, 21 fois. Se met ainsi en place un regard covariationnel. La question d) considère les mesures des côtés des octogones et des carrés (qui est la même) et l'aire d'un octogone est la seule retenue qui comporte une grandeur avec des valeurs continues (VD3) et une grandeur avec des valeurs discrètes (VD4). Après le dénombrement des figures géométriques, trois grandeurs apparaissent dans le questionnement (les mesures d'un côté de l'octogone, l'aire et le périmètre de la figure). Pour répondre à la question e), on aura besoin de trouver le nombre d'octogones obtenus pour  $n$  carrés. On peut obtenir ce nombre en mobilisant un raisonnement covariationnel. Ainsi, dans les manuels *Perspective mathématique*, peu de grandeurs admettent uniquement des valeurs discrètes, cependant, quelques situations retenues possèdent des grandeurs continues, mais avec un domaine de valeurs restreint par le contexte. Ceci mène à une représentation graphique discontinue puisque plusieurs couples de valeurs ne sont pas possibles selon le contexte décrit.

#### 4.1.5 La synthèse sur le potentiel des situations proposées par *Perspective mathématique pour développer le raisonnement covariationnel*

Nous avons retenu 24 situations dans la collection *Perspective mathématique* qui ont du potentiel pour développer le raisonnement covariationnel. Ces situations sont étalées dans les parties identifiées par les auteurs comme les Partie 5, Partie 6 et Partie 8. La partie 5 traite essentiellement de la proportionnalité et la partie 6 des représentations graphiques. La partie 8 s'intéresse aux régularités et aux différentes représentations et regroupe des situations qui font un retour sur les parties précédentes. Ces situations

retenues sont identifiées comme étant des activités et des situations d'application, nous avons recensé également quelques situations-problèmes.

Nous avons pu observer que le raisonnement covariationnel est majoritairement déployé dans des situations qui n'ont pas de données numériques (Treize sur 24) et aussi à travers des interprétations graphiques. Les treize situations sans données numériques se retrouvent toutes dans la partie 6. Une interprétation qualitative des relations est donc requise, celle-ci s'appuie sur un point de vue local qualitatif qui repose sur la considération d'écarts concomitants entre les deux grandeurs en jeu. Pour cela, on doit procéder à un décodage des conventions du graphique : dégager les grandeurs dépendante et indépendante qui sont représentées respectivement sur l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses (U1). Une lecture globale du graphique amènera également à distinguer différentes phases quand c'est nécessaire (U5) et à qualifier le changement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente (U3). Tracer les marches accroissements dans le graphique s'avère nécessaire pour accompagner ce travail d'interprétation, elles seront également utiles pour modéliser des situations.

En survolant les différentes parties, on observe un moins grand nombre de situations qui requièrent le passage de description verbale à graphique que de situations qui requièrent le passage inverse. Les situations d'interprétation demandent la mise en place d'un point de vue local qualitatif et quantitatif qui se traduit par la reconnaissance des grandeurs dépendante et indépendante, cette reconnaissance se fait par les conventions de la table de valeurs (point de vue global). Ainsi, ces situations n'amènent pas de questions sur l'identification des grandeurs en jeu ni sur l'identification de la grandeur indépendante. Les questions ciblent surtout une interprétation locale qualitative des relations entre les grandeurs en s'appuyant sur les informations globales données.

Le recours au raisonnement covariationnel se fait souvent par des questions ouvertes comme « représentez globalement la relation entre les deux grandeurs » permettant un travail sur les accroissements concomitants entre les grandeurs et amène à une analyse fine de la relation entre les grandeurs (U3, U4 et U5) comme nous l'avons décrit. Nous remarquons aussi un souci des auteurs à quelques reprises de ne pas définir d'emblée la relation entre les grandeurs ce qui permet de mobiliser un point de vue (U1 et U2) afin d'identifier la grandeur prédominante. Pour cela, les situations demandent par exemple de représenter la relation entre la grandeur A et la grandeur B sans utiliser les expressions « selon » ou « en fonction de » qui fixent les grandeurs indépendante et dépendante. De plus, différentes VD nous ont permis de caractériser ces situations. Ainsi, douze des situations retenues reposent sur une grande variété de contextes nécessitant des connaissances physiques (douze) ou des connaissances géométriques (huit) afin d'interpréter la relation entre les grandeurs. Dans les situations où il s'agit de remplir une table de valeurs, *Perspective mathématique* guide le regard vers la covariation en demandant d'accroître les valeurs de la grandeur indépendante de façon constante et de regarder ce qui se passe pour les accroissements des valeurs correspondantes de la grandeur dépendante : « Chaque fois que tu ajoutes un point, quel est l'effet sur le nombre de régions triangulaires? ».

On peut relever dans les situations retenues un souci de travailler la covariation dans différentes représentations et celle-ci se fait de façon graduelle. Dans la partie 5, la covariation prend place autour de la table de valeurs, dans la partie 6 autour de la représentation graphique et dans la partie 8, toutes les représentations sont mobilisées, la description verbale, le graphique, la table de valeurs, le schéma et la formule. La représentation formule est toutefois toujours la représentation d'arrivée, les élèves doivent ainsi construire une formule après avoir fait l'interprétation de la relation dans une autre représentation. Ces questions sur la formule amènent un raisonnement covariationnel, puisqu'il s'agit de généraliser le remplissage de la table de valeurs, remplissage qui s'est fait en procédant par un regard covariationnel. Les questions

portant sur la modification d'un schéma sont celles où l'on peut noter que les modélisations s'appuient sur différentes représentations : graphique, schéma, description verbale et table de valeurs. On est donc amenés à déployer le raisonnement covariationnel dans des représentations variées.

Le tableau 4.6 présente pour chacune des parties la fréquence des VD présentes dans les différentes situations.

**Tableau 4.6** Tableau des variables didactiques selon la partie du manuel de Perspective mathématique.

|                                                                      | <b>Partie 5</b> | <b>Partie 6</b> | <b>Partie 8</b> |
|----------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| <b>VD1</b> – Présence de 3 grandeurs ou plus                         | 1               | 7               | 5               |
| <b>VD2</b> – Absence de valeurs numériques                           | 0               | 13              | 0               |
| <b>VD3</b> - Une grandeur admet des valeurs continues                | 1               | 17              | 5               |
| <b>VD4</b> – Une grandeur admet des valeurs discrètes                | 0               | 0               | 2               |
| <b>VD5</b> – Une grandeur admet des valeurs négatives                | 0               | 0               | 0               |
| <b>VD6</b> – Le temps est une grandeur                               | 1               | 14              | 0               |
| <b>VD7</b> – Le temps est la grandeur conséquente                    | 1               | 0               | 0               |
| <b>VD8</b> – La relation entre les grandeurs n'est pas imposée       | 0               | 6               | 2               |
| <b>VD9</b> – Les grandeurs sont interchangeables                     | 1               | 3               | 4               |
| <b>VD10</b> – Présence de différents types de tracés                 | 0               | 5               | 1               |
| <b>VD11</b> – Présence de plusieurs tracés dans un plan              | 0               | 9               | 0               |
| <b>VD12</b> – Conflit objet-source objet-cible                       | 0               | 10              | 0               |
| <b>VD13</b> – Graphique représente un ensemble d'expériences         | 0               | 0               | 3               |
| <b>VD14</b> – Modélisation peut se réaliser en opérant sur un schéma | 0               | 3               | 6               |

|                                                            |   |    |   |
|------------------------------------------------------------|---|----|---|
| <b>VD15</b> – Report possible de segments                  | 0 | 1  | 1 |
| <b>VD16</b> – Connaissances géométriques nécessaires       | 0 | 2  | 6 |
| <b>VD17</b> – Connaissances physiques usuelles nécessaires | 1 | 11 | 0 |
| <b>VD18</b> – Absence de relation                          | 0 | 0  | 0 |
| <b>VD19</b> – Grandeurs définies par l'élève               | 0 | 0  | 0 |

L'analyse autour des 19 autres VD a permis de remarquer que chacune des situations est composée entre trois et dix VD et dans la partie 6, les situations sont caractérisées par quatorze des 19 VD et huit situations mobilisent plus de six VD, ce qui est d'une présente une grande variété pour le travail autour du raisonnement covariationnel. Le tracé et l'interprétation de graphiques dans cette partie font appel à différents types de tracés (droits et courbes) qui prennent place dans des repères différents. Les grandeurs considérées sont en général continues, il s'agit du temps, de la distance, de la hauteur (ou d'autres mesures de longueur), du niveau de l'eau, de l'aire, de la masse et de la quantité d'eau. Dans la partie 8, d'autres types de situations sont présentes si on considère les valeurs des grandeurs (continues, discrètes). Dans cette partie, les grandeurs en jeu prennent des valeurs discrètes, le tracé serait donc discret.

Nous pouvons observer que trois VD sont présentes dans les trois parties : VD1, VD3 et VD9. Ainsi, lorsque les élèves sont amenés à travailler le raisonnement covariationnel, les situations ont les caractéristiques suivantes : *présence d'au moins trois grandeurs, des grandeurs continues et des grandeurs interchangeables*. Ces VD sont importantes pour mobiliser les premières unités de raisonnement (point de vue global) portant sur l'identification des grandeurs et sur le choix d'une grandeur prédominante. Toutefois, dans la majorité des situations (seize sur 24), la relation entre les grandeurs est imposée. Ceci est dû au fait que *Perspective mathématique* prévoit un travail important sur les tables de valeurs (interprétation et/ou remplissage) et sur

l'interprétation graphique, représentations pour lesquelles la relation et les grandeurs sont préalablement données.

Finalement, dans quinze des 24 situations retenues, la grandeur temps est omniprésente, ce qui rejoint les constats de la recherche (Janvier, 1998). En plus, cette grandeur est la grandeur prédominante dans quatorze de ces quinze situations ce qui implique que les élèves sont confrontés dans le développement du raisonnement covariationnel à une réflexion sur le temps chronique. Le temps est une grandeur conséquente dans une seule situation.

## 4.2 L'analyse des manuels *À vos maths*

Rappelons que seul le manuel C a été sélectionné pour l'analyse. En tout 107 pages ont été observées pour sélectionner les situations qui permettent un travail sur la covariation. Les pages retenues correspondent aux trois premiers chapitres.

### 4.2.1 Un aperçu des chapitres sélectionnés pour l'analyse

Les trois premiers chapitres du manuel regroupent plusieurs des concepts que l'on cible pour notre étude sur la covariation : les variables<sup>33</sup>, la relation entre les variables, la proportionnalité et les suites. Chacun de ces chapitres est composé d'approximativement le même nombre de situations (un minimum de 46 situations pour le chapitre 1 et un maximum de 55 pour le chapitre 3). Le tableau 4.7 présente le nombre et la fréquence des situations retenues par chapitre.

---

<sup>33</sup> *À vos maths* utilise le mot « variable » plutôt que « grandeur » terminologie que nous avons privilégiée. Nous reprendrons le terme « variable » uniquement lorsqu'il sera présent dans la formulation du manuel dans tous les autres cas nous utiliserons le terme « grandeur ».

**Tableau 4.7** Tableau des fréquences des situations retenues et analysées dans trois chapitres sélectionnés dans *À vos maths, manuel C*.

| Titre du chapitre et des sections              | Nombre de situations retenues | Nombre total de situations | Fréquence (% , arrondi à l'entier) |
|------------------------------------------------|-------------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| <b>Chapitre 1 – Les variables</b>              |                               |                            |                                    |
| Section 1 : Les situations à deux variables    | 0                             | 17                         | 0                                  |
| Section 2 : La relation entre deux variables   | 4                             | 29                         | 14                                 |
| <b>Chapitre 2 - Vers la proportionnalité</b>   |                               |                            |                                    |
| Section 2 : Les rapports et les taux constants | 4                             | 47                         | 9                                  |
| <b>Chapitre 3 : Des modèles mathématiques</b>  |                               |                            |                                    |
| Section 2 : Les suites                         | 0                             | 55                         | 0                                  |
| Total                                          | 8                             | 148                        | 5                                  |

Huit situations ont été retenues dans les trois chapitres, quatre dans le premier chapitre (*Les variables*) et quatre autres dans le deuxième chapitre (*Vers la proportionnalité*). Aucune situation n'a été retenue dans le troisième chapitre (*Des modèles mathématiques*). Pour mieux comprendre la façon dont a été menée l'analyse, nous allons expliciter comment sont organisées les situations dans les différentes sections d'*À vos Maths* et la raison pour laquelle nous n'en avons retenu que huit.

*À vos maths* présente la même structure pour chacun des trois chapitres analysés. Chacun d'eux est séparé en deux ou trois sections. Chaque section est composée de plusieurs séquences (deux pour le chapitre 1, trois pour le chapitre 2 et cinq pour le chapitre 3) qui ciblent un élément mathématique précis de la section générale. Par exemple, la section 2 (*Les rapports et les taux constants*) du chapitre 2 (*Vers la proportionnalité*) comprend deux séquences : *L'influence d'une variable sur une autre variable* et *La représentation graphique d'une situation à deux variables*. Les questions d'une situation ciblent principalement le contenu de la séquence. Ainsi, afin de comprendre la raison d'être ou le rationnel derrière certaines questions, il est

important de les situer à l'intérieur de la séquence, de la section et du chapitre d'où elles sont tirées. Nous n'avons pu retenir que huit situations en raison de cette subdivision très scindée du contenu. Chaque séquence permet la mobilisation de quelques unités de raisonnement de la covariation sans aboutir à l'étude des variations concomitantes ce qui caractérise l'approche covariationnelle (voir section 3.4.1) :

« Une approche covariationnelle est une manière de travailler la fonction en situation. Elle consiste en l'étude approfondie des variations concomitantes de deux grandeurs par l'intermédiaire d'un travail sur les accroissements concomitants de ces deux grandeurs dans des situations dans lesquelles on s'intéresse à déterminer comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante varie. » (Passaro, 2015, p. 53)

Ainsi, *À vos maths* n'a pas l'air de miser sur le développement du raisonnement covariationnel, mais vise plutôt une étude autour des concepts et processus ciblés dans le programme de formation de l'école québécoise. On peut toutefois observer une continuité entre les séquences. Pour illustrer la façon dont *À vos maths* est organisé, nous présentons la situation d'introduction de la séquence 2.1 : *L'influence d'une variable sur une autre variable* (voir figure 4.17).



## La relation entre deux variables

L'analyse du comportement d'une variable par rapport à une autre variable permet d'interpréter des situations. Elle donne l'occasion de reconnaître des tendances et même de faire des prédictions. L'influence qu'une variable peut avoir sur une autre variable intéresse beaucoup les spécialistes de divers domaines.

### séquence 2.1

#### Exploration

En affaires, quelles variables peuvent influencer le choix d'un type de commerce ?

### L'influence d'une variable sur une autre variable

En médecine sportive, l'étude de relations entre des variables conduit à déterminer l'effet de certaines activités sur la santé.

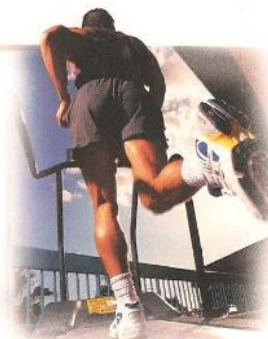
**A** Selon toi, quelles variables associées à l'activité physique ont une influence sur la santé ?

En biologie marine, l'étude de relations entre des variables permet notamment d'observer l'évolution des écosystèmes marins, c'est-à-dire la faune et la flore aquatique.

**B** Selon toi, quelles variables peuvent avoir une influence sur les écosystèmes marins ?

En pharmacologie, l'étude de relations entre des variables permet de mettre au point des remèdes efficaces pour traiter certaines maladies.

**C** Selon toi, quelles variables permettent de déterminer si un remède est efficace ou non ?



**Figure 4.17** Situation d'introduction tirée de *À vos maths, Manuel C, Chapitre 1, section 2 : La relation entre deux variables. p. 16.*

Cette situation se trouve dans la section 2 (*la relation entre deux variables*) du chapitre 1 (*Les variables*). Ainsi les trois premières questions (A, B et C) survolent trois domaines différents (l'activité physique, les écosystèmes marins et la pharmacologie) afin d'identifier différentes grandeurs à l'étude. *À vos maths* procède ainsi à un retour sur la section 1 (*Les situations à deux variables*) où l'on s'intéressait à l'identification des grandeurs en jeu. Est ici mobilisé un point de vue global relié à U0. Ainsi, après avoir déterminé quelques grandeurs possibles d'un domaine, *À vos maths* propose deux autres domaines en répétant la tâche précédente. Par la suite, les questions D à F (voir

figure 4.18) portent sur les différents types de relations qui peuvent exister entre les grandeurs, cette étude ne se fait toutefois pas en misant sur les domaines précédents.

En étudiant une situation à deux variables, on tente généralement de déterminer la façon dont une variable varie par rapport à l'autre.

**D** Décris une situation à deux variables où :

- 1) l'augmentation de la valeur d'une variable fait augmenter la valeur de l'autre variable ;
- 2) l'augmentation de la valeur d'une variable fait diminuer la valeur de l'autre variable ;
- 3) la valeur d'une variable n'a pas d'effet sur la valeur de l'autre variable.

**E** Reproduis le tableau ci-dessous. Inscris-y les situations que tu as décrites à la question D.

**Exemples de trois types de relations entre deux variables**

| Les valeurs des variables varient dans le même sens | Les valeurs des variables varient en sens inverse | Les variables n'ont pas de relation entre elles |
|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|                                                     |                                                   |                                                 |
|                                                     |                                                   |                                                 |

« Varier dans le même sens » signifie que lorsque la valeur d'une variable augmente, la valeur de l'autre variable augmente aussi.



Tu as raison. Mais ça veut aussi dire que lorsque la valeur d'une variable diminue, la valeur de l'autre variable diminue aussi.

**F** Que signifie « varier en sens inverse » ?

**Figure 4.18** Situation d'introduction tirée de *À vos maths, Manuel C, Chapitre 1, section 2 : La relation entre deux variables. p. 17.*

Ainsi, les questions D, E et F ciblent les relations entre les grandeurs. Est mobilisé ici un point de vue global dans lequel il s'agit d'identifier la présence de variations concomitantes (U2) et de qualifier le changement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente (U3). Il est ici demandé à l'élève de trouver des situations, des contextes qui illustrent différentes variations possibles (question D). Par la suite, la question E introduit le vocabulaire « varie dans le même sens » et « varie en sens inverse ». *À vos maths* annonce qu'il existe trois types de relations entre deux grandeurs, une variation entre les deux variables: 1) dans le même sens, 2) en sens

inverse et 3) pas de relation. Ces trois types de relations reviennent fréquemment dans les questions posées tout le long de la section. Une rubrique *Action* suit cette situation d'introduction afin de mettre en pratique l'identification des différents types de relation entre deux grandeurs. Pour cela, *À vos maths* s'appuie sur cinq contextes dont trois sont distincts des domaines de la page précédente afin que l'élève déduise le sens de variation des couples de grandeurs proposées. Dès le début de cette séquence, l'élève est confronté à six domaines différents de la vie réelle, il s'agit de déduire le sens de variation, s'il existe, de différents couples de grandeurs. Nous pouvons remarquer que ces grandeurs et domaines ne sont pas repris dans les séquences qui suivent. Ainsi, pour mobiliser des unités de raisonnement associées au raisonnement covariationnel global (U2 et U3), *À vos maths* s'appuie sur un grand nombre de couples de grandeurs sans que ces couples ou contextes soient repris pour pousser, approfondir l'étude de la covariation par exemple autour de la représentation graphique.

En effet, dans la séquence qui suit (*La représentation graphique d'une situation à deux variables*), *À vos maths* propose une étude graphique du sens de variation. Les conventions graphiques ainsi que les représentations attendues pour les trois types de relations sont alors abordées. L'auteur s'appuie sur d'autres couples de grandeurs que celles étudiées précédemment, un grand nombre de couples de grandeurs est encore ici proposé pour mettre en action ce qui a été appris. Ainsi, une étude approfondie des situations en s'attardant à la variation n'est pratiquement jamais menée jusqu'au bout. De plus, les questions d'une situation s'intéressent rarement aux variations concomitantes entre les deux grandeurs.

*À vos maths* s'appuie sur la typologie suivante pour distinguer les situations présentées : *activité, situation d'introduction, action, bric à maths, TIC et dans la vie*<sup>34</sup>. Chaque séquence débute par une *Situation d'introduction* suivie par une ou plusieurs

---

<sup>34</sup> Aucune situation observée se trouve dans la section « dans la vie », mais cette section est présente dans les différents chapitres du manuel.

sections *Action*. Comme nous l'avons vu, dans la *situation d'introduction*, certaines unités de raisonnement reliées à un point de vue global peuvent être mobilisées et par la suite on demande à l'élève d'appliquer dans les situations *Action* ce qu'il a vu. Les auteurs distinguent les *situations d'introduction* comme suit : « Ces questions t'amènent à construire le sens des concepts et processus à l'étude » (*À vos maths*, p. IV) et les rubriques *Action!* par : « te permettent de mettre en pratique tes conceptions et de les valider » (Ibid., p. IV). Ainsi, la *situation d'introduction* offre un questionnement plus large que les autres types de situations qui les suivent. Certaines situations d'*action* reprennent le questionnement de la *situation d'introduction* qui la précède. Par la suite, les concepts et processus à l'étude sont approfondis avec d'autres situations nommées *Activités*. C'est dans la phase d'intégration et de réinvestissement que nous trouvons la section *Bric à maths* qui réinvestit les éléments mathématiques des situations de la section. Nous n'avons pas pu clairement déceler ce qui distingue les *activités* des situations de *Bric à maths* en termes de contenu, à part que les situations de *Bric à maths* se retrouvent en fin de chapitre ce qui n'est pas le cas des *activités*. Le tableau 4.8 présente la fréquence des différents types de situations retenus pour l'analyse.

**Tableau 4.8** Tableau des fréquences des types situations retenues dans les chapitres 1, 2 et 3 de la collection *À vos maths*.

| Type de situation               | Nombre de situations retenues | Nombre total de situations | Fréquence (% , arrondi à l'entier) |
|---------------------------------|-------------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| Situation d'introduction (I-XX) | 3                             | 17                         | 18                                 |
| Activités (A-XX)                | 0                             | 52                         | 0                                  |
| Action (E-XX)                   | 3                             | 26                         | 12                                 |
| Bric à maths (P-XX)             | 1                             | 49                         | 2                                  |
| TIC (T-XX)                      | 1                             | 4                          | 25                                 |
| Total                           | 8                             | 148                        | 5                                  |

Nous observons que la majorité des situations retenues (six sur les huit) sont des situations d'introduction et d'action. Cependant, le faible nombre de situations ciblées ne nous permet pas de faire ressortir des tendances pour le travail sur la covariation selon le type de situations.

#### 4.2.2 Des exemples de situations rejetées pour l'analyse

Dans le chapitre 3 (*Les suites*), aucune situation n'a pu être considérée comme présentant du potentiel pour l'étude du raisonnement covariationnel. Ce chapitre comporte un grand nombre de suites numériques décontextualisées comme celle présentée à la figure 4.19.

**4. Les suites proportionnelles**

a) Parmi les suites suivantes, lesquelles sont des **suites proportionnelles** ?

1)

| $x$ | $y$ |
|-----|-----|
| 1   | 10  |
| 2   | 20  |
| 3   | 30  |
| 4   | 40  |

2)

| $x$ | $y$ |
|-----|-----|
| 1   | 5   |
| 2   | 8   |
| 3   | 11  |
| 4   | 14  |

3)

| $x$ | $y$ |
|-----|-----|
| 1   | 2   |
| 2   | 4   |
| 3   | 6   |
| 4   | 8   |

b) Quel est le coefficient de proportionnalité ?

c) Quel est l'ajustement des suites proportionnelles ?

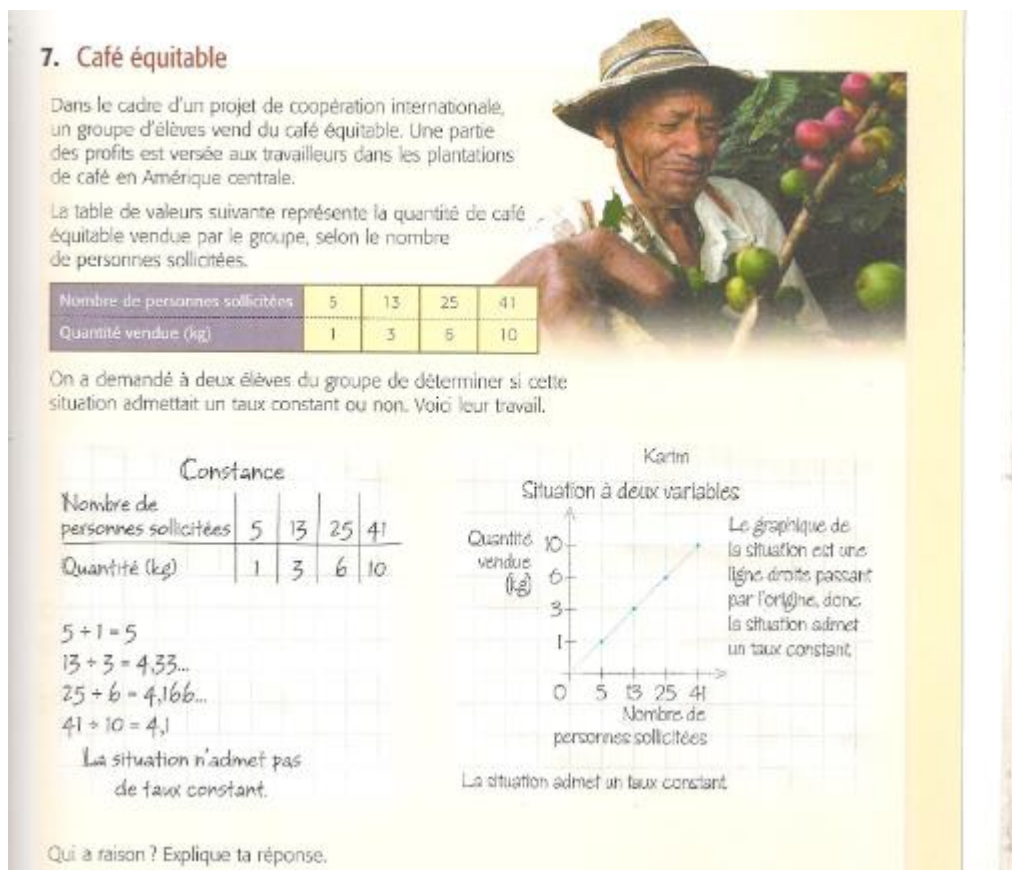
**Figure 4.19** Exercice d'application tiré de *À vos maths, Manuel C, Chapitre 3, Bric à maths : Réinvestissement section 2. p. 191.*

Cette situation ne repose pas sur un contexte, elle s'intéresse à la reconnaissance des paramètres (taux de variation et ajustement) de suites proportionnelles. L'élève doit déterminer en a) que les première et troisième suites sont proportionnelles. Comme aucune indication n'est donnée pour déterminer comment se fera cette reconnaissance des suites proportionnelles, nous ne pouvons assurer qu'un regard covariationnel sera sollicité. La question b) mène vers la recherche d'un coefficient de proportionnalité pour les deux suites proportionnelles. La question c) permet à l'élève de voir que l'ajustement dans ces deux suites sera nul. Ces questions mènent vers l'écriture d'une formule pour représenter les suites numériques. Rappelons que la définition retenue stipule que l'approche covariationnelle (Passaro, 2015, p.53) : « [...] est une manière de travailler la fonction en situation. ». Ainsi, nous avons exclu toutes les situations décontextualisées qui sont fortement présentes dans le chapitre 3 portant sur l'étude des suites.

Dans la section 2 du chapitre 2, *Les rapports et taux constants*, nous avons retenu quatre situations qui sont intéressantes du point de vue du développement du raisonnement covariationnel. La grande majorité des situations dans ce chapitre amènent l'élève à travailler sur un regard correspondance en relevant le taux ou le rapport déduit par des couples de valeurs correspondantes. C'est le cas de la situation *Café équitable* (voir figure 4.20) qui pourrait être intéressante si exploitée en amenant l'élève à développer un regard covariationnel<sup>35</sup>.

---

<sup>35</sup> Au chapitre V, nous reviendrons sur le potentiel de certaines situations dans une perspective où l'on apporte certaines modifications aux questions et que l'on propose des interventions enseignantes.



**Figure 4.20** Exercice d'application tiré de *À vos maths, Manuel C, Chapitre 2, Section 2: Les rapports et les taux constant*, p. 87.

Cette situation est particulière, car on demande à l'élève de se prononcer sur la production de deux « élèves fictifs ». L'élève joue ainsi le rôle de celui qui évalue des productions, qui juge de ce qui a été fait comme le fait un enseignant. L'élève prend ici une posture que nous ne retrouvons pas dans le manuel *Perspective mathématique*. Cette situation n'a toutefois pas été retenue puisque c'est la recherche d'un taux constant entre deux valeurs données qui est ciblé dans deux représentations. Ces représentations sont les sujets principaux de séquences distinctes. En observant la démarche de Constance, nous pouvons déterminer que sa réponse est axée sur un regard correspondance, car elle prend la valeur d'une grandeur et la met en rapport avec la

valeur correspondante de l'autre grandeur. Toutefois, il aurait été possible d'arriver à la même conclusion que Constance en observant que pour une augmentation des valeurs d'une grandeur, l'augmentation des valeurs de la deuxième grandeur n'est pas la même. Ainsi, l'accent est mis dans cette situation sur une comparaison entre les taux (regard correspondance) plutôt que sur les accroissements entre les valeurs des deux grandeurs (regard covariationnel). De plus, la réponse de Karim est erronée en raison de l'absence d'intervalles réguliers sur les axes. L'élève doit comprendre que la représentation ne devrait pas être une droite si les intervalles des axes respectaient les conventions graphiques du plan cartésien. On pourrait amener les élèves vers cette observation, mais ça ne semble pas être cette intention qui est poursuivie. En effet, on s'intéresse plutôt aux conventions graphiques qui faisaient l'objet d'une question posée précédemment.

