

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

RÔLE ET ARTICULATION DE RAISONNEMENTS QUANTITATIFS DANS  
L'APPRENTISSAGE DE LA NOTION DE RADIAN : LE CAS DE JUSTINE

MÉMOIRE  
PRÉSENTÉ  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR  
STÉPHANIE SAMPSON

AVRIL 2021

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.04-2020). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

« Think deeply of simple things. »  
(Arnold Ephraim Ross)

## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de recherche, Luis Saldanha, pour tout son support et la confiance qu'il m'a apportés durant toute ma maîtrise et ce projet de recherche (jusqu'à la dernière minute !). Sans son expertise et ses encouragements, je n'aurais probablement pas été en mesure de compléter ce mémoire.

Aussi, je veux remercier mes collègues, professeurs et amis du département, en particulier Sarah Dufour, Doris Jeannotte, Marie-Lyne Lavallée-Lamarche, Benoit Morand et j'en passe, bien entendu. Nos discussions toutes aussi enrichissantes les unes que les autres m'ont permis d'approfondir mes réflexions à des niveaux parfois vertigineux et abyssaux.

Je tiens à remercier tout particulièrement ma collaboratrice du début de mon expérimentation, Rox-Ann L'Italien-Bruneau. Tu as sans doute enrichi considérablement ce projet de recherche par des réflexions pertinentes et complémentaires aux miennes.

Je tiens à remercier du fond du coeur mes deux parents, Geoffrey Sampson et Marthe Lemieux, sans qui je ne serais pas où je suis. Finalement, ma fille Mahina, qui a été si patiente et aidante dans tout ce processus.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES.....	x
LISTE DES TABLEAUX.....	xiii
LISTE DES EXTRAITS.....	xv
RÉSUMÉ .....	xix
CHAPITRE I PROBLÉMATIQUE .....	1
1.1 Motivation de départ.....	1
1.2 L'apprentissage de la trigonométrie.....	2
1.2.1 La trigonométrie dans le contexte scolaire québécois.....	3
1.2.2 Difficultés d'apprentissage et d'enseignement soulevées dans la recherche 5	5
1.2.3 Les notions élémentaires préalables à l'apprentissage des fonctions trigonométriques .....	6
1.3 La cohérence conceptuelle dans l'apprentissage de la trigonométrie : différentes pistes d'approche proposées .....	6
1.3.1.1 Proulx et Charbonneau : Une perspective historique.....	7
1.3.1.2 Tanguay : Une conception de l'unité de mesure « radian ».....	9
1.3.1.3 Thompson et Moore : Une approche quantitative des notions élémentaires en trigonométrie.....	10
1.4 Pertinence de l'objet d'étude .....	12
1.5 Questions et objectifs préliminaires de recherche .....	13
CHAPITRE II CADRE THÉORIQUE.....	15

2.1	Posture épistémologique.....	17
2.1.1	Pourquoi préciser une posture épistémologique ?.....	17
2.1.2	von Glasersfeld et Piaget.....	17
2.1.2.1	Actions et opérations mentales, schèmes et constituants d'un processus d'apprentissage .....	19
2.1.2.2	Façons de penser et façon de comprendre.....	20
2.1.3	Des approches méthodologiques reliées à ces postures .....	22
2.1.3.1	La méthodologie du Teaching Experiment de Steffe et Thompson	22
2.1.3.2	La méthodologie du <i>Hypothetical learning trajectory</i> de Simon ...	24
2.2	Cohérence et analyse conceptuelle .....	26
2.2.1	La cohérence conceptuelle et le curriculum.....	26
2.2.2	L'approche par analyse conceptuelle au sens de Thompson .....	28
2.3	Raisonnement sur les quantités.....	29
2.3.1	Fondements de Thompson .....	30
2.3.1.1	La quantité et la quantification de Thompson.....	31
2.4	Raisonnement sur les quantités en trigonométrie : l'approche par arc de Moore	36
2.4.1	L'approche par arc de l'angle et sa mesure : éléments d'une analyse conceptuelle .....	37
2.4.1.1	La conception de l'objet angle.....	38
2.4.1.2	Une conceptualisation de la mesure d'un angle .....	39
2.4.2	Le radian.....	43
2.4.3	Vers les fonctions trigonométriques, le cercle trigonométrique et les triangles rectangles.....	45
2.5	Résumé du chapitre et précision des objectifs et questions de recherche.....	46
	CHAPITRE III méthodologie .....	50
3.1	Description globale.....	50

3.2	La méthodologie du teaching experiment selon Steffe et Thompson.....	52
3.3	Participants et données recueillies .....	54
3.3.1	Participants et données recueillies à la première étape de l'expérimentation.....	54
3.3.2	Participants et données recueillies de la deuxième étape de l'expérimentation.....	55
3.4	Mise en oeuvre et déroulement de l'étude .....	56
3.4.1	Étape 1.1 : Analyse du module sur la trigonométrie.....	57
3.4.2	Étape 1.2 : Préparation préalable d'une Trajectoire hypothétique d'apprentissage .....	61
3.4.2.1	Questionnaire et séquence préliminaire .....	64
3.4.3	Étape 1.3 : Analyse des réponses au questionnaire.....	65
3.4.3.1	Sélection de la participante .....	66
3.4.4	Étape 2 de l'expérimentation : Les séances du TE .....	68
3.4.4.1	Description globale de l'étape 2 .....	68
3.5	Processus d'analyse de l'étape 2 de l'expérimentation .....	69
3.5.1	Analyse des séances — niveau 0 .....	71
3.5.2	Analyse des séances — niveau 1 .....	75
3.5.3	Analyse des séances — niveau 2 .....	76
3.5.4	Analyse des séances - niveau 3 et élaboration des résultats en phase.....	78
CHAPITRE IV ANALYSE .....		79
4.1	Structure de présentation de l'analyse.....	79
4.2	Phase 0 - Questionnaire, séance 1 et séance 2 : L'objet angle et la mesure d'angle selon Justine.....	82
4.2.1	Les réponses de Justine au questionnaire.....	82
4.2.1.1	L'omniprésence de l'unité de mesure degré.....	82
4.2.1.2	L'arc sous-tendu lié à la mesure d'angle .....	84
4.2.1.3	L'utilisation du cercle pour étudier la mesure d'angle.....	84

4.2.2	Séances 1 et 2 .....	87
4.2.2.1	L'objet angle de Justine .....	91
4.2.2.2	La mesure d'angle et les unités de mesure pour Justine .....	93
4.2.3	Hypothèses émergentes de la phase 0 .....	97
4.3	Phase 1 — Séance 3 et séance 4 : Retour vers l'unité de mesure fraction de circonférence de Justine .....	99
4.3.1	Intentions conceptuelles .....	100
4.3.2	Déroulement et interprétations .....	102
4.3.2.1	Séance 3 - Retour séance 2.....	103
4.3.2.2	Séance 3 — Tâche 1 .....	104
4.3.2.3	Séance 3 — Tâche 2.....	107
4.3.2.4	Séance 3 — Tâche 2'.....	111
4.3.2.5	Séance 3 — Tâche 3.....	113
4.3.2.6	Séance 4 — Tâches 1 et 2 .....	117
4.3.2.7	Séance 4 — Tâche 3 (partie 1).....	123
4.3.2.8	Séance 4 — Enseignement : Introduction du radian comme nouvelle unité de mesure .....	125
4.3.2.9	Séance 4 — Tâche 3 (partie 2).....	128
4.3.3	Constats .....	131
4.4	Phase 2 — Séance 5 et séance 6 : Vers l'unité de mesure radian de Justine ...	133
4.4.1	Intentions conceptuelles .....	134
4.4.2	Déroulement et interprétations .....	134
4.4.2.1	Séance 5 — Tâche 1 .....	135



4.4.2.2	Séance 5 — Tâche 2.....	146
4.4.2.3	Séance 6 — Tâches 1 et 2.....	152
4.4.2.4	Séance 6 — Tâches 3a et 3b.....	157
4.4.2.5	Séance 6 — Tâche 4.....	168
4.4.2.6	Séance 6 — Tâche 5.....	173
4.4.3	Constats.....	175
CHAPITRE V Discussion et résultats.....		177
5.1	Thème 1 : La polyvalence de l'objet angle et du processus de mesurage de Justine.....	177
5.2	Thème 2 : La proportion au centre des raisonnements de Justine.....	178
5.3	Thème 3 : La conception « rayon-rayon » du radian chez Justine et le report de mesure le long de la circonférence.....	180
5.4	Thème 4 : La RRGR et les relations multiplicatives de Justine.....	182
5.5	Thème 5 : L'articulation entre les opérations arithmétiques et les opérations quantitatives de Justine.....	183
5.6	Thème 6 : Le nombre $\pi$ dans l'unité de mesure radian et le statut conceptuel des expressions en jeu.....	185
5.7	Thème 7 : Le raisonnement répété chez Justine.....	187
5.8	Retour sur les questions de recherche.....	188
CONCLUSION.....		191
6.1	Vue d'ensemble du projet de recherche.....	191
6.2	Contributions et retombées.....	193
6.2.1	L'articulation des opérations quantitatives et arithmétiques.....	194
6.2.2	L'articulation des raisonnements multiplicatifs.....	194
6.3	Limites.....	195
6.4	Prolongements.....	196

ANNEXE A QUESTIONNAIRE DIAGNOSTIC..... 198

BIBLIOGRAPHIE ..... 199

## LISTE DES FIGURES

Figure	Page
Figure 2.1 L'objet angle tel que défini par Thompson et par Moore .....	39
Figure 2.2 : Le rayon comme unité de mesure (Moore, 2012, p. 79) .....	45
Figure 3.1 Cycle itératif de l'analyse de niveau 0 du TE .....	71
Figure 4.1 Référence au nombre de degrés ou à des mesures repères .....	83
Figure 4.2 Utilisation de la mesure en degrés de l'angle plein dans une tâche sans mesures.....	83
Figure 4.3 Utilisation de l'arc sous-tendu pour comparer des mesures d'angle .....	84
Figure 4.4 Utilisation de l'arc sous-tendu et de la circonférence pour étudier les mesures d'angle .....	85
Figure 4.5 Réponse et schéma de Justine à la question supplémentaire du questionnaire diagnostique : Le « coupe-pizza 3000 » .....	86
Figure 4.6 Mosaïque des représentations schématiques de l'angle chez Justine lors des séances 1 et 2 du TE.....	91

Figure 4.7 Production écrite de Justine en lien avec le nombre de rayons dans la circonférence de tout cercle .....	111
Figure 4.8 Productions écrites similaires de Justine aux tâches analogues 1c) et 2c) .....	122
Figure 4.9 Schéma A présenté pour appuyer l'enseignement de la notion de radian	126
Figure 4.10 Schémas B et C présentés pour appuyer l'enseignement de la notion de radian.....	127
Figure 4.11 Production écrite liée à l'extrait 17 .....	138
Figure 4.12 Production écrite de Justine et de la chercheure lors du travail sur l'équivalence des relations $ab = u$ et $a = b \times u$ .....	141
Figure 4.13 Production écrite de Justine qui mobilise le travail fait à partir des segments.....	142
Figure 4.14 Production écrite de la tâche 2. Justine fait correspondre l'unité radian à la fraction de circonférence $12\pi$ .....	148
Figure 4.15 Justine utilise la circonférence comme $2\pi$ rayons .....	154
Figure 4.16 Justine écrit les rapports en termes de $\pi$ .....	161
Figure 4.17 Mouvement des doigts allant d'un rayon du cercle vers l'arc sur la circonférence qui accompagne la conception « rayon-rayon ».....	166

Figure 4.18 Traduction en équation de l'énoncé de la tâche 4 de la séance 6..... 171

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
Tableau 2.1 Structures quantitatives et opérations arithmétiques (Thompson, 2011)	34
Tableau 2.2 Opérations numériques où la valeur de la quantité résultante est connue, mais dont la valeur d'une des quantités la produisant est inconnue (Thompson, 2011) .....	34
Tableau 3.1 Présentation sommaire des étapes 1 et 2 de l'expérimentation .....	57
Tableau 3.2 Trajectoire hypothétique d'apprentissage pour le questionnaire et la séquence préliminaire.....	62
Tableau 3.3 Visées conceptuelles du questionnaire diagnostique .....	65
Tableau 3.4 Contenu conceptuel des séances d'enseignement-apprentissage .....	69
Tableau 3.5 Résumé des moments du cycle itératif de l'analyse de niveau 0 d'une séance A à une séance B. ....	74
Tableau 4.1 : Modèle hypothétique de la conception de l'angle et de sa mesure de Justine.....	98
Tableau 4.2 Description détaillée et énoncé de la Tâche 1 de la séance 3.....	105

Tableau 4.3 Description détaillée et énoncé de la Tâche 2 de la séance 3.....	108
Tableau 4.4 Description détaillée et énoncé de la Tâche 2' de la séance 3.....	112
Tableau 4.5 Description détaillée et énoncé de la Tâche 3 de la séance 3.....	114
Tableau 4.6 Description détaillée et énoncé de la Tâche 1 de la séance 4.....	118
Tableau 4.7 Description détaillée et énoncé de la Tâche 3 (partie 1) de la séance 4	124
Tableau 4.8 Description détaillée et énoncé de la Tâche 3 (partie 2) de la séance 4	128
Tableau 4.9 Description détaillée et énoncé de la Tâche 1 de la séance 5.....	135
Tableau 4.10 Énoncés et schéma de la Tâche 2 de la séance 5.....	147
Tableau 4.11 Description détaillée et énoncé des Tâches 1 et 2 de la séance 6.....	153
Tableau 4.12 Description détaillée et énoncé de la Tâche 3a et 3b de la séance 6...	159
Tableau 4.13 Description détaillée et énoncé de la Tâche 4 de la séance 6.....	169
Tableau 4.14 Description détaillée et énoncé de la Tâche 5 de la séance 6.....	173

## LISTE DES EXTRAITS

Tableau	Page
Extrait 4.1 Justine explique où on compte les $(1/360)$ -ième pour en déterminer la mesure (Séance 1) .....	88
Extrait 4.2 Justine exprime son malaise à utiliser $(1/11)$ -ième de la circonférence comme unité de mesure.....	88
Extrait 4.3 Justine explique où se situe l'angle (Séance 1) .....	92
Extrait 4.4 Justine explique son processus de mesurage d'un angle (Séance 1).....	93
Extrait 4.5 Justine explique le lien entre « espace entre les 2 coupures » et « portion du 360 degrés » l'égalité nécessaire des rapports .....	94
Extrait 4.6 Justine utilise le processus de mesurage, la relation proportionnelle et multiplicative pour déterminer la mesure de l'angle.....	95
Extrait 4.7 Réponse de Justine à la Tâche 1 e). Pourquoi la même ouverture d'un cercle à l'autre ? .....	106
Extrait 4.8 Justine tente d'expliquer pourquoi il y a toujours $2\pi$ rayons dans la circonférence d'un cercle.....	110



Extrait 4.9 Justine explique à quoi correspond la longueur de l'arc sous-tendu par rapport à la circonférence.....	113
Extrait 4.10 Justine explique la relation entre la longueur d'arc sous-tendu et la mesure de l'angle balayé en degrés .....	115
Extrait 4.11 Justine explique sa façon de concevoir la mesure d'angle en degrés ....	119
Extrait 4.12 Justine tente d'expliquer ce que son calcul signifie.....	120
Extrait 4.13 Justine conçoit que la longueur de l'arc coupé par l'angle correspond au rayon.....	125
Extrait 4.14 Justine ne conçoit pas l'utilisation de la fraction $AC$ pour déterminer la mesure de l'angle en radian .....	129
Extrait 4.15 Justine effectue une opération arithmétique.....	137
Extrait 4.16 Justine tente d'expliquer le sens qu'elle donne à l'opération arithmétique... ..	139
Extrait 4.17 Justine raisonne par report de mesure .....	140
Extrait 4.18 Justine mobilise sa conception «rayon-rayon» .....	143
Extrait 4.19 Justine articule plus aisément les objets et quantités en jeu.....	144
Extrait 4.20 Justine articule sa conception du radian avec les opérations arithmétiques afin d'appuyer ses résultats.....	145

Extrait 4.21 Justine ne semble pas articuler son calcul avec les quantités ou objets en jeu.....	149
Extrait 4.22 Justine conçoit le lien entre le nombre de radian et le nombre de rayon .....	150
Extrait 4.23 Justine représente la grandeur relative entre l'arc et le rayon.....	155
Extrait 4.24 Justine voit la mesure d'angle comme un pourcentage de l'angle plein	156
Extrait 4.25 Justine est guidée pour déterminer le nombre de rayons contenu dans l'arc sous-tendu.....	160
Extrait 4.26 Justine est guidée pour réfléchir quantitativement à propos du rapport $A/r$ .....	162
Extrait 4.27 Justine semble raisonner à propos de la RRGR entre le rayon et l'arc sous-tendu .....	163
Extrait 4.28 Justine mobilise sa conception « rayon — rayon » du radian.....	166
Extrait 4.29 Justine itère l'arc unité et verbalise le lien entre la mesure d'angle en radian et la mesure de l'arc en rayons .....	167
Extrait 4.30 Une mesure d'angle de 0,45 pour Justine .....	170
Extrait 4.31 La mesure d'angle 0,45 radian est vue comme correspondante à une portion du rayon .....	172

Extrait 4.32 Justine se représente l'angle de  $3\pi/2$  radians ..... 174

## RÉSUMÉ

La trigonométrie et les fonctions trigonométriques constituent des notions importantes dans le domaine des mathématiques en général. Certains chercheurs soulèvent des difficultés dans l'apprentissage des notions élémentaires tels l'angle et sa mesure, en particulier en radians (Fi, 2003 ; Moore, 2013). D'autres montrent qu'il y a, tant chez les élèves que chez les enseignants, des difficultés liées à une faiblesse dans les compréhensions des liens entre les différents cadres de la trigonométrie abordés en contexte scolaire (Akkoc, 2008 ; Thompson, Carlson et Silverman, 2007). L'enjeu de cohérence dans les sens véhiculés est aussi mis en avant (Thompson, 2008 ; Proulx, 2003 ; Charbonneau, 2002 ; Tanguay, 2010). Ceci montre l'importance de se pencher sur les façons dont les élèves conceptualisent ces notions en situation d'apprentissage ainsi que sur les façons de les aborder, qui tiendraient compte des sens qu'on leur attribue tout au long du parcours scolaire. C'est dans une posture ancrée dans le constructivisme radical (von Glasersfeld, 1995) et une approche par arc de la mesure d'angle (Moore 2012 ; 2013) prenant appui sur la théorie du raisonnement quantitatif (Thompson, 1994 ; 2008 ; 2011), que cette étude vise à examiner les raisonnements mobilisés et les conceptualisations développées chez une étudiante de secondaire 4 dans un contexte d'enseignement-apprentissage de la notion d'unité de mesure d'angle et du radian. Pour ce faire, j'ai fait passer un questionnaire diagnostique auprès des élèves d'une classe de secondaire 4. Ensuite, j'ai mené un teaching experiment (Steffe et Thompson, 2000) de six séances avec l'une des étudiantes dans lequel j'agissais comme chercheure-enseignante. Ces séances se sont déroulées autour de tâches et d'interactions planifiées. J'ai mené une analyse des productions écrites et des enregistrements vidéo durant et après les six séances.

Dans cette étude de cas, il semble qu'une conception de l'angle liée au cercle et aux relations proportionnelles serait favorable à une compréhension signifiante et robuste de la mesure d'angle. Or, l'articulation difficile entre les opérations quantitatives (au sens de Thompson) et les opérations arithmétiques semble freiner le développement de certaines actions et opérations mentales. Finalement, dans l'approche proposée et mise en oeuvre dans cette étude, les raisonnements multiplicatifs, telle la relation entre l'arc sous-tendu et le rayon ou encore l'arc sous-tendu et la circonférence, sont complexes à concevoir, à mobiliser et à articuler.

Mots clés : Didactique des mathématiques, angle, mesure d'angle, radian, trigonométrie, raisonnement quantitatif.

## CHAPITRE I

### PROBLÉMATIQUE

#### 1.1 Motivation de départ

J'ai toujours voulu être enseignante de mathématiques. Ma motivation première était d'en arriver à « faire voir » aux autres la cohérence entre les différents concepts. De « faire voir » qu'en mathématique, tout est lié d'une façon qui « fonctionne ». C'est au début de mes études universitaires (baccalauréat en mathématiques fondamentales) que j'ai commencé à faire du tutorat individuel auprès de jeunes du secondaire. Dès lors, je me suis rendu compte que la façon de « voir » non seulement diffère de l'un à l'autre, mais que l'apprenant sera plus satisfait d'avoir compris les liens (ses propres liens construits) que de retenir des formules n'ayant aucun lien les unes avec les autres. Ensuite, afin d'être admise au programme de maîtrise de mathématique dans la concentration didactique, j'ai dû suivre des cours de didactique du Baccalauréat en enseignement secondaire (concentration mathématique). C'est durant ces cours que j'ai appris à me pencher sur des concepts mathématiques et d'en décortiquer les sens, les façons de les comprendre, de les « voir ». Ceci confirmait chez moi l'importance de cet aspect dans l'apprentissage et l'enseignement (toutes matières confondues).

C'est dans le cadre du cours MAT865R : Introduction aux nouveaux développements en didactique de la trigonométrie, que je me suis penchée sur un ensemble d'articles

et écrits de recherche portant sur l'analyse conceptuelle de la trigonométrie et des fonctions trigonométriques et sur le développement de certains types de raisonnements qui en favoriseraient l'apprentissage. C'est à partir d'une première expérience de teaching experiment que mon intérêt pour ces notions et la perspective adoptée se soient développés. J'ai été convaincue de la pertinence de me pencher sur ce sujet lorsqu'un ami et collègue du baccalauréat en mathématiques fondamentales a manifesté un certain malaise à expliquer sa conception de l'angle et de sa mesure. Devant son désarroi (et le mien aussi) à expliquer une conception d'un objet « simple et connu » depuis si longtemps, ces notions me semblaient finalement complexes. D'ailleurs, lors d'une présentation de mon projet de recherche devant quelques étudiants des cycles supérieurs en mathématiques, de « simples » questions comme qu'est-ce qu'un angle ? Ou encore qu'est-ce que la mesure d'un angle donné ? se voyaient sans réponse claire. Je me suis dit que ce n'était donc pas si « simple » que ça !

## 1.2 L'apprentissage de la trigonométrie

La trigonométrie et les fonctions trigonométriques constituent des notions importantes dans le domaine des mathématiques en général. Une variété de domaines des sciences fait appel à ces notions. En particulier, les fonctions trigonométriques et ses concepts associés constituent une des premières expériences mathématiques scolaires qui combine des raisonnements géométriques, symboliques et graphiques qui ne peuvent être calculés à l'aide de manipulations algébriques (Moore, 2010). Ceci témoigne de la complexité impliquée dans leur apprentissage et leur enseignement.

### 1.2.1 La trigonométrie dans le contexte scolaire québécois

Dans le contexte scolaire québécois, le Programme de formation de l'école québécoise (PFEQ, 2006) indique que les jeunes du primaire sont d'abord amenés à décrire des angles selon l'amplitude relative de leur ouverture (droit, aigu, obtus). Ils utilisent le rapporteur d'angle pour mesurer les angles en degrés. Les attentes de fin de primaire incluent l'estimation et le mesurage des angles, la comparaison d'angles et l'unité de mesure « degré ». On remarque qu'une multitude de types de grandeurs se retrouvent dans le programme : longueurs, angles, surfaces, volumes, capacités, masses, temps et températures. Dans presque tous les cas, le programme indique d'aborder les unités de mesure non conventionnelles, à l'exception des unités pour les angles, le temps et les températures. On y indique aussi que l'élève du primaire connaît les éléments relatifs au cercle, soit le rayon, le diamètre, la circonférence, mais aussi la notion d'angle au centre.

Au premier cycle du secondaire, les jeunes Québécois abordent la mesure de l'angle et de l'arc en degrés, les notions d'angles complémentaires, d'angles supplémentaires, d'angles créés par deux droites sécantes (opposés par le sommet, adjacents) et d'angles créés par une droite sécante à deux autres droites (alternes-internes, alternes-externes, correspondants). Au niveau des processus, ils seraient amenés à rechercher des mesures manquantes d'angles, de circonférences de cercle et de longueurs d'arc. Dans les éléments de méthode proposés, le PFEQ mentionne

L'utilisation des transformations du plan doit être considérée comme un moyen dynamique de construire des concepts géométriques et d'en dégager des propriétés et des relations qui pourront éventuellement être réinvesties. Les opérations faites par l'élève pour réaliser une construction favorisent l'acquisition des concepts fondamentaux de parallélisme, de perpendicularité et d'angle. (p. 260, je souligne)



Au deuxième cycle du secondaire, les élèves abordent le concept de relations métriques ou trigonométriques dans le triangle (sinus, cosinus, tangente, loi des sinus, loi des cosinus, formule de Héron). Le PFEQ décrit les processus associés. Notamment, les élèves sont appelés à s'appuyer sur le raisonnement proportionnel pour jongler avec tous ces concepts relatifs à la trigonométrie :

En mobilisant les raisonnements proportionnel et géométrique à l'aide, notamment, de la relation de Pythagore et des propriétés des triangles semblables, l'élève déduit différentes mesures dans le triangle. En abaissant la hauteur issue de l'angle droit d'un triangle rectangle, il reconnaît les triangles semblables et établit des proportions. Il déduit ainsi des relations métriques dans le triangle rectangle. De plus, à partir de triangles semblables, il est amené à s'appropriier les rapports trigonométriques dans le triangle rectangle. (p. 77)

De plus, le document mentionne qu'« il est possible d'introduire les fonctions sinusoidales à l'aide d'angles exprimés en degrés ». En troisième année de ce cycle (sauf pour la séquence Culture, société et technologies), le programme stipule que

[...] l'élève élargit son réseau de concepts aux figures équivalentes, aux relations métriques dans le cercle et à la trigonométrie dans le triangle. Si l'étude du cercle trigonométrique introduit, d'une part, les fonctions sinus, cosinus et tangente ainsi que certaines identités, elle soutient, d'autre part, l'établissement d'une correspondance entre les radians et les degrés ainsi que le calcul des longueurs d'arc à l'aide de l'une ou l'autre de ces unités. [...] Le cercle trigonométrique est mis à contribution pour introduire les apprentissages relatifs à la trigonométrie du triangle rectangle. (p. 96)

Or, sur ce dernier point, il est à noter qu'en classe et dans les manuels scolaires, la trigonométrie du triangle rectangle est vue avant (secondaire 4) le cercle trigonométrique qui, lui, est vu à l'aube des fonctions trigonométriques (secondaire 5). Aussi, couplé à la relation de Pythagore, l'élève peut déterminer les coordonnées de certains points sur le cercle servant à former des angles. Ceci lui permettrait

[...] d'établir certaines valeurs trigonométriques remarquables. Les concepts d'homothétie et de similitude des triangles complètent les apprentissages de ces relations trigonométriques. Cette approche permet à l'élève d'expliquer la présence de valeurs négatives dans les rapports trigonométriques ou la présence de rapports de même valeur pour deux angles différents. (p. 109)

Finalement, le PFEQ mentionne tout de même certains repères culturels d'ordre historique à propos de la trigonométrie et soulève que l'élève « découvrira [que la trigonométrie] a permis de répondre à des problèmes liés au géocentrisme ou à diverses considérations religieuses et, plus tard, de faciliter certains calculs en physique par la définition d'une nouvelle unité de mesure, le radian. »

Tout compte fait, le programme semble assez costaud relativement à la trigonométrie. Or, tel que le souligne Tanguay et Venant (2016) ainsi que d'autres chercheurs ayant étudié l'apprentissage de la trigonométrie, il semble que les sens véhiculés dans les manuels scolaires et les façons d'aborder la matière en classe peuvent provoquer une certaine fragmentation de ces notions bien qu'elles soient liées. Par exemple, Tanguay et Venant soulignent « qu'au fondement de la conceptualisation de l'angle serait la coordination entre son statut d'objet géométrique, les grandeurs qu'on lui associe et les mesures possibles de cette grandeur. » (Tanguay et Venant, 2016, p. 876, ma traduction)

### 1.2.2 Difficultés d'apprentissage et d'enseignement soulevées dans la recherche

Effectivement, bon nombre d'études font état des difficultés liées aux compréhensions de ces notions par les élèves et les enseignants. Plusieurs chercheurs ont soulevé, tant chez les élèves que chez les enseignants, des difficultés liées à une faiblesse dans les compréhensions des liens entre les différents cadres trigonométriques abordés (Akkoc, 2008 ; Thompson, Carlson et Silverman, 2007). Il semble que les liens entre les deux cadres, la trigonométrie du triangle puis du cercle, sont souvent laissés pour compte

dans l'enseignement. Ceci pourrait être une des sources des difficultés dans l'apprentissage de la trigonométrie et, en particulier, des fonctions trigonométriques.

### 1.2.3 Les notions élémentaires préalables à l'apprentissage des fonctions trigonométriques

On souligne également des lacunes dans la compréhension des notions élémentaires d'angle, de sa mesure et des unités de mesure, en particulier le radian (Fi, 2003 ; Moore, 2013). La nature des quantités<sup>1</sup> en jeu implique une conceptualisation complexe notamment dans le cas de la mesure d'angle. Il semble difficile de conceptualiser la quantité en jeu ici. En effet, les étudiants et les enseignants se construisent des compréhensions du concept de mesure d'angle « fragmentées et vides de sens », et ceci « inhiberait leur habileté à se construire des compréhensions flexibles à propos des fonctions trigonométriques » (Moore, 2013, p. 226, ma traduction). Or, très peu d'études se penchent sur les façons de les conceptualiser qui favoriseraient une compréhension flexible et significative de ces types de fonctions.

### 1.3 La cohérence conceptuelle dans l'apprentissage de la trigonométrie : différentes pistes d'approche proposées

Selon Thompson (2008), les sens que les étudiants se construisent lorsqu'ils apprennent une notion ont des conséquences sur leurs apprentissages subséquents. Il est d'avis que le manque d'attention aux sens, et à la cohérence entre ceux-ci, véhiculés tout au long des parcours scolaires et dans les curriculums serait effectivement à la source de plusieurs problèmes. Certains chercheurs se sont penchés sur cet enjeu. Notamment, en adoptant des perspectives historiques Proulx, 2003 ;

---

<sup>1</sup> Le terme « quantité », utilisé dans ce mémoire, réfère à ce qui est communément appelé « grandeur » dans la littérature francophone en didactique des mathématiques.

Charbonneau, 2002) ou encore conceptuelle (Tanguay, 2010 ; Bloch, 2009 ; Thompson, 2008 ; Moore, 2012), ils ont proposé des pistes de réflexion et des approches afin d'aborder cet enjeu de cohérence dans l'enseignement de la trigonométrie.

#### 1.3.1.1 Proulx et Charbonneau : Une perspective historique

Selon Proulx (2003), une analyse historique d'un concept mathématique peut aider à donner un sens à certaines difficultés vécues par les élèves en soulevant des problèmes que les mathématiciens auraient surmontés et qui auraient eu un rôle dans la compréhension du concept. Il met en garde cependant que le but ne serait pas de reproduire l'histoire dans l'enseignement du concept, mais bien d'y « déceler des pistes et des idées concernant son enseignement et son apprentissage » (p. 14).

Par cette perspective historique dans l'étude de la trigonométrie, Proulx fait quelques constats. D'abord, historiquement, la notion de mesure d'angle n'aurait pas été utilisée pour établir les rapports dans les triangles rectangles. Les cas limite de mesures d'angle,  $0^\circ$  et  $90^\circ$ , n'auraient pas été traités dans le cadre de la trigonométrie du triangle puisqu'il n'y avait aucune nécessité de le faire. Il semble aussi que dans l'histoire, on n'utilisait pas l'hypoténuse, mais bien le rapport tangente pour étudier le triangle rectangle. Finalement, il soulève que trois trigonométries se seraient développées au cours de l'histoire : 1) la trigonométrie du triangle rectangle, dans laquelle on a établi une relation entre les mesures d'angle et les côtés du triangle rectangle ; 2) la trigonométrie du cercle (qu'il qualifie de statique), dans laquelle la valeur du rayon n'aurait pas d'importance puisque qu'on aurait utilisé les mesures d'angle pour établir les rapports, puis ; 3) la trigonométrie du cercle trigonométrique (en combinant les deux premières trigonométries, qui se sont développées séparément), dans laquelle les Arabes auraient développé un cercle trigonométrique

complet, de rayon 1, où les longueurs de différents segments étaient considérées. De ceci auraient émergé les fonctions trigonométriques.

Charbonneau (2002) a lui aussi examiné l'histoire du développement de la trigonométrie en gardant en tête certaines considérations d'ordre curriculaire : le passage de la trigonométrie du triangle rectangle à la trigonométrie du cercle, la gestion des cas limites du sinus ( $0^\circ$  et  $90^\circ$ ), la gestion du sinus négatif lorsqu'il est un rapport de longueurs de deux côtés, puis l'introduction du radian. Il a constaté que, la progression des apprentissages en contexte scolaire ne correspond effectivement pas à l'évolution historique de la trigonométrie. Il identifie, d'une part et similairement à Proulx, que la notion sinus comme relation fonctionnelle a précédé, de près de 2 000 ans, la notion de sinus comme rapport et, d'autre part, que ce sont les difficultés d'écriture et de manipulation des fractions qui ont influencé les choix d'unités de mesure d'angle. De ce fait, il semble que ceci expliquerait en partie l'invention relativement récente du radian comme unité de mesure (en 1873).

Selon ces auteurs, il semble donc que les considérations historiques auraient amené un éclairage sur certaines difficultés, mais aussi, donneraient des pistes sur des façons d'aborder ces concepts qui seraient plus naturelles et cohérentes. Par exemple, le sinus vu comme relation fonctionnelle et sa place dans le cercle par la notion de corde appuieraient l'idée qu'introduire le sinus par la trigonométrie du cercle serait plus naturel que de l'introduire comme rapport des mesures de côtés dans un triangle rectangle. Cette approche permettrait également de gérer les cas limites du sinus ( $0^\circ$  et  $90^\circ$ ) et les valeurs négatives du sinus. On rappelle que ceux-ci n'ont pas été, historiquement, un obstacle dans le développement de la trigonométrie. Charbonneau est aussi d'avis que, puisque le radian est une invention récente essentiellement utile en calcul différentiel et intégral, on pourrait introduire les fonctions trigonométriques définies sur des mesures d'angle en degrés pour ensuite faire un changement d'unité

de mesure. Dans le cas de Proulx, parmi ses pistes, on retrouve l'idée d'établir les rapports trigonométriques en partant de l'angle pour ensuite l'étendre aux triangles rectangles en focalisant sur l'unicité des rapports et ainsi voir l'idée de similitude des triangles rectangles. Il propose aussi de définir dès le départ les rapports trigonométriques dans le cercle comme étant des rapports, des mesures de segments verticaux ou horizontaux sur la mesure du rayon, pour ensuite faire le pont entre le cercle et le triangle.

Par ce qui précède, on voit que d'une part, il y a des lacunes dans l'approche actuelle utilisée pour aborder la trigonométrie au primaire et au secondaire et que d'autre part, il y a des pistes avancées par certains chercheurs pour pallier ces lacunes.

#### 1.3.1.2 Tanguay : Une conception de l'unité de mesure « radian »

Bien qu'il n'ait pas adopté une perspective historique à proprement parler, Tanguay (2010) se penche sur la notion de radian. Il fait alors certains constats : on introduit la trigonométrie du cercle et les radians comme préalable à l'étude des fonctions trigonométriques ; l'utilisation du radian est principalement due au fait que « dans les domaines scientifiques où les fonctions trigonométriques ont un rôle central à jouer, ces fonctions s'appliquent systématiquement à une variable libre correspondant à une mesure en radians » et que les relations de dérivées de ces fonctions ne sont valables que si l'angle variable est mesuré en radian (p. 11). Il souligne aussi que, dans les manuels scolaires, la présentation du radian pourrait laisser sous-entendre que c'est une unité de mesure d'un arc de cercle et non de l'angle. Il propose alors un enchaînement pour prendre en compte ces considérations. Tout d'abord, il propose de faire le constat que le degré est « une mesure archaïque » introduite par les Babyloniens et les Égyptiens et qu'on aurait cherché à la remplacer. Ensuite, on peut se demander pourquoi on ne placerait pas les angles dans les cercles afin d'utiliser la proportionnalité entre leurs mesures et les arcs qu'ils sous-tendent. Question à

laquelle il répond que dans ce cas, en changeant de cercle, la mesure de l'arc varie selon le rayon tandis que la mesure d'angle ne varie pas. Ceci justifierait de mesurer les angles en radians en les plaçant au centre d'un cercle de rayon 1 (un cercle étalon) et d'utiliser la mesure de la longueur de l'arc sous-tendu pour mesurer l'angle. Il faudrait alors qu'on utilise la même unité de mesure pour mesurer la longueur de l'arc sous-tendu par l'angle et le rayon. La mesure obtenue deviendrait ainsi la mesure de l'angle en radians et serait indépendante de l'unité de mesure. Comme nous allons le voir dans la section suivante, les idées de Tanguay, Proulx et Charbonneau se rapprochent de celles de Thompson (2011) et de Moore (2010, 2012, 2013).

### 1.3.1.3 Thompson et Moore : Une approche quantitative des notions élémentaires en trigonométrie

Par ailleurs, un certain nombre de chercheurs intéressés aux conceptualisations des fonctions se sont appuyés sur les idées relatives au raisonnement quantitatif (Thompson et Carlson, 2017). La prémisse de ces idées est que le processus de conceptualisation des quantités en jeu, lorsqu'on donne initialement un sens à une situation rencontrée, constitue une base riche qui favorise une compréhension profonde et significative des concepts mathématiques (Thompson, 1994). Selon cette théorie<sup>2</sup>, une quantité est une entité conceptuelle qui implique de concevoir un attribut mesurable d'un objet (ou d'une classe d'objets). Les processus impliqués dans la construction de la quantité par les étudiants sont souvent laissés pour compte. Or, la dialectique entre la conceptualisation d'une quantité et la conceptualisation de sa quantification est complexe et nécessite, selon lui, une attention particulière. La quantification est vue comme le « processus de conceptualiser un objet et un attribut

---

<sup>2</sup> La théorie du raisonnement quantitatif de Thompson est au cœur de ce travail de recherche. Je reviendrai en détail sur les fondements et constituants de cette théorie dans le chapitre portant sur mon cadre théorique.

de cet objet de sorte que l'attribut ait une unité de mesure et que la mesure de l'attribut implique une relation proportionnelle (linéaire, bilinéaire ou multilinéaire) avec son unité» (Thompson, 2011, p. 37, ma traduction). Ce type de raisonnement semble fournir des opportunités d'approches intéressantes de nombreuses notions mathématiques scolaires des niveaux primaire, secondaire et collégial.

Ancré dans cette perspective, Moore s'est intéressé aux compréhensions et conceptualisations des concepts fondamentaux en trigonométrie et des fonctions sinus et cosinus. Les résultats de son projet doctoral ainsi que ceux de ses travaux subséquents semblent appuyer l'hypothèse qu'une approche quantitative des notions élémentaires d'angle, de sa mesure et des unités de mesure favoriserait une compréhension riche et polyvalente des fonctions trigonométriques. Moore et Thompson ont ainsi proposé une analyse conceptuelle de la mesure d'angle et des fonctions trigonométriques mettant l'accent sur les idées de quantification de l'angle à travers une approche par arc sous-tendu. La conceptualisation de la mesure d'angle à préconiser serait de la voir en termes d'un procédé de mesurage qui définit une relation multiplicative (la mesure d'une quantité est un certain nombre de fois celle de l'autre) entre une longueur d'arc sous-tendu et le rayon d'un cercle. Ceci permettrait de comprendre qu'une mesure en radian génère une classe d'équivalence d'arcs qui implique l'utilisation de la longueur du rayon comme une unité pour la comparaison multiplicative des longueurs d'arc. Cette approche permettrait d'introduire la notion de mesure d'angle, indépendamment de l'unité de mesure, comme représentant de la même relation quantitative. Elle amènerait ainsi une cohérence entre la mesure d'un angle en radian et la mesure d'un angle en degré et supporterait éventuellement l'introduction des fonctions trigonométriques de sorte qu'on les conceptualise en tant que relation covariationnelle entre la mesure de l'angle et la mesure de la distance verticale ou horizontale orientée (dans le cas des fonctions sinus et cosinus). Les travaux de Moore (2010) montrent qu'une approche d'enseignement des concepts



fondamentaux de la trigonométrie (angle, mesure d'angle, unités de mesure d'angle, les liens entre les cadres du cercle et du triangle) basée sur les raisonnements quantitatifs favoriserait une conceptualisation signifiante des fonctions trigonométriques.

#### 1.4 Pertinence de l'objet d'étude

Il est à noter que, depuis les travaux de Moore, il y a eu une évolution dans la recherche sur ces types de raisonnement amenant du coup un raffinement de la caractérisation de ceux-ci. Cependant, les recherches ne sont pas abondantes dans le cas particulier des conceptualisations des notions d'angle, de sa mesure, en particulier en radians. Il semble que les actions mentales relatives aux quantités jouent un rôle important et que l'articulation entre celles-ci demeure à étudier davantage. À la suite d'une analyse préliminaire de la littérature, j'ai constaté que peu de recherches se sont penchées spécifiquement sur le rôle et l'articulation des raisonnements quantitatifs dans le contexte d'apprentissage et d'enseignement des notions préalables aux notions de sinus et cosinus. Qui plus est, aucune, à ma connaissance, n'aurait été menée auprès d'étudiants de la fin du secondaire, soit des étudiants n'ayant pas déjà abordé les fonctions trigonométriques et le radian. Dans ce contexte, on constate qu'il y a place à étudier davantage le rôle, la mobilisation et l'articulation de ces raisonnements dans la conceptualisation des notions se situant en amont de l'apprentissage des fonctions trigonométriques auprès de jeunes ne les ayant pas encore abordées. Il est à noter que cette lacune dans la recherche portant sur le sujet a été soulevée par Moore lui-même « Future studies that investigate secondary students' quantification of angle measure are needed, the results of which will likely produce additional insights into the role of quantitative reasoning on secondary students' learning » (Moore, 2013, p. 243). L'objectif global est d'informer sur les façons de concevoir ces concepts qui

seraient favorables à un apprentissage cohérent et significatif des fonctions trigonométriques.

### 1.5 Questions et objectifs préliminaires de recherche

Ainsi, par mon projet de recherche, je vise principalement à contribuer à la caractérisation des raisonnements quantitatifs des étudiants dans le contexte de la conceptualisation l'unité de mesure « radian ». Je cherche à étudier la mobilisation et l'articulation de ces raisonnements en résolution de tâches visant à favoriser le développement de telles conceptions<sup>3</sup> s'appuyant sur les raisonnements quantitatifs.

Sur la base de ce qui précède, j'ai formulé une première question générale de recherche :

- Quelles conceptualisations semblent favorables à une compréhension robuste, polyvalente et cohérente de la mesure d'angle afin de permettre un apprentissage signifiant de la mesure d'angle en radian ?

De ceci ont émergé les questions préliminaires de recherche suivantes :

- Dans le contexte de l'apprentissage et de l'enseignement de la mesure d'angle et de l'unité de mesure « radian », comment les raisonnements quantitatifs mobilisés influencent-ils les conceptualisations développées et comment s'articulent-ils ?

---

<sup>3</sup> Dans ce mémoire, le terme « conception » ne fait pas référence à une conception inadéquate d'un objet mathématique. Le terme est utilisé entendu ici comme étant le résultat d'un processus de conceptualisation, voire une conception existante à propos d'un objet. Le terme « conceptualisation » réfère donc au processus par lequel on construit ou on développe une conception particulière.

- Comment les conceptualisations développées dans un contexte de résolution de tâches dont la visée est de provoquer des raisonnements quantitatifs influencent la compréhension des unités de mesure d'angle (quelconque, degré et radian) ?

Les objectifs généraux, me permettant potentiellement d'amener des éléments de réponse à ces questions, seraient les suivants :

- Investiguer les conceptions (existantes) de l'angle et de sa mesure chez l'apprenant.
- Investiguer comment ces conceptions se manifestent et sont mobilisées dans une approche par arc (visée conceptuelle des tâches présentées).
- Investiguer comment cette conceptualisation et sa manifestation dans une approche par arc permettraient un apprentissage signifiant de la mesure d'angle en radian.

## CHAPITRE II

### CADRE THÉORIQUE

Dans la problématique présentée, nous avons vu que la littérature qui aborde les façons de penser et de comprendre des apprenants à propos de l'angle et de sa mesure est limitée. Les objets d'études visent principalement à identifier des difficultés d'apprentissage liées à ces concepts. Les chercheurs proposent des pistes d'approches et des réflexions pédagogiques et didactiques, mais peu se sont penchés explicitement sur les conceptualisations et le développement d'une compréhension de ces concepts. En particulier, peu ou pas se sont penchées sur les façons de penser et de comprendre le concept d'unité de mesure qu'est le radian en contexte d'apprentissage. Je suis profondément d'avis qu'il y a autant de façons de faire des mathématiques qu'il y a d'humains (ou même d'être vivants !) qui en font. Toutefois, ces façons de penser et de comprendre sont complexes, difficiles à étudier puisqu'inaccessibles, sinon qu'à travers l'interprétation. Dans ce contexte, il y a trois dimensions théoriques qui me semblaient importantes d'approfondir et d'utiliser comme outil pour affronter cette complexité : 1) une posture épistémologique en cohérence avec ma perception de l'apprentissage, de la compréhension, etc. 2) Une approche méthodologique me permettant d'étudier en profondeur et d'une façon flexible les mathématiques d'un ou de plusieurs apprenants. 3) Une approche conceptuelle des notions mathématiques à l'étude. Ainsi, dans le présent chapitre, il m'apparaît important d'explicitier la posture épistémologique que j'adopte et d'en préciser certaines constituantes, telles des

théories mises en avant par certains tenants de cette posture, ainsi que des méthodologies de recherche associées. De plus, comme mentionné dans le chapitre précédent, j'ai décidé de me doter d'une approche particulière de la notion d'angle et de sa mesure en radian. Je décrirai donc en détail les fondements de ces construits théoriques qui guideront d'une façon cruciale l'ensemble de cette étude.

Plus spécifiquement, dans ce chapitre, je présenterai, dans un premier temps, les fondements de la théorie de l'apprentissage que j'ai adoptée. Celle qui me semblait la plus en adéquation avec ma vision de l'apprentissage des mathématiques et mes objectifs de recherche est celle du constructivisme radical, de von Glasersfeld (1995). Ensuite découlant de cette théorie, je définirai certains termes et processus impliqués dans l'apprentissage ainsi que ce que j'entends par actions, images et opérations mentales, en prenant appui sur les écrits de Thompson (1990 ; 1994), Steffe et Kieren (1994), Simon et Tzur (2004) et Simon, Saldanha, McClintock, Akar, Watanabe, et Zembat (2010). Finalement et toujours en lien avec ma posture épistémologique, je mentionnerai les approches méthodologiques bien documentées reliées à ces postures. En particulier, la méthodologie du teaching experiment (Steffe, 1991 ; Steffe et Thompson, 2000) et du Hypothetical Learning Trajectory (Simon et Tzur, 2004) que j'ai mises en oeuvre dans cette étude. Dans un deuxième temps, j'aborderai l'enjeu de cohérence conceptuelle et expliciterai l'approche par analyse conceptuelle de Thompson (inspirée de von Glasersfeld). Effectivement, tel que mentionné, cet enjeu m'apparaissait comme une porte d'entrée pour justifier la pertinence de se pencher sur des notions élémentaires de la trigonométrie en contexte d'apprentissage scolaire, et de les placer dans un cadre conceptuel. Ainsi, dans un troisième temps, je décrirai la théorie du raisonnement sur les quantités de Thompson et l'approche par arc de la mesure d'angle de Moore, qui ont elles-mêmes été développées par ces auteurs dans cet esprit de cohérence conceptuelle. Il est à noter que cette troisième partie de mon cadre théorique est sans doute celle qui sera la plus détaillée afin d'offrir les outils

nécessaires à la lecture de ce mémoire puisque ces approches ont guidé et façonné l'ensemble de l'étude.

## 2.1 Posture épistémologique

Tel que mentionné, il me semble important, dans le contexte d'une étude se penchant spécifiquement sur l'investigation des façons de penser et de construire les savoirs développés à propos de notions mathématiques, d'offrir au lecteur un aperçu de ce qu'on entend par apprentissage et de bien mettre en avant les construits théoriques spécifiques qui seront utilisés en définissant les termes qui seront utilisés tout au long du présent document.

### 2.1.1 Pourquoi préciser une posture épistémologique ?

Un des premiers principes qui a retenu mon attention lors de mon parcours de maîtrise fut l'importance de préciser la posture épistémologique que l'on adopte. Dans le contexte d'une pluralité d'approches de recherche en didactique des mathématiques, ceci me semble effectivement d'une importance capitale pour que les lecteurs développent le sens des assises de ce que j'avance. Cette posture encadre la rationalité de mon étude. Mon objectif de recherche étant d'offrir le portrait d'une façon de comprendre la notion de radian et d'étudier certaines facettes du processus d'apprentissage, il m'apparaît nécessaire d'expliquer la vision que j'adopte à propos de ce que pourrait être un processus d'apprentissage.

### 2.1.2 von Glasersfeld et Piaget

Ma recherche est ancrée dans les théories fondamentales du constructivisme radical de von Glasersfeld, inspirées de l'épistémologie génétique de Piaget. Von Glasersfeld a présenté son interprétation dite « radicale » de la théorie de l'épistémologie génétique de Piaget en 1975 à la Société Jean Piaget à Philadelphie. Plusieurs

chercheurs et acteurs du milieu de l'éducation ont abordé de près ou de loin ces théories. Sans toutefois entrer dans les détails de ces théories, j'en énonce les fondements, qui donneront au lecteur l'essentiel dont j'ai conçu l'apprentissage dans ce projet.

Pour débiter, je fais appel à Simon et Tzur (2004), qui énoncent les trois principes clés du constructivisme radical :

- 1) Les connaissances sont créées à travers l'activité humaine. Les humains n'ont pas accès à une connaissance qui soit indépendante de leurs façons de connaître (« knowing »);
- 2) Les connaissances d'un individu sont la seule base sur laquelle il peut en construire d'autres. Celles-ci à la fois contraignent et permettent ce que l'individu peut assimiler — percevoir, comprendre ;
- 3) L'apprentissage est un processus qui transforme les façons de connaître (« knowing ») et d'agir d'un individu (Simon et Tzur, 2004, p. 306, ma traduction).

Effectivement, le constructivisme part du principe que l'individu construit ses propres connaissances par son activité et la réflexion sur son activité au travers de son expérience. Selon von Glasersfeld (2001), l'apprentissage est une activité conceptuelle dans laquelle il ne peut y avoir de compréhension sans réflexion. Elle implique une prise de conscience des «connexions [que l'on peut faire] en coordonnant des éléments sensoriels ou des opérations mentales» (p. 5). La connaissance devient alors le produit de l'activité de l'individu qui elle-même, constitue une opération mentale. L'hypothèse est que l'activité cognitive ne s'effectue qu'à partir de l'expérience et dans l'esprit de l'individu. Ainsi, les savoirs d'un individu sont fondamentalement inconnus des autres ou non observables par les autres. L'apprentissage est conçu comme un processus impliquant l'abstraction réfléchissante. Je reviendrai plus loin sur cette constituante du processus.