De plus, nous avons souligné qu'*À vos maths* met l'accent sur la possibilité que deux grandeurs n'aient pas de relation entre elles (voir section 4.2.1). Nous retrouvons cette préoccupation dans le chapitre 2 où les élèves doivent déterminer à plusieurs reprises si un taux constant peut s'appliquer entre des valeurs correspondantes de deux grandeurs. L'auteur annonce qu'il est parfois impossible de prédire la valeur cherchée en raison d'un manque de précision dans le contexte. Par exemple, pour déduire qu'il existe une relation entre deux grandeurs, il faut reconnaître dans l'énoncé certaines expressions comme « toujours au même rythme », « en moyenne ». À d'autres occasions, c'est le contexte ou la relation impliquant les deux grandeurs qui ne sont pas appropriés pour faire des prédictions (voir figure 4.21).



1. Essaie de résoudre les problèmes suivants.

- Deux sœurs ont quatre et huit ans. Quel âge aura l'aînée lorsque la cadette aura sept ans?
- Mathieu a cinq ans et il mesure un mètre.
  - À quel âge mesurera-t-il deux mètres?
  - À quel âge mesurera-t-il cinq mètres?
- Le pelage d'un dalmatien de cinq mois compte 18 taches noires. Quel âge aura le dalmatien lorsque son pelage comptera 36 taches noires?
- Un homme portant des souliers de pointure 10 a un salaire annuel de 50 000\$. Quelle sera sa pointure de souliers lorsqu'il obtiendra une augmentation de 5 000\$?
- La couleur préférée des enfants de deux ans est le rouge. Quelle est la couleur préférée des enfants de quatre ans?
- Aujourd'hui, le vent souffle à 20 km/h et il fait 10 °C. Quelle température fera-t-il demain si la météo annonce des rafales de 40 km/h?
- Le capitaine d'un bateau ayant un équipage de 40 matelots a 51 ans. Quel âge a le capitaine d'un bateau ayant un équipage de 80 matelots?
- L'aire d'un carré ayant des côtés de 3 cm est de 9 cm<sup>2</sup>. Quelle est l'aire d'un carré ayant des côtés de 5 cm?

2. Compare tes réponses avec celles de tes camarades.

3. Pourquoi est-il impossible de reformuler chacun des huit problèmes précédents pour y faire apparaître le concept de taux ou de rapport constant?

4. Invente deux autres problèmes du même type.



**Figure 4.21** Situation d'introduction tiré de *À vos maths, Manuel C, Chapitre 2, Section 2. Les rapports et les taux constants. p. 100.*

Cette situation met de l'avant l'absence de relation entre deux grandeurs. Par exemple, il n'est pas possible de déterminer une relation à l'aide d'un taux constant entre l'âge de Mathieu et sa grandeur (en b). Il est possible que Mathieu atteigne deux mètres, mais nous ne pouvons pas le déterminer en se basant sur un taux d'un mètre par cinq ans. Atteindre cinq mètres n'a tout simplement pas de sens et l'élève devrait pouvoir le constater. En fait, il est seulement possible de répondre avec certitude aux questions a et h. Le manuel *À vos maths* met donc l'accent sur les grandeurs qui n'ont pas de

relation entre elles. Cette situation a toutefois été rejetée en raison des questions qui mettent l'accent uniquement sur une recherche d'une valeur (4<sup>e</sup> proportionnelle) lorsqu'il est possible d'établir un lien entre les deux grandeurs.

Pour ce qui est des situations rejetées dans la section 1 (*Les situations à deux variables*) du chapitre 1 (*Les variables*), elles l'ont été en raison d'une absence d'étude approfondie sur la relation entre les deux grandeurs. Comme nous l'avons soulevé dans la section 4.2.1, cette section d'*À vos maths* cible uniquement l'identification des grandeurs sans amener une réflexion sur la relation entre ces grandeurs.

#### 4.2.3 L'analyse des situations retenues selon les représentations en jeu

Le tableau 4.9 présente les occurrences des passages entre les différentes de représentation selon les questions des huit situations retenues. Malgré le faible nombre de situations retenues (huit), l'analyse a été menée autour de 31 questions.

**Tableau 4.9** Tableau de passages entre les représentations pour les manuels *À vos maths*

|                          | REPRÉSENTATION D'ARRIVÉE |              |                  |              |              |                |
|--------------------------|--------------------------|--------------|------------------|--------------|--------------|----------------|
| REPRÉSENTATION DE DÉPART | Description verbale      | Schéma       | Table de valeurs | Graphique    | Formule      | Totaux         |
| Description verbale      | 21<br>(7-14-0)           | 0<br>(0-0-1) | 1<br>(1-0-0)     | 1<br>(1-0-0) | 0<br>(0-0-0) | 23<br>(9-14-0) |
| Schéma                   | 4<br>(4-0-0)             | 0<br>(0-0-0) | 0<br>(0-0-0)     | 1<br>(1-0-0) | 0<br>(0-0-0) | 5<br>(5-0-0)   |
| Table de valeurs         | 0<br>(0-0-0)             | 0<br>(0-0-0) | 0<br>(0-0-0)     | 0<br>(0-0-0) | 0<br>(0-0-0) | 0<br>(0-0-0))  |

|                  |                               |              |                            |                            |              |                               |
|------------------|-------------------------------|--------------|----------------------------|----------------------------|--------------|-------------------------------|
| <b>Graphique</b> | <b>2</b><br><b>(1-1-0)</b>    | 0<br>(0-0-0) | 0<br>(0-0-0)               | <b>1</b><br><b>(0-1-0)</b> | 0<br>(0-0-0) | <b>3</b><br><b>(1-2-0)</b>    |
| <b>Formule</b>   | 0<br>(0-0-0)                  | 0<br>(0-0-0) | 0<br>(0-0-0)               | 0<br>(0-0-0)               | 0<br>(0-0-0) | 0<br>(0-0-0)                  |
| <b>Totaux</b>    | <b>27</b><br><b>(12-15-0)</b> | 0<br>(0-0-0) | <b>1</b><br><b>(1-0-0)</b> | <b>3</b><br><b>(1-2-0)</b> | 0<br>(0-0-0) | <b>31</b><br><b>(15-16-0)</b> |

Nous observons un grand nombre de questions ciblant la description verbale, autant pour la représentation de départ que pour la représentation d'arrivée. Les élèves doivent relever les informations issues d'un contexte en mots pour y répondre avec des explications encore en mots (voir figure 4.21). Nous n'avons retenu qu'une seule situation misant sur la table de valeurs et qui permet de s'appuyer sur un raisonnement covariationnel. La représentation schéma fait l'objet de plusieurs questions (cinq en tout), elles proviennent de deux situations (voir figures 4.15 et 4.16).

### **Un exemple de situation qui mise sur la description verbale : vers la description d'un vocabulaire permettant de décoder une relation de covariation**

Comme mentionné précédemment, nous avons retenu quatre situations dans la section 2 du chapitre 1 (*La relation entre deux variables*) et quatre dans la section 2 du chapitre 2 (*Les rapports et les taux constants*) qui s'intéressent aux situations de proportionnalité. Dans l'ensemble des situations observées, nous relevons qu'il y a un souci de l'auteur afin d'introduire des éléments de contenu en les associant à un vocabulaire précis.

Dans toutes les situations sélectionnées du chapitre 2, nous relevons que l'auteur cherche à amener les élèves à reconnaître des taux et des rapports dans différentes représentations (en mots, dans le graphique, dans la table de valeurs). Tout au long du chapitre, l'élève est amené à discriminer les situations ayant un taux constant de celles pour lesquelles on ne peut pas le déterminer (voir figure 4.22).

Voici deux problèmes concernant la quantité de papier récupérée dans deux écoles secondaires.

**1** À l'école Saint-Martin, on a rempli 9 bacs de papier en 12 jours. Combien de bacs de papier y remplit-on en 21 jours?

**2** À l'école Sainte-Martine, on remplit en moyenne 9 bacs de papier en 12 jours. À ce même rythme, combien de bacs de papier y remplit-on en 21 jours?

**A** Quelle est la différence entre ces deux problèmes?

**B** Quel problème est-il impossible de résoudre avec certitude? Explique ta réponse.

**C** Selon toi, quel problème admet des taux constants? Explique ta réponse.

**D** Quels mots permettent de décoder que les taux sont constants?

Même si personne ne peut prédire l'avenir avec une précision absolue, il est possible de calculer le nombre de bacs de papier remplis en un temps donné si l'on impose une contrainte à la situation : le rythme de remplissage des bacs doit être constant.

En lisant un problème, il faut donc porter une attention particulière aux mots et aux expressions pouvant révéler que les taux en jeu sont constants.

**Exploration**

Quels mots, dans l'Exploration de la page 41, permettaient de conclure qu'on avait affaire à des taux constants?

**Figure 4.22** Situation d'introduction tirée de *À vos maths, Manuel C, Chapitre 2, Section 2. Les rapports et les taux constants. p. 79.*

Dans cette situation, l'élève doit reconnaître (en a) que le contexte de l'école Saint-Martin (à gauche) ne spécifie pas de rythme constant de remplissage contrairement au deuxième contexte (à droite). Les expressions « en moyenne » et « à ce même rythme » sont nécessaires afin de répondre avec certitude à la question « combien de bacs de papier y remplit-on en 21 jours? ». Cette situation a été retenue pour notre étude, car elle amène l'élève à réfléchir aux intervalles entre différents nombres de bacs de papier remplis selon un temps donné afin de déterminer s'il est constant. Il y a donc une ouverture pour considérer différents couples à travers un regard covariationnel. Est ici mobilisé un point de vue global à travers une identification de la présence de variations concomitantes (U2). L'élève devra distinguer les expressions utilisées dans l'énoncé (en d) qui permettent de constater que 9 bacs seront remplis pour des intervalles de 12

jours. En prenant la situation dans son ensemble, l'accent n'est pas axé sur la recherche d'un nombre de bacs après 21 jours de remplissage, mais sur les indices permettant de déterminer si le remplissage se fait selon des intervalles constants. L'élève pourrait se dire qu'à chaque jour 9/12 d'un bac est rempli à l'école Ste-Martine alors qu'à l'école St-Martin il est possible que les 9 bacs aient été remplis uniquement au 12<sup>e</sup> jour.

Ainsi la situation précédente, lorsque prise dans une perspective du développement covariationnel, permettrait d'établir que des accroissements entre les valeurs de la grandeur dépendante sont constants pour des accroissements constants entre les valeurs correspondantes de la grandeur indépendante mobilisant ainsi un point de vue global à travers le repérage d'un changement des accroissements dépendants pour des accroissements constants de la grandeur indépendante (U4). L'intention d'*À vos maths* est de déterminer que ce raisonnement n'est possible sans la présence de certaines expressions langagières particulières qui indiquent un lien de dépendance entre les grandeurs. Comme présenté précédemment pour des situations non retenues pour l'analyse (voir 4.2.2), l'auteur met de l'avant cette reconnaissance d'un taux constant ou de l'absence d'informations pour le déterminer. Cependant dans beaucoup de cas, les questions portent uniquement sur la recherche d'un nouveau couple ou d'une 4<sup>e</sup> proportionnelle, elles ont donc peu d'intérêt pour l'étude des variations concomitantes des grandeurs. Nous observons plusieurs questions portant uniquement sur la recherche d'une 4<sup>e</sup> proportionnelle dans les chapitres sélectionnés. Ce type de questions amène majoritairement un regard correspondance sur les valeurs des grandeurs en jeu puisque seulement deux couples sont proposés. Il n'est pas possible de porter une attention sur les différents accroissements entre les grandeurs lorsqu'il y en a qu'un seul accroissement qui peut être déduit.

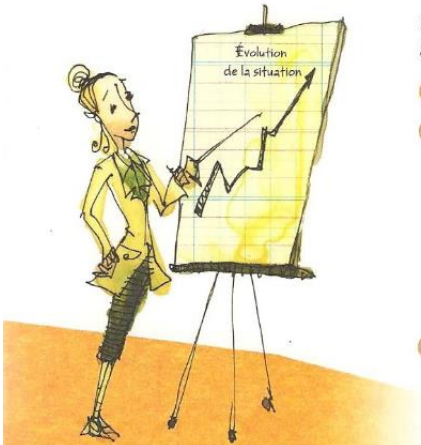
**Un exemple de situation qui mise sur le schéma : vers la présentation des conventions permettant de représenter les relations entre deux grandeurs dans le graphique**

La situation précédente (voir figure 4.22) repose uniquement sur la description verbale comme représentation de départ et d'arrivée et elle amène une réflexion sur le vocabulaire qui permet d'ouvrir vers une caractérisation de la relation entre deux grandeurs. La situation suivante (voir figure 4.23) mise sur d'autres représentations (schéma et graphique) tout en portant une attention sur le vocabulaire utilisé et à utiliser, on reconnaît ici une grande préoccupation d'*À vos maths*. Observons la situation d'introduction qui se trouve dans la section « le graphique » (voir figure 4.23<sup>36</sup>). Cette section est précédée par une section portant sur la table de valeurs.

**Le graphique**

Contrairement à une table de valeurs, le graphique d'une situation à deux variables donne rapidement une idée du type de relation qui existe entre les deux variables.

Prenons, par exemple, le graphique ci-contre.



**A** Selon toi, quelles sont les variables de la situation représentée par ce graphique ?

Supposons que les variables en jeu soient les *profits* d'une entreprise à mesure que le *temps* passe.

**B** Quelle variable est alors placée en abscisse ? Explique ta réponse.

**C** Parmi les énoncés suivants, indique celui qui peut s'appliquer aux profits de l'entreprise.

- 1** Plus le temps passe, moins l'entreprise fait des profits.
- 2** On ne peut pas établir de lien entre les années et les profits de l'entreprise.
- 3** Plus le temps passe, plus l'entreprise fait des profits.

**D** Construis un graphique à main levée pour représenter les situations dont il est question dans les deux énoncés que tu n'as pas choisis à la question **C**.

20 CHAPITRE 1 LES VARIABLES

**Figure 4.23** Exercice d'application tiré de *À vos maths, Manuel C, Chapitre 1, Section 2. La relation entre deux variables. p. 20.*

<sup>36</sup> La situation d'introduction comprend deux autres questions (e et f). Cependant ces questions n'ont pas de lien direct avec le contexte de l'entreprise proposé par l'illustration à la gauche du contexte et ne présentent aucun apport pour le développement du raisonnement covariationnel. Nous ne les avons donc pas reprises ici.

Cette situation demande à l'élève d'identifier les grandeurs en jeu dans l'illustration (en a). La question ouvre la porte à la possibilité de proposer différentes grandeurs suscitant ainsi un point de vue global par l'unité de raisonnement U0. L'élève devra s'appuyer sur l'illustration pour répondre à la question a). Les réponses seront différentes selon les expériences personnelles de chaque élève. La représentation schématique avec le titre vague « Évolution de la situation » ne permet pas d'établir un ensemble restreint de réponses adéquates. Est mobilisé ici un point de vue global à travers l'identification de la présence de variations concomitantes (U2). Nous pouvons remarquer que la représentation contenue dans l'illustration ne respecte pas certaines conventions graphiques du plan cartésien : absence d'axes, pas d'identification des axes et présence d'une flèche dans le trait. Cependant les représentations graphiques qui suivent ces questions respectent les conventions graphiques du plan cartésien. Nous avons donc considéré que cette représentation correspondait au schéma plutôt qu'à une représentation graphique (*À vos maths* l'identifie comme un graphique). Par la suite, *À vos maths* oriente l'étude vers les grandeurs « profits d'une entreprise » et « le temps qui passe » en imposant ainsi les grandeurs et la relation entre elles puisqu'il précise « à mesure que ». L'identification des grandeurs indépendante et dépendante (U1) se fait à travers le point de vue global, *À vos maths* demandant dans la question b) d'établir la grandeur qui se trouve en abscisse. Notons que l'élève n'est pas censé savoir ce que signifie le terme « abscisse » puisqu'un encadré théorique présente quelques pages plus loin sa définition.

L'intérêt des questions c) et d) est d'introduire la représentation graphique, en partant d'une représentation schématique, et ce, à travers les énoncés présentés en c). Tout d'abord, l'élève doit reconnaître l'énoncé associé (plus le temps passe, plus l'entreprise fait des profits<sup>37</sup>) à la représentation schématique présente à gauche. À la question d),

---

<sup>37</sup> Nous présumons que les élèves doivent s'intéresser à l'allure générale du schéma. L'entreprise n'augmente pas toujours ses profits selon les augmentations précédentes, mais en général les profits augmentent.

l'élève représentera dans un « graphique » les deux autres énoncés qui n'ont pas été choisis. *À vos maths* mise ici sur la mobilisation d'un point de vue global à travers la qualification du changement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente (U3) de façon verbale en c) puis dans le graphique en d). La préoccupation d'*À vos maths* de porter une attention à se questionner sur la présence d'un lien entre les grandeurs se poursuit ici.

Nous considérons cette situation riche dans une perspective de développement du raisonnement covariationnel en raison de la formulation des énoncés (en c) et de la construction de « graphiques » à main levée (en d). Ces deux questions amènent l'élève à considérer simultanément les accroissements des deux grandeurs (le temps écoulé et les profits de l'entreprise). L'élève doit tout d'abord faire une association entre une représentation schématique et une description verbale générale de la situation. Les descriptions verbales sont assez vagues pour permettre de considérer uniquement l'allure et de s'intéresser qualitativement à la relation (en absence de valeurs numériques). De plus, à la question suivante, l'élève doit faire le cheminement inverse, il passe d'une description verbale vers une représentation « graphique ». Ces deux questions aident à distinguer les trois types de relations précédemment établies (dans le même sens, en sens inverse ou absence de relation) puisqu'il est demandé de toutes les représenter.

Nous relevons dans les *situations d'introduction* un intérêt marqué pour le vocabulaire associé à l'existence d'une relation entre deux grandeurs et la présence d'un grand nombre de questions. Plusieurs autres situations retenues ciblent uniquement la représentation verbale, ces dernières mettent l'accent sur le sens derrière la relation ainsi que sur le type de relation entre les grandeurs (voir section 4.2.3).



#### 4.2.4 L'analyse des situations retenues selon les autres VD relevées dans le cadre conceptuel

Le tableau 4.10 présente l'occurrence des 19 autres VD des huit situations retenues dans le manuel d'*À vos maths*.

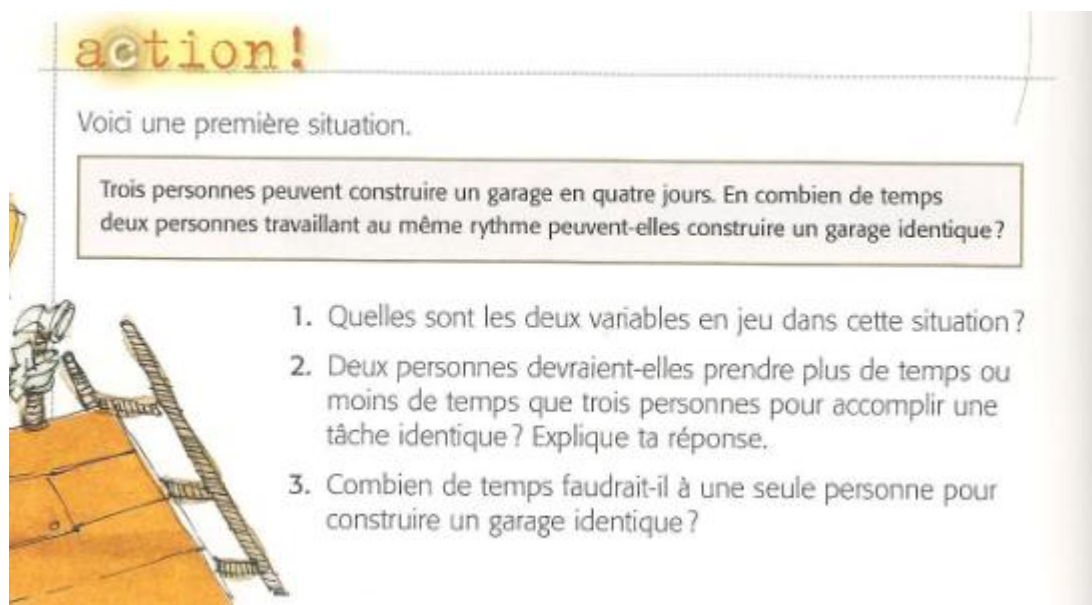
**Tableau 4.10** Tableau de fréquences des différentes VD pour les manuels *À vos maths*.

| Variables didactiques                               |                                 | Codage | Variable didactique                                        | Nombre d'occurrences<br>(sur les huit situations) |
|-----------------------------------------------------|---------------------------------|--------|------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Qui<br>s'attardent<br>aux<br>grandeurs<br>à l'étude | Type de<br>grandeurs            | VD1    | Présence de 3 grandeurs ou plus (imposées ou non)          | 1                                                 |
|                                                     |                                 | VD2    | Absence de valeurs numériques des grandeurs observées      | 4                                                 |
|                                                     |                                 | VD3    | Une grandeur admet des valeurs continues                   | 7                                                 |
|                                                     |                                 | VD4    | Une grandeur admet des valeurs discrètes                   | 1                                                 |
|                                                     |                                 | VD5    | Une grandeur admet des valeurs négatives                   | 0                                                 |
|                                                     |                                 | VD6    | Le temps est une grandeur                                  | 6                                                 |
|                                                     |                                 | VD7    | Le temps est la grandeur conséquente                       | 2                                                 |
|                                                     |                                 | VD19   | <i>Grandeurs définies par l'élève</i>                      | 1                                                 |
|                                                     | Relation entre<br>les grandeurs | VD8    | La relation entre les grandeurs n'est pas imposée          | 1                                                 |
|                                                     |                                 | VD9    | Les grandeurs sont interchangeables                        | 1                                                 |
|                                                     |                                 | VD18   | <i>Absence de relation</i>                                 | 1                                                 |
| Autour de l'étude<br>graphique                      |                                 | VD10   | Différents types de tracés (courbe, discret, ligne droite) | 1                                                 |
|                                                     |                                 | VD11   | Présence de plusieurs tracés dans un même plan cartésien   | 0                                                 |

|                                              |      |                                                                                            |   |
|----------------------------------------------|------|--------------------------------------------------------------------------------------------|---|
|                                              | VD12 | Conflit objet-source, objet-cible                                                          | 0 |
|                                              | VD13 | Graphique représentant un ensemble d'expériences fonctionnelles                            | 0 |
| <b>Autour des manipulations</b>              | VD14 | La modélisation peut se réaliser en « opérant » sur un schéma qui représente la situation. | 1 |
|                                              | VD15 | Report possible de segments                                                                | 1 |
| <b>Reliées aux connaissances nécessaires</b> | VD16 | Connaissances géométriques nécessaires                                                     | 0 |
|                                              | VD17 | Connaissances physiques (usuelles) nécessaires                                             | 6 |

D'emblée, nous devons rappeler que les deux VD, la VD18 (Absence de relation entre les grandeurs) et VD19 (Grandeurs définies par les élèves) ont été ajoutées à la suite de l'analyse du manuel *À vos maths*. Elles ont émergé après l'analyse de certaines situations du manuel. Pour la VD19, nous avons remarqué qu'il était demandé à l'élève d'inventer, de trouver un contexte et d'y définir les grandeurs en jeu selon le type de relation entre celles-ci (voir figure 4.23). Ce type de questionnement n'est pas présent dans les deux autres manuels. Parfois, il est question d'inventer un contexte, les grandeurs et une idée générale de la situation étant données. De plus, les deux autres collections ne demandent pas aux élèves de se prononcer sur l'existence de relation entre deux grandeurs (V18). On part du principe que les grandeurs entretiennent une relation entre elles et qu'il est possible d'en faire l'étude. *À vos maths* a le souci de développer un jugement chez l'élève relié au contexte en jeu. En outre, comme nous l'indiquons dans les sections précédentes, ce manuel a recours à un grand nombre de contextes de la vie courante. Ceci explique que six des huit situations retenues nécessitent des connaissances usuelles (V17) pour pouvoir y répondre adéquatement.

Outre ces deux nouvelles VD, nous remarquons que les grandeurs admettent habituellement (sept sur huit) des valeurs continues (VD3). Le temps est une grandeur souvent présente (six sur huit situations, VD6). Fait intéressant, elle est la grandeur conséquente dans deux situations dont la situation suivante (VD7, voir figure 4.24).



**action!**

Voici une première situation.

Trois personnes peuvent construire un garage en quatre jours. En combien de temps deux personnes travaillant au même rythme peuvent-elles construire un garage identique?

1. Quelles sont les deux variables en jeu dans cette situation?
2. Deux personnes devraient-elles prendre plus de temps ou moins de temps que trois personnes pour accomplir une tâche identique? Explique ta réponse.
3. Combien de temps faudrait-il à une seule personne pour construire un garage identique?

**Figure 4.24** Exercice d'application tiré de *À vos maths, Manuel C, Chapitre 2, Section 2. Les rapports et les taux constants. p. 98.*

Dans cette situation d'action, le temps est une des grandeurs à l'étude (VD6), elle est ici la grandeur conséquente (VD7). L'autre grandeur est le nombre de personnes travaillant pour construire un garage. La relation à établir est que : plus le nombre de personnes augmente, moins cela prendra de temps pour construire le garage. Nous avons donc affaire à une grandeur continue (le nombre de jours nécessaire à la construction du garage) et à une grandeur discrète (le nombre de personnes) qui correspondent respectivement aux VD3 et VD4. Nous pouvons remarquer que la question de l'encadré est limitée quant à l'émergence d'un raisonnement covariationnel, elle cible uniquement la recherche d'une valeur, mais les questions 2 et 3 permettent d'amener une réflexion sur les accroissements entre les grandeurs. En effet, la formulation de la question 2 vise à ce que l'élève relève que les grandeurs ne

varient pas dans le même sens, l'augmentation du nombre de personnes fera diminuer le temps de construction. Est mobilisé ici un point de vue global à travers la qualification du changement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente (U3). Ainsi, pour cette question, l'élève n'a pas à trouver le temps nécessaire pour la construction, mais à s'intéresser qualitativement à la relation entre les deux grandeurs. La question 3 amène aussi une perspective sur d'autres accroissements qu'entre deux et trois personnes. L'élève doit comprendre qu'en réduisant encore le nombre de personnes impliquées dans la construction du garage, le temps pour la construction sera encore une fois augmenté. La relation entre les deux grandeurs est inversement proportionnelle, le temps de travail total nécessaire pour la construction du garage devrait être constant. Si chacune des personnes impliquées dans la construction travaille au même rythme qu'elle soit seule ou accompagnée, alors il est possible d'établir que la relation suivante :

$$\frac{\text{temps de travail total nécessaire pour la construction}}{\text{le nombre de personnes impliquées}} = \text{nombre de jours pour la construction.} \quad \text{Ainsi,}$$

grâce au premier couple de valeurs (trois personnes prennent quatre jours) il est possible de déterminer que le temps de travail total devrait être de douze jours. Ceci correspond aussi au temps de travail pour une personne seule. Deux personnes devraient quant à elles construire le même garage en six jours.

Comme évoqué dans l'analyse des représentations (voir section 4.2.3), l'auteur d'*À vos maths* met l'emphasis sur la présence d'un vocabulaire qui permet de déduire qu'il existe une relation entre les grandeurs et sur la représentation verbale (la situation de la figure 4.21 en est un exemple). La prochaine situation analysée (voir figure 4.25) sollicite quant à elle un passage entre plusieurs représentations. De plus, c'est la seule situation retenue qui permet une modélisation en opérant sur un schéma (VD14) et un report de segments (VD15).

**TIC**

### LES ANIMATIONS, UNE QUESTION DE VARIABLES

Une animation est composée de plusieurs images dont l'enchaînement fournit à l'œil l'illusion d'un mouvement fluide. Sans la technologie, la création de toutes ces images, que ce soit au cinéma, dans les jeux vidéo ou dans Internet, représenterait une tâche presque impossible à réaliser. Des logiciels permettent de créer une animation à partir des dessins de la première et de la dernière image seulement. L'ordinateur s'occupe du reste. Dans l'exemple suivant, le soleil jaune se déplace vers la droite et devient graduellement un soleil vert de plus petit diamètre.

1. Selon toi, quelles variables le logiciel doit-il considérer pour créer les images 2, 3 et 4 ?

2. a) Selon toi, est-ce que la distance entre chaque soleil est la même ?

À l'aide de la règle graduée en pixels située au-dessus et à gauche de l'animation, il est possible de mesurer la taille de chaque image et d'en estimer la position.

b) Remplis la table de valeurs suivante et construis la représentation graphique correspondante.

| Image | Position | Taille |
|-------|----------|--------|
| 1     | 160      |        |
| 2     | 285      |        |
| 3     | 410      |        |
| 4     | 535      |        |
| 5     | 660      |        |

c) Que constates-tu quand tu observes ta représentation graphique ?