### 2.1.2.1 Actions et opérations mentales, schèmes et constituants d'un processus d'apprentissage

L'activité (mathématique) d'un individu est vue ici comme les actions mentales guidées par un but lorsqu'il ou elle s'engage dans une tâche (mathématique). Thompson précise ce qu'action mentale signifie dans cette théorie et son lien avec les opérations mentales (des systèmes d'actions mentales) et les processus d'internalisation, d'intériorisation et d'abstraction. Il y aurait trois types d'images mentales liées aux opérations mentales : 1) une image qui représente l'objet ; 2) une image qui représente une phase ou encore le résultat d'une action portée sur un objet ; 3) une image dynamique et mobile liée aux transformations de l'objet par les actions portées sur celui-ci. Ce dernier type d'image n'est pas un appui à la pensée puisque les actions qu'elles représentent sont indépendantes de leur réalisation physique et consistent en un «regroupement de transformations en combinaisons libres, transitives et réversibles» (Thompson, p. 3-4, 1990, ma traduction). L'intériorisation serait alors un processus de reconstruction et d'organisation progressive d'actions mentales en opérations mentales. Les opérations mentales sont vues comme un système d'actions mentales coordonnées pouvant être invoquées indépendamment des images desquelles elles sont issues. Un schème d'opérations mentales serait une organisation d'actions constituée de trois caractéristiques : 1) la reconnaissance d'une certaine situation (un état interne nécessaire à l'activation des actions qui la composent ; 2) une activité spécifique qui lui est associée (les actions qui la composent) ; 3) l'anticipation du résultat que cette activité produit selon l'expérience vécue dans le passé. Selon von Glasersfeld (1995), c'est une anticipation « imagée » (pas nécessairement iconique) du résultat de l'action. Les schèmes émergent donc du processus d'assimilation de l'expérience aux façons de comprendre (« knowing »).

On lie l'abstraction réfléchissante à l'intériorisation, soit le processus par lequel les actions mentales s'organisent, se coordonnent et se symbolisent (Thompson, 1994).



L'abstraction réfléchissante est entendue comme une reconstruction des actions mentales de sorte que leur déclenchement soit progressivement moins dépendant de leur expérience immédiate (lié à l'apprentissage). Ceci constitue une assimilation à un niveau supérieur de la pensée, soit aux schèmes d'opérations mentales (liés à la compréhension). Simon et Tzur (2004) ont poussé ce construit de la théorie de Piaget à un autre niveau en proposant la *reflection-on activity-effect relationship*. Ce type de réflexion serait lié au cycle d'assimilation-accommodation entendu comme le moteur du processus d'apprentissage. Je reviendrai plus en détail sur ce construit théorique lorsque j'aborderai la méthodologie du Hypothetical Learning Trajectory mis en avant par ces mêmes auteurs.

#### 2.1.2.2 Façons de penser et façon de comprendre

Dans son cadre conceptuel nommé *DNR-based instruction*<sup>4</sup>, Harel (2007) propose une définition opérationnelle de l'apprentissage. Partant de principes et de prémisses, on propose de définir les constituants d'un ou des savoirs. Dans ce cadre, les savoirs sont constitués de façons de penser et de comprendre qui sont liées aux actions mentales. Les actions mentales sont, par exemple, les actions de comparer, de justifier, d'expliquer, de prouver, etc. tandis que les produits de ces actions mentales sont vus comme les façons de comprendre. Les caractéristiques cognitives ou encore le caractère cognitif de ces façons de comprendre amènent des façons de penser associées à une action mentale chez l'individu. L'auteur donne l'exemple suivant : une certaine justification est énoncée par l'acte mental de justifier. Cette justification est le produit de l'action donc une façon de comprendre. Une justification énoncée par l'acte de justifier est, par exemple, d'ordre déductif, c'est-à-dire le caractère de la

---

<sup>4</sup> L'acronyme DNR réfère aux trois principes aux fondements du cadre proposé par Harel : le principe de Dualité ; le principe de Nécessité ; et le principe de Raisonnement répété.

justification émise. Ce caractère est une façon de penser liée à l'action en question. Ainsi, selon le DNR, les façons de penser et les façons de comprendre seraient les éléments constitutifs des savoirs d'un individu. Il y aurait ainsi une dialectique complexe entre les façons de penser et les façons de comprendre chez un individu. Un examen approfondie de celles-ci peut amener le chercheur à énoncer des éléments descriptifs intéressants qui aident à poser des choix didactiques en contexte d'apprentissage scolaire. Bien que je n'utiliserai pas précisément cette définition d'action mentale et de constituants de savoirs, je retiens un des éléments au fondement de ce cadre théorique. Harel (voir aussi Harel et Koichu, 2010) s'appuie sur trois principes fondateurs : le principe de dualité entre les façons de penser et les façons de comprendre ; le principe de nécessité (besoin intellectuel) ; et le principe de raisonnement répété qui est en lien avec l'internalisation, l'organisation et la rétention des savoirs. C'est ce troisième principe que j'ai utilisé comme guide, en particulier dans l'élaboration des tâches présentées à la participante. Harel explique que le processus d'apprentissage repose en partie sur l'internalisation, l'organisation et la rétention des savoirs vus comme un ensemble de façons de penser et de comprendre. Ils sont d'avis que la répétition du raisonnement offre un environnement dans lequel ces processus peuvent avoir lieu. Nous allons voir que ce principe a été appliqué tout au long de l'expérimentation afin de fournir à la participante cet environnement. Cependant, là où je me détache de leur perspective est que l'environnement dans lequel a été placée la participante n'impliquait pas, à tout le moins intentionnellement, des tâches « perturbatrices ». Effectivement, me rangeant plutôt du côté d'un des constats avancés par Simon et al (2010), mon objectif de recherche ne nécessitait pas de mettre la participante en situation de perturbation. Il s'agissait plutôt de créer un environnement de tâches qui me permettrait d'étudier en profondeur ses raisonnements et de provoquer, potentiellement, le développement de certaines opérations mentales favorables à une assimilation du concept de radian.

### 2.1.3 Des approches méthodologiques reliées à ces postures

Comme mentionné en début de chapitre, je tenais ici à présenter les approches méthodologiques reliées à ma posture épistémologique. Bon nombre de chercheurs ont adopté cette posture. Certains l'ont complétée en tenant compte d'autres sphères de l'enseignement et de l'apprentissage (l'approche socioconstructiviste qui a informé la méthodologie du *Design research* mise en avant par Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, et Schauble (2003) en est un exemple). Dans cette section je ne décrirai que brièvement les fondements de la méthodologie du « *teaching experiment* » [TE] (Steffe, 1991 ; Steffe et Thompson, 2000) pour orienter de façon préliminaire le lecteur. Je parlerai aussi de la méthodologie du Hypothetical Learning Trajectory [HLT] (Simon et Tzur, 2004). J'ai effectivement utilisé le HLT comme outil de préparation à mon TE ainsi que, localement, durant le TE. Il est à noter que je détaillerai les aspects plus techniques de ces méthodologies et j'expliquerai comment je les ai mises en œuvre dans le Chapitre III — Méthodologie. Ici, je ne présenterai qu'un survol des aspects fondamentaux et théoriques de ces méthodologies.

#### 2.1.3.1 La méthodologie du Teaching Experiment de Steffe et Thompson

Le Teaching Experiment est une méthodologie qui permet d'étudier en profondeur les conceptions existantes et les processus de conceptualisations en développement chez un apprenant (Steffe et Thompson, 2000 ; Cobb, 1999 ; Steffe, 1991 ; Cobb et Steffe, 1983) :

The constructivist teaching experiment is a technique that was designed to investigate children's mathematical knowledge and how it might be learned in the context of mathematics teaching. [...] the role of the researcher changes from an observer [...] to an actor who intends to construct models that are relative to his or her own actions. (Steffe, 1991, p. 177)

Cette méthodologie de genèse et de collecte de données s'appuie principalement sur des échanges entre participants et chercheur, dans lesquels le chercheur tente de vérifier certaines hypothèses sur les manières de penser et de faire. Il s'agit d'une méthodologie qui demande aux chercheurs de recueillir des données et de les analyser, à un certain niveau, en cours de collecte afin de générer des hypothèses préliminaires. Ces dernières sont ainsi testées en cours d'expérimentation. C'est une méthodologie qui façonne fortement l'analyse des données qu'elle génère. Durant l'interaction, certaines questions du chercheur sont en lien avec les objectifs de recherche, mais aussi avec les réponses et interventions du ou des participants.

Ainsi, le chercheur se trouve en constant mouvement entre la formulation de questions, l'analyse des réponses et le développement de sa vision de la conceptualisation étudiée :

[...] teaching experiments are done to test hypotheses as well as to generate them. [...] The research hypotheses one formulates prior to a teaching experiment guide the initial [...] overall general intentions. [However] the researcher's intention is to remain aware of the students' contributions to the trajectory of teaching interactions [...]. In a teaching episode, the students' language and actions are a source of perturbation for the teacher-researcher. It is the job of the teacher-researcher to continually postulate possible meanings that lie behind students' language and actions. (Steffe et Thompson, 2000, p. 275-276)

Cette méthodologie implique des interactions entre participant(s) et chercheur durant lesquelles ce dernier tente de vérifier certaines hypothèses sur les manières de penser et faire du participant. On observe gestes, actions, etc., tout indice pertinent de l'activité mathématique du participant. Il y a donc cueillette des données et analyse en cours de collecte pour générer des hypothèses préliminaires. On vise à tester les hypothèses en cours d'expérimentation (d'une séance à l'autre). Le débriefing entre observateur et chercheur s'avère très utile pour partager des réflexions qui seraient

peut-être passées inaperçues chez l'un ou l'autre des acteurs de la recherche. La méthodologie du teaching experiment est utilisée pour aider le chercheur à comprendre le processus de construction d'une conceptualisation donnée (Simon et al., 2010). En souhaitant faire développer une conceptualisation chez le participant, le chercheur utilise les principes du TE pour documenter le processus de construction. Ainsi, en plus d'une dualité entre analyse et question, le chercheur doit composer avec une volonté d'introduire la conceptualisation visée, avec la possibilité d'un déroulement autre. Il doit faire preuve d'ouverture et de flexibilité.

#### 2.1.3.2 La méthodologie du *Hypothetical learning trajectory* de Simon

Selon Lappan et Briars (1995, cités dans Simon et Tzur, 2004), la sélection des tâches qui seront soumises aux étudiants affecte leur apprentissage d'une façon très significative. Le cadre méthodologique de l'Hypothetical Learning Trajectory (Trajectoire hypothétique d'apprentissage, THA) proposé par Simon (1995) procure une façon de concevoir les processus d'apprentissage hypothétiques et le design ou la sélection des tâches mathématiques. La THA est composée de trois dimensions : l'objectif d'apprentissage qui définit la trajectoire ; les activités d'apprentissage ; le processus d'apprentissage hypothétique (Simon, 1995). On débute la THA par des hypothèses brutes à propos du processus d'apprentissage, incluant le contenu mathématique mobilisé ainsi que les actions mentales et les comportements qui permettent d'arriver ultimement à la conceptualisation de la notion mathématique visée. On y décrit la structure des tâches et on discute en détail le rôle de chacune, en lien avec l'anticipation de l'activité mathématique des élèves, les effets pertinents de l'activité et la réflexion sur la relation effet-activité (the reflection on activity-effect relationships). La THA focalise sur la séquence de tâches, et sur la façon dont elle est structurée. Les séquences sont itératives, mais ce sont les différences entre ces séquences qui contribuent à témoigner de la façon dont chaque schème se construit sur les fondements des schèmes préexistants.

Ma recherche s'est située au niveau des façons de penser et des compréhensions des élèves, et c'est ce qui est au centre du design et de l'enseignement. Ma méthodologie de cueillette et analyse des données, qui sera détaillée dans le Chapitre III, Méthodologie, inclut une élaboration de THA. Cette THA a joué le rôle d'analyse *a priori* de la séquence d'enseignement-apprentissage et a servi d'outil en cours d'expérimentation. Par mon rôle d'enseignante dans le TE, j'ai fait appel à ce cadre méthodologique. Dans le processus de recherche, j'ai été appelée à soulever les objectifs d'apprentissage (*learning goals*); à élaborer une trajectoire hypothétique pour cet apprentissage; à élaborer une séquence de tâches en fonction de cette trajectoire; à identifier les divergences possibles; tout cela pour en arriver à une maîtrise assez robuste des compréhensions mathématiques et des difficultés conceptuelles.

Ceci étant dit, il ne faut pas perdre de vue que l'objet d'étude de ce mémoire est la conceptualisation et les raisonnements de l'apprenant et non les tâches ou la séquence, bien que ces dernières auraient un impact sur les premiers, tel que nous verrons dans l'analyse des données et la présentation des résultats. La différence réside dans le fait que l'accent n'est pas mis sur l'ajustement de la trajectoire d'apprentissage en fonction du savoir visé, mais bien sur la trajectoire d'apprentissage effective (qui survient durant le TE) de l'apprenant.

J'expliquerai de façon plus détaillée dans le Chapitre III, Méthodologie, comment j'ai utilisé et mis en oeuvre cette méthodologie, et comment mon utilisation de celle-ci diffère de celle de Simon et Tzur (2004). De plus, il est à noter que la théorie de Simon, dans la suite de son développement, s'appuie sur le socioconstructivisme, car il aborde le phénomène en contexte de salle de classe. Il faut tenir compte de cet aspect « social » et des interactions même dans un TE individuel. Bien que je

mentionnerai le rôle possible des interactions survenues, cet aspect « social » n'a pas été abordé ni discuté en profondeur dans le présent mémoire.

## 2.2 Cohérence et analyse conceptuelle

Dans cette section, il sera question de cohérence entre les différentes façons d'aborder des concepts mathématiques dans les curriculums. Cette considération a notamment été soulevée par Thompson (2008), qui soutient que l'élaboration d'analyses conceptuelles permet de donner un sens qui transcende les concepts mathématiques. Il s'agit donc, dans cette section, de faire un survol des principes de cette approche tirée de von Glasersfeld (1995), selon la perspective de Thompson (2008).

### 2.2.1 La cohérence conceptuelle et le curriculum

Les sens que l'on donne aux concepts mathématiques, notamment les quantités dans une situation donnée, peuvent être construits (Thompson, 2008). Ces sens que les étudiants se construisent lorsqu'ils apprennent une notion ont des conséquences sur leurs apprentissages subséquents. Par ailleurs, selon l'auteur, les débats actuels relatifs aux curriculums et façons d'enseigner relèvent des systèmes de sens que l'on attribue aux objets et concepts mathématiques. C'est donc un enjeu basé sur des idées et alors, forcément, la notion de cohérence doit se poser. Il constate qu'un nombre croissant d'occurrences du mot « cohérence » (et ses dérivés) apparaît dans les publications<sup>5</sup> en enseignement et apprentissage des mathématiques (les curriculums, les publications gouvernementales). Il souligne cependant que

---

<sup>5</sup> Les travaux de Thompson concernent le contexte scolaire aux Etats-Unis.

[...] ces publications n'apportent pas d'explications claires sur ce qu'on entend par cohérence ou comment on doit réfléchir sur le sujet de la cohérence. Les définitions mises en avant, lorsque présentées, sont principalement en termes des sujets d'apprentissage et non en termes d'idées. De plus, on y parle de « compréhension conceptuelle », mais on ne spécifie en rien ce que c'est ni même comment l'enseigner. (Thompson, 2008, p. 32, ma traduction).

En somme, l'auteur est d'avis que le manque d'attention au sens et à la cohérence des sens véhiculés tout au long des parcours scolaires et dans les curriculums serait à la source de plusieurs problèmes.

Moore (2012) abonde dans le même sens quand il relève certaines incohérences rencontrées dans les curriculums et manuels scolaires, en lien avec les concepts de la trigonométrie. En relevant un ensemble de définitions de la notion de mesure d'angle, puis de la fonction sinus, il illustre le besoin de se pencher sur cette question de cohérence et la compatibilité des sens donnés aux notions mathématiques.

Les définitions que l'on donne dans les manuels ont comme intention de saisir ou véhiculer un sens à une notion ou une idée. Or, cognitivement, les sens sont composés d'un système complexe de schèmes et d'opérations mentales. Ainsi, ce qui serait le plus important est la structure cognitive qui est évoquée par la définition proposée. Dans le cas de la trigonométrie, la cohérence pourrait correspondre aux sens donnés à la mesure d'angle qui supporteraient la construction de compréhensions signifiantes des fonctions trigonométriques. (Moore, 2012, pp. 76-77, ma traduction)

Ce souci de cohérence entre les différents sens des concepts mathématiques scolaires a donné lieu au développement d'une approche des notions de mathématiques scolaires par analyse conceptuelle, une méthodologie que Thompson (2008) présente et qui est inspirée de von Glasersfeld (1995). Celle-ci permettrait de se pencher sur la question suivante : « Quelles sont les opérations mentales qui doivent être mises en œuvre pour voir une situation donnée de la façon particulière dans laquelle une



personne est en train de la voir ? » (von Glasersfeld, 1995, p. 78 dans Thompson, 2008).

### 2.2.2 L'approche par analyse conceptuelle au sens de Thompson

Afin de répondre à ce souci de cohérence, Thompson propose une approche par analyse conceptuelle qui constituerait

un outil puissant offrant des descriptions imagées de la cognition mathématique tout en considérant les aspects dynamiques de la pensée et de la compréhension mathématique. Elle permettrait de répondre au besoin de décrire ce que les étudiants pourraient comprendre lorsqu'ils apprennent de plusieurs façons différentes un ou des concepts mathématiques donnés. (Thompson, 2008, p. 45, ma traduction)

On s'intéresse donc aux conceptualisations possibles des objets mathématiques, c'est-à-dire aux opérations mentales en jeu lorsqu'on voit une situation particulière, d'une façon particulière. L'approche, tel qu'entendu ici, permettrait

La construction de modèles de ce que les étudiants conceptualisent à un moment spécifique et ce qu'ils comprennent dans des situations spécifiques ; la description de façons de conceptualiser une ou des notions pouvant être favorables à la compréhension de concepts mathématiques ; la description de façons de conceptualiser une ou des notions pouvant être défavorables à la compréhension de concepts importants et la description des façons de conceptualiser pouvant être problématiques dans des situations spécifiques ; l'analyse de la cohérence entre différentes façons de comprendre un ensemble de concepts. Ces concepts sont décrits en termes de leur(s) sens, et ces sens peuvent être étudiés par rapport à leur compatibilité et support mutuels. (Thompson, 2008, p. 45, ma traduction)

C'est dans cet esprit et dans un but de contribuer à notre compréhension des conceptualisations et raisonnements des apprenants relativement au concept de l'angle et de sa mesure en radians, que j'adopte et me base sur cette approche dans ce travail.

### 2.3 Raisonnement sur les quantités

C'est donc dans ce contexte d'élaboration de mon projet de recherche que je me suis posé la question suivante : quel(s) rôle(s) jouent les raisonnements de type quantitatifs, au sens de Thompson, et comment s'articulent-ils dans la conceptualisation de la mesure d'angle en radian ? Afin de m'outiller pour aborder cette question, il me semblait primordial d'explorer et d'approfondir mes connaissances concernant les aspects suivants : 1) Les éléments théoriques concernant les types de raisonnements à l'étude et les outils proposés pour les décrire ; 2) Les modèles proposés concernant les conceptualisations de notions mathématiques spécifiques, en particulier ceux relatifs aux notions élémentaires de la trigonométrie. C'est avec les questions suivantes en tête que je me suis penchée sur cette littérature : en quoi consistent ces raisonnements ? Comment sont-ils liés ? Quels sont les outils descriptifs de ces raisonnements ? Comment aborde-t-on une notion ou un ensemble de notions mathématiques conceptuellement dans une telle approche et quel en serait l'apport ? Spécifiquement, comment aborde-t-on conceptuellement la trigonométrie en se basant sur cette théorie ?

Mentionnons que depuis une quinzaine d'années, des chercheurs se sont intéressés à l'apport et au(x) rôle(s) de ces raisonnements de type quantitatif, issus de la théorie de Thompson dans la conceptualisation de plusieurs notions mathématiques comme les fonctions et la dérivée. Il y a eu évolution et précision des outils de description, caractérisation et analyse des raisonnements. Un ensemble de chercheurs s'appuyant fortement sur les travaux de Thompson ont poussé la théorie et se sont penchés sur, notamment, les idées de variation et de covariation entre les quantités (Thompson et Saldanha, 2003 ; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen et Hsu, 2002 ; Castillo-Garsow, 2012 ; Moore, 2010 ; Passaro, 2016). En effet, ces deux types de raisonnements, sur la variation et sur la covariation, ont été étudiés par un nombre croissant de chercheurs

et ont fait l'objet d'élaboration de modèles de développement de ceux-ci (Thompson et Carlson, 2017). Néanmoins, ce qui est présenté ici est les théories élaborées par Thompson (1990, 1994, 2011) à propos du raisonnement quantitatif d'un point de vue élémentaire. Les raisonnements sur la variation et la covariation n'ont pas été analysés dans ce que j'ai choisi de présenter dans ce mémoire. Nous verrons plus loin que le TE a effleuré la modélisation du mouvement circulaire pavant ainsi la voie pour la fonction sinus. Or, j'ai décidé de ne me pencher que sur ce qui porte sur l'angle, sa mesure et l'unité de mesure « radian ». Ceci ne m'a donc pas amenée à un niveau qui implique substantiellement les raisonnements sur la variation et la covariation.

### 2.3.1 Fondements de Thompson

Dans l'élaboration de mon projet de recherche, je me suis donc penchée sur les raisonnements déployés dans le contexte de la conceptualisation de l'angle, de sa mesure et de l'unité de mesure radian. La recherche sur laquelle j'ai majoritairement pris appui se base sur une perspective théorique impliquant, en ses fondements, le raisonnement quantitatif. C'est-à-dire qu'on part de la prémisse que la conceptualisation des quantités en jeu, vues comme des objets conceptuels, lorsqu'on donne initialement un sens à une situation donnée, est un processus complexe à développer. Or, ce processus constitue une base riche pour une compréhension profonde et signifiante des concepts mathématiques dont il est question dans mon étude. De plus, tel que mentionné ci-haut, ce type de raisonnement semble être au cœur d'autres raisonnements donnant des opportunités d'approches intéressantes de nombreuses notions des mathématiques scolaires des niveaux primaire, secondaire et collégial.

### 2.3.1.1 La quantité et la quantification de Thompson

Avec l'objectif de poser les fondements d'une théorie permettant de favoriser et de supporter le raisonnement algébrique, Thompson (1990, 1994, 2011) a proposé un réseau de sens et de définitions des concepts de quantités, de structures quantitatives et de raisonnement quantitatif. Selon Thompson (2011),

[...] what is in students' minds is what matters. The stance that quantities are in minds, not in the world, actively supports being attentive to how students conceive situations and serves as an active reminder that their conceptions of even the most "obvious" aspects of a situation are likely to differ from ours in important ways. (p. 35)

Les quantités sont ainsi considérées comme des constructions mentales qui prennent forme et résident au sein de l'entendement d'un individu. Une quantité est une entité conceptuelle qui implique de concevoir un attribut mesurable d'un objet (ou d'une classe d'objets). La quantification est vue comme le « processus de conceptualiser un objet et un attribut de cet objet de sorte que l'attribut ait une unité de mesure et que la mesure de l'attribut implique une relation proportionnelle (linéaire, bilinéaire ou multilinéaire) avec son unité » (Thompson, 2011, p. 37, ma traduction). Ainsi, une quantité est composée de : 1) un objet ; 2) un attribut de cet objet ; 3) une unité ou une dimension appropriée, c.-à-d. une classe d'équivalence d'unités ; 4) un processus par lequel on peut assigner une valeur numérique à l'attribut.

Par de nombreux exemples en contextes mathématiques spécifiques, Thompson, tout comme d'autres chercheurs (Castillo-Garsow, 2012 ; Moore, 201 ; Moore et LaForest, 2014), démontrent qu'il est important de se pencher sur la façon dont les étudiants conceptualisent les situations, incluant les quantités en jeu dans celles-ci, et sur le rôle crucial du processus de quantification sous-jacent à la construction des quantités. En effet, il s'agit d'appréhender ce processus comme racine de la pensée (ou du raisonnement) mathématique impliquant des quantités. Notamment, à travers

l'analyse du mouvement d'unités de raisonnement (Passaro, 2016), on dénote que, tout au long de la résolution d'une tâche, l'étudiant fait appel à des unités « racines » caractérisées par Passaro comme des unités se référant précisément à l'identification, voire à la construction, des quantités en jeu dans une situation donnée.

Par ailleurs, Thompson soulève la complexité du processus de quantification et de la compréhension des situations quantitatives qui requièrent la mise en œuvre de ce processus. À titre d'exemple, il définit une différence (communément définie comme le résultat d'une opération de soustraction) comme étant une quantité résultant d'une comparaison additive entre deux quantités. Cette différence, une quantité, existerait dans une structure quantitative composée d'une quantité A, d'une quantité B et du résultat de la comparaison. Dans cette situation, les étudiants (participants à l'étude) utilisent la soustraction pour évaluer la quantité résultante, mais ne reconnaissent pas nécessairement que deux quantités ont dû être comparées pour obtenir la quantité qu'ils viennent d'évaluer. Au départ de ce constat, Thompson voit donc un souci de développer les opérations mentales quantitatives autant que, et en concomitance avec, les opérations numériques.

Ici, une opération quantitative est entendue comme une opération mentale, donc générée dans l'action, par laquelle on conçoit une nouvelle quantité en relation avec une ou plusieurs quantités déjà conçues. Cette opération quantitative crée une structure quantitative, c'est-à-dire une relation entre la quantité et la ou les quantités sur lesquelles on a opéré pour la construire. En effet, les opérations mentales qui génèrent des quantités sont étroitement liées à celles qui génèrent des nombres. Elles sont néanmoins différentes et les distinctions subtiles sont nécessaires à ne pas les confondre dans un éventuel contexte qui impliquerait des structures quantitatives plus complexes. Ce qu'on entend ici par opérations quantitatives est les opérations mentales par lesquelles on conçoit quantitativement les situations. Les opérations

numériques sont les opérations par lesquelles on établit les relations entre les mesures des quantités. Les élèves utilisent des opérations numériques qui, bien qu'elles puissent implicitement représenter des opérations quantitatives, au moment où elles sont utilisées, sont la plupart du temps dépourvues d'un sens quantitatif (tel qu'entendu ici) et ne représenteraient pas nécessairement ces opérations quantitatives sous-jacentes. Qui plus est, la structure de ces opérations pourrait même être très sophistiquée, mais au moment où elles sont posées, l'élève pourrait ne pas avoir en tête les opérations mentales quantitatives qu'elles peuvent représenter. Nous allons voir que ceci est un des points centraux de mon interprétation des mathématiques de la participante dont il est question dans ce mémoire.

Pour résoudre une situation quantitativement, on doit prendre conscience des structures quantitatives et des opérations numériques à effectuer pour évaluer une quantité à l'intérieur de ces structures. Thompson (2011) présente une liste de structures quantitatives (entendues comme des relations quantitatives) et l'opération arithmétique associée (Tableau 2.1). Nous verrons, au terme de l'analyse des mathématiques convoquées par la participante à ce projet, que cette habileté à concevoir une situation quantitativement, au sens de Thompson, ne va pas de soi, même dans le cas de structures et opérations arithmétiques associées élémentaires.

Tableau 2.1 Structures quantitatives et opérations arithmétiques (Thompson, 2011<sup>6</sup>)

Structure	Opération arithmétique associée
Une quantité qui est le résultat d'une...	
combinaison additive de deux quantités	addition
comparaison additive de deux quantités	soustraction
combinaison multiplicative de deux quantités	multiplication
comparaison multiplicative de deux quantités	division
d'une « instanciation » d'un taux	multiplication
d'une composition de rapports	multiplication

Dans le cas où la valeur de la quantité résultante est connue, mais que la valeur d'une des quantités la produisant est inconnue, on doit inférer l'opération numérique à effectuer en se basant sur ce qu'on connaît des quantités en jeu. Ces opérations numériques associées à des structures quantitatives sont présentées dans la Tableau 2.2 ci-dessous. Encore faut-il que l'élève fasse appel à ces opérations quantitatives pour inférer l'opération numérique à effectuer. Nous allons voir que ceci m'a été utile pour caractériser les raisonnements mobilisés par la participante.

Tableau 2.2 Opérations numériques où la valeur de la quantité résultante est connue, mais dont la valeur d'une des quantités la produisant est inconnue (Thompson, 2011)

si $a = b \times c$	alors $c = a \div b$ et $b = a \div c$
si $a = b \div c$	alors $c = b \div a$ et $b = a \times c$
si $a = b + c$	alors $c = a - b$ et $b = a - c$
si $a = b - c$	alors $c = b - a$ et $b = a + c$

---

<sup>6</sup> Dans Thompson (1990), il présente un tableau semblable dans lequel il ajoute les structures suivantes : généraliser un rapport ; composer des taux.

À l'instar des curriculums du primaire asiatiques et russes, demander aux élèves de résoudre une situation sans calculer le résultat pourrait les prédisposer à porter une attention aux structures quantitatives impliquées dans ces calculs. Ainsi, Thompson soutient que les élèves pourraient internaliser ces relations en leur donnant l'occasion d'examiner toutes les structures desquelles une quantité évaluée fait partie. Ceci vaudrait aussi dans le cas où l'on pose une formule construite pour cette quantité. Les structures quantitatives sont composées de relations quantitatives. Elles sont entendues comme étant créées par des opérations quantitatives (Thompson, 1994). Les compréhensions de situations complexes sont construites en bâtissant des réseaux de relations quantitatives. Ainsi, les variations de compréhensions d'une situation spécifique correspondraient aux variations des constitutions opérationnelles des schèmes (organisation d'actions) et donc aux variations des classes d'actions représentées par les actions mentales (Thompson, 1994).

Par ailleurs, l'une des dispositions amenées par le raisonnement quantitatif et qui est d'un intérêt primordial dans la recherche présentée dans ce mémoire serait celle relative au raisonnement sur les grandeurs (« magnitudes »). Ce qu'on entend par grandeur est, par exemple, la taille d'une personne. Elle est la même, peu importe l'unité dans laquelle on la mesure, la personne a la même « quantité » (au sens usuel) de taille. Thompson décrit ceci formellement en développant la structure quantitative suivante : la grandeur d'une quantité  $Q$ , notée  $\|Q\|$ , peut être vue comme la mesure de  $Q$  dans l'unité  $u$ , notée  $Q_u$ , un certain nombre de fois aussi grand que la grandeur d' $u$ , notée  $\|u\|$ , soit l'équivalence suivante :  $\|Q\| = Q_u \|u\|$ . On doit alors définir la grandeur de l'unité « à l'extérieur » de cette l'équivalence. Par exemple, soit un angle dont la mesure en degrés vaut 60 (respectivement, en radians vaut  $\frac{\pi}{3}$ ), alors la grandeur de l'angle est de  $60 \times \frac{1}{360} = \frac{1}{6}$  (respectivement de  $\frac{\pi}{3} \times \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{6}$ ). On remarque qu'alors la grandeur de l'angle,  $\frac{1}{6}$ , est effectivement la même peu importe l'unité de De plus,



dans le développement de cette façon de penser à propos des grandeurs, il met en garde qu'on ne peut pas négliger l'idée de conversion d'unités de mesure. Nous verrons plus loin que ces idées s'avèrent effectivement fondamentales dans les compréhensions relatives aux concepts élémentaires de la trigonométrie (Moore, 2013). En effet, le raisonnement sur la mesure d'angle (vue ici comme une quantité construite dans une structure multiplicative impliquant la mesure de la longueur de l'arc sous-tendu par l'angle) et l'invariance de sa quantification par rapport à l'unité de mesure, semblent être une façon de conceptualiser ces idées qui favoriserait une compréhension signifiante de la mesure d'angle en radian et des fonctions trigonométriques.

#### 2.4 Raisonnement sur les quantités en trigonométrie : l'approche par arc de Moore

Maintenant que toutes ces idées sont en place, je propose de faire une incursion dans le merveilleux monde de la trigonométrie. Dans ce qui suit, j'élabore à un niveau très détaillé l'approche conceptuelle par arc de la mesure d'angle, développée principalement par Moore (2010, 2012, 2013) et reprise depuis son élaboration par une poignée de chercheurs.

Comme mentionné, les orientations de mon projet de recherche sont basées, notamment, sur ses travaux que je qualifie de (quasi)exhaustifs à propos de la mesure d'angle et de la cohérence conceptuelle dans l'apprentissage de la mesure d'angle en radians et des fonctions trigonométriques. La conceptualisation des notions d'angle, de mesure d'angle et de fonctions trigonométriques qu'il propose repose sur l'idée que le raisonnement quantitatif permettrait le développement de compréhensions robustes et durables de notions mathématiques. Selon ses recherches, combinées à celles de Thompson et Carlson (2017) ou encore de Castillo-Garsow (2012), concevoir la mesure d'angle comme une quantité au sens de Thompson est une idée

fondamentale, à la base d'une conceptualisation riche et signifiante des fonctions trigonométriques. La théorie du raisonnement quantitatif implique que l'angle soit vu comme un objet et que sa mesure soit conçue comme une quantité. Effectivement, il a été montré qu'une conceptualisation de ces notions mathématiques basée sur des raisonnements en termes de quantités et de relations quantitatives permettrait une meilleure compréhension et que celle-ci permettrait à l'apprenant de mobiliser ces conceptualisations plus aisément dans de nouvelles situations (Moore, 2012).

Avant de débiter cette incursion, je réitère que cette section est une des plus détaillées du présent chapitre. La raison est simple : puisque c'est une approche spécifique et qu'elle est sous-jacente à l'ensemble des choix didactiques du teaching experiment présenté dans les chapitres suivants (séquence d'enseignement-apprentissage, design des tâches, rationnel du chercheur durant l'expérimentation, etc.), il est primordial de fournir au lecteur une occasion de s'approprier ladite approche avant de poursuivre sa lecture.

#### 2.4.1 L'approche par arc de l'angle et sa mesure : éléments d'une analyse conceptuelle

Moore (2012) soutient que l'analyse conceptuelle de certaines notions mathématiques, en l'occurrence des concepts fondamentaux de la trigonométrie, pourrait se baser sur le raisonnement quantitatif afin de favoriser des compréhensions signifiantes de ces notions. En effet, le raisonnement quantitatif pourrait offrir une lunette pour examiner l'articulation des sens mathématiques et des systèmes d'idées. Il serait une base pour caractériser des façons de penser des étudiants et un moyen de faire des choix didactiques basés sur ces caractérisations. On part de la notion de mesure d'angle et on émet l'hypothèse que le développement d'un raisonnement sur les quantités (spécifiquement multiplicatif) vient en appui au développement cohérent et signifiant de la mesure d'angle.

Cette section prend appui principalement sur deux articles de Moore (2013, 2014) qui traitent, séparément, de deux analyses et ensembles de résultats découlant de sa thèse déposée en 2010. Sa thèse portait globalement sur le rôle du raisonnement quantitatif et des compréhensions de concepts fondamentaux de la trigonométrie, dans les conceptualisations des fonctions trigonométriques chez les étudiants, dans le cadre d'un cours d'introduction au calcul différentiel. Cette thèse et les travaux de Moore constituent le déclencheur de mes intérêts de recherche. Les éléments de mon cadre théorique en sont tirés. Ils m'ont permis d'en dégager les construits présentés sous une forme mature et à jour.

#### 2.4.1.1 La conception de l'objet angle

L'angle et sa mesure sont des objets mathématiques plutôt difficiles à définir précisément (Tanguay, 2012). Dans ma recherche, j'ai choisi de les concevoir selon une approche quantitative. Pour bien comprendre cette façon de voir l'angle et sa mesure, il est d'abord important de définir l'objet angle. Il est à noter que d'autres définitions de cet objet géométrique existent dans la littérature, notamment celle faisant appel à l'idée de partage de plan (Tanguay, 2012). Or, la conceptualisation de l'objet angle telle que décrite ici et que j'ai choisi d'adopter permettra de décrire sa mesure d'un point de vue quantitatif : soit un cercle donné, trouvant son centre au sommet de l'angle, la mesure de ce dernier peut alors correspondre à la relation multiplicative entre l'arc sous-tendu et la circonférence du cercle.

Dans cette perspective, l'objet angle peut être conceptualisé comme l'objet géométrique composé de deux côtés (des demi-droites) se joignant en un sommet. L'un des côtés étant considéré comme initial et l'autre, s'ouvrant à partir du côté initial, étant considéré comme le côté terminal (Figure 2.1). Dans cette conceptualisation, l'attribut mesurable de l'angle devient ce que j'appellerai l'ouverture de l'angle.

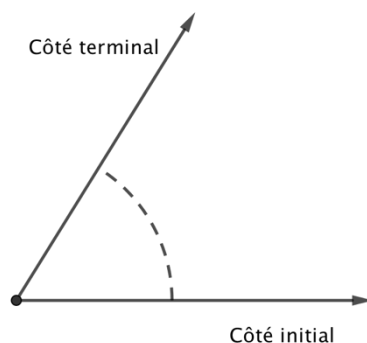


Figure 2.1 L'objet angle tel que défini par Thompson et par Moore

#### 2.4.1.2 Une conceptualisation de la mesure d'un angle

Dans son approche par arc, Moore soutient que la conceptualisation de la mesure d'angle à préconiser serait de la voir en termes d'un procédé de mesurage de son ouverture. Ce procédé définit une relation multiplicative entre une longueur d'arc sous-tendu par l'angle et un arc-unité qui correspond à une fraction de la circonférence ou encore, plus précisément dans le cas de l'unité de mesure radian, qui correspond au rayon d'un cercle. Le rapport  $\frac{\text{arc sous-tendu}}{\text{arc unité}}$ , vu comme une comparaison multiplicative entre les deux quantités, détermine alors la mesure de l'ouverture de l'angle en une unité de mesure qui est définie par la relation de proportionnalité entre l'arc-unité et la circonférence d'un cercle. Cette définition est donc invariante du cercle choisi pour calculer cette mesure. On note que cette conceptualisation est rarement développée dans le cas de l'angle et de sa mesure (Akkoc, 2008). Cependant, elle permettrait d'introduire le concept de radian comme unité de mesure construite à l'aide d'un raisonnement sur les quantités en jeu. En effet, le radian est utilisé comme unité de mesure de l'angle tel que le rapport de l'arc sous-tendu par un angle d'un radian à la circonférence correspond à  $\frac{1}{2\pi}$ . Ainsi, la longueur

de l'arc sous-tendu correspond à la longueur de 1 rayon du cercle. Les éléments centraux de cette conceptualisation de la mesure d'angle et des unités de mesure utilisées pour l'exprimer sont

A. Conceptualiser l'objet et son attribut mesurable

On place l'angle dans un cercle centré en son sommet pour établir la relation proportionnelle composée des deux rapports

$$\frac{\text{longueur de l'arc sous-tendu}}{\text{circonférence du cercle}} \quad \text{et} \quad \frac{\text{mesure de l'angle}}{\text{mesure de l'angle plein}}$$

Ceci amène l'idée que le rapport des mesures sur le cercle (arc sous-tendu et circonférence) est équivalent au rapport des mesures d'angles correspondants (l'angle étudié et l'angle plein). La mesure de l'angle en une unité de mesure donnée est conçue à partir d'une opération de comparaison multiplicative de la longueur de l'arc sous-tendu à la circonférence du cercle. Cette comparaison détermine un rapport. Ceci est suivi d'une opération mentale de comparaison multiplicative de ce rapport à la mesure de l'angle plein en cette unité de mesure. Donc la mesure d'un angle est construite à partir d'une combinaison d'opérations quantitatives et la structure implique des relations multiplicatives.

B. Conceptualiser un processus pour mesurer l'ouverture de l'angle

On partitionne la circonférence  $C$  en  $n$  parties pour déterminer un arc-unité  $\frac{C}{n}$  comme unité de mesure  $u$ . Cet arc-unité est en relation réciproque de grandeur relative avec la circonférence du cercle, c'est-à-dire que l'arc-unité représente  $\frac{1}{n}$  de la circonférence et, réciproquement, la circonférence représente  $n$  fois la longueur de l'arc-unité. En d'autres termes, la circonférence mesure  $n$  lorsque l'unité de mesure est  $u = \frac{C}{n}$ .

Ensuite, on mesure la longueur de l'arc sous-tendu  $A$  en cette même unité de mesure  $u = \frac{C}{n}$  par la comparaison multiplicative de la longueur de l'arc sous-tendu à la longueur de l'arc-unité, soit  $A_u = \frac{A}{\frac{C}{n}} = \frac{A}{C} \times n$ . Ici, la mesure de  $A$  en unité  $u$  est conçue comme étant un certain nombre de fois,  $\frac{A}{C}$ , la circonférence exprimée en unité de mesure  $u$ , c'est-à-dire un certain nombre de fois la valeur de  $n$ .

Le passage à la mesure d'angle, qui découle de l'équivalence des rapports (voir plus haut), peut s'effectuer de la manière suivante : l'angle plein est partitionné de la même façon et alors  $u = \frac{C}{n}$  devient une unité de mesure de l'ouverture d'un angle et  $n$  devient la mesure de l'angle plein dans cette unité de mesure. Ainsi, la mesure de l'angle  $Q$  exprimée en unités  $u$  est construite comme un certain nombre de fois,  $\frac{A}{C}$ , la mesure de l'angle plein,  $n$ , c'est-à-dire  $Q_u = y \times n$ , où  $y = \frac{A}{C}$ .

De ceci découlent des structures quantitatives impliquant l'unité de mesure  $u = \frac{C}{n}$ . Le rapport  $\frac{A}{C}$ , la comparaison multiplicative entre la longueur d'arc sous-tendu  $A$  et la circonférence  $C$  peut alors être mise en équivalence avec un certain nombre d'arc-unité  $\frac{1}{n}$  obtenu par la partition de la circonférence en  $n$  parties. En termes d'opérations mentales, on conçoit d'abord que l'arc sous-tendu par l'angle correspond à une certaine fraction de la circonférence ou encore que l'arc sous-tendu est  $y$  fois aussi long que la circonférence. Par la relation de proportionnalité, l'ouverture de l'angle, peu importe l'unité de mesure, est aussi  $y$  fois aussi « ouverte » que l'angle plein. On conçoit ainsi que **la mesure d'un angle peut être entièrement déterminée par la relation multiplicative entre l'arc qu'il sous-tend sur le cercle tracé et la circonférence de celui-ci, et ce, peu importe le cercle que l'on a tracé, car la relation multiplicative est conservée d'un cercle à l'autre pour un angle donné.**

Dans son article de 2013, Moore montre, par les résultats de son étude, qu'à la base, les étudiants n'ont pas cette conceptualisation de la mesure d'angle. Ils la voient plutôt comme un objet géométrique et les arcs de cercle servent d'étiquettes plutôt que d'être considérés en tant qu'attributs mesurables. À partir d'une tâche de construction d'un rapporteur d'angle qui a mené à un travail sur le partitionnement de la circonférence en longueurs d'arc de même mesure, Moore a dénoté que les étudiants commençaient faire le lien entre les longueurs d'arcs mesurables et les mesures d'angle. Ainsi, en portant leur attention sur les rapports en termes des quantités en jeu et non en termes des valeurs numériques, les étudiants en sont arrivés à concevoir le rapport comme la valeur représentant la fraction d'une longueur d'arc par rapport à la circonférence. Ceci leur a permis d'appuyer le développement de leur idée qu'un angle, indépendamment de son unité de mesure, sous-tend une fraction équivalente de la circonférence de n'importe quel cercle.

Au terme des deux séquences d'enseignement de son expérimentation, Moore fait le bilan suivant : les étudiants auraient déployé plusieurs façons de penser à propos de la mesure d'angle par des activités de mesurage, c'est-à-dire par l'action de partitionner des circonférences et des longueurs d'arcs pour obtenir différentes unités de mesure. Ils ont également coordonné ces différentes unités de mesure. De plus, ce qui est d'une grande importance selon lui, ils ont raisonné à propos a) de comparaisons multiplicatives entre des longueurs d'arcs et des circonférences de cercle ; b) de comparaisons multiplicatives entre des longueurs d'arcs et des rayons de cercles. Moore s'est ensuite interrogé puis penché sur les liens et compréhensions que les étudiants se seraient construits pendant cet enseignement. Ses résultats d'entrevues post-enseignement démontrent que les étudiants ont été en mesure de mobiliser les sens visés par l'enseignement autant dans leurs actions que dans leur discours. Par exemple, ils étaient capables d'expliquer le sens de leurs calculs sans avoir recours à l'évaluation de ceux-ci et ils ont raisonné à propos de la mesure d'angle comme étant

une fraction de la circonférence d'un cercle leur permettant ainsi de donner un sens invariant aux mesures d'angle qu'elles soient exprimées en degrés ou en radians (2013).

On constate, avec ces résultats de recherche, le rôle critique qu'a joué le raisonnement quantitatif dans la progression des apprentissages des étudiants. Cette progression est tributaire des idées développées en lien avec le mesurage (l'action mentale de partitionner), le raisonnement multiplicatif (la comparaison multiplicative) et le raisonnement sur des valeurs indéterminées (des unités de mesure arbitraires). Cette focalisation à la fois sur les opérations quantitatives et sur les opérations numériques tout en portant une attention à la distinction entre celles-ci semble jouer un rôle primordial dans les compréhensions et conceptualisations des étudiants. Sur ce point, nous verrons que lorsque les façons de penser et de comprendre impliquent déjà le processus de mesurage et les opérations quantitatives décrits plus haut, il y a une certaine complexité (ou difficulté) liée à la mise en oeuvre des opérations numériques ou calculatoires associées. On rencontre cette complexité en particulier lorsqu'il est question d'opérations numériques qui impliquent la mesure d'angle en radians. Ceci peut être dû, entre autres, à la présence du nombre  $\pi$  dans ces opérations numériques.

#### 2.4.2 Le radian

Cette façon de concevoir la mesure d'angle permettrait de concevoir les unités de mesure d'angle, indépendamment de celle choisie, comme des fractions de circonférence obtenue en partitionnant la circonférence d'un cercle. En particulier, ceci amène une façon de concevoir la mesure en radian comme génératrice d'une classe d'équivalence d'arcs qui implique l'utilisation du rayon comme une unité (voire un arc-unité) pour la comparaison multiplicative des longueurs d'arc. Par cette approche on cherche à introduire la notion de mesure d'angle, indépendamment de l'unité de mesure, comme représentant de la même relation quantitative (Moore,



2013). Ainsi on amène une cohérence entre la mesure d'un angle en radian et la mesure d'un angle en degré. En effet, un angle qui mesure un degré sous-tend  $\frac{1}{360}$  de la circonférence de n'importe quel cercle centré en son sommet. De même, un angle qui mesure un radian sous-tend  $\frac{1}{2\pi}$  de la circonférence de n'importe quel cercle centré en son sommet. Ainsi, radians et degrés mesurent la même quantité, mais sur deux échelles différentes (Thompson 2008). On a vu dans la théorie de la quantification de Thompson que cet aspect d'invariance dans le processus de quantification s'avère crucial dans la conceptualisation d'une quantité. L'approche par arc est donc une façon de comprendre la mesure d'angle par l'action mentale de comparer quantitativement (au sens de Thompson) la mesure d'un angle et l'arc que sous-tend cet angle.

La mesure d'un angle ( $Q$ ) obtenue par la comparaison multiplicative  $\frac{A}{C}$  entre la longueur d'arc sous-tendu ( $A$ ) et la circonférence ( $C$ ) du cercle correspond à un certain nombre de fois la mesure d'un angle plein dans l'unité de mesure choisie (un certain nombre de fois 360 degrés, de  $2\pi$  radians, de 200 bars, etc.). Dans le cas des degrés et des radians, on obtient donc  $Q_{\text{degrés}} = \frac{A}{C} \times 360$  et  $Q_{\text{radians}} = \frac{A}{C} \times 2\pi$ . Cette conceptualisation est indépendante de l'unité de mesure choisie. Dans le cas de l'unité de mesure radian, l'unité de mesure devient 1 rayon et la mesure de l'angle correspond directement à la comparaison multiplicative entre la longueur de l'arc sous-tendu par l'angle et le rayon du cercle tracé. On définit alors le radian en mettant le rayon et le radian en correspondance directe : 1 radian  $\equiv$  1 rayon. Les longueurs d'arcs sont ainsi mesurées en rayons. On peut alors étendre cette idée de rayon comme unité de mesure à la construction du cercle trigonométrique, des fonctions trigonométriques puis des rapports trigonométriques du triangle rectangle.

### 2.4.3 Vers les fonctions trigonométriques, le cercle trigonométrique et les triangles rectangles

Ce qui est également intéressant dans cette approche, c'est qu'elle offre une façon de comprendre éventuellement qu'on utilise le rayon comme une unité de mesure dans la comparaison multiplicative des longueurs d'arc, mais aussi pour évaluer le sinus et le cosinus d'un angle. Ces derniers sont vus comme une distance orientée entre l'axe vertical ou horizontal et un point sur un cercle, ou comme les coordonnées de ce point. Imposer le rayon comme unité de mesure, en plus de procurer une base pour la mesure en radian, permettrait une conceptualisation du cercle trigonométrique (ou cercle unité) qui englobe tous les cercles (Figure 2.2). C'est-à-dire que le cercle trigonométrique ne serait pas seulement le cercle de rayon mesurant 1, mais bien n'importe quel cercle de rayon mesurant « un rayon ».

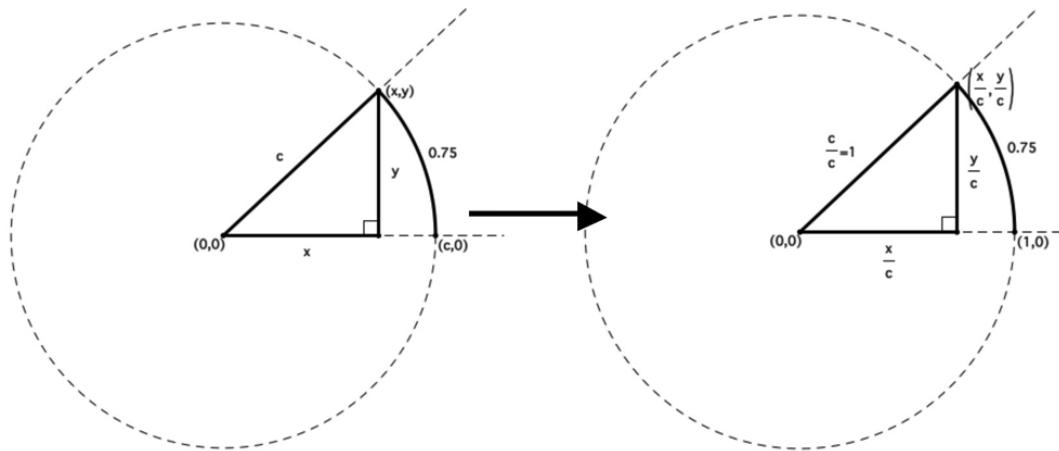


Figure 2.2 : Le rayon comme unité de mesure (Moore, 2012, p. 79)

Dans le cadre de ses travaux, Moore (2014) a caractérisé le progrès d'un étudiant (Zac) explorant la mesure d'angle et les fonctions trigonométriques dans une telle approche. Il illustre essentiellement que la mise en relation de la mesure d'angle et les

longueurs d'arcs sous-tendus couplé à la conceptualisation du rayon en tant qu'unité de mesure, engendre la construction du sens en trigonométrie qui englobe le cadre du cercle unité et le cadre du triangle rectangle. Ceci constitue une base fondamentale qui favorise la conceptualisation et la compréhension signifiante des fonctions trigonométriques.

## 2.5 Résumé du chapitre et précision des objectifs et questions de recherche

Dans un premier temps, je fais une remarque d'une importance capitale afin de me distinguer des travaux de Moore qui, d'un premier coup d'oeil, sont ceux mis en avant jusqu'ici dans ce travail. Il est à souligner que Moore a mené son étude auprès d'étudiants du collégial, ayant donc déjà abordé ces notions. Tel qu'il le soulève lui-même, on peut voir ses travaux comme offrant des explications en contexte de reconceptualisation de ces notions élémentaires de la trigonométrie scolaire. Mais l'étude du rôle de ces types de raisonnement, ainsi que l'articulation de ceux-ci dans le contexte d'une telle approche, doit aussi être menée auprès d'apprenants qui n'auraient pas encore abordé ces notions. Il m'apparaissait alors qu'emprunter cette avenue d'étudier les façons de penser et de comprendre d'apprenants de quatrième secondaire qui n'ont pas encore vu le radian, était d'une pertinence.

On a vu que l'aspect développemental des raisonnements est mis de l'avant par la majorité des auteurs et que ceux-ci décrivent les raisonnements en termes de cognition. Les images et opérations mentales sont au cœur de leur discours en lien avec les raisonnements. Sans préciser ce sujet davantage, on a vu que ces fondements théoriques émanent principalement des théories piagésiennes de l'apprentissage qui ont notamment été reprises par von Glasersfeld. Ce dernier amène également un

fondement théorique d'importance à ces recherches, le constructivisme radical. C'est la prémisse que les notions mathématiques sont conceptualisées par l'individu, dans son esprit et que ses compréhensions sont fondamentalement inconnues des autres qui informe les pratiques de recherche de ces chercheurs. C'est donc à travers des méthodologies relevant du Teaching Experiment que ces chercheurs émettent, testent et raffinent des hypothèses relatives aux façons dont les étudiants conceptualisent les mathématiques.

Ceci étant dit, la théorisation des raisonnements fournit non seulement un outil d'analyse des raisonnements déployés, mais aussi un outil d'élaboration d'analyse conceptuelle au sens de von Glasersfeld et de Thompson. On se penche sur les construits d'objets mathématiques, sur la complexité par laquelle les connaissances sont construites, tout en proposant des approches qui offrent potentiellement une cohérence dans l'apprentissage, et des compréhensions mathématiques solides. Dans cette perspective, je me suis penchée sur l'investigation de façons de penser et de comprendre les notions élémentaires de la trigonométrie, soit l'angle et sa mesure, pour lesquelles il n'existe que peu de recherches focalisant sur l'apprentissage ; en particulier pour ce qui est du radian chez des apprenants qui ne l'ont pas encore abordé. L'objectif est donc de me pencher sur le déploiement de ces raisonnements, pour ainsi potentiellement permettre un raffinement des caractérisations des images et opérations mentales impliquées.

Dans un contexte global où l'on aborde les enjeux de cohérence conceptuelle et les difficultés dans l'apprentissage de la trigonométrie (Akkoc, 2008 ; Thompson, 2008 ; Weber, 2005), nous avons vu que des chercheurs proposent d'harmoniser les approches dans les curriculums pour amener une cohérence conceptuelle (la trigonométrie du triangle, la mesure d'angle en degrés et les rapports trigonométriques

(SOH-CAH-TOA); la trigonométrie du cercle, la mesure d'angle en radians et les fonctions trigonométriques).

Au départ, l'objectif de recherche était d'étudier les raisonnements mobilisés dans les conceptualisations de la mesure d'angle en radian et des fonctions trigonométriques, selon une approche « quantitative » (ou approche par arc) chez des étudiants de la fin du secondaire et du début du cégep. Cet objectif, pour des raisons pratiques et logistiques, s'est réduit finalement à étudier les raisonnements mobilisés dans les conceptualisations de l'angle, de sa mesure, de l'unité de mesure « radian », et de la modélisation de la fonction sinus dans un contexte d'approche « quantitative » chez deux étudiantes de secondaire 4 ayant déjà vu la trigonométrie dans le cadre du triangle rectangle, mais pas encore dans le cadre du cercle trigonométrique. Plus précisément, j'ai cherché à

- investiguer la conceptualisation (existante) de l'angle et de sa mesure chez l'apprenant.
- Investiguer comment cette conceptualisation se manifeste dans une approche par arc (tâches).
- Investiguer comment cette conceptualisation et sa manifestation dans une approche par arc (tâches) permettraient un apprentissage signifiant de la mesure d'angle en radian.

La question générale à laquelle j'ai tenté d'amener des éléments de réponse est

- Quelles conceptualisations semblent favorables à une compréhension robuste, polyvalente et cohérente de la mesure d'angle, qui permet un apprentissage signifiant de la mesure d'angle en radian ?

Spécifiquement,

- Quelles opérations quantitatives sont mobilisées, quelles conceptualisations sont développées et comment s'articulent-elles dans une séquence d'enseignement visant l'apprentissage signifiant de la mesure d'angle en radian ?
- Comment ces opérations et conceptualisations favorisent-elles ou pas une compréhension robuste, polyvalente et cohérente de la mesure d'angle ?

## CHAPITRE III

### MÉTHODOLOGIE

#### 3.1 Description globale

L'expérimentation que j'ai conduite s'est déroulée en deux étapes qui chacune se sont déployées en sous-étapes. La première a été une préparation à la deuxième. La deuxième a pris la forme d'un teaching experiment (TE) au sens de Steffe et Thompson (2000), dont les fondements et objectifs ont déjà été discutés à la section 2.3 du chapitre II. Dans la première étape, j'ai d'abord fait l'analyse d'une séquence de tâches tirée d'un module sur la trigonométrie d'un curriculum américain<sup>7</sup>, pour préparer une Trajectoire hypothétique d'apprentissage (THA), au sens de Simon et Tzur (2004), que j'allais utiliser comme guide durant le TE. Ensuite, les élèves d'une classe de secondaire 4 (séquence Sciences naturelles en mathématiques) ont rempli individuellement un questionnaire diagnostique portant sur l'angle et sa mesure. J'ai utilisé l'analyse des réponses au questionnaire pour en dégager un portrait global des conceptions existantes de ces élèves et pour sélectionner les participantes à mon étude.

---

<sup>7</sup> Ce curriculum, manifesté dans le manuel *Pathways to Calculus : A Problem Solving Approach* (Carlson, Oehrtman et Moore, 2016), a été choisi parce qu'il a été rédigé en se basant sur une approche quantitative des notions préalables au calcul différentiel. Ainsi, le module sur la trigonométrie est basé directement sur l'analyse conceptuelle de Moore, d'où le choix d'analyser ce module afin d'en dégager une THA et des modèles de tâches en phase avec mes objectifs de recherche.

À la suite de l'analyse<sup>8</sup> des réponses au questionnaire, et en particulier de ceux des deux étudiantes choisies pour participer à la deuxième étape, nous avons débuté le teaching experiment (TE) avec l'une d'elles, soit Justine<sup>9</sup>. L'analyse du TE a été faite en trois niveaux avec une progression du grain d'analyse.

Dans cette section, je détaillerai d'abord, d'un point de vue pratique, la méthodologie du TE. Ensuite je décrirai les participantes et les données recueillies. S'ensuivra une description détaillée de la mise en oeuvre et du déroulement de l'étape 1 de l'expérimentation. Cette sous-section inclura la THA et le cadre d'analyse que j'ai utilisé pour la générer, ainsi que l'analyse préalable du questionnaire et de la séquence préliminaire du TE. Pour l'étape 2, je présenterai le contenu de chacune des séances et le déroulement effectif du TE. Dans la dernière section, j'explicitierai les étapes composant chacun des trois niveaux d'analyse des séances du TE, pour lesquelles je me suis appuyée sur la méthodologie du TE, ainsi que sur des méthodes de segmentation et codification de verbatim et d'analyse par épisode de séances enregistrées (Chi, 1997 ; Cobb et Whitenack, 1996 ; Powell, Francisco et Maher, 2003 ; Clement, 2000). Ces analyses portent bien entendu sur mon interprétation de la nature des raisonnements quantitatifs mobilisés par Justine et caractérisés à l'aide des construits théoriques présentés au chapitre précédent.

---

<sup>8</sup> Cette analyse des réponses au questionnaire et des deux premières séances du TE avec Justine a été menée avec une assistante chercheuse. Pour cette raison, je parlerai à la première personne du pluriel dans les sections où elle a participé à l'expérimentation.

<sup>9</sup> Suite au TE qui a duré plusieurs semaines avec Justine, j'ai conduit le deuxième teaching experiment avec l'autre étudiante choisie. Pour des raisons pratiques, nous avons décidé de ne présenter que le TE conduit avec Justine dans le présent travail. Par conséquent, je ne parlerai que de l'expérimentation en termes de ce qui a été fait avec Justine.



### 3.2 La méthodologie du teaching experiment selon Steffe et Thompson

Je rappelle ici que le but principal du TE, au sens de Steffe et Thompson, est de construire, tester et raffiner des modèles d'organisations mathématiques au sujet desquelles le chercheur fait l'hypothèse qu'ils expliquent (au moins en partie) les actions et comportements des étudiants, selon l'interprétation qu'il fait des actions et comportements observés chez les étudiants participants, placés en situation de résolution de tâches mathématiques. Cette méthodologie s'inscrit dans la perspective globale du constructivisme radical dont la prémisse est que les savoirs des individus sont fondamentalement inconnus des autres.

La méthodologie du TE consiste donc généralement en une séquence de séances d'enseignement destinées à un étudiant, et à laquelle participe également un agent d'enseignement (le chercheur), un témoin assistant (ou observateur) aux séances et une méthode d'enregistrement de ce qui se passe durant ces séances (vidéo). Dans le cadre de la présente étude, les séances du TE se rapprochent d'un contexte d'entrevues individuelles et individualisées. Elles se déroulaient sous forme individuelle et les tâches présentées ainsi que les interventions étaient propres au cas de Justine, c'est-à-dire qu'elles étaient menées en fonction des actions et comportements de Justine d'une séance à l'autre. Ainsi, l'objectif était de générer une caractérisation de ses façons de penser et de comprendre la mesure d'angle en radian. En général, dans un teaching experiment, le design des séances est conçu pour fournir une idée des façons effectives de penser du ou des participants. On cherche à savoir où il y aurait des ruptures dans leurs raisonnements. On veut identifier ce qui, dans leurs façons de raisonner, fait obstacle et ce qui leur permettrait de surpasser les obstacles rencontrés. Les données recueillies selon cette méthodologie sont de type qualitatif. Elles sont composées des comportements émergents durant l'expérimentation ainsi que des régularités ou liens observés entre ces comportements. De plus, on documente les

choix didactiques du chercheur (et même de l'observateur) tout au long de l'expérimentation. Les comportements et actions sont analysés et offrent une idée des raisonnements et pensées et sont utilisés pour générer des modèles hypothétiques de l'organisation mathématique de chacun des étudiants. Cet outil de cueillette de données joue un rôle clé dans l'expérimentation, car il permet d'avoir un aperçu plus profond des façons de penser du ou des participants. Aussi, par la prise de notes relatives aux choix didactiques et à la rationalité du chercheur quant à ces choix, on parvient à une éventuelle analyse rétrospective des modèles qu'on suppose être derrière les actions et comportements du ou des participants. Ces analyses informent sur la séquence d'enseignement et le design des entrevues, et vice versa.

Puisque l'objectif était ici d'étudier les raisonnements et compréhensions critiques vis-à-vis l'apprentissage de la mesure d'angle en radian, cette méthodologie me permettait une expérience de premier plan des raisonnements et développement de Justine par le questionnement, à travers l'observation, de proximité, de sa résolution des tâches. Sous la forme d'enseignement individuel et par l'entremise d'une interaction personnelle, j'ai tenté de provoquer l'émergence de données qui me permettraient d'approfondir ma compréhension des conceptualisations de Justine. Ce contexte m'a donné l'opportunité d'examiner en profondeur la construction mathématique de Justine.

### 3.3 Participants et données recueillies

Puisque l'expérimentation s'est déroulée en deux étapes distinctes en termes méthodologiques, je présente séparément les participants et les données recueillies pour chacune d'elles.

#### 3.3.1 Participants et données recueillies à la première étape de l'expérimentation

La nature des données recueillies durant la première étape de l'expérimentation fut, dans un premier temps, mes propres raisonnements et productions écrits lors de l'analyse du module pertinent du manuel *Pathways* (Carlson, Oehrtman et Moore, 2016). Il semble peut-être particulier de le considérer ainsi, mais effectivement, afin de générer la THA à partir de cette analyse, j'ai d'abord résolu moi-même chacune des tâches du module analysé<sup>10</sup>. Ainsi, j'ai analysé mes propres opérations mentales lors de la résolution en notant autant que possible mes raisonnements quantitatifs mobilisés durant la résolution. Je considère donc qu'avoir analysé ceux-ci s'insère dans mon processus de conception de la THA, qui est un produit de mon étude, un résultat, bien qu'il soit de second ordre ou encore préliminaire.

Dans un deuxième temps, à la suite d'une sollicitation auprès d'enseignants de mathématique de quelques écoles et un CÉGEP, les élèves d'une classe de secondaire 4 d'un collège privé situé à Montréal (séquence Sciences naturelles) ont répondu individuellement à un questionnaire diagnostique. Ce questionnaire papier était composé de 8 tâches. Les élèves ont pris plus ou moins 30 minutes pour y répondre durant leur cours de mathématique, sous les yeux de moi-même et de leur enseignant.

---

<sup>10</sup> Cette idée m'a été inspirée par V. Passaro qui, dans le cadre de son projet de thèse, a fait un peu la même démarche, c'est-à-dire résoudre elle-même les tâches qu'elle allait présenter aux participants de son expérimentation. Elle a analysé ses propres raisonnements mobilisés.

Sur les 36 élèves de la classe, nous avons reçu 17 questionnaires<sup>11</sup>. L'ensemble de ces données, constituées de productions écrites, bien qu'analysées, ne sera abordé ici que très brièvement puisqu'il visait principalement à permettre une sélection de participants potentiels et à donner une vue d'ensemble des conceptions des élèves desquels le ou la participante proviendrait. Des 17 questionnaires analysés, nous avons identifié celui de Justine comme intéressant pour l'étude que je souhaitais mener. Le choix de Justine a été basé sur le fait que c'était la seule qui avait exprimé une longueur d'arc comme une fraction de circonférence.

### 3.3.2 Participants et données recueillies de la deuxième étape de l'expérimentation

Durant la deuxième étape, les données recueillies du TE incluent les interactions entre Justine et moi, entre Justine et les tâches (incluant donc nos discours et nos gestes), les productions écrites de Justine et les miennes, mes notes de terrain ainsi que celles de l'assistante et de l'observateur<sup>12</sup>. Nous verrons plus loin que ces notes de terrain incluent des notes prises durant les séances, juste après les séances, lors des rencontres interséance (débriefting) et préséances (briefing), et même des enregistrements audio des rencontres entre les collaborateurs (assistante et observateur) et de certaines de mes réflexions. Bref, toute note réflexive prise à la main ou enregistrée comme discours, par tous les collaborateurs (assistante et observateur) durant la période pendant laquelle s'est déroulée le TE, a été considérée comme partie intégrante du corpus de données. Les outils de cueillette sont bien entendu, des enregistrements vidéo des séances, mais aussi les tâches et interactions

---

<sup>11</sup> En fait, ils ont tous répondu, mais seulement 17 ont consenti à être contacté pour participer à l'étape 2. Ainsi, selon le protocole éthique établi préalablement, seuls ces 17 questionnaires pouvaient faire l'objet d'une analyse.

<sup>12</sup> Durant les deux premières séances du TE, l'assistante chercheuse jouait le rôle d'observateur. Pour la majorité des séances subséquentes, c'est mon directeur de recherche qui a joué ce rôle.

planifiées vues comme des outils de cueillette de données, puisque leur conception était principalement faite dans l'intention d'examiner les raisonnements de Justine, donc comme outil de cueillette de données.

### 3.4 Mise en oeuvre et déroulement de l'étude

Dans cette section, il s'agira de décrire les différentes étapes et sous-étapes de l'expérimentation (Tableau 3.1). D'abord l'étape 1, dans laquelle je décrirai le travail d'analyse de module de manuel, la préparation préalable de la THA, du questionnaire et de la séquence de tâches du TE. Ensuite je présenterai l'étape 2, dans laquelle je décrirai sommairement le contenu de chacune des séances du TE. Il est à noter que l'analyse préalable des tâches de l'étape 2 sera incluse dans le chapitre IV Analyse. Par la nature même de ma méthodologie, ces analyses préalables des tâches constituent des données en soi, car la séquence de tâches était flexible et a changé continuellement en cours d'expérimentation, sur la base des hypothèses émergentes de l'analyse de niveau 0. Ce choix de présentation permettra au lecteur de mieux comprendre le narratif présenté dans le chapitre suivant.

Tableau 3.1 Présentation sommaire des étapes 1 et 2 de l'expérimentation

<b>ÉTAPE 1 — Préparation</b>		
<b>1.1 Analyse module de manuel</b>	<b>1.2 Préparation préalable d'une THA</b>	<b>1.3 Passation et analyse des questionnaires</b>
<i>Precalculus, Pathways to Calculus : A Problem Solving Approach (Carlson, Oehrtman et Moore, 2016)</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ Questionnaire diagnostique</li> <li>○ Séquence de tâches et séances</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ Portrait des conceptions existantes</li> <li>○ Sélection des participants</li> </ul>
<b>ÉTAPE 2 — Teaching experiment et analyse de niveau 0</b>		
<p><b>Nombre de séances et durée :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Au final : 10 séances de 90 minutes (sur 7 semaines, 1 à 2 rencontres par semaine)</li> </ul> <p><b>Séances se déroulant autour de</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• tâches préparées (en général, 5 à 8 tâches préparées, mais 3 à 4 tâches effectivement présentées)</li> <li>• questions d'approfondissement planifiées et élaborées in situ</li> <li>• interventions planifiées et élaborées in situ</li> <li>• enseignement direct</li> </ul> <p><b>Analyse niveau 0</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Durant l'expérimentation</li> <li>• Processus itératif en cycles débriefing - séance - préparation</li> </ul>		

### 3.4.1 Étape 1.1 : Analyse du module sur la trigonométrie

Je rappelle brièvement le cadre méthodologique de l'Hypothetical Learning Trajectory proposé par Simon (1995) et Simon et Tzur (2004). Ce cadre fournit une façon de concevoir les processus d'apprentissage hypothétiques ainsi que le design ou la sélection de tâches mathématiques. Il est composé de trois dimensions : l'objectif d'apprentissage qui définit la direction ; les activités d'apprentissage ; le processus d'apprentissage hypothétique. Avant l'élaboration d'une THA, il faut avoir une compréhension des conceptions mathématiques des élèves. On suppose qu'au terme de la trajectoire, l'élève s'est construit une certaine compréhension de certains concepts. On cherche à décrire ces compréhensions. Il faut, identifier un objectif d'apprentissage basé sur la connaissance que l'on a des connaissances mathématiques actuelles des élèves. Ensuite, on génère un processus d'apprentissage hypothétique dans le contexte d'un ensemble particulier de tâches. L'accent sur l'activité est un point de départ. Quelles actions de l'élève pourraient être à la base de l'apprentissage visé ? L'identification des actions fait partie de l'hypothèse. L'idée est donc de voir

chaque tâche comme un appel à l'activité (au sens physique et mental). On présuppose que l'engagement de l'élève dans l'activité permet d'abstraire la nécessité logique de la relation entre l'activité et l'effet de celle-ci. De ce fait, on élabore une tâche qui permet de susciter et de cultiver la réflexion sur la relation activité-effet et de rendre explicite la nouvelle mathématique. On demande à l'élève d'anticiper les effets de sa séquence d'activité d'origine. L'idée est de développer une compréhension de la nécessité logique des relations en bâtissant une séquence d'activités signifiantes liées aux effets anticipés. Simon et Tzur (2004) évoquent le concept de réflexion sur la relation activité-effet comme cadre pour penser au processus d'apprentissage et aux tâches dans ce processus. L'idée est d'élaborer une séquence de tâches qui pourraient amener l'élève à se fixer des buts, faire appel à l'activité visée et abstraire réflexivement le concept visé.

J'ai donc effectué le travail d'analyse d'une séquence de tâches. J'y ai discuté en détail du but de chacune des tâches, à la lumière de ce que j'anticipais comme activité de l'élève, des effets pertinents de son activité. Il s'agissait donc d'une réflexion sur la relation activité-effet. Tel que mentionné, ce travail d'analyse s'inscrit dans la méthodologie du TE en ce sens qu'il constitue un travail préalable à la sélection de tâches et à l'élaboration de la séquence d'enseignement par l'élaboration d'une THA qui deviendra la trame de fond de l'expérimentation. Le succès d'un TE dépend de la compétence du chercheur à créer des tâches d'apprentissage efficaces en ce sens (Simon, 1995). C'est donc dans cette perspective que j'ai utilisé ce cadre comme outil de préparation à mon expérimentation. Comme mentionné, la méthodologie du TE implique, entre autres, d'émettre des hypothèses sur ce que l'apprenant pourrait apprendre et trouver des moyens de favoriser cet apprentissage (Cobb et al, 2003 ; Steffe et Thompson, 2000). L'élaboration et l'analyse d'une séquence de tâches en termes de processus d'apprentissage constituent une étape cruciale de cette

méthodologie, car les choix didactiques faits en cours d'expérimentation dépendent d'une appropriation de la nature du contenu enseigné par l'enseignant-chercheur.

J'ai analysé une séquence de tâches tirée du manuel d'exercices de l'élève (*Student workbook*) de la collection *Precalculus : Pathways to Calculus, A problem Solving Approach* (Carlson, Oehrtman et Moore, 2016). Cette séquence vise, dans un premier temps, à développer les idées fondamentales relatives aux concepts d'angle et à sa mesure. Selon les auteurs, elle mène à introduire des méthodes de modélisation de mouvements périodiques et ces idées sont considérées comme étant la base pour l'introduction aux fonctions trigonométriques sinus et cosinus. Dans le cadre de la préparation de mon TE, j'envisageais d'utiliser des tâches proposées par les auteurs du manuel analysé. Afin d'approfondir ma compréhension des conceptualisations visées par chacune des tâches et pour éventuellement faire un choix parmi ces tâches, j'ai analysé mes propres raisonnements et trajectoires d'apprentissage lors de la résolution de ces tâches. J'ai également analysé l'adéquation des tâches aux intentions mises en avant par les auteurs et j'ai analysé la pertinence de leur utilisation dans mon TE. Ainsi, j'ai présenté à ma direction de recherche une synthèse de cette analyse qui a servi de fondement pour l'élaboration de la séquence d'enseignement-apprentissage du TE.

Plus précisément, l'analyse a porté sur la première partie du Module 7 du manuel. Ce module, intitulé *Angle Measure and Trigonometric Functions*, est constitué de 9 sections que les auteurs appellent *Investigations*. Chaque section comporte un nombre variant de 4 à 14 problèmes et quelques encadrés théoriques (définitions de certains concepts clés). À la fin du manuel, il y a une section *Homework*, « devoirs », constituée d'une série de problèmes, pour chacune des *Investigations* du module. Il est à noter que bien que les tâches de la section *Homework* aient fait l'objet d'une résolution et d'une analyse de mes raisonnements développés et mobilisés, la



synthèse n'incluait que quelques éléments en lien avec celle-ci. J'ai également consulté le manuel théorique de l'élève (*Textbook*) ainsi que le manuel de l'enseignant (*Instructor Guide*) afin d'approfondir mon appropriation des intentions des auteurs. Mis à part les ouvrages consultés, la collection inclut une grande variété de matériel didactique tel que des applets, documents PowerPoint, etc. Pour des raisons pratiques, je me suis cependant limitée aux séquences de tâches du manuel d'exercices comme objet d'analyse. Il est important de souligner que toutes les conceptions décrites sont des façons de penser à propos de ces concepts et ne constituent en aucun cas des faits mathématiques. Les séquences de tâches sont guidées par une approche particulière des notions mathématiques à l'étude, mise en avant par ces auteurs. Dans l'analyse, pour les *Investigations* 1 à 5, j'ai exposé les intentions conceptuelles globales, la trajectoire d'apprentissage et l'analyse détaillée par problème. Chaque analyse d'*Investigation* se terminait par des réflexions en lien avec des éléments clés, des modifications possibles ou questionnements par rapport à la sous-séquence analysée. Ainsi, les réflexions concluant chaque section analysée portaient également sur les implications dans la préparation du TE à venir.

La méthode d'analyse mise en œuvre est caractérisée par un va-et-vient rétroactif entre des prises de notes réflexives et un raffinement des modèles d'intentions visées par les séquences de chacune des *Investigations*. Dans un premier temps, j'ai résolu les problèmes en me focalisant sur les raisonnements émergents de l'interaction avec la tâche et la séquence. J'ai pris des notes en temps réel en lien avec les actions et opérations mentales pour chacun des problèmes, pour identifier les raisonnements et conceptualisations visés. J'ai porté ma réflexion sur les moyens par lesquels les tâches favorisent la mobilisation de ceux-ci. Ensuite, j'ai révisé les notes pour rédiger une première ébauche des intentions globales de l'*Investigation* ainsi qu'un premier

jet de la THA. Après avoir complété cette démarche pour les *Investigations* 1 à 5<sup>13</sup>, j'ai complété l'analyse en comparant avec les éléments du manuel théorique de l'élève ainsi qu'avec les éléments de résolution et intentions décrits par les auteurs dans le manuel d'enseignant<sup>14</sup>. Dans cette étape, j'ai soulevé certaines différences dans l'ordre des notions amenées, selon l'un ou l'autre des manuels. Ceci a permis, d'une part, une réflexion sur les raisons derrière ces choix didactiques et d'autre part, une bonification de l'analyse en termes d'éléments conceptuels n'ayant pas été identifiés. Ainsi, par une révision complète de l'ensemble des notes, pour chaque *Investigation*, j'ai divisé la présentation de l'analyse en deux parties : (I) la trajectoire d'apprentissage, incluant les intentions globales et un résumé de la THA ; (II) l'analyse par problème, donnant de façon plus détaillée les éléments visés par chacun des problèmes. Ce travail a été soumis au directeur de recherche et une seconde vague de réflexions et de raffinement a eu lieu.

#### 3.4.2 Étape 1.2 : Préparation préalable d'une Trajectoire hypothétique d'apprentissage

J'ai repris l'ensemble de ces analyses par problème afin d'identifier les notions et tâches qui semblaient fécondes pour l'atteinte des objectifs de l'étude. J'ai formulé quelques modifications possibles ainsi que des questionnements mettant en lumière des préoccupations par rapport à la séquence d'enseignement du TE. Voici la THA

---

<sup>13</sup> Selon la structure du manuel et selon les intentions visées, les *Investigations* 1 à 5 ont comme finalité l'introduction aux fonctions trigonométriques. Les *Investigations* 6 à 9 du module portent sur les différents paramètres ou transformations des fonctions de base, la fonction tangente et les fonctions inverses. Puisque je jugeais à ce moment-là que le projet de recherche n'irait probablement pas au-delà de la conceptualisation des fonctions sinus et cosinus, il semblait opportun de diviser le travail ainsi, quitte à ne pas étendre l'analyse aux *Investigations* 6 à 9.

<sup>14</sup> Ce document est essentiellement un corrigé des exercices dans lequel les auteurs incluent les intentions qu'ils visent pour chacun des problèmes.

découlant de ce travail. Je ne présente ici que ce qui est en lien avec les séances 1 à 6 du TE, soit les *Investigations* 1 et 2 (Tableau 3.2). Nous verrons que ce ne sont que les séances abordant l'unité de mesure «radian» qui font l'objet d'analyse et de résultats dans l'étude présentée dans ce mémoire.

Tableau 3.2 Trajectoire hypothétique d'apprentissage pour le questionnaire et la séquence préliminaire

<p><b>Investigation 1 (<i>Angle measure</i>, p. 263-267, 14 tâches)</b></p> <p>L'intention globale : Le développement d'une conceptualisation de l'angle et de sa mesure, d'un processus de mesurage, les unités de mesure d'angle et les conversions entre celles-ci. Cette intention est basée sur la théorie du processus de quantification (Thompson, 2011)</p>
<p><i>L'angle et la mesure de son ouverture</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Par l'observation de schémas représentant des angles, d'abord sans cercle puis avec un cercle centré en leur sommet, l'élève développe l'idée qu'il peut exister une relation entre l'ouverture de l'angle et la longueur de l'arc qu'il sous-tend sur la circonférence d'un cercle.</li> <li>• En faisant varier le rayon du cercle centré au sommet d'un même angle, on amène l'idée que la mesure d'angle correspond à une relation multiplicative entre la longueur de l'arc sous-tendu et la circonférence du cercle. L'élève conçoit ainsi que la longueur de l'arc sous-tendu correspond à une fraction de la circonférence dont la valeur est invariante par rapport à la dimension du cercle.</li> </ul>
<p><i>Le processus de mesurage</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• En subdivisant la circonférence en un nombre <math>m</math> d'arcs de même longueur, cette longueur d'arc devient une unité de mesure correspondant à une fraction, soit <math>1/m</math> de la circonférence. La mesure d'angle est donc un certain nombre de fois cette longueur d'arc et le processus de mesurage ainsi développé est invariant par rapport à l'unité de mesure choisie et par rapport au cercle choisi. Ceci devient alors un critère de l'unité de mesure ainsi construite.</li> </ul>
<p><i>Les unités de mesure d'angle et les conversions entre celles-ci</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• En réinvestissant ce processus de mesurage, l'élève peut alors conceptualiser les unités de mesure usuelles, le degré et le radian, comme des cas particuliers pour lesquels on peut déterminer la valeur de la fraction de la circonférence, soit <math>1/360</math> de la circonférence dans le cas du degré puis <math>1/2\pi</math> dans le cas du radian : <ul style="list-style-type: none"> <li>- On commence par le radian en introduisant une manipulation impliquant la subdivision de la circonférence d'un cercle en longueurs de rayon et en considérant un angle qui sous-tend</li> </ul> </li> </ul>

<p>un arc dont la longueur est celle du rayon.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Ensuite, on fait directement le passage au degré en amenant l'élève à concevoir le degré en appliquant le même processus de mesurage.</li> </ul>
<p><i>La conversion d'unités de mesure</i></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• L'élève établit des formules de conversion entre ces deux unités de mesure en réfléchissant sur la relation multiplicative développée précédemment. On utilise d'abord l'idée de pourcentage de la circonférence du cercle afin de le convertir en radians ou en degrés. Ceci renforce l'idée de mesure d'angle comme un rapport et la conversion comme une comparaison de rapports. De ceci, l'élève peut convertir directement de degré à radian.</li> </ul>
<p><b>Investigation 2 (<i>Angle measure in context</i>, pp. 269-271, 7 tâches)</b></p> <p>Intention globale : Approfondir la conceptualisation de la mesure d'angle en radian dans le contexte du mouvement circulaire.</p>
<p><i>La relation quantitative entre le rayon, l'arc sous-tendu et la mesure d'angle</i></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• D'abord sans contexte, l'élève mesure l'arc sous-tendu en longueurs de rayon. La mesure d'angle en radians est ainsi vue comme une relation multiplicative entre la longueur d'arc sous-tendu et la longueur de rayon : <ul style="list-style-type: none"> <li>- Par l'action du mouvement circulaire effectuée le long de la circonférence d'un cercle, l'élève mesure un angle en longueurs de rayon. Il explicite physiquement le lien entre la mesure en radians, le rayon et l'arc sous-tendu en concevant la mesure d'angle en radians comme le nombre de longueurs de rayon que mesure l'arc sous-tendu par l'angle.</li> <li>- En utilisant une valeur de mesure d'angle en radians et des valeurs de longueur de rayon de cercles, l'élève développe la conceptualisation que la valeur de la mesure d'angle en radians correspond à ce nombre de fois la longueur du rayon du cercle choisi. La mesure de l'arc sous-tendu est alors une relation entre la valeur de la mesure de l'angle en radians (le facteur multiplicatif de l'arc sous-tendu au rayon) et le rayon (l'unité de mesure de longueur de l'arc). Ceci l'amène à établir une égalité qui représente la relation entre ces trois quantités : <math>\theta \times r = s</math>, où <math>s</math> est la longueur de l'arc sous-tendu en une unité de mesure linéaire ; <math>r</math> est le rayon du cercle en cette même unité de mesure, <math>\theta</math> est la mesure de l'angle en radians.</li> <li>- L'élève fait un retour sur la conversion entre les unités de mesure radian et degré. Il réinvestit la conceptualisation de la relation existant entre le rayon, l'arc sous-tendu et la mesure d'angle. Par ceci, il développe l'habileté à faire la distinction entre mesure angulaire (ouverture) et mesure linéaire (distance, longueur) par la manipulation de l'équation.</li> </ul> </li> </ul>
<p><i>La variation de l'ouverture et de la distance parcourue dans le contexte du mouvement dynamique</i></p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Par le contexte de mouvement circulaire d'une mouche sur l'aile d'un ventilateur, on conçoit la mesure d'angle comme une quantité variable que l'on associe à l'angle balayé par le mouvement le long de la circonférence de cercle (trajectoire circulaire) : <ul style="list-style-type: none"> <li>- L'élève porte son attention sur le mouvement circulaire pour favoriser l'imagerie mentale des quantités en jeu et de leur relation quantitative. Il développe ainsi le raisonnement sur la</li> </ul> </li> </ul>

variation et la covariation entre l'ouverture de l'angle, la longueur de l'arc sous-tendu et la distance parcourue.

- Un retour en contexte sur l'équation développée ( $\theta \times r = s$ ) qui met en relation la longueur de l'arc sous-tendu en une unité de mesure linéaire, le rayon du cercle en cette même unité de mesure et la mesure de l'angle en radians amène l'élève à manipuler conceptuellement l'équation à travers diverses tâches contextualisées.

C'est donc à partir de ceci que j'ai préparé le questionnaire diagnostique et les premières séances (à l'origine, les séances 1 et 2) du TE, en puisant dans certaines des tâches de ces deux *Investigations* de ce module de manuel. Le reste de la THA a servi à planifier de façon préliminaire le contenu des séances subséquentes.

#### 3.4.2.1 Questionnaire et séquence préliminaire

Le questionnaire était composé de 7 questions, auxquelles s'ajoutait une question à ne considérer que si le temps le permettait. Il portait sur l'angle et la mesure d'angle (voir le questionnaire dans son intégralité en Annexe A). Il visait à dresser un portrait préliminaire des conceptualisations existantes chez les participant-es, tout en testant leur propension à mobiliser les images mentales relatives à la longueur d'arc et son lien avec la mesure de l'ouverture de l'angle. Le tableau 3.3 résume les visées conceptuelles du questionnaire. Je ne présenterai pas ici la première version des séances 1 et 2 élaborée à la suite de l'analyse de manuel, mais certains des éléments des versions adaptées seront présentés dans le chapitre suivant.

Tableau 3.3 Visées conceptuelles du questionnaire diagnostic

Questions <sup>15</sup>	Visées conceptuelles
1, 2 et 3	Investiguer les conceptions existantes de l'objet angle, de ce que signifie mesurer un angle et ce que signifie qu'un angle ait une mesure donnée en degrés.
4 et 5	Investiguer l'imagerie mentale mobilisée pour comparer des angles d'abord sans cercle (question 4) et ensuite dans un cercle avec l'arc sous-tendu mis en gras (question 5).
6 et 7	Investiguer la présence ou non de la conception d'invariance de la mesure d'angle d'un cercle à l'autre et de ce que signifie que deux angles aient la même mesure.
8	Investiguer l'image mentale mobilisée pour représenter un angle d'une mesure de son choix.
Supplémentaire	Investiguer la mobilisation d'un processus de mesurage impliquant une fraction de circonférence comme unité de mesure.

### 3.4.3 Étape 1.3 : Analyse des réponses au questionnaire

Après la passation du questionnaire en classe, nous<sup>16</sup> avons analysé les réponses reçues selon un grain relativement grossier. Nous cherchions à identifier les tendances générales et les faits saillants. D'abord chacune de notre côté, nous avons lu chacune des réponses, question par question, et y avons identifié certains éléments récurrents. Pour chacune des réponses, nous devions d'abord déterminer si elle nous permettait d'identifier 1) des éléments d'une conception de l'angle et de sa mesure, et 2) des raisonnements quantitatifs au sens entendu dans cette étude et selon l'analyse conceptuelle. En effet, certaines réponses ne comportaient aucun élément permettant une quelconque interprétation parce qu'elles étaient soit trop brèves, soit circulaires. Nous restions tout de même ouvertes à identifier quelque conception, raisonnement ou façon de penser sortant du cadre conceptuel, ce qui aurait pu orienter

---

<sup>15</sup> La question 1 est ma traduction de la tâche 1a) du manuel *Pathways*, p. 263 ; les questions 4 et 5, des tâches 1b) et 1c), p.263 ; la question 7 est une adaptation de la tâche 1d), p.263 ; la question 8 est une adaptation de la tâche 1, p. 305 (section *homework*) ; la question supplémentaire est ma traduction de la tâche 2, p. 305.

<sup>16</sup> Je rappelle ici que le « nous » réfère au fait qu'une assistante de recherche s'est ajouté au début du déroulement de l'expérimentation. Son rôle était de m'aider à analyser les données préliminaires. Elle jouait également le rôle d'observateur lors des premières séances du TE.

différemment notre approche. Dès lors, nous appliquions les principes de la méthodologie du TE, selon lesquels il est crucial de faire preuve de flexibilité. Ensuite, nous écrivions, sous forme de tableau, nos interprétations des conceptions, illustrées ou décrites, et raisonnements mobilisés en indiquant le questionnaire duquel l'interprétation provenait. Par exemple, à la question 1 (a, b et c) nous portions un regard sur les façons de concevoir l'objet angle et sa mesure. Certains possédaient des côtés, d'autres étaient illustrés dans un triangle. On notait s'il y avait présence ou non de petits arcs indicateurs, s'il y avait référence à des mesures d'angle en particulier ( $90^\circ$ ,  $45^\circ$ , etc.) ou encore, si l'on parlait d'écartement, de distance, si l'on évoquait l'utilisation d'un rapporteur, s'il y avait référence à un arc de cercle ou même à un cercle. Nous avons ensuite dressé un portrait global des raisonnements ou façons de penser mobilisés pour chacune des questions, puis pour l'ensemble du questionnaire. Ensuite, afin de cibler des participant-es potentiel-les pour la suite de l'expérimentation, nous avons identifié les questionnaires pour lesquels nous avons le plus d'interprétations signifiantes. Nous avons entamé une deuxième analyse des réponses à ceux-ci, chacune de notre côté, sous forme de tableau. Nous cherchions à raffiner nos interprétations.

#### 3.4.3.1 Sélection de la participante

Une dernière étape de comparaison entre les réponses aux questionnaires ciblés, suivie d'une mise en commun, nous a permis d'identifier trois participants potentiels. Nous avons contacté chacun des élèves et deux nous ont répondu par l'affirmative pour participer au TE. Tel que mentionné, le présent travail ne porte que sur le TE qui a eu lieu avec l'une des deux élèves, Justine. Une analyse approfondie de ses réponses au questionnaire a ensuite été menée. Pour ce faire, nous avons étudié chaque réponse, chacune de notre côté, afin d'identifier certaines tendances récurrentes. Nous avons porté notre attention sur le vocabulaire utilisé, les schémas dessinés ainsi que la continuité et la cohérence interne de l'ensemble de ses réponses. La mise en commun

de ces analyses a permis d'émettre des hypothèses préliminaires sur la conception de l'angle et sa mesure chez Justine.

Par la suite, en nous basant sur notre analyse, nous avons révisé la première version de la séance 1. Nous avons ajouté une série de questions d'approfondissement au début de celle-ci, afin de nous permettre d'investiguer la rationalité à l'origine des réponses de Justine au questionnaire et accroître notre compréhension de ses façons de penser et de comprendre. De plus, certaines tâches ont été modifiées. Ces séances 1 et 2 étaient composées de questions à propos de ses réponses au questionnaire et de 6 tâches respectivement, et présentaient une certaine progression jusqu'au concept de radian. Les tâches ont été adaptées au contexte dans lequel nous nous plaçons, c'est-à-dire en fonction des hypothèses posées à la suite de l'analyse du questionnaire de Justine. Les hypothèses et leur vérification sont des éléments centraux dans la méthodologie mise en oeuvre : «[...] teaching experiments are done to test hypotheses as well as to generate them» (Steffe et Thompson, 2000, p. 275). Ainsi, par cette première séance et la séance 2, nous cherchions à mieux comprendre les raisonnements quantitatifs que nous croyions que Justine mobilisait déjà dans ce contexte. C'est la raison pour laquelle nous avons inclus ces deux séances dans une phase du TE que nous avons nommée 0, soit une phase de préparation incluant la préparation préalable (THA et passation du questionnaire) et les séances 1 et 2 du TE. Ce choix de présentation en phase du TE sera discuté et justifié plus loin et est en lien avec le déroulement effectif du TE, articulé avec les résultats émergents de l'analyse.



#### 3.4.4 Étape 2 de l'expérimentation : Les séances du TE

Les séances du TE constituent l'essentiel de ce travail de recherche. Dans cette section, je présente une description globale de cette étape de l'expérimentation, puis le contenu conceptuel des séances.

##### 3.4.4.1 Description globale de l'étape 2

Lors du TE avec Justine, certaines composantes du THA ont été plus approfondies que d'autres, car, en cohérence avec la dualité du chercheur-enseignant (avoir en tête des conceptions visées et faire preuve de flexibilité pour se laisser mener par l'organisation mathématique du participant), je me suis adaptée à ce que je concevais des mathématiques de Justine tout en créant continuellement un environnement d'interaction me permettant potentiellement d'en approfondir ma compréhension. Étant donné le grand nombre de tâches et l'aspect interactionnel et adaptatif du déroulement du TE, les tâches, questions et interventions planifiées seront présentées au fur et à mesure dans le chapitre suivant. Afin d'alléger la lecture, c'est sous forme de tableau (Tableau 3.4) que je décris sommairement le contenu conceptuel de chacune des 10 séances. Comme mentionné précédemment, seules les séances 1 à 6 (phases 0, 1 et 2 du TE) ont été analysées et font l'objet de ce mémoire de recherche. Ce tableau servira au lecteur à contextualiser ces 6 séances dans l'ensemble du TE.

Tableau 3.4 Contenu conceptuel des séances d'enseignement-apprentissage

<b>Étape 2 de l'expérimentation : Teaching experiment avec Justine</b> <b>Contenu conceptuel des séances d'enseignement-apprentissage</b>	
<b>Phase 0</b>	<p><b>Séance 1</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Retour réponses questionnaires</li> <li>○ Mesurer un angle en unités de mesure correspondantes à des fractions de circonférence (relation proportionnelle entre l'unité de mesure et la circonférence vue comme l'angle plein)</li> </ul>
<b>Phase 1</b>	<p><b>Séance 2</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Retour sur fraction de circonférence et processus de mesurage (en degrés ; en unité quelconque)</li> <li>○ Construction du gip (unité fictive)</li> <li>○ Mesurer un angle en gips</li> <li>○ Contexte Grande Roue : relation arc-circonférence-mesure angle balayé</li> </ul>
<b>Phase 1</b>	<p><b>Séance 3</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Relation arc, circonférence et mesure angle</li> <li>○ Construction radian en termes de relation arc unité = un rayon (non défini explicitement)</li> <li>○ Mesurer angle (unité un rayon)</li> </ul>
<b>Phase 2</b>	<p><b>Séance 4</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Relation arc, circonférence et mesure angle en degrés (1/360), en gips (1/7), en rayons (1/2<math>\pi</math>)</li> <li>○ Enseignement direct : définition explicite du radian</li> </ul>
<b>Phase 2</b>	<p><b>Séance 5</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Relation arc-rayon-mesure angle (en radian)</li> <li>○ Mesure angle radian (exprimé avec <math>\pi</math>)</li> </ul>
<b>Phase 2</b>	<p><b>Séance 6</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Contexte Piste de course circulaire : suivre déplacement circulaire, covariation continue</li> <li>○ Relation arc-rayon-mesure angle (en radian)</li> <li>○ Mesure angle radian, déterminer longueur arc, déterminer rayon</li> </ul>
<p><b>Séances 7 à 10</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Relation arc-rayon-mesure angle (en radian)</li> <li>○ Modélisation graphique de la relation covariationnelle entre la mesure d'angle (radians) et la distance verticale orientée</li> <li>○ Lien entre sinus comme rapport trigonométrique et sinus comme relation covariationnelle</li> </ul>	

### 3.5 Processus d'analyse de l'étape 2 de l'expérimentation

Comme mentionné, l'analyse du TE s'est déroulée sur 4 niveaux, allant d'un grain grossier (niveau 0) à un grain très fin (niveau 3). Un premier niveau, dit 0, qui a eu lieu durant le déroulement du TE, sous une forme itérative par cycle d'une séance à l'autre (Cobb et Whitenack, 1996).

Un deuxième niveau 1 d'analyse a été effectué après le TE. C'était un survol chronologique de tous les écrits (productions écrites, notes de terrain, etc.) afin d'annoter et de codifier ceux-ci, vérifier et consolider les hypothèses découlant de

l'analyse niveau 0 et faire émerger des hypothèses préliminaires. Un premier narratif a été généré au terme de ce niveau. Lors de ces deux niveaux, l'intention était d'identifier et de porter un regard sur les trois dimensions suivantes découlant du cadre conceptuel : 1) la conception de l'objet angle ; 2) la conception de la mesure d'angle ; 3) les raisonnements quantitatifs.

L'étape suivante, de niveau 2, incluait la transcription des séances en verbatim, une première analyse itérative de ceux-ci afin d'en dégager une segmentation en épisodes de plus en plus ciblés (Powel, Francisco et Maher, 2003), vérifier et consolider les hypothèses découlant de l'analyse niveau 1 et faire émerger des interprétations plus fines et détaillées de l'organisation mathématique de Justine. L'intention ici était de porter un regard sur les mêmes trois dimensions énoncées ci-haut tout en tentant de les caractériser dans le cas de Justine. Ainsi, tout épisode nous donnant des indices supplémentaires à propos de ces dimensions se voyait segmenté et analysé davantage pour en dégager une caractérisation orientée par le cadre conceptuel.

Finalement, menant aux résultats de l'étude, un dernier niveau 3 d'analyse était composé d'un travail de regroupement d'épisodes desquels ont émergé d'une part, trois ensembles d'intentions et de visées conceptuelles et d'autre part, des thèmes vus à travers des constituants des façons de penser (opérations et structures mentales) de Justine. C'est de cette dernière étape que la présentation en trois phases de l'analyse a émergé. Nous y reviendrons brièvement à la fin de cette section, puis dans le chapitre suivant.

### 3.5.1 Analyse des séances — niveau 0

Dans ce qui suit, je considère un niveau d'analyse de type « ground zero ». C'est essentiellement l'analyse qui a eu lieu en cours d'expérimentation. Elle peut être représentée sous forme de schéma en ressort (ou spirale) ou encore, de cycle itératif d'une séance à l'autre (Figure 3.1). Il est à noter qu'à ce niveau, il n'y avait ni grille, ni codification impliquée sinon que le cadre conceptuel qui guidait fortement ce sur quoi le regard était posé.

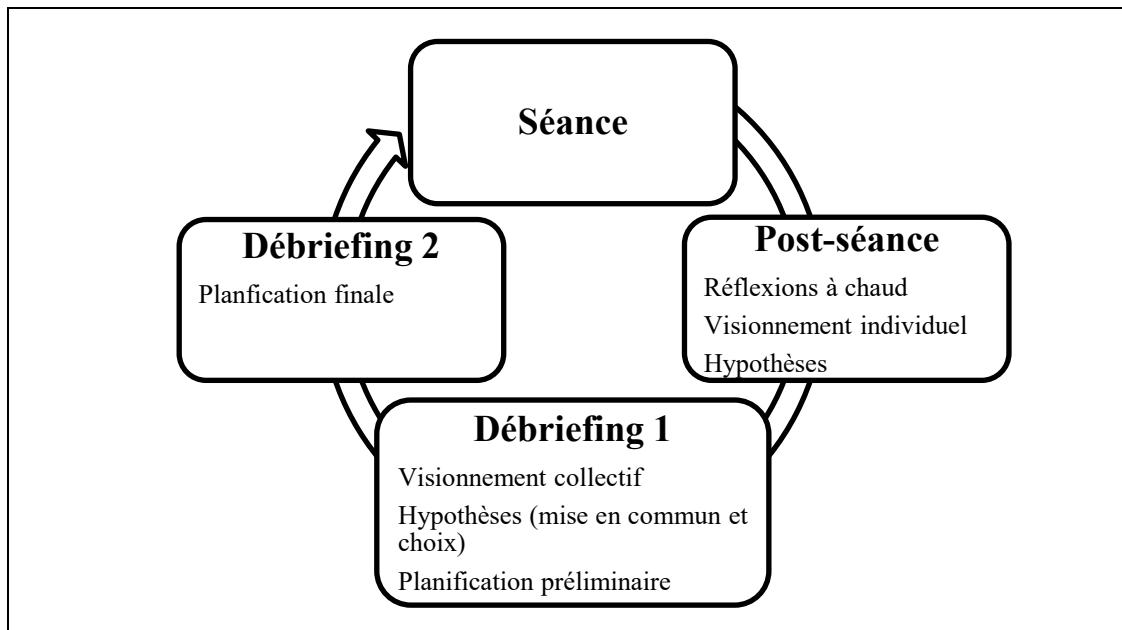


Figure 3.1 Cycle itératif de l'analyse de niveau 0 du TE

Essentiellement, juste après une séance, l'observateur et moi partageons brièvement nos réflexions à chaud. Ensuite, individuellement, nous notons nos réflexions à chaud. Puis, individuellement, nous regardons une première fois la vidéo de la séance durant laquelle et suite à quoi nous écrivons un premier jet du déroulement ainsi que d'observation, de description et d'interprétation des interactions entre Justine, moi et les tâches tout en portant notre attention sur les actions de Justine. Durant ce visionnement, je mettais le déroulement en lien avec les productions écrites et les

notes de terrain en annotant des minutes sur les éléments des documents. Sur le schéma, ce moment de l'analyse est nommé post-séance. Après nous nous rencontrions pour regarder ensemble la vidéo, partager nos interprétations préliminaires. Ces rencontres se terminaient par une planification préliminaire (intentions et choix préliminaire de tâches) de la séance suivante prenant en compte certaines hypothèses sur l'activité mathématique que déploierait Justine lors de l'interaction avec les tâches à venir. Cette planification était orientée par les questions suivantes : quels sont les conceptions et raisonnements hypothétiques pour lesquels nous voulons approfondir notre compréhension ? Que voulons-nous provoquer en termes de conceptions et raisonnements visés ou hypothétiques ? Sur le schéma, ce moment de l'analyse est nommé *débriefing 1*. Sur la base de ce *débriefing* et de la planification préliminaire, je rédigeais le questionnaire de la séance suivante en y incluant des interventions et questions selon les hypothèses émergentes du *débriefing*, et le partageais avec l'observateur. Une rencontre juste avant la séance suivante avait lieu (moment *débriefing 2* sur le schéma) afin de discuter de celle-ci, des tâches, interventions et questions du questionnaire, d'échanger nos réflexions et d'effectuer des ajustements au besoin. Finalement, la séance avait lieu. Comme mentionné, je considère aussi, dans ce niveau 0, l'analyse in vivo que l'observateur et moi faisons et qui faisait émerger des interventions et questions que je qualifie de spontanées, durant les séances avec Justine (moment *séance* sur le schéma). Bien que cette analyse soit effectuée in vivo, généralement ce n'était qu'en rétrospective, durant le visionnement de la séance, que je pouvais identifier la rationalité sous-jacente à l'intervention ou la question spontanée. En somme, la préparation de chaque séance découle de l'analyse plus ou moins fine de la séance ou des séances précédentes. Durant mon TE, certaines séances n'étaient séparées que d'un ou de deux jours. Dans ces cas, l'analyse inter séance (post séance, *débriefing 1*, *débriefing 2*) était grossière, tandis que dans d'autres cas où le délai séparant deux séances était plus long, l'analyse inter séance s'avérait moins grossière.