**Question de culture**

**L'ILLUSION DU MOUVEMENT**

Constamment sollicité, l'œil humain agit parfois en « trompe-l'œil » en créant l'illusion d'un seul mouvement fluide à partir d'une succession d'images. C'est le phénomène qui se produit lorsqu'on regarde un film, une animation vidéo ou encore une émission de télévision. Les images qui sont projetées sur la rétine sont conservées en mémoire pendant une courte période, c'est-à-dire quelques centièmes de seconde. Puisque les images se succèdent à une vitesse relativement élevée, l'œil conserve en mémoire l'image précédente jusqu'à ce que la suivante arrive, d'où l'impression d'un mouvement continu. Au cinéma, la vitesse normale d'enregistrement et de diffusion est de 24 images par seconde, alors qu'elle est de 30 images par seconde à la télévision, au Québec.

**Figure 4.25** Exercice d'application tiré de *À vos maths, Manuel C, Chapitre 1, Section 2. La relation entre deux variables*, p. 21.

Cette situation est classée par *À vos maths* dans le type de situation nommée *TIC* puisqu'elle fait référence à l'utilisation d'un logiciel de dessins pour créer une forme d'animation. L'idée générale est d'observer la modification de l'image de départ vers l'image finale. La situation sollicite plusieurs VD dont la présence de 3 grandeurs ou plus (le numéro de l'image, la taille de l'image, la position de l'image ainsi que la

distance entre les images). La première question pousse à mobiliser un regard global à travers l'identification de ces trois grandeurs en jeu (U0). On peut remarquer que la situation permet de reporter des segments dans la représentation graphique puisqu'une règle graduée en pixels est donnée. La deuxième question s'intéresse aux intervalles entre les grandeurs puisqu'elle demande de comparer les différentes distances entre les images. L'élève doit décoder à travers la table de valeurs la grandeur indépendante et dépendante et identifier la présence de variations concomitantes des deux grandeurs (U1 et U2). De plus, il devrait constater que plus la taille de l'image diminue, plus la distance entre les images est grande (U3). La question 2b permet à l'élève d'observer que la distance entre les différentes positions des images est quant à elle constante. Cette question s'attarde sur la table de valeurs, mais nous avons considéré que cette représentation en est une intermédiaire. L'élève doit partir de la représentation schématique pour remplir la table de valeurs et finalement construire une représentation graphique. Ainsi, cette information n'apparaît pas dans le tableau des passages entre les représentations puisque nous considérons uniquement les représentations de départ et d'arrivée. L'élève peut considérer des écarts constants entre la position de l'image et il peut regarder ce qu'il en est des écarts entre les différentes tailles obtenues, mais ce regard n'est pas explicitement demandé dans la question. Cette question ouvre ainsi la porte à mobiliser un point de vue local quantitatif à travers un repérage du changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante (U8). La question permet que le regard covariationnel se mette en place à la fois dans la table de valeurs et dans le graphique, mais puisque des valeurs numériques sont données, on peut également procéder par un regard correspondance.

#### 4.2.5 La synthèse et discussion sur le travail proposé dans *À vos maths* autour de la covariation

Les trois premiers chapitres du manuel C d'*À vos maths* ne semblent pas avoir pour visée de développer le raisonnement covariationnel. Ils se centrent plutôt sur les concepts et processus présents dans le PFEQ. L'organisation du manuel en chapitres qui se divisent en sections puis en séquences amène un découpage à la fois entre les différents concepts traités et sur le traitement d'un même concept. Le manuel vise un travail sous différentes représentations qui sont abordées tour à tour. Toutefois, plusieurs unités de raisonnement (U0 à U3) associées à un point de vue global sont mobilisées dans ces séquences à travers l'étude d'un grand nombre de situations et de contextes. Ainsi, *À vos maths* a le souci que les élèves identifient plusieurs grandeurs possibles d'une situation (U0), qu'ils identifient la grandeur dépendante et indépendante (U1) et qu'ils identifient et qualifient le changement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante change (U2 et U3). Ce travail est proposé à travers diverses questions comme « Quelles sont les variables dans la situation? », « Quelle variable est placée en abscisse? » et par la proposition de trois énoncés, l'élève devant reconnaître celui qui s'applique à la situation : « Plus.... plus », « Plus.... moins » et « pas de relation ».

Les *situations d'introduction* restent les plus intéressantes pour le développement d'un raisonnement covariationnel. Elles sont construites en spirale, sont plus longues que les autres types de situations, nous observons la présence de plusieurs questions ciblées dans un contexte puis l'on reprend ces questions dans un nouveau contexte. Elles sont souvent entrecoupées d'autres situations comme les sections *Actions* ou *TIC* pour ensuite revenir avec quelques dernières questions qui approfondissent la situation d'introduction. En se positionnant dans une perspective du possible développement du raisonnement covariationnel, nous observons que certaines questions ciblent les unités de raisonnement portant sur l'identification des grandeurs (U0 et U1) puis sur la

présence (ou l'absence) de variations concomitantes entre les deux grandeurs (U2). Cependant, les unités de raisonnement portant sur le comportement de la grandeur conséquente pour des accroissements constants de la grandeur prédominante (U4) ne sont pas ciblées par ces questions donc ni le point de vue local qualitatif ni le point de vue local quantitatif ne sont favorisés dans les situations d'introduction.

L'approche covariationnelle sous l'angle d'un point de vue local qualitatif ou d'un point de vue local quantitatif ne peut qu'à peu de reprises se déployer sous l'angle de l'effet sur les accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante (U4 et U8-U9). Ainsi, même si le manuel s'intéresse à déterminer comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante varie, la situation est peu propice à ce qu'un travail sur les accroissements concomitants se manifeste. Nous avons repéré deux situations où ce travail est possible à travers la proposition d'une table de valeurs qui présente pour des écarts constants de la grandeur indépendante des écarts constants de la grandeur dépendante. Ce regard est également possible dans une situation dans laquelle on s'intéresse au vocabulaire qui permet de s'assurer qu'un taux constant existe, on peut alors pousser vers la découverte d'autres couples possibles s'appuyant sur des écarts constants entre les valeurs de chacune des grandeurs. Cependant, les questions posées par *À vos maths* ne poussent pas explicitement vers ce regard sur les accroissements concomitants. En effet, nous ne retrouvons pas de questions comme : « Comment se comportent les accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont constants? » (Passaro, 2015, p. 92). Nous pouvons remarquer que les questions sont formulées dans un vocabulaire précis et des encadrés théoriques suivent les situations d'introduction où de nouvelles connaissances sont présentées. Après l'identification des grandeurs et le type de relation entre elles, les questions sont automatiquement dirigées vers des recherches de couples de valeurs ou d'une quantification du taux de variation.



En prenant les situations dans l'ordre établi par les auteurs, nous observons une même façon d'aborder les situations et ce, dans les différentes représentations. Le premier chapitre présente différentes situations à deux grandeurs (qualifiées de variables d'emblée) dans la *description verbale* menant les élèves à interpréter et à décrire ces relations. Ensuite, dans ce chapitre, les représentations *table de valeurs* et *graphique* apparaissent dans des sections distinctes pour les situations à deux variables. Ce cycle revient pour les situations de proportionnalité au chapitre suivant, puis le troisième chapitre aborde, quant à lui, les suites majoritairement dans la *table de valeurs*. Le cycle de questionnement est souvent le même : identification des grandeurs en jeu, identification de la grandeur indépendante, conversion dans une représentation, déterminer la présence ou l'absence d'un taux constant et la recherche d'une valeur manquante d'un couple de valeurs. Ce cycle de questionnement laisse donc peu de place à une étude approfondie d'une relation entre les deux grandeurs en s'intéressant aux accroissements concomitants. Ainsi, quel que soit le chapitre observé, peu de situations sont accompagnées d'un ensemble de questions mobilisant le point de vue local qualitatif et le point de vue local quantitatif, mais le point de vue global est présent de façon explicite.

Nos pouvons relever que certaines questions s'avèrent complexes, il semble y avoir un souci d'amener les élèves à exercer un sens critique face aux modèles mathématiques utilisés, il faut prévoir un accompagnement serré pour guider les élèves. Nous relevons aussi un très grand nombre de contextes distincts qui sont peu exploités quant aux relations entre les grandeurs. Par exemple, la situation du café équitable (voir figure 4.20) met de l'avant uniquement la reconnaissance d'un taux constant dans plusieurs représentations. Le contexte n'est pas facilitant afin de reconnaître ces différences entre les conventions des représentations, même sans celui-ci, la représentation graphique présentée comme une solution d'élève n'a pas de graduations constantes pour les deux axes afin d'obtenir un tracé rectiligne. Ainsi, cette question aurait pu être posée sans avoir recours à un contexte. Nous retrouvons plusieurs contextualisations, mais avec

un questionnement qui les accompagne se limitant à la recherche d'un taux constant ou d'une comparaison entre des taux. Ce type d'approche ne permet pas une observation des variations concomitantes des grandeurs en jeu. Elle dirige les élèves vers une démarche très ciblée où l'on donne un élément de réponse sans prendre en compte le contexte et les grandeurs en jeu.

Très peu de situations ont donc été retenues pour leur travail relatif au développement du raisonnement covariationnel et ce sont essentiellement des situations au début de chaque chapitre. Voici comment se caractérise le travail qui peut être mené autour de la covariation :

- La mise en place du point de vue global (U3) de la covariation à travers des réflexions autour de la façon dont varie la grandeur conséquente quand la grandeur prédominante varie, ceci se met en place à travers la présence d'expressions « plus....plus » ou « plus.... moins ». On est le plus souvent dans la représentation verbale, mais *À vos maths* ouvre la possibilité à dégager l'allure générale de ces relations dans un graphique ou dans un schéma, mais de façon moins marquée.
- Deux situations peuvent amener un point de vue local qualitatif (U4) ou local quantitatif (U8-U9) par un regard sur des intervalles constants d'une grandeur selon des intervalles constants d'une autre grandeur dans la représentation verbale, table de valeurs et graphique. La question n'amène toutefois pas clairement vers ce raisonnement, mais on peut l'induire.
- En gardant en tête que les situations retenues sont peu nombreuses, on peut toutefois souligner que certaines caractéristiques de ces situations qui ont du potentiel pour développer le raisonnement covariationnel sont intéressantes comme le recours à des connaissances usuelles et le temps comme grandeur conséquente.

- Les situations d'*À vos maths* misent sur le développement d'un point de vue global à travers les unités U0, U1, U2 et U3, ce travail est explicite. Le questionnement très fréquent autour de l'existence d'une relation entre des grandeurs proposées nous semble particulièrement porteur et nouveau si l'on compare avec la collection *Perspective mathématique*. En effet, ce questionnement permet de considérer la possibilité d'établir une relation entre deux grandeurs avant de réfléchir aux variations des grandeurs. À notre avis, cela met de l'avant l'une des composantes (Cotret, 1988) de la fonction qui a perdu son importance avec les définitions ensemblistes, l'aspect « dépendance » entre les grandeurs.

#### 4.3 L'analyse des manuels de la collection *Panoram@th*

La collection *Panoram@th* est constituée de deux manuels A et B qui se déclinent en un total de quatre volumes. Tel que spécifié dans la méthodologie (voir 3.3.3), nous avons ciblé les *Panorama* 6, 7, 9, 11 et 13 provenant du manuel A (Volume 2) et du manuel B (Volumes 1 et 2). Ces manuels sont prévus pour la fin de la première année et pour la deuxième année du premier cycle (élèves de 12-14 ans).

##### 4.3.1 Un aperçu des Panoramas sélectionnés pour l'analyse

Chacun des volumes est composé de quatre « *Panorama* » qui regroupent plusieurs domaines mathématiques (arithmétique, algèbre, géométrie, statistique, etc.). Parmi les 203 situations observées étalées sur 113 pages provenant des *Panoramas* 6, 7, 9, 11 et 13, nous en avons sélectionné 28 à caractère covariationnel (environ 14% des situations, voir tableau 4.11).

**Tableau 4.11** Tableau des fréquences des situations retenues et analysées dans cinq Panoramas de *Panoram@th*

| Titre du chapitre ( <i>Panorama</i> )                                  | Nombre de situations retenues | Nombre total de situations | Fréquence (% , arrondi à l'entier) |
|------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| Panorama 6 : De la notation décimale au système international d'unités | 0                             | 10                         | 0                                  |
| Panorama 7 : Des suites numériques aux équations                       | 3                             | 76                         | 4                                  |
| Panorama 9 : Des tables de valeurs aux représentations graphiques      | 21                            | 73                         | 29                                 |
| Panorama 11 : Des rapports aux figures semblables                      | 4                             | 24                         | 21                                 |
| Panorama 13 : De l'inconnue à la résolution d'équations                | 0                             | 20                         | 0                                  |
| Total                                                                  | 28                            | 203                        | 14                                 |

Nous n'avons pas retenu de situations dans les Panoramas 6 et 13 et la plupart des situations sélectionnées sont majoritairement dans le Panorama 9 qui vise sur le passage de table de valeurs aux représentations graphiques.

Chacun des *Panoramas* est composé dans l'ordre : d'un projet, de trois unités, de sections appelées « *Société des maths* » et « *À qui ça sert* » qui proposent des contextes mathématiques réalistes, puis d'un « *tour d'horizon* ». Le projet sert d'ouverture sur le *Panorama* en proposant des situations d'envergure (habituellement sur trois ou quatre pages). Les unités et les tours d'horizon regroupent, quant à eux, des situations selon les concepts mathématiques ciblés par les auteurs (par exemple le *Panorama 7 – Des suites numériques aux équations* : 7.1 – *Les suites*, 7.2 – *Les règles*, 7.3 – *Le rang et tour d'horizon Panorama 7*). Les situations des *Panorama 6, 7 et 13* portent

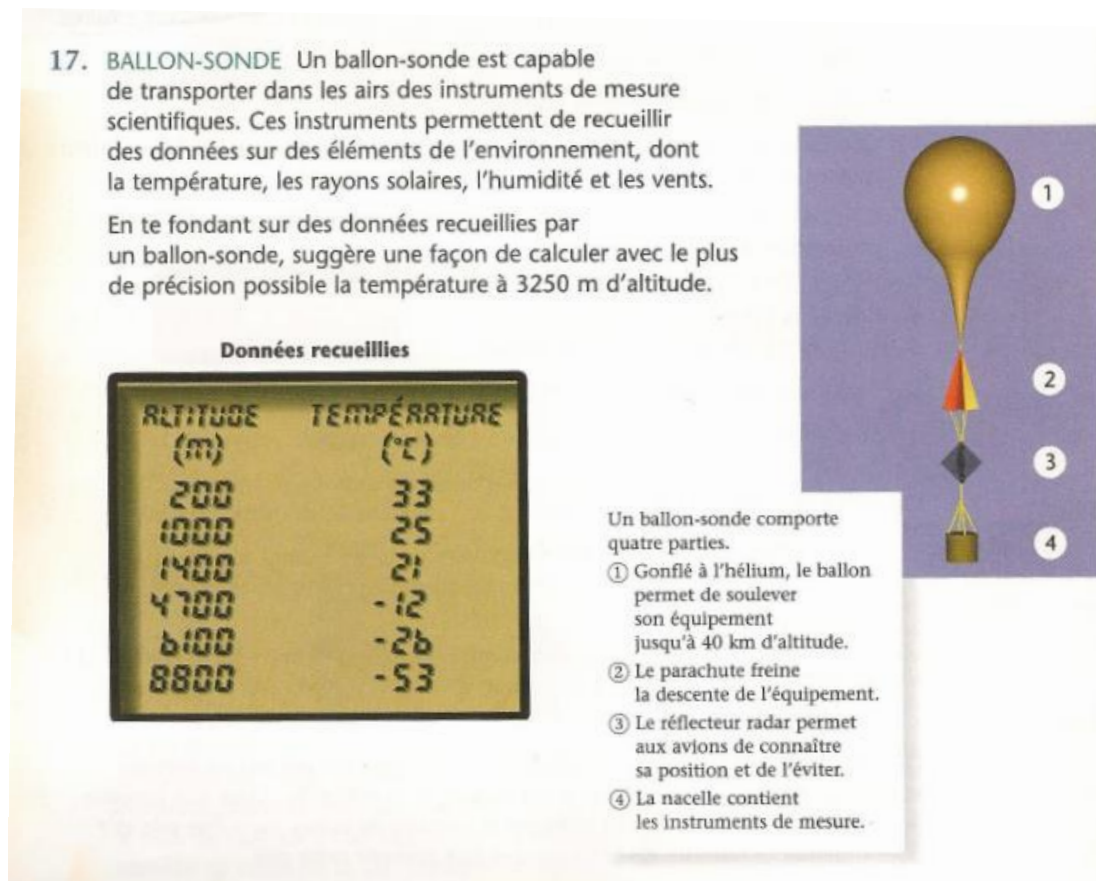
particulièrement sur la recherche d'une inconnue. Bien que certaines situations utilisent des suites ou des régularités, le questionnement repose souvent sur la recherche d'une seule valeur (voir figure 4.26).

5. **SANTÉ** L'espérance de vie d'une personne qui fume raccourcit de 1,5 min à chaque cigarette fumée. Combien de minutes de vie cette personne perd-elle en une semaine si elle fume 7 cigarettes par jour?

**Figure 4.26** Situation tirée de *Panoram@th*, Manuel A, *Panorama 6. Tour d'horizon*. Vol. 2. p.115.

Cette situation issue du *Panorama 6* propose un bref contexte qui implique un taux constant indiquant que la durée de vie d'une personne est réduite de 1,5 minute pour chaque cigarette fumée. Cette situation n'a pas été retenue en raison de la question qui ne sollicite pas le déploiement d'un regard covariationnel. Ce type de question, très présent dans les *Panorama 6, 7 et 13*, n'est pas porteur d'une étude sur les accroissements entre les grandeurs.

Bien que le *Panorama 7* mette l'accent majoritairement sur la recherche d'une valeur inconnue comme dans l'exemple précédent, quatre des soixante-seize situations analysées dans ce panorama ont été retenues. Ces situations sont susceptibles de déployer la covariation, toutefois le potentiel de la situation est limité en raison du questionnement proposé qui ne favorise pas un recours explicite à la covariation. La situation, le ballon-sonde (voir figure 4.27) est une des situations retenues dans ce Panorama.



**Figure 4.27** Situation tirée de *Panoram@th, Manuel A, Panorama 7. Tour d'horizon. Vol. 2. p.156.*

Cette situation (voir figure 4.20) s'intéresse à l'altitude d'un ballon-sonde et de la température qu'il enregistre. Il est demandé de trouver la température à 3250 mètres d'altitude. Pour cela, un regard sur les variations de température selon l'altitude du ballon-sonde est nécessaire, c'est-à-dire un regard sur les accroissements des deux grandeurs. En observant les différents accroissements, nous constatons que la température diminue de façon constante, d'un degré Celsius pour une augmentation de 100 mètres de l'altitude du ballon-sonde. Nous avons retenu cette situation, car pour répondre à la question posée, qui cible la recherche de la température pour une altitude précise, une analyse des accroissements est nécessaire. Cette situation est ainsi



pendant les huit secondes suivantes pour continuer de se rapprocher, mais moins rapidement que dans la phase précédente. La voiture s'éloigne ensuite d'Éric à un rythme plus rapide que dans la première phase. Cette situation nécessite une prise en compte des accroissements des valeurs des deux grandeurs tout au long de l'interprétation, d'où l'intérêt de cette situation pour la covariation. Le *Panorama 9* propose également cinq situations dans lesquelles l'élève doit tracer l'allure d'un graphique selon une description verbale. Ainsi, *Panoram@th* mise plus sur le passage de graphique à description verbale que sur le passage inverse, de description verbale à graphique.

Le *Panorama 11* aborde le raisonnement proportionnel avec un travail sur les grandeurs variables et aussi un travail sur les proportions dans des figures semblables. Les cas de figures semblables mènent, pour certaines situations, à la recherche d'une 4<sup>e</sup> proportionnelle tandis que d'autres situations portent sur la relation globale entre les grandeurs. Nous avons retenu quatre situations qui misent sur la relation globale entre les grandeurs dont trois activités. La situation *Voir à travers un tunnel* (voir figure 4.36), qui est analysée dans la section 4.3.3 est un exemple de ces situations.

Comme mentionné précédemment, les *Panoramas* débutent par un projet puis s'en suivent trois unités et un tour d'horizon. Les unités débutent par une *Situation-problème* suivie d'une ou plusieurs *Activités* portant sur une notion similaire. Ces deux sections sont succédées d'un *Calepin des savoirs* qui expose les notions explicitement en s'appuyant sur des définitions. Après les trois unités, *Panoram@th* présente des sections appelées *Société des maths* et *À qui ça sert* qui proposent des contextes mathématiques appliqués dans la vie courante. Finalement, à la fin de chaque *Panorama*, une section *Tour d'horizon* regroupe des problèmes semblables aux sections *Coup d'œil* du chapitre. Le tableau 4.12 illustre la fréquence des situations retenues dans les cinq Panoramas sélectionnés selon les différentes nomenclatures données par les auteurs du manuel.



**Tableau 4.12** Tableau des fréquences des types situations retenues dans les  
*Panorama 7, 9 et 11 de la collection Panoram@th.*

| Type de situation                         | Nombre de situations retenues | Nombre total de situations | Fréquence (% , arrondi à l'entier) |
|-------------------------------------------|-------------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| Projet (PR-XX)                            | 1                             | 4                          | 25                                 |
| Situations-problèmes (SP-XX)              | 1                             | 15                         | 7                                  |
| Activités (A-XX)                          | 6                             | 18                         | 21                                 |
| Coup d'œil (E-XX)                         | 13                            | 100                        | 13                                 |
| Tour d'horizon (P-XX)                     | 7                             | 64                         | 11                                 |
| Société des maths et À qui ça sert (I-XX) | 0                             | 4                          | 0                                  |
| Total                                     | 28                            | 203                        | 14                                 |

Bien que chaque *Panorama* débute par un projet, seulement un est susceptible d'être intéressant pour observer la relation entre des grandeurs, il s'agit du projet Balles et rebonds qui se trouve dans le Panorama 7 (des suites numériques aux équations). Tel que mentionné, le projet sert d'ouverture sur le *Panorama* en proposant une situation d'envergure (habituellement sur 3 ou 4 pages). On demande à l'élève d'étudier le mouvement d'une balle ou d'un ballon qui rebondit. Pour cela, l'élève va faire rebondir plusieurs types de balles et ballons afin de collecter des données. Ce projet est constitué d'une mise en train au tout début puis de 5 parties (Partie 1 : Organisation de l'expérience, Partie 2 : Expérience du rebondissement d'une balle, Partie 3 : Analyse des suites de rebonds, Partie 4 : La balle qui ne s'essouffle jamais, Partie 5 : Le dribble) et finalement du bilan du projet. Nous avons retenu la mise en train et la partie portant sur l'observation de la hauteur d'un rebond selon le type de balle utilisé qui ont un potentiel pour la covariation. Pour la mise en train (voir figure 4.29), il est demandé à l'élève de s'attarder à différentes grandeurs et de se questionner sur leur possible influence si on s'intéresse au rebondissement d'une balle. Se met ici en place un point de vue global de la covariation à travers l'unité de raisonnement U0, il ne s'agit

toutefois pas d'identifier plusieurs grandeurs possibles, mais de se prononcer sur la possible influence de grandeurs déjà données.

**PROJET** Balles et rebonds

**Présentation**

La plupart des balles et des ballons sont fabriqués avec du caoutchouc. Cette matière est reconnue pour son élasticité, c'est-à-dire qu'elle reprend sa forme initiale après avoir été déformée. C'est cette propriété du caoutchouc qui permet aux balles et aux ballons de rebondir.

**Mandat général proposé**

Ce projet porte sur l'étude du mouvement d'une balle, ou d'un ballon, qui rebondit. Tu auras à faire rebondir une balle ou un ballon, à collecter des données et à décrire mathématiquement les rebondissements. Le déroulement de ce projet comporte plusieurs parties.

- **Partie 1** : Organisation de l'expérience.
- **Partie 2** : Expérience du rebondissement d'une balle.
- **Partie 3** : Analyse des suites de rebonds.
- **Partie 4** : La balle qui ne s'essouffle jamais.
- **Partie 5** : Le dribble.

**Mise en train**

1. Suggère différents moyens de comparer le rebondissement de deux balles.
2. D'après toi, les éléments suivants ont-ils un effet sur le rebondissement d'une balle? Explique pourquoi.
  - a) Le type de balle.
  - b) La hauteur d'où on laisse tomber la balle.
  - c) La façon de laisser tomber la balle.
  - d) La surface sur laquelle la balle rebondit.
3. Émets une hypothèse sur la hauteur des bonds successifs d'une balle.

Conserve les réponses à ces questions. Elles t'aideront à réaliser les autres parties du projet.

120 PANORAMA 7

**Figure 4.29** Situation tirée de *Panoram@th*, Manuel A, *Panorama 7. Tour d'horizon*. Vol. 2. p. 120.

Une fois que l'élève a organisé le matériel nécessaire pour son expérience (Partie 1), il va procéder dans la partie 2 à la collecte de données. Il est demandé de choisir trois hauteurs différentes et de noter la hauteur des quatre premiers rebonds de la balle pour chacune des trois hauteurs choisies. Les parties 3, 4 et 5 peuvent être intéressantes du point de vue de la covariation (voir figures 4.30 et 4.31). En effet, une fois que l'élève

aura consigné dans des tables de valeurs les données obtenues par l'expérience menée, il va devoir se prononcer sur « en quoi les suites obtenues sont différentes? En quoi elles sont semblables » (Partie 3), l'élève est amené ici à regarder les écarts entre les hauteurs obtenues pour chacun des rebondissements. Il peut également observer ces écarts sur le graphique tel que demandé dans cette même partie « Pourrais-tu utiliser un graphique pour comparer ces suites? ». Dans la partie 4, on demande à l'élève d'ajouter des termes aux suites précédentes, l'élève utilisera, pour ce faire, l'écart, la régularité constatée précédemment. Finalement dans la partie 5, il s'agit de s'intéresser au dribble (le nombre de bonds d'une balle selon le temps).

**Partie 3 : Analyse des suites de rebonds**

L'expérience de la balle qui rebondit t'a permis de bâtir trois suites de nombres. À partir de celles-ci, on peut faire plusieurs observations, par exemple calculer le pourcentage de rebondissement de la balle.

**Mandat proposé**

À l'aide des suites obtenues, établir le pourcentage de rebondissement d'une balle.

**Pistes d'exploration...**

- En quoi les suites obtenues sont-elles différentes? En quoi sont-elles semblables?
- Pourrais-tu utiliser un graphique pour comparer ces suites?
- Le pourcentage de rebondissement d'une balle est-il toujours le même?

**Le pourcentage de rebondissement d'une balle correspond au quotient  $\frac{\text{hauteur d'un bond}}{\text{hauteur du bond précédent}}$ .**

Par exemple, un pourcentage de rebondissement de 80 % indique que la hauteur de chaque rebond d'une balle équivaut à 80 % de la hauteur du bond précédent.

**Partie 4 : La balle qui ne s'essouffle jamais**

On dit qu'une situation est paradoxale lorsqu'on peut en tirer deux conclusions contraires.

**Mandat proposé**

En ajoutant plusieurs termes aux suites obtenues, on remarque que la balle ne devrait jamais cesser de rebondir. En est-il de même dans la réalité? Expliquer ce paradoxe.

**Pistes d'exploration...**

- As-tu comparé tes conclusions à celles d'autres élèves?

**Est-ce qu'elle bouge encore d'après toi?**

**Selon mes calculs, ça devrait.**

**122 PANORAMA 7**

**Figure 4.30**

Situation tirée de *Panoram@th*, Manuel A, *Panorama 7. Tour d'horizon. Vol. 2. p.122.*

## Partie 5 : Le dribble

Au basket-ball, le dribble est l'action qui permet de faire rebondir le ballon à l'aide de sa main. Cette dernière partie du projet te permettra de mesurer ton habileté à dribbler.

### Mandat proposé

Déterminer une expression qui permet de calculer le nombre de bonds que fait une balle ou un ballon en dribblant pendant un temps quelconque.

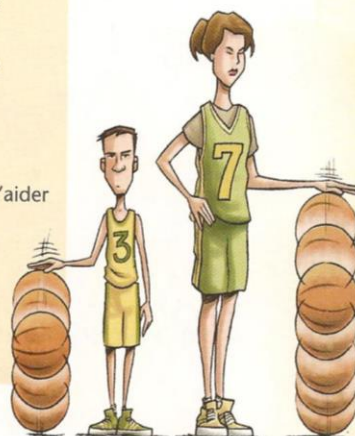
Tu dois maintenir la main qui dribble à la hauteur de ta taille.

#### PISTES D'EXPLORATION...

- Ton habileté à dribbler est-elle la même pour chaque main ?
- Ton habileté à dribbler est-elle la même selon le type de ballon ou de balle que tu utilises ?
- As-tu réalisé quelques expériences pour déterminer l'expression demandée ?
- Une table de valeurs ou un graphique pourraient-ils t'aider à analyser ton habileté à dribbler ?
- Existe-t-il une régularité dans cette situation ?
- L'expression que tu as établie permet-elle de calculer le nombre de bonds pour n'importe quelle période de temps et vice versa ?

projet

Au besoin, consulte les unités 7.2 et 7.3, qui traitent des règles.



## Bilan du projet : Balles et rebonds

Présente les principales découvertes que tu as faites au cours de ce projet. Cette présentation devra contenir :

- l'organisation et le déroulement de l'expérience du rebondissement d'une balle ;
- les difficultés éprouvées lors des expériences et les solutions apportées ;
- les suites obtenues ;
- le pourcentage de rebondissement de la balle ;
- une explication du paradoxe de « La balle qui ne s'essouffle jamais » ;
- l'expression représentant ton habileté à dribbler accompagnée d'une explication.

**Figure 4.31** Situation tirée de *Panoram@th*, Manuel A, *Panorama 7. Tour d'horizon*. Vol. 2. p.123.

Après avoir mené l'expérience, l'élève va regrouper les données dans un tableau, trouver la régularité et donner l'expression qui permet de calculer le nombre de bonds que fait une balle en dribblant pendant un temps quelconque. Pour pouvoir trouver cette expression, l'élève peut se donner des intervalles de temps constants et observer les écarts entre les nombres de bonds la balle. C'est un regard covariationnel qui se met en place dans les parties 3, 4 et 5 à travers un point de vue local quantitatif (U8 et U9). Ainsi les projets se distinguent clairement des autres types de situations quant à la longueur et le type de tâches demandées qui engagent dans ce cas-ci, physiquement l'élève.

Pour les trois types de situations présentés dans les sections : *Situations-problèmes*, *Coup d'œil* et *Tour d'horizon*, il a été difficile pour nous d'établir des différences claires outre leur position dans le volume et la mention *SP* pour *situation-problème* à côté du numéro qui les identifient. En effet, ces trois types de situations présentent sous la forme d'une brève contextualisation (seulement quelques-unes des premières situations de *Coup d'œil* et du *Tour d'horizon* sont décontextualisées) et par une ou quelques courtes questions. Les *situations-problèmes* semblent un peu plus complexes et se retrouvent à la fin des sections *Coup d'œil* et *Tour d'horizon*. Nous avons retenu une *situation-problème*, treize situations dans *Coup d'œil* et sept dans *Tour d'horizon*.

#### 4.3.2 Des exemples de situations rejetées

Comme mentionné précédemment, plusieurs situations des cinq *Panorama* observés n'ont pas été retenues, certaines en raison d'une absence de contexte, d'autres en raison d'un questionnement axé uniquement sur la recherche d'une valeur inconnue sans nécessité d'exercer un regard covariationnel. Dans le cas des situations de généralisation sous la forme de suites arithmétiques, nous avons rejeté les situations qui présentent des motifs ordonnés et une table de valeurs à compléter. En effet, dans ces situations, il n'y a pas de questions qui portent explicitement sur la covariation.

C'est le cas de l'exemple suivant qui propose un contexte où l'on observe la relation entre le nombre de carrés et le nombre d'allumettes (voir figure 4.32).

12. On a construit cette suite de carrés avec des allumettes.



a) Construis les deux prochaines figures de la suite.

b) Complète cette table de valeurs.

| Nombre de carrés    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------------------|---|---|---|---|---|
| Nombre d'allumettes |   |   |   |   |   |

c) Donne la règle qui permet de calculer le nombre d'allumettes à l'aide du nombre de carrés.

d) Détermine le nombre d'allumettes nécessaires pour construire 20 carrés.

**Figure 4.32** Situation tirée de *Panoram@th*, Manuel A, *Panorama 7. Unité 7.1 : Ainsi de suite. Vol. 2. p. 129.*

Il s'agit dans cette situation de compléter une table de valeurs d'après les motifs qui sont donnés et ceux qui auront été dessinés en répondant à la question a). Puis il faut trouver la règle qui permet de calculer le nombre d'allumettes à l'aide du nombre de carrés. Cette situation est dans le Panorama 7 qui vise le passage des suites numériques aux équations. Les suites présentées dans ce panorama sont majoritairement des suites arithmétiques, ce sont ce type de suites pour lesquelles une règle est demandée, ce qui est le cas dans la situation des carrés et des allumettes. Il n'y a pas besoin de se convaincre qu'il y a une régularité dans cette situation puisqu'on demande de trouver une règle, la régularité est donc implicite. Cette situation dirige le regard vers une correspondance entre les valeurs des deux grandeurs. En a), l'élève est invité à construire les deux figures suivantes pour ensuite faire correspondre le nombre d'allumettes associées à chacun des cinq modèles représentés. En b), on complète la table de valeurs à l'aide des représentations de chaque modèle : un carré et quatre

allumettes, deux carrés et sept allumettes, etc. Cela nous mène à la recherche d'une règle de correspondance entre les valeurs des deux grandeurs en c). On pourrait trouver la règle par un regard covariationnel, mais rien dans les questions posées ne le requiert. La question d) cible ensuite la recherche d'une valeur inconnue du nombre d'allumettes pour 20 carrés. Le guidage du questionnement n'est pas d'amener à relever que plus le nombre de carrés augmente plus le nombre d'allumettes augmente et à s'attarder sur cette augmentation donc sur les accroissements entre les valeurs des deux grandeurs.

Ce type de situations est très présent dans les cinq *Panorama* observés. Nous pouvions nous y attendre un peu avec les titres des Panoramas : *Panorama 7 : Des suites numériques aux équations*; *Panorama 11 : Des rapports aux figures semblables* et *Panorama 13 : De l'inconnue à la résolution d'équations*. Selon notre observation, les questions visent la recherche d'une expression algébrique après avoir identifié la grandeur indépendante et dépendante. Toutefois, il aurait été possible de formuler des questions pour mener explicitement vers le déploiement d'un regard covariationnel en s'intéressant aux accroissements entre les valeurs d'une même grandeur et les accroissements entre les valeurs correspondantes de l'autre grandeur. Nous reviendrons sur ce point au chapitre V.

La situation suivante (voir figure 4.33) a été également rejetée. On s'intéresse à la relation entre les deux grandeurs, le nombre de mois écoulés et la somme restante à payer qui est déduite à travers l'interprétation d'une formule. Les questions ne donnent aucune indication sur le regard à porter.



9. Kelly-Anne achète un vélo stationnaire au prix marqué de 312 \$. La boutique lui offre de payer son vélo en un certain nombre de versements égaux sans frais supplémentaires. La règle suivante montre la façon dont Kelly-Anne paiera son vélo :

$$r = 312 - 26n$$

où  $r$  représente la somme qu'il lui reste à payer et  $n$ , le nombre de mois écoulés depuis l'achat.

- Représente graphiquement cette situation. Associe le nombre de mois écoulés depuis l'achat à l'axe des abscisses et la somme qu'il reste à payer à l'axe des ordonnées.
- Quel est le paiement mensuel de Kelly-Anne ?
- Combien de mois seront nécessaires à Kelly-Anne pour payer entièrement son vélo ?

**Figure 4.33** Situation tirée de *Panoram@th*, Manuel B, *Panorama 9. Unité 9.3 – Ciel et mer. Vol. 1. p. 34.*

À partir d'une formule donnée, l'élève doit représenter graphiquement la situation en a). Par la suite, en b), il doit trouver le montant du paiement mensuel soit en s'attardant à la formule soit à travers la représentation graphique. La question c) porte sur la recherche d'une des valeurs dans un couple, il s'agit de trouver le nombre de mois écoulés pour que la somme soit nulle. Ces questions ne mènent pas explicitement vers les variations entre les deux grandeurs. On ne cherche pas à explorer différentes phases du paiement, les questions portent sur la recherche de la valeur dans un couple en s'appuyant sur le graphique ou la formule. Dans ce cas-ci, l'objectif est plutôt d'utiliser une autre représentation pour interpréter la formule. Ces situations qui mettent l'accent sur des passages entre les représentations sans proposer un questionnement sur les variations concomitantes ont été rejetées.



#### 4.3.3 L'analyse des situations retenues selon les représentations en jeu

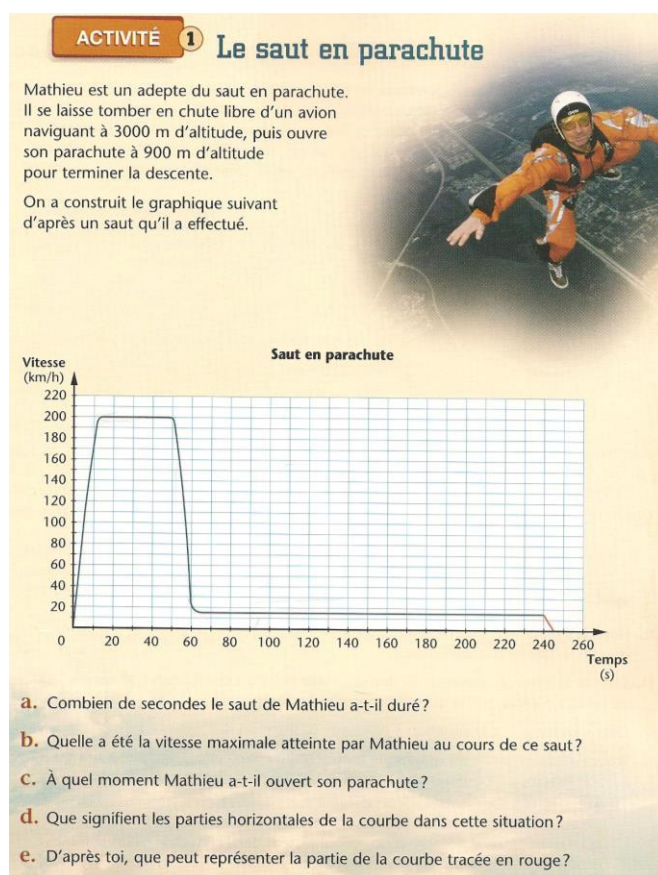
Comme nous l'avons souligné dans les collections analysées précédemment (voir 4.1.3 et 4.2.3), une seule situation peut mobiliser différents passages entre des représentations. Il est possible de déterminer ces passages grâce à la ou aux question(s) proposées dans la situation. Des 28 situations susceptibles d'avoir recours à la covariation, nous avons observé un total de 93 passages entre des représentations. Comme mentionné dans la section précédente, le *Panorama 9* qui porte en grande partie sur la représentation graphique regroupe un grand nombre de situations favorisant le développement d'un regard covariationnel. Il n'est donc pas surprenant que cette représentation soit parmi les plus sollicitées autant comme représentation de départ que comme celui d'arrivée. Le tableau 4.13 présente le nombre de passages d'une représentation à un autre, entre parenthèses est indiqué le nombre de passages dans respectivement les *Panorama 7, 9 et 11*. Les *Panorama 6 et 13* n'ont pas été incluse dans la notation comme elles ne comportent aucune situation retenue. La notation (0-27-8) dans la case présentant le passage de graphique à description verbale signifie : 0 passage dans le *Panorama 7*, 27 passages recensés dans le *Panorama 9* et 8 dans le *Panorama 11*. Nous pouvons observer que c'est ce passage qui est le plus fréquent, on a recensé 35 passages dans les 28 situations.

**Tableau 4.13** Tableau des passages entre les représentations pour les manuels  
pour les manuels *Panoram@th*

|                          | REPRÉSENTATION D'ARRIVÉE |              |                      |                       |              |                         |
|--------------------------|--------------------------|--------------|----------------------|-----------------------|--------------|-------------------------|
| REPRÉSENTATION DE DÉPART | Description verbale      | Schéma       | Table de valeurs     | Graphique             | Formule      | Totaux                  |
| Description verbale      | <b>13</b><br>(4-2-7)     | 0<br>(0-0-0) | 6<br>(3-2-1)         | <b>14</b><br>(0-14-0) | 1<br>(1-0-0) | <b>34</b><br>(9-18-8)   |
| Schéma                   | 0<br>(0-0-0)             | 0<br>(0-0-0) | 1<br>(0-0-1)         | 1<br>(0-1-0)          | 0<br>(0-0-0) | <b>2</b><br>(0-1-1)     |
| Table de valeurs         | 5<br>(4-0-1)             | 1<br>(0-1-0) | <b>9</b><br>(0-3-6)  | 2<br>(1-0-1)          | 0<br>(0-0-0) | <b>17</b><br>(5-4-8)    |
| Graphique                | <b>35</b><br>(0-27-8)    | 0<br>(0-0-0) | 2<br>(0-1-1)         | <b>2</b><br>(0-1-1)   | 0<br>(0-0-0) | <b>39</b><br>(0-29-10)  |
| Formule                  | 0<br>(0-0-0)             | 0<br>(0-0-0) | 0<br>(0-0-0)         | 0<br>(0-0-0)          | 1<br>(0-0-1) | 1<br>(0-0-1)            |
| Totaux                   | <b>53</b><br>(8-29-16)   | 1<br>(0-1-0) | <b>18</b><br>(3-6-9) | <b>19</b><br>(1-16-2) | 2<br>(1-0-1) | <b>93</b><br>(13-52-28) |

Nous pouvons remarquer que, plus particulièrement, trois passages entre les représentations sont plus mobilisés que les autres. Tel que mentionné, l'interprétation graphique (de graphique à description verbale) représente 35 des 93 passages entre représentations dans les situations retenues. Les deux autres passages les plus fréquemment observés ensuite sont de la description verbale vers la description verbale (13 passages) et la description verbale vers le graphique (quatorze passages). Ainsi, les deux représentations les plus sollicitées sont la description verbale et le graphique. Ainsi, le passage de représentation graphique à description verbale est compilé surtout dans le Panorama 9. La situation de la voiture téléguidée (voir figure 4.28) est un

exemple de ces situations. Toutefois, ce Panorama porte plus particulièrement sur le passage de la table de valeurs vers les représentations graphiques tel que l'indique le titre, mais aucune des situations que nous avons retenues n'implique ce passage. Nous avons recensé seulement deux fois où ce passage est impliqué, une fois dans le Panorama7 et une autre fois dans le Panorama 11. Les auteurs de cette collection présentent dans le panorama 9 une situation similaire à une des situations présentées dans *Perspective mathématique* (voir figure 4.3) où l'on observe la vitesse d'un parachutiste selon le temps écoulé depuis son saut de l'avion. Cependant, le questionnement et les VD en jeu dans les deux situations sont distincts. Cette situation implique 5 passages de graphique à description verbale.



**Figure 4.34** Situation tirée de *Panoram@th*, Manuel B, *Panorama 9. Unité 9.2 – Une histoire à raconter. Vol. 1. p.19.*

Cinq questions accompagnent l'interprétation du tracé dans le graphique du saut en parachute de Mathieu. La question a) demande une lecture de l'abscisse du point final du tracé (approximativement 245 secondes). La question b) requiert la recherche du maximum en ordonnée, soit 200 km/h. En c), l'ouverture du parachute mène à une diminution importante de la vitesse, il s'agit de repérer le point où il y a un changement entre la vitesse maximale et la diminution de la vitesse. Ainsi, les trois premières questions reposent sur une description verbale de la lecture d'un point dans le graphique et n'amène pas une observation des variations concomitantes entre les valeurs des deux grandeurs. En d), la question porte sur l'interprétation des parties horizontales de la courbe. Il est possible d'en faire une lecture covariationnelle en déterminant que pour un certain temps écoulé, la vitesse ne change pas, elle est alors constante. Ceci est visible pour deux phases. Le premier cas lorsque le parachutiste est en chute libre et qu'il a atteint sa vitesse maximale. La deuxième phase horizontale du tracé représente la vitesse de chute constante après l'ouverture du parachute. En e), le tracé rouge représente les cinq secondes d'atterrissage, lorsque la vitesse du parachutiste diminue de 20 km/h à 0 km/h, alors qu'il touche le sol.

Nous avons ciblé quelques situations, comme celle-ci, qui présentent une ou deux questions susceptibles de permettre le déploiement d'un regard covariationnel. Dans la situation du saut en parachute, les deux dernières questions ont le potentiel de susciter la covariation en s'attardant à l'interprétation de deux phases du saut (U5). Toutefois, le questionnaire global (U0 à U3) et une grande partie du questionnaire local qualitatif n'est pas présent (U4). Ainsi, cette situation n'est pas nécessairement très riche pour le déploiement des unités du raisonnement covariationnel, mais le permet en partie puisque le point de vue local quantitatif (U8 et/ou U9) peut être mobilisé.

Le deuxième passage entre les représentations le plus fréquent est celui du passage de la description verbale vers une représentation graphique (14 de ces passages recensés). Nous avons retenu sept situations qui impliquent ce passage et qui s'appuient sur la

description d'un déplacement (d'une personne, d'un monorail, d'une voile, d'un vol en avion, etc.) pour en faire une représentation graphique. Elles proviennent toutes du *Panorama 9* et dans ces situations, les deux mêmes grandeurs sont prises en compte, la distance et le temps écoulé. La situation des montagnes russes (voir figure 4.30) est un exemple de ces situations.

La situation suivante (voir figure 4.35) illustre le passage de description verbale à description verbale, le troisième passage le plus fréquent (treize de ces passages recensés).

1. a) Pour chaque situation, complète la phrase qui précise la relation entre les variables à l'aide du verbe « augmenter » ou du verbe « diminuer ».

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1) On vide une piscine à l'automne. On s'intéresse à la relation entre le temps et la quantité d'eau qui reste dans la piscine.<br/>Plus le temps passe, plus la quantité d'eau dans la piscine <span style="background-color: yellow; display: inline-block; width: 50px; height: 1em; vertical-align: middle;"></span>.</p>      | <p>2) On s'intéresse à la relation entre le nombre de billets vendus pour un spectacle et les profits générés par la vente de billets.<br/>Plus le nombre de billets vendus augmente, plus les profits <span style="background-color: yellow; display: inline-block; width: 50px; height: 1em; vertical-align: middle;"></span>.</p>                        |
| <p>3) On s'intéresse à la relation entre le temps passé par une personne sous la douche et la quantité d'eau utilisée.<br/>Plus le temps passé sous la douche augmente, plus la quantité d'eau utilisée <span style="background-color: yellow; display: inline-block; width: 50px; height: 1em; vertical-align: middle;"></span>.</p> | <p>4) On s'intéresse à la relation entre la vitesse d'un avion et le temps nécessaire pour parcourir une distance donnée.<br/>Plus la vitesse de l'avion augmente, plus le temps nécessaire pour parcourir la distance donnée <span style="background-color: yellow; display: inline-block; width: 50px; height: 1em; vertical-align: middle;"></span>.</p> |

b) Indique si les variables de chacune des situations en a) varient dans le même sens ou dans le sens contraire.

**Figure 4.35** Situation tirée de *Panoram@th*, Manuel B, *Panorama 9*. Unité 9.2 – Une histoire à raconter. Vol. 1. p. 22.

Cette situation est composée de quatre courts contextes dans lesquels l'élève est amené à déterminer qualitativement la relation entre les deux grandeurs. L'un d'eux implique

la vitesse d'un avion et le temps nécessaire pour parcourir une distance donnée. Le temps est une grandeur dans trois des quatre contextes, mais ce n'est que pour cette *quatrième situation* que le temps est observé sous forme de durée. Il s'agit de conclure que plus la vitesse de l'avion est grande ou augmente, moins le temps de vol sera grand ou plus le temps nécessaire pour parcourir la distance donnée diminue. La question a) demande d'adopter un point de vue global de la covariation entre les grandeurs (U1 et U2) afin de compléter les différentes phrases. En b), nous devons déterminer le sens de la variation entre les deux grandeurs. Dans cette situation, l'expression de cette description verbale est limitée à deux courts choix de réponse, mais au travers de ce panorama d'autres situations sollicitent des descriptions plus élaborées à partir de représentations graphiques.

Les situations retenues du *Panorama 7* portent particulièrement sur le passage de description verbale à description verbale (quatre passages), l'élève donne une réponse courte après la lecture d'une contextualisation et sur le passage de table de valeurs à description verbale (quatre passages) et de description verbale à table de valeurs (trois passages). Il s'agit essentiellement de la situation des balles et rebonds (voir figures 4.29 à 4.31). Dans le Panorama 11, on retrouve le passage de description verbale à description verbale (quatre passages) qui est omniprésent dans les trois Panoramas retenus et le passage de table de valeurs à table de valeurs (six passages). Dans ce Panorama 11, nous présentons une des six *activités* retenues pour la collection *Panoram@th*, celle-ci est une des rares situations qui s'appuie sur un schéma pour représenter la relation entre deux grandeurs. Il s'agit ici du passage du schéma vers la table de valeurs : on observe la relation entre la longueur d'un tuyau et la hauteur du champ visuel de l'observateur (voir figure 4.36).

**ACTIVITÉ 2 Voir à travers un tunnel**

Il existe plusieurs troubles de la vue. Par exemple, certaines personnes ont de la difficulté à voir de près ou de loin. Une autre anomalie oculaire, appelée *vision en tunnel*, correspond au rétrécissement du champ visuel.

On peut simuler la vision en tunnel à l'aide de l'expérience suivante : on regarde à travers des tuyaux de même diamètre mais de différentes longueurs. Dans les illustrations ci-dessous, chacun des côtés d'un carreau mesure 10 cm.

a. 1) À l'aide des quatre illustrations de la page précédente, complète cette table de valeurs.

**Expérimentation de la vision en tunnel**

|                              |  |  |  |  |
|------------------------------|--|--|--|--|
| Longueur du tuyau (cm)       |  |  |  |  |
| Hauteur du champ visuel (cm) |  |  |  |  |

- 2) Pour chacun des couples de la table de valeurs, calcule le produit des valeurs associées. Que remarques-tu ?
- 3) Qu'advient-il de la hauteur du champ visuel si la longueur du tuyau :
- a) double?                      b) triple?                      c) quadruple?

**Figure 4.36** Situation tirée de *Panoram@th*, Manuel B, *Panorama 11*. Unité 11.2 – Du pareil au même. Vol. 1. p. 116-117.

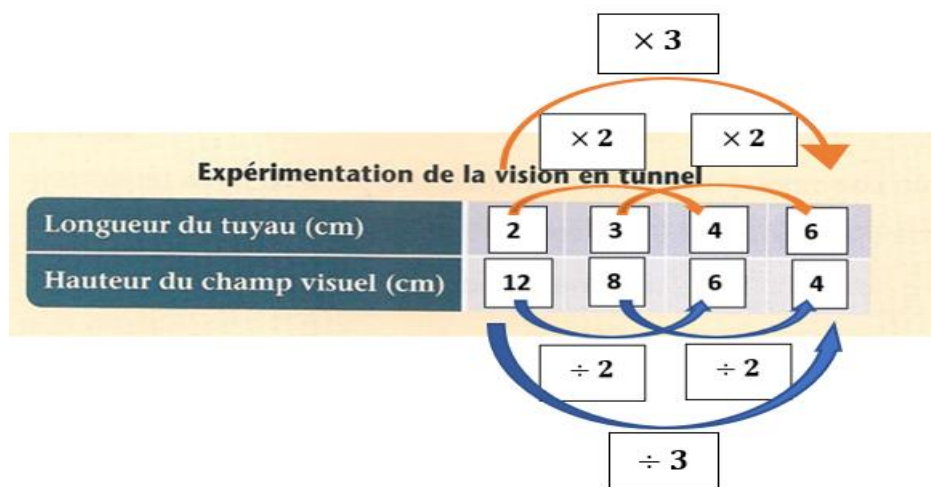
La question a) demande de mesurer les représentations schématiques de quatre tuyaux pour compléter la table de valeurs présentée. La question b) demande de calculer les produits des valeurs des couples. Comme il s'agit d'une relation inversement proportionnelle, les mesures des couples ont toutes un produit de 24.



| Expérimentation de la vision en tunnel |    |   |   |   |
|----------------------------------------|----|---|---|---|
| Longueur du tuyau (cm)                 | 2  | 3 | 4 | 6 |
| Hauteur du champ visuel (cm)           | 12 | 8 | 6 | 4 |

**Figure 4.37** Table de valeurs avec les reports des valeurs de segments proposés dans la figure 4.36.

Ces deux questions ne visent pas particulièrement la mobilisation d'unités de raisonnement. Par contre, la question suivante c) porte sur la variation des valeurs de la hauteur du champ visuel si la longueur du tuyau double, triple et quadruple. Cette question est ainsi décomposée en trois sous-questions. Grâce aux valeurs obtenues en a), il est possible de répondre aux deux premières sous-questions. Lorsque la longueur du tuyau double ou triple, la hauteur du champ visuel diminue de moitié ou du tiers respectivement. Pour répondre à ces deux premières sous-questions, il faut faire varier la longueur initiale par un certain facteur pour observer la relation (voir la figure 4.38).



**Figure 4.38** Table de valeurs avec les reports avec les observations des variations concomitantes entre les plusieurs valeurs des grandeurs observées dans la figure 4.36.



Dans la troisième sous-question, on s'attarde à la variation encore une fois d'une des valeurs de la première grandeur pour obtenir cette fois-ci le quadruple et ainsi le quart des valeurs de la première grandeur. En observant plusieurs accroissements des valeurs de la grandeur indépendante pour des accroissements des valeurs de la grandeur dépendante, ces trois sous-questions visent la mobilisation de l'unité locale quantitative (U8). Une situation avec un contexte similaire est présente dans la collection *Perspective* mais sans valeurs numériques pour les différentes grandeurs. Nous reviendrons sur cette situation dans le chapitre V.

#### 4.3.4 L'analyse des situations retenues selon les 19 autres VD

Le tableau 4.14 présente l'analyse des 28 situations retenues à travers 19 VD. Ces VD vont permettre de caractériser les situations sélectionnées. Rappelons qu'une situation peut posséder plusieurs VD. La situation avec le moins de VD en compte deux et celle avec le plus de VD en compte neuf. Le saut en parachute présenté précédemment et les montagnes russes (voir figures 4.34 et 4.39) sont deux situations qui comptabilisent un grand nombre de VD, huit en tout. Nous avons recensé dix situations avec au moins sept VD. Le tableau 4.15 présente le nombre d'occurrences des VD relevées dans les 28 situations retenues dans le manuel *Panoram@th*.

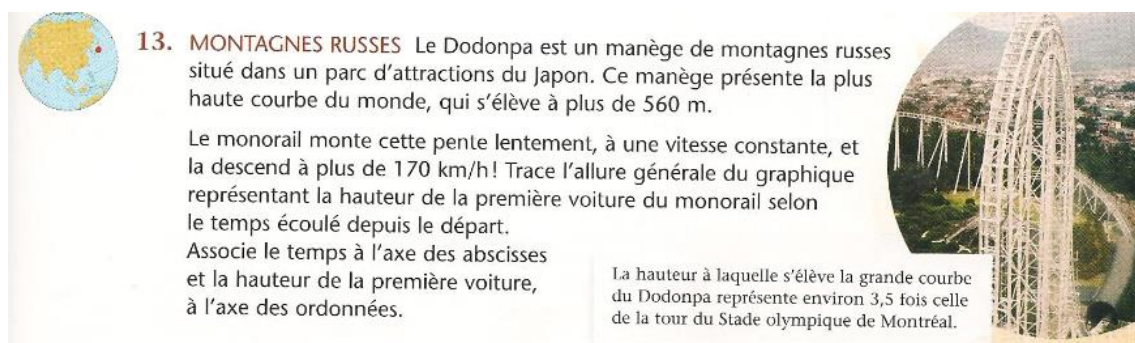
**Tableau 4.14** Tableau de fréquences des différentes VD pour les manuels  
*Panoram@th*

| Variables didactiques                   |                   | Codage | Variable didactique                                   | Nombre d'occurrences (sur les 28 situations) |
|-----------------------------------------|-------------------|--------|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Qui s'attardent aux grandeurs à l'étude | Type de grandeurs | VD1    | Présence de 3 grandeurs ou plus (imposées ou non)     | 5                                            |
|                                         |                   | VD2    | Absence de valeurs numériques des grandeurs observées | 8                                            |
|                                         |                   | VD3    | Une grandeur admet des valeurs continues              | 26                                           |

|                                    |                              |      |                                                                                            |    |
|------------------------------------|------------------------------|------|--------------------------------------------------------------------------------------------|----|
|                                    |                              | VD4  | Une grandeur admet des valeurs discrètes                                                   | 3  |
|                                    |                              | VD5  | Une grandeur admet des valeurs négatives                                                   | 4  |
|                                    |                              | VD6  | Le temps est une grandeur                                                                  | 20 |
|                                    |                              | VD7  | Le temps est la grandeur conséquente                                                       | 1  |
|                                    |                              | VD19 | <i>Grandeurs définies par l'élève</i>                                                      | 0  |
|                                    | Relation entre les grandeurs | VD8  | La relation entre les grandeurs n'est pas imposée                                          | 2  |
|                                    |                              | VD9  | Les grandeurs sont interchangeables                                                        | 4  |
|                                    |                              | VD18 | <i>Absence de relation</i>                                                                 | 0  |
| <b>Autour de l'étude graphique</b> |                              | VD10 | Différents types de tracés (courbe, discret, ligne droite)                                 | 6  |
|                                    |                              | VD11 | Présence de plusieurs tracés dans un même plan cartésien                                   | 0  |
|                                    |                              | VD12 | Conflit objet-source, objet-cible                                                          | 8  |
|                                    |                              | VD13 | Graphique représentant un ensemble d'expériences fonctionnelles                            | 3  |
| <b>Autour des manipulations</b>    |                              | VD14 | La modélisation peut se réaliser en « opérant » sur un schéma qui représente la situation. | 2  |
|                                    |                              | VD15 | Report possible de segments                                                                | 2  |

|                                              |      |                                                |    |
|----------------------------------------------|------|------------------------------------------------|----|
| <b>Reliées aux connaissances nécessaires</b> | VD16 | Connaissances géométriques nécessaires         | 1  |
|                                              | VD17 | Connaissances physiques (usuelles) nécessaires | 22 |

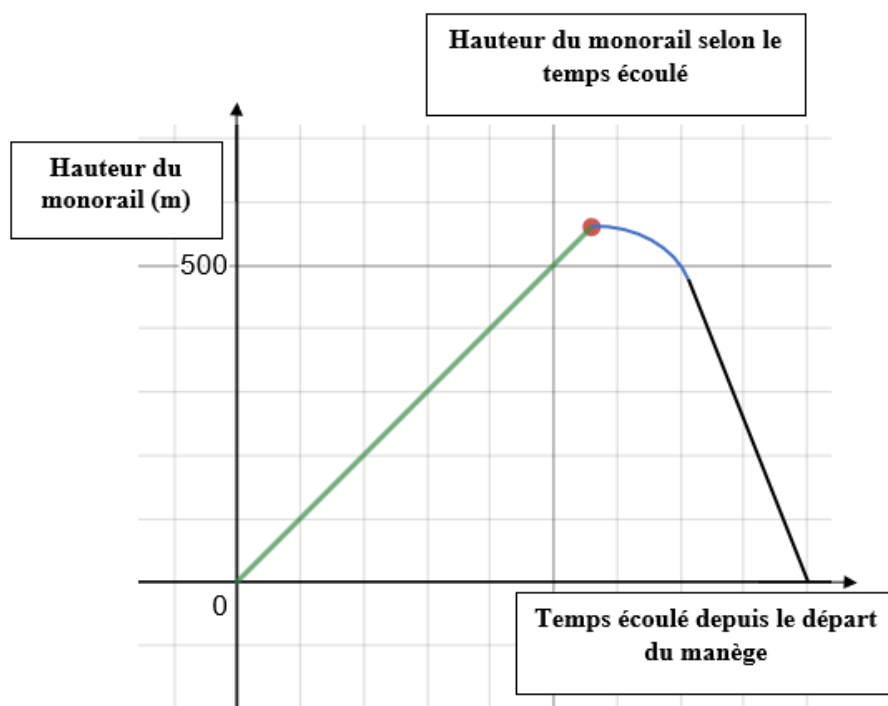
En observant les 19 autres VD (que les passages entre représentations) pour les situations retenues de *Panoram@th*, nous relevons 26 situations ayant au moins une grandeur admettant des valeurs continues. Nous remarquons que le temps est une grandeur dans 20 de ces situations et qu'elle est la grandeur conséquente uniquement pour un contexte. Nous avons présenté ce contexte précédemment (voir figure 4.19 – Le temps de vol selon la vitesse de l'avion). Les deux situations, le saut en parachute (voir figure 4.14) et la voiture téléguidée (voir figure 4.12) sont des exemples de situations s'appuyant sur le temps. Nous analysons plus finement une troisième situation s'appuyant sur le temps, la situation des montagnes russes (voir figure 4.39) qui mobilise huit VD.