C'est donc dans ce contexte de discussions et de réflexions en continu tout au long du TE que j'ai formulé des hypothèses préliminaires, d'ordre 0, sur certaines caractéristiques à propos des façons de penser de Justine, en lien avec les trois dimensions ci-haut énoncées (analyse « générative » de Clement, 2000). Elles ont également permis d'identifier des moments révélateurs (Powel, Francisco et Maher, 2003) et d'effectuer un premier jet d'analyse de ceux-ci. Puisque tout était noté et répertorié, ce processus a facilité la documentation de l'évolution de mes hypothèses. Au terme des 10 séances, j'ai d'abord classé en dossier toutes les données par séance pour ensuite amorcer le prochain niveau d'analyse. Ces dossiers allaient me servir pour poursuivre l'analyse. Pour chaque séance, le dossier était composé de :

- Notes de terrain en temps réel et à chaud
- Productions écrites de Justine
- Notes personnelles du visionnement 1
- Notes débriefing de la séance
- Planification préliminaire incluant les grandes lignes de chacune des tâches que je voulais présenter ainsi que la rationalité qui oriente le design de celles-ci sur la base du visionnement 1 et du débriefing qui a suivi la séance précédente
- Questionnaire final de la séance (séquence de tâches incluant les interventions et questions planifiées) sur la base du briefing

Dans le tableau 3.5, je présente un résumé des moments du cycle itératif de l'analyse de niveau 0, incluant la nature des données générées puis analysées.

Tableau 3.5 Résumé des moments du cycle itératif de l'analyse de niveau 0 d'une séance A à une séance B.

<b>Moment du cycle</b>	<b>Description sommaire du moment, des données générées et de l'analyse</b>
1. Séance A	Notes de terrain (chercheur et observateur) prises durant la séance. Gestes, discours, interactions, etc.  Analyse en temps réel (observation, analyse, action).
2. Réflexions à chaud	Notes de terrain (chercheur et observateur) prises juste après la séance.  Analyse à chaud (réflexion, analyse, hypothèses).
3. Visionnement 1	Mise en lien avec les productions écrites et les notes de terrain (annotation des notes et productions écrites, indication des minutes, etc.).  Notes (chercheur et observateur) prises durant le visionnement 1 de la séance.  Analyse un peu plus fine et orientée vers l'intention de comprendre les observables, d'émettre des hypothèses quant aux raisonnements mobilisés dans le but d'orienter la planification de la séance suivante.
4. Débriefing 1 et visionnement 2	Rencontre débriefing chercheur et observateur (certaines de ces rencontres ont été enregistrées audio). Partage préliminaire des réflexions, visionnement 2, analyse un peu plus fine des productions écrites et même des tâches présentées. Planification préliminaire des grandes lignes de chacune des tâches qui seront présentées à la prochaine séance.  Interactions (partage de réflexions), notes  Analyse qui oriente la prochaine séance (partage des réflexions, émergence de réflexions, hypothèses, planification).
5. Briefing 2	Planification finale des tâches et questions d'approfondissement par le chercheur. Synthèse hypothèses et planification
Séance B	Itération des étapes 2. à 5. Et ainsi de suite...

### 3.5.2 Analyse des séances — niveau 1

Ici, je considère un premier jet d'analyse grossière effectué après l'expérimentation (d'où le niveau 1). J'ai effectué un survol de toutes les données écrites (papier ou numérique). Elles ont été revues chronologiquement, une séance à la fois. Aucun visionnement n'a été effectué à ce niveau pour ne pas perturber la vue d'ensemble globale du déroulement du TE au départ de ces données. J'ai alors rédigé un premier narratif sous forme de tableau portant sur le contenu conceptuel des séances ainsi que sur les hypothèses émergent du niveau 0. J'ai effectué une première annotation et codification de ce narratif selon les notes et productions écrites. Ce travail a été fait pour bien catégoriser le tout selon les trois dimensions d'investigation. Ceci me servirait pour orienter mes visionnements subséquents des vidéos.

Il est à noter qu'à partir de ce niveau, l'analyse des séances 1 et 2 n'a pas suivi le même genre de trajectoire d'analyse, puisque celle-ci a été effectuée avec une assistante et ne répondait pas aux mêmes types d'intentions. Effectivement, ces deux séances visaient plutôt, ou se sont avérées viser un examen préliminaire des conceptions existantes à propos de l'angle et de sa mesure. En contraste, les séances subséquentes ont eu la visée d'étudier les raisonnements mobilisés lors du développement et de l'apprentissage de la notion de radian. L'analyse complète et les résultats dégagés de ces deux séances ont précédé ceux des autres séances. Au terme de l'analyse de ces deux premières séances, l'assistante et moi en sommes arrivées à une modélisation des conceptions de l'angle et de sa mesure selon Justine, incluant une caractérisation de son processus de mesurage et sa conception de l'unité de mesure d'angle. Nous avons également émis des hypothèses préliminaires à propos des opérations quantitatives mobilisées par Justine. C'est donc en ayant en tête ce résultat final que j'ai continué l'analyse des autres séances.



Ainsi pour les autres séances, j'ai dressé un portrait, d'une part du contenu conceptuel visé par les tâches, des interventions et des questions planifiées en y incluant celui des interactions, interventions et questions émergentes en cours de séance (in vivo). D'autre part, j'ai dressé un portrait de l'activité mathématique de Justine. À ce niveau, le narratif s'est avéré descriptif et l'explicitation des liens avec le cadre conceptuel en termes de caractérisation des opérations mentales de Justine ne faisait que commencer. Ainsi, j'ai décrit chronologiquement le déroulement des séances en identifiant ce qui me semblait être des indications pouvant m'informer principalement sur la troisième dimension d'investigation, soit les raisonnements quantitatifs. À partir de ceci, j'ai donc fait une première tentative de caractérisation des opérations quantitatives, au sens de Thompson, mobilisées par Justine.

### 3.5.3 Analyse des séances — niveau 2

Un troisième niveau d'analyse a été effectué, d'abord en faisant, pour chaque séance, une retranscription de la vidéo, à laquelle j'ajoutais la description des gestes, la rationalité de mes interventions ainsi que certaines hypothèses émergeant de mon (re)visionnement des vidéos concurremment à la rédaction des verbatims, mais aussi les hypothèses qui avait découlé des niveaux 0 et 1 (Cobb et Whitenack, 1996—cohérent avec « *analyses of analyses* »). J'ai appelé ceci des « tableaux de déroulement ». Dans ces tableaux, j'ai effectué une codification par couleur selon les quatre catégories d'éléments suivantes :

- Mes intentions (les moments de rationalité) ou hypothèses de niveaux 0 et 1
- Les indications d'une interaction pouvant éclairer ma compréhension des mathématiques de Justine
- Les indications d'un blocage ou d'un épisode perturbateur vécu par Justine
- Les indications d'une verbalisation, ou d'un geste illustrant ou supportant ma compréhension des mathématiques de Justine

À partir de ces éléments, j'ai fait un second travail de codification et d'interprétation du déroulement. Ainsi, chaque tâche a été codifiée individuellement afin d'identifier plus précisément les différents éléments présents. J'ai ainsi effectué une interprétation plus précise de ceux-ci, c'est-à-dire une caractérisation préliminaire, sur la base du cadre conceptuel, des opérations mentales relatives à la mesure d'angle et de la conceptualisation de l'unité de mesure « radian ». Par exemple, lors d'un épisode dans lequel j'avais identifié un raisonnement de type multiplicatif, je tentais de le caractériser en termes des opérations mentales possiblement mobilisées par Justine.

À ce point-ci, j'ai consolidé le tout dans un document maître avant de poursuivre. Dans ce document, pour chaque séance, on y retrouve les sections suivantes :

- Planification (intentions et objectifs sur la base du niveau 0 et 1)
- Intentions et visées conceptuelles globales
- Remarques à propos de la séance (observateur ou pas, volume et qualité des données, etc.)
- Déroulement descriptif de chaque tâche/épisode incluant
  - Description sommaire
  - Intentions et visées conceptuelles spécifiques
  - Déroulement descriptif (au départ des tableaux de déroulement codifiés)
  - Interprétations préliminaires (vues comme résultats de l'analyse niveau 2)

C'est donc lors de la construction de ce document maître que j'ai effectué une analyse plus fine de mes interprétations. J'ai tenté de préciser les caractérisations, de modéliser les raisonnements quantitatifs de Justine, pour enfin arriver à les utiliser pour expliquer certaines caractéristiques de son activité mathématique tout au long du TE. Ceci a constitué la dernière section « Interprétations préliminaires » de chaque séance dans le document maître décrit ci-haut.

#### 3.5.4 Analyse des séances - niveau 3 et élaboration des résultats en phase

Ce dernier niveau 3 d'analyse s'est effectué au départ de ce document maître pour en arriver à mon narratif final d'analyse présenté par phases (en cohérence avec les méthodes de *constructing a storyline* et *composing a narrative*, de Powel, Francisco et Maher, 2003). J'ai d'abord synthétisé les intentions et visées conceptuelles des séances, puis rédigé un narratif de déroulement en termes de l'activité mathématique de Justine. De ceci, j'ai dégagé trois phases de visées conceptuelles ainsi que 7 thèmes sur l'organisation mathématique de Justine. Ainsi, en portant un ultime regard sur l'ensemble de mes données, celles-ci ayant pris la forme à ce point-ci d'un ensemble d'interprétations et de visées conceptuelles, j'en ai dégagé une articulation entre les mathématiques visées lors des séances du TE et les mathématiques effectuées par Justine. Tel que nous le verrons dans le chapitre suivant, les deux mathématiques vont de pair puisque ce sont essentiellement les mathématiques de Justine qui ont guidé les mathématiques visées, puis, réciproquement ces dernières étaient fortement influencées par le cadre conceptuel et orientaient donc en retour les mathématiques de Justine. L'analyse, dans sa forme finale, aborde donc, par phase, les thèmes qui seront vus à travers des constituants des façons de penser (opérations et structures mentales) de Justine. Les thèmes seront finalement repris un à un, sous la forme de discussion, comme résultats de cette étude.

En résumé, mon processus d'analyse du TE consiste en une hybridation des éléments méthodologiques décrits par les auteurs cités, et faisant appel globalement à la théorisation enracinée (*grounded theory*) telle que décrite par Glaser et Strauss (1967).

## CHAPITRE IV

### ANALYSE

#### 4.1 Structure de présentation de l'analyse

À la fin du chapitre précédent, j'ai détaillé le déroulement et la méthodologie d'analyse que j'ai mis en oeuvre pour en arriver à ce qui sera présenté ici. On a vu qu'un processus itératif d'analyse de mes données a permis d'arriver à des interprétations, dans un premier temps, de l'ensemble du déroulement du TE puis dans un deuxième temps, d'épisodes particuliers. Il s'agissait de soulever certaines caractéristiques des mathématiques de Justine dans le contexte de résolution des tâches, mais aussi d'interactions planifiées ou non, avec moi et parfois avec l'observateur. Émergeant du déroulement effectif du TE et de l'analyse des séances, c'est-à-dire entièrement guidé par l'interprétation, au fur et à mesure, des actions de Justine avec en arrière-plan, les visées et intentions de l'étude liées à l'analyse conceptuelle et le cadre théorique, la structure de présentation de ce présent chapitre sera sous la forme de trois phases. Ce découpage en phases est en lien avec les visées et intentions de l'étude relatives aux cadres théorique et conceptuel mis en avant. Ainsi, chacune des phases correspond au déroulement chronologique du TE, dans lequel j'ai regroupé des étapes ou séances de l'étude qui se sont avérées avoir une visée ou intention globalement semblable.

La phase 0 est vue comme une phase de préparation durant laquelle j'en suis arrivée à une interprétation de la conception de l'objet angle et de sa mesure chez Justine. De l'analyse de son questionnaire allant jusqu'à la séance 2 du TE, j'ai effectivement utilisé ma méthodologie pour arriver à modéliser ses conceptions initiales. Comme mentionné, ceci n'a pas été intentionnel à proprement parler, mais a émergé du déroulement même du TE, dans lequel je me suis retrouvée à modifier les tâches et interactions planifiées afin de générer des données qui me permettraient de dresser ce portrait initial, d'où la visée préparatoire de cette phase 0. Étant donnée la nature préliminaire de cette phase, elle sera moins détaillée que les deux autres, d'autant plus qu'elle n'apporte qu'une amorce de regard par rapport à l'objectif de recherche, soit l'étude de la mobilisation et l'articulation des raisonnements quantitatifs dans l'apprentissage de la notion de radian. Pour cette phase, je présenterai donc les éléments centraux de la modélisation, d'abord par l'analyse de son questionnaire diagnostique puis par quelques épisodes ciblés issus de l'analyse des séances 1 et 2 du TE.

Les phases 1 et 2, quant à elles, ont eu des visées d'incursion dans l'objet de mon étude. Les séances 3 et 4 ont été regroupées puisqu'elles ont porté principalement sur les opérations quantitatives en lien avec le développement d'une conception d'une unité de mesure d'angle qui soit en relation proportionnelle avec la circonférence d'un cercle. Les séances 5 et 6 ont été regroupées puisqu'elles ont porté spécifiquement sur la conceptualisation de l'unité de mesure « radian ». Ainsi, étant donné leur importance relativement à l'objet d'étude, l'analyse de ces phases sera présentée de façon plus détaillée. Dans chacune des sections portant sur ces deux phases, je débute par une description des intentions conceptuelles directement liées au cadre présenté. Ensuite, sous forme de narratif, je décris le déroulement des séances. Ainsi, par tâches ou encore par regroupement de tâches, je décris la ou les tâches et ses intentions spécifiques en y insérant l'énoncé. Ensuite, je décris et interprète le déroulement des

actions de Justine et des interactions entre elle, la tâche et moi. Ainsi pour chaque tâche ou regroupement de tâches, vu comme des épisodes, je propose au lecteur un niveau interprétatif, voire parfois explicatif, imbriqué dans un niveau descriptif. À travers cette analyse, mes interprétations des actions de Justine, mais aussi de mes intentions lors du TE porteront, d'une part sur les caractéristiques des conceptions de l'angle et de la mesure d'angle chez Justine, d'autre part sur des éléments constituant les raisonnements quantitatifs, leur mobilisation et leur articulation, vus comme des thèmes émergeant de cette étude. Ceci sera alors repris, approfondi et synthétisé dans le chapitre suivant.

Avant de débiter, je rappelle que la phase 0 a été menée avec une assistante et collègue de la maîtrise. J'utiliserai donc la première personne du pluriel pour signifier ce travail collaboratif dans cette section, après quoi je retournerai à la première personne du singulier pour les phases 1 et 2 et le reste du mémoire. Dans les extraits des séances présentés, j'utiliserai la lettre J pour représenter les moments où c'est Justine qui parle ou qui agit, la lettre C lorsque c'est moi, et la lettre O lorsque c'est l'observateur. Tel que mentionné dans le chapitre Méthodologie, les retranscriptions des séances sont détaillées pour permettre l'analyse, non seulement du discours verbal, mais aussi des actions non verbales, soit les moments d'écriture d'équations ou de schémas ou encore, les gestes apparaissant sur les enregistrements vidéo. Afin de bien départager ceci du discours verbal et d'uniformiser la présentation dans ce mémoire, j'ai utilisé des crochets et les caractères italiques pour indiquer les actions non verbales. De plus, dans le discours verbal, certains éléments qui précisent le discours sont mis entre crochets. Finalement, j'ai introduit l'horodatage (heure : minutes : secondes) afin d'aider le lecteur à se situer dans le déroulement de chacune des séances, vu l'étendue de ce qui est présenté.

## 4.2 Phase 0 - Questionnaire, séance 1 et séance 2 : L'objet angle et la mesure d'angle selon Justine

La phase 0 de la présentation de cette analyse, vue comme une phase de préparation menant à une interprétation de la conception de l'objet angle et de sa mesure chez Justine, est constituée de l'analyse de ses réponses au questionnaire diagnostique ainsi que de l'analyse des séances 1 et 2 du TE. Comme mentionné, ces analyses ne sont présentées que sommairement dans ce mémoire. Il s'agit plutôt ici de présenter le produit de ces analyses, sous forme de modèle, incluant quelques exemplifications de ce que nous avons avancé dans celui-ci. De plus, je ferai état de quelques interprétations préliminaires à propos de ce que nous avons observé sur la mobilisation et l'articulation des raisonnements quantitatifs chez Justine.

### 4.2.1 Les réponses de Justine au questionnaire

L'analyse des réponses de Justine au questionnaire diagnostique nous a menés à une caractérisation préliminaire, avant le début du TE, de ses conceptions existantes de l'angle et de la mesure d'angle déclinée en trois dimensions principales : 1) l'omniprésence de l'unité de mesure degré ; 2) La mesure d'angle liée au cercle et ses composantes, en particulier l'arc sous-tendu ; 3) L'utilisation du cercle pour étudier la mesure d'angle. Ces trois éléments nous ont permis de poser certaines hypothèses à propos de ses conceptions existantes.

#### 4.2.1.1 L'omniprésence de l'unité de mesure degré

D'abord, la référence à l'unité de mesure degré est présente à travers tout son questionnaire, même dans les tâches n'y faisant pas référence. Ceci n'est pas surprenant étant donné le contexte scolaire. Par contre, nous verrons plus loin dans l'analyse que, dans le cas de Justine, la référence aux degrés est systématique et lui sert d'ancrage pour appuyer ses raisonnements.

À la question 1 par exemple, elle utilise le degré dans sa définition de l'angle ou encore à la question 3, elle fait référence à des mesures repères comme 90 et 360 degrés pour expliquer la signification qu'elle donne à certaines mesures d'angle données. En particulier, à la question 3c, l'angle de 47 degrés est exprimé sous forme de schéma (Figure 4.1), comme l'angle complétant celui de 43 degrés, les deux formant un angle droit.

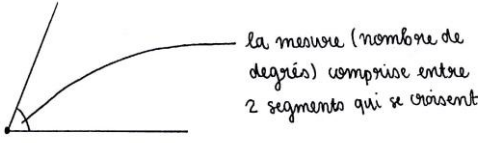
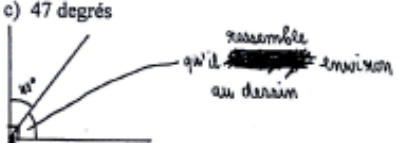
1. Selon toi, qu'est-ce qu'un angle ?	3c. Selon toi, qu'est-ce que ça signifie qu'un angle ait une mesure de
	

Figure 4.1 Référence au nombre de degrés ou à des mesures repères

De plus, elle fait appel à la mesure en degrés pour justifier quel angle a la plus petite ou la plus grande mesure (Figure 4.2). Dans ce contexte, Justine fait référence aux 360 degrés d'un angle plein, puis à l'angle « intérieur » et « extérieur ». Cette tâche ne faisait pas référence à une unité de mesure en particulier, ni même à des valeurs de mesure d'angle.

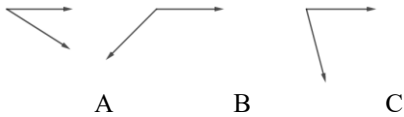
<p>4. Observe les trois schémas ci-dessous.</p> 
<p>c) Lequel des angles que tu as indiqués a la plus petite mesure ? Décris ce sur quoi tu as porté ton attention pour déterminer cette plus petite mesure puis indique-le sur le(s) schéma(s).</p>
<p>Si le A a l'extérieur est le plus grand donc le A intérieur est le plus petit  <math>360 - \text{grand A} = \text{petit A}</math></p>


Figure 4.2 Utilisation de la mesure en degrés de l'angle plein dans une tâche sans mesures



#### 4.2.1.2 L'arc sous-tendu lié à la mesure d'angle

La deuxième dimension que les réponses au questionnaire diagnostique ont permis d'identifier est le lien entre l'arc sous-tendu et la mesure de l'angle. On remarque à la question 5 que Justine indique qu'elle a considéré la longueur d'arc mise en gras pour comparer la mesure des angles indiqués (Figure 4.3). Ceci n'était pas explicite dans les réponses des autres élèves de sa classe. Elle la décrit comme une « portion de circonférence à l'opposé de l'angle ».

5. Imagine des cercles de même rayon centrés au sommet des angles A, B et C. Chacun de ces trois angles coupe une portion de la circonférence du cercle centré en son sommet.



Angle A    Angle B    Angle C

a) Réfère-toi au schéma ci-dessus pour déterminer lequel des angles a la plus petite mesure et lequel a la plus grande mesure.

b) Décris ce sur quoi tu as porté ton attention pour déterminer cette plus petite et plus grande mesure puis indique-le sur le(s) schéma(s).

*la portion de la circonférence coupée  
à l'opposé de l'angle*

Figure 4.3 Utilisation de l'arc sous-tendu pour comparer des mesures d'angle

#### 4.2.1.3 L'utilisation du cercle pour étudier la mesure d'angle

Nous avons effectivement observé certaines réponses dans lesquelles le cercle est utilisé pour justifier des comparaisons de mesures de deux angles (Figure 4.4). Par exemple, à la question 6, les termes « même portion du 360° du centre du cercle » semblent indiquer que les 360 degrés se retrouvent au centre d'un cercle. Aussi, à la question 7, le nombre de degrés est mis en relation avec la « distance circulaire » que nous avons interprétée comme étant l'arc de cercle sous-tendu.

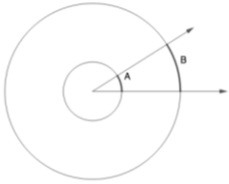
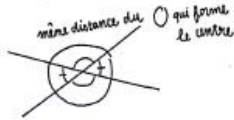
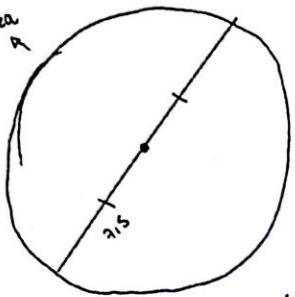
<p>6. Julien, un étudiant de secondaire 4, affirme ceci :</p> <p>« Sur ce schéma, il y a deux angles. L'angle A et l'angle B ! »</p>  <p>a) Es-tu d'accord avec l'affirmation de Julien ? Explique ta réponse.</p> <p>b) Compare les mesures des deux angles identifiés par Julien. Explique comment tu procèdes.</p>	<p>7. Selon toi, qu'est-ce que ça signifie que deux angles aient la même mesure ?</p>
<p><math>m\angle A = m\angle B</math>      puisqu'ils sont le même angle      le même "pourcent" du 360°      du centre du cercle</p>	<p>7. Selon toi, qu'est-ce que ça signifie que deux angles aient la même mesure?</p> <p>qu'ils sont du même nombre de degrés      la même distance circulaire entre      les 2 segments qui le composent</p> 

Figure 4.4 Utilisation de l'arc sous-tendu et de la circonférence pour étudier les mesures d'angle

Finalement, comme mentionné dans le chapitre précédent, sa réponse à la question supplémentaire (question supplémentaire, voir l'énoncé en Annexe A) contrastait avec celles des autres questionnaires analysés. Bien que certains élèves se sont servis de la circonférence pour résoudre la tâche, Justine a répondu à la question (Figure 4.5) en considérant une fraction de la circonférence, soit  $\frac{1}{11}$  qu'elle obtient en « [divisant] la circonférence par 11 [le nombre de pointes] »

Un chef cuisinier veut concevoir un coupe-pizza pouvant couper ses pizzas circulaires de 15 cm de diamètre en 11 morceaux égaux. Il n'a pas accès à un rapporteur d'angle. Comment pourrait-il concevoir son coupe-pizza? Donne le plus d'explications possible.

une pizza



① il pourrait calculer la circonférence et la diviser par 11  
(~~je~~ j'ai oublié la formule mais je crois que c'est  $2\pi r$ )

diamètre = 15 cm  
 $15 \text{ cm} = 2r$   
 $7,5 \text{ cm} = r$

rayon = 7,5

coupe-pizza 3000

lame / couteau

$\frac{1}{11}$  de la circonférence

Figure 4.5 Réponse et schéma de Justine à la question supplémentaire du questionnaire diagnostique : Le « coupe-pizza 3000 »

Justine semble considérer que la circonférence de la pizza peut être partitionnée pour obtenir la longueur d'arc d'une pointe. Effectivement, cette fraction de circonférence dont elle explicite l'existence, soit  $1/11$ , est le résultat d'une comparaison multiplicative entre la circonférence et le nombre total de pointes. Bien qu'il ne soit pas question d'angle dans cette tâche, il nous semblait raisonnable de penser que Justine, à la lumière de l'analyse de son questionnaire, concevait un certain lien entre cette action et l'angle au centre. Ainsi, par l'analyse de son questionnaire, cette association « naturelle » entre la mesure d'angle, l'arc qu'il sous-tend et le cercle nous semblait présente et mobilisée chez Justine.

#### 4.2.2 Séances 1 et 2

Puisque nos interprétations préliminaires des conceptions de l'angle et de sa mesure chez Justine nous semblaient en cohérence avec les constituants du cadre conceptuel, nous avons jugé qu'il serait approprié de poursuivre la THA vers les radians comme prévu dans la séquence préliminaire ; à savoir 8 tâches, dont la dernière serait de construire un angle dont l'arc sous-tendu mesure la longueur d'un rayon, pour en dégager une conception puis une définition du radian. Ceci étant dit, nous voulions bien sûr dans un premier temps étudier davantage ses réponses avant de poursuivre, afin d'approfondir notre compréhension de celles-ci et vérifier quelques hypothèses. Nous avons ainsi décidé de débiter la première séance du TE par un retour sur son questionnaire. Après quoi nous avons l'intention d'amorcer la séquence de tâches planifiées selon la THA, avec quelques modifications qui personnaliseraient les tâches. Par exemple, la première tâche de la séquence serait en contexte du « coupe-pizza 3000 ». Ceci constituait donc notre entrée dans le TE.

À la lumière de l'analyse du questionnaire et du retour sur celui-ci en début de séance 1, nous émettions déjà l'hypothèse préliminaire que Justine concevait la mesure d'angle comme correspondante à la comparaison multiplicative entre l'arc sous-tendu

et une unité de mesure correspondant à une fraction de circonférence. Effectivement, dès le début de la séance 1, Justine décrit sa procédure pour mesurer un angle, soit partitionner en 360 et compter le nombre de  $1/360$  dans l'angle (Extrait 4.1).

Extrait 4.1 Justine explique où on compte les  $(1/360)$ -ième pour en déterminer la mesure (Séance 1)

0 :15 :35	<p>C : Quand tu parlais tout à l'heure de compter les degrés, compter les 1 trois cent soixantièmes, les 1 trois cent soixantièmes, c'est quoi, c'est des espaces, des... ?</p> <p>J : Ouais, c'est genre des petites lignes. Comme, il y a le cercle au complet [<i>trace un cercle</i>] et après, on fait des petites lignes du centre [<i>trace quelques lignes</i>], et on en fait 360, comme partout.</p> <p>C : Et là, on vient compter les [<i>pointe les lignes</i>].</p> <p>J : Ouais.</p>
-----------	---

C'est le même processus de mesurage qu'elle semble concevoir dans le cas d'une unité correspondante à une autre fraction de la circonférence comme le montre le début de l'extrait 4.2.

Extrait 4.2 Justine exprime son malaise à utiliser  $(1/11)$ -ième de la circonférence comme unité de mesure

0 :50 :30	<p>C : Si tu avais à m'expliquer, disons verbalement, comment tu ferais pour trouver la mesure de l'angle, mais avec 1 onzième comme unité de mesure</p> <p>J : Je pourrais faire que l'endroit où ça [1 onzième tracé auparavant] arrête, je le relis au centre [<i>trace une ligne</i>], et après, je fais un petit cercle comme y'a ici [<i>pointe le petit cercle</i>] et ça [la portion du petit cercle] ça reste 1 onzième de l'autre portion du petit cercle, et je peux calculer combien y'a de ça [portion de 1 onzième du petit cercle] dans ça ici [portion du petit cercle sous-tendu par l'angle à mesurer]. [...]</p> <p>J : Je pourrais dire qu'il y a deux 1 onzième de la circonférence qui est là-dedans [<i>pointe l'espace de l'angle</i>] et je pourrais dire qu'il y a deux 1 onzième du 360 degrés qu'il y a dans le truc, ça me donnerait le nombre de degrés dans l'angle qui est là [...]</p> <p>C : Ton angle mesurerait combien si tu veux le donner en 1 onzième de la circonférence ? [...]</p> <p>J : Je ne sais pas comment je pourrais le garder pour qu'il y ait le 1 onzième...</p> <p>C : Mais la mesure d'angle, est-ce que tu veux me la donner en degrés ou en...</p> <p>J : En degrés</p>
-----------	---

	<p>C : Et pour toi, le degré, est-ce que c'est une unité de mesure ou c'est pas une unité de mesure ?</p> <p>J : C'est une unité de mesure.</p> <p>C : Donc là, si tu me le donnes en degrés, est-ce que tu es en train de me le donner dans la même unité de mesure ou c'est une autre unité de mesure ?</p> <p>J : Je sais pas.</p>
--	---

Or, durant la séance 1, nous avons observé chez Justine certaines difficultés dans la résolution des tâches autour desquelles nous interagissions. En effet, dans la fin de l'extrait 4.2 ci-haut, nous voyons que nous avons passé beaucoup de temps à discuter lorsqu'il était question d'utiliser une fraction de circonférence quelconque pour exprimer la mesure d'un angle. Puisque les tâches suivantes étaient analogues, il y a eu plusieurs blocages, si bien que nous ne nous sommes pas rendues au-delà de la tâche 3.

L'analyse inter séance nous a donc amenées à émettre des hypothèses sur la portée des conceptions et raisonnements que Justine mobilisait et donc, nous avons planifié la deuxième séance de sorte qu'elle nous permettrait potentiellement d'étudier davantage la conception de l'angle et la mesure d'angle chez Justine ; en particulier son processus de mesurage, sa conception de l'unité de mesure et la mobilisation ou non de raisonnements quantitatifs. Aussi, nous avons jugé que d'interagir autour d'une séquence de tâches semblables dans leur structure lui permettrait, par le principe de raisonnement répété (Harel, 2007 ; Harel, et Koichu, 2010), d'organiser ses opérations mentales. Celles-ci nous semblaient quand même en cohérence avec celles impliquées dans l'approche par arc, que nous mettions en avant. Ainsi, nous débiterions la séance 2 par une discussion à propos de la mesure d'angle en degrés, vue comme une comparaison multiplicative entre l'arc sous-tendu et l'arc-unité correspondant à  $\frac{1}{360}$  de la circonférence. En partant de sa conception de la mesure d'angle en degrés, nous voulions l'amener à généraliser ceci à la mesure selon une unité quelconque,

correspondant à une fraction de circonférence. Ensuite, nous présenterions une séquence de tâches amenant Justine à construire une unité de mesure fictive, le *gip*<sup>17</sup>, puis à mesurer des angles en cette unité pour finalement en arriver à la construction du radian. Lors de la séance 2, nous avons décelé plusieurs occasions d'approfondir notre interprétation de la façon dont Justine comprenait l'angle et sa mesure. Nous avons donc pris le temps, par des questions et interventions non planifiées, d'investiguer davantage ses façons de penser et de comprendre. Encore une fois, nous n'avons donc pas abordé l'idée de mesurer l'arc sous-tendu en longueurs de rayon. Au terme des séances 1 et 2, c'est plutôt un portrait de l'objet angle et de la mesure d'angle chez Justine que nous avons été en mesure de dresser, incluant toutefois quelques hypothèses préliminaires sur les caractéristiques de ses raisonnements quantitatifs, ainsi que sur la mobilisation et l'articulation de ceux-ci dans le contexte des tâches que nous lui avons présentées.

---

<sup>17</sup> La tâche du *gip* est une tâche que Moore a présenté aux participants de son étude (Moore, 2013).

#### 4.2.2.1 L'objet angle de Justine

Lors de la phase 0, plusieurs productions écrites ainsi que les discours de Justine (Figure 4.6 et extrait 4.3) nous ont permis de formuler une caractérisation de la conception de l'objet angle chez Justine.

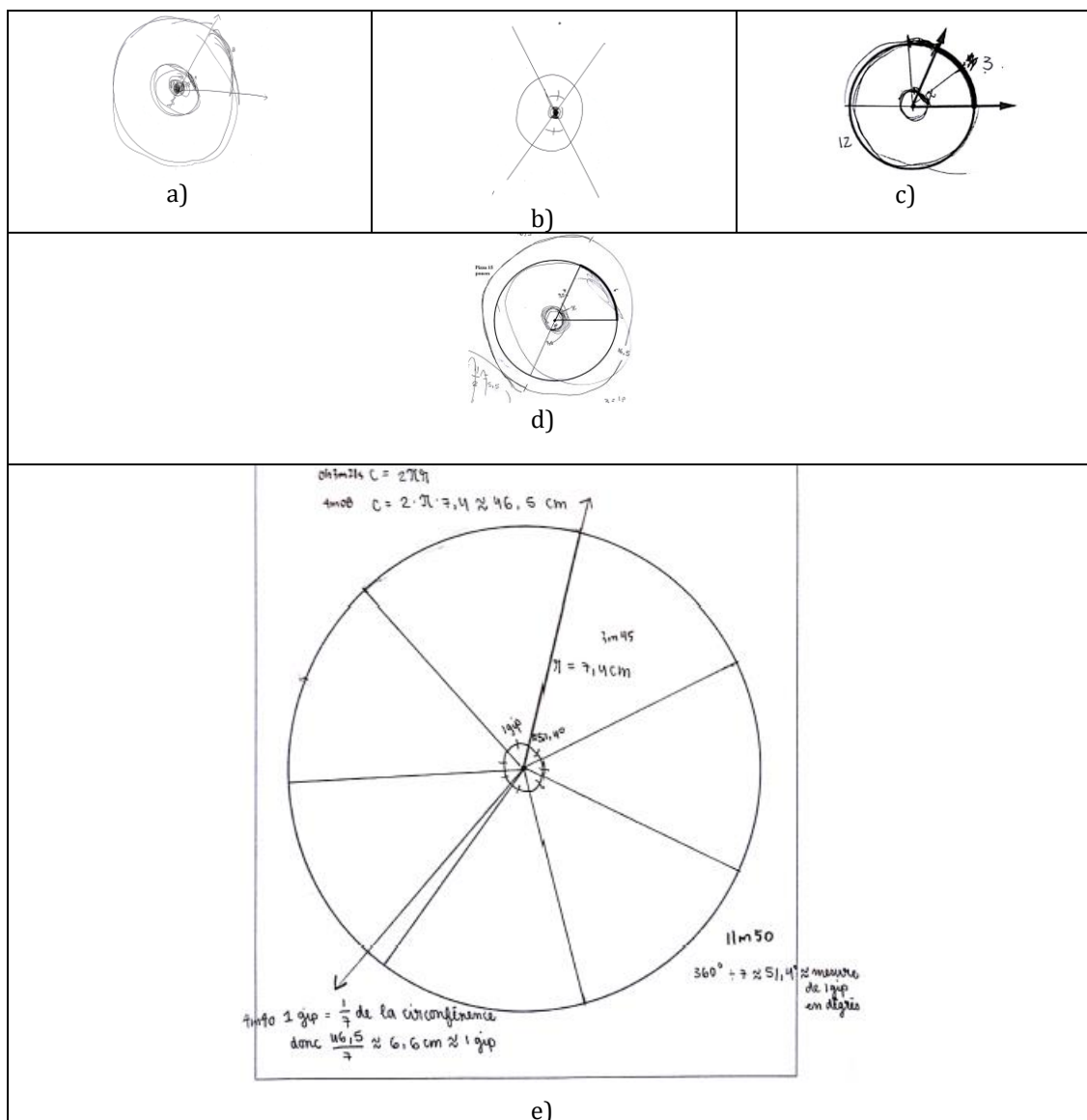


Figure 4.6 Mosaïque des représentations schématiques de l'angle chez Justine lors des séances 1 et 2 du TE



### Extrait 4.3 Justine explique où se situe l'angle (Séance 1)

0 :15 :35	<p>C : C'est quoi ça [<i>pointe le cercle dans la réponse écrite</i>] [...]</p> <p>J : Je veux dire le point au milieu, comme là [<i>pointe au croisement des segments</i>]</p> <p>C : Peux-tu me réexpliquer ça s'il te plaît ?</p> <p>J : [<i>Justine dessine le schéma Figure 4.6b</i>] Donc, eumh... comme le centre ici [<i>pointe le point de rencontre des segments</i>] comme deux angles qui sont de mêmes mesures, ça serait la même portion du petit cercle qui est coupé par les deux lignes. [...]</p> <p>C : Ce que tu as dessiné ici [<i>pointe le cercle au centre</i>], c'est la surface ici que tu regardes ?</p> <p>J : Vous voulez dire quoi ?</p> <p>C : Ici, tu m'as dit cette partie-là, et tu as colorié à l'intérieur.</p> <p>J : Ouais, ça, ça serait pareil à ça si on coloriait à l'intérieur</p> <p>C : et là, ça serait les parties que tu as coloriées en noir qui serait les mêmes ?</p> <p>J : Ouais.</p> <p>C : Donc l'angle en tant que tel, il est où pour toi ?</p> <p>J : [<i>Justine dessine un point</i>] Comme, au milieu</p>
-----------	--

Il nous semblait raisonnable d'avancer que pour Justine, l'angle plein est un point, voire un petit disque. Ceci permettrait à Justine de le voir spontanément comme un disque pouvant s'agrandir ou se rétrécir (donc de diamètre variable). Un angle donné serait alors un secteur de ce disque et délimité par le croisement de deux droites. Il semble que Justine conçoit que cet objet peut être partitionné pour déterminer la mesure de l'angle. Par ailleurs, nous avons constaté un aspect de sa conception de l'angle qui différait légèrement de celle précisée dans notre analyse conceptuelle. En effet, pour Justine, il semble que l'angle ne possède pas de côtés en soi. Or, il semble que pour Justine, ces côtés ou délimitations sont nécessaires pour déterminer la mesure de l'angle, car c'est à l'intérieur de ceux-ci que l'on « compte le nombre » d'unités de mesure, quelle qu'elle soit. Nous avançons que cette façon de voir l'angle n'est pas incohérente avec la conceptualisation proposée dans l'analyse conceptuelle. Il nous apparaissait même que cette image de petit disque permet de concevoir aisément et naturellement d'une part, la relation proportionnelle entre les rapports

$\frac{\text{arc}}{\text{circonférence}}$  et  $\frac{\text{angle}}{\text{angle plein}}$  et, d'autre part, l'invariance de la mesure de l'angle par rapport au cercle considéré.

#### 4.2.2.2 La mesure d'angle et les unités de mesure pour Justine

Selon nos analyses et interprétations des dires et actions de Justine durant cette phase 0, nous sommes d'avis que sa conception de la mesure d'angle est caractérisée par les éléments suivants :

1) *Une prédominance marquée et un ancrage solide dans les degrés et plus généralement, dans des concepts connus, notamment le pourcentage.* Ceci avait été observé lors de l'analyse du questionnaire et a été validé à plusieurs reprises durant les séances 1 et 2. On peut retourner à l'extrait 2 plus haut pour constater que, dans un contexte où on lui demande d'exprimer la mesure en une autre unité de mesure, Justine revient systématiquement aux degrés. Durant la construction du gip, Justine convertit un gip en degrés même si ni la tâche ni moi ne le demandions (voir au centre de son schéma à la Figure 4.6.e).

2) *Sa conception de la mesure d'angle implique une conception assez robuste d'un processus de mesurage.* Celui-ci revient à partitionner la circonférence en  $n$  puis compter le nombre de  $1/n$  contenus dans l'arc sous-tendu par l'angle. Dès le début de la séance 1, lors du retour sur le questionnaire, Justine verbalise clairement ce processus lorsque je lui demande d'expliquer comment elle procéderait pour mesurer un angle si elle ne possédait pas de rapporteur d'angle (Extrait 4.4).

#### Extrait 4.4 Justine explique son processus de mesurage d'un angle (Séance 1)

0 :06 :00	<p>J : [<i>indique le cercle déjà présent</i>] Faire le cercle autour de l'angle</p> <p>C : ok</p> <p>J : Puis diviser la circonférence en 360 et après compter le nombre de 1 sur 360 [<i>indique l'arc sous-tendu par l'angle</i>] qu'il y a dans la portion du cercle</p>
-----------	--

3) *L'égalité des rapports  $\frac{\text{arc}}{\text{circonférence}}$  et  $\frac{\text{angle}}{\text{angle plein}}$  est au centre de ses raisonnements.* Cette égalité de rapports est constamment mobilisée. Nous supposons que c'est sa conception robuste de l'objet angle vu comme petit disque pouvant s'agrandir et se rétrécir qui lui permet de faire appel à ces rapports aisément. Dans l'extrait 4.5, Justine et moi discutons de sa réponse à la question 6 du questionnaire diagnostique (voir Figure 4.6, p. 91). Elle explique quel est le lien entre la mesure de l'angle et les arcs sous-tendus sur chacun des deux cercles concentriques. Nous interprétons la dernière ligne comme une verbalisation claire de cette égalité des rapports.

Extrait 4.5 Justine explique le lien entre « espace entre les 2 coupures » et « portion du 360 degrés » l'égalité nécessaire des rapports

0 :11 :12	<p>J : Oui [ il ya un lien], puisque c'est comme rapport de similitude truc... comme ça veut dire sont pareils parce qu'avec ça... je sais pas</p> <p>C : Vas-y dans tes mots</p> <p>J : Ok. Quelque chose, y'a un rapport de similitude, ils sont... similaires... semblables.</p> <p>C : Qu'est-ce qui est semblable ?</p> <p>J : Les deux... cercles... sont ensembles... eumh... par quelque chose... je sais pas quoi, parce que y'a pas de chiffre dedans..., mais comme, c'était quoi la question ?</p> <p>C : Ma question était est-ce qu'il y a un lien entre la portion du 360 et les deux coupures... pas les deux coupures, les deux segments.</p> <p>J : Ah oui ! Ça serait la même portion comparée aux... à la circonférence complète. Donc ici [<i>pointe le centre du cercle</i>], c'est disons... [<i>estime visuellement</i>] 35, disons que c'est environ 35, ça serait 35 sur 360. Si la circonférence [<i>pointe le grand cercle</i>] complète était de quelque chose, ça serait 35 sur 360 de la circonférence.</p>
0 :13 :35	<p>J : Donc ça [<i>pointe le centre du cercle</i>], l'angle ici, comme du petit cercle, [...] c'est le même angle, je vais dire qu'il est 35 parce que c'est simple. Et après ça, 35 et tout [<i>pointe le petit cercle au complet</i>], c'est 360. Alors je vais dire que toute la circonférence ici [<i>pointe le grand cercle</i>], c'est 360 centimètres. Donc cette portion-là [l'arc sous-tendu par l'angle], serait 35 trois cent soixantièmes de tout ça [<i>pointe la circonférence du grand cercle</i>]. Comme ça serait la proportion comme de ça [<i>pointe la grande circonférence</i>], de ça [<i>pointe l'arc sous-tendu sur la grande circonférence</i>] pis ça serait pareil pour ça, [<i>pointe le centre</i>], puisque c'est le même angle. Comme la quantité qui serait à l'intérieur serait proportionnelle à la quantité de degrés à l'intérieur du truc complet.</p>

4) *Le cas des unités de mesure quelconques.* L'articulation des constats 2) et 3) nous semblait plus aisée dans le cas des degrés et devenait moins évident dans le cas d'unités de mesure quelconques. L'extrait 4.6 tiré de l'interaction autour de la tâche 1 de la séance 2 illustre ce dernier constat. À partir d'un schéma d'un angle dans un cercle centré en son sommet, on demandait à Justine d'exprimer sa mesure en utilisant une unité de mesure correspondant à  $1/6$  de la circonférence du cercle.

Extrait 4.6 Justine utilise le processus de mesurage, la relation proportionnelle et multiplicative pour déterminer la mesure de l'angle

<p>0 :28 :00 – 0 :32 :00 (vidéo 1 de 3)</p>	<p>J : Je vais calculer la fraction de ça [indique l'arc sous-tendu] sur le total [indique la circonférence] et mettre sur les trois cent soixante pour trouver le nombre de [fait un geste de V avec ses mains et les avance comme pour mimer les rayons se rendant à la circonférence] qu'il y a là-dedans [indique l'ouverture de l'angle à mesurer]</p> <p>[...]</p> <p>J : Je vais mesurer le, ah ben je l'ai déjà fait. Je vais mesurer mon un sixième, je vais faire que ça c'est 4 point 5 [indique l'arc 1/6], j'veis trouver le nombre de 4 point 5 dans ça [indique le schéma de l'angle à mesurer] pis me dire que ça c'est n'importe quoi fois un sixième et il y aura ça de sixièmes dans [l'arc] pis il y aura ça [indique l'angle 1/6 en longeant côté-sommet-côté], euh c'était quoi, de 60 degrés dans [indique l'angle à mesurer]. Donc il y a 3 point 2 un sixièmes dans ça [indique l'angle à mesurer].</p> <p>C : Puis qu'est-ce que ça représente cette fraction 3 point 2 divisé par 6 ?</p> <p>J : [Silence. On suppose qu'elle réfléchit] Euh la portion de l'arc de cercle qui est là [suit du doigt l'arc sous-tendu] par rapport à, qui n'est pas là [suit du doigt le reste de la circonférence], qui est là [revient à l'arc sous-tendu]</p> <p>C : Par rapport à quoi ?</p> <p>J : Tout</p> <p>C : Par rapport à la circonférence.</p> <p>J : Oui</p> <p>[...]</p> <p>C : Et c'est quoi le lien entre la valeur de cette fraction-là [indique <math>3,2/6 = 0,53</math>] puis ton angle, ou ta mesure d'angle ?</p> <p>J : Ben ça [indique <math>3,2/6</math>], si je le mets en pour cent ça me donnerait 53, ben environ 53 pour cent qui est là-dedans [indique le secteur de cercle à l'intérieur délimité par les côtés de l'angle]. Donc 53 pour cent de 360 degrés qui est là-dedans plutôt que là [indique le secteur de cercle à l'extérieur délimité par les côtés de l'angle].</p>
---	---

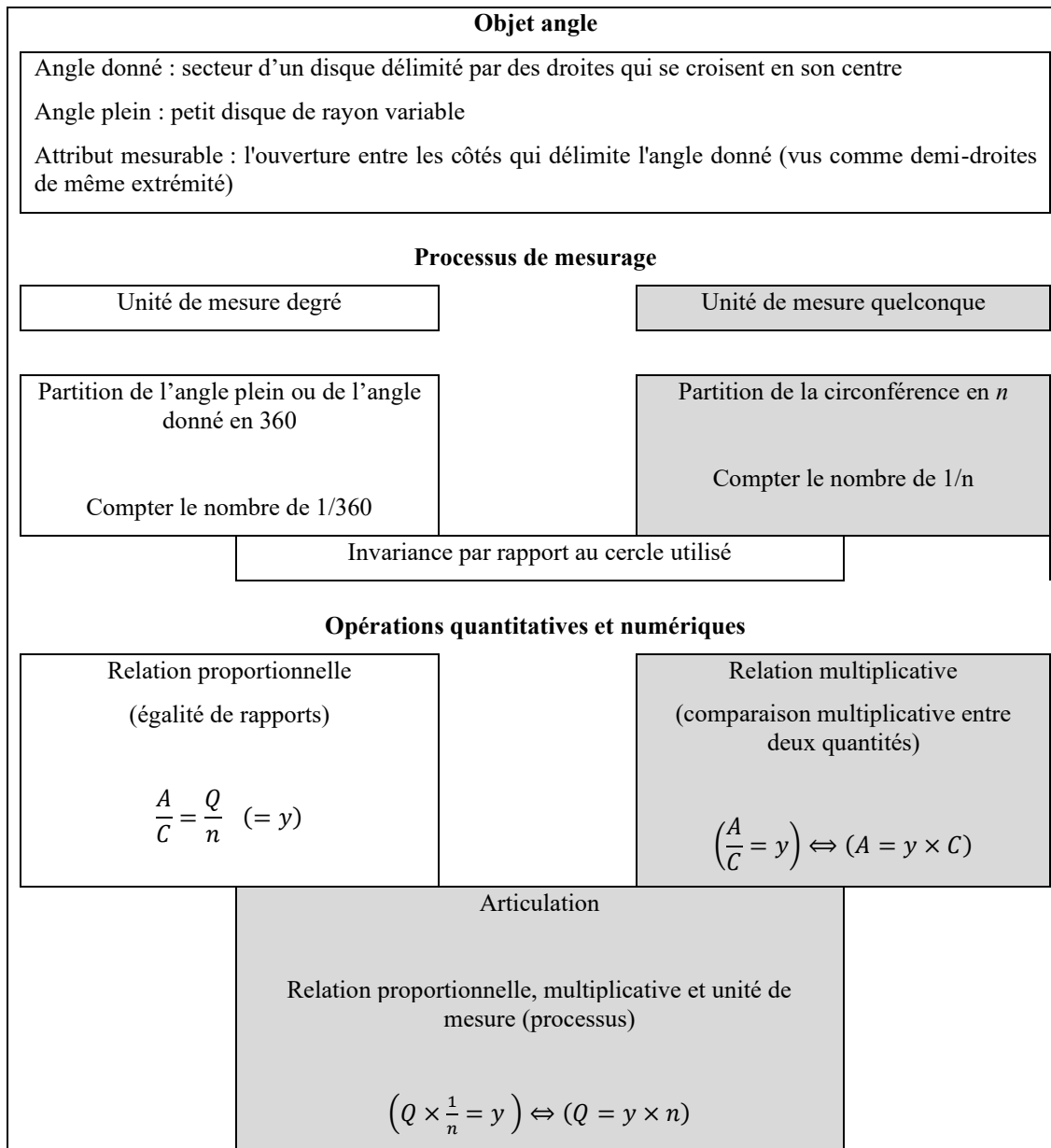
Justine conçoit et est en mesure d'expliquer clairement sa démarche sous la condition de la consigne. Il est clair pour elle que l'objectif est de « trouver le nombre de 4 point 5 » cm contenus dans l'arc sous-tendu. Nous interprétons ceci comme une manifestation de la capacité de Justine à faire appel à son processus de mesurage. Par ailleurs, l'ensemble de l'épisode nous portait à croire que ce n'est tout simplement pas spontané et que l'ancrage dans l'unité « degré », et dans l'égalité des rapports était fort chez elle. En effet, son discours va même jusqu'à revenir aux degrés. Il était possible que Justine ait omis en cours de route la consigne stipulée. Cependant, il nous semblait raisonnable d'avancer que ce qui explique ses actions, à ce moment donné, était plutôt qu'elle ait mobilisé ses raisonnements et conceptions existantes. Pour elle, déterminer la mesure d'un angle implique un processus, une égalité de rapports et le degré. L'utilité d'exprimer cette mesure dans une autre unité ne semblait pas être intégrée pleinement dans ses conceptions de l'angle et de sa mesure, bien que le processus et l'idée de proportionnalité, eux, nous semblaient constants d'une unité à l'autre. Au terme des deux séances, bien que nous ayons un portrait de sa conception de l'objet angle et de sa conception de ce que c'est mesurer un angle, il nous semblait manquer d'information sur la mobilisation et l'articulation de certaines opérations quantitatives qu'elle semblait mobiliser. Ces manques d'information se situaient à des niveaux différents dans le cas des degrés, par rapport au cas des unités de mesure quelconque que nous tentions d'introduire.