**Figure 4.39** Situation tirée de *Panoram@th*, Manuel B, *Panorama 9. Unité 9.2 – Une histoire à raconter. Vol. 1. p. 23.*

Cette situation implique le passage d'une description verbale vers une représentation graphique. La situation permet de tracer l'allure de la hauteur du manège selon le temps écoulé depuis le départ du monorail en observant trois différentes phases de variation

(U5). Ainsi, la première phase du déplacement du manège mène à une augmentation constante de la hauteur pour de longs intervalles de temps puisque la vitesse est basse, mais constante. Cette phase sera représentée par une droite avec une faible inclinaison par rapport à l'axe des abscisses. La deuxième phase est celle de la descente du monorail. Dans ce cas, la vitesse du manège augmentera jusqu'à atteindre la vitesse maximale. Cette augmentation de la vitesse amène des décroissements de plus en plus grands de la hauteur pour des accroissements du temps constants. La représentation graphique sera une courbe ouverte vers le bas. La dernière phase est constante, comme la première, cependant avec une diminution de la hauteur constante pour un temps donné. Cette phase sera représentée par une droite inclinée vers le bas avec une inclinaison plus grande que la droite de la première phase puisque la vitesse est plus grande (voir figure 4.40).



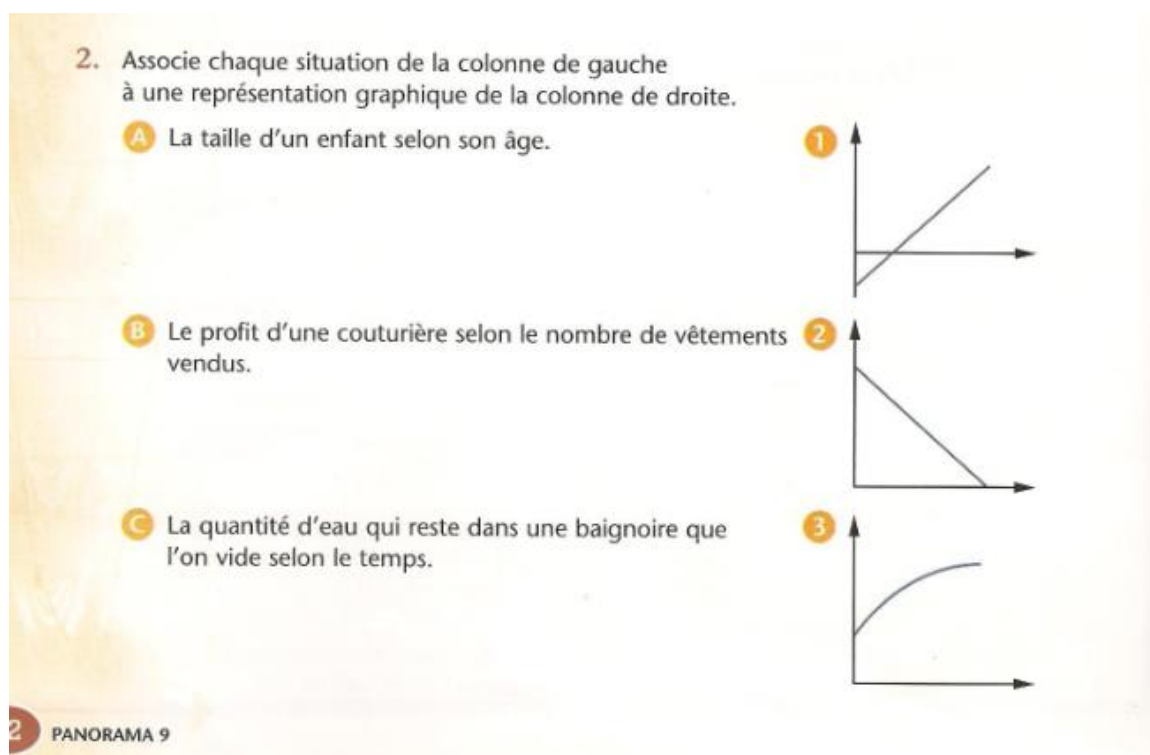
**Figure 4.40** Tracé de la relation entre la hauteur du monorail selon le temps écoulé depuis le départ du manège.

Nous observons la présence de quelques valeurs numériques pour compléter le graphique, en fait, seulement le maximum et la vitesse de descente du monorail sont disponibles. Il est possible de représenter la hauteur maximum sans problème, mais en absence de plus d'informations sur le temps ou la vitesse atteinte par le monorail tout au long du trajet, nous ne pouvons être plus précis. Le point de vue adopté sur les phases est global qualitatif (U4 et U5). L'objectif est plutôt de représenter l'allure des phases décrites précédemment sans s'intéresser aux valeurs numériques pour observer les accroissements.

Tel que nous l'avons mentionné, cette situation est l'une de cette collection de manuels scolaires qui sollicite plusieurs autres des 19 VD. Elle a recours à trois grandeurs (VD1) en considérant la hauteur, le temps écoulé qui est la grandeur conséquence (VD7) et la vitesse du manège. Cette situation est l'une des cinq situations où l'on s'intéresse à 3 grandeurs ou plus. Elle présente aussi différents types de courbes (VD10) et le tracé peut aussi amener un conflit objet-cible objet-source (VD12). Au total, huit situations présentent un tracé qui pourrait être confondu avec le déplacement de l'objet observé. Cette situation nécessite aussi des connaissances physiques (VD17) afin de bien comprendre l'influence de la vitesse sur le temps écoulé depuis le départ selon les différentes phases du parcours. Cette VD, nécessité de recourir à des connaissances physiques, est fréquemment utilisée dans les situations de *Panoram@th*, dans 22 des 28 situations retenues. En effet, les situations impliquant le déplacement d'objets ou de personnes selon le temps requièrent une compréhension physique des relations afin de pouvoir les décrire dans une représentation ciblée.

Il est intéressant de noter que quatre contextes font intervenir des valeurs négatives pour l'une des grandeurs. Cette VD est particulière car les contextes utilisant des valeurs négatives ne sont pas très fréquents. *Panoram@th* s'attarde à des grandeurs comme la température (voir figure 4.27), les années du calendrier grégorien, le profit (voir figure 4.41) et les étages d'un ascenseur pour observer des valeurs négatives. La

situation suivante demande l'association de courtes relations exprimées en mots et des représentations. L'une des relations aborde la relation entre le profit d'un entrepreneur et le nombre de vêtements vendus. Cela implique que l'élève devra comprendre que le profit est négatif avant la vente de quelques vêtements. En effet, il faut couvrir les achats de matériels et d'équipements pour la couture.



**Figure 4.41** Situation tirée de *Panoram@th*, Manuel B, *Panorama 9*. Unité 9.2 – *Une histoire à raconter*. Vol. 1. p.22.

Après l'observation de la situation, nous relevons une erreur dans le tracé du graphique associé à la relation entre le nombre de vêtements et le profit. Ce tracé ne devrait pas être continu puisque le nombre de vêtements n'admet pas de valeurs continues. Il est intéressant de relever que ces représentations amènent à prendre en compte les accroissements entre les deux grandeurs sans valeurs numériques (VD2), par exemple : la taille d'un enfant et son âge. On détermine tout d'abord que la taille d'un enfant

augmente selon son âge. Il faut aussi constater que plus un enfant vieillit moins ses accroissements en taille seront importants. Cette situation amène un questionnement global (U1 et U2), le questionnement local qualitatif n'est toutefois pas présent (U4, une réflexion sur les accroissements). Pour ce qui est des valeurs négatives bien que ce soit peu fréquent dans les situations retenues, nous ne voyons pas une différence marquée entre l'interprétation par exemple de cette relation et celle entre le nombre de vêtements vendus et le montant reçu par la couturière qui serait strictement positif. L'accent de la relation est plutôt sur l'idée que le profit croît et qu'il croît constamment selon le nombre de vêtements écoulé. Les quatre situations retenues avec des valeurs négatives explorent un court intervalle inférieur à zéro, le raisonnement covariationnel qui est sollicité n'a pas de spécificités dans le cas de valeurs négatives dans les situations retenues.

La situation précédente (voir figure 4.41) est l'une des huit amenant une interprétation qualitative d'une relation entre les grandeurs. Parmi les autres situations retenues, certaines comme le saut en parachute (voir figure 4.34), le manège (voir figure 4.39) et le tuyau à travers lequel on observe un trait (voir figure 4.36), comportent des valeurs numériques pour répondre aux questions, alors qu'il aurait été possible d'y répondre uniquement qualitativement. Lorsque le questionnement est axé sur la recherche de valeurs dans un couple, d'un point ou d'une phase, l'interprétation des élèves ne sera pas la même en présence de valeurs numériques. Nous considérons que ces situations auraient pu être plus riches pour la covariation sans la présence de ces valeurs numériques.

#### 4.3.4 La synthèse et discussion sur le potentiel des situations proposées dans *Panoram@th* autour de la covariation

Pour la collection *Panoram@th*, nous observons un total de 28 situations retenues dans trois Panoramas parmi un grand nombre de situations observées (203 situations dans

cinq Panoramas). Peu de situations se trouvent dans deux de ces trois *Panorama* : trois situations dans le *Panorama 7* (*des suites numériques aux équations*) et quatre situations dans le *Panorama 11* (*rapports et figures semblables*). Nous retrouvons un plus grand nombre de situations riches dans le *Panorama 9* avec 21 situations (de *Table de valeurs vers Représentations graphiques*).

Dans plusieurs de ces situations, les questions n'amènent pas explicitement à avoir recours à la covariation, mais par exemple, dans neuf de ces situations, la recherche d'une quatrième valeur repose sur une analyse de la table de valeurs donnée à travers des accroissements constants comme c'est le cas avec la température du ballon-sonde selon l'altitude (voir figure 4.27). Les questions qui amènent un travail sur la covariation sont par exemple dans le cas d'une étude graphique « Décris la variation entre les deux grandeurs » ou « Que signifient certaines parties du graphique? ». La question « Trace l'allure générale » requiert à partir d'une description verbale d'une situation de s'intéresser aux accroissements concomitants des deux grandeurs comme dans celle du manège (voir figure 4.39). D'autres situations comme celle du tuyau et de la hauteur du champ visuel s'appuient plutôt sur l'observation des accroissements des valeurs de la grandeur dépendante quand on double, triple ou quadruple une des valeurs de la grandeur indépendante. Ces situations amènent majoritairement la mobilisation d'un point de vue local quantitatif à travers les unités de raisonnement U8 et U9. Le point de vue qualitatif est également sollicité, mais moins fréquemment (U4 et U5) avec huit situations sans valeurs numériques (VD2).

Nous constatons aussi que les grandeurs à observer et les relations entre elles sont données dans 26 des 28 situations retenues. Tout le travail autour de la reconnaissance des grandeurs à l'étude s'attarde à celle qui est indépendante et dépendante est peu sollicité. Certaines situations offrent d'emblée un graphique ou une table de valeurs donnant directement les grandeurs et la relation. Dans des situations comme le déplacement du manège (voir figure 4.39), il aurait été possible de ne pas ajouter la



mention (p.23) : « Associe le temps à l'axe des abscisses et la hauteur de la première voiture, à l'axe des ordonnées » et ainsi solliciter une réflexion sur les grandeurs à observer et sur leur dépendance. Pour l'activité d'observation à travers un tuyau (voir figure 4.36), bien que les grandeurs soient interchangeables pour observer la relation (VD9), comme c'est le cas pour quatre situations, les auteurs donnent une table de valeurs à remplir au détriment du point de vue global (U1 et U2). Seulement deux situations permettent de déterminer les grandeurs et le sens de la relation dont le projet Balles et rebonds (voir figures 4.29 à 4.31) et ces situations n'ont pas de grandeurs interchangeables. Quatre situations permettraient d'interchanger les deux grandeurs pour observer la relation et ces relations n'impliquent pas le temps. Ainsi, les premières unités de U0 à U3 sont très peu présentes même si elles sont nécessaires pour pouvoir déployer les autres unités de raisonnement (l'élève devra y avoir recours pour résoudre la situation). Toutefois, Panoramath permet d'élargir l'unité de raisonnement U0 que nous avons nommé : « Identifier plusieurs grandeurs possibles de la situation » à « Identifier deux grandeurs à observer parmi d'autres grandeurs ». En effet, cette collection propose des grandeurs et demande à l'élève si celles-ci peuvent influencer l'observation d'un phénomène (il s'agit des rebonds d'une balle).

Parmi les situations retenues, le travail sur la covariation repose surtout sur les représentations graphique et verbal à travers essentiellement des interprétations graphiques qui sont présentes en grande partie dans le *Panorama 9*. Nous remarquons la présence de plusieurs descriptions verbales parmi les tâches des *Panoramas* retenues, autant comme représentation de départ que d'arrivée et ce dans chacun des *Panorama*. Pour le *Panorama 9*, le travail en lien avec la description verbale est fait majoritairement à partir d'une représentation graphique. La production et la description d'une représentation graphique sont les deux passages les plus fréquents du *Panorama 9*. Toutes les représentations graphiques faites à partir d'une description verbale se retrouvent dans ce *Panorama*. Les descriptions de représentations graphiques et des

descriptions verbales à partir de contextes écrits sont plus présentes dans le *Panorama 11*.

Pour les situations qui impliquent le passage de la description verbale à graphique, on peut noter que le temps est omniprésent comme grandeur prédominante (VD6). Il s'agit essentiellement d'étudier des déplacements à travers les grandeurs distance et temps. Ces situations sont susceptibles d'entraîner le conflit objet-source, objet-cible et exige le recours à des connaissances physiques. Panoramath est la seule collection qui propose un travail sur des grandeurs à valeurs négatives, mais le déploiement de la covariation dans ces situations n'a pas de particularité.

Le tableau 4.15 présente l'occurrence des différentes VD selon les trois Panoramas sélectionnés. Nous avons cherché à voir si selon les Panoramas, on pouvait observer des situations dont leurs caractéristiques selon les VD varient ou si on peut sentir une certaine progression au niveau des VD des situations retenues tout le long de ces trois Panoramas.

**Tableau 4.15** Tableau des variables didactiques selon le *Panorama* du manuel *Panoram@th*.

|                                                                | <b>Panorama 7</b> | <b>Panorama 9</b> | <b>Panorama 11</b> |
|----------------------------------------------------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| <b>VD1</b> – Présence de 3 grandeurs ou plus                   | 1                 | 3                 | 1                  |
| <b>VD2</b> – Absence de valeurs numériques                     | 1                 | 7                 | 0                  |
| <b>VD3</b> - Une grandeur admet des valeurs continues          | 3                 | 19                | 4                  |
| <b>VD4</b> – Une grandeur admet des valeurs discrètes          | 1                 | 2                 | 0                  |
| <b>VD5</b> – Une grandeur admet des valeurs négatives          | 2                 | 2                 | 0                  |
| <b>VD6</b> – Le temps est une grandeur                         | 1                 | 17                | 2                  |
| <b>VD7</b> – Le temps est la grandeur conséquente              | 0                 | 1                 | 0                  |
| <b>VD8</b> – La relation entre les grandeurs n'est pas imposée | 1                 | 1                 | 0                  |

|                                                                      |   |    |   |
|----------------------------------------------------------------------|---|----|---|
| <b>VD9</b> – Les grandeurs sont interchangeables                     | 1 | 2  | 1 |
| <b>VD10</b> – Présence de différents types de tracés                 | 0 | 5  | 1 |
| <b>VD11</b> – Présence de plusieurs tracés dans un plan              | 0 | 0  | 0 |
| <b>VD12</b> – Conflit objet-source objet-cible                       | 0 | 8  | 0 |
| <b>VD13</b> – Graphique représente un ensemble d'expériences         | 1 | 0  | 2 |
| <b>VD14</b> – Modélisation peut se réaliser en opérant sur un schéma | 0 | 2  | 1 |
| <b>VD15</b> – Report possible de segments                            | 0 | 1  | 1 |
| <b>VD16</b> – Connaissances géométriques nécessaires                 | 0 | 1  | 0 |
| <b>VD17</b> – Connaissances physiques usuelles nécessaires           | 1 | 17 | 4 |
| <b>VD18</b> – Absence de relation                                    | 0 | 0  | 0 |
| <b>VD19</b> – Grandeurs définies par l'élève                         | 0 | 0  | 0 |

Ce tableau ne permet pas de dégager de tendance. On peut confirmer que les VD autour de l'étude graphique (VD10 à VD13) sont surtout présentes dans le *Panorama 9*. Seulement huit situations n'admettent pas de valeurs numériques. Les nombres sont omniprésents dans les situations, l'observation des accroissements entre les grandeurs s'appuie beaucoup sur des valeurs numériques que ce soit dans les graphiques comme dans les tables de valeurs. Toutefois, nous avons pu remarquer que ces valeurs numériques ne sont pas nécessaires dans des situations comme les montagnes russes, les tuyaux ou le saut en parachute même si la situation en propose.

## CHAPITRE V

### INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

Dans le chapitre IV, nous avons mené une analyse de trois collections de manuels scolaires, *Perspective mathématique*, *À vos maths* et *Panoram@th*. Pour cela, dans un premier temps, nous nous sommes demandés sur quoi nous pouvions nous appuyer pour sélectionner les situations susceptibles de développer la covariation. Dans un deuxième temps, les situations retenues ont été analysées selon 20 VD, celles-ci ont permis de se prononcer sur la variété des situations présentes dans chacune des collections de manuels scolaires. Dans ce chapitre, nous souhaitons, dans une première section, revenir sur les éléments qui ont permis d'une part de sélectionner les situations présentant un potentiel pour la covariation et d'autre part, sur les variables sur lesquelles nous nous sommes appuyées pour décrire la variété des situations. Ces éléments ont permis d'analyser trois collections de manuels scolaires sous l'angle de la covariation et nous en proposons une analyse transversale. Dans une deuxième section, nous discutons de certaines situations et type de situations que nous avons retrouvés dans au moins deux collections. À la lumière de ces deux sections, nous proposons dans une troisième section, de faire ressortir la possibilité pour l'enseignant de modifier certaines situations pour enrichir le travail mené autour de la covariation et ainsi faire ressortir le questionnement qui peut soutenir le regard covariationnel.

#### 5.1 Les outils d'analyse sur la covariation et une analyse transversale des trois collections de manuels scolaires

Pour discriminer les situations présentant un potentiel pour mobiliser le regard covariationnel, nous avons utilisé un outil qui présente trois points de vue de la

covariation. Deux autres outils ont permis de caractériser les situations retenues sous l'angle de 20 VD. L'analyse présentée dans le chapitre IV souligne la pertinence de ces outils pour étudier les situations sous l'angle de la covariation. Ces outils sont un résultat de ce mémoire.

L'outil de reconnaissance du potentiel covariationnel des situations (voir tableau 5.1) permet de relever si une situation favorise ce type de regard, mais également la façon dont ce regard est favorisé. Cet outil repose sur les recherches menées par Passaro (2015, 2020) qui s'est appuyée sur Carlson (1998, 2001, 2002) pour décrire à partir des actions mentales des unités de raisonnement et, sur Chorlay (2007) et Vanderbrouck (2011) pour les points de vue de la fonction. Un de ces points de vue (global) a été enrichi par l'étude de Janvier et Pelletier (2003). Ainsi, cet outil permet de relever le point de vue de la covariation qui est sollicité dans la situation : global, local qualitatif et/ou local quantitatif, chacun de ces points de vue se décline sous diverses unités de raisonnement et comme réponse à différentes questions.

**Tableau 5.1** Les trois points de vue de la covariation et le questionnement associé aux unités de raisonnement U1 à U5 et de U8-U9.

| Points de vue | Unités de raisonnement mobilisées                                                                                                 | Questions possibles                                                                                                                                                                          | Exemples de verbalisations possibles                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Global        | U0 : Identifier deux grandeurs à observer parmi d'autres grandeurs                                                                | « <i>Quelles sont les grandeurs observables dans la situation ?</i> »<br>« <i>Quelles sont les deux grandeurs choisies ?</i> »                                                               | Sont énumérées différentes grandeurs (p de verbalisation requise ici)<br>Deux grandeurs sont choisies pour en observer la relation                                                                                                                                          |
|               | U1 : Identifier la grandeur dépendante et indépendante<br>U2 : Identifier la présence de valeurs concomitantes des deux grandeurs | « <i>Quelle est la relation entre ces deux grandeurs ? Sur laquelle des deux grandeurs veux-tu fixer ton regard et déduire à partir de celle-ci le comportement de l'autre grandeur ?</i> ». | <i>Plus les valeurs de la grandeur indépendante augmentent :</i><br>1- <i>plus les valeurs de la grandeur dépendante augmentent</i><br>2- <i>plus les valeurs de la grandeur dépendante diminuent</i><br>3- <i>les valeurs de la grandeur dépendante restent constantes</i> |

|                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|--------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                          | U5 : Déterminer les différentes phases de variation                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | « Comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente? »                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <i>Local qualitatif</i>  | U4 : Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante<br>U5 : Déterminer les différentes phases de variation                                                                                                                                                        | « Comment se comportent les accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont constants? »      | Trois cas sont possibles lorsque les valeurs des deux grandeurs augmentent :<br>Pour des accroissements constants des valeurs de la grandeur indépendante :<br>-On a des accroissements constants ou nuls des valeurs de la grandeur dépendante (droite dans le graphique)<br>-On a des accroissements de plus en plus grands des valeurs de la grandeur dépendante (courbe ouverte vers le haut)<br>-On a des accroissements de plus en plus petits des valeurs de la grandeur dépendante (courbe ouverte vers le bas) |
| <i>Local quantitatif</i> | U5 : Déterminer les différentes phases de variation<br><br>U8 : Quantifier un accroissement (ou un décroissement) de la grandeur dépendante pour un accroissement précis de la grandeur indépendante<br><br>U9 Quantifier un accroissement (ou un décroissement) de la grandeur dépendante pour un accroissement unitaire de la grandeur indépendante | « Quelle est la valeur du rapport des accroissements concomitants des deux grandeurs pour un certain accroissement de la grandeur indépendante ? » | Une verbalisation semblable peut être mobilisée, mais en y ajoutant des valeurs numériques.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |

Dans l'analyse des situations des collections de manuels scolaires, nous avons relevé les situations ayant au moins une question permettant de favoriser la mobilisation d'au moins un de ces trois points de vue et ce, dans diverses thématiques comme l'étude des suites, des graphiques, des tables de valeurs et de la proportionnalité. Précisons toutefois que les trois collections sélectionnées n'avaient pas comme intention explicite

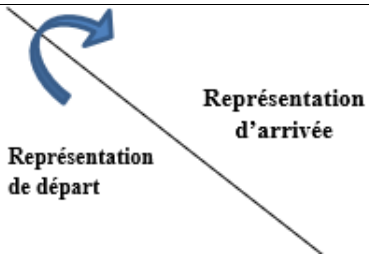
de travailler la covariation. C'est notre lecture qui a permis de faire ressortir le regard covariationnel des situations. Il ne faut toutefois pas oublier que pour préparer les élèves à l'étude de la fonction, il ne faut pas négliger le regard correspondance. Comme le précisent plusieurs chercheurs, (Carlson, 1998; Confrey et Smith, 1995; Passaro, 2015,2020; Soury-Lavergne, 2010) les regards covariationnel et correspondance sont complémentaires. Notre intérêt tourne autour de la covariation, car nous souhaitons lui accorder une place dans l'enseignement comme le souligne Soury-Lavergne (2010) : « Les définitions basées sur la correspondance se sont imposées dans l'enseignement actuel, obscurcissant les significations de variable et de fonction » (p. 9).

24 situations ont été retenues dans *Perspective mathématique*, huit dans *À vos maths*, et 28 dans *Panoram@th*. Elles représentent une banque riche en situations pour travailler le développement d'un regard covariationnel chez les élèves du premier cycle du secondaire. Il est possible d'en sélectionner quelques-unes à bon escient pour travailler les trois points de vue de la covariation. Nous pensons qu'il ne faut pas faire vivre aux élèves un grand nombre de situations, mais il s'agit plutôt d'en choisir quelques-unes et d'enrichir les questions afin d'amener une réflexion autour des trois points de vue. Ces situations peuvent également être variées mobilisant différentes VD. Comme Passaro (2020), nous pensons que le déploiement des points de vue local qualitatif et local quantitatif s'appuient sur le point de vue global. La réflexion autour des accroissements entre les valeurs correspondantes de deux grandeurs repose sur le point de vue local qualitatif (U4-U5) et/ou sur le local quantitatif (U8-U9). Pour mener cette étude sur les accroissements, l'élève doit se questionner sur les deux grandeurs jeu, sur celle qui est dépendante et celle qui est indépendante et sur le sens de variation qui peut changer selon les phases de variation. De plus, nous avons pu remarquer qu'il n'y pas d'ordre hiérarchique entre les unités de raisonnement. Ainsi, pour atteindre U8 ou U9, il n'est pas essentiel que soit mobilisée U4. De plus U5, *Déterminer les*

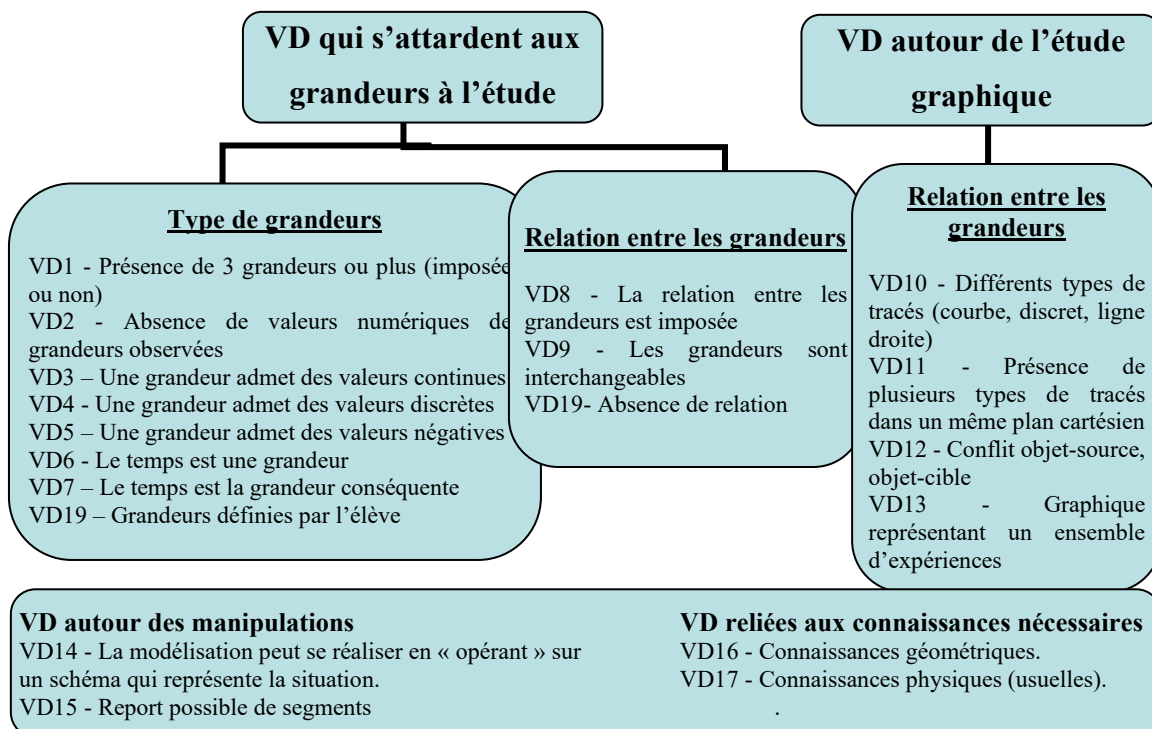
*différentes phases de variation*, peut être mobilisée autant dans le raisonnement local que le global.