### 4.2.3 Hypothèses émergentes de la phase 0

Au terme de l'analyse des deux premières séances, nous avons mis en lumière ce que nous pensions être des conceptualisations intégrées et des conceptualisations en développement (Tableau 4.1, p. 98). Certains épisodes nous portaient à croire que Justine mobilise la relation proportionnelle vue comme égalité de deux rapports autant dans le cas des degrés que dans celui des unités de mesure quelconques. En contrepartie, la mobilisation de la relation multiplicative  $\frac{\text{arc}}{\text{circonférence}}$  vue comme une comparaison multiplicative de deux quantités nous semblait plus fragile. Nous conjecturons que ces deux derniers éléments sont possiblement en développement et les liens avec l'égalité des rapports (la relation proportionnelle) ainsi qu'avec l'invariance du processus de mesurage n'étaient possiblement pas intégrés à son réseau de structures quantitatives.

Nous avons conclu qu'afin de favoriser un apprentissage éventuel des radians qui soit cohérent et signifiant, un éloignement des degrés et du raisonnement proportionnel pour laisser place à une conceptualisation de la relation multiplicative serait peut-être bénéfique. Ceci étant dit, il m'apparaissait nécessaire d'investiguer davantage ces structures chez Justine afin d'approfondir ma compréhension de celles-ci et d'en explorer la portée

Tableau 4.1 : Modèle hypothétique de la conception de l'angle et de sa mesure de Justine



Conceptualisation intégrée
Conceptualisation en développement

### 4.3 Phase 1 — Séance 3 et séance 4 : Retour vers l'unité de mesure fraction de circonférence de Justine

La phase 0 a été présentée comme une phase de préparation me permettant ultimement de dresser un portrait global des façons existantes de penser et de comprendre de Justine à propos de l'angle et de sa mesure. Cette phase m'a également permis d'amorcer une certaine réflexion sur les raisonnements quantitatifs mobilisés ou pas par Justine, lorsqu'elle s'engage dans les types de tâches qui lui ont été présentés. À partir de l'analyse de niveau 0, j'ai préparé la séance suivante, avec l'intention d'amener Justine vers la notion de radian. Au terme de la séance 3, j'ai jugé pertinent de revenir, dans la séance 4, sur l'idée de mesurer la longueur d'arc sous-tendu par un angle en utilisant une fraction de circonférence obtenue par l'action mentale (visée ou favorisée selon ma conception des tâches) de partition de celle-ci. J'ai regroupé les séances 3 et 4 en une Phase 1 que j'ai nommé *Retour vers l'unité de mesure fraction de circonférence de Justine*<sup>18</sup>.

Les phases 1 et 2 de l'analyse n'ont pas le même statut que la phase 0. Elles ont plutôt été une investigation en profondeur des façons de penser et de comprendre de Justine en termes d'actions mentales, interprétées à travers la lunette de la théorie de Thompson et de l'approche par arc de Moore. La structure de présentation de celles-ci est différente de celle de la section précédente. Pour chacune, je décrirai d'abord les intentions conceptuelles directement en lien avec le cadre présenté. Ensuite, sous forme de narratif, je décrirai le déroulement des séances la composant, et ce, par tâche ou regroupement de tâches, en y précisant d'abord les intentions spécifiques puis

---

<sup>18</sup> Il est à noter que ce titre évoque l'idée de la visée didactique de la séquence de tâches et d'interactions planifiées de ces deux séances. Il ne fait donc pas référence à l'activité mathématique de Justine, bien que celle-ci ait guidé la visée de la séquence.



l'énoncé de la ou les tâches. Ensuite, je présenterai une description, puis mon interprétation du déroulement des actions de Justine et des interactions entre elle, la tâche et moi. Le narratif contient donc des éléments d'ordre interprétatif imbriqués dans la description du déroulement. L'analyse présentée ici porte, d'une part, sur les caractéristiques des conceptions de l'angle et de la mesure d'angle chez Justine et d'autre part sur des éléments constituant les raisonnements quantitatifs, leur mobilisation et leur articulation. De ceci émergeront des thèmes regroupant ces constituants. Ceux-ci seront repris, approfondis et synthétisés dans le chapitre suivant.

#### 4.3.1 Intentions conceptuelles

Je rappelle que dans la mise en oeuvre de mon TE, je me suis retrouvée, à chaque cycle briefing-séance-débriefing, à élaborer une THA de la ou des séances à venir. C'est donc cette THA « en évolution » que je qualifie de localisée et orientée par les éléments de l'analyse 0 des séances précédentes, que je présenterai ici.

La séance 3 s'est déroulée autour de quatre tâches précédées d'un retour sur la dernière tâche de la séance 2, sous forme d'interaction planifiée. La séance visait une conceptualisation de l'unité de mesure radian vue comme la mesure de l'ouverture d'un angle qui sous-tend un arc de cercle dont la longueur mesure  $\frac{1}{2\pi}$  de la circonférence du cercle centré au sommet de cet angle<sup>19</sup>.

---

<sup>19</sup> Comme pour les séances précédentes, un « questionnaire chercheur » servait de guide au déroulement de la séance. Celui-ci incluait donc certaines questions planifiées d'approfondissement et des interventions en fonction de différents scénarios possibles, que nous avons envisagés sur la base de nos observations et hypothèses issues de la phase 0.

Dans cette séance, j'avais les trois intentions générales suivantes :

- Favoriser le raisonnement quantitatif impliquant une relation multiplicative entre la longueur de l'arc sous-tendu et le rayon du cercle par l'action concrète de mesurer le premier avec le dernier (la longueur de l'arc mesure un certain nombre de longueurs de rayon).
- Favoriser la conception d'un lien entre l'unité de mesure usuelle, soit le degré, et une autre unité de mesure, le radian, en présentant une similitude entre l'action de mesurer en degrés (compter le nombre de  $\frac{1}{360}$  de circonférence dans l'arc sous-tendu) et celui de mesurer en radians (compter le nombre de  $\frac{1}{2\pi}$  de circonférence dans l'arc sous-tendu).
- Favoriser l'image (dynamique) de l'ouverture de l'angle en conservant l'un des côtés fixe.

Pendant le débriefing de la séance 3, nous avons cru pertinent de porter de nouveau l'attention sur l'idée de fraction de circonférence comme unité de mesure et de tenter de rendre explicite l'invariance du processus de mesurage que l'on travaille en degrés, en gips (une unité de mesure d'angle fictive dont l'angle plein mesure 7 gips, que Justine avait construite lors de la séance 2) ou encore en radians. Ceci me paraissait constituer une base solide pour le développement d'une conception signifiante de la notion de radian que nous allions introduire durant la séance 4 sous forme d'enseignement explicite. Aussi, lors de ce débriefing, j'avais observé chez Justine une mobilisation constante d'un raisonnement s'appuyant sur la proportionnalité, qui s'articulait difficilement avec les actions calculatoires. Par conséquent, les tâches présentées dans la séance 4 visaient à amener Justine à calculer en même temps que de raisonner à propos des relations multiplicatives entre l'arc, le rayon et la circonférence ainsi que les unités de mesure. De plus, toujours sur la base de mes observations et analyses de niveau 0 de la séance 3, j'ai jugé pertinent de travailler

avec le nombre  $\pi$ , en fin de séance 4, dans le contexte d'observation de mesure d'angles en radians.

La séance 4 était donc composée de quatre tâches papier-crayon accompagnées d'interactions planifiées ainsi qu'un enseignement explicite introduisant une définition formelle de l'unité de mesure radian. Bien entendu, toujours dans l'esprit du TE, j'étais prête et disposée à changer de trajectoire à tout moment, en me laissant guider par l'activité mathématique de Justine.

Dans cette séance, j'avais les intentions générales suivantes :

- Favoriser la mobilisation de l'idée d'invariance du processus de mesurage selon l'unité de mesure à partir d'une séquence de tâches semblables répétées pour chacune des unités de mesure (degrés, gips, radians).
- Favoriser le développement de la conception de l'unité de mesure vue comme fraction de circonférence en revisitant la mesure d'angle en degrés et en gips, vue comme un certain nombre de  $\frac{1}{360}$  ou de  $\frac{1}{7}$  de l'angle plein ou de la circonférence.
- Favoriser la transposition de ce qui précède à la mesure d'angle en radians comme un certain nombre de  $\frac{1}{2\pi}$  de l'angle plein ou de la circonférence.
- Introduire et définir formellement la notion de radian.
- Travailler sur la mesure d'angle en radian en utilisant l'écriture avec  $\pi$  et sans  $\pi$ .
- Favoriser le développement d'une image mentale de l'ouverture d'angles dont la mesure est exprimée en radians.

#### 4.3.2 Déroulement et interprétations

Dans ce qui suit, je présente, pour les séances 3 et 4, sous forme de narratif, leur déroulement. Par tâches ou encore par regroupement de tâches, je décris la ou les tâches et ses intentions spécifiques en y insérant l'énoncé. Ensuite, je décris et

interprète le déroulement des actions de Justine et des interactions entre elle, la tâche et moi. Ce qui suit est composé d'un niveau interprétatif, voire parfois explicatif, imbriqué dans un niveau descriptif du déroulement du TE. Mes interprétations des actions de Justine, mais aussi de mes intentions lors du TE porteront, d'une part sur les caractéristiques des conceptions de l'angle et de la mesure d'angle chez Justine, d'autre part sur des éléments constituant les raisonnements quantitatifs, leur mobilisation et leur articulation.

#### 4.3.2.1 Séance 3 - Retour séance 2

J'ai débuté la séance 3 par un retour sur la dernière tâche abordée à la séance 2<sup>20</sup> pour ramener l'invariance des rapports  $\frac{\text{arc sous-tendu}_1}{\text{circonférence}_1}$  et  $\frac{\text{arc sous-tendu}_2}{\text{circonférence}_2}$  pour un angle donné dans deux cercles concentriques, et en discuter. Je cherchais à favoriser la verbalisation de l'invariance, par rapport au cercle choisi, de la relation multiplicative entre l'arc sous-tendu et la circonférence pour un angle donné. Lors de ce retour, Justine a verbalisé le lien entre le rapport  $\frac{\text{arc sous-tendu}}{\text{circonférence}}$  et la mesure d'angle. Elle affirme dès lors que le rapport de l'angle à l'angle plein doit être le même que le rapport de l'arc sous-tendu à la circonférence pour expliquer l'invariance d'un cercle à l'autre. Elle a également calculé les rapports respectifs dans chacun des cercles pour le constater et appuyer sa façon de penser. Il m'était clair que Justine s'appuyait sur l'égalité de ces rapports pour justifier cette invariance. Cette relation de proportionnalité semble être l'ancrage de sa conception de la mesure d'angle. Lorsque

---

<sup>20</sup> Cette tâche demandait à Justine si la longueur de l'arc sous-tendu donnée en centimètres constituait une mesure appropriée de l'angle. Je n'entrerai pas dans les détails du déroulement de cet épisode, mais il est à noter que Justine a eu de la difficulté à expliquer sa réponse. Essentiellement, elle était d'avis que ce n'était pas une mesure appropriée puisqu'alors, si on changeait de cercle, la longueur en centimètres de l'arc changerait aussi. Or, elle n'a pas évoqué le rapport, invariant d'un cercle à l'autre, de l'arc sous-tendu à la circonférence.

je lui ai demandé comment utiliserait-elle ce rapport pour calculer la mesure de l'angle en degrés, elle a écrit le rapport  $\frac{\text{arc sous-tendu}}{\text{circonférence}}$ . Or, elle a hésité entre multiplier par 360 et multiplier par  $\frac{1}{360}$ . Elle a finalement justifié son choix en s'appuyant sur l'ordre de grandeur du résultat qu'elle devait obtenir (la mesure ne pouvait pas être inférieure à 1), puis elle a complété l'écriture de son calcul, soit  $\frac{\text{arc sous-tendu}}{\text{circonférence}} \times 360$ . Je me suis alors questionnée sur les sens que Justine attribue aux valeurs 360 et  $\frac{1}{360}$  (et éventuellement  $2\pi$  et  $\frac{1}{2\pi}$ ). On peut supposer que 360 est la mesure d'un angle plein, mais je me suis mise à douter de la quantité à laquelle elle attribuait la valeur  $\frac{1}{360}$ . J'émettais l'hypothèse que cette valeur n'évoquait pas, à ce moment-là, chez Justine, une unité de mesure correspondant à un arc-unité, malgré sa conception assez robuste du processus de mesurage d'un angle. Nous reviendrons plus loin sur la fragilité chez Justine de l'articulation entre les opérations numériques et les opérations conceptuelles.

#### 4.3.2.2 Séance 3 — Tâche 1

Par la tâche 1 (Tableau 4.2), nous cherchions à provoquer l'observation de l'invariance des ouvertures de l'angle d'un cercle à l'autre, étant donné un nombre de longueurs de rayon (ficelle). C'est-à-dire, qu'indépendamment de la longueur linéaire du rayon (l'unité de mesure étant le centimètre), l'arc-sous-tendu par un angle donné demeure un certain nombre de fois la longueur du rayon du cercle en question. Ceci reviendrait à voir la mesure de l'arc (voire la mesure de l'angle) en relation multiplicative avec le rayon (voire le radian) :

mesure de l'arc =  $n \times$  un rayon    et    mesure de l'angle =  $n \times$  un radian

où  $n = \frac{\text{arc sous-tendu}}{\text{un rayon}}$ , c'est-à-dire l'arc mesuré en rayons.

Réciproquement, exprimer la longueur de l'arc en unité de mesure correspondante à un rayon (voire déterminer la mesure de l'angle en radian), reviendrait à déterminer  $n = \frac{\text{arc sous-tendu}}{\text{un rayon}}$ . Nous verrons plus loin que ce raisonnement quantitatif impliquant une *relation réciproque de grandeur relative* (RRGR) n'est pas évident à mobiliser et semble jouer un rôle dans la conceptualisation mise en avant dans les tâches.

Tableau 4.2 Description détaillée et énoncé de la Tâche 1 de la séance 3

<b>Description détaillée de la tâche</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Construire un angle sous-tendant un arc dont la longueur correspond à celle d'un rayon du cercle centré en son sommet à partir d'un schéma d'un cercle et son centre ainsi que la ficelle préalablement coupée de la longueur d'un rayon, soit de 6,2 cm.</li> <li>• Comparer la construction avec une autre dans un cercle de rayon (longueur de ficelle) différent, soit de 8 cm<sup>21</sup>.</li> <li>• Expliquer ses observations.</li> <li>• Construire un angle sous-tendant un arc dont la longueur correspond à celle de deux rayons et demi (deux ficelles et demie).</li> <li>• Comparer à nouveau cette construction avec celle du cercle de rayon différent.</li> </ul>
<b>Énoncé de tâche présenté à Justine</b>
<p><b>Tâche 1</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) Construis un cercle dont le rayon mesure la longueur de ta ficelle.</li> <li>b) Construis un angle dont le sommet est au centre de ton cercle et coupe un arc du cercle de la longueur de ta ficelle approximativement.</li> <li>c) Compare l'ouverture de ton angle avec l'autre qui a été construit. Que remarques-tu ?</li> <li>d) Construis un angle dont le sommet est au centre de ton cercle et coupe un arc du cercle de la longueur de deux ficelles et demie approximativement.</li> <li>e) Compare l'ouverture de ton angle avec l'autre qui a été construit. Que remarques-tu ?</li> </ul>

Lors de cette tâche, Justine a construit l'angle (mesurant 1 radian) avec aisance. Elle a ensuite comparé sa construction avec l'autre. Elle a constaté qu'ils ont la même

---

<sup>21</sup> Celle que j'effectuais en même temps en suivant ses directives.

ouverture. Après avoir construit l'angle sous-tendant « deux ficelles et demie » et l'avoir comparé avec l'autre angle construit dans le cercle de rayon différent, Justine a décrit comment elle concevait la comparaison entre l'ouverture d'un angle mesurant 1 radian et celle mesurant 2,5 radians. Dans l'extrait 4.7, son explication fait référence à l'ouverture obtenue par l'arc coupé de longueur 1 rayon et elle semble concevoir que, si on a la même ouverture pour un arc coupé d'une ficelle (un rayon), alors cette ouverture a été multipliée par le même facteur 2,5, et donc doit donner la même ouverture.

Extrait 4.7 Réponse de Justine à la Tâche 1 e). Pourquoi la même ouverture d'un cercle à l'autre ?

0: 32: 10	J : [l'un] est 2 virgule 5 fois [l'autre]
0: 32: 50	J : On a multiplié par le même [2,5]... [Les ficelles ne sont pas de la même longueur], mais c'était pareil aussi avant... [On a la même ouverture avec 1 ficelle], car c'est le rayon. [Elle réfère à tâche 3 de la séance 2]... Je suis perdue.

Il semble que sa conception du lien entre la mesure de l'angle et le rapport de l'arc sous-tendu à la circonférence s'appuie sur l'idée de proportionnalité. Il semble clair pour Justine que, peu importe le cercle choisi, le rapport de l'angle à l'angle plein doit être le même que le rapport de l'arc sous-tendu à la circonférence. Qui plus est, il semble que pour Justine, si l'ouverture de l'angle 1 radian est la même, l'itérer 2 fois et demie revient au même dans tout cercle. Je suis d'avis que son image mentale de l'objet angle lui permet aisément de « voir » ceci puisque son angle ou encore son angle plein est, d'une certaine façon, un secteur de disque ou un disque que l'on peut agrandir ou rétrécir à notre guise. La forte image de l'ouverture et des côtés la délimitant semble aider Justine à voir l'itération d'un certain facteur comme indépendant du cercle que l'on fixe ou que l'on regarde. Toutefois, j'élaborerai plus loin mon hypothèse que cet ancrage dans la proportionnalité et cette façon de comprendre l'objet angle, bien qu'important dans le processus de quantification, ne

sont pas nécessairement gage d'une polyvalence dans l'articulation entre les opérations conceptuelles et les opérations numériques dans le cas de Justine.

#### 4.3.2.3 Séance 3 — Tâche 2

Dans la tâche 2 (Tableau 4.3), je voulais porter l'attention sur le nombre de longueurs de rayon nécessaire pour faire la circonférence d'un cercle par la manipulation concrète d'une ficelle et report de cette mesure le long de la circonférence. Ceci dans le but de faire ressortir la relation multiplicative entre le rayon et la circonférence, cette dernière étant vue comme  $2\pi$  fois le rayon du cercle, ce qui amènerait potentiellement l'idée que le rayon du cercle correspond à  $\frac{1}{2\pi}$  fois la circonférence. Cette tâche visait donc à favoriser chez Justine le développement d'un raisonnement impliquant la RRGR,  $(2\pi r = C) \Leftrightarrow \left(r = \frac{1}{2\pi} \times C\right)$ , tout en investiguant si ce type de raisonnement est partie constituante des schèmes d'action de Justine. Je voulais tester l'hypothèse d'une mobilisation spontanée de la formule  $2\pi r = C$ , ou d'une mobilisation de la relation proportionnelle entre le rayon et sa circonférence (le rapport invariant  $2\pi = \frac{r}{C}$ )<sup>22</sup>.

---

<sup>22</sup> Nous avons planifié de présenter la tâche 2' (voir tableau 4.4 à la page 112) seulement dans le cas où nous n'observions pas cette mobilisation spontanée.



Tableau 4.3 Description détaillée et énoncé de la Tâche 2 de la séance 3

<b>Description détaillée de la tâche</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utiliser la ficelle donnée comme unité de mesure pour déterminer le nombre de longueurs de rayon nécessaire pour faire la circonférence du cercle.</li> <li>• Comparer sa réponse avec celle obtenue dans l'autre cercle.</li> <li>• Expliquer pourquoi le résultat est le même.</li> <li>• Déterminer la fraction de circonférence à laquelle correspond la longueur d'un rayon.</li> </ul>	
<b>Énoncé de tâche présenté à Justine</b>	
<b>Tâche 2</b>	<p>a) En utilisant la ficelle comme unité de mesure, combien de longueurs de rayon font la circonférence de ton cercle ?</p> <p>b) Compare ta réponse avec celle que tu obtiendrais pour l'autre qui a été construit. Pourquoi obtiens-tu ce résultat ?</p> <p>c) Une longueur de rayon correspond à quelle fraction de la circonférence du cercle ? Explique ta réponse.</p>

Pour déterminer le nombre de longueurs de rayon nécessaire pour faire la circonférence de son cercle, Justine a mesuré la circonférence à l'aide d'une règle (flexible) puis a divisé (avec sa calculatrice) cette mesure par la longueur de l'arc sous-tendu construit au début de la tâche précédente. Elle obtient alors une valeur qu'elle arrondit à 6,31 (Figure 4.7.a, p. 111). Je lui ai alors demandé s'il y avait une autre façon de déterminer ce nombre. Je m'attendais à ce qu'elle fasse référence à la relation d'égalité  $2\pi r = C$  pour affirmer que la circonférence correspond à  $2\pi$  fois le rayon du cercle, donc que  $2\pi$  longueurs de rayon sont nécessaires pour faire la circonférence. Ainsi, nous aurions potentiellement pavé le terrain pour faire ressortir la RRGR entre le rayon et la circonférence. Toutefois, Justine affirme qu'elle aurait pu « juste calculer avec le rayon [donné sur le schéma] et utiliser  $2\pi r$  [pour trouver la circonférence] » puis elle utilise de nouveau sa calculatrice pour calculer. Ensuite, elle divise par  $r$  et obtient toujours une valeur qu'elle arrondit à 6,28. Mon interprétation de ceci est que même lorsqu'elle décrit une « autre façon de faire », les deux façons qu'elle mobilise reviennent au même. Elle utilise des nombres puis effectue des calculs plutôt que de mobiliser un raisonnement sur les quantités en jeu. Cette façon de faire ne semble pas permettre de dégager l'idée qu'il y a  $2\pi$  rayons dans la circonférence d'un cercle à ce moment-là. Le lien avec l'idée de  $2\pi$  rayons dans

toute circonférence n'est pas spontanée chez Justine pour appuyer son raisonnement dans ce type de tâche. Ceci me laissait croire qu'une articulation entre opérations quantitatives et opérations arithmétiques est non sans lacunes chez Justine dans ce contexte. Elle passe ensuite à la sous-tâche b). Elle écrit puis calcule la circonférence de l'autre cercle et obtient environ 51,52 cm (Figure 4.7.b, p. 111). Ensuite, elle écrit et calcul le nombre de rayons en divisant la circonférence obtenue par la valeur du rayon, soit  $\frac{51,52}{8,2}$  et obtient environ 6,28 et verbalise spontanément que, dans un cercle de rayon différent, c'est le même nombre de rayons. L'extrait 4.8 semble suggérer que Justine s'explique ceci par la mobilisation de l'idée de proportionnalité. Or, après avoir tenté de la pousser à expliquer ce qu'elle veut dire, et ensuite de l'orienter fortement en récapitulant ce à quoi nous faisons face, elle finit par hausser les épaules en guise de « ne sais pas ». Elle ne fait pas explicitement appel à l'idée qu'il y a  $2\pi$  ou même 6,28 rayons, car la mesure de la circonférence est précisément égale à  $2\pi$  fois la longueur du rayon. Je décide alors de l'inviter à passer à la partie c). Justine écrit ce qui me semble a priori une égalité de rapport,  $\frac{\text{rayon}}{\text{circonférence}} = \frac{1}{6,28}$  (Figure 4.7.c, p. 111). Son explication semble s'appuyer sur l'utilisation de la même unité de mesure, soit le rayon, puis elle dit qu'« il y a six point 28 rayons dans la circonférence », mais lorsque je lui demande s'il y a un lien entre sa fraction de circonférence que représente la longueur du rayon et la formule de la circonférence, elle répond qu'il n'y en a pas pour elle. Encore une fois, la formule ne lui semble pas utile.

Extrait 4.8 Justine tente d'expliquer pourquoi il y a toujours  $2\pi$  rayons dans la circonférence d'un cercle

0: 41: 25	<p>C : Pourquoi c'est pareil [le 6,28] ?</p> <p>J : Parce que c'est la même proportion.</p> <p>C : Ok, la même proportion de...</p> <p>J : De la circonférence</p> <p>[...]</p> <p>C : Tu dis que c'est la même proportion de la circonférence, qu'est-ce que tu veux dire ?</p> <p>J : [<i>légère hésitation</i>] Ben il y a le même nombre de rayons [<i>pointe du crayon la valeur 6,28 sur sa feuille de travail</i>] pour faire la circonférence [<i>avec son crayon, fait le tour le long de la circonférence sur sa feuille de travail</i>]</p> <p>C : Et, est-ce qu'il y a un moyen d'expliquer ça ?</p> <p>J : Ben parce qu'on a utilisé le rayon et...pareil</p> <p>C : Ok, mais là on a deux cercles de rayons différents et on a le même nombre de rayons pour faire la circonférence au complet [...] Et alors tu expliques qu'on a le même nombre de rayons, peu importe la grosseur du cercle ? Si je prends un cercle et que je prends son rayon, j'ai toujours le même nombre 6,28. Comment ça se fait que j'aie toujours ce même nombre ?</p> <p>J : Parce que c'est le même angle.</p> <p>C : De quel angle on parle ?</p> <p>J : [<i>Hésitation. Pointe du crayon l'angle sur le cercle de 8,2 cm de rayon</i>]</p> <p>C : Ok, on récapitule. Tu as vu que pour faire la circonférence de ce cercle-ci ça prend 6,28 rayons et pour faire la circonférence de celui-là, y'en a aussi le même nombre. Là ce que je te demandais c'est, ben la question demande pourquoi on obtient ce même résultat ? Pourquoi on a le même nombre de rayons sur chacune de ces deux circonférences-là ?</p> <p>J : [<i>Hausse les épaules</i>]</p>
0: 44: 35	<p>C : Ok, passons à la question c.</p> <p>J : [<i>Elle écrit 1/6,28</i>] Je vais vérifier que j'ai écrit le bon truc. [<i>Ailleurs sur sa feuille, elle écrit rayon/circonférence = 1/6,28 voir Figure 4.7c</i>].</p> <p>C : Est-ce que tu peux m'expliquer ?</p> <p>J : Bon, une longueur de rayon [<i>pointe rayon au numérateur</i>] donc un rayon [<i>pointe 1 au numérateur</i>] sur la circonférence du cercle [<i>pointe circonférence au dénominateur</i>] donc si on utilise le même truc, si on dit que c'est rayon et rayon [<i>indique numérateur et dénominateur</i>], circonférence en rayons, ben c'est 1 sur six point 28 [<i>pointe 6,28 au dénominateur</i>] puisqu'il y en a six point 28 dans la circonférence.</p> <p>C : Y a-t-il un lien entre la formule de circonférence et l'idée de fraction de circonférence ? [<i>pointe la fraction 1/6,28 sur sa feuille de travail</i>]</p> <p>J : Je ne sais pas. Non, y'en a pas.</p>

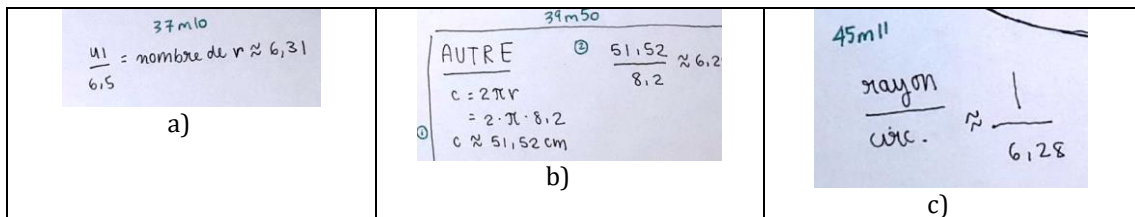


Figure 4.7 Production écrite de Justine en lien avec le nombre de rayons dans la circonférence de tout cercle

Encore ici il semble que l'égalité de rapports prend le dessus. Or, qu'entend-elle réellement par proportion (au début de l'extrait 4.8)? Quelles sont les quantités qui sont effectivement proportionnelles dans ce cas pour Justine? L'interaction entre Justine et moi à ce moment n'a pas permis d'approfondir ma compréhension de sa façon de penser et de comprendre à ce moment-là à propos de la proportionnalité. Cependant, il est d'intérêt et j'avance que bien qu'elle fasse appel à une égalité de rapport impliquant le rayon et la circonférence, l'utilisation de la valeur approximative de  $2\pi$ , soit 6,28, crée un certain frein vers l'émergence d'un raisonnement à propos de la relation multiplicative existant entre ces deux quantités puisqu'elle n'est pas explicitée lorsque la formule est exprimée avec  $\pi$ . Lors du débriefing de la séance 3, nous avons soulevé cet enjeu relatif au nombre  $\pi$ . Ceci m'a amenée à en tenir compte dans mes décisions didactiques de préparation pour la séance 4.

#### 4.3.2.4 Séance 3 — Tâche 2'

Je croyais que la tâche 2' (Tableau 4.4) amorcerait l'idée d'utilité de prendre la longueur d'un rayon comme unité de mesure de la longueur de l'arc sous-tendu par l'angle, puisque cette unité est directement en lien avec le cercle. On rappelle que, pour Justine, l'angle est effectivement un objet lié au cercle et que la mesure de son

ouverture est, dans sa façon de comprendre, étroitement liée aux mesures du cercle, soit l'arc sous-tendu et la circonférence. De plus, cette tâche permettrait de porter l'attention sur le lien pouvant exister entre l'unité de mesure usuelle, soit le degré, et une autre unité de mesure, le radian, en présentant une similitude entre l'action de mesurer en degrés (compter le nombre de  $\frac{1}{360}$  de circonférence dans l'arc sous-tendu) et celui de mesurer en radians (compter le nombre de  $\frac{1}{2\pi}$  de circonférence dans l'arc sous-tendu).

Tableau 4.4 Description détaillée et énoncé de la Tâche 2' de la séance 3

<b>Description détaillée de la tâche</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Imaginer le mouvement d'un objet sur le cercle et imaginer l'angle sous-tendant l'arc que celui-ci parcourt.</li> <li>• Illustrer la situation sur le schéma.</li> <li>• Mesurer l'arc en longueurs de rayon</li> <li>• Déterminer la fraction de circonférence à laquelle il correspond.</li> </ul>	
<b>Énoncé de tâche présenté à Justine</b>	
<p>Tâche 2'</p> <p>Imagine que tu suis le mouvement d'un objet sur ton cercle. À un moment de sa trajectoire, tu formes l'angle qu'il a balayé depuis le début de son déplacement.</p> <p>Illustre ceci sur ton schéma.</p> <p>a) Mesure la longueur de l'arc coupé par cet angle en longueurs de rayon.</p> <p>b) La longueur de l'arc coupé par cet angle correspond à quelle fraction de la circonférence ?</p>	

Pour déterminer la mesure de l'arc en longueurs de rayon, elle mesure l'arc à l'aide de la règle et divise ce qu'elle obtient par la mesure du rayon. Lorsqu'on lui demande d'expliquer ce que signifie son résultat, soit la valeur 1,39 elle dit : « [L'arc coupé] est 1,39 fois plus grand que [l'arc un rayon]. ». Puis lorsqu'elle détermine la fraction de circonférence à laquelle l'arc correspond (tâche 3b), elle verbalise (Extrait 4.9) sa conception de la relation entre l'arc et la circonférence en termes de nombre de longueurs de rayon respectivement puis, elle semble concevoir et mobiliser l'idée d'équivalence entre cette relation en nombre de rayons et celle entre la longueur de l'arc et la circonférence en centimètres.

#### Extrait 4.9 Justine explique à quoi correspond la longueur de l'arc sous-tendu par rapport à la circonférence

0: 54: 30	<p>J : On demande la longueur de ça [<i>pointe l'arc</i>] c'est quelle fraction de ça [<i>avec son crayon, fait le tour le long de la circonférence</i>].</p> <p>[<i>Elle réfléchit et écrit 1,39/6,28 puis trace un trait reliant ce qu'elle a écrit à l'arc</i>].</p> <p>C : Tu peux m'expliquer ?</p> <p>J : Bon, y'a six point 28 rayons dans [la circonférence] et dans [l'arc] y'a 1 point 39 donc [l'arc] c'est 1 point 39 sur [la circonférence] 6 point 28. Ou bien j'aurais pu dire 9 sur 41.</p>
-----------	---

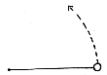
Il semble que dans le cours des Tâche 2 et Tâche 2', il y a mobilisation d'un raisonnement quantitatif qui exprime les relations multiplicatives (comparaison) entre les quantités en jeu. Or, le lien avec la formule de calcul de la circonférence n'est pas explicité, même lorsque les interventions visent à provoquer cette conception. Il y avait alors confusion et hésitation chez Justine. Peut-être pense-t-elle avoir déjà répondu à ce que je lui demande. Peut-être que de se faire questionner sur ce qui est évident pour elle lui fait remettre en question son raisonnement, d'où l'hésitation. Il est, selon mon interprétation, aussi possible que les idées visées ne lui sont pas utiles pour raisonner dans le contexte de la résolution de cette tâche. À ce moment, des questionnements et hypothèses se sont posés. Par exemple, je me suis demandé quels étaient la nature et le rôle d'une articulation robuste entre les quantités, les relations quantitatives et opérations arithmétiques en jeu et leurs concepts correspondants. Je reviendrai sur ceci dans la phase 2.

#### 4.3.2.5 Séance 3 — Tâche 3

La tâche 3 (Tableau 4.5) était analogue à la précédente, mais en contexte. Cette tâche permettrait potentiellement d'investiguer quels raisonnements et conceptions sont mobilisés et comment ils s'articulent dans une tâche en contexte visant à les provoquer. Plus précisément, je cherchais à investiguer la mobilisation ou non d'un

raisonnement quantitatif impliquant les relations multiplicatives entre l'arc sous-tendu, le rayon et la circonférence, pour amorcer l'idée d'exprimer la longueur d'arc sous-tendu en nombre de  $\frac{1}{2\pi}$  de la circonférence ; c'est-à-dire l'exprimer en nombre de longueurs de rayon puis éventuellement, d'exprimer la mesure de l'angle en radians par correspondance directe en favorisant la conception d'un lien entre la fraction de circonférence et la mesure d'angle balayé<sup>23</sup>.

Tableau 4.5 Description détaillée et énoncé de la Tâche 3 de la séance 3

<b>Description détaillée de la tâche</b>	
<p>Dans un contexte de mouvement circulaire consistant à faire tourner une balle attachée à une corde raide<sup>24</sup> et étant données les longueurs en centimètres de la corde et de l'arc parcouru par la balle :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Déterminer le nombre de longueurs de rayon parcourus par la balle</li> <li>• Déterminer la fraction de circonférence à laquelle correspond le déplacement de la balle</li> <li>• Se prononcer sur l'angle balayé par le déplacement de la balle.</li> </ul>	
<b>Énoncé de tâche présenté à Justine</b>	
<p><b>Tâche 3</b></p> <p><b>La balle !</b>  <b>Joséphine fait tourner une balle attachée à une corde raide dont la longueur est de 52 centimètres. À un certain moment de son tour, la balle a parcouru une distance de 73 centimètres sur sa trajectoire circulaire.</b></p> 	<p>a) Combien de longueurs de rayon la balle a-t-elle parcourues ? Écris ta démarche.  b) Quelle fraction de la circonférence la balle a-t-elle parcourue ? Écris ta démarche.  c) Que peux-tu dire à propos de l'angle balayé par le déplacement de la balle ?</p>

<sup>23</sup> Il est à noter qu'une autre tâche avait été initialement prévue. Cette tâche reprenait le même contexte qu'à la tâche 3 en spécifiant que la balle parcourait le même nombre de longueurs de rayon, mais cette fois, au bout d'une corde raide plus courte. Justine aurait alors eu à illustrer la situation, déterminer la distance parcourue et la fraction de circonférence à laquelle cette distance correspond, pour finalement se prononcer à nouveau sur l'angle balayé par ce « nouveau » déplacement de balle. Toutefois, nous n'avons pas abordé cette tâche par manque de temps.

<sup>24</sup> Le contexte de cette tâche (la balle) est tiré de l'Investigation 5 du manuel Pathways, p. 281.

À la suite à la lecture de l'énoncé d'introduction, Justine et moi avons discuté à propos du nombre  $\pi$ , fait un retour sur le lien entre la valeur obtenue 6,28, le nombre  $2\pi$  et la relation  $2\pi r = C$  et un retour sur le nombre de rayons nécessaire pour faire la circonférence. Après plusieurs tentatives de ma part, visant à provoquer une verbalisation du lien entre mesurer en  $\frac{1}{2\pi}$  et  $2\pi r = C$ , la conception de la circonférence comme correspondant à un certain nombre de longueurs de rayon n'était toujours pas spontanée et n'a pas émergé explicitement dans son discours. Ensuite, Justine explique qu'en divisant la distance parcourue en centimètres par la longueur du rayon en centimètres, elle obtient le nombre de rayons parcourus. À la tâche 3c) elle conçoit l'équivalence entre la fraction de circonférence et la fraction de l'angle en s'appuyant sur l'unité de mesure en degrés. Elle verbalise le rapport  $\frac{1,4 \text{ rayons}}{2\pi \text{ rayons}}$  en termes de longueurs de rayon : « c'est 1,4 rayons sur les  $2\pi$  [de la circonférence]. » L'extrait 4.10 illustre la teneur de son discours à la fin de cette séance.

Extrait 4.10 Justine explique la relation entre la longueur d'arc sous-tendu et la mesure de l'angle balayé en degrés

1: 18: 14	<p>J : Non. Ben, c'est 22 pour cent du 360 degrés [<i>fait un mouvement circulaire avec sont crayon autour du centre du cercle</i>]</p> <p>C : Ok, là tu as utilisé le 22 pour cent parce que t'avais trouvé que ça faisait 22 pour cent de la circonférence au complet. Est-ce qu'il y a une autre façon pour toi de décrire l'angle balayé ?</p> <p>J : Que c'est moins qu'un quart parce que 22 pour cent c'est moins que 0 point 25</p> <p>C : Ok, puis par rapport au nombre de rayons par exemple ?</p> <p>J : Que c'est 1 point 4 sur...c'était combien ?</p> <p>C : 2pi. Ok.</p> <p>J : Donc y'a 1 point 4 ici [<i>pointe l'arc</i>] sur <math>2\pi</math> [<i>mouvement circulaire pour indiquer la circonférence puis calcule sur la calculatrice</i>] Ouais, 6 point 28</p>
1: 19: 32	<p>C : Ok, donc 1.4 sur <math>2\pi</math> [<i>Écrit 1,4/2π</i>]. Et c'est quoi le lien avec l'angle ? Parce que là on a parlé de la circonférence du cercle...</p> <p>J : [<i>Prend une règle courte et un stylo, les met l'un sur l'autre, représente l'ouverture en écartant le stylo</i>]</p>



L'intention ici était de développer l'idée que déterminer le nombre de longueurs de rayon que mesure l'arc coupé (mesurer l'arc coupé en longueurs de rayon) est équivalent à donner sa mesure en utilisant une unité de mesure qui correspond à  $\frac{1}{2\pi}$  de la circonférence. Cependant, nous constatons que cette idée n'a pas explicitement émergé dans notre interaction. Les comportements et actions de Justine que j'ai observés durant la Tâche 3 me portent à penser qu'il ne semble pas y avoir de mobilisation de l'idée que  $\frac{A}{r}$  fois  $\frac{1}{2\pi}$ , vu comme un lien entre le nombre de longueurs de rayon coupées par l'angle et l'idée d'unité de mesure correspondant à une fraction de circonférence,  $\frac{1}{2\pi}$ , représente la même fraction de la circonférence. Ici, il me semblait pertinent de me questionner davantage à propos de la présence du nombre  $\pi$  dans les relations quantitatives en jeu. Comment vient-elle modifier potentiellement l'image mentale de partition de la circonférence ? Effectivement, on peut supposer que d'imaginer la partition en 360 ou en 7 est « accessible » dans l'esprit de Justine, mais qu'une partition en  $\frac{1}{2\pi}$  le serait moins. D'autant plus que sa conception de « compter le nombre d'arcs  $\frac{1}{360}$  ou  $\frac{1}{7}$  dans l'arc sous-tendu » est mobilisée régulièrement dans ses explications conceptuelles à propos de l'unité de mesure. Cependant, bien que « compter le nombre de rayons » est mobilisé, l'articulation avec les relations quantitatives en jeu (notamment  $2\pi r = C$ ) n'est pas évidente.

La séance 4 a débuté avec une interaction planifiée à propos de la démarche pour calculer la mesure d'un angle en degré étant données les mesures de l'arc sous-tendu et le rayon. Cette courte interaction d'introduction à la séance me permettrait d'investiguer la mobilisation ou non des conceptions visées dans les séances précédentes. Justine explique sa démarche pour calculer la mesure de cet angle en degré en effectuant ce qui me semble être une comparaison multiplicative entre l'arc et la circonférence, puis explique que ce rapport est le même entre l'angle et l'angle plein.

#### 4.3.2.6 Séance 4 — Tâches 1 et 2

Les tâches 1 et 2 (Tableau 4.6) me permettraient de faire un retour sur les séances 1 et 2 en revisitant la mesure d'angle en degrés (respectivement en gips) comme un certain nombre de  $\frac{1}{360}$  (respectivement  $\frac{1}{7}$ ) de l'angle plein ou de la circonférence. Le passage par les 3 étapes intermédiaires a été conçu dans une perspective conceptuelle ou opératoire au sens de von Glasersfeld (1995) et de Simon et al (2004). Je voulais fournir à Justine une occasion de structurer et organiser une expérience (concrète) impliquant des actions réfléchissantes lui permettant (éventuellement) d'intérioriser ces actions comme une façon d'opérer mentalement.

Tableau 4.6 Description détaillée et énoncé de la Tâche 1 de la séance 4

<b>Description détaillée de la tâche ou de l'interaction planifiée</b>
<p><sup>25</sup>À partir du schéma utilisé précédemment (incluant les mesures de l'arc sous-tendu et du rayon) :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Déterminer la mesure d'un angle (en degrés ; en gips) en passant par 3 étapes intermédiaires : <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Déterminer la longueur de l'arc-unité (correspondant à <math>\frac{1}{360}</math> ; <math>\frac{1}{7}</math> de la circonférence) ;</li> <li>○ Exprimer la longueur d'arc sous-tendu en cette longueur d'arc-unité ;</li> <li>○ Déterminer la fraction de circonférence à laquelle correspond la longueur d'arc sous-tendu ;</li> <li>○ Utiliser cette fraction pour déterminer la mesure de l'angle (en degrés ; en gips).</li> </ul> </li> </ul>
<b>Énoncé de tâche présenté à Justine</b>
<p>Tâche 1</p> <p>Unité de mesure d'angle : Le degré Réfère-toi au Schéma 1.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>a) Quelle est la longueur de l'arc correspondant à <math>\frac{1}{360}</math> de la circonférence du cercle ?</li> <li>b) Quelle est la longueur de l'arc coupé par l'angle en unité de mesure correspondant à <math>\frac{1}{360}</math> de la circonférence du cercle ?</li> <li>c) La longueur de l'arc coupé par l'angle correspond à quelle fraction de la circonférence du cercle ?</li> <li>d) Utilise cette fraction pour déterminer la mesure de l'angle en degrés.</li> </ol>

Suite à la complétion de la partie b), j'avais planifié une série de questions pour investiguer les conceptions sur lesquelles Justine s'appuie pour expliquer les relations entre les quantités impliquées. L'extrait 4.11 montre qu'elle répond sans hésitation et met en lien la longueur d'arc mesurée en arc-unité de  $\frac{1}{360}$  de la circonférence et l'idée de la mesure de  $1^\circ$  comme correspondant à  $\frac{1}{360}$  de l'angle plein. Ceci lui permet d'affirmer spontanément la valeur de la mesure de l'angle.

---

<sup>25</sup> Les deux tâches sont analogues. Les énoncés de chacune étaient construits exactement de la même façon. La Tâche 1 portait sur le degré et la Tâche 2, sur le gip.

### Extrait 4.11 Justine explique sa façon de concevoir la mesure d'angle en degrés

<p>0: 11: 15 à 0: 12: 00</p>	<p>C : Que peux-tu dire de la longueur de l'arc coupé par l'angle [sur le schéma] par rapport à la longueur d'un arc coupé par un angle de mesure 1 degré ?</p> <p>J : Il serait 67 virgule 468 [le résultat de son calcul longueur arc coupé en cm/longueur arc-unité en cm] fois plus grand.</p> <p>C : Que peux-tu dire de la mesure de cet angle en degrés ?</p> <p>J : Il mesure 67 virgule 468 degrés [réfère à son calcul qu'elle vient d'effectuer]</p>
<p>0: 12: 15</p>	<p>J : [Complète la tâche 1c) - Voir productions écrites ici bas]</p> <p>C : Donc qu'est-ce que tu as écrit ici ?</p> <p>J : Ben, je ne savais pas en quelle fraction alors j'ai écrit tout ça.</p> <p>C : Donc si tu calculais la valeur de ça puis de ça, [Pointe les deux rapports] tu obtiendrais la même valeur ?</p> <p>J : Oui</p> <p>C : Pourquoi ?</p> <p>J : Ben c'est la même chose c'est juste des unités différentes, comme si je changeais ça en millimètres, ça me donnerait la même chose [calcule les deux expressions puis obtiens 0,1874].</p> <p>c) La longueur de l'arc coupé par l'angle correspond à quelle fraction de la circonférence du cercle?</p> <p>longueur de l'arc = 5,89 cm ou 67,468 360èmes de la c.</p> $\frac{5,89 \text{ cm}}{31,42 \text{ cm}} \text{ ou } \frac{67,468 \text{ 360èmes de la c.}}{360 \text{ 360èmes de la c.}} \approx 0,1874$ <p style="text-align: right; color: blue;">13m15</p>

Elle se ramène alors à sa conception de changement d'unités de mesure qui ne change pas la valeur du rapport. Conceptuellement, Justine semble s'appuyer constamment sur l'égalité de rapports en faisant correspondre les quantités du numérateur aux quantités du dénominateur. En d'autres termes, ce rapport ne change pas puisque les quantités correspondent. Je ne qualifierais pas ici sa façon de penser à propos du rapport comme étant une comparaison multiplicative de deux quantités qui définit une troisième quantité qu'est la mesure d'angle. Mais sa façon de faire lui permet tout de même d'affirmer que la valeur du rapport ne peut avoir une valeur (grandeur) différente lorsqu'on change d'unité de mesure.

Lorsque la tâche lui demande d'utiliser cette fraction de la circonférence à laquelle correspond la longueur de l'arc coupé par l'angle pour déterminer la mesure de l'angle en degrés (tâche d)), il y a un premier moment d'hésitation. Il est à noter que ce type de question a été présentée à Justine à d'autres reprises jusqu'à maintenant durant le TE. Dans tous les cas, elle ne semble pas concevoir l'idée d'utiliser la valeur de cette fraction pour déterminer la mesure de l'angle dans une unité donnée. Justine ne semble pas mobiliser une conception que le rapport  $\frac{A}{C}$  est un certain nombre de fois l'angle plein (raisonnement multiplicatif et proportionnel). Elle écrit que la valeur déterminée en c), soit la valeur 0,1874 du rapport en question, correspond à « ce qu'il y a à l'intérieur ». Ensuite, elle écrit  $0,1874 \times 360$  et détermine la mesure de l'angle en degrés, soit 67,464 degrés.

#### Extrait 4.12 Justine tente d'expliquer ce que son calcul signifie

0: 17: 10	<p>J : [<i>Écrit 0,1874 = ce qu'il y a à l'intérieur puis 0,1874 x 360 = 67,464 calculé à la calculatrice</i>]</p> <p>C : Pourquoi as-tu fait cette opération-là ici [<i>pointe 0,1874 x 360 = 67,464</i>]</p> <p>J : Parce que ça [<i>indique 0,1874</i>] c'est un [<i>hésitation</i>]</p> <p>C : Un quoi ?</p> <p>J : [<i>Hausse les épaules, réfléchit</i>]</p> <p>C : Ok, ben ce nombre là tu l'as calculé où ?</p> <p>J : [<i>pointe le résultat à la c)</i>]</p> <p>C : Donc qu'est-ce que tu as trouvé [à la tâche 1c)] ?</p> <p>J : Ça [<i>pointe l'arc sur le schéma. Réfléchi</i>]</p> <p>C : Est-ce que c'est juste la longueur que tu as prise [<i>indique des doigts la longueur d'arc sur le schéma</i>] ? Ça représente quoi en fait ce 0 virgule 1874 [<i>pointe le résultat à la c)</i>] ?</p> <p>J : Ça par rapport à ça [la longueur d'arc par rapport à la circonférence] [<i>Indique les longueurs respectivement avec son crayon puis réfléchit</i>] Ah. Fois 360 parce c'est ça par rapport à ça, mais sur les 360. C'est comme ici [<i>pointe les rapports écrits en 1c.</i>]</p> <p>C : Ok</p> <p>J : Ben c'est plus ça ici [<i>pointe l'expression au numérateur 67,468 360èmes de la c.</i>] parce que c'est déjà en 360ièmes de circonférence</p> <p>C : Et qu'est-ce que ça veut dire longueur de l'arc par rapport à la circonférence ? En termes de longueur, de grandeur, si tu avais à comparer la longueur de l'arc par rapport à</p>
-----------	---

	<p>la circonférence, qu'est-ce que tu pourrais dire ?</p> <p>J : Que c'est plus petit</p> <p>C : Est-ce que tu peux dire le nombre de fois que c'est plus petit par rapport à la circonférence, si tu veux les comparer ?</p> <p>J : [<i>Pointe le nombre 0,1874</i>] C'est ça de fois plus petit mais alors ça donnerait plus grand alors c'est l'inverse. [<i>Semble indiquer que la formulation ne fonctionne pas</i>]</p> <p>C : Mettons-le en pourcentage [...] donc l'angle va être.</p> <p>J : 18 % du 360 au complet.</p> <p>C : Et pourquoi on obtient la même réponse en c) et en d) ?</p> <p>J : Parce qu'ici c'est en 360ème de la circonférence, mais ici c'est en 360ème mais pas de la circonférence, mais c'est tout relié.</p>
--	---

Justine semble concevoir que si  $\frac{A}{C} = 0,18$  ou 18 %, cela signifie que la longueur de l'arc mesure 0,18 fois la mesure de la circonférence et qu'alors l'angle mesure aussi 0,18 fois l'angle plein ( $360^\circ$ ). Toutefois, lorsque je lui demande d'expliquer son calcul, l'extrait 13 montre une certaine hésitation. De plus, elle semble concevoir ici que le résultat de la question 1c) découle de la comparaison multiplicative entre l'arc et la circonférence, mais lorsqu'elle l'utilise dans un calcul, il n'est pas explicitement vu ainsi. On peut de nouveau soulever le questionnement à propos du statut conceptuel des nombres lorsqu'elle les utilise dans des opérations arithmétiques. Il était prévu de demander verbalement à Justine de comparer la réponse obtenue en d) avec celle obtenue en c) et d'expliquer pourquoi on obtient la même valeur. La fin de l'extrait 13, montre que Justine explique ceci en concevant que  $\frac{1}{360}$  de l'angle plein est équivalent à  $\frac{1}{360}$  de la circonférence et qu'alors la fraction de l'angle plein est la même que la fraction de la circonférence coupée.