Pour caractériser les situations retenues, nous avons eu recours à 20 VD qui sont appréhendées à travers deux outils : le tableau des passages entre représentations (voir tableau 5.2) inspiré de Janvier (1983) et celui de 19 autres VD issues de différentes recherches (voir figure 5.1), dont plusieurs proviennent de Janvier et Pelletier (2003). Ces 19 VD ont été classées en quatre catégories.

**Tableau 5.2** Tableau des passages entre les représentations

|  | Description verbale | Schéma | Table de valeurs | Graphique | Formule |
|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|--------|------------------|-----------|---------|
| Description verbale                                                                |                     |        |                  |           |         |
| Schéma                                                                             |                     |        |                  |           |         |
| Table de valeurs                                                                   |                     |        |                  |           |         |
| Graphique                                                                          |                     |        |                  |           |         |
| Formule                                                                            |                     |        |                  |           |         |





**Figure 5.1** Présentation de 19 variables didactiques visant à caractériser les situations susceptibles de développer le regard covariationnel.

L'analyse menée des trois collections de manuels scolaires a permis de mettre à l'épreuve ces outils d'analyse et de leur apporter certaines modifications. Par exemple, l'analyse d'*À vos maths* a permis d'ajouter deux VD à notre analyse, la VD18 (Absence de relation) et la VD19 (Grandeurs définies par l'élève). En effet, cette collection questionne la présence ou l'absence de régularités dans des contextes réalistes. De plus, c'est la seule collection où l'on remarque des tâches qui amènent parfois l'élève à se positionner comme enseignant alors qu'il doit interpréter des productions d'élèves fictifs. Nous n'avons pas relevé ce type de situations dans les deux autres collections.

En outre, après avoir analysé la collection *Panoram@th* nous remarquons deux façons différentes de travailler l'identification de deux grandeurs parmi plusieurs grandeurs

(U0). Dans le *projet Balles et rebonds* (voir figures 4.29 à 4.31), *Panoram@th* propose des grandeurs et demande si elles ont une influence sur la relation entre le nombre de rebonds et la hauteur. Les autres situations où l'on observe un questionnement sur les autres grandeurs demandent plutôt d'en énumérer d'autres avant d'observer la relation entre deux grandeurs imposées. Ainsi l'unité de raisonnement U0 est passée de « Identifier plusieurs grandeurs possibles de la situation » à « Identifier deux grandeurs à observer parmi d'autres grandeurs ». L'objectif derrière U0 (Point de vue global) est d'identifier des grandeurs qui peuvent jouer dans un phénomène, mais également de reconnaître parmi les grandeurs données celles qui peuvent avoir une influence. Ainsi, après avoir considéré ces différentes grandeurs, il est possible d'en choisir deux pour en observer la relation.

Grâce aux 19 VD (voir figure 5.1), nous avons pu relever que parmi les situations retenues, les deux grandeurs à étudier sont souvent données et la relation entre les grandeurs est souvent imposée. Nous retrouvons peu de situations avec un questionnement spécifique sur les grandeurs en jeu avant d'en choisir deux pour observer une relation. Les unités de raisonnements global qualitatif (U0 et U1) sont donc peu ciblées par les questions. Dans plusieurs cas, la représentation de départ dans la situation donne ces informations sur les grandeurs par la donnée d'une table de valeurs ou d'un graphique, l'élève doit alors décoder ces informations. Dans d'autres situations (voir figure 4.39), le sens de la relation est donné à l'élève à l'aide d'une formulation du type : « Associe le temps à l'axe des abscisses et la hauteur de la première voiture, à l'axe des ordonnées ». (*Panoram@th, Manuel B, vol. 1, p.23*). Ainsi, le travail autour de l'identification et le choix de grandeurs est peu présent dans les trois collections observées.

De plus, pour les trois collections, nous remarquons qu'un grand nombre de situations retenues ont des grandeurs admettant des valeurs continues (VD3 : 23-7-26)<sup>38</sup> dont une grande majorité s'appuient sur le temps (VD6 : 15-6-20). C'est le cas par exemple des situations où l'on observe le déplacement d'une personne ou d'un objet en relation avec le temps écoulé. Ces situations permettent d'observer la vitesse, la hauteur ou une autre grandeur selon les différentes phases du déplacement. Des situations impliquant un saut en parachute par exemple, nécessitent aussi des connaissances physiques usuelles comme c'est le cas dans (VD17 : 12-6-22). Bien que la présence du temps n'exclue pas la possibilité de l'observer comme grandeur conséquente, la présence du temps comme grandeur prédominante est prépondérante dans les différents manuels. Ces situations permettent rarement d'interchanger les deux grandeurs observées pour répondre aux questions. Nous retenons une situation ciblant cette VD, la situation des pendules (*Perspective mathématique*, voir figure 4.9) qui amène à se pencher sur le temps comme durée et le temps écoulé dans le même enchaînement de questions. Nous n'avons pas trouvé d'autres situations de ce type à travers les différentes collections. D'autres situations impliquant par exemple des longueurs dans des contextes géométriques (comme l'observation à travers un tuyau présent dans deux des trois collections) permettent d'observer la relation en ayant la possibilité de choisir l'une ou l'autre des grandeurs comme étant prédominante (VD9 : 8 – 1- 4). Cependant, le choix de la grandeur prédominante n'est laissé à l'élève que dans peu de situations (VD8 : 8 – 1 – 2). Ainsi, il n'y a pas de grandes réflexions sur le choix d'une grandeur comme étant prédominante, le travail est plutôt autour de la reconnaissance d'une grandeur prédominante selon le contexte qui se trouve à être le temps écoulé dans plusieurs cas. Le deuxième outil (voir tableau 5.2) a permis de relever que les représentations graphique et description verbale sont les représentations les plus utilisés dans les situations retenues. Dans toutes les collections, il est fréquemment demandé aux élèves

---

<sup>38</sup> Les fréquences de cette VD et les suivantes sont dans l'ordre : (*Perspective mathématique – À vos maths – Panoram@th*). Rappelons que le nombre total de situations retenues est : (24 – 8 – 28)

de décrire un graphique (passage de graphique à description verbale), de tracer un graphique (de description verbale à représentation graphique) et de répondre en mots à une question en mots (de description verbale à description verbale). Les approches dans chacune des trois collections s'appuient majoritairement sur un point de vue de la covariation différent. *Perspective mathématique* le fait en s'appuyant sur un point de vue local qualitatif de la covariation. Treize situations sans valeurs numériques (VD2) se retrouvent toutes dans la *Partie 6* portant sur les représentations graphiques. Nous retrouvons des tâches du type : « En quelques mots, décris ce qui caractérise la vitesse de chute durant chaque phase. » (*Perspective mathématique, Manuel B, Vol. 2*, p.153), « Composez un court scénario impliquant deux personnes dont les déplacements peuvent être associés à ce graphique. » (Ibid. p.148) et « Décris dans tes propres mots la course de Luc » (Ibid. p.154). Une interprétation qualitative des relations est donc requise, celle-ci s'appuie sur un raisonnement local qualitatif (U3 à U5) qui repose sur la considération d'écarts concomitants entre les deux grandeurs en jeu. Les deux autres collections proposent également des situations sans valeurs pour les grandeurs (VD2 : 13 – 4 – 8) et qui sont intéressantes pour une description qualitative de la relation. Certaines de ces situations présentent de plus une représentation graphique avec différents types de tracés VD10 (6-1-6). Ces situations permettent de porter une attention sur différents types de variations entre les deux grandeurs, lorsque ces interprétations sont sans valeurs numériques, l'interprétation des différentes phases est qualitative.

Il est à noter que les huit situations sans valeurs numériques de *Panoram@th* visent plutôt la représentation graphique : « Trace l'allure générale du graphique représentant chacune des situations suivantes » ou l'association entre des représentations graphiques et des relations décrites en mots (voir figure 4.41). Toutefois, *Panoram@th* adopte majoritairement un point de vue quantitatif avec 20 des 28 situations portant sur une observation de valeurs numériques. Les questions sont du type : « Qu'advient-il de la hauteur du champ visuel si la longueur du tuyau : double, triple, et quadruple? »

(*Panoram@th, Manuel B, vol. 1, p.23*). À quatre reprises, nous retrouvons une situation d'interprétation graphique qui est similaire à une situation présentée dans *Perspective mathématique*, mais dans cette collection, elle est présentée sans valeurs associées aux deux grandeurs. Dans ces deux collections, le guidage du questionnement est différent. Nous reviendrons sur ce point à la section suivante.

Finalement, *À vos maths* met l'accent sur le point de vue global à travers la description verbale. Cette collection est la seule qui questionne la présence ou l'absence de régularités dans une situation. Ainsi, avant de chercher à étudier la relation entre deux grandeurs, *À vos maths* questionne l'existence de cette relation à travers des questions du type : « Pourquoi est-il impossible de répondre avec certitude aux questions contenues dans les problèmes suivants? » ou « essaie de répondre aux problèmes suivants ». Toutefois, certaines questions dans *À vos maths* nous ont interpellés au niveau sémantique autour du vocabulaire utilisé. Par exemple dans une situation d'introduction (voir figure 4.18), après avoir présenté trois variations possibles<sup>39</sup>, les consignes requièrent de décrire une situation où : « l'augmentation de la valeur d'une variable fait augmenter la valeur de l'autre variable », donnant l'impression qu'une variable n'a qu'une seule valeur. Il faudrait parler « des valeurs d'une variable ». Certaines questions sont aussi complexes, nous avons eu de la difficulté à comprendre le type de réponse attendue. Par exemple, dans cette même situation d'introduction, l'auteur demande comme dernière question de la situation : « Selon toi, existe-t-il d'autres types de relations entre deux variables? », les élèves à ce stade de leur apprentissage risquent de ne savoir quoi répondre.

Bien que nous n'ayons pas fait une analyse poussée sur la nomenclature utilisée par chacune des collections, nous avons constaté que les manuels ont chacune leur façon de nommer les situations qu'ils regroupent sous plusieurs noms : *situations-problèmes*,

---

<sup>39</sup> Soit les valeurs des variables varient : dans le même sens, en sens inverse et n'ont pas de relation entre elles.

*activités, bric à brac, situations d'introduction*, etc. On ne remarque pas une grande différence entre les différents types de situations dans les collections *À vos maths et Panoram@th*. Dans les deux cas, les situations présentent un contexte assez « minimaliste » et une panoplie de questions assez fermées. Pour *Panoram@th* nous retrouvons 28 situations et un total de 93 questions et c'est huit situations pour 31 questions dans *À vos maths*. Les questions peuvent être répondues grâce à des réponses courtes comme une valeur numérique ou l'ajout d'un mot dans une phrase trouée (voir figure 4.35). On retrouve une présentation différente pour *Perspective mathématique*. Pour les 24 situations, on a comptabilisé un total de 57 questions. Les questions requièrent des réponses plus élaborées.

## 5.2 Une réflexion sur certaines situations qui ont été rejetées et d'autres que l'on retrouve dans deux des collections de manuels scolaires analysés

Quelques situations observées (retenues ou pas) se retrouvent dans au moins deux collections. Ces « reprises » de situations par d'autres auteurs permettent d'observer les distinctions dans leur guidage en vue de la résolution. À notre avis, plusieurs situations ont un potentiel pour le déploiement d'un regard covariationnel, mais elles ont été rejetées de notre étude parce que la forme des questions et leur guidage ne permettent pas le déploiement de ce regard sans une intervention extérieure. Ces situations se retrouvent dans une « zone grise », car il n'est pas possible de déterminer qu'un regard covariationnel sera déployé en raison de l'absence d'information sur l'étude des accroissements.

Tout d'abord, comparons des situations qui visent une généralisation à des fins de construction de formule. Les distinctions entre les deux situations suivantes : celle tirée de *Panoram@th* (voir figure 5.2 à gauche) qui étudie le nombre de carrés et le nombre d'allumettes et celle tirée de *Perspective mathématique* (voir figure 5.2 à droite) qui

étudie le nombre de triangles et le nombre de régions triangulaires, permettent de rejeter la première et de garder la deuxième.

12. On a construit cette suite de carrés avec des allumettes.



a) Construis les deux prochaines figures de la suite.  
b) Complète cette table de valeurs.

|                     |   |   |   |   |   |
|---------------------|---|---|---|---|---|
| Nombre de carrés    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Nombre d'allumettes |   |   |   |   |   |

c) Donne la règle qui permet de calculer le nombre d'allumettes à l'aide du nombre de carrés.  
d) Détermine le nombre d'allumettes nécessaires pour construire 20 carrés.

**Activité 1 Des triangles, des segments et des points**

Suis les directives ci-dessous.

- 1) Sur une feuille, place trois points non alignés. Relie ces points par des segments de droite pour former un triangle.
- 2) Place un autre point à l'intérieur de ce triangle et relie-le aux trois sommets par des segments de droite. La figure est maintenant divisée en trois régions triangulaires.
- 3) Choisis l'une de ces régions, place un point à l'intérieur et relie ce point aux trois sommets du triangle qui délimite la région.

a) En combien de régions triangulaires la figure est-elle maintenant divisée? Et si tu ajoutais d'autres points en répétant l'étape 3? Reproduis et complète la table de valeurs ci-contre en y inscrivant tes réponses.  
b) Chaque fois que tu ajoutes un point, quel est l'effet sur le nombre de régions triangulaires?  
c) En combien de régions triangulaires la figure serait-elle divisée si l'on répétait l'étape 3 jusqu'à ce qu'il y ait 50 points au total? Explique ton raisonnement.  
d) Et si l'on continuait jusqu'à  $n$  points?

| NOMBRE DE POINTS | NOMBRE DE RÉGIONS TRIANGULAIRES |
|------------------|---------------------------------|
| 3                | 1                               |
| 4                | 3                               |
| 5                |                                 |
| 6                |                                 |
| 7                |                                 |

**Figure 5.2** À gauche : Situation tirée de *Panoram@th*, Manuel A, Panorama 7. Unité 7.1 : Ainsi de suite. Vol. 2. p.129. à droite : Activité tirée de *Perspective mathématique*, Manuel B, Partie 8. Régularités et représentations. Vol. 2. p. 423.

Pour la situation carrés/allumettes, l'élève est invité à compléter une table de valeurs et à trouver la règle. Il n'y a pas de réflexion explicite sur les accroissements, pas de réflexion sur la reconnaissance d'une suite arithmétique. Dans la collection *Panoram@th*, toutes les suites présentées sont nécessairement arithmétiques et l'on invite l'élève à trouver la formule avant de l'utiliser pour trouver une valeur inconnue (voir figure 5.2 à gauche questions c) et d)). Cet aspect amène la possibilité d'un déploiement d'un regard uniquement sur la correspondance entre les termes ou entre deux valeurs d'un couple, sans se préoccuper des accroissements entre les valeurs des grandeurs. Ainsi, tel que le précisent Passaro et Deblois (2020) : « Les élèves sont habitués à des problèmes statiques dans lesquels on s'intéresse à mettre des données en relation pour effectuer un calcul ». Pour la situation des triangles, des segments et des points de *Perspective mathématique*, une réflexion sur les accroissements induite par une des questions nous a permis de retenir la situation : « Chaque fois que tu ajoutes

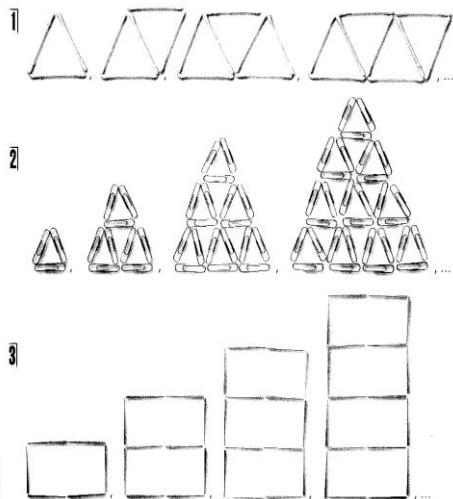
un point, quel est l'effet sur le nombre de régions triangulaires ? ». Ce genre de question supporte le regard covariationnel et il suffirait d'inclure ce type de questions dans des situations comme carrés/allumettes pour que celles-ci soient porteuses pour le développement du regard covariationnel.

*À vos maths* présente une caractéristique que nous relevons dans ces situations de généralisation. Comme nous l'avons mentionné précédemment, les questions ne se limitent pas en une proposition de suites arithmétiques. La collection questionne la présence ou l'absence de régularités avant de se pencher sur l'obtention d'une valeur ou d'une formule comme c'est le cas dans l'exemple suivant (voir figure 5.3).

## activités

### 1. Figures en file

Voici trois suites de figures formées avec des objets de la vie courante.



- Est-ce que la suite formée des nombres de cure-oreilles de chaque figure est une suite arithmétique ? Explique ta réponse.
- Est-ce que la suite formée des nombres de trombones de chaque figure est une suite arithmétique ? Explique ta réponse.
- Est-ce que la suite formée des nombres de cure-dents de chaque figure est une suite arithmétique ? Explique ta réponse.
- Dans la 20<sup>e</sup> figure de chaque suite, combien y a-t-il :
  - de cure-oreilles ?
  - de trombones ?
  - de cure-dents ?

**Figure 5.3**

Activité tirée d'*À vos maths*, Manuel C, p. 171.



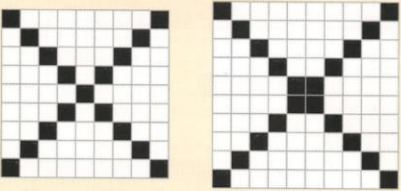
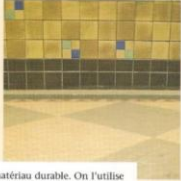
Ces réflexions sont présentes au début du chapitre alors que la recherche de la formule n'a pas encore été mentionnée. Toutefois, pour la recherche de la règle, *À vos maths* présente la façon de trouver la règle de la suite en différentes étapes en partant du fait que cette règle s'écrit sous la forme :  $\text{terme} = \text{rang} \times \text{régularité} + \text{constante/ajustement}$ . Habituellement, les élèves sont amenés à retranscrire les valeurs dans une table de valeurs. Les étapes pour trouver la règle sont alors : 1) trouver la régularité, 2) trouver la constante (aussi nommée l'ajustement). Pour cela, l'élève prend un couple (rang, terme), le remplace dans la règle et trouve ainsi la constante/ajustement, 3) on remplace les valeurs trouvées dans la règle. Ce type de questionnement n'amène pas une observation des accroissements entre les grandeurs et les situations de ce type ont donc été rejetées.

En nous appuyant sur ces constats, plusieurs des situations que nous avons rejetées pourraient être retenues. C'est le cas par exemple de deux situations tirées de *Panoram@th* (voir figures 5.4 et 5.7). L'intervention de l'enseignant dans ces situations peut favoriser un travail sur la covariation. Cependant, dans ce mémoire, nous ne supposons pas sur ce que l'enseignant pourrait faire, nous observons uniquement les questions présentées.

**Unité 13.1 De bonnes résolutions**

**SITUATION-PROBLÈME En noir et blanc**

Charles-François se spécialise dans le carrelage de planchers carrés. Parmi les motifs qu'il propose à ses clients et clientes, le plus populaire est formé de carreaux noirs sur les diagonales et de carreaux blancs sur le reste du plancher. Il faut au moins neuf carreaux pour composer ce motif. En voici deux représentations :

La céramique est un matériau durable. On l'utilise aussi bien dans les revêtements de sol que dans la fabrication de pièces d'ordinateur ou de prothèses dentaires.

Écris les expressions algébriques qui permettent de calculer le nombre de carreaux noirs et de carreaux blancs selon le nombre de carreaux qui forment un côté du plancher.

6 PANORAMA 13

**Figure 5.4** Situation tirée de Panoram@th, Manuel B, Panorama 13. Unité 13. : Prenez votre rang. Vol. 2, p. 6.

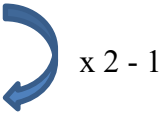
Dans cette situation, il s'agit de trouver des expressions algébriques dans deux cas de figures : pour un nombre pair et pour un nombre impair de carreaux qui forment un côté du plancher, ce qui correspond aux deux représentations présentées. Nous pouvons observer que la grandeur indépendante est donnée par l'utilisation du mot « selon ». L'élève doit avoir pu identifier ces grandeurs dans la situation pour pouvoir trouver les expressions demandées. Cette situation peut se résoudre en utilisant un regard correspondance ou un regard covariationnel. Toutefois, un regard covariationnel est nécessaire pour s'assurer qu'il existe une régularité donc un écart constant entre les valeurs de deux motifs ordonnés, on pourra alors trouver les expressions demandées.

Dans le cas présent, on présume d'emblée l'existence d'une relation et d'une expression algébrique permettant de la décrire. Les collections *Perspective mathématique* et *Panoram@th* donnent des suites de nombres et de figures en présumant qu'elles sont arithmétiques. Ce faisant, l'élève sait qu'il sera en mesure de trouver une régularité si on lui pose la question.

Dans la situation précédente, il faut alors dessiner ou induire d'autres motifs que ceux qui sont proposés, des motifs avec un nombre de carreaux sur le côté qui sera pair et d'autres avec un nombre impair de carreaux sur le côté. Ce type de situations n'a pas été retenu dans notre étude, car elle n'amène pas explicitement à étudier l'écart entre deux motifs et à dégager que celui-ci est additif et constant. Nous ne l'avons pas retenu parce que la production de plusieurs motifs n'amène pas nécessairement à s'intéresser aux accroissements entre eux. On considère que la suite est automatiquement arithmétique puisqu'on cherche une expression algébrique exprimant une régularité. On se penche directement sur les expressions qui vont permettre de trouver le nombre de carreaux noirs et de carreaux blancs pour les planchers. Faisons l'exercice pour un nombre impair de carreaux qui forment un côté du plancher (qui correspond à la première représentation composée de 9 points sur le côté). Si on s'appuie sur un regard correspondance, on peut observer qu'il y aura sur chacune des diagonales de ce plancher autant de carreaux noirs sur une diagonale que de carreaux sur un côté sur ce plancher. Si  $n$  représente le nombre de carreaux sur un côté du plancher, le nombre total de carreaux noirs est  $2 \times n - 1$ , il faut soustraire le carreau noir du centre de la diagonale, celui qui est à la rencontre des deux diagonales et que nous avons compté deux fois. Pour trouver le nombre de carreaux blancs, il suffit de soustraire au nombre total de carreaux qui est représenté par  $n^2$  le nombre de carreaux noirs précédemment trouvé. La recherche de cette expression algébrique s'appuie sur le motif et chacun des éléments de l'expression a un sens sur le motif. D'autres expressions sont possibles qui sont toutes équivalentes, par exemple pour le nombre de carreaux noirs, l'expression correspondante peut être  $\frac{n-1}{2} \times 4 + 1$ . On observe les diagonales en quatre morceaux

constitués chacun de la moitié du nombre de carreaux sur un côté du plancher auquel on lui retranche un (donc pour 9 carreaux sur un côté, on voit les diagonales comme 4 morceaux de 4 carreaux noirs). Il faut dans tous les cas ajouter le carreau du centre. On peut également procéder en faisant une table de valeurs :

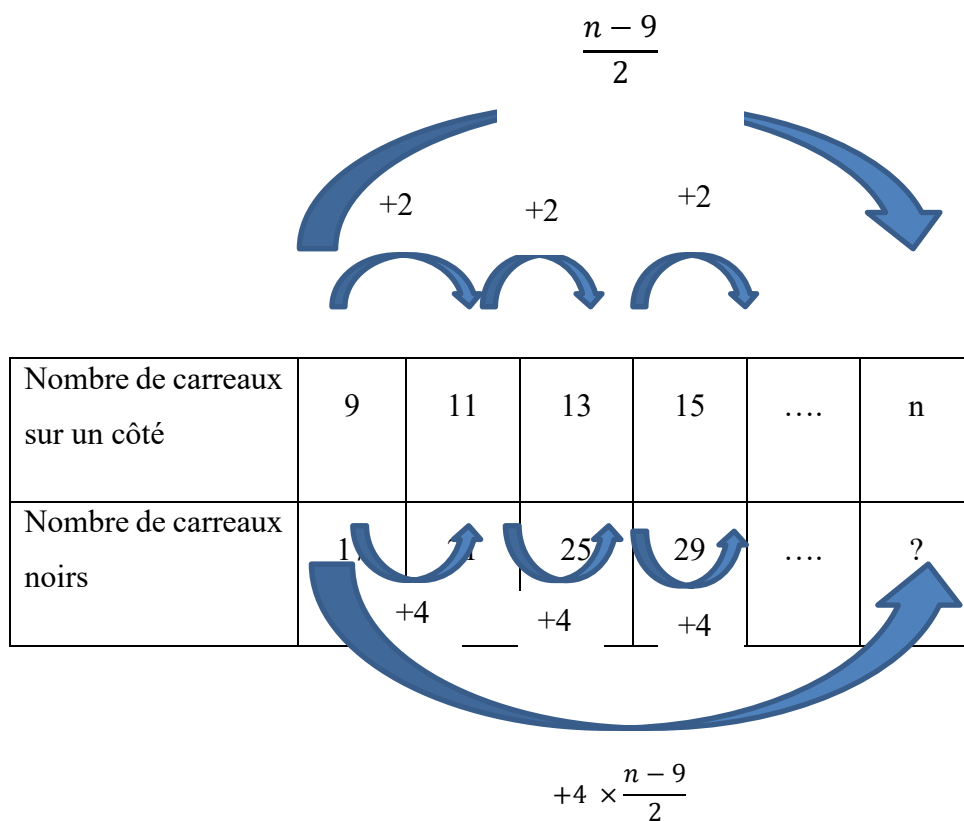
|                                |    |    |    |    |      |   |
|--------------------------------|----|----|----|----|------|---|
| Nombre de carreaux sur un côté | 9  | 11 | 13 | 15 | .... | n |
| Nombre de carreaux noirs       | 17 | 21 | 25 | 29 | .... | ? |



**Figure 5.5** Résolution de la situation dans une perspective correspondance de l'activité tirée de *Panoram@th*, *Panorama 13*, *Unité 13*. *Prenez votre rang*, Vol. 2. p. 6.

Pour trouver 17 comme nombre de carreaux noirs, on peut faire  $9 \times 2 - 1$  et ceci fonctionne pour chacun des nombres de carreaux impairs sur un côté.

Si on exerce un regard covariationnel sur cette situation, il s'agit d'observer les motifs de façon ordonnée et de remarquer que pour passer d'un motif à l'autre (par exemple on peut prendre les motifs qui ont 9 et 11 carreaux sur un côté), il va y avoir 4 carreaux noirs qui seront ajoutés, ce sont ceux qui sont sur chacun des coins du plancher. On peut donc s'appuyer sur le nombre de carreaux noirs précédent et lui ajouter 4 carreaux noirs. Si on a un nombre  $n$  impair de carreaux sur un côté du plancher, il faudra ajouter à 17 qui est le nombre de carreaux noirs qui correspond au plancher qui a 9 carreaux sur un côté autant de fois 4 carreaux que nous aurons fait de motifs ordonnés ayant chacun deux carreaux de plus sur le côté que le motif précédent, c'est le nombre de bonds de 2 que nous avons fait à partir du plancher qui a 9 carreaux sur le côté, il s'agit de  $\frac{n-9}{2}$ . L'expression sera alors  $17 + 4 \times \frac{n-9}{2}$ . Si on reprend la table de valeurs, il s'agit de regarder les bonds correspondants entre les valeurs des deux grandeurs.



**Figure 5.6** Résolution dans une perspective covariationnelle de la situation de l'activité tirée de *Panoram@th, Panorama 13, Unité 13. Prenez votre rang, Vol. 2. p. 6*

La résolution de cette situation requiert la mobilisation d'un point de vue essentiellement local quantitatif (U8 et U9) de la covariation qui repose sur un point de vue global (U1 et U2) pour identifier les grandeurs dépendante et indépendante, mais également la présence de valeurs concomitantes. Toutefois ce sera l'accompagnement de l'enseignant qui permettra de déterminer le regard déployé dans la situation.

La situation des tables d'un restaurant (voir figure 5.7) n'a pas été retenue puisqu'elle présente les mêmes caractéristiques que la situation en noir et blanc précédente (voir figure 5.6).