J'ai présenté la tâche suivante. À la lecture de la Tâche 2a), Justine se souvient du gip qu'elle a construit lors de la séance 2 puis effectue immédiatement le lien avec la Tâche 1a). Elle utilise le même type de calcul, soit  $\frac{1}{7} \times C$ . L'idée d'utiliser une autre

fraction de la circonférence pour mesurer la longueur d'arc ne la perturbe pas. Je lui demande d'indiquer à peu près une longueur d'arc correspondant à  $\frac{1}{7}$  de la circonférence, elle s'appuie sur la longueur calculée et non sur l'idée de partitionner la circonférence en 7. En effet, elle a déjà la marque d'un arc mesurant 5,89 cm. Puisqu'elle a calculé que l'arc  $\frac{1}{7}$  mesure 4,489, elle indique un arc un peu moins long que celui déjà marqué. Le reste de la tâche se déroule de façon spontanée et les liens avec la tâche 1 sont immédiats. Justine réutilise ses calculs et valeurs et semble mobiliser spontanément les mêmes raisonnements. Elle s'appuie sur l'ordre de grandeur des valeurs des longueurs d'arc (arc-unité et arc sous-tendu). Elle compare ces longueurs en mobilisant un raisonnement multiplicatif. C'est-à-dire, l'idée que la longueur de l'arc sous-tendu vaut 1,3 fois celle de l'arc-unité. À la tâche 2c), il semble évident pour Justine que la fraction de circonférence à laquelle correspond la longueur d'arc sous-tendu est la même. Elle l'affirme, mais écrit tout de même le calcul en l'adaptant à la « nouvelle » unité qu'est le gip. À la Figure 4.8, on présente l'écriture que Justine utilise pour exprimer les quantités en jeu. Chacune étant « adaptée » à l'unité de mesure étudiée dans la tâche.

Tâche 1 Unité de mesure d'angle : Le degré	Tâche 2 Unité de mesure d'angle : Le gip
<b>c) La longueur de l'arc coupé par l'angle correspond à quelle fraction de la circonférence du cercle ?</b>	
longueur de l'arc = 5,89 cm $\approx$ 67,468 360°... $\frac{5,89 \text{ cm}}{31,42 \text{ cm}} \text{ ou } \frac{67,468 \text{ 360}^\circ \text{ de la c.}}{360 \text{ 360}^\circ \text{ de la c.}} \approx 0,1874$	$\frac{1,312 \text{ 1/7 de la circonférence}}{7 \text{ 1/7 de la circonférence}} \text{ ou } \frac{5,89 \text{ cm}}{31,42 \text{ cm}} \approx 0,1874$ <p style="text-align: right; margin-right: 50px;"><small>ou 18,74%</small></p>

Figure 4.8 Productions écrites similaires de Justine aux tâches analogues 1c) et 2c)

Selon moi, elle écrit les unités de mesure sous différentes formes pour supporter sa compréhension des quantités en jeu et pour mettre en évidence des équivalences ou des correspondances entre les quantités. Par exemple, 1,312 unités est équivalent à 1,312 «  $\frac{1}{7}$  de la circonférence » puisqu'elles font référence à la même quantité soit la

longueur de l'arc sous-tendu. Cette façon de faire est intéressante, car elle illustre les conceptions développées d'équivalence entre les grandeurs étudiées. On se rappelle qu'en début de TE, Justine ne connaît que les degrés. Or, sa conception de l'angle et de sa mesure que nous avons décrite dans la phase 0 semble favoriser un certain passage d'une unité à l'autre, du moins conceptuellement parlant.

Suite à ces deux tâches, j'ai présenté un schéma d'un angle centré en un cercle et de mesure 1 radian puis j'ai rappelé verbalement que la longueur de l'arc correspond à  $\frac{1}{6,28}$  ou  $\frac{1}{2\pi}$  de la circonférence du cercle en référant à ce qu'elle a construit lors de la séance 3. J'ai ensuite demandé à Justine d'expliquer pourquoi la longueur d'un rayon correspond à  $\frac{1}{2\pi}$  de la circonférence de n'importe quel cercle. L'intention ici était, d'une part, de revenir sur la fraction  $\frac{1}{2\pi}$  de la circonférence mise en relation avec l'arc de longueur d'un rayon par rapport à la circonférence de n'importe quel cercle. D'autre part, de préparer à l'introduction formelle de l'unité de mesure radian dont la définition, que nous verrons plus loin, fait appel à cette idée de fraction de circonférence. Pour répondre à ma question, Justine a spontanément fait référence à la formule  $2\pi r = C$ . Elle affirme que « Pour faire la circonférence, c'est  $2\pi r$  donc si ça c'est  $r$  alors c'est un  $\frac{1}{2\pi}$  de la circonférence. [et pour faire la circonférence au complet] je vais avoir besoin de  $2\pi$  fois ça ». Il semble qu'elle mobilisait à ce moment-là ce qui aurait été développé à la séance précédente et ce que je lui ai rappelé durant cette interaction planifiée.

#### 4.3.2.7 Séance 4 — Tâche 3 (partie 1)

La tâche 3 était identique aux tâches 1 et 2 dans sa structure, mais abordait l'unité de mesure radian (Tableau 4.7). Elle a été présentée en deux temps (partie 1 et partie 2). Je l'ai entrecoupée de l'enseignement explicite de la notion de radian. J'ai jugé que les deux premières actions constitueraient un pont signifiant vers l'introduction de la



définition de radian. Il est à noter que ces tâches avaient déjà été présentées à la séance 3. Encore une fois, cette répétition me semblait justifiée selon le principe de raisonnement répété afin de permettre à Justine une certaine réflexion sur les actions effectuées.

Tableau 4.7 Description détaillée et énoncé de la Tâche 3 (partie 1) de la séance 4

<b>Description détaillée de la tâche ou de l'interaction planifiée</b>	
<p>À partir du schéma utilisé précédemment (incluant les mesures de l'arc sous-tendu et du rayon) :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Déterminer la longueur de l'arc-unité (correspondant à <math>\frac{1}{2\pi}</math> de la circonférence).</li> <li>○ Exprimer la longueur d'arc sous-tendu en cette longueur d'arc-unité.</li> </ul>	
<b>Énoncé de tâche présenté à Justine</b>	
<b>Tâche 3</b>	<p><b>Une nouvelle unité de mesure d'angle !</b>  <b>Réfère-toi au Schéma 1.</b></p> <p>a) Quelle est la longueur de l'arc correspondant à <math>1/2\pi</math> de la circonférence du cercle ?</p> <p>b) Quelle est la longueur de l'arc coupé par l'angle en unité de mesure correspondant à <math>1/2\pi</math> de la circonférence du cercle ?</p>

À la Tâche 3 a), Justine utilise la calculatrice pour effectuer la division de la circonférence par  $2\pi$ . Elle semble concevoir la relation entre  $\frac{1}{2\pi}$  et la formule  $2\pi r = C$ , mais la mobilisation n'est pas spontanée ici (Extrait 4.13). Elle privilégie l'opération de division et la calculatrice.

Extrait 4.13 Justine conçoit que la longueur de l'arc coupé par l'angle correspond au rayon

0: 41: 45	<p>J : [<i>Elle prend la calculatrice et obtient une valeur approximative du rayon qui est donnée dans l'énoncé</i>]</p> <p>J : Mais on a arrondi la circonférence.</p> <p>C : Et si on n'arrondit pas la circonférence ?</p> <p>J : Ça aurait été 5.</p> <p>C : Écris-le en utilisant <math>\pi</math>.</p> <p>J : [<i>Elle écrit <math>1/2\pi</math> de <math>2\pi \times 5 = 5cm</math></i>]</p>
-----------	---

Ensuite, pour développer le lien avec la mesure d'angle, je lui ai demandé combien d'angles sous-tendant cet arc unité a-t-on besoin pour former un angle plein ? Elle répond sans hésitation «  $2\pi$  ». Cette mobilisation spontanée de l'idée que  $2\pi$  rayons pour la circonférence est équivalent à  $2\pi$  angles qui sous-tend un arc de longueur 1 rayon pour un angle plein est un développement, car ceci n'était pas spontané lors de la séance 3 ni même jusqu'à ce point de la phase 1. Peut-être que ceci serait attribuable à l'interaction planifiée qui a précédé ceci. Il semble effectivement que sa réponse montre un processus d'abstraction réfléchissante de son activité de mesurage. Ceci lui permettrait de voir cette réponse comme logiquement nécessaire dans ce contexte.

4.3.2.8 Séance 4 — Enseignement : Introduction du radian comme nouvelle unité de mesure

À partir de schémas préalablement préparés, j'ai présenté, sous forme écrite, une définition formelle du radian et observé avec Justine des angles dont l'ouverture mesure 1, 2, ...,  $2\pi$  radians (Figures 4.9 et 4.10). J'ai ensuite posé quelques questions planifiées à Justine pour amorcer la conception de la relation  $\theta \text{ rad} = \frac{A}{r}$  entre la mesure d'angle exprimée en radians, l'arc sous-tendu et le rayon (en contexte non numérique). Mes intentions étaient de présenter l'unité de mesure radian au départ

d'une définition conçue pour faire appel aux conceptions visées puis d'investiguer le sens donné et les liens qu'elle développerait spontanément avec ce qui a été fait ou développé précédemment.

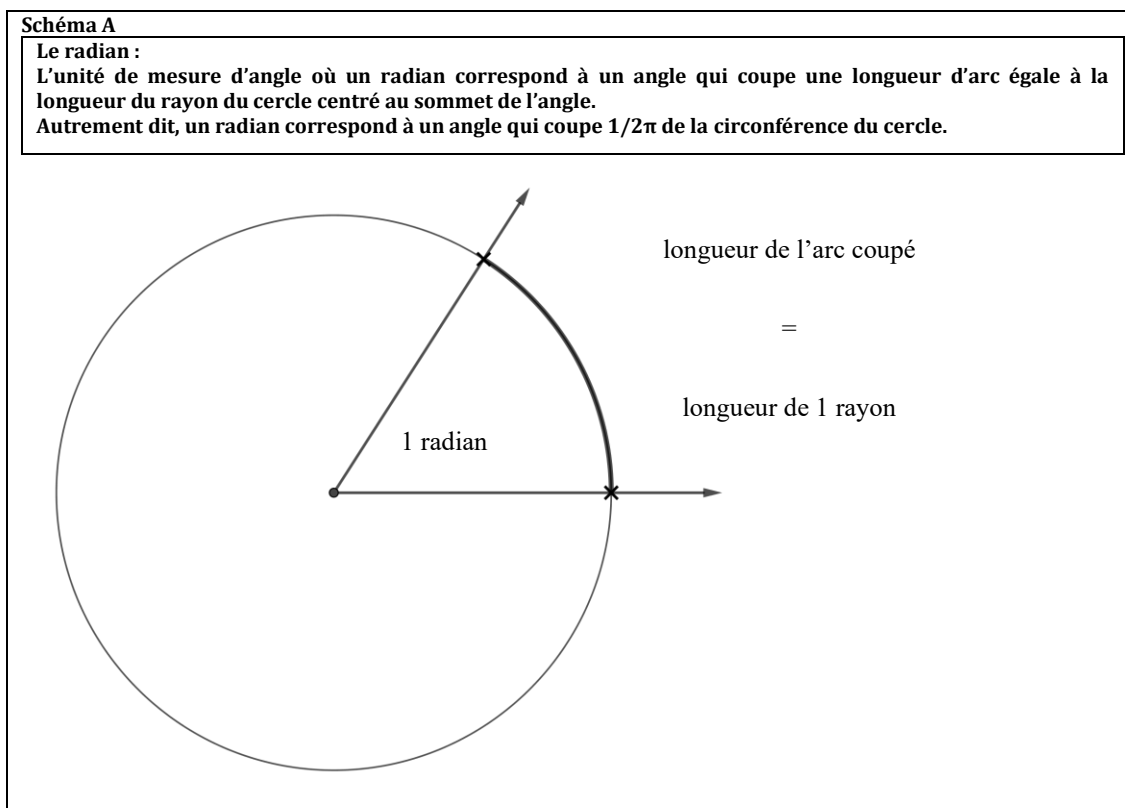


Figure 4.9 Schéma A présenté pour appuyer l'enseignement de la notion de radian

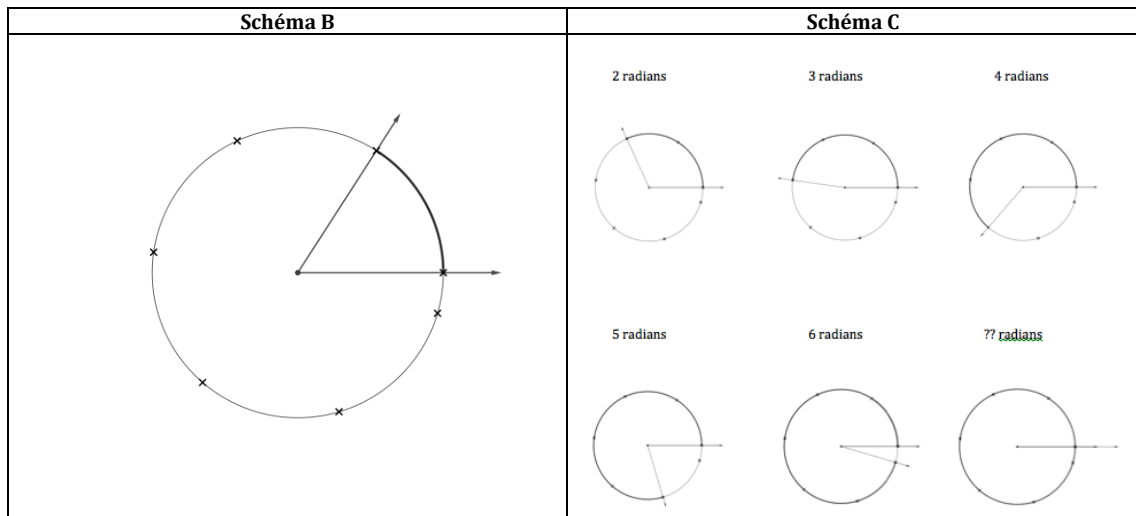


Figure 4.10 Schémas B et C présentés pour appuyer l'enseignement de la notion de radian

Lors de l'enseignement, Justine se réfère aux degrés et conçoit que le radian est utilisé de la même façon. Elle ajoute que « [ $\frac{1}{2\pi}$  de la circonférence] c'est le rayon, mais comme ça, ça n'a pas vraiment de sens [pour moi]. ». Il semble, sans surprise, que l'idée de considérer la fraction  $\frac{1}{2\pi}$  de la circonférence n'est pas vraiment signifiante à ce stade pour elle. À la fin de l'enseignement, je lui ai posé la question suivante : « À partir de la longueur de l'arc coupé et du rayon, comment puis-je déterminer la mesure d'angle en radians ? » Le symbole  $\theta$  a soulevé une légère confusion puisqu'elle se demandait alors si c'était une valeur fixe comme  $\pi$ . Cependant, une fois la confusion résolue, Justine hausse les épaules. J'ai fait le schéma à main levée pour lui fournir un support visuel représentant les éléments de la question, mais elle n'avait pas d'idée donc je n'ai pas insisté. Elle ne semblait pas concevoir spontanément de relation entre ces trois grandeurs. J'ai jugé qu'à ce stade, ceci était tout à fait normal. L'intention ici n'était que de tester s'il y aurait mobilisation spontanée des conceptions visées.

## 4.3.2.9 Séance 4 — Tâche 3 (partie 2)

Suite à l'enseignement, je lui présenté la partie 2 de la tâche 3 (Tableau 4.8). L'intention ici était de consolider les idées visées par les tâches précédentes et l'enseignement pour exprimer une mesure d'angle en utilisant cette nouvelle unité de mesure puis d'investiguer la mobilisation et l'articulation des conceptions et raisonnements dans le contexte d'une nouvelle unité de mesure<sup>26</sup>.

Tableau 4.8 Description détaillée et énoncé de la Tâche 3 (partie 2) de la séance 4

<b>Description détaillée de la tâche ou de l'interaction planifiée</b>	
<p>À partir du schéma utilisé précédemment (incluant les mesures de l'arc sous-tendu et du rayon),</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Déterminer la fraction de circonférence à laquelle correspond la longueur d'arc sous-tendu ;</li> <li>○ Utiliser cette fraction pour déterminer la mesure de l'angle en radians.</li> <li>○ Expliquer pourquoi le radian pourrait être une unité de mesure utile.</li> </ul>	
<b>Énoncé de tâche présenté à Justine</b>	
Tâche 3'	<p>Unité de mesure d'angle : Le radian Réfère-toi au Schéma 1.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) La longueur de l'arc coupé par l'angle correspond à quelle fraction de la circonférence du cercle ?</li> <li>b) Utilise cette fraction pour déterminer la mesure de l'angle en radians.</li> <li>c) Selon toi, pourquoi le radian pourrait être une unité de mesure d'angle utile ?</li> </ul>

En se référant à l'angle étudié dans la Tâche 1 et la Tâche 2, Justine devait, dans un premier temps, déterminer à quelle fraction de la circonférence correspondait l'arc coupé. Bien que cette fraction ait été calculée précédemment, Justine n'y fait pas appel. J'interviens en la référant à son travail et en portant son attention sur ses

<sup>26</sup> Tel que mentionné dans les intentions générales de cette séance, j'avais planifié une série de tâches supplémentaires qui me permettrait potentiellement de travailler sur la mesure d'angle en radian en utilisant l'écriture avec  $\pi$  et sans  $\pi$  et de favoriser des images mentales d'ouverture d'angles dont la mesure est exprimées en radians. Ces tâches n'ont pas été présentées, car j'ai dû mettre un terme à la séance. On n'a donc pas réinvesti immédiatement ce qui venait d'être vu.

écritures exprimées avec l'unité de mesure  $\frac{1}{360}$  de la circonférence puis  $\frac{1}{7}$  de la circonférence. Justine semble alors exprimer de la confusion. Elle finit par écrire le rapport entre l'arc et la circonférence puis obtient la même valeur qu'aux tâches 1c) et 2c). Ensuite, elle devait utiliser cette fraction (ou valeur) pour déterminer la mesure de l'angle, comme aux tâches 1d) et 2d), mais cette fois, en radians. Cette tâche n'a pas été résolue. Justine démontre beaucoup d'hésitation et effectue des calculs sur sa calculatrice sans écrire ce qu'elle fait. Il semble, encore une fois que l'utilisation du rapport entre l'arc sous-tendu et la circonférence pour déterminer la mesure d'un angle dans une unité de mesure donnée n'est pas spontanée dans le cas des unités autres que le degré. Il n'y a pas de mobilisation de la fraction de circonférence  $\left(\frac{A}{C}\right)$  et elle ne fait pas appel à la mesure en radians de l'angle plein. J'interviens alors pour comprendre ce qui se passe et la provoquer à concevoir que cette fraction représente un nombre de fois aussi grand qu'est la mesure de l'angle par rapport à l'angle plein, mais cette fois en radians donc un angle plein de  $2\pi$  radians.

Extrait 4.14 Justine ne conçoit pas l'utilisation de la fraction  $\frac{A}{C}$  pour déterminer la mesure de l'angle en radian

<p>1:04:00 - 1:26:50</p>	<p>J : [Effectue des calculs sur calculatrice sans écrire. Écrit 5, et efface. Écrit la valeur 0,18 de la fraction à utiliser]</p> <p>a) La longueur de l'arc coupé par l'angle correspond à quelle fraction de la circonférence du cercle?</p> <p><del>5,89 cm</del> <math>\frac{5,89 \text{ cm}}{31,42 \text{ cm}} \approx 0,1874</math> <span style="float: right;"><math>\frac{A}{C}</math> 31,42</span> <span style="float: right;">1h00m20</span></p> <p><math>\approx 0,1874</math> <math>\rightarrow 18,74\%</math> de la C <span style="float: right;">1h05m50</span></p> <p>b) Utilise cette fraction pour déterminer la mesure de l'angle en radians.</p> <p>1 radian = <math>\frac{1}{2\pi}</math> de la circonférence</p> <p><del>5,89 cm</del></p> <p>C : Explique-moi à quoi tu penses.</p> <p>J : Je ne sais pas comment utiliser cette fraction pour le faire.</p> <p style="text-align: right;">1h04m00</p>
------------------------------	---

	<p>C : Quelle fraction ?</p> <p>J : Ça [<i>indique 5,89/31,42 = 0,1874 ou 18,74 %</i>]</p> <p>C : Peut-être qu'on peut se ramener à ce que tu as fait. Tu l'as déjà utilisé pour calculer la mesure en degrés puis en gips [<i>pointe les productions écrites des tâches 1 et 2</i>]. Mais qu'est-ce que ça veut dire cette fraction-là ? C'est quoi cette valeur-là ?</p> <p>J : [<i>hésitation</i>] Ce qui est là [<i>l'arc</i>] par rapport à tout [<i>la circonférence</i>]</p> <p>C : Donc la valeur, ce nombre-là 0,1874 c'est [...]</p> <p>J : Si le tout c'est 100 ben ça c'est 18 point 74, si tout c'est 1 ben ça c'est 0,1874</p> <p>C : Donc en termes de grandeur, qu'est-ce qu'on peut dire de l'arc ?</p> <p>J : [<i>hésitation</i>]</p> <p>C : Ok, si je dis que l'arc c'est 2 tiers de ma circonférence, indique-moi l'arc sur le schéma.</p> <p>J : [<i>Fait le mouvement de partition en 3 secteurs puis indique un arc qui mesure 2 de ces secteurs approximativement</i>] [...]</p> <p>J : Donc si je prends ça et que je le divise en 3 ben j'en ai deux sur les trois. [...]</p> <p>C : Là j'ai 5 trente-et-unièmes de ma circonférence. Qu'est-ce que je peux dire par rapport à l'angle ?</p> <p>J : Que c'est 5 trente-et-unièmes de 360 degrés ?</p> <p>C : Mais maintenant que je suis en radians, est-ce que ça change ? Est-ce que j'ai quand même 5 trente-et-unièmes de ma circonférence ?</p> <p>J : Oui</p> <p>C : Est-ce que j'ai quand même 5 trente-et-unièmes de mon angle plein ?</p> <p>J : Oui</p> <p>C : Ok mais là on est en radian donc ce n'est pas 5 trente-et-unièmes de 360. Ce serait quoi ?</p> <p>J : 5 trente-et-unièmes du rayon ? [<i>Réfléchi</i>]</p> <p>C : [<i>Attend intentionnellement qu'elle finisse sa réflexion</i>]</p> <p>J : Ouais...je sais pas.</p> <p>C : [<i>Explicite que l'angle plein est <math>2\pi</math> et que l'angle est <math>5/31</math> de l'angle plein</i>]</p> <p>J : sur <math>2\pi</math> ?</p>
--	---

Durant cette interaction (Extrait 4.14), nous ne sommes pas parvenues à résoudre la tâche. C'est surtout moi qui ai parlé, Justine ne semblait pas me suivre réellement. On peut voir vers la fin de l'extrait que ses réponses sont empreintes d'hésitation et

semble même incohérente avec ses façons de penser (par exemple, J : [5/31] sur  $2\pi$  ?). La séance 4 se termine ainsi sur cette tâche non résolue, sur un blocage, une perturbation. Bien que ce type de tâche ait été résolu aisément en début de séance dans le contexte des degrés puis dans le contexte des gips, il semble que dans le contexte nouveau des radians, la résolution devient problématique. Ceci étant dit, nous étions à la fin de la séance et la fatigue de Justine était palpable.

Cette séance impliquait plusieurs répétitions de tâches dans différentes unités de mesure. Il me semblait que ceci favoriserait le développement d'une conception invariante du processus de mesurage d'une unité de mesure à l'autre ainsi qu'un lien avec l'invariance et l'utilité du rapport  $\frac{A}{C}$  pour exprimer la mesure d'un angle dans une unité de mesure donnée. Or, la transposition au concept de radian ne s'est pas avérée évidente dans ce contexte. Il semble que la conceptualisation d'un angle plein de  $2\pi$  radians ainsi que l'idée de faire appel au rayon comme unité de mesure de la longueur d'arc n'était possiblement pas suffisamment intégrées à ce stade. L'utilisation du rapport  $\frac{A}{C}$  ou même  $\frac{A}{r}$  semblait problématique. Mon interprétation est que Justine conçoit la mesure d'angle comme une certaine fraction de la circonférence ou encore un certain nombre de  $\frac{1}{2\pi}$ , mais l'articulation dans un contexte où ceci doit être mobilisé sous forme d'opérations numériques n'était pas développée. Ceci me porte à croire, de nouveau, que cette articulation quantitatif-numérique joue un rôle important chez Justine dans la résolution des types de tâches que nous présentions dans ce TE.

#### 4.3.3 Constats

À la lumière de l'analyse, j'ai dégagé quelques constats de cette phase 1 :

- La proportionnalité demeure au centre des raisonnements quantitatifs de Justine. Son image mentale de l'angle, naturellement conçu en lien avec le cercle et ses



composantes, semble favoriser cette opération quantitative mobilisée constamment dans ses actions et son discours. Cette constance à travers le TE témoigne, d'une part, de la robustesse de cette conception de l'angle et de sa mesure, d'autre part, d'une certaine flexibilité que celle-ci lui procure dans ce contexte.

- Le statut conceptuel de certaines expressions numériques semble différent. Par exemple, les expressions impliquant le nombre  $\pi$  semble problématique. Ceci, couplé à une propension à accorder de l'importance aux valeurs, semble être un frein à l'articulation entre les opérations quantitatives et les opérations arithmétiques mobilisées. Sur ce point, il semble que Justine ait une difficulté à donner un sens à l'opération de division et à la fraction vue comme rapport ou taux. De plus, elle semble avoir un certain sens de la grandeur des valeurs et de la relation entre-elles. C'est ce qui guide le sens de ses opérations de multiplication. Par exemple, elle multiplie, car alors ça va lui donner un résultat plus petit et elle sait, par anticipation du résultat que c'est ce qu'elle doit obtenir. Le raisonnement sur les quantités en jeu n'est pas mobilisé spontanément pour expliquer ses calculs même lorsque les interventions visent à le faire.
- La composante de la THA mise de l'avant voulant que le rapport  $\frac{A}{C}$  soit conceptualisé comme un certain nombre de  $\frac{1}{2\pi}$  de circonférence et que ce nombre est précisément le rapport,  $\frac{A}{r}$  semble être un enjeu. Or, je suis d'avis que cette opération quantitative doit être organisée avec celle impliquant la RRGR découlant de la formule de la circonférence, soit  $(2\pi r = C) \Leftrightarrow (r = \frac{1}{2\pi} \times C)$ . Le développement de ceci chez Justine semble fragile. Elle ne semble effectivement pas avoir un raisonnement guidé par le type de structure d'équivalence suivant :

$$\left(\frac{a}{b} = u\right) \Leftrightarrow (a = b \times u).$$

Par ailleurs, elle mobilise son processus de mesurage, compter le nombre de  $\frac{1}{2\pi}$  contenu dans l'arc. Cette mobilisation découle de la robustesse et de la constance, d'une unité de mesure à l'autre, de ce processus. Or, chez Justine, cette façon de voir n'est pas gage d'une mise en lien avec la formule de la circonférence afin d'en dégager la relation directe entre la mesure de l'angle en radians et la comparaison multiplicative entre la longueur d'arc et le rayon. Ceci étant dit, vers la fin de la séance 4, on remarque que le lien entre la formule de la circonférence et le nombre de longueurs de rayon commence à être mobilisé par Justine.

- Un dernier point d'ordre méthodologique concerne la séquence dans laquelle les tâches ont été présentées à Justine dans la séance 4. Le délai de temps entre la résolution des tâches relatives aux degrés puis aux gips et la résolution des tâches relatives aux radians a été relativement long puisque j'avais décidé d'entrecouper la partie 1 de la tâche 3 et la partie 2 par l'enseignement. Ceci a peut-être eu un impact sur la généralisation visée par cette répétition de tâches analogues et le réinvestissement dans le contexte du radian.

#### 4.4 Phase 2 — Séance 5 et séance 6 : Vers l'unité de mesure radian de Justine

À ce point-ci du TE, je remarquais que devant certaines tâches que je croyais accessibles à Justine, des blocages avaient lieu. Dans la suite du TE, j'ai voulu miser sur le développement de la RRGR découlant de la formule de la circonférence afin de surmonter la perturbation et favoriser une intégration du concept de radian. J'ai décidé de planifier les deux prochaines séances (5 et 6) en même temps et sur la base de cette intention conceptuelle. Il me semblait opportun de concentrer mon investigation et de ne travailler que sur la mesure d'angle en radians. La série de tâches planifiées suite à la séance 4 a été conçue de sorte que les intentions et objectifs n'étaient pas vus par séance, mais bien pour ce bloc de séances.

#### 4.4.1 Intentions conceptuelles

Durant ces deux séances, je visais donc à

- Favoriser une intégration du concept de radian guidée par la RRGR.
- Développer une compréhension suffisamment profonde du concept de radian en favorisant le développement d'une conception de la mesure d'angle en radians comme une relation multiplicative entre la longueur de l'arc et un rayon.
- Favoriser le développement d'un sens donné à des mesures d'angle exprimées en termes de  $\pi$ .

#### 4.4.2 Déroulement et interprétations

Lors de la séance 5, par les tâches 1 et 2, j'ai porté l'attention sur l'unité de mesure radian vue comme la fraction  $\frac{1}{2\pi}$  de la circonférence. J'ai également présenté des mesures d'angle exprimées en termes de  $\pi$  afin d'en donner un sens. Ainsi, la séance 5 m'a permis globalement de favoriser une intégration du concept de radian et à développer une compréhension suffisamment profonde du concept de radian vue comme une relation multiplicative entre la longueur de l'arc et un rayon. Au terme de cette séance, j'ai raffiné ma compréhension du rôle que pourraient jouer les opérations mentales de report de mesure le long de la circonférence chez Justine. Dans la même foulée, les tâches présentées à Justine lors de la séance 6 nous plaçaient dans un contexte de mouvement circulaire afin de favoriser une image mentale dynamique et développer davantage la mise en relation de la distance parcourue (arc), l'angle balayé et le rayon de la trajectoire circulaire. Je voulais investiguer la mobilisation et l'articulation des raisonnements et conceptions développées à propos de la mesure d'angle en radians dans un contexte de mouvement circulaire. J'ai misé sur des tâches de piste de course pour favoriser les images mentales de mouvement circulaire comme assise de la relation entre l'arc, le rayon et la mesure d'angle en radian.

## 4.4.2.1 Séance 5 — Tâche 1

Pour la première tâche de la séance 5, j'ai repris les tâches 3 et 3' de la séance 4 pour en créer une qui a été présentée comme une nouvelle tâche avec un nouveau schéma d'angle dont les valeurs n'étaient pas les mêmes que le schéma 1 de la séance 4 (Tableau 4.9). On rappelle que cette tâche demandait de déterminer la mesure d'un angle en radians étant données les mesures de l'arc sous-tendu et le rayon en passant par 3 étapes intermédiaires. Spécifiquement, cette tâche visait à 1) Favoriser le développement d'une conception de la mesure d'angle en radians comme une relation multiplicative entre la longueur de l'arc et un rayon ; 2) Investiguer la mobilisation ou pas des conceptions et raisonnements visés par les séances précédentes.

Tableau 4.9 Description détaillée et énoncé de la Tâche 1 de la séance 5

<b>Description détaillée de la tâche ou de l'interaction planifiée</b>	
<p>À partir du schéma (incluant les mesures de l'arc sous-tendu et du rayon) :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Déterminer la longueur de l'arc-unité (correspondant à <math>\frac{1}{2\pi}</math> de la circonférence).</li> <li>○ Exprimer la longueur d'arc sous-tendu en cette longueur d'arc-unité.</li> <li>○ Déterminer la fraction de circonférence à laquelle correspond la longueur d'arc sous-tendu ;</li> <li>○ Utiliser cette fraction pour déterminer la mesure de l'angle en radians. Nous avons alors tenté d'aborder l'utilité de l'unité de mesure radian.</li> </ul>	
<b>Énoncé de tâche présenté à Justine</b>	
<p>Tâche 1</p> <p>Unité de mesure d'angle : Le radian</p> <p>Réfère-toi au Schéma 1.</p> <p>a) Quelle est la longueur de l'arc correspondant à <math>1/2\pi</math> de la circonférence du cercle ?</p> <p>b) Quelle est la longueur de l'arc coupé par l'angle en unité de mesure correspondant à <math>1/2\pi</math> de la circonférence du cercle ?</p> <p>c) La longueur de l'arc coupé par l'angle correspond à quelle fraction de la circonférence du cercle ?</p> <p>d) Utilise cette fraction pour déterminer la mesure de l'angle en radians.</p>	

Lors du débriefing de la séance 4, nous avons émis certaines hypothèses à propos des sources des blocages de Justine observés à la fin de la séance. J'ai alors inclus dans ma planification des scénarios relativement détaillés des blocages possibles et des interventions visant à permettre à Justine de les surmonter :

- La définition du radian : Elle pourrait ne plus s'en souvenir. Si la définition du radian posait problème, il serait alors possible de revenir sur la théorie le concernant (schémas A, B et C de la séance 4, voir Figure 4.9 et 4.10) avec une légère variante à l'introduction du schéma C dans lequel je demanderais plutôt à Justine de tracer elle-même les marques de 1, 2, 3,... radians pour former les ouvertures correspondantes. Cette stratégie allait se décider *in vivo*, car je ne voulais pas qu'il s'écoule un délai trop long entre la lecture de la tâche et le retour sur celle-ci.
- La sous-tâche d) : Elle correspondait à la sous-tâche sur laquelle elle avait bloqué à la séance 4. La stratégie serait alors de la référer à son travail accompli à la séance 4 sur les tâches 2c) et 2d) (tâches analogues, mais relatives aux gips, voir Figure 4.8). J'ai choisi de ne pas référer aux tâches relatives aux degrés afin de s'en détacher. En effet, il était clair que Justine avait déjà une propension puissante à s'en remettre aux degrés. Bien que ceci soit tout à fait normal, j'allais éviter de le favoriser. J'allais lui demander d'expliquer comment elle avait raisonné lors de la complétion de ces tâches en lui laissant préalablement le temps de prendre connaissance des tâches et de sa démarche. J'allais alors lui poser la question suivante : « Est-ce que tu vois une façon de raisonner de la même manière ici [Tâche 1 d), séance 5] ? ». Dans le cas où elle réponde non, alors je me permettrais de décortiquer ce qu'elle a fait en faisant correspondre, à chaque fois, les éléments analogues dans le contexte des radians. Je considérais que cette stratégie, bien qu'elle soit fortement dirigée et explicite, était justifiée, car je

partais de ses productions, ses raisonnements qui ont émergé spontanément durant la séance 4 sans négliger la vérification de la solidité de ce qui est fait.

À la lecture de la Tâche 1a), Justine traduit l'énoncé par des expressions mathématiques et affirme que la longueur de l'arc correspondant à  $\frac{1}{2\pi}$  de la circonférence, mesure la longueur du rayon, soit 4 cm (Extrait 16).

#### Extrait 4.15 Justine effectue une opération arithmétique...

<p>0 :03 :05 à 0 :04 :26</p>	<p>J : Attends, je vais écrire des choses [<i>Écrit. Voir production écrite ici-bas</i>] Je crois...</p> <div style="text-align: center;"> <p>a) Quelle est la longueur de l'arc correspondant à <math>\frac{1}{2\pi}</math> de la circonférence du cercle?</p> <p><i>↳ 2πr 0h03m15</i></p> <p><i>0h03m15</i> <math>\frac{1}{2\pi}</math> de <math>2\pi r</math></p> <p><i>0h03m55</i> <math>\frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r = r</math></p> <p>la longueur du rayon, <i>0h04m10</i> donc 4 cm</p> </div> <p>C : Explique-moi ce que tu as fait.</p> <p>J : J'ai réécrit la question avec moins de mots [<i>réfère à <math>\frac{1}{2\pi}</math> de <math>2\pi r</math></i>] et ensuite j'ai utilisé mes connaissances de sec. 1 pour me rappeler que « de » ça veut dire une multiplication... donc j'ai fait [<math>\frac{1}{2\pi} \times 2\pi r = r</math>] et <math>2\pi r</math> c'est comme <math>2\pi r</math> sur 1 donc c'est comme <math>2\pi r</math> sur <math>2\pi</math> donc r.</p> <p>J : Et r c'est [<i>pointe du crayon le 4 cm sur schéma 1.</i>]</p>
<p>0 :05 :24</p>	<p>C : Est-ce qu'il y a une autre façon d'expliquer pourquoi tu as fait cette multiplication.</p> <p>J : Non</p>

Elle semble s'appuyer sur les opérations arithmétiques plutôt que sur le fait que la formule  $2\pi r = C$  amène la nécessité que la longueur de l'arc demandé soit forcément égale à la longueur du rayon. Son idée étant que  $\frac{1}{2\pi}$  « de » la circonférence est équivalent à calculer  $\frac{1}{2\pi} \times 2\pi r$ . Lorsque je lui demande d'expliquer sa façon de raisonner si, par exemple, on demandait de déterminer la longueur de l'arc correspondant à  $\frac{1}{6}$  de la circonférence, Justine semble également faire appel aux opérations arithmétiques (Extrait 4.15). Elle traduit la situation en s'appuyant de

nouveau sur l'idée que « de » se traduit pas une opération de multiplication. Or, en tentant d'investiguer le sens qu'elle donne à cette opération arithmétique, Justine verbalise et gesticule ce qui semble être une conception de report de mesure le long de la circonférence ce qu'elle finit par traduire en une opération de division.

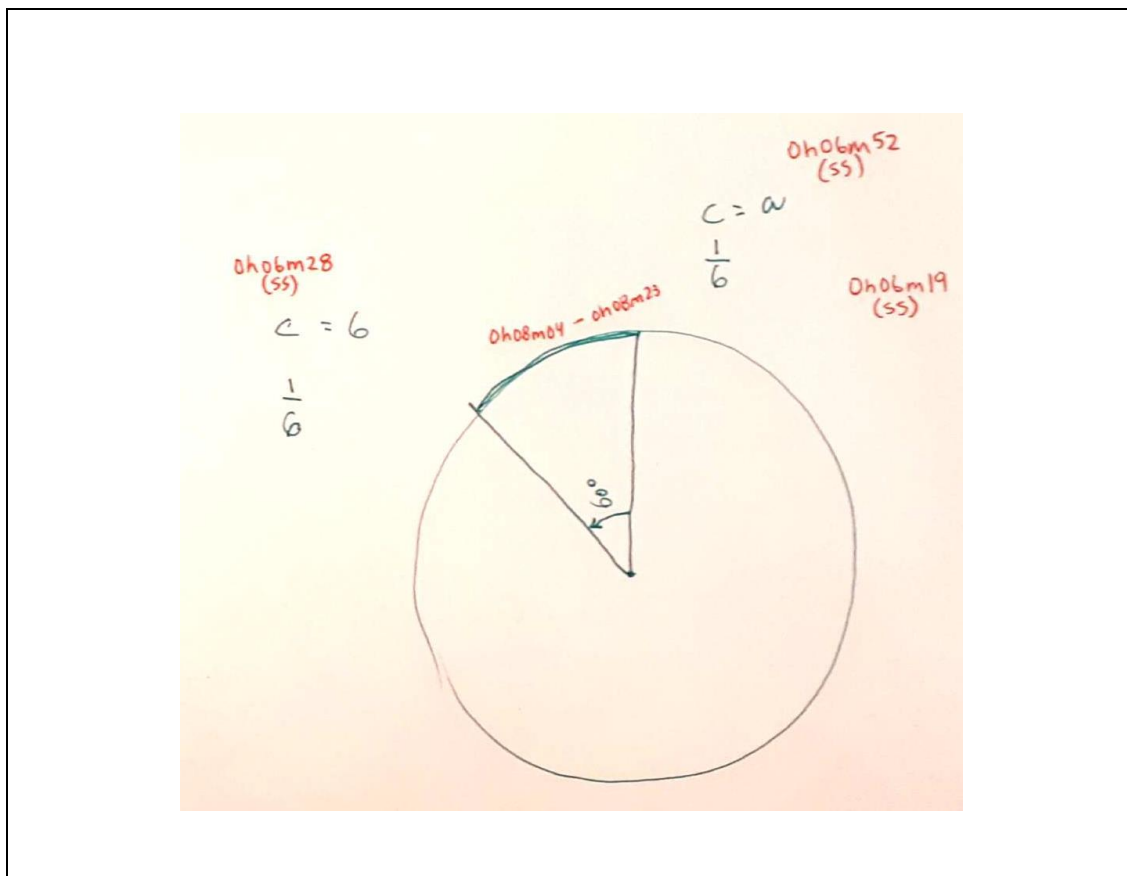


Figure 4.11 Production écrite liée à l'extrait 16

## Extrait 4.16 Justine tente d'expliquer le sens qu'elle donne à l'opération arithmétique...

0 :05 :30	<p>C : Si ma circonférence c'est 6 [<i>Dessine un cercle sur feuille blanche. Voir production écrite ici-bas</i>] puis que je veux calculer 1/6 de ma circonférence [<i>Écrit <math>C = 6 ; 1/6</math></i>], qu'est-ce que je vais faire ?</p> <p>J : 1/6 fois 6</p> <p>C : Ok. Admettons que ma circonférence je ne sais pas c'est quoi. On va dire qu'elle mesure a. Et je veux prendre 1/6 de ma circonférence.</p> <p>J : Fois a</p> <p>C : Donc 1/6 fois a.</p> <p>J : Ou a sur 6 parce que c'est fois a et a c'est sur 1 pis [6 fois 1 c'est 6]</p>
0 :07 :05	<p>C : Ok. Sans faire de calcul, sans faire de multiplication, comment je ferais pour trouver le 1/6 de ma circonférence ?</p> <p>J : [<i>Fait un geste de subdivision du cercle, par des diamètres avec sa main, en 6 parties égales</i>] Si je veux que ce soit précis, je ferais un rayon.</p> <p>C : [<i>Trace un rayon du cercle</i>]</p> <p>J : Puis je ferais 60°.</p>
0 :08 :13	<p>C : Tu prendrais ton rapporteur d'angle, tu ferais 60°. Admettons que c'est ça [<i>Dessine un petit arc fléché puis trace le côté terminal. Écrit 60° vis-à-vis le petit arc fléché</i>]. Puis là...</p> <p>J : [<i>Pointe l'arc sous-tendu du doigt</i>]</p> <p>C : Ça ici [<i>Trace sur l'arc sous-tendu</i>] ce serait 1/6. Ok. Et si t'as pas de rapporteur d'angle et que t'as pas la valeur de ta circonférence et tu veux trouver une méthode pour avoir 1/6 de ta circonférence.</p> <p>J : [<i>Pointe la règle flexible</i>]</p> <p>C : Ok tu prendrais ta règle et puis après, qu'est-ce que tu ferais ?</p> <p>J : Je mesure la demi-circonférence et ensuite je divise par 3 ou bien circonférence complet et je divise par 6.</p>

En retournant à ce qui était demandé dans la tâche, Justine conçoit que le rayon correspond à  $\frac{1}{2\pi}$  de la circonférence et l'associe directement à la longueur du rayon qu'elle peut alors reporter sur la circonférence (Extrait 4.17).



## Extrait 4.17 Justine raisonne par report de mesure

<p>0 :09 :25 à 0 :11 :28</p>	<p>C : Alors comment on fait pour trouver <math>1/2\pi</math> de cette manière-là de la circonférence ?</p> <p>J : [<i>Hésitation ou confusion</i>]</p> <p>C : Là c'est que tu as pris ta circonférence au complet et tu es venue la diviser en 6 parties égales. Alors comment...</p> <p>J : Je mesure le rayon et je le mets [<i>pointe la règle</i>] de la même façon.</p> <p>C : Donc tu vas mesurer le rayon et tu vas le mettre où ?</p> <p>J : [<i>Avec la règle, elle se place sur la circonférence pour marquer un arc de la longueur de 1 rayon</i>]</p> <p>C : Et ça te donnerait <math>1/2\pi</math> parce que <math>1/2\pi</math> c'est le rayon.</p> <p>J : Oui</p>
----------------------------------	---

Or, ici, elle ne fait plus référence à une opération arithmétique. Je pense qu'alors elle conçoit l'idée de partition en lien avec l'opération de division, mais qu'elle ne l'associe pas à la division par  $2\pi$ . On a plutôt l'action mentale de reporter le rayon le long de la circonférence. Encore une fois, le nombre  $\pi$  (ou  $2\pi$ ) n'a peut-être pas le même statut que les nombres entiers dans un contexte où elle doit imaginer l'opération arithmétique appropriée à effectuer. Ceci étant dit, on voit ici que Justine semble être capable d'imaginer le rayon comme unité de mesure et l'action de le reporter le long de la circonférence.

En b), Justine doit exprimer la longueur de l'arc en longueur de rayon ( $\frac{1}{2\pi}$  de la circonférence). Elle prend un temps de réflexion, traduit la situation par l'égalité  $6,72 = \text{combien de } 4 \text{ cm}$  puis affirme ne pas savoir comment résoudre la tâche. Elle verbalise clairement qu'on cherche à déterminer le nombre de  $\frac{1}{2\pi}$  ou de 4 cm, mais elle s'interroge sur comment déterminer ce nombre. Dès lors, tel que l'hypothèse émise, je crois que ce blocage serait possiblement en lien avec cette difficulté à concevoir l'équivalence des relations  $\frac{a}{b} = u$  et  $a = b \times u$ . Étant donné que je

m'attendais à ce type de difficulté, que je cherchais à en investiguer la portée et à amener Justine à la surmonter, j'ai décidé de sortir immédiatement de la tâche et travailler sur celle-ci, mais dans le contexte de comparaison de longueur de segments (Figure 4.12).

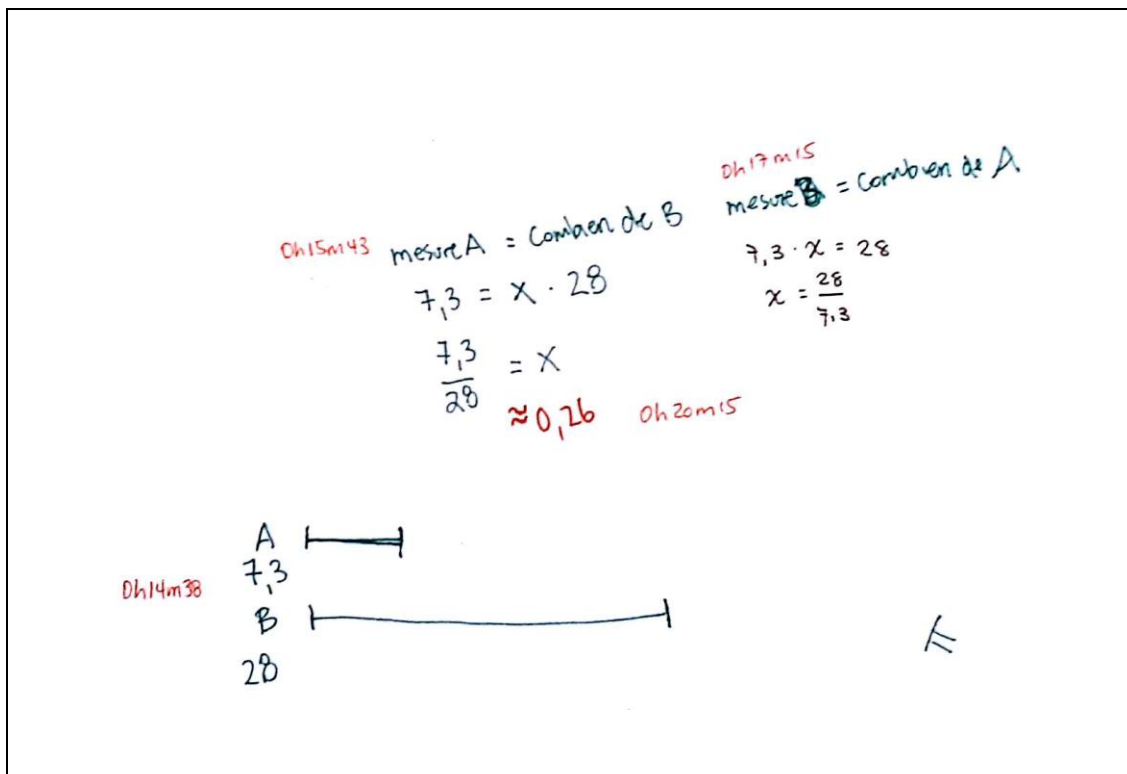


Figure 4.12 Production écrite de Justine et de la chercheuse lors du travail sur l'équivalence des relations  $\frac{a}{b} = u$  et  $a = b \times u$

Suite à cette intervention, de retour à la Tâche 1 b), Justine propose spontanément d'utiliser ce qui a été fait avec les longueurs de segments pour le réinvestir dans la résolution de la tâche. Elle commence par tracer des segments représentant les longueurs. Elle réfléchit, puis traduit ce qu'elle cherche par l'équation  $6,72x = 4$  (Figure 4.13).

b) Quelle est la longueur de l'arc coupé par l'angle en unité de mesure correspondant à  $1/2\pi$  de la circonférence du cercle?

0h13m02 6,72 = combien de  $\frac{1}{2\pi}$  ou de 4cm

0h22m35

4,00

6,72

NON! 0h23m50

0h27m03

$6,72 \cdot x = 4,00$   
 $x \approx$   
 $6,72 = 4,00 \cdot x$   
 $x \approx 1,684$   
 ou  
 $1,68 \text{ } 1/\text{cm}$

Figure 4.13 Production écrite de Justine qui mobilise le travail fait à partir des segments

Elle prend sa calculatrice, commence à entrer 6,72 puis réfléchit de nouveau. Sans poursuivre le calcul et déterminer le résultat, elle décide que son équation n'est pas la bonne (0:23 : 50 sur la production écrite de la figure 4.13). Elle explique alors ce qui se passe en s'appuyant sur le sens de son équation : « Je cherche le nombre de ça [4cm] qu'il y a dans ça [6,72] et non [le contraire]. » Tout d'abord, on note ici que l'intervention a amené Justine à « dérouler » la longueur courbe (l'arc sous-tendu). Elle voit l'utilité de ce que nous avons tenté de développer ensemble. La tâche lui semble similaire. Selon sa verbalisation, elle semble, en apparence, raisonner sur la signification de son opération de division plutôt que sur l'ordre de grandeur de son résultat. Or, on voit dans ce qui suit qu'elle a anticipé un résultat supérieur à 1 et c'est la cohérence de ce résultat avec ce qu'elle cherche à déterminer qui lui permet d'inverser sa division. Il me semblait qu'alors, Justine s'appuyait plus fortement sur l'idée d'ordre de grandeur des valeurs (4 est plus petit que 6,72 donc le résultat devrait être plus grand que 1). Je voulais investiguer qu'elles fussent les opérations mentales sous-jacentes au sens donné à son équation ou opération de division (Extrait 4.18). Il me semblait qu'ici Justine mobilisait un raisonnement quantitatif.

## Extrait 4.18 Justine mobilise sa conception «rayon-rayon»

0h25m45	<p>C : Comment tu t'en es rendu compte ?</p> <p>J : Sur la calculatrice, mon résultat n'avait pas de sens.</p> <p>C : Sans calculatrice, juste à partir de ce que tu as écrit, comment le savoir ?</p> <p>J : C'est un certain nombre de 6,72 qui doit me donner 4 donc ce nombre-là doit être plus petit que 1.</p> <p>C : Tu peux m'expliquer ça à l'aide du schéma ?</p> <p>J : [<i>Utilise une gesticulation avec les deux doigts écartés de la longueur du rayon. Elle reporte sur la circonférence pour indiquer que la longueur d'arc correspond à 1,68 rayon, c'est-à-dire, un rayon suivi d'environ deux tiers de rayon</i>]</p>
---------	---

Dès lors, elle verbalise clairement et semble concevoir qu'elle cherche un certain nombre de longueurs de rayon nécessaire pour avoir la longueur de l'arc sous-tendu (et que ce nombre sera inférieur à 1). Sa verbalisation et gesticulation pour exprimer ce nombre semblent mobiliser sa conception « rayon-rayon »<sup>27</sup> et report sur la circonférence. Effectivement, elle s'en remet à une conception du radian qui semble être directement liée au cercle et au report de la longueur d'un rayon sur celui-ci, pour expliquer et donner un sens à ce qu'elle fait.

Avant de passer à la tâche 1c), j'ai posé quelques questions à Justine pour tenter de favoriser le développement de liens entre les différents objets en jeu. Cette interaction n'était pas planifiée, mais a permis, selon moi, de remettre en perspective le radian vu comme unité de mesure d'angle. En effet, dans l'extrait 4.19, le processus de conceptualisation semble actif et il y a une certaine articulation plus aisée des objets et quantités en jeu que dans les séances précédentes.

---

<sup>27</sup> Je reviendrai plus loin et en détail sur cette conception « rayon-rayon » qu'elle a développée à propos de la mesure d'angle en radian

Extrait 4.19 Justine articule plus aisément les objets et quantités en jeu.

<p>0 :32 :37 à 0:36 :00</p>	<p>C : Vois-tu une autre façon d'exprimer [la longueur de l'arc] ?</p> <p>J : [<i>Hésitation. Pointe le mot radian qui est au haut de la feuille.</i>] Je ne m'en rappelle plus, mais il y avait les notes de cours.</p> <p>C : [<i>Lui montre la feuille avec la définition de radian.</i>]</p> <p>J : Oui, c'est ça.</p> <p>C : Mais ici on a quoi 1 radian, 2 radians, ... ?</p> <p>J : On a 1,68 radian</p> <p>C : Pourquoi ?</p> <p>J : Ben parce que c'est la même chose de dire 1 sur <math>2\pi</math> que de dire ça, non ? [<i>Représente sur le schéma à quoi correspond une ouverture de 1,68 radian en se référant à l'arc coupé en termes de longueurs de rayon. en reportant la longueur de rayon avec les doigts le long de la circonférence</i>]</p> <p>C : Et qu'est ce que je peux dire à propos de la longueur de l'arc ?</p> <p>J : Que c'est 1,68 unité, 1,68 l <math>2\pi</math>-ième et 1,68 radian...euh 1,68 rayon, 1,68 mesure du rayon.</p> <p>C : Le radian est une unité de mesure de quoi ?</p> <p>J : l'angle.</p> <p>C : Et le degré ?</p> <p>J : l'angle.</p> <p>C : Qu'est-ce que ça mesure ?</p> <p>J : l'espace [<i>Indique l'ouverture</i>]</p>
---------------------------------	---

Dès lors, Justine mobilise et articule son concept de radian qu'elle met en lien avec l'idée de compter le nombre de rayons (vu comme unité correspondant à  $\frac{1}{2\pi}$  de circonférence) coupé par l'angle. Elle représente sur le schéma ce à quoi correspond une ouverture de 1,68 radian en se référant à l'arc coupé en termes de longueurs de rayon. Elle gesticule d'une façon cohérente avec les idées qu'elle mobilise, soit par le report avec les doigts le long de la circonférence. J'ai été marqué par cette gesticulation intéressante de sa conception que j'ai nommée « rayon-rayon ». Il est à noter qu'à partir de ce moment, ce geste des doigts accompagne régulièrement la référence au radian chez Justine. Son concept de radian implique de le voir comme le

nombre de rayons coupés par l'angle. De plus, l'extrait 21 montre qu'il y a une articulation cohérente des idées (équivalentes pour Justine) relatives à l'arc coupé et la mesure de l'angle. Elle fait la distinction entre ce qui se passe sur la circonférence (longueurs de rayon) versus une unité de mesure d'ouverture d'angle (radian). Elle utilise sa verbalisation de ce qu'on mesure (l'espace vue comme ouverture ou écartement).

Finalement, en d), lorsque Justine doit utiliser la fraction pour déterminer la mesure de l'angle en radian, elle commence à articuler sa conception du radian avec les opérations arithmétiques afin d'appuyer ses résultats (Extrait 4.20).

Extrait 4.20 Justine articule sa conception du radian avec les opérations arithmétiques afin d'appuyer ses résultats

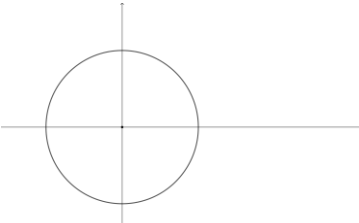
<p>0 :38 :50 à 0 :40 :24</p>	<p>J : Est-ce que je suis obligée d'utiliser cette fraction ? Maintenant il y a des chiffres à virgule [<i>Relit l'énoncé</i>] On l'a pas déjà fait ? [<i>Pointe hésitante son travail en b</i>] [<math>1,68 \cdot \frac{1}{2\pi}</math>]... Hein ? J'ai l'impression de l'avoir déjà dit... Ben que c'est 1,68 radians... [<i>Écrit 1,68 radians</i>]</p> <p>C : Ok, on a la réponse maintenant comment tu expliques le 1,68 radians ?</p> <p>J : [<i>Écrit «ou 1,68 rayons» en dessous de son travail en b</i>]. Retourne dans c) et écrit <math>1,68r/2\pi</math>. Voir production écrite ici-bas] Je veux réécrire <math>[6,72/25,13]</math>, mais avec <math>2\pi</math> dedans. Et là les rayons s'annulent et il reste 1,68 sur <math>2\pi</math>.</p> <p>C : Et comment on passe de ça à dire que c'est 1,68 radians ?</p> <p>J : Ben parce que ça c'est comme 1,68 fois <math>\frac{1}{2\pi}</math>.</p> <div data-bbox="568 1323 1331 1659"> <p>The handwritten work shows the following steps:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Question c) La longueur de l'arc coupé par l'angle correspond à quelle fraction de la circonférence du cercle?</li> <li>Calculation: <math>C = 2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \cdot 1 = 2\pi \cdot 13</math> (Note: 13 is likely a typo for 130 or similar, but the text says 25,13 in the next line).</li> <li>Another calculation: <math>\frac{6,72}{25,13}</math> de la circonférence.</li> <li>Then: <math>\frac{1,68r}{2\pi r} = \frac{1,68}{2\pi}</math>.</li> <li>Then: <math>1,68 \cdot \frac{1}{2\pi}</math>.</li> <li>Final result: 1,68 radians.</li> </ul> </div>
----------------------------------	--

Je rappelle que devant une telle tâche à la séance 4, Justine n'a pas été en mesure de résoudre et ne voyait pas comment utiliser la fraction en c) pour déterminer la mesure d'angle. Il est intéressant, qu'à ce point-ci, Justine démontre une capacité, par elle-même ou spontanément, à articuler les relations en jeu entre les quantités afin de faire ressortir l'unité de mesure radian ou encore  $\frac{1}{2\pi}$ . Il semble que l'utilisation de l'unité de mesure sous la forme d'une fraction de circonférence lui apparait logiquement nécessaire. Ceci pourrait être le résultat d'un processus d'abstraction réfléchissante de l'opération mentale de concevoir le rayon comme unité de mesure telle qu'elle l'aurait développé à ce point.

#### 4.4.2.2 Séance 5 — Tâche 2

J'ai ensuite présenté une deuxième tâche qui demandait à Justine de décrire les mesures d'angles mesurant  $\pi$  radians,  $\frac{\pi}{2}$  radians et  $\frac{3\pi}{2}$  radians (Tableau 4.10). La tâche demandait également de les représenter sur un schéma d'un cercle avec les axes des ordonnées et abscisses non gradués. Je voulais ainsi donner un premier contact avec des mesures d'angle en radians exprimées en termes de  $\pi$ . Aussi, je voulais favoriser le développement d'un sens donné à ces mesures d'angle, favoriser la visualisation des ouvertures dans un cercle puis favoriser l'action d'utiliser un rayon comme unité de mesure. Dans le cas d'un blocage, puisque ce serait le premier contact avec des mesures d'angle en radians exprimées à l'aide de  $\pi$ , je proposerais à Justine de le voir comme des  $\pi$  approximatif (3,14). Ceci constituait un élément de nouveauté pour Justine et je m'attendais à ce que ça représente un défi pour elle à ce point-ci du TE.

Tableau 4.10 Énoncés et schéma de la Tâche 2 de la séance 5

Description détaillée de la tâche ou de l'interaction planifiée
Décrire la signification donnée aux mesures d'angles de $\pi$ radians ; $\pi/2$ radians ; $3\pi/2$ radians Représenter ces angles sur le schéma d'un cercle centré à l'origine de deux axes
Énoncé de tâche présenté à Justine
<p>Tâche 2</p> <p>Décris ce que signifie pour toi les mesures d'angle suivantes et représente ces angles sur le cercle ici-bas.</p> <p>a) <math>\pi</math> radians</p> <p>b) <math>\pi/2</math> radians</p> <p>c) <math>3\pi/2</math> radians</p> 

Tout d'abord, Justine a écrit  $\frac{\pi}{1} \times \frac{1}{2\pi}$ , a hésité puis a affirmé « je ne comprends pas ce que j'ai écrit ». Dès lors, il me semblait pertinent de guider Justine afin de provoquer la mobilisation de l'équivalence entre 1 rayon, 1 radian puis  $\frac{1}{2\pi}$  de la circonférence. L'hypothèse étant qu'on peut alors voir la mesure d'un angle mesurant  $n$  radians comme un angle qui coupe un arc de  $n$  rayons ou encore, tel qu'elle l'a écrit, qui coupe un arc mesurant une demi-circonférence ou encore un demi angle plein (le résultat de son calcul  $\frac{\pi}{1} \times \frac{1}{2\pi}$  étant précisément la demie circonférence ou le demi angle plein).

D'après ce qu'elle a écrit (Figure 4.14), il me semble évident que Justine fait correspondre l'unité radian à la fraction de circonférence  $\frac{1}{2\pi}$ , mais l'articulation de son



calcul avec l'angle ou peut-être même le cercle et l'arc coupé ne semble pas tout à fait consolidée (Extrait 4.21).

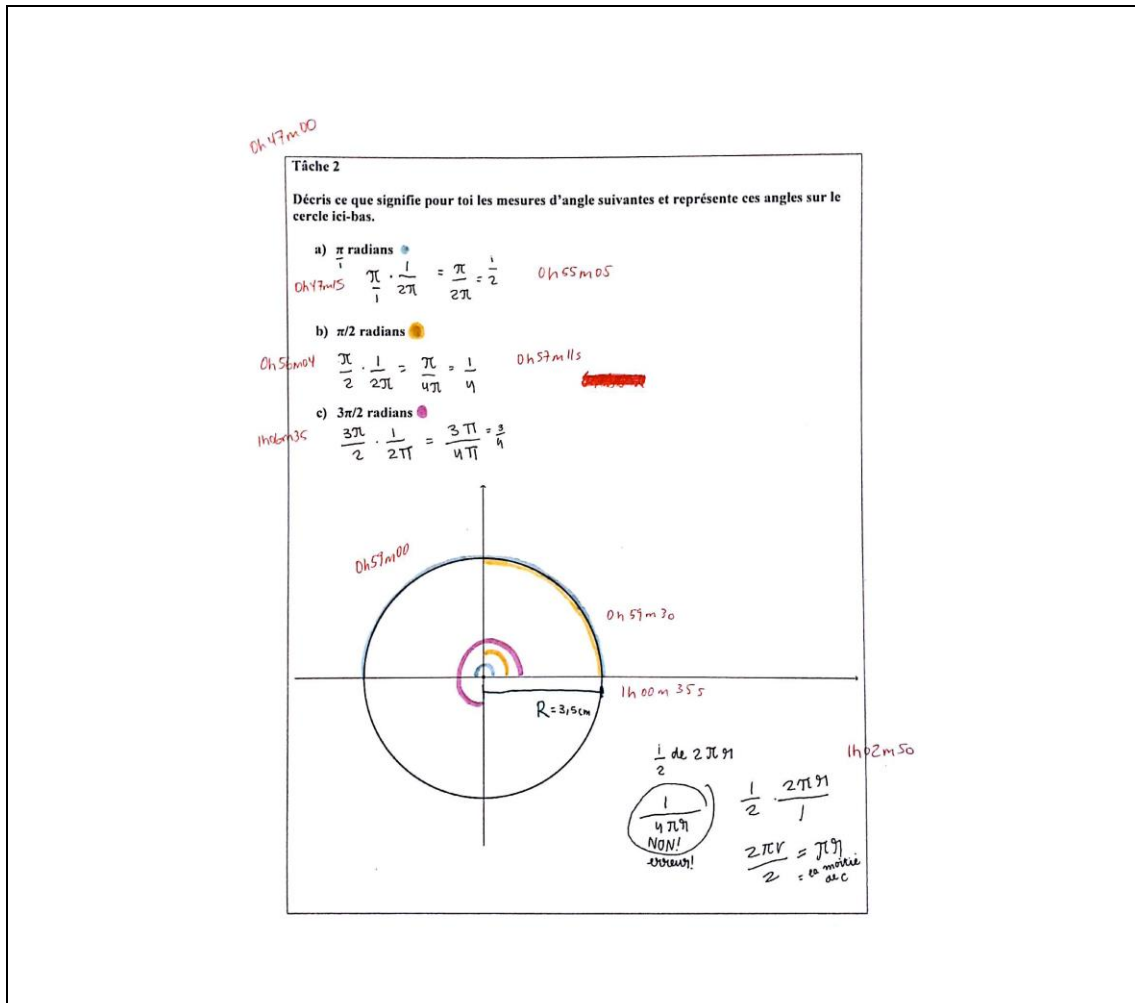


Figure 4.14 Production écrite de la tâche 2. Justine fait correspondre l'unité radian à la fraction de circonférence  $\frac{1}{2\pi}$

Extrait 4.21 Justine ne semble pas articuler son calcul avec les quantités ou objets en jeu

0 :49 :00	<p>C : [Écrit <math>1 \text{ rayon} = 1/2\pi \text{ circ.}</math>] Si j'ai <math>2\pi</math> rayons ?</p> <p>J : 1 circonférence</p> <p>C : [Écrit <math>2\pi \text{ rayon} = 1 \text{ circ}</math>] Maintenant si j'ai <math>\pi</math> rayons ?</p> <p>J : Une moitié de circonférence</p> <p>C : [Écrit <math>\pi \text{ rayon} = 1/2 \text{ circ.}</math>] Ok. Et c'est où à peu près sur le cercle ?</p> <p>J : [Dessine l'angle qui mesure <math>\pi</math> radians par un petit arc bleu proche du centre]</p> <p>C : Et si on retourne à ce que tu avais écrit [<math>\pi/1 \times 1/2\pi</math>]</p> <p>J : Je ne sais pas. je ne comprends pas ce que j'ai écrit</p>
-----------	--

Dénotant une hésitation persistante, je décide de faire un parallèle avec le gip pour faire ressortir les idées suivantes : 7 gips pour faire l'angle plein donc 1 gip c'est  $\frac{1}{7}$  de l'angle plein ;  $2\pi$  radians pour faire l'angle plein donc 1 radian c'est  $\frac{1}{2\pi}$  de l'angle plein, pour ensuite faire le lien avec ce qu'elle a écrit, soit radians vu comme  $\pi \times \frac{1}{2\pi}$  de l'angle plein. Justine voit un lien avec ce qu'elle a commencé à écrire : « Ben c'est  $\pi$  un deux  $\pi$ -ième [*pointe radians et  $1/2\pi$* ] », puis elle écrit  $= \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$  sans hésitation.

Selon mon interprétation, Justine commence à articuler les idées. Elle complète les tâches suivantes sans hésitation en déterminant, dans chaque cas, la fraction de circonférence coupé par l'angle plutôt que de décrire le sens qu'elle donne à ces mesures d'angles. Ceci dit, il semble que déterminer la fraction de circonférence que représente l'arc coupé lui a permis de concevoir l'ouverture de l'angle et de le schématiser directement. Elle mobilisait donc ce lien pour donner un sens vu comme une représentation de l'angle étudié. Ainsi, pour l'angle de  $\frac{\pi}{2}$  radians, elle écrit  $\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2\pi}$  en affirmant que « ça fonctionne, car c'est la même unité » puis continu en écrivant =

$\frac{\pi}{4\pi} = \frac{1}{4}$  qu'elle représente par un petit arc joignant les deux axes (voir les traits colorés sur la Figure 4.14).

À ce point-ci, je décide spontanément d'investiguer la portée des raisonnements de Justine dans la mise en lien entre la mesure d'angle exprimée en radian et la longueur de l'arc coupé ou encore la relation nombre de radians  $\times r =$  arc coupé (ou encore  $\theta \text{ rad} = \frac{A}{r}$ ). L'extrait 4.22 illustre que le lien n'est pas évident, mais tout de même accessible pour Justine. Elle fini par voir que l'arc mesure  $\pi$  rayons et lorsque je lui pose la même question pour  $\frac{\pi}{2}$  radians, elle répond spontanément que l'arc sous-tendu mesure  $\frac{\pi}{2}$  rayons.

Extrait 4.22 Justine conçoit le lien entre le nombre de radian et le nombre de rayon

0: 58: 30 à 1h06m00	<p>C : Disons que le rayon de ce cercle mesure r, quelle serait la longueur de l'arc en bleu ?</p> <p>J : [<i>Hésitation.</i>]</p> <p>C : [<i>Écrit r et illustre par un segment sur le cercle.</i>]</p> <p>J : En ça ? [<i>Pointe la lettre r</i>]</p> <p>C : Oui.</p> <p>J : [<i>Pointe <math>\pi</math> en a) sans hésitation, hésite, hausse les épaules</i>]</p> <p>C : Donnons une valeur à r.</p> <p>J : C'est 3,5 cm. Hausse les épaules.</p> <p>C : La circonférence alors ?</p> <p>J : <math>2\pi</math> fois 3,5. Et l'arc c'est la moitié de ça</p>
------------------------	---

Pour l'angle de  $\frac{3\pi}{2}$  radians (tâche 2c)), Justine écrit spontanément  $\frac{3\pi}{2} \times \frac{1}{2\pi} = \frac{3\pi}{4\pi} = \frac{3}{4}$ . Pour elle, cette fraction  $\frac{3}{4}$  signifie que l'angle coupe  $\frac{3}{4}$  de la circonférence ou encore correspond à  $\frac{3}{4}$  de l'angle plein. C'est précisément ce qu'elle illustre le schéma.

Afin de clore cette séance, j'ai, dans un premier temps, fait un petit retour sur la tâche et tenté de voir si Justine percevait une certaine utilité ou cohérence dans le travail effectué. Dans un deuxième temps, j'ai investigué la portée de ce qui précède en demandant de décrire sur le schéma les angles de  $2\pi$  radians ;  $3\pi$  radians puis  $\frac{\pi}{3}$  radians. Dans le cas de l'angle de  $3\pi$  radians, elle répond « C'est trop » en voulant dire qu'alors on fait plus de la circonférence. Dans le cas de l'angle mesurant  $\frac{\pi}{3}$  radians, elle réfléchit puis répond « Ce serait 1/6 [*Trace avec le doigt des rayons partant du centre comme si elle partitionnait en 6*]  $\pi$  sur 3 c'est 1/6 de  $2\pi$  radians. » Il semble que dans le cas de l'angle mesurant  $\frac{\pi}{3}$  radians, Justine articule l'image mentale d'angles exprimés en terme de  $\pi$  et les fractions de circonférence en mobilisant les idées de partition de la circonférence.

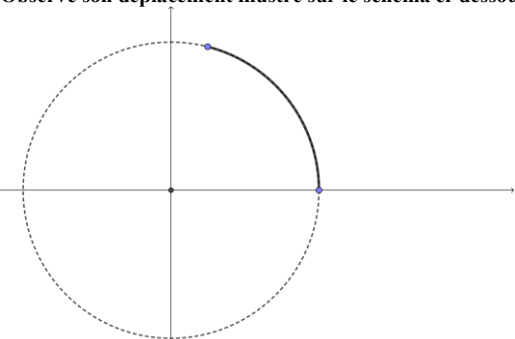
Au terme de la séance 5, je suis d'avis qu'il y a eu un certain développement dans la pensée de Justine par rapport à la phase 1. Il me semble que sa conception de l'unité de mesure radian est significative. On remarque qu'elle continue de s'appuyer sur des opérations numériques, mais vue le développement observé, j'ai décidé, pour la séance 6, de suivre la planification et de lui présenter des tâches lui permettant d'étudier l'unité de mesure radian en contexte de mouvement circulaire.

#### 4.4.2.3 Séance 6 — Tâches 1 et 2

La première tâche de la séance 6, demandait à Justine d'imaginer et de décrire un mouvement circulaire représenté par la trajectoire tracée d'un personnage qui court sur une piste circulaire. Étant données les valeurs en mètres de la distance parcourue (longueur de l'arc sous-tendu) et le rayon de la piste, elle devait exprimer la longueur de cette trajectoire en longueurs de un rayon. La deuxième tâche était similaire à la première. Sur la même piste (même rayon), la distance parcourue était différente (plus courte) et, suite à avoir exprimé la longueur de la trajectoire en longueurs de un rayon, la tâche demandait à Justine de se prononcer sur la mesure d'angle balayé par le mouvement en question par l'ajout de l'énoncé suivant : Suppose qu'on forme un angle balayé par son déplacement. Que peux-tu dire à propos de la mesure de cet angle ?

Ces tâches (Tableau 4.11) permettraient de favoriser le développement d'une conception de la mesure d'angle en radians comme une relation multiplicative entre la longueur de l'arc et un rayon. De plus, il me semblait important de favoriser une image mentale dynamique en contexte de mouvement circulaire par la mise en relation d'une distance parcourue (arc), l'angle balayé et le rayon de la piste circulaire. Ce contexte me semblait concret et accessible dans l'imaginaire de Justine.

Tableau 4.11 Description détaillée et énoncé des Tâches 1 et 2 de la séance 6

<b>Description détaillée de la tâche ou de l'interaction planifiée</b>
<p>À partir d'un contexte de coureurs sur une piste circulaire de rayon mesurant 28 mètres,</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Observer le déplacement représenté sur le schéma de cercle centré à l'origine de deux axes.</li> <li>○ Déterminer la longueur de l'arc parcouru par le coureur en unité de mesure correspondant à un rayon de la piste circulaire étant donné la valeur de la distance parcourue par le coureur (36,9 mètres dans la tâche 1 ; 18,2 mètres dans la tâche 2)</li> </ul> <p>Dans la tâche 2 seulement, à partir de ce qui précède, se prononcer sur la mesure de l'angle balayé par son déplacement.</p>
<b>Énoncé de tâche présenté à Justine</b>
<p><b>Tâche 1</b></p> <p><b>Julie court sur une piste circulaire dont le rayon est de 28 mètres.</b>  <b>Depuis le début de sa course, elle a parcouru une distance de 36,9 mètres.</b></p> <p><b>Observe son déplacement illustré sur le schéma ci-dessous.</b></p>  <p><b>Détermine la longueur de l'arc parcouru par Julie en unité de mesure correspondant à un rayon de la piste circulaire.</b></p>

Au début de son engagement dans la tâche 1, Justine observe et décrit le mouvement circulaire en utilisant une verbalisation cohérente appuyée d'une gesticulation sur le schéma de ce que la tâche lui demande : « On me demande de déterminer la longueur de ça [*arc tracé avec l'index*] en unité correspondant à un ça [*rayon avec écartement de doigts*] ». Dès lors, je constate que Justine semble à l'aise avec ce que la tâche demande et elle fait appel spontanément à ce qu'elle a développé dans les séances précédentes, en particulier la gesticulation rayon-rayon remarquable à la séance 5.

Afin de déterminer la longueur d'arc, elle utilise le pourcentage de la circonférence, la valeur du rapport  $\frac{A}{C}$ , que représente cette longueur pour ensuite déterminer le nombre de rayons qu'elle mesure. La figure 4.15 montre ce qu'elle a fait pour affirmer qu'alors « la circonférence c'est  $2\pi$  rayons donc elle a parcouru 21 % de  $2\pi$  [Pointe son résultat 1,32 rayon]. »

Détermine la longueur de l'arc parcouru par Julie en unité de mesure correspondant à un rayon de la piste circulaire.

*2min12*  
*2min57*

*3m46*

$$c = 2\pi r$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 28$$

$$\approx 175,93 \text{ mètres}$$
  

$$c = 2\pi \cdot \text{rayon}$$

donc

$$21\% \text{ de } 2\pi \approx 1,32 \text{ rayons}$$

↳ elle a parcouru environ 1,32 rayons ?

*4min 20*

$$\frac{36,9 \text{ mètres}}{175,93 \text{ mètres}} \approx 0,21$$

ou  
21%

donc elle a couru environ 21% de la piste

Figure 4.15 Justine utilise la circonférence comme  $2\pi$  rayons

Ici, Justine semble mobiliser une opération numérique dans laquelle  $\frac{A}{C} = m\%$  vu comme  $m\%$  « de » la circonférence où la circonférence est  $2\pi$  rayons donc  $m\%$  de  $2\pi$  lui donne le nombre de rayons sous-tendus. Je lui ai alors demandé ce que représente son résultat. Elle représente des doigts l'arc sous-tendu avec écartement de doigts et un tracé avec l'index. Mon intention ici était de la provoquer à faire référence à la grandeur relative entre cet arc et le rayon donc j'ai relancé la question. Justine affirme alors, en gesticulant avec ouverture des doigts, que 1,32 rayons c'est 1 rayon puis 1,32 rayon (en écartant davantage). Pour Justine, la circonférence est maintenant un certain nombre de rayons (développé précédemment) et la fraction de circonférence (21 %) que représente l'arc correspond à la même fraction de ce nombre de rayons. Son

explication est appuyée, encore une fois, d'une gesticulation sur le schéma du sens qu'elle semble donner au résultat obtenu en lien avec les quantités en jeu. Elle représente la grandeur relative entre l'arc et le rayon. Le 0,32 est représenté approximativement par un écartement supplémentaire qui fait environ le tiers du rayon.

Dans la tâche 2, Justine semble mobiliser les mêmes raisonnements et constate la similarité entre cette tâche et la première. Effectivement, lorsque je lui demande ce qu'elle va faire pour résoudre la tâche, elle répond « Je vais faire la même chose [*Pointe le calcul au bas de la tâche 1*]. C'est la même démarche, mais les valeurs changent. ». De fait, lorsque l'observateur lui demande quelles valeurs changent, elle répond que le « 36,9 est remplacé par 18,2 [la distance parcourue ou encore la longueur de l'arc parcouru change] ». De plus, il m'apparaît que le discours de Justine est plus sophistiqué et semble révélé un raisonnement sur les quantités et les opérations quantitatives.

#### Extrait 4.23 Justine représente la grandeur relative entre l'arc et le rayon

0:15:08	<p>C: Sur le schéma, que représente le 0,63 rayons ?</p> <p>J: [<i>Représente des doigts une longueur d'environ 0,63 fois sur le segment du rayon (plus petit que le rayon) puis reporte cet écartement de doigt sur l'arc sous-tendu.</i>] Ben, c'est ça [<i>Trace du doigt sur l'arc sous-tendu</i>]. La longueur de l'arc si on le met sur le rayon [<i>Place la règle sur le rayon puis indique la longueur qui correspond approximativement au 2/3 de la mesure du rayon</i>]</p> <p>C: Pourquoi c'est là la marque ?</p> <p>J: C'est environ deux tiers [0,66]. Ça c'est 1 rayon donc c'est environ 0,66 sur 1 rayon donc c'est deux tiers [de la longueur d'un rayon].</p>
---------	---

L'extrait 4.23 montre qu'elle représente la grandeur relative entre l'arc et le rayon. Elle verbalise clairement cette grandeur relative : l'arc représente deux tiers de la longueur du rayon. Il aurait été intéressant de lui demander alors quelle fraction de l'arc



représente le rayon afin de favoriser le développement d'un raisonnement sur la RRGR.

Finalement, pour exprimer ce qu'elle pense de la mesure de l'angle balayé par le mouvement (la question supplémentaire par rapport à la tâche 1), Justine fait directement appel à sa conception de l'objet angle qui se retrouve proche du centre. Elle gesticule pour représenter l'ouverture en faisant un mouvement avec sa main qui représente le côté terminal. Elle trace le côté terminal de l'angle formé par le déplacement en joignant le centre au point indiquant la fin du trajet. Dans l'extrait 4.24, sa verbalisation de sa conception de la mesure d'angle explicite qu'elle le voit comme une portion (en pourcentage) de l'angle plein.

Extrait 4.24 Justine voit la mesure d'angle comme un pourcentage de l'angle plein

0:17:23	<p>C: Donc l'angle formé c'est quoi pour toi ?</p> <p>J: [<i>Pointe très proche du centre</i>]</p> <p>C: Que peux-tu dire à propos de la mesure de cet angle ?</p> <p>J: C'est 10 % de l'angle plein</p> <p>C: Pourquoi ?</p> <p>J: Parce que ça [<i>l'arc sous-tendu</i>] c'était 10 % de la circonférence</p> <p>C: Et comment ferait-on pour avoir une valeur de cette mesure d'angle sachant que c'est 10 % de l'angle plein ?</p> <p>J: On fait 10 % de... hein ? [<i>hausse les épaules</i>]</p>
---------	--

Elle semble faire appel, comme depuis le début, à la relation proportionnelle entre les rapports  $\frac{A}{C}$  et  $\frac{\text{angle}}{\text{angle plein}}$  mais cette fois, en mettant l'accent sur l'équivalence entre la portion de circonférence et la portion de l'angle. Or, on peut remarquer un léger blocage quand elle tente d'articuler ses idées avec un calcul en contexte non numérique et même sans unité de mesure précisée.

Par ailleurs, étonnamment, elle ne fait pas de référence aux degrés et de plus, elle ne semble pas mobiliser (ou ne semble pas voir l'utilité de mobiliser) ce qu'elle a déjà fait auparavant. À ce moment, il aurait été possible d'intervenir afin de favoriser la mobilisation d'une opération quantitative faisant appel à la RRGR. C'est-à-dire que si la comparaison multiplicative de l'angle à l'angle plein résulte en un rapport de 10 % cela signifie que l'angle est  $\frac{1}{10}$  fois l'angle plein ou encore que l'angle plein est 10 fois l'angle en question. Les opérations numériques associées seraient alors :

$$\frac{\text{angle}}{\text{angle plein}} = 10 \% \quad \text{et} \quad 10 \% \times \text{angle plein} = \text{angle}$$

À ce moment, j'ai cru bon de m'en tenir aux tâches puisque la tâche 3 allait peut-être l'amener à mobiliser ceci.

Je remarque tout de même que dans son engagement dans ces deux premières tâches de la séance 6, Justine articule plus spontanément et aisément ses opérations mentales. Il semble qu'une certaine organisation de celles-ci s'est développée. De plus, les schémas lui permettant de gesticuler semblent servir de support utile à représenter ses explications. Peut-être que le contexte de coureur sur piste circulaire est effectivement très accessible dans son imaginaire.

#### 4.4.2.4 Séance 6 — Tâches 3a et 3b

La tâche 3, toujours semblable aux deux premières, visait à pousser un peu plus loin et progressivement l'image mentale d'angle balayé par un mouvement circulaire et de mettre la mesure en radians en relation avec la longueur de l'arc sous-tendu et le rayon. Dans cette tâche présentée en deux parties, on demandait à Justine de a) suivre le mouvement donné sous forme de description en mots, de déterminer la longueur de la trajectoire en longueurs d'un rayon, de le schématiser et de se prononcer sur la mesure d'angle balayé par le mouvement en question (Tableau 4.12a); b) suivre et

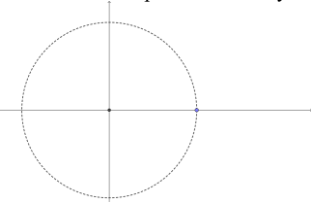
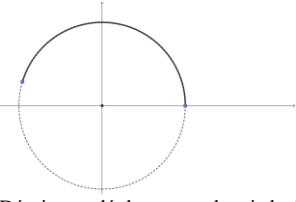
décrire le mouvement donné sous forme de schéma à l'échelle (un mouvement circulaire adjacent à celui en T3a), d'estimer visuellement la longueur de la trajectoire parcourue en mètres puis de déterminer la mesure de l'angle balayé en radians (Tableau 4.12b)<sup>28</sup>.

Spécifiquement, la Tâche 3b amènerait potentiellement Justine à estimer visuellement la distance parcourue en utilisant une longueur d'arc donnée, soit la distance donnée en 3a (10,2 mètres). Sans toutefois lui donner d'indications sur cette façon de procéder, on lui demandait alors d'expliquer la stratégie utilisée pour l'estimer afin d'investiguer si ce report de mesure la poussait à mobiliser un raisonnement multiplicatif. En d'autres termes, je nous donnais un contexte permettant potentiellement d'investiguer la mobilisation et l'articulation des raisonnements et conceptions développées pour déterminer la mesure d'angle en radians.

---

<sup>28</sup> Il est à noter que cette tâche a été conçue de sorte à favoriser l'image mentale de la variation continue de l'ouverture de l'angle dans le sens antihoraire à partir de l'axe horizontal. Ceci était intentionnel et nous permettrait tranquillement de paver le terrain pour aborder la modélisation de la relation sinus vue comme la covariation de l'ouverture de l'angle et la distance verticale et orientée de la position sur le cercle et l'axe horizontal. Bien que les résultats dégagés de cette phase du TE (séances 7 à 10) ne sont pas présentés dans ce mémoire, nous jugeons important de soulever ce rationnel en guise d'exemple de l'adéquation avec la méthodologie adoptée dans ce projet de recherche qui implique tout de même d'être fortement guidé par les conceptualisations visées.

Tableau 4.12 Description détaillée et énoncé de la Tâche 3a et 3b de la séance 6

<b>Description détaillée de la tâche ou de l'interaction planifiée</b>	
<p>À partir d'un contexte de coureurs sur une piste circulaire de rayon mesurant 28 mètres,</p> <p>Partie a)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Déterminer la longueur de l'arc parcouru par le coureur en unité de mesure correspondant à un rayon de la piste circulaire étant donné la valeur de la distance parcourue par le coureur, soit 10,2 mètres.</li> <li>○ Représenter approximativement le déplacement du coureur le schéma de cercle centré à l'origine de deux axes. Le point de départ est indiqué.</li> <li>○ Se prononcer sur la mesure de l'angle balayé par son déplacement.</li> </ul> <p>Partie b)</p> <p>Le coureur poursuit sa course,</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Observer son déplacement depuis le début de la course représenté sur le schéma de cercle centré à l'origine de deux axes.</li> <li>○ Décrire le déplacement depuis le début de la course</li> <li>○ Estimer visuellement la distance parcourue en mètres depuis le début de la course à partir du schéma à l'échelle.</li> <li>○ Expliquer sa procédure pour l'estimer.</li> <li>○ Déterminer la mesure de l'angle balayé par son déplacement en radians.</li> </ul>	
<b>Énoncé de tâche présenté à Justine</b>	
<p>Tâche 3a</p> <p>Jérémie court sur la même piste circulaire que Julie et Justin. À un moment, il s'arrête pour attacher ses lacets. Son odomètre indique qu'il a parcouru une distance de 10,2 mètres.</p> <p>Détermine la longueur de l'arc parcouru par Jérémie en unité de mesure correspondant à un rayon de la piste circulaire.</p>  <p>Approximativement, trace sur le schéma de la piste ci-dessous le déplacement de Jérémie puis indique sa position lorsqu'il attache ses lacets.</p> <p>Suppose qu'on forme un angle balayé par son déplacement. Que peux-tu dire à propos de la mesure de cet angle ?</p>	<p>Tâche 3b</p> <p>Jérémie poursuit sa course.</p> <p>Observe son déplacement depuis le début de sa course illustré sur le schéma ci-dessous.</p>  <p>Décris son déplacement depuis le début de sa course.</p> <p>Estime visuellement la distance qu'il a parcourue en mètres depuis le début de sa course. Explique comment tu procèdes. (le schéma est à l'échelle)</p> <p>Suppose qu'on forme un angle balayé par son déplacement. Détermine la mesure de cet angle en radian.</p>

Au début de son engagement dans la tâche 3a), Justine reconnaît immédiatement la similarité entre celle-ci et les tâches précédentes puis déploie la même démarche. Elle calcule la valeur du  $\frac{A}{C}$  en divisant la longueur de l'arc par la circonférence, soit  $\frac{10,2 \text{ mètres}}{175,93 \text{ mètres}}$ , avec sa calculatrice. Elle obtient 0,36 qu'elle traduit comme étant une longueur d'arc de 0,36 rayon. Lorsque je lui demande d'expliquer sa démarche, elle affirme « J'ai fait la même chose [*Pointe les bas des tâches 1 et 2*]. J'ai juste remplacé [par les nouvelles valeurs]. »

Suite à ceci et constatant que Justine ne fait toujours pas appel directement à une comparaison multiplicative entre la longueur de l'arc et le rayon, je décide d'intervenir afin de dégager l'action de déterminer le nombre de rayons contenu dans l'arc sous-tendu. Ceci me semblait un bon moment porter l'attention sur un raisonnement qu'elle semblait avoir mobilisé à plusieurs reprises, soit comparer multiplicativement la grandeur de ce qui est à mesurer avec la grandeur de l'unité de mesure. Voici l'extrait 4.25 de cette interaction non planifiée.

Extrait 4.25 Justine est guidée pour déterminer le nombre de rayons contenu dans l'arc sous-tendu

0:25:03	<p>C : Tu as ta circonférence qui est <math>2\pi</math> rayons et tu as calculé ce pourcentage de <math>2\pi</math>. Quelle est l'opération que tu as faite ici [<i>Pointe ce que J a écrit, soit 5,8 % de <math>2\pi</math>.</i>] ?</p> <p>J: J'ai fait 5,8 fois <math>2\pi</math> divisé par 100</p> <p>C: Le 5,8 % c'est ça ici [<i>Pointe la valeur 0,058</i>] puis la circonférence c'est 175,93 et tu l'as calculé comment ?</p> <p>J: [<i>Pointe son calcul à la tâche 1</i>]</p> <p>C: Ok, <math>2\pi</math> fois le rayon. Si par exemple on ne calcule pas le <math>2\pi</math> rayon ici [<i>Pointe le calcul <math>10,2 \text{ mètres}/175,93 \text{ mètres}</math> et qu'on fait juste le <math>[175,93 \text{ mètres}]</math> laisser sous la forme de <math>2\pi</math> rayon.</i>]</p> <p>J: Est-ce qu'on remplace le rayon ?</p> <p>C: On pourrait</p>
---------	---

Détermine la longueur de l'arc parcouru par Jérémie en unité de mesure correspondant à un rayon de la piste circulaire.

30m33

$c \approx 175,93 \text{ mètres}$

$\frac{10,2 \text{ mètres}}{175,93 \text{ mètres}} \approx 0,058$   
ou  
5,8%

$r = 28 \text{ mètres}$   
ou (diamètre du schéma)  
3,7 cm

$c = 2\pi \cdot \text{rayon}$   
donc  
5,8% de  $2\pi \approx 0,36 \text{ rayons}$

$\frac{10,2 \text{ mètres}}{2\pi \cdot 28 \text{ mètres}} \cdot \frac{2\pi}{1} = \frac{10,2 \text{ mètres}}{28 \text{ mètres}}$

19m53

21m08

23m07

26m15

Approximativement, trace sur le schéma de la piste ci-dessous le déplacement de Jérémie puis indique sa position lorsqu'il attache ses lacets.

33m00

$0,36 \cdot 3,7 \text{ cm} = 1,332 \text{ cm}$

Figure 4.16 Justine écrit les rapports en termes de  $\pi$ 

L'écriture des équations (Figure 4.16), voire la mobilisation des relations quantitatives en jeu, a eu lieu, mais avec mon aide. La mobilisation et l'articulation de celles-ci n'ont pas été spontanées, mais m'ont semblées tout de même accessibles à Justine. J'ai donc poursuivi par des questions afin d'investiguer le sens qu'elle donnait à ce que nous venions d'écrire et de discuter. En d'autres termes, investiguer les sens quantitatifs qu'elle donnait aux différentes constituantes des opérations (Extrait 4.26).

Extrait 4.26 Justine est guidée pour réfléchir quantitativement à propos du rapport  $A/r$

0:25:03	<p>C: À quoi correspond 10,2 mètres/28 mètres ?</p> <p>J: à 0,36</p> <p>C: C'est quelle quantité le 10,2 mètres ?</p> <p>J: C'est [la distance parcourue]</p> <p>C: C'est quelle quantité le 28 mètres ?</p> <p>J: C'est [le rayon]</p> <p>C: Quand tu prends ta longueur d'arc et que tu la divises par le rayon, qu'est-ce que ça te donne ?</p> <p>J: Le nombre de rayons...le nombre de rayons [parcouru sur la piste]</p>
---------	--

Il semble raisonnable de penser que Justine donne un sens quantitatif à la division effectuée dans ce contexte. Cependant, la mise en lien  $\frac{A}{r}$  avec le résultat obtenu et le sens de la division avec les quantités en jeu a été, ici, fortement dirigée par mon discours, ce qui soulève un certain bémol quant à l'interprétation des opérations mentales de Justine que j'en dégage.

Suite à ceci, nous avons poursuivi avec le reste de la tâche. L'estimation de la distance parcourue et la schématisation du mouvement a d'abord mené à une obstination de la part de Justine à propos de l'inexactitude de le faire visuellement. Elle a donc utilisé une règle pour mesurer le rayon et a multiplié cette valeur par le nombre de rayons que mesure l'arc obtenu précédemment, 0,36 rayon. Ensuite, lorsque je l'ai interrogé à propos de sa démarche et de sa schématisation, elle semble mobiliser l'anticipation de la valeur du résultat pour justifier le calcul effectué. Cependant l'extrait 4.27 me porte à croire que la RRGR entre la longueur de l'arc et le rayon est l'opération quantitative sous-jacente à son rationnel.

Extrait 4.27 Justine semble raisonner à propos de la RRGR entre le rayon et l'arc sous-tendu

0:35:45	<p>C: Comment t'es-tu dit que c'est ça sa position lorsqu'il attache ses lacés ?</p> <p>J: Il y a 0,36 rayon dans ce qu'il a fait. Donc j'ai mesuré 1 rayon, 3,7 cm. Donc 0,36 fois ça.</p> <p>C: Pourquoi as-tu fait 0,36 fois la longueur du rayon ?</p> <p>J: Parce que ça va me donner plus petit que le rayon</p> <p>C: Ok mais qu'est-ce que tu cherches ?</p> <p>J: Ce que lui a fait</p> <p>C: Et ce que lui a fait par rapport au rayon ?</p> <p>J: C'est plus petit</p> <p>C: Et c'est combien de fois plus petit ?</p> <p>J: 0,36</p>
0:36:38	<p>C: Et s'il fait un huitième de la piste à partir de sa position où il attache ses lacets, il serait où environ ?</p> <p>J: <i>[Utilise ses doigts pour prendre la mesure d'un huitième de tour et la reporte à la suite de la position indiquée]</i></p> <p>C: Et si à partir de là il fait une longueur d'un rayon ?</p> <p>J: <i>[Utilise la règle pour prendre la mesure d'un rayon et la reporte à la suite de la position indiquée. Trouve qu'elle a raté et le fait avec ses doigts.]</i></p>

Dans l'extrait 4.27, on peut aussi lire que j'ai décidé à ce moment-là de revenir sur l'estimation visuelle afin d'amorcer l'idée de déplacements adjacents qui est amenée avec la tâche suivante et la pousser à estimer les longueurs. On remarque que malgré une forte propension à effectuer des calculs et obtenir des résultats ou des valeurs exactes, Justine semble tout à fait capable d'approximer. Dans cet extrait, en rétrospective, il aurait intéressant de lui demander alors combien de rayon le déplacement total représente-t-il ce qui m'aurait peut-être donné de l'information sur la flexibilité et la robustesse de ce qui semblait se développer chez elle lors de cette séance.



À la fin de cette tâche 3a, Justine affirme que la mesure de l'angle balayé par le déplacement depuis le début de la course représente « 5,8 % de l'angle plein », mais lorsque je lui demande s'il y a autre chose qu'elle peut dire à propos de cette mesure d'angle, elle répond à la négative. Il semble qu'à ce point-ci de la séance, Justine semble fatiguée et/ou distraite. Je tiens à souligner ceci, car étant donné les idées mobilisées précédemment, il me semble raisonnable d'avancer que Justine aurait pu en dire plus sur la mesure de l'angle en faisant un lien avec la longueur de l'arc et le rayon par exemple.

À la tâche 3b), lorsque Justine décrit le mouvement circulaire depuis le début de la course (voir le schéma Tableau 4.12b, p. 159), elle semble faire appel à son image mentale de l'amplitude du mouvement puis mobilise l'idée de la longueur variable de l'arc d'un cercle à l'autre. Elle tente d'abord de superposer les deux schémas (tâche 3a et tâche 3b) pour le calquer, mais réalise qu'elle ne peut pas s'ils ne sont pas de même rayon. Ici, il semble y avoir une certaine limitation dans sa conception de l'ouverture de l'angle d'un cercle à l'autre. En effet, elle conçoit qu'elle ne peut pas calquer la longueur de l'arc dans le cas où ce n'est pas le même cercle, car ce ne sera pas la même longueur, mais elle aurait pu utiliser l'invariance d'un cercle à l'autre de l'ouverture de l'angle balayé pour prolonger, au besoin, les côtés de l'angle et tracer une marque sur le nouveau cercle. Ceci rappelle les événements décrits à la phase 0 et la phase 1. Dans de nouveaux contextes, la mobilisation de la conception de l'invariance de l'ouverture de l'angle n'est pas spontanée. Peut-être que l'utilité de cette invariance ne fait pas partie des schèmes de Justine. Mon interprétation est que ceci montre tout de même une certaine limite dans sa conception.

Ensuite, pour estimer visuellement la distance parcourue (la longueur de l'arc en mètres), Justine semble s'appuyer sur l'aspect visuel de cet arc plutôt que de faire appel, par exemple, à l'itération de l'arc mesurant 10,2 mètres le long de la

circonférence. Effectivement, le nouvel arc semble mesurer la demi-circonférence auquel on pourrait retrancher un arc qui semble isométrique à l'arc de 10,2 mètres avec lequel elle a travaillé préalablement. C'est donc ceci qu'elle écrit pour représenter la longueur de l'arc en mètre :  $\frac{C}{2} - 10$  mètres. J'interprète ceci comme la mobilisation d'une opération quantitative additive dans laquelle Justine combine des quantités pour obtenir le résultat. Ceci est possiblement, pour elle et dans ce contexte, une façon plus facile d'estimer sa réponse. Il est à noter que tout au long du TE, suite à des tâches où je cherchais à favoriser un processus d'action concrète d'itération d'une unité de mesure le long de la circonférence (ce qui nous semblait être en phase avec sa façon de concevoir le processus de mesurage), Justine procédait autrement, soit en effectuant une division donc par comparaison multiplicative, soit, comme ici, par soustraction donc par combinaison additive. Ceci ne me semble pas anodin et amène un regard sur la pertinence, dans le cas de Justine, d'avoir travaillé sur ce type de tâches. Ceci étant dit, sur le vif du moment, ce fut ma première impression : pourquoi n'a-t-elle pas itéré l'arc de 10,2 mètres ? J'ai donc décidé de sortir de la tâche et tenté de porter l'attention sur ceci en lui demandant de mesurer en itérant cet arc de 10,2 mètres. Justine reporte l'arc le long de la circonférence à l'aide de ses doigts, affirme « Je suis rendue à 7 donc un peu plus que 7 [...] environ 75 mètres ». On voit que Justine, lorsque dirigée, mobilise aisément cette action concrète d'itération d'un arc unité le long de la circonférence. Je suis d'avis que c'est l'imprécision de cette action avec les doigts qui la freine à y avoir recours dans certains contextes.

Le déroulement de la fin de la tâche 3b) a été l'un des plus révélateurs de la portée et de la robustesse de la conception du radian que Justine me semblait avoir développé, le « rayon-rayon ». C'est ce que je vais tenter d'illustrer dans ce qui suit. Premièrement, face à la première tâche de la séance où on utilise le mot radian dans l'énoncé (voir le dernier énoncé de la tâche 3b), Justine mobilise spontanément sa conception « rayon-rayon » pour appuyer son imagerie mentale, le sens de ses calculs

et de son résultat. De plus, elle m'apparaît dès lors mobiliser un raisonnement quantitatif portant sur la RRGR tout en se référant aux valeurs des tâches précédentes.

Extrait 4.28 Justine mobilise sa conception « rayon — rayon » du radian

0:49:15	<p>J: Est-ce que je peux voir le truc d'avant [tâche 1 ou 2 ou 3] ?</p> <p>C: Oui, ok. Tu peux m'expliquer quelle est ton idée?</p> <p>J: Le radian ben c'est le truc où c'est pareil rayon-rayon. Ça [10,2 m] c'était 0,36 rayon. [Trace de ses doigts une marque qui correspond à un peu moins que trois arcs de 10,2 m en reportant l'arc sur la circonférence]. Donc ça c'est un rayon [sur la circonférence]. Ça c'était un peu plus qu'un tiers d'un rayon donc [je reporte] un peu moins que trois de ça.</p>
---------	--

Effectivement, suite à la lecture de l'énoncé, elle fait immédiatement référence au « truc où c'est pareil rayon rayon » qu'elle accompagne toujours d'un mouvement des doigts allant d'un rayon du cercle vers l'arc sur la circonférence (Figure 4.17).