**Figure 5.7** Situation tirée de Panoram@th, Manuel A, Panorama 7. Unité 7.3 : Prenez votre rang. Vol. 2. p.146.

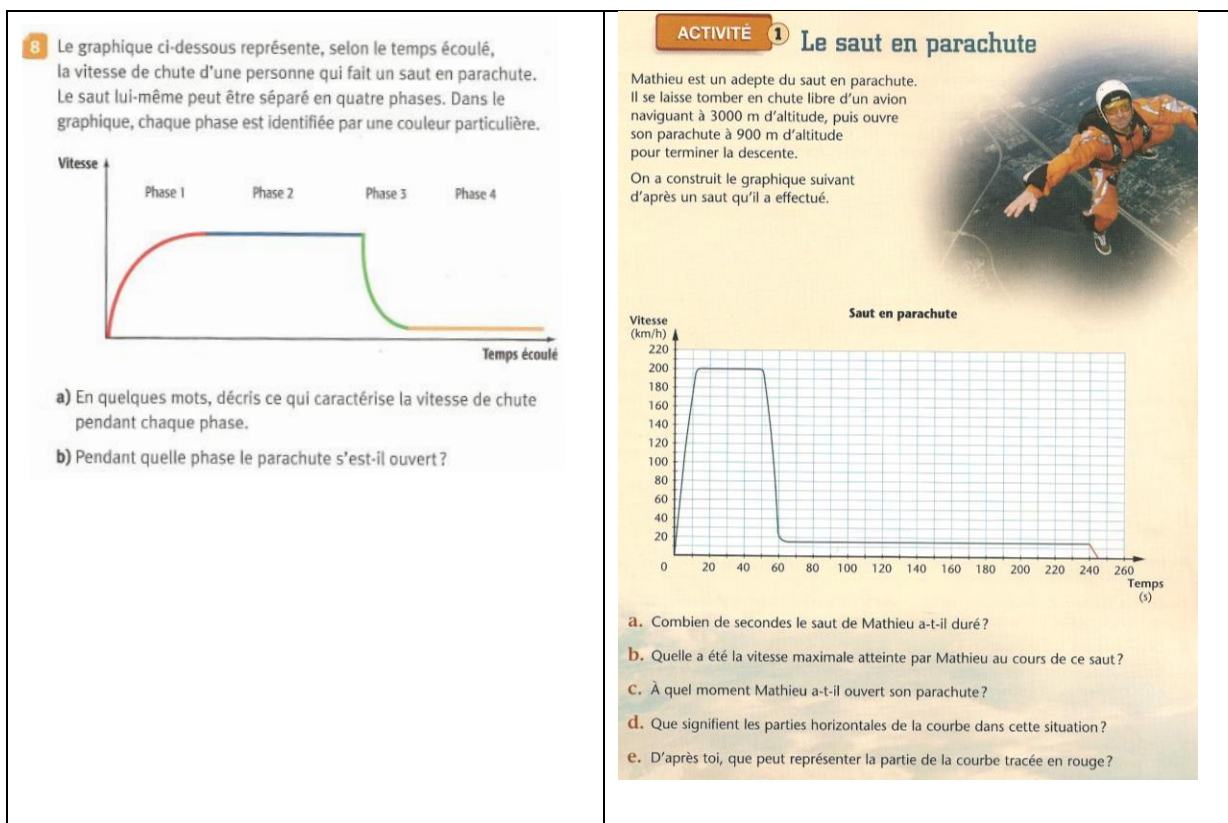
Cette situation repose sur une observation de la relation entre deux grandeurs et la question porte sur la recherche d'une valeur inconnue. Cependant, afin de parvenir à cette valeur manquante, il est nécessaire de dessiner ou de se représenter d'autres motifs de tables pour s'assurer qu'il existe une régularité et qu'il est alors possible de construire une formule qui va permettre de trouver le nombre de tables nécessaires pour accueillir 236 personnes. Le regard est alors porté sur l'observation des valeurs correspondantes des deux grandeurs. On peut constater qu'on a huit personnes pour une table, quatorze personnes pour deux tables, 20 personnes pour trois tables. On est ainsi assuré de la régularité et la formule peut alors être  $8 + 6 \times (n-1)$  où  $n$  est le nombre de tables. On trouvera un total de 39 tables nécessaires pour accueillir 236 personnes. Nous ne retenons pas cette situation parce que le questionnement sur une possible régularité ne nous permet pas de déterminer qu'une étude des variations concomitantes du nombre de tables et du nombre de personnes. Si c'est le cas, il serait mobilisé ici un point de vue local quantitatif (U8 et U9) qui s'appuie sur un point de vue global (U1 et U2) pour identifier les grandeurs dépendante et indépendante, mais également la présence de valeurs concomitantes. On définirait ainsi que plus le nombre de personnes augmente, plus le nombre de tables augmente. L'idée serait ensuite de déterminer que pour chaque table ajoutée, il est possible d'asseoir six personnes de plus. Avec la présence d'une question uniquement ciblée sur la recherche d'une valeur inconnue, il n'est pas possible de déterminer si un regard est enclenché pour construire la formule.

Comme ces situations restent ouvertes, on ne peut savoir quel regard sera utilisé. Ainsi, certaines des situations qui ont été rejetées peuvent être modifiées pour qu'elles favorisent le déploiement d'un regard covariationnel.

### 5.3 Une réflexion autour de la possibilité de modifier des situations présentées dans les manuels scolaires pour viser un travail sur la covariation

Comme mentionné précédemment, plusieurs situations ont été classées dans une « zone grise ». On y percevait un potentiel pour le déploiement d'un regard covariationnel, mais les questions ne favorisaient pas explicitement la mobilisation de ce regard. Il apparaît alors la possibilité d'ajouter des questions ou de modifier certaines VD pour favoriser le regard covariationnel.

Pour mieux comprendre quelles pourraient être ces questions, il nous apparaît pertinent d'observer des situations similaires proposées et retenues dans les différentes collections. C'est le cas du saut en parachute proposé dans *Perspective mathématique* et dans *Panoram@th*, on observe le saut d'un parachutiste à partir d'une représentation graphique (voir figure 5.8).



**Figure 5.8** À gauche : Situation tirée de *Perspective mathématique*, Manuel B, Partie 6. Les représentations graphiques. Vol. 2. p. 153 et à droite, Situation tirée de *Panoram@th*, Manuel B, Panorama 9. Unité 9.2 – Une histoire à raconter. Vol. 1. p. 19.

Dans les deux cas, des questions permettent de s'intéresser aux accroissements entre les grandeurs : « En quelques mots, décris ce qui caractérise la vitesse de la chute pendant chaque phase. » (*Perspective mathématique*, p. 153) et « Que signifient les parties horizontales de la courbe dans cette situation ? D'après toi, que peut représenter la partie courbe tracée en rouge ? » (*Panoram@th*, p. 19). Nous observons cependant une différence entre les deux situations en raison de l'absence de valeurs numériques dans *Perspective mathématique*. La présence de valeurs numériques dans la situation de *Panoram@th* est accompagnée de questions ciblant la recherche de valeurs précises dans la représentation graphique alors que *Perspective* met l'accent sur les variations



entre les grandeurs. Nous considérons qu'en répondant à ces sous-questions fermées proposées dans *Panoramath*, on perd d'emblée l'étude du phénomène général.

Ainsi, bien qu'il soit possible de trouver des contextes similaires dans différentes collections, les questions et les différentes informations données par la contextualisation en plus de l'orientation du questionnement des manuels influencent la possibilité de déployer un regard covariationnel sans implication de l'enseignant. Même si les situations tirées de différentes ressources ne sont pas jugées riches en termes de potentialité pour développer la covariation, il est possible de les modifier, parfois légèrement, pour permettre un travail visant le déploiement de différents points de vue autour de la covariation et donc de différentes unités de raisonnement.

En vue du développement d'un regard covariationnel, nous considérons qu'il serait pertinent, comme nous l'avons précisé dans la section 5.1, de choisir un nombre limité de situations (environ cinq) et de les modifier pour en faire une étude approfondie en s'appuyant sur les trois points de vue et les unités de raisonnement associées. Certaines de ces situations pourraient être caractérisées par différentes VD comme des grandeurs continues ou discrètes, des grandeurs interchangeables, différents types de tracés, avec ou sans valeurs numériques, la possibilité d'observer les relations dans différentes représentations, la présence de plus de deux grandeurs, le temps comme grandeur dépendante et le temps n'est pas une des grandeurs à l'étude. Ainsi, on pourrait choisir la situation du saut en parachute (voir figure 5.8), qui s'appuie sur le temps et demande de décrire une représentation graphique. Une activité riche pour cibler ceci serait : « Voir à travers un tunnel » de *Panoramath* (voir figure 5.9), que l'on retrouve dans *Perspective* dans « Comparaison de rapports ou de taux » (voir figure 5.10) où le temps n'est pas une des deux grandeurs.

**ACTIVITÉ 2 Voir à travers un tunnel**

Il existe plusieurs troubles de la vue. Par exemple, certaines personnes ont de la difficulté à voir de près ou de loin. Une autre anomalie oculaire, appelée *vision en tunnel*, correspond au rétrécissement du champ visuel.

On peut simuler la vision en tunnel à l'aide de l'expérience suivante : on regarde à travers des tuyaux de même diamètre mais de différentes longueurs. Dans les illustrations ci-dessous, chacun des côtés d'un carreau mesure 10 cm.

**Tuyau 1**

Oeil Tuyau Mur Hauteur du champ visuel

**Tuyau 2**

**Tuyau 3**

**Tuyau 4**

**Vision normale**

**Vision en tunnel**

a. 1) À l'aide des quatre illustrations de la page précédente, complète cette table de valeurs.

**Expérimentation de la vision en tunnel**

|                              |  |  |  |  |
|------------------------------|--|--|--|--|
| Longueur du tuyau (cm)       |  |  |  |  |
| Hauteur du champ visuel (cm) |  |  |  |  |

2) Pour chacun des couples de la table de valeurs, calcule le produit des valeurs associées. Que remarques-tu ?

3) Qu'advient-il de la hauteur du champ visuel si la longueur du tuyau :

a) double?                      b) triple?                      c) quadruple?

**Figure 5.9** Situation tirée de Panoram@th, Manuel B, Panorama 11. Unité 11.2  
– Du pareil au même. Vol. 1. p. 116-117.

## La comparaison de rapports ou de taux

### Activité 1 L'expérience du cylindre



Place deux feuilles de papier comme illustré ci-dessus.



Enroule-les ensemble pour obtenir la forme d'un cylindre.

En tenant le cylindre de papier à deux mains, il doit être facile de modifier à volonté sa longueur ainsi que le diamètre de son ouverture. Fais quelques essais pour t'en assurer.

- a) En regardant avec un œil à travers l'ouverture du cylindre, observe un mur de la classe. Qu'arrive-t-il si tu modifies le diamètre ou la longueur du cylindre ? Est-il possible que tu voies exactement la même portion du mur ?
- b) Précise si la portion du mur que tu vois à travers le cylindre augmente ou diminue
  - 1) si tu augmentes le diamètre du cylindre ;
  - 2) si tu diminues le diamètre du cylindre ;
  - 3) si tu augmentes la longueur du cylindre ;
  - 4) si tu diminues la longueur du cylindre.
- c) La portion du mur que l'on peut voir à travers le cylindre est déterminée par le rapport du diamètre du cylindre à la longueur de ce cylindre. Donne deux façons d'augmenter ce rapport.



**Figure 5.10** Activité tirée de *Perspective mathématique*, Manuel B, Partie 6. Les représentations graphiques. Vol. 2. p.153.

On observe, comme dans la situation du saut en parachute que *Perspective mathématique* propose une approche qualitative alors que *Panoramath* penche pour une approche quantitative visant à explorer les variations quantitatives entre les valeurs des deux grandeurs. Nous proposons d'ajouter un questionnaire sur les grandeurs en jeu en vue de miser sur un point de vue global de la covariation à travers les premières unités de raisonnement (de U0 à U2). On peut ainsi demander les grandeurs qui peuvent être étudiées dans cette situation et en faire ressortir plusieurs : la longueur du tuyau, le diamètre du cylindre, la distance de la personne avec le mur et la portion du mur observée,... et d'en choisir ensuite deux. De plus, il n'y a pas de relation de prédominance entre ces grandeurs, alors il est possible de s'appuyer sur celle de notre choix pour observer la relation. Ces grandeurs sont interchangeable. Axer sur une

description verbale de la relation entre les deux grandeurs nous semble essentiel pour s'assurer d'un choix réfléchi des grandeurs en jeu, de la relation de prédominance entre les deux grandeurs et de l'influence de l'une sur l'autre avant d'adopter un regard sur les variations.

Ainsi il serait possible d'ajouter les questions suivantes qui visent un regard sur la covariation, pour amener à faire « bouger » les valeurs des grandeurs de façon contrôlée pour pouvoir en décrire l'effet :

- Si tu modifies l'une des grandeurs, y a-t-il un effet sur l'autre grandeur et si oui quel est cet effet ?
- Peut-on choisir l'une et l'autre de ces grandeurs comme grandeurs dépendante et indépendante ?
- Est-on capable de repérer des phases dans lesquelles la variation entre les deux grandeurs change ?
- Si tu veux caractériser les accroissements entre les deux grandeurs, quel accroissement peut-on prendre et pour laquelle des grandeurs ?

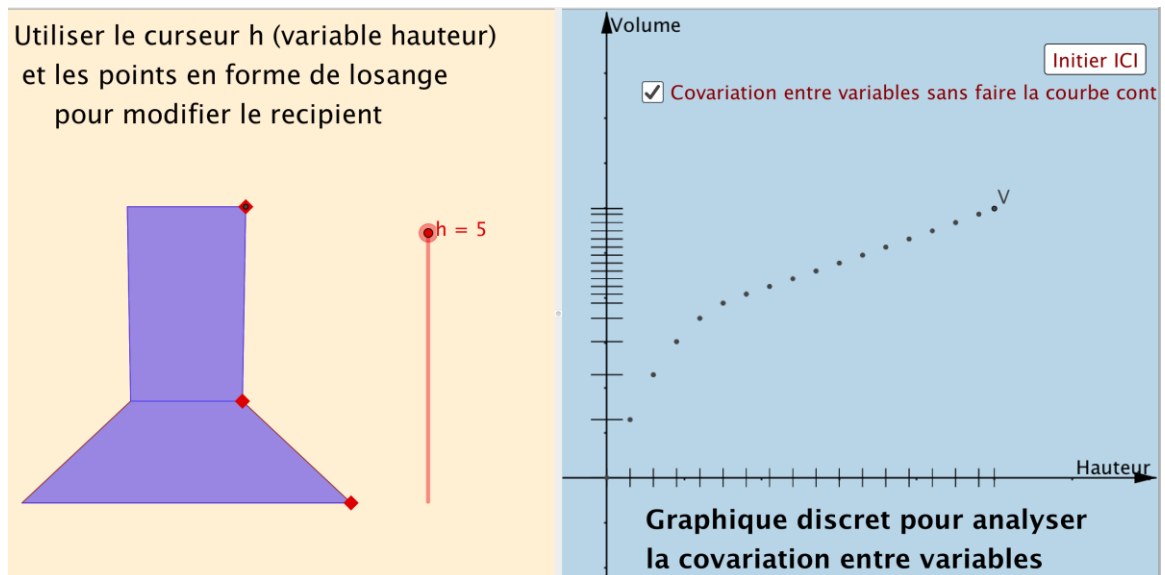
Ces questions sont dans la représentation de la description verbale comme représentation de départ et d'arrivée. En outre, il est possible de donner de feuilles aux élèves afin qu'ils fassent l'expérience, qu'ils puissent observer la relation en manipulant. Il est également possible de ne pas utiliser de matériel et de s'appuyer sur un schéma pour observer la relation entre les grandeurs. Par la suite, cette relation peut être étudiée dans différentes représentations comme le schéma, la table de valeurs et même le graphique en ciblant ainsi le point de vue quantitatif à travers le déploiement des unités de raisonnement (U8 et U9) en y ajoutant des valeurs.

Toutefois, comme nous l'avons évoqué précédemment (voir 5.2), la production d'une table de valeurs n'amène pas nécessairement le déploiement d'un regard covariationnel. Il faut pousser les élèves à regarder les accroissements entre les valeurs concomitantes par exemple en guidant leur regard comme suit : « Si on ajoute une

valeur constante à une des valeurs de la grandeur indépendante, que se passe-t-il pour la valeur correspondante de la grandeur dépendante ? ». Dans la représentation graphique, Passaro et Deblois (2020, p. 24)) proposent de formuler des questions du type : « Que se passe-t-il entre les points ? » ou « Comment les grandeurs varient-elles ? ». Ainsi les tables de valeurs et les représentations graphiques ne seront pas construites uniquement avec un regard correspondance. L'étude proposée dans les figures 5.9 et 5.10 est également possible pour deux autres grandeurs, comme par exemple le diamètre du tuyau et la portion du mur.

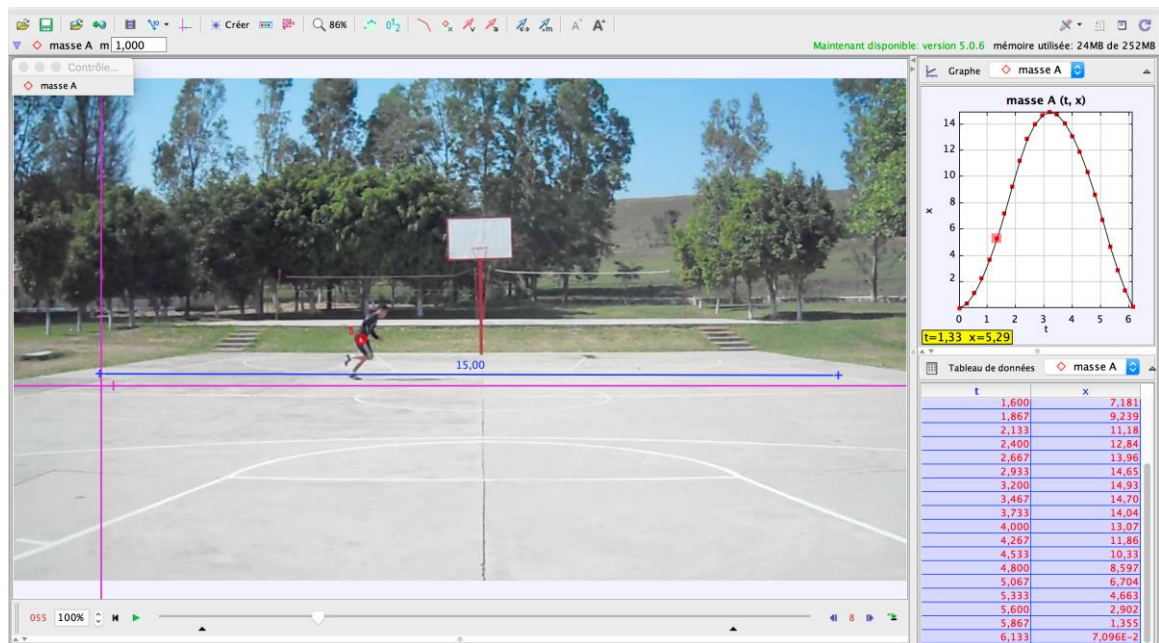
Nous soulignons l'importance de former les enseignants pour reconnaître le potentiel des situations pour favoriser un regard covariationnel et de reconnaître les VD en jeu. Ceci leur permettra de pouvoir modifier les situations afin de viser la mobilisation des trois points de vue de la covariation, global qualitatif, local qualitatif et local quantitatif autour de situations avec des VD variées développant ainsi chez les élèves un regard sur la covariation qui prend place dans une variété de situations. Ce regard pourra alors être réinvesti lors de l'étude des fonctions.

Pour finir, nous aimerions discuter du rôle de la technologie dans les manuels scolaires en lien avec la covariation. Nous pouvons observer que le recours à la technologie est presque inexistante dans les chapitres des collections des manuels que nous avons analysés. Dans son recueil de notes de cours destiné à des futurs enseignants de mathématiques au secondaire, Hitt (2021) propose des pistes intéressantes de situations covariationnelles qui sont étudiées grâce à Geogebra. Un exemple utilisé est celui de la bouteille (voir figure 5.11) :



**Figure 5.11**      Activité tirée des notes du cours, production interne (Hitt, 2021).  
MAT3225 Didactique de la variable et des fonctions.

De plus, Hitt (2021) propose d'utiliser le logiciel Tracker pour recueillir des données et analyser ces données avec Geogebra. Il donne comme exemple l'étude de la course d'une personne qui traverse un champ de jeu en courant (voir figure 5.12).



**Figure 5.12** Image provenant du logiciel tracker où l'on voit le déplacement du coureur ainsi que les représentations graphiques, tabulaires et sous forme de formule.

Ce sont des pistes porteuses pour travailler la covariation entre grandeurs dans des situations dynamiques.

## CONCLUSION

L'introduction du concept de fonction, concept central dans les programmes d'études particulièrement au Québec au deuxième cycle du secondaire (élèves de 15 ans et plus) a motivé la présente recherche. Ce concept est toutefois complexe et on lui reconnaît une variété de conceptions. Plusieurs chercheurs mettent en évidence une étude de la fonction à travers deux regards qui sont complémentaires : correspondance et covariationnel. L'enseignement actuel mise davantage sur le regard correspondance au détriment du regard covariationnel. Dans le prolongement de travaux qui reconnaissent le potentiel du développement du regard covariationnel comme précurseur au concept de fonction, nous nous sommes attardés à ce qui est proposé et ce qui peut être fait au 1<sup>er</sup> cycle du secondaire, en nous tournant vers l'étude de trois collections de manuels scolaires québécois. Notre étude a ainsi été guidée par l'objectif de recherche qui est formulé comme suit : « Analyser les collections de manuels du premier cycle du secondaire pour en dégager leur potentiel quant aux situations susceptibles de développer une approche covariationnelle de la fonction ». Cet objectif donne lieu à deux questions de recherche dont les réponses obtenues à l'aide des résultats seront discutées. Précisons toutefois que la mobilisation d'un regard covariationnel n'est pas une intention explicitée par aucun des auteurs des trois collections de manuels scolaires, c'est notre lecture des situations proposées qui nous a guidé lors de l'analyse.

### **Retour sur les deux questions de recherche**

Rappelons la première question de recherche : Avant tout apprentissage formel du concept de fonction, quels sont les indices (questions et contexte) qui permettent de relever un potentiel covariationnel dans une situation?



Tout d'abord, l'absence de contexte, réaliste ou fantaisiste, disqualifiait automatiquement certaines tâches de notre analyse puisque nous nous appuyons sur la définition de Passaro (2015, p.53) : « Une approche covariationnelle est une manière de travailler la fonction en situation. » Ensuite, l'étude des questions a été déterminante quant aux choix des situations retenues. Celles comportant des questions ciblant les points de vue de la covariation (global, qualitatif local et/ou quantitatif local) ont été retenues. La grille (voir tableau 5.1) a ainsi été utilisée pour discerner les situations susceptibles de travailler la covariation. Toutes ces situations comportent donc des questions qui requièrent pour y répondre une étude sur les accroissements entre les grandeurs et/ou sur une réflexion autour de la relation entre deux grandeurs. Dans l'ordre suivant : *Perspective mathématique*, *À vos maths* et *Panoram@th*, nous avons rejeté (69% - 95% - 86%) des situations comme plusieurs comportent uniquement des questions ciblant un regard correspondance entre les grandeurs. Nous avons relevé des situations qui se trouvent dans une « zone grise » en raison d'un questionnement « ouvert ». La procédure de résolution retenue par l'élève ou encore l'orchestration didactique menée par l'enseignant dans la classe pourront développer autant les regards correspondance que covariationnel comme il serait aussi possible d'en préconiser un seul. Ces situations ont conduit à la formulation de recommandations relativement au questionnement qui peut favoriser le regard covariationnel.

La deuxième question de recherche s'énonce comme suit : *Quelles sont les caractéristiques des situations issues de manuels scolaires du premier cycle du secondaire (élèves de 12-14 ans) pour développer la covariation?* Cette question se décline en trois sous-questions : un regard sur les représentations (sous-question 1) et un regard sur les autres 19 variables didactiques (sous-question 2), et ce, dans chacune des collections. La troisième sous-question porte sur un regard transversal entre les trois collections. Pour répondre à ces trois sous-questions, nous intégrons dans les deux premières sous-questions la troisième sous-question.

- 1) Pour chacune des collections, quels sont les passages entre les représentations les plus présentes dans les situations ayant un potentiel pour développer la covariation dans les manuels du 1<sup>er</sup> cycle du secondaire?
- 3) Quelles sont les comparaisons et distinctions entre les différentes collections au regard de la covariation?

La grille utilisée pour étudier les passages entre les représentations (voir tableau 5.2) a permis de relever que les représentations *graphique* et *description verbale* sont les représentations les plus utilisées dans les situations retenues. Dans toutes les collections, il est fréquemment demandé aux élèves de décrire un graphique (passage de graphique à description verbale), de tracer un graphique (de description verbale à représentation graphique) et de répondre en mots à une question en mots (de description verbale à description verbale). Dans ces descriptions verbales, nous relevons deux expériences, celle des pendules de *Perspective mathématique* et celle des balles et rebonds de *Panoram@th*. Le schéma, la table de valeurs sont aussi deux représentations utilisées dans les trois collections, mais à une moins grande fréquence parmi les situations retenues. Bien que les tables de valeurs soient fréquentes dans les manuels, peu de situations avec cette représentation ont été retenues puisque les questions ciblaient souvent le regard correspondance. D'autres représentations sont présentes dans les différentes collections en moindre mesure. *À vos maths* est la collection qui privilégie des situations formulées sous la description verbale dont la solution sera aussi dans la même représentation. Le questionnement cible alors la présence ou l'absence de relation dans la situation proposée. Rappelons que la représentation ne permet pas, à elle seule, de reconnaître le regard covariationnel d'une situation. Il a ainsi été relevé que la présence, dans la mise en contexte, d'une formule avec des questions ciblées vers la recherche de valeurs d'une des grandeurs mène directement vers un regard correspondance.

- 2) Pour chacune des collections, quelles sont les autres variables didactiques qui caractérisent les situations qui favorisent la covariation dans les manuels du 1<sup>er</sup> cycle du secondaire ?

### 3) Quelles sont les comparaisons et distinctions entre les différentes collections au regard de la covariation?

Grâce à aux différents tableaux d'analyse des variables didactiques (VD) (un tableau pour chaque collection), nous avons pu relever que parmi les situations retenues, les deux grandeurs à étudier sont souvent données et que la relation entre les grandeurs est souvent imposée. De plus, nous remarquons qu'un grand nombre de situations retenues ont des grandeurs admettant des valeurs continues (VD3 : 23-7-26)<sup>40</sup> dont une grande majorité s'appuient sur le temps (VD6 : 15-6-20). Les grandeurs admettant des valeurs discrètes sont moins nombreuses (VD4 : 2 – 1 – 3) et très peu de situations présentent des valeurs négatives (VD5 : 0 – 0 – 4). Ainsi l'étude est souvent faite dans les mêmes intervalles de valeurs, les réels positifs ou les entiers positifs dans le cas de valeurs discrètes.

La collection *Perspective mathématique* mise sur un point de vue global qualitatif à travers treize situations sur 24 qui ne présentent pas de valeurs numériques (VD2). Ces situations sont toutes dans une *Partie du manuel* portant sur les représentations graphiques nécessitant une interprétation qualitative des relations. Les deux autres collections proposent également des situations sans valeurs numériques pour les grandeurs (VD2 : 13 – 4 – 8) et qui sont intéressantes pour une description qualitative de la relation mais elles sont dispersées dans différentes parties du manuel et peu nombreuses si on considère l'ensemble des situations disponibles.

*À vos maths* a permis d'ajouter deux VD à notre analyse, la VD18 (Absence de relation) et la VD19 (Grandeurs définies par l'élève). En effet, cette collection questionne la présence ou l'absence de régularités dans des contextes réalistes. Elle amène ainsi l'élève à se questionner sur les possibles grandeurs en jeu et sur l'existence d'une

---

<sup>40</sup> Les fréquences de cette VD et les suivantes sont dans l'ordre : (*Perspective mathématique* – *À vos maths* – *Panoram@th*). Rappelons que le nombre total de situations retenues est : (24 – 8 – 28).

relation entre les grandeurs ce qui favorise la mobilisation du point de vue global de la covariation à travers les premières unités de raisonnement.

Autour des VD qui ciblent directement les représentations graphiques, certaines situations retenues présentent des graphiques avec différents types de tracés (VD10 : 6-1-6). Ces situations permettent de porter une attention particulière sur différents types de variations entre les deux grandeurs, lorsque ces interprétations sont sans valeurs numériques, l'interprétation des différentes phases est qualitative. Nous retrouvons aussi plusieurs représentations graphiques pouvant être confondues avec le déplacement d'un objet (VD12 : 10 – 0 – 8). Comme évoqué précédemment, on dénombre une grande fréquence de situations impliquant le temps qui mènent à l'interprétation de tracés selon la hauteur d'un objet ou d'une personne selon le temps écoulé. Le temps est majoritairement la grandeur indépendante ou prédominante. Finalement, nous constatons un grand nombre de situations nécessitant des connaissances physiques (VD17 : 12 – 6 – 22) comme dans le cas du saut en parachute où l'on associe l'ouverture du parachute à une grande diminution de la vitesse en peu de temps.

En conclusion, nous pouvons observer que les approches dans chacune des trois collections s'appuient majoritairement sur un point de vue de la covariation différent. *Perspective mathématique* le fait en privilégiant sur un point de vue local qualitatif de la covariation en grande partie à travers le graphique. *Panoram@th* mise plutôt sur un point de vue quantitatif des accroissements. Les graphiques et les descriptions verbales sont souvent agrémentés de valeurs numériques comme points de repères. *À vos maths* sollicite la mobilisation du point de vue global de la covariation mais permet à peu de reprises l'étude des deux autres points de vue alors que pour les deux autres collections, les points de vue local qualitatif et local quantitatif s'appuient sur le point de vue global sans que celui-ci soit toutefois directement sollicité. Cependant, *À vos Maths* est la seule collection où l'on remarque des tâches qui amènent parfois l'élève à se

positionner comme enseignant alors qu'il doit interpréter des productions d'élèves fictifs. Nous n'avons pas relevé ce type de situations dans les deux autres collections.

### **Limites de cette étude**

Pour notre étude, nous avons choisi les trois collections (*Perspective mathématique*, *À vos maths* et *Panoram@th*). Nous sommes conscients que d'autres situations sont utilisées par les enseignants, situations qui peuvent avoir un fort potentiel pour mobiliser le regard covariationnel, qu'elles proviennent de manuels scolaires autorisés ou d'une autre source. En fait, nous nous sommes limités aux manuels approuvés par le ministère de l'éducation au moment où la rédaction du mémoire a débuté. Ces dernières années, les collections ont été remplacées par des cahiers d'apprentissage dans lesquels on retrouve essentiellement des exercices ou par des cahiers maison produits par les enseignants. Ces cahiers d'apprentissage proviennent des mêmes maisons d'édition que celles analysées dans ce mémoire. Nous avons donc un point de vue restreint sur ce que les enseignants ont à leur disposition. Cependant, un nombre suffisant (60) situations ont été retenues et en ajoutant quelques questions aux multiples contextes déjà disponibles, il est possible de cibler le regard souhaité (covariationnel, correspondance, les deux).

De plus, comme nous l'évoquions dans le chapitre V, les sections analysées dans les manuels n'ont pas été conçues en considérant le regard covariationnel. Cela limite le nombre de situations ayant le potentiel d'être sélectionnées.

### **Des retombées de cette recherche**

Cette recherche permet à la communauté en didactique des mathématiques d'observer l'exploration et les avancées sur le regard covariationnel à ces premiers balbutiements, au premier cycle du secondaire. De plus, le mémoire propose une avancée quant aux

réflexions théoriques autour de la covariation en prenant en considération 20 variables didactiques pour caractériser une situation une fois que son potentiel covariationnel a été pointé. Dans la communauté de pratique, les résultats obtenus dans ce mémoire et les outils développés peuvent servir lors de la formation initiale et continue. Nous pensons que le tableau qui présente trois points de vue de la covariation ainsi que le tableau des représentations et celui des 19 autres variables didactiques sont des outils qui peuvent être réinvestis dans ces deux communautés. Ainsi, les enseignants pourraient se servir de ces outils afin d'identifier le ou les points de vue de la covariation pouvant être mobilisés dans une situation mais également pour formuler des questions qui vont permettre le recours à un de ces points de vue. Nous souhaitons ainsi promouvoir dès le premier cycle du secondaire, une prise de conscience sur l'importance de développer chez les élèves les deux regards correspondance et covariationnel de la fonction et de donner aux enseignants les moyens de le faire à travers un choix stratégique mais également des changements possibles aux situations proposées dans leurs ressources.

### **Des pistes pour des recherches ultérieures**

Cette recherche cible des situations et des questions qui peuvent être proposées à des enseignants et à des élèves. Comme prolongement, il serait intéressant de travailler conjointement avec des enseignants à travers une recherche collaborative pour élaborer des situations susceptibles de développer le regard covariationnel au premier cycle du secondaire. Ces situations pourraient être expérimentées avec les élèves en ayant le regard pratique de l'enseignant sur les outils proposés. Ces derniers seront probablement revus et modifiés à la lumière de leur pratique.

## ANNEXE A

### Des difficultés recensées autour du concept de fonction

Bien que le concept de fonction soit central pour l'enseignement-apprentissage des mathématiques au secondaire, il amène son lot de difficultés pour plusieurs élèves et étudiants comme le rapporte Passaro (2015) :

En effet, la recherche en didactique des mathématiques a largement mis en évidence les difficultés rencontrées par les élèves du secondaire (Janvier, 1993; Sajka, 2003), les étudiants du collégial et de l'université (Beichner, 1994; Carlson, 1998; Monk, 1992) et même les enseignants (Hitt, 1998) lors de la réalisation de tâches sur les fonctions. (Passaro, 2015, p. 15).

Plusieurs recherches, dont celles de Sajka (2003) et de Passaro (2015), s'appuient sur cette œuvre pour bâtir leur argumentaire. Dans ce livre, Sierpinska (1992) relève les difficultés de compréhension du concept de fonction en s'appuyant sur son évolution historique. Elle rapporte des difficultés recensées en lien avec l'écriture symbolique, mais également des difficultés lors de l'utilisation de ce concept, et ce, depuis ses premières traces explicites. Plusieurs de ces difficultés sont explicitées dans l'annexe A, surtout celles en lien avec l'écriture symbolique, nous avons fait le choix de ne pas les inclure dans ce chapitre pour ne pas alourdir la lecture. Dans cette section, nous axons essentiellement sur les difficultés en lien avec la covariation et plus précisément sur la *variable* qui est intimement liée à la covariation. La lettre vue comme une *variable* est un des sens ou une des interprétations attribuables.

Comme nous l'avons précisé dans le chapitre I, le passage du premier au deuxième cycle du secondaire correspond à un passage entre un apprentissage axé sur la résolution d'équations dans lequel la lettre prend le sens d'inconnue à une réflexion qui repose sur le sens de la lettre variable. Ce sont deux sens différents de la lettre qui sont sollicités parmi d'autres sens. Küchemann (1981) identifie six catégories d'interprétation de la lettre en algèbre : la lettre évaluée, la lettre ignorée, la lettre objet, l'inconnue spécifique, le nombre

généralisé et la variable, ces catégories sont associées à quatre niveaux de compréhension de l'algèbre. Au niveau 1, les trois premières interprétations de la lettre sont sollicitées (la lettre évaluée, la lettre ignorée et la lettre objet), l'élève serait alors capable de répondre à des questions uniquement numériques. Au niveau 2, l'élève manipule le symbolisme algébrique, mais ce n'est qu'au niveau 3 qu'il accepte les expressions et travaille sur la lettre comme une inconnue spécifique. Au niveau 4, l'élève traite la lettre comme un nombre généralisé ou une variable.

La recherche de Jeannotte (2012) reprend ces niveaux de compréhension de l'algèbre selon un test du Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS). La chercheuse remarque que 95% des élèves de son échantillon (secondaire 2 et 3) au Québec ont atteint le niveau 2 permettant des manipulations symboliques sans trop de difficultés. Cependant, peu d'élèves (17,3% et 23,2% respectivement en secondaire 2 et 3) atteignent le quatrième niveau de compréhension où ils interprètent la lettre algébrique comme une variable (ou un nombre généralisé). La conception qu'ont les élèves de la lettre dans la représentation symbolique d'une fonction peut s'avérer un obstacle non-négligeable.

### **Des difficultés reconnues avec la notation symbolique : vers la lettre variable**

Plusieurs chercheurs abondent autour de difficultés liées à la compréhension de la notation symbolique expliquant que derrière la notation de fonction se cache beaucoup d'informations qui n'est pas accessible à tous. C'est dans cette optique que plusieurs chercheurs ont ciblé l'écriture symbolique du concept de fonction pour en faire l'étude explicite. Voici ce que Sierpiska (1992) avance dans son analyse épistémologique du concept de fonction :

*Lack of algebraic awareness makes understanding of functions very difficult if not impossible. On the other hand, algebraic skill accompanied by the belief in the power of algebra to solve almost automatically many kinds of problems, may be an impediment to understanding the general concept of function. (p.45).*

Selon elle, il est donc très difficile, voire impossible, de se lancer dans l'apprentissage du concept de fonction tel qu'il est institutionnalisé sans avoir une bonne connaissance d'une forme d'algèbre et du symbolisme qui lui est associé. Par ailleurs, les travaux de Gray et Tall (1994), Sajka (2003) et Sfard (1991) s'attardent surtout sur l'interprétation chez l'élève



du concept de fonction à travers les différentes notations symboliques. À cet effet, Sajka (2003) s'intéresse à répondre à la question suivante : comment le concept de fonction est compris par une élève et dans quelle mesure une fonction est pour cette élève un objet mathématique complet et développé? À travers une entrevue menée avec une élève du secondaire, elle relève plusieurs difficultés liées à la tâche non routinière suivante : « Donner un exemple de fonction  $f$  pour laquelle l'égalité suivante est vraie :  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  pour  $x$  appartenant aux réels ». Les difficultés recensées tournent autour de la compréhension de la notation fonctionnelle.

Elle présente certaines « visions erronées » de cette élève selon des conceptions établies (Sierpinska, 1992 et Sfard, 1992) nuisant à la compréhension du concept telles que :  $f$  est traitée comme une lettre étiquette ou simplement l'abréviation du mot fonction,  $f(x)$ ,  $f(y)$  et  $f(x+y)$  représentent trois fonctions différentes, la notation  $f(3)$  est confondue avec le zéro de la fonction ou ayant les règles multiplicatives d'une équation  $f(3) = f \times (3)$ . L'un des obstacles déterminés par Sajka est d'arriver à distinguer l'équation et l'écriture algébrique de la fonction. Cette vision est partagée par Sfard (1992) qui utilise la nature double du concept de fonction; comme processus et comme objet, pour rappeler ses origines opérationnelles : «*She (Sfard) sees a dual nature to mathematical conceptions; they have an operational (process) and a structural (object) mode. Individuals start by engaging in computational processes, which leads them to an operational conception.* » (Selden et Selden, p.11).

Cette double nature, intrinsèque à la fonction, peut-être vue comme deux faces d'une même pièce, donc complémentaires. L'auteure rapproche la vision de la fonction à la réflexion sur le sens de la lettre. L'idée fonctionnelle d'une écriture algébrique apparaît lorsque « la lettre » est interprétée comme une quantité variable plutôt que d'être vue uniquement comme une quantité inconnue. Cette dernière difficulté amène à considérer les différents statuts de la lettre dans une formule et dans une équation. Voici une difficulté qui est d'un des obstacles épistémologiques relevé par Sierpinska (1992, p. 37-38) :

*This obstacle – an unconscious scheme of thought – was described as thinking in terms of equations and unknowns to be extracted from them. Overcoming this obstacle requires discrimination between two modes of mathematical thought: one*

*in terms of known and unknown quantities, the other – in terms of variable and constant quantities.*

En fait, lorsque l'on s'intéresse à une relation entre des valeurs connues et inconnues, la représentation symbolique se nommera « équation ». Tandis que lorsqu'on représente une relation entre des quantités variables et constantes, l'on parlera d'une « fonction ».

Certaines difficultés résident aussi dans l'introduction d'un nouveau symbole «  $f(x)$  » ayant plusieurs propriétés dont celle de représenter une infinité d'équations avec des valeurs variables. La confusion est pratiquement inévitable et probablement que cette subtilité n'est même pas remarquée par les élèves en apprentissage. De plus, ces éléments sont présents dès le premier cycle du secondaire (12 à 14 ans) avec un changement de statut de la lettre (passage d'inconnue vers variable). Ceci demande une compréhension des notions de : variable, relation de dépendance ainsi que les représentations associées aux fonctions qui sont difficiles pour les élèves lors de l'apprentissage du concept de fonction.

La grande place et la grande portée dans l'apprentissage des mathématiques scolaires au deuxième cycle du secondaire (et même après) du concept permet difficilement d'exposer en quelques lignes tous les liens avec les notions présentées dans la section 1.2.1. Cependant, au fil de l'étude des différentes fonctions institutionnalisées (linéaire, exponentielle, racine carrée, rationnelle, etc.), il est possible de voir l'importance des premières présences explicites des concepts de variables, grandeurs et des représentations pour les relations.

Dans le contexte québécois, l'étude des fonctions se poursuit au-delà des études secondaires avec les cours de calcul différentiel, de calcul intégral, d'algèbre linéaire, etc. Le concept est central dans l'enseignement des mathématiques dès le premier cycle du secondaire jusqu'aux études universitaires.

## ANNEXE B

Tableaux d'analyse des caractéristiques des situations utilisées dans les recherches antérieures sur la covariation. Tirée de Passaro (2017, Annexe 3, p. A-18)

Tableau 3-A Caractéristiques des énoncés des situations proposées pour travailler la covariation dans les recherches antérieures

| Recherche                       | Âges et/ou niveaux des sujets visés | Contexte(s)                                                                                                                                                                                                                                                  | Modèle réduit disponible                                | Registres de représentation fournis                                                 | Grandeurs étudiées                                                                                |
|---------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Piaget, 1968                    | 6 à 12 ans                          | Rectangle qui change de dimensions mais qui conserve le même périmètre                                                                                                                                                                                       | Oui                                                     | Verbal                                                                              | Longueurs                                                                                         |
| Vollrath, 1986                  | 4 à 15 ans                          | Boule qui roule sur un plan incliné                                                                                                                                                                                                                          | Oui                                                     | Verbal                                                                              | Positions de l'objet                                                                              |
| Monk, 1992                      | Collégial                           | <b>Échelle qui glisse le long d'un mur</b> <sup>37</sup>                                                                                                                                                                                                     | Oui                                                     | Verbal                                                                              | Longueurs puis vitesses                                                                           |
| Saldanha et Thompson, 1998      | 8 <sup>ème</sup> année (13-14 ans)  | Voiture qui se déplace sur une route se rapprochant et s'éloignant de deux villes situées de part et d'autre de la route                                                                                                                                     | Non                                                     | Verbal, figural et modèle sur ordinateur                                            | Distances                                                                                         |
| Carlson, Larsen et Jacobs, 2001 | Collégial                           | 1) Construction d'une boîte avec un volume maximal<br>2) Déplacement d'une personne<br>3) Relation physique? <sup>38</sup><br>4) <b>Échelle qui glisse le long d'un mur</b><br>5) <b>Vase qui se remplit</b>                                                 | Non                                                     | 1) Verbal<br>2) graphiques<br>3) ND<br>4) Verbal et figural<br>5) Verbal et figural | 1) volume et longueur<br>2) distance et temps<br>3) ND<br>4) vitesse et ?<br>5) hauteur et volume |
| Carlson et al. 2002             | Collégial                           | 1) <b>Bouteille qui se remplit</b><br>2) Variation de la température au cours du temps<br>3) <b>Échelle qui glisse le long d'un mur</b>                                                                                                                      | Non                                                     | 1) Verbal et figural<br>2) Verbal et graphique<br>3) Verbal                         | 1) hauteur et volume<br>2) variation de température et temps<br>3) vitesse et?                    |
| Passaro, 2007                   | Deuxième secondaire (13-14 ans)     | Randonneur qui marche sur une piste                                                                                                                                                                                                                          | Non                                                     | Verbal et figural                                                                   | Distances                                                                                         |
| Hitt et Morasse, 2009           | Troisième secondaire (14-15 ans)    | 1) Photographe qui se déplace sur le trottoir et qui photographie une statue<br>2) Randonneur qui marche sur une piste<br>3) Jacuzzi qu'on recouvre d'une toile<br>4) Carrés mouvants<br>5) L'ombre d'une personne qui marche dans la rue sous un lampadaire | 1), 3), 4) et 5) : Non<br>2) du matériel est disponible | Verbal et figural                                                                   | 1) Distances<br>2) Distances<br>3) longueur et aire<br>4) angle et aire<br>5) distance/longueur   |

## ANNEXE C

Fiche Excel des situations retenues, exemple pour *Perspective mathématique*.

[illegible]

## RÉFÉRENCES

- Antoun, Z. (2012). *Analyse des situations d'apprentissage dans le cadre de la résolution de problèmes en algèbre (premier cycle) dans une collection du secondaire*. (Thèse de doctorat) Université du Québec à Montréal. Récupéré de <http://archipel.uqam.ca/id/eprint/5329>
- Assude, T., et Margolinas, C. (2005). Aperçu sur les rôles des manuels dans la recherche en didactique des mathématiques. *Manuels scolaires, regards croisés*, 231-241. Récupéré de [http://eda.recherche.parisdescartes.fr/wp-content/uploads/sites/6/2019/03/3\\_3\\_Maths\\_1.pdf](http://eda.recherche.parisdescartes.fr/wp-content/uploads/sites/6/2019/03/3_3_Maths_1.pdf)
- Barallobres, Gustavo. (2009). Caractéristiques des pratiques algébriques dans les manuels scolaires québécois. *Petit x*, 80, 55-76. Récupéré de <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PX/IGR09010/IGR09010.pdf>
- Bardin, L. (2013). *L'analyse de contenu*. Paris : PUF. Récupéré de <https://www.cairn.info/l-analyse-de-contenu--9782130627906.htm>
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques (Revue)*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (2003). Sur l'introduction de calcul littéral, *Bulletin de l'APMEP*, 445, 197-213.
- Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *Research in collegiate mathematics education. III. CBMS issues in mathematics education*, 7, 114-162.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., et Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378. <https://doi.org/10.2307/4149958>
- Carlson, M., Larsen, S., et Jacobs, S. (2001). An investigation of covariational reasoning and its role in learning the concepts of limit and accumulation. Dans R. Speiser, C. Maher, et C. Walter (dir.) *Proceedings of the 23rd Annual Meeting*

*of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (p.145–153), Snowbird : PME-NA. Récupéré de <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED476613.pdf#page=152>

Castillo-Garsow, C. (2010). *Teaching the Verhulst model: A teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth*. (Thèse de Doctorat). Arizona State University. Récupéré de [http://yeolcoatl.net/research/20100722b-Dissertation-cwgcg-absolute\\_final-email\\_size.pdf](http://yeolcoatl.net/research/20100722b-Dissertation-cwgcg-absolute_final-email_size.pdf)

Castillo-Garsow, C. (2012). Continuous quantitative reasoning. *Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context*, 2, 55-73. Récupéré de <https://wilkins.math.ksu.edu/~bennett/onlinehw/qcenter/2012cqr.pdf>

Charnay, R. et Mante, M. (1996). *Préparation à l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles*. Paris : Hatier pédagogie.

Chorlay, R. (2007). La multiplicité des points de vue en Analyse élémentaire comme construit historique. *Histoire et enseignement des mathématiques: rigueurs, erreurs, raisonnements*. 203-227.

Confrey, J., et Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 135-164.

Confrey, J., et Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for research in mathematics education*, 26(1), 66-86.

Dreyfus, T., et Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for research in mathematics education*, 360-380.

Drolet, D. (2012). Évaluation du niveau de compréhension des étudiants issus du renouveau pédagogique à l'égard du concept de fonction. (Mémoire de maîtrise). Université du Québec à Montréal. Récupéré de <http://archipel.uqam.ca/5193/1/M12670.pdf>

Dubinsky, E., et Harel, G. (1992). The concept of function. *Aspects of epistemology and pedagogy*. Washington : MAA notes.

- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5(1), 37-65.
- González-Martín, A. S., Hitt, F., et Morasse, C. (2008). The introduction of the graphic representation of functions through the concept of co-variation and spontaneous representations. A case study. *Proceedings of PME 32 and PME-NA*, 30(3), 89-96. Récupéré de <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.688.897&rep=rep1&type=pdf#page=118>
- Guay, S, Hamel, J.-C., Lemay, S. (2005). Perspective mathématique. Manuel de l'élève, B, volume 1 et 2. Laval: Éditions Grand Duc-HRW.
- Guay, S, Hamel, J.-C., Lemay, S. (2007). Point de vue mathématique. Manuel de l'élève, volume 1 et 2. Laval: Éditions Grand Duc-HRW.
- Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 8(1), 255-271.
- Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation*, 30(2), 329-354. <https://doi.org/10.7202/012672ar>
- Hitt, F. (2006). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example: The concept of limit. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 253-268.
- Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. Dans M. Baron, D. Guin, et L. Trouche (dir.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés*, (p. 65-88). Mexico : Éditorial Hermès.
- Hitt, F., Gonzalez, A., et Morasse, C. (2008). Visualization and students' functional representations in the construction of mathematical concepts. An example: The concept of co-variation as a prelude to the concept of function. *ICME-11, Topic Study Group*, 20, 6-13.

- Hitt, F., et Morasse, C. (2009). Advanced numerical-algebraic thinking: Constructing the concept of covariation as a prelude to the concept of function. *Journal of Research in Educational Psychology*, 17(1), 243-260. Récupéré de [http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/687/Art\\_17\\_327.pdf?sequence=1](http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/687/Art_17_327.pdf?sequence=1)
- Hitt, F., et Passaro, V. (2007). De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes: le rôle des représentations spontanées. *Actes de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*, 117-123. Récupéré de [http://www.hitt.uqam.ca/mat3225\\_fich/Hitt-Passaro\\_CIEAEM\\_07.pdf](http://www.hitt.uqam.ca/mat3225_fich/Hitt-Passaro_CIEAEM_07.pdf)
- Hitt, F. (2021). MAT3225 Didactique de la variable et des fonctions. Notes du cours, production interne. COOP-UQAM.
- Janvier, C. (1981a). Les graphiques cartésiens dans l'enseignement des sciences. *Spectre*, 35-42.
- Janvier, C. (1981b). Les graphiques cartésiens comme mode de représentation : rôle du langage et nature des traductions. *Séminaire de didactique et pédagogie des mathématiques*, 25, 1-17.
- Janvier, C. (1983). Représentation et compréhension. Un exemple: Le concept de fonction. *Bulletin de l'association mathématique du Québec III*, 22-28.
- Janvier, C. (1993). Les graphiques cartésiens: des traductions aux chroniques. *Les Sciences de l'Éducation*, 1 (3), 17-37.
- Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 79-103.
- Janvier, B. et Pelletier, F. (2003). Didactique de la variable et des fonctions-MAT3225. Document non édité. Université du Québec à Montréal. Récupéré de : [http://www.hitt.uqam.ca/mat3225\\_fich/MAT3225\\_Janvier-Pelletier.pdf](http://www.hitt.uqam.ca/mat3225_fich/MAT3225_Janvier-Pelletier.pdf)
- Landry, M.-C. (2016). Analyse de l'introduction de la notion de vecteur dans des manuels québécois de mathématique et de physique de 5<sup>e</sup> secondaire. (Mémoire de maîtrise). Université du Québec à Rimouski. Récupéré de



[http://semaphore.uqar.ca/id/eprint/1257/1/Marie-Chantale\\_Landry\\_janvier2016.pdf](http://semaphore.uqar.ca/id/eprint/1257/1/Marie-Chantale_Landry_janvier2016.pdf)

Lebrun, M. (2006). Les mutations du manuel de lecture du secondaire de 1960 à 2004. *Le manuel scolaire: Un outil à multiples facettes*, 113-136.

Lenoir, Y., Rey, B., Roy, G. R., et Lebrun, J. (2001). *La manuel scolaire et l'intervention éducative: Regards critiques sur ses apports et ses limites*. Sherbrooke : Éditions du CRP.

Lévesque, N. (2001). Modélisation de phénomènes pour une compréhension du concept de la fonction quadratique. (Mémoire de maîtrise). Université Laval. Récupéré de <https://corpus.ulaval.ca/jspui/handle/20.500.11794/35086>

Ministère de l'Éducation du Québec. (2006). Programme de formation de l'école québécoise : enseignement secondaire, deuxième cycle. Récupéré de [http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site\\_web/documents/education/jeunes/pfeq/PFEQ\\_mathematique-secondaire-deuxieme-cycle.pdf](http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/education/jeunes/pfeq/PFEQ_mathematique-secondaire-deuxieme-cycle.pdf)

Niyozov, S., et Bahry, S. (2006). Challenges to education in Tajikistan: the need for research-based solutions. Dans J. Earnest et D. F. Treagust (Dir.) *Education Reform in Societies in Transition*, (p. 211-231), Rotterdam : Sense Publishers.

Oehrtman, M., Carlson, M., et Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. Dans M. P. Carlson et C. Rasmussen (Dir.) *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education*, (p. 27-42), Washington : Mathematical Association of America.

Passaro, V. (2007). Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélé par une analyse des représentations spontanées d'élèves du premier cycle du secondaire (Mémoire de maîtrise). Université du Québec à Montréal. Récupéré de <https://archipel.uqam.ca/7346/1/M9902.pdf>

Passaro, V. (2015). *Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans* (Thèse de doctorat). Université de Montréal. Récupéré de

[https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/bitstream/handle/1866/13509/Passaro\\_Valeriane\\_2015\\_these.pdf?sequence=6](https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/bitstream/handle/1866/13509/Passaro_Valeriane_2015_these.pdf?sequence=6)

Passaro, V. (2020). Analyse du déploiement d'un raisonnement covariationnel en situation chez des élèves de 15 à 18 ans. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 20(3), 462-484. <https://doi.org/10.1007/s42330-020-00101-x>

Passaro, V. et Deblois, L. (2020). Le passage d'un registre de représentation à un autre. *Envol*, 176, 22-27.

Piaget, J., Grize, J.-B., Szeminska, A., et Bang, V. (1968). *Epistemology and psychology of functions*. Paris : Presses universitaires de France.

René de Cotret, S. (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x*, 17, 5-27.

Robert, V. (2018). Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3e cycle du primaire québécois: une analyse praxéologique. (Mémoire de maîtrise). Université de Sherbrooke. Récupéré de [https://savoirs.usherbrooke.ca/bitstream/handle/11143/12608/Robert\\_Virginie\\_MA\\_2018.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://savoirs.usherbrooke.ca/bitstream/handle/11143/12608/Robert_Virginie_MA_2018.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

Sabourin, P. (2009). L'analyse de contenu. *Recherche sociale: de la problématique à la collecte des données*, 415-444. Récupéré de [https://www.researchgate.net/profile/Paul-Sabourin-3/publication/303145629\\_L'analyse\\_de\\_contenu/links/603faee092851c077f15c126/Lanalyse-de-contenu](https://www.researchgate.net/profile/Paul-Sabourin-3/publication/303145629_L'analyse_de_contenu/links/603faee092851c077f15c126/Lanalyse-de-contenu)

Saboya, M. (2003). Analyse d'une intervention sur les graphiques auprès d'une élève classée en difficultés d'apprentissage en mathématiques au secondaire. (Mémoire de maîtrise inédit). Université du Québec à Montréal.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function-A case study. *Educational studies in mathematics*, 53(3), 229-254. <https://doi.org/10.1023/A:1026033415747>

- Saldanha, L. A., et Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. Dans S. B. Berensen, K. R. Dawkins, M. Blaton, W. N. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood et L. Stiff (Dir.) *Proceedings of the 20<sup>th</sup> Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (p. 298-303), Colombus : ERIC Clearinghouse for Sciences, Mathematics, and Environmental Education.
- Savoie-Zajc, L., et Karsenti, T. (2018). La méthodologie. Dans Savoie-Zajc L. et Karsenti T. (Dir.), *La recherche en éducation: Étapes et approches. 4e édition revue et mise à jour* (p. 139-152). Montréal : Presses de l'Université de Montréal. Récupéré de [https://books.google.fr/books?hl=fr&lr=&id=HO5qDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT215&dq=Savoie-Zajc,+L.,+et+Karsenti,+T.+\(2018\).+La+m%C3%A9thodologie.+Dans+Savoie-Zajc+L.+et+Karsenti+T.+\(Dir.\),+La+recherche+en+%C3%A9ducation:+%C3%A9tapes+et+approches.+4e+%C3%A9dition+revue+et+mise+%C3%A0+jour+\(p.+139-152\).+Montr%C3%A9al:+Presses+de+l%E2%80%99Universit%C3%A9+de+Montr%C3%A9al.+&ots=gNcKmAmQiw&sig=qWli5lahiligZojKxwrkav6HZM#v=onepage&q&f=false](https://books.google.fr/books?hl=fr&lr=&id=HO5qDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT215&dq=Savoie-Zajc,+L.,+et+Karsenti,+T.+(2018).+La+m%C3%A9thodologie.+Dans+Savoie-Zajc+L.+et+Karsenti+T.+(Dir.),+La+recherche+en+%C3%A9ducation:+%C3%A9tapes+et+approches.+4e+%C3%A9dition+revue+et+mise+%C3%A0+jour+(p.+139-152).+Montr%C3%A9al:+Presses+de+l%E2%80%99Universit%C3%A9+de+Montr%C3%A9al.+&ots=gNcKmAmQiw&sig=qWli5lahiligZojKxwrkav6HZM#v=onepage&q&f=false)
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, 25, 23-58.
- Soury-Lavergne, S. (2010). Modélisation mathématique de phénomènes variables, dans l'enseignement, à l'aide de la géométrie dynamique. Récupéré de <http://www-diam.imag.fr/Rapport-MIRA-2010-Soury-Lavergne.pdf>
- Soury-Lavergne, S., et Bessot, A. (2012). Modélisation de phénomènes variables à l'aide de la géométrie dynamique. 742-753. Récupéré de [https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00988743/file/Soury-Lavergne\\_Bessot\\_EMF2012GT5.pdf](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00988743/file/Soury-Lavergne_Bessot_EMF2012GT5.pdf)
- Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. *Research in collegiate mathematics education*, 1, 21-44
- Thompson, P. W., et Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. *Compendium for research in mathematics education*, 421-456. Récupéré de <https://www.researchgate.net/profile/Patrick-Thompson->

[2/publication/302581485\\_Variation\\_covariation\\_and\\_functions\\_Foundational\\_ways\\_of\\_thinking\\_mathematically/links/583c389208ae502a85e3a224/Variation-covariation-and-functions-Foundational-ways-of-thinking-mathematically.pdf](https://doi.org/10.7202/1070026ar)

Tremblay, M. et Saboya, M. (2020). Kaléidoscope sur l'accroissement des problèmes de mise en égalité dans les manuels scolaires québécois. *NCRE-Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22 (1), 99-122. <https://doi.org/10.7202/1070026ar>

Trigueros, M., et Ursini, S. (1999). *Does the understanding of variable evolve through schooling?*. *PME CONFERENCE*, 4, 4-273. Récupéré de <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED436403.pdf#page=1439>