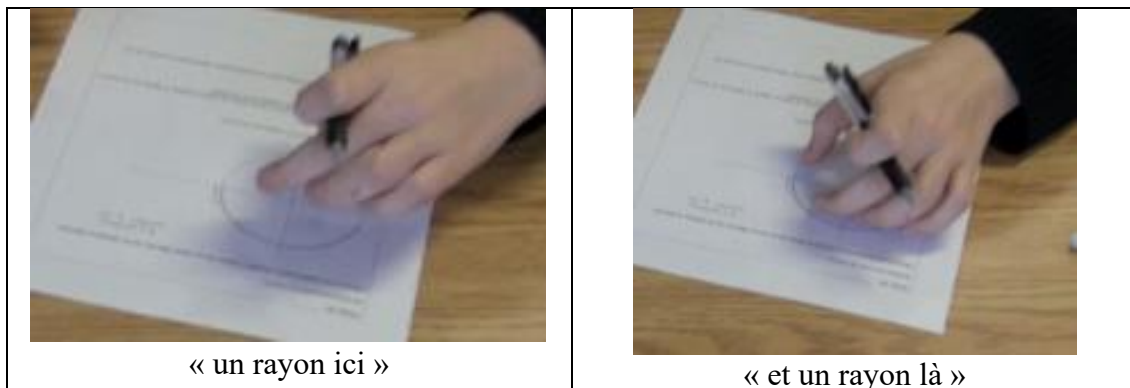


Figure 4.17 Mouvement des doigts allant d'un rayon du cercle vers l'arc sur la circonférence qui accompagne la conception « rayon-rayon »

Elle poursuit son explication en décrivant la RRGR entre le rayon et l'arc sous-tendu, soit si l'arc est un tiers du rayon alors le rayon est 3 fois l'arc. Elle nuance même la relation en allant jusqu'à préciser qu'une des grandeurs étant « un peu plus qu'un tiers » de l'autre alors l'autre sera « un peu moins que trois fois » la première. Ceci

semble anodin et simple, mais c'est la première fois que Justine verbalise clairement et spontanément ce type de relation qui découle de l'équivalence  $\left(\frac{a}{b} = u\right) \Leftrightarrow (a = b \times u)$  qui m'a semblé être absente des structures quantitatives mobilisées par Justine jusqu'ici. D'autant plus, et nous le verrons dans la discussion, que ce type de structure quantitative semble jouer un rôle important dans la conception de la mesure d'angle mise de l'avant dans cette étude.

Dans la suite de l'interaction (Extrait 4.29), on voit même que Justine mobilise l'action d'itération d'un arc unité le long de la circonférence et bien que dirigée par mes questions, elle met en lien la mesure d'angle en radian et la mesure de l'arc en rayons.

Extrait 4.29 Justine itère l'arc unité et verbalise le lien entre la mesure d'angle en radian et la mesure de l'arc en rayons

0:52:00	<p>C: Ok et là tu as donc schématisé quoi ?</p> <p>J: 1 radian. L'angle de 1 radian. Quand c'est un rayon et un rayon là. <i>[Pointe le rayon puis indique l'arc correspondant à un rayon et l'ouverture correspondante]</i> alors l'angle c'est de 1 radian.</p> <p>C: Ramène à l'énoncé. De quel angle on parle ?</p> <p>J: Trace le côté terminal de l'angle. Est-ce que je peux reporter [l'arc de 10,2] ?</p> <p>C: Oui, mais n'as tu pas indiqué la marque de 1 radian ?</p> <p>J: Oui c'est vrai ce sera plus facile ! <i>[Reporte un bouchon de crayon qui coïncide avec la marque de 1 radian]</i>. Trois et un peu...trois point deux...oh non deux point 8... radians.</p> <p>C : Là tu t'es promenée sur la circonférence et le radian c'est une mesure d'angle. Pourquoi tu peux dire directement que c'est 2,8 radians ?</p> <p>J: Ben parce que c'est un rayon un rayon <i>[Effectue le geste des doigts qui passe du segment du rayon à l'arc un rayon sur la circonférence]</i>.</p>
0:58:00	<p>J: <i>[Écrit 2,8 radians]</i></p> <p>C: Et l'arc délimité par ton angle mesure combien de rayons ?</p> <p>J: <i>[Pointe le 2,8 qu'elle vient d'écrire]</i></p> <p>C: Donc si je voulais exprimer la longueur de cet arc en unité de mesure correspondante à 1 rayon ce serait...</p> <p>J: <i>[Pointe le 2,8]</i></p>

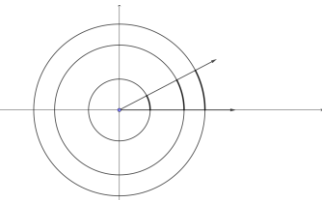
Il est à noter que cette approche par arc pourrait amener à confondre longueur d'arc et mesure d'angle (Tanguay, 2010) semble avoir été intégré par Justine d'une façon lui permettant ou favorisant chez elle le recours à un raisonnement quantitatif flexible pour déterminer la mesure d'un angle en cette unité de mesure. Elle ne semble pas confondre, mais bien supporter ses raisonnements à propos de la mesure d'angle par son image mentale de la correspondance  $1 \text{ rayon} \leftrightarrow 1 \text{ radian}$  et ce, sans avoir à se ramener à un cercle étalon. Au contraire, elle semble avoir développé une façon de le concevoir qui est indépendante ou transcendante par rapport à tous les cercles. Ici, les mesures linéaires du rayon et de l'arc n'avaient aucune importance. C'est plutôt la relation multiplicative entre l'arc et le rayon, dans ce cercle, qui semble être étudié.

#### 4.4.2.5 Séance 6 — Tâche 4

La quatrième tâche n'était pas contextualisée comme dans le cas des précédentes (Tableau 4.13). À partir d'un schéma d'un angle de 0,45 radian dans trois cercles concentriques dont les rayons étaient donnés, on demandait à Justine de déterminer la longueur de chacun des trois arcs sous-tendus par cet angle.

Par cette tâche, je voulais favoriser un peu plus explicitement le développement d'une conception de la mesure d'angle en radians comme une relation multiplicative entre la longueur de l'arc et un rayon. De plus, je jugeais qu'elle me permettrait d'investiguer la mobilisation et l'articulation des raisonnements et conceptions développées par Justine à propos de la mesure d'angle en radians.

Tableau 4.13 Description détaillée et énoncé de la Tâche 4 de la séance 6

<b>Description détaillée de la tâche ou de l'interaction planifiée</b>	
<p>À partir d'un schéma d'un angle mesurant <math>0,45</math> radian dont le sommet est le centre de trois cercles concentriques,</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Déterminer la longueur de l'arc sous-tendu par l'angle du cercle de <math>2</math> cm ; <math>2,4</math> cm et <math>2,9</math> cm de rayon respectivement.</li> </ul>	
<b>Énoncé de tâche présenté à Justine</b>	
<p>Tâche 4</p> <p>Suppose que la mesure de l'angle <math>\theta</math> est de <math>0,45</math> radian.            Considère que les cercles ont des rayons de <math>2</math> cm, <math>2,4</math> cm et <math>2,9</math> cm. (Le schéma n'est pas à l'échelle)</p> <p>Détermine la longueur de chaque arc coupé par l'angle.</p> 	

Au début de la tâche 4, Justine semble comprendre ce que celle-ci demande. Il semble même qu'elle a une certaine image mentale de la grandeur de l'ouverture d'un angle de  $0,45$  radian, car elle affirme d'emblée que l'on ne parle pas de l'angle rentrant, mais bien de l'angle saillant car « sinon, il y en aurait plus » en faisant référence au nombre de radians (la valeur  $0,45$ ). Je lui demande alors spontanément quelle serait alors la mesure de cet angle rentrant. Elle me répond qu'elle ne sait pas, mais réitère que la valeur serait plus grande. Je lui demande alors si elle pourrait être de  $4$  radians. Elle répond non, ce serait encore plus grand. Je lui demande ce qui la fait dire ça. Elle me répond alors qu'elle ne sait pas. Il est à noter qu'on aurait pu s'attendre à une référence directe à l'idée qu'il y a  $2\pi$ , soit environ  $6,28$  radians dans l'angle plein et qu'alors la mesure de l'angle rentrant serait tout simplement  $2\pi$  auquel on retranche  $0,45$ . Or, comme à d'autres moments, notamment lors de la phase 1, où la mobilisation de cette idée que la circonférence mesure  $2\pi$  rayons permet de déterminer directement un résultat ou encore d'expliquer une relation, Justine ne semble pas y faire référence.

Dans l'extrait 4.30, Justine explique ce que signifie pour elle une mesure d'angle de 0,45 radian.

Extrait 4.30 Une mesure d'angle de 0,45 pour Justine

1:01:09	<p>J: Ben ça veut dire que c'est 0,45 du rayon. Si je mets ça [le rayon] comme ça [sur la circonférence] ben ça ce serait 0,45</p> <p>C: Et par rapport à l'angle plein ?</p> <p>J : [<i>Silence</i>]</p> <p>C: C'est quoi la mesure en radians d'un angle plein ?</p> <p>J : <math>2\pi</math> [<i>hésitation</i>]. Je crois que oui.</p> <p>C: Fais-moi un schéma pour m'expliquer que c'est <math>2\pi</math> radians un angle plein.</p> <p>J: [<i>Dessine un cercle avec un point au milieu.</i>] Ça, c'est un angle plein</p>
---------	---

Elle mobilise sa conception du radian puis lorsqu'interrogée, la mise en lien avec la mesure en radian d'un angle plein n'est pas évidente et spontanée, mais lorsque l'observateur la somme d'expliquer ce qu'est un angle plein, elle le représente par un cercle avec une marque explicite de son centre. Il est à noter que cette façon de voir l'angle plein avait été identifiée dès l'analyse de son questionnaire et ensuite vérifiée à plusieurs reprises. Pour expliquer ce qu'est la différence entre sa représentation d'un angle et celle d'un cercle, elle évoque l'idée d'avoir un trait qui selon mon interprétation est vu comme un rayon dont la longueur n'influence pas l'ouverture de l'angle. Cette ligne (côtés de l'angle), un élément de sa conception de l'objet angle tel que soulevé au tout début du TE, semble être nécessaire pour déterminer la mesure d'un angle. Effectivement, pour Justine les côtés (« délimitations ») sont essentiels pour représenter l'objet angle si on veut parler de sa mesure. Ici, on remarque que sa conception de l'angle est demeurée constante tout au long du TE.

Ceci étant, j'ai tenté encore une fois de favoriser explicitement Justine à faire appel à la relation  $2\pi r = C$  pour expliquer la valeur de la mesure d'un angle plein. Pour

Justine c'est « parce que c'est comme ça. C'était comme ça dans les notes de cours [schémas et à la définition du radian] ». Ici, je fais deux interprétations possibles. Tout d'abord, l'intention ici était de faire émerger le raisonnement que s'il y a  $2\pi$  rayons dans la circonférence alors il y a le même nombre de radians dans l'angle plein. Le discours de Justine semble démontrer une absence de lien à ce moment-là ou encore une manifestation d'un comportement, chez elle et dans le contexte présent, de ne pas expliciter un lien qui semble tellement évident pour elle. Comme si cette relation  $2\pi r = C$  avait le statut d'un axiome, une vérité en soi. Nous nous sommes interrogés sur la nature de cette apparente absence d'appel à celle-ci.

De retour à la tâche même, Justine a traduit la situation en équation (Figure 4.18). Elle écrit ses calculs pour le petit cercle puis des calculs semblables pour les deux autres. Elle a mobilisé l'idée que le nombre de radians correspond au nombre de rayons que mesure l'arc sous-tendu et l'invariance de cette correspondance selon le cercle considéré. Sa conception « rayon-rayon » semble avoir supporté son explication du raisonnement l'ayant mené à effectuer ses calculs.

h07m29	① <u>PETIT CERCLE</u> (rayon de 2 cm) 0.45 radians veut dire } que mesure de l'arc } $= 0.45 \cdot \text{rayon}$ $= 0.45 \cdot 2 \text{ cm}$ $\approx 0.9 \text{ cm}$	② <u>2<sup>ème</sup> CERCLE</u> (rayon de 2.4 cm) $= 0.45 \cdot \text{rayon}$ $= 0.45 \cdot 2.4$ $\approx 1.08 \text{ cm}$	③ <u>GRAND CERCLE</u> (rayon de 2.9 cm) $= 0.45 \cdot \text{rayon}$ $= 0.45 \cdot 2.9 \text{ cm}$ $\approx 1.305 \text{ cm}$
	$\left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \rightarrow$		

Figure 4.18 Traduction en équation de l'énoncé de la tâche 4 de la séance 6



Extrait 4.31 La mesure d'angle 0,45 radian est vue comme correspondante à une portion du rayon

0:00:39 (vidéo 3 de 3)	<p>C : Explique-moi pourquoi tu as fait ce calcul-là.</p> <p>J: On a 0 virgule 45 radian et 1 radian c'est quand on a rayon-rayon [<i>avec gestuelle associée</i>]</p> <p>C: Veux-tu le dessiner ? [<i>Dessine un cercle, reporte le rayon sur la circonférence pour tracer une ouverture de 1 radian</i>]</p> <p>J: Donc si j'ai 0,45 de ça [<i>Indique le rayon</i>], c'est 0,45 [<i>Indique une longueur d'environ la moitié du rayon</i>] et c'est 0,45 fois la mesure de ça [<i>Indique le rayon et utilise l'écartement des doigts pour indiquer chacune des longueurs en jeu.</i>]</p> <hr/> <p>C : Combien d'ouverture de 1 radian j'ai besoin pour faire mon angle plein [<i>Trace des arcs le long d'un cercle imaginaire plus petit proche du centre</i>] ?</p> <p>J: <math>2\pi</math></p> <p>C: Et combien ai-je besoin de rayons ici pour faire le tour de mon cercle [<i>Parcourt la circonférence du grand cercle avec le doigt</i>] ?</p> <p>J: Le même nombre. <math>2\pi</math></p> <p>C: Pourquoi ?</p> <p>J : Parce que c'est comme ça.</p> <p>C : Parce que la circonférence d'un cercle c'est <math>2\pi</math> rayons</p> <p>J: Oui</p>
------------------------------	---

Par cet extrait 4.31, il semble que 0,45 radian est vu comme une portion du rayon formant la longueur d'arc. Pour chaque rayon, Justine voit 0,45 radian comme 0,45 de chacun des rayons donnés. De plus, de manière dirigée, elle semble capable de mettre en lien la mesure de l'angle plein en radians et la mesure de la circonférence en rayons, mais elle ne fait toujours pas appel explicitement à la relation  $2\pi r = C$  pour expliquer pourquoi. Elle considère que « c'est comme ça ». Peut-être fait-elle alors référence à la formule. C'est effectivement une formule donnée. C'est comme ça, il y a effectivement  $2\pi$  rayons dans la circonférence ou encore il y a  $2\pi$  radians dans l'angle plein, car, d'après la formule, c'est comme ça. Toutefois, elle n'évoque pas explicitement d'elle-même la formule. Encore une fois, ceci m'apparaît plutôt comme un manque de nécessité logique à y faire appel comme justification puisque, tel que

mentionné ci-haut, ce lien lui semble en quelque sorte tellement évident et donc ne nécessite pas de justification en soi.

#### 4.4.2.6 Séance 6 — Tâche 5

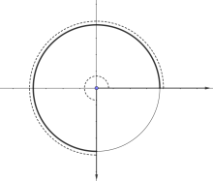
Finalement, la tâche 5 présentait, sous forme de schéma, un angle de  $\frac{3\pi}{2}$  radians vu comme une des deux parties de l'angle plein (Tableau 4.14). On demandait à Justine d'expliquer le sens qu'elle donne à l'expression « l'une des deux parties mesure  $\frac{3\pi}{2}$  radians » et de décrire le ou les éléments du schéma qui illustre ce sens. On lui demandait ensuite la valeur du rayon et de déterminer la longueur de l'arc sous-tendu par cet angle en centimètres<sup>29</sup>.

Par cette tâche, tout comme pour les autres, je cherchais à favoriser le développement d'une conception de la mesure d'angle en radians comme une relation multiplicative entre la longueur de l'arc et un rayon

Tableau 4.14 Description détaillée et énoncé de la Tâche 5 de la séance 6

<b>Description détaillée de la tâche ou de l'interaction planifiée</b>
<p>Étant donné l'information suivante : un angle coupe l'angle plein en deux parties dont l'une mesure <math>3\pi/2</math> radians,</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Expliquer ce que signifie l'expression « l'une des deux parties mesure <math>3\pi/2</math> radians »</li> </ul> <p>À partir d'un schéma d'un cercle centré à l'origine de deux axes dont l'arc correspondant à <math>3/4</math> de la circonférence est indiqué en gras et dont l'ouverture de l'angle est indiquée à deux endroits par un arc en pointillé juste à l'extérieur du cercle puis proche du centre,</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Expliquer comment ceci (en référant à l'expression ci-dessus) est représenté sur le</li> </ul>

<sup>29</sup> Une série de tâches similaires à celle-ci avaient été planifiées pour les séances 5 et 6. Nous avons choisi de n'en sélectionner qu'une et de miser sur les tâches de piste de course pour favoriser les images mentales de mouvement circulaire comme assise de la relation entre l'arc, le rayon et la mesure d'angle en radian.

schéma.
○ Déterminer la longueur de l'arc sous-tendu sachant que le rayon du cercle mesure 12 centimètres.
<b>Énoncé de tâche présenté à Justine</b>
<p>Tâche 5</p> <p>Un angle coupe l'angle plein en deux parties. L'une mesure <math>3\pi/2</math> radians.</p> <p>a) Selon toi, que signifie « l'une des deux parties mesure <math>3\pi/2</math> radians » ?</p> <p>b) Comment est-ce que ceci est illustré sur le schéma sur ci-dessous ?</p>  <p>c) Suppose que ce cercle a un rayon de 12 cm. De combien de cm est la longueur de l'arc coupé par cet angle ?</p>

Au début de la tâche 5, comme au début de la tâche 4, Justine ne semble toujours pas faire appel à la mesure de l'angle plein en radian pour déterminer lequel de l'angle rentrant ou saillant est celui mesurant  $\frac{3\pi}{2}$  radians. Elle s'appuie sur l'ordre de grandeur, « ça semble grand », pour en déduire que c'est la mesure de l'angle rentrant dont on parle. Ensuite, elle résout la tâche comme le montre l'extrait 4.32.

#### Extrait 4.32 Justine se représente l'angle de $3\pi/2$ radians

0:06:20	<p>J: je vais essayer de le calculer. [Écrit <math>3\pi/2</math>] Est-ce que je peux calculer ce que ça vaut ? [<math>3\pi</math> sur 2] ça ne fait pas de sens dans ma tête.</p> <p>C: Ok mais avant, ça a l'air de quoi un angle qui mesure <math>\pi</math> radians ?</p> <p>J: La moitié [<i>Indique un angle plat</i>]</p> <p>C: Et <math>\pi</math> sur 2 radians ?</p> <p>J: [<i>Indique un quart de l'angle plein</i>]</p> <p>C: Et là tu as trois <math>\pi</math> sur 2 radians..</p> <p>J: Donc trois quarts [<i>Indique les trois quarts de cercle séparément</i>]</p>
0:09:51	<p>J: [<i>Calcule la valeur et écrit <math>3\pi/2 \approx 4,712389</math> donc arc <math>\approx 4,712389 \times</math> le rayon <math>\approx 4,712389 \times 12 \approx 56,55</math> cm</i>] Puisque que 1 radian c'est rayon-rayon donc si on a ça [<math>4,71\dots</math>], le nombre de radians qu'on a, c'est le nombre de rayons donc fois la mesure du rayon donne la mesure de l'arc.</p>

Il semble qu'elle fait appel aux calculs et aux valeurs numériques (décimale) pour valider sa démarche (Extrait 4.32). Toutefois, son discours lorsqu'on discute à propos de la mesure  $\frac{3\pi}{2}$  radians m'apparaît cohérente et s'appuie sur des mesures d'angle en radians exprimées en termes de  $\pi$ . De plus, elle finit par s'appuyer sur sa conception « rayon-rayon » pour expliquer son calcul ainsi que sur une conception d'équivalence entre le nombre de rayons sous-tendus et le nombre de radians.

#### 4.4.3 Constats

Je rappelle que, de la phase 1, je soulevais que les mathématiques de Justine impliquaient un fort ancrage dans la proportionnalité, que le statut conceptuel des expressions avec le nombre  $\pi$  semblait problématique lorsqu'il était question d'opérer numériquement et que ceci rendait probablement plus difficile de mettre en lumière le rapport invariant du rayon à la circonférence dans tout cercle. J'ai également souligné que l'opération quantitative impliquant la RRGR entre le rayon et la circonférence ne semblait pas faire partie des schèmes d'action de Justine. Je suis d'avis que Justine a développé, dans la phase 2 du déroulement du TE, une conception robuste de l'unité de mesure radian. Mais surtout qu'elle a davantage réfléchi quantitativement lors de son engagement dans les tâches. Sa conception émerge effectivement d'une réflexion sur les objets et leur quantification et lui est utile pour valider puis expliquer quantitativement les situations qu'elle rencontre.

De cette phase 2, j'ai dégagé les constats additionnels suivants :

- Son concept de radian « rayon-rayon » est mis en lien avec l'idée de compter le nombre de rayons (vu comme unité correspondant à  $\frac{1}{2\pi}$  de circonférence) coupé par l'angle. Il y a une articulation cohérente et claire des idées (équivalentes) relatives à l'arc coupé et la mesure de l'angle. Elle fait la distinction naturellement

entre ce qui se passe sur la circonférence (longueurs de rayon) et l'unité de mesure d'ouverture d'angle (radian).

- Il y a eu un certain développement dans la pensée de Justine à propos du radian exprimé en termes de  $\pi$ . Or, de représenter et donner du sens à une mesure d'angle de  $\pi$  radians a tout de même représenté un défi malgré son écriture qui mettait justement en évidence l'unité de mesure  $\frac{1}{2\pi}$ . Il semble alors que la relation multiplicative entre la mesure d'angle exprimée en radian et la longueur de l'arc coupé n'était pas évidente. Il est possible que le lien avec l'idée que la valeur de la mesure en radian ( $n$ ) correspond précisément au nombre de rayons et qu'alors  $n \times r = \text{longueur de l'arc coupé}$  ne soit pas évidente à mobiliser pour répondre aux tâches autour desquelles nous interagissions.
- Il semble que Justine ne mobilisait pas spontanément une conception de partition de la circonférence et un lien entre la tâche et les concepts que nous tentions de développer relatifs au cercle. Je pensais que l'idée de partition de la circonférence mènerait Justine à diviser  $2\pi r$  par  $2\pi$  pour trouver le nombre de  $2\pi$  dans la circonférence, soit  $r$ . Tel que dans la phase 1, l'utilisation de la formule  $2\pi r = C$ , dans ce type de tâches impliquant des opérations numériques, demeure non spontané chez Justine bien qu'elle y fasse appel éventuellement pour opérer en « nombre de rayons ».
- Finalement, l'articulation entre les opérations arithmétiques et les opérations quantitatives sont demeurées un enjeu lors de l'engagement dans les tâches. Cependant, je constate que Justine était légèrement plus à l'aise à organiser les différents éléments en jeu, soit les mesures numériques en terme de  $\pi$ , les longueurs d'arc et de rayon, la circonférence puis l'angle. La spontanéité relative de ses réponses aux questions que je lui posais me porte à croire que les images mentales mobilisées ou encore développées à propos du concept de radian lui ont permis de suivre et de donner un sens à ce qui lui était présenté.

## CHAPITRE V

### DISCUSSION ET RÉSULTATS

Dans le chapitre précédent, j'ai voulu décrire l'environnement dans lequel nous nous retrouvons Justine, l'observateur et moi durant le TE, et donner une interprétation des interactions qui ont eu lieu. Dans ce qui suit, mon discours sera essentiellement interprétatif. Tel que mentionné, les analyses de niveau 1 et 2 m'ont permis non seulement d'identifier des phases de séances vues comme un découpage selon les visées didactiques et méthodologiques du déroulement du TE, mais aussi de dégager des thèmes qui ont émergé du travail d'analyse au sein de chacune de ces phases. Ces 7 thèmes sont vus comme des éléments qui caractérisent certaines façons de penser et de comprendre de Justine. Je reviendrai également sur quelques épisodes présentés dans l'analyse afin de supporter et exemplifier mon propos. Finalement, je mettrai le tout en lien avec mes questions de recherche.

#### 5.1 Thème 1 : La polyvalence de l'objet angle et du processus de mesurage de Justine

Nous avons vu que dans la phase 0, dès le début, Justine conçoit l'angle directement en lien avec le cercle. Ceci lui permet de voir naturellement que l'arc sous-tendu par l'angle peut servir à déterminer la mesure de l'angle. Pour Justine, il existe un arc-unité obtenu en partitionnant la circonférence. Celui-ci peut être comparé, soit additivement ou multiplicativement, avec l'arc sous-tendu par l'angle. Cette conception s'est avérée permanente et mobilisée jusqu'à la toute fin du TE. J'avance

que conceptuellement, les raisonnements de Justine mobilisés pour réfléchir à propos de l'angle sont de nature quantitative. Les opérations mentales mises en avant dans des contextes où il n'est pas question de les traduire en opérations arithmétiques impliquent, chez elle, de réfléchir à propos des relations entre les grandeurs et des résultats (anticipés) de ces relations.

## 5.2 Thème 2 : La proportion au centre des raisonnements de Justine

Une caractéristique découlant de sa façon de voir l'angle plein comme un cercle pouvant être agrandi ou rétréci est la mobilisation quasi systématique de la proportion  $\frac{\text{arc}}{\text{circonférence}} = \frac{\text{angle étudié}}{\text{angle plein}}$  pour appuyer et justifier ses opérations mentales. Au terme de la phase 0, Justine mobilisait la relation proportionnelle dans le cas des degrés et celui des unités de mesure quelconques. Or, la comparaison multiplicative entre l'arc et la circonférence ne lui semblait pas utile ou encore accessible dans les tâches visant à y faire appel. Nous conjecturons que ces deux éléments des opérations quantitatives en jeu étaient possiblement en développement et les liens avec l'égalité des rapports (la relation proportionnelle) ainsi qu'avec l'invariance du processus de mesurage n'étaient possiblement pas intégrés à son réseau de structures quantitatives. Nous avons alors posé l'hypothèse qu'en nous éloignant des degrés et de la proportion, nous favoriserions la mobilisation de la relation multiplicative entre l'arc et la circonférence puis éventuellement, entre l'arc et le rayon. Ensuite, j'ai dégagé de la phase 1 que la proportion demeurerait tout de même au centre des raisonnements quantitatifs de Justine. Sa façon de conceptualiser l'angle et sa mesure semble favoriser cette opération quantitative. Par ailleurs, cette constance de la mobilisation de l'idée de proportion à travers le TE me porte à croire que ceci lui procure une certaine flexibilité, et appuie ses façons de penser dans l'environnement dans lequel nous étions placés. Effectivement, lors de la Tâche 1 de la séance 3, Justine a construit un angle sous-tendant un arc dont la longueur correspond à celle de deux

rayons et demi. Elle a ensuite comparé sa construction avec une autre dans un cercle de rayon différent. Pour expliquer pourquoi on obtient la même ouverture d'angle, elle semble concevoir que, si on a la même ouverture pour un arc coupé d'un rayon, alors cette ouverture a été multipliée par le même facteur 2,5 donc doit donner la même ouverture. Justine s'appuie sur l'idée que, peu importe le cercle choisi, le rapport de l'angle à l'angle plein doit être le même que le rapport de l'arc sous-tendu à la circonférence. Lors de la séance 4 (Tâche 1), lorsqu'on lui demande si la valeur de fraction de circonférence sous-tendue par l'angle change si on change d'unité de mesure d'angle, elle verbalise clairement que non « C'est la même proportion » (c'est-à-dire que ces quantités forment une proportion). En d'autres termes, ce rapport ne change pas. Pour elle, le rapport, que ce soit au niveau de l'angle ou au niveau du cercle, est vu comme étant une comparaison multiplicative de deux quantités qui définit une troisième quantité qu'est la mesure d'angle ; cette dernière ne pouvant avoir une autre valeur (grandeur) si on change l'unité de mesure.

Une autre caractéristique en lien avec sa conception et la mobilisation de la proportion est qu'elle s'appuie sur la correspondance entre les termes aux numérateurs et les termes aux dénominateurs. Les objets représentés sont directement liés. Elle semble aussi mobiliser cette correspondance entre les termes d'une proportion dans d'autres contextes, comme nous avons pu le voir lors de la séance 3 (tâche 2) lorsqu'elle explique comment elle a posé l'égalité de rapport  $\frac{\text{rayon}}{\text{circonférence}} = \frac{1}{6,28}$ . J'ai donc constaté plusieurs manifestations de ceci, et ce, depuis le début du TE et même dans l'analyse de son questionnaire. Or, dans son engagement à la Tâche 1 de la séance 3 décrite plus haut, les relations multiplicatives et la proportion ne sont pas explicitement verbalisées même après en avoir discuté lors du retour sur la dernière tâche de la séance 2. J'avance que l'image mentale de la proportion lui permet d'affirmer que l'ouverture coupant un rayon doit être la même d'un cercle à l'autre, mais dans le contexte de la construction que nous lui avons faite faire, il semble qu'il



y ait une mobilisation de l'idée de report de la même ouverture ou amplitude (celle de 1 radian) plutôt que la mobilisation de l'invariance de la relation arc/circonférence puisque c'est le même nombre de longueurs de rayon. Il m'apparaît important ici de souligner qu'il y a une distinction à faire, à savoir que Justine peut penser à cette proportion sans toutefois avoir à l'esprit l'invariance du rapport, c'est-à-dire sans avoir à l'esprit la relation d'égalité dans cette proportion. Ceci pourrait peut-être expliquer qu'elle ne mobilise généralement pas un raisonnement impliquant une RRGR. J'y reviendrai plus loin.

### 5.3 Thème 3 : La conception « rayon-rayon » du radian chez Justine et le report de mesure le long de la circonférence

On a vu que Justine a éventuellement développé une conception du radian qui lui permettait à la fois d'associer et de distinguer la mesure de l'arc sous-tendu et la mesure de l'angle en comptant le nombre de rayons (voire de radians). J'avance que sa conception du processus de mesurage (compter le nombre de  $\frac{1}{n}$  de la circonférence contenu dans l'arc sous-tendu) lui a permis de construire puis d'assimiler cette conception qu'elle a mobilisée pour appuyer ses propos. Le geste qui l'accompagnait mettait un rayon en lien direct avec un radian, qui lui-même correspondait directement avec l'arc mesurant un rayon. Le report d'un certain nombre de rayons sur le cercle lui a permis de se prononcer sur la mesure d'angle en radians. C'est ce même processus de mesurage qu'elle a utilisé dans le cas des autres unités de mesure. Bien qu'au début du TE, le retour aux degrés était systématique, la constance de sa façon de faire a finalement transcendé les unités de mesure que je lui proposais d'utiliser. J'avance ici l'hypothèse que, chez Justine, cette articulation est supportée par un développement relativement robuste de sa conception « rayon-rayon » du radian et par sa conception existante de la mesure d'angle. Elle s'appuie sur un raisonnement

proportionnel qui est mis en lien direct avec l'arc sous-tendu. Elle mobilise des images et opérations mentales de report de mesures le long de la circonférence.

À la tâche 1 de la séance 5, nous avons observé que Justine ne mobilisait pas spontanément une conception de partition de la circonférence et un lien entre la tâche et les concepts que nous tentions de développer relativement au cercle. Je pensais que l'idée de partition de la circonférence mènerait Justine à diviser  $2\pi r$  par  $2\pi$  pour trouver le nombre de  $r$  dans la circonférence, soit  $2\pi$ . Plutôt, elle a traduit l'énoncé de la tâche en expression mathématique construite à partir de la recette « le mot « de » signifie une multiplication ». Elle s'en est remise à des calculs à partir de prises de mesures. Cette façon de faire ne lui a pas permis de dégager un lien avec la relation  $2\pi r = C$  et le rayon comme  $\frac{1}{2\pi}$  de la circonférence. On peut supposer que l'image mentale de partition de la circonférence est présente, mais non mobilisée spontanément dans cette tâche, à ce moment. Effectivement, à ce moment de la séance, j'ai questionné Justine à propos de ce qu'elle pensait être d'autres façons de réfléchir dans cette tâche. Par l'analyse de cette interaction, il nous semble qu'elle conçoit l'idée de partition qu'elle peut mettre en lien avec l'opération de division, mais que ceci n'implique pas nécessairement la division par  $2\pi$ . Il me semble plutôt qu'elle appuie son raisonnement sur l'action mentale de reporter le rayon le long de la circonférence. Je me suis alors posé la question à savoir si elle conçoit que la division est équivalente à un rapport de la circonférence à la longueur d'arc-unité. En d'autres termes, est-ce qu'elle mobilise un raisonnement multiplicatif dans cette situation ? Je reviendrai plus loin sur cet enjeu d'articuler le statut conceptuel des expressions impliquées dans les opérations arithmétiques.

Ceci dit, d'une part, il y a une remise en doute de l'utilité de considérer l'invariance par rapport au cercle choisi. Il ne semble pas y avoir d'utilité chez Justine d'exprimer la longueur d'un arc comme une fraction de circonférence ; comme aux séances 1 et 2

où l'idée de mesurer l'arc ou l'angle dans des unités correspondant à des fractions était un défi. D'autre part, on observe chez Justine un concept de radian mis en lien avec l'idée de compter le nombre de rayons (vu comme unité correspondant à  $\frac{1}{2\pi}$  de circonférence) coupé par l'angle. J'avance tout de même qu'il y a une articulation cohérente et claire des idées (équivalentes) relatives à l'arc coupé et la mesure de l'angle et qu'elle fait la distinction naturellement entre ce qui se passe sur la circonférence (longueurs de rayon) et l'unité de mesure d'ouverture d'angle (radian).

#### 5.4 Thème 4 : La RRGR et les relations multiplicatives de Justine

Au terme de la phase 1, j'ai soulevé que, dans l'analyse conceptuelle mise en avant, on propose de conceptualiser le rapport  $\frac{A}{C}$  comme un certain nombre de circonférence et que ce nombre est précisément le rapport  $\frac{A}{r}$ . Il m'a semblé que ceci posait problème lors de nos interactions avec les tâches. À la lumière de l'analyse et un certain retour sur les constituants de la THA, je suis d'avis que cette opération quantitative doit être organisée avec celle impliquant la RRGR découlant de la formule de la circonférence, soit  $(2\pi r = C) \Leftrightarrow (r = \frac{1}{2\pi} \times C)$ . Bien que j'ai tenté de provoquer le développement puis la mobilisation de ce type de raisonnement multiplicatif, notamment par la répétition de tâches, il semble que Justine n'a pas un raisonnement guidé par ce type de structure d'équivalence. Ainsi, pour chacune des tâches lui demandant d'utiliser la fraction  $\frac{A}{C}$  pour déterminer la mesure de l'angle en une unité donnée, nous faisons face à un léger blocage. L'épisode d'intervention dans lequel nous avons fait appel à des longueurs de segments et la comparaison de celles-ci a potentiellement eu un effet bénéfique en ce sens qu'elle en a vu l'utilité et s'est mise à « dérouler » les arcs afin de les voir comme des segments. Je voulais développer avec Justine un sens de la division de la longueur d'arc par la longueur du rayon. Cette opération mentale de

partition me semblait être un enjeu depuis le début. Ceci a possiblement facilité le recours à la comparaison multiplicative entre l'arc et le rayon puis éventuellement un déblocage, notamment dans la séance 6, quant à l'utilisation de sa valeur pour déterminer la mesure de l'angle en radians.

Il semble que chez Justine, les interactions et les tâches n'ont pas nécessairement été favorables à concevoir que l'égalité des rapports  $\frac{A}{C}$  et  $\frac{\text{angle}}{\text{angle plein}}$  implique une valeur qui est précisément le nombre de fois la grandeur de l'angle plein que mesure l'angle donné, tel que mis en avant dans l'analyse conceptuelle et, par design, dans les tâches. Par ailleurs, Justine mobilise constamment son processus de mesurage, compter le nombre d'arcs-unité contenus dans l'arc sous-tendu. Cette mobilisation découle de la robustesse et de la constance, d'une unité de mesure à l'autre, de ce processus. Or, j'avance que cette façon de voir peut être défavorable à la mise en lien avec la formule de la circonférence afin d'en dégager la relation directe entre la mesure de l'angle en radians et la comparaison multiplicative entre la longueur d'arc et le rayon. Ceci étant dit, au terme de la phase 2, on a pu remarquer que Justine s'appuie sur ceci pour guider ses actions et que le lien entre la formule de la circonférence et le nombre de longueurs de rayon commence à être mobilisé spontanément lors de son engagement dans les tâches, ou encore lorsqu'on tente de la provoquer à le faire.

### 5.5 Thème 5 : L'articulation entre les opérations arithmétiques et les opérations quantitatives de Justine

J'ai observé une difficulté récurrente chez Justine tout au long du TE. Tel qu'observé au tout début de la séance 3, lorsque vient le temps de traduire et utiliser la proportion et les rapports dans des opérations arithmétiques, le sens donné aux opérations de multiplication et de division ne semble pas évident puisqu'elle hésite entre multiplier par 360 ou par  $\frac{1}{360}$  pour déterminer la mesure de l'angle étant donné la fraction de

circonférence correspondant à l'arc sous-tendu. Pourtant, elle conçoit que si le rapport vaut 18 %, cela signifie que la longueur de l'arc mesure 0,18 fois la mesure de la circonférence et qu'alors, l'angle mesure aussi 0,18 fois l'angle plein ( $360^\circ$ ). Je me suis questionnée sur les sens qu'elle donne à ces valeurs en contexte d'opérations arithmétiques. Que représentent-elles pour Justine ? J'ai observé qu'elle a une forte propension, sans surprise, à utiliser la calculatrice pour résoudre des tâches qui, selon mes intentions, auraient pu faire ressortir le lien, par exemple, avec la relation  $2\pi r = C$ . Or, comme soulevé dans l'analyse, même lorsqu'elle décrit une « autre façon de faire », les deux façons qu'elle mobilise reviennent au même (utilisation des nombres et opérations plutôt que le sens) et ne semble pas permettre de dégager l'idée qu'il y a  $2\pi$  rayons dans la circonférence d'un cercle. Ainsi, on remarque que, d'une part, le lien avec l'idée de  $2\pi$  rayons n'est pas spontanée chez Justine pour appuyer son raisonnement dans ce type de tâche et d'autre part, que le statut conceptuel de certaines expressions n'est pas mobilisé pour réfléchir à propos de certaines tâches. Ceci laisse croire que chez Justine, une articulation entre opérations numériques et opérations quantitatives est non sans lacunes. Par ailleurs, dans certains cas, les opérations numériques (arithmétiques) lui permettent d'appuyer la validité de son réseau de conceptions. Effectivement, nous avons observé que Justine remet toujours tout en doute et ne semble pas faire confiance à ses réseaux d'opérations mentales conceptuellement ancrés. Les opérations arithmétiques lui servent de validation. Selon nous, le problème est qu'il semble y avoir chez Justine une lacune dans le développement d'une signification élémentaire de ses opérations arithmétiques (en particulier l'opération de division). Ainsi, les erreurs de calcul sont fréquentes.

Effectivement, le statut conceptuel de certaines expressions numériques semble différent chez Justine. Ceci, couplé à une propension à accorder de l'importance aux valeurs, semble être un frein à l'articulation entre les opérations quantitatives et les opérations arithmétiques mobilisées. Sur ce point, il semble que Justine ait une

difficulté à donner un sens à l'opération de division et à la fraction vue comme rapport ou taux. De plus, elle semble avoir un certain sens de la grandeur relative des valeurs et de la relation entre elles. C'est ce qui guide le sens de ses opérations de multiplication. Par exemple, elle multiplie parce que ça va lui donner un résultat plus petit et elle sait, par anticipation du résultat, que c'est ce qu'elle doit obtenir. Le raisonnement sur les quantités en jeu n'est pas mobilisé spontanément pour expliquer ses calculs même lorsque les interventions visent à le faire.

J'avance que dans le contexte des tâches proposées lors du TE, cette articulation s'avérait cruciale. Effectivement, en rétrospective, les tâches sous-entendaient que les opérations quantitatives et les images mentales soient en phase avec les opérations arithmétiques associées. Il est à noter que cet aspect a été soulevé dans la présentation de la théorie de Thompson au chapitre portant sur le cadre théorique (je réfère ici aux tableaux 2.1 et 2.2). Dans le cas de Justine, on assiste à une forte imagerie mentale et des opérations quantitatives (au sens conceptuel) en cohérence avec l'analyse conceptuelle. Or, j'avance que le statut conceptuel des valeurs en jeu au sein des opérations arithmétiques a été la plus grande source de blocage lors de cette expérimentation. Mon hypothèse est que le développement de l'articulation entre ces deux types d'opérations joue un rôle primordial dans l'approche mise de l'avant dans cette étude.

#### 5.6 Thème 6 : Le nombre $\pi$ dans l'unité de mesure radian et le statut conceptuel des expressions en jeu

Ce thème est étroitement lié au précédent. Dès la séance 3, lorsqu'on a introduit le nombre  $\pi$ , les comportements et actions de Justine me porte à penser qu'il ne semble pas y avoir de mobilisation de l'idée que  $\frac{A}{C}$  fois  $\frac{1}{2\pi}$  représente la même valeur que la fraction de circonférence correspondant à l'arc sous-tendu, soit  $\frac{A}{C}$ . L'intention de cette

tâche était de développer l'idée que déterminer le nombre de longueurs de rayon que mesure l'arc coupé (mesurer l'arc coupé en longueurs de rayon) est équivalent à donner sa mesure en utilisant une unité de mesure qui correspond à  $\frac{1}{2\pi}$  de la circonférence. Cependant, j'ai constaté que cette idée n'a pas explicitement émergé chez Justine. En d'autres termes, comme dans les séances 1 et 2, l'idée de mesurer en fraction de circonférence ne semblait pas utile chez Justine.

Ici, il me semble tout à fait pertinent de se questionner à propos de la présence du nombre  $\pi$  dans les relations quantitatives en jeu. Comment vient-elle modifier potentiellement l'image mentale de partition de la circonférence ? Effectivement, on peut supposer que d'imaginer la partition en 360 ou en 7 est « accessible » dans l'esprit de Justine, mais qu'une partition en  $2\pi$  le serait moins. D'autant plus que sa conception de « compter le nombre d'arcs  $\frac{1}{360}$  ou  $\frac{1}{7}$  dans l'arc sous-tendu » était mobilisée régulièrement dans ses explications à propos de l'unité de mesure. Cependant, bien que « compter le nombre de rayons » est mobilisé, l'articulation avec les relations quantitatives en jeu (notamment  $2\pi r = C$ ) n'est pas évidente. Ici j'avance que  $2\pi$  ou  $\pi$  n'auraient justement pas le même statut conceptuel que les nombres entiers puisqu'elle ne pouvait pas imaginer un nombre  $2\pi$  fois autant que la grandeur du rayon, par exemple. Ceci m'amène à conjecturer que l'appui sur les images mentales de partition et de comparaison multiplicative doit éventuellement laisser place à une abstraction réfléchissante des effets des actions en jeu afin de généraliser les opérations arithmétiques associées.

Somme toute, il m'a semblé qu'à ce stade, l'articulation entre les différents éléments en jeu, soit les mesures numériques en terme de  $\pi$ , les longueurs d'arc et de rayon, la circonférence puis l'angle couplé à la conception des unités de mesure et la signification de la valeur de la mesure d'angle en radian, n'était pas tout à fait consolidée. Toutefois, par la spontanéité relative de ses réponses aux questions que je

lui posais, je suppose que les images mentales mobilisées ou encore développées à propos du concept de radian lui ont permis de suivre et de donner un sens à ce qui lui était présenté. Ainsi, au terme de ces six séances, il nous apparaît que l'image mentale d'angle en radians exprimés comme fraction de  $\pi$  a été développée.

### 5.7 Thème 7 : Le raisonnement répété chez Justine

Il semble que les choix didactiques d'offrir à Justine de multiples occasions de raisonner de façon analogue d'une tâche à une autre, basés sur le principe de raisonnement répété, n'ont pas eu l'effet escompté. On a pu constater que la transposition d'une unité de mesure à l'autre n'a pas été sans blocages. Effectivement, nous avons vu que des tâches similaires qui, selon nous, faisaient appel aux mêmes raisonnements ne suscitaient pas nécessairement les mêmes actions chez Justine. Ceci s'est manifesté en particulier à la fin de la séance 4. Face à la même tâche de déterminer la mesure d'angle dans une unité donnée en utilisant le rapport  $\frac{A}{C}$ , Justine n'a pas été en mesure de la compléter. Comme mentionné, ceci peut être attribuable au délai de temps trop long entre la résolution des tâches relatives aux degrés puis aux gips, et la résolution des tâches relatives aux radians. Ceci a peut-être pu avoir un impact significatif sur la généralisation visée par cette répétition de tâches analogues et le réinvestissement dans le contexte du radian. Ceci dit, au terme de la phase 2 (et dans les séances subséquentes du TE), ceci s'est résorbé et on a constaté que Justine avait atteint un niveau d'abstraction lui permettant de reconnaître plus aisément ses actions mentales mobilisées d'une tâche à l'autre.



## 5.8 Retour sur les questions de recherche

Je rappelle que ma question générale de recherche était la suivante :

- Quelles conceptualisations semblent favorables à une compréhension robuste, polyvalente et cohérente de la mesure d'angle afin de permettre un apprentissage signifiant de la mesure d'angle en radian ?

Par l'étude du cas de Justine, mon objectif était de caractériser ses façons de penser dans le contexte de résolution des tâches proposées afin de dégager comment ses conceptualisations influenceraient un apprentissage de l'unité de mesure « radian ». Étant donné l'approche adoptée, je me pencherais sur les composantes en lien avec le raisonnement quantitatif, au sens de Thompson. Ainsi, plus spécifiquement, je me proposais d'amener des éléments de réponses aux questions suivantes dans le contexte d'une approche par arc de l'angle, et sa mesure en radian :

- Quelles opérations quantitatives sont développées et/ou mobilisées et comment s'articulent-elles lors d'une séquence d'enseignement visant l'apprentissage de la mesure d'angle en radian dans une approche par arc ?
- Comment favorisent-elles ou pas une compréhension robuste, polyvalente et cohérente de la mesure d'angle en radian ?

Tel que décrit dans les thèmes présentés et expliqués plus haut, la quantification de la mesure d'angle chez Justine impliquait au départ une forte idée de proportion entre les éléments correspondants, au niveau de l'angle puis au niveau du cercle. De ce fait, dans le contexte de l'approche par arc, il est clair que dans le cas de Justine, les raisonnements quantitatifs impliquant l'égalité des rapports ont été mobilisés pour supporter ses façons de penser. Or, on remarque que les raisonnements sous-jacents

aux actions de Justine comportaient certaines limites lorsque venait le temps de les traduire en opérations arithmétiques. De plus, bien que les tâches visaient le développement de raisonnements impliquant la comparaison multiplicative entre l'arc et la circonférence, le résultat de cette comparaison ne semblait pas s'articuler avec cette égalité de rapport. À la lumière de l'étude du cas de Justine, j'en suis venue à poser l'hypothèse que le raisonnement impliquant la RRGR entre le rayon et la circonférence :

$$(2\pi r = C) \Leftrightarrow \left( r = \frac{1}{2\pi} \times C \right),$$

puis entre le rayon et l'arc sous-tendu :

$$\left( \text{mesure de l'angle en radians} = \frac{A}{r} \right) \Leftrightarrow (A = \text{mesure de l'angle en radians} \times r)$$

favoriserait potentiellement une meilleure articulation entre les conceptions de Justine ancrées dans la proportion et l'utilisation du résultat de la comparaison multiplicative entre l'arc et la circonférence. Il semble que dans le cas présent, le développement de tels raisonnements a été plutôt tardif. Il ne m'est pas possible d'attribuer ceci aux tâches et interactions ou encore aux conceptions existantes de Justine agissant comme frein à ce développement. Or, j'avance que la visée des tâches sous-entendait un minimum d'habileté en termes de manipulations arithmétiques ce qui me semble être une lacune dans le cas particulier de Justine.

Par ailleurs, dans le contexte proposé, Justine aurait développé une conception de la mesure d'angle en radian qui implique une forte imagerie mentale de la correspondance entre un rayon et un radian ainsi que l'action de report du rayon le long de la circonférence. Cette façon de penser lui a permis éventuellement de mobiliser et d'articuler des raisonnements quantitatifs, en particulier multiplicatifs lors de son engagement dans les tâches. J'avance donc que ceci a été favorable à une compréhension de l'unité de mesure radian. Cependant, je suis d'avis que ceci est aussi en partie attribuable à la nature des conceptions existantes du processus de

mesurage en degrés de Justine, impliquant déjà une fraction de circonférence ( $\frac{1}{360}$ ) comme unité de mesure, et cette action de compter le nombre de cet arc-unité contenu dans l'arc sous-tendu. Or, il m'apparaît qu'au début du TE Justine s'appuyait peut-être plus sur une combinaison additive plutôt que sur une comparaison multiplicative. Peut-être que ceci a également eu une influence sur sa capacité à poser des opérations arithmétiques (d'ordre multiplicatif) en cohérence avec ses opérations quantitatives. Ceci étant dit, au terme du TE, on a vu qu'il y a eu un développement en ce sens chez Justine. Il semble effectivement avoir eu un passage vers, ou une mise en avant, de raisonnements multiplicatifs, ce qui semble avoir été favorable à sa conceptualisation du radian. Dans le contexte de cette étude, une articulation complexe entre différentes relations multiplicatives est impliquée. Mais selon moi, le cas de Justine montre que c'est plutôt l'articulation entre les opérations quantitatives et arithmétiques qui s'avère être d'une importance cruciale.

## CONCLUSION

Dans cette section, je fais un bref retour sur les éléments principaux de ce projet de recherche tout en y identifiant certains éléments relatifs aux contributions, limites et prolongements de celui-ci.

### 6.1 Vue d'ensemble du projet de recherche

Au départ, l'identification de difficultés et de fragmentations dans l'apprentissage et l'enseignement de la trigonométrie, tel que soulevé dans la littérature, m'a suggéré de me pencher sur ce sujet en adoptant une lunette constructiviste, qui me permettrait de m'intéresser aux façons de comprendre ces notions chez les apprenants. Dans la problématique, j'ai mentionné le souci de cohérence conceptuelle qui, dans le cas de la trigonométrie, semblait soulever certaines préoccupations, notamment le lien entre la trigonométrie du triangle et celle du cercle ainsi que l'ordre de la séquence d'apprentissage dans le contexte scolaire. Il a été mis en évidence qu'une investigation en profondeur des façons de concevoir certains concepts élémentaires de la trigonométrie, soit l'angle et sa mesure, en particulier en radian, était nécessaire étant donné le corpus de recherche relativement limité sur le sujet.

Afin d'orienter mon incursion dans les mathématiques de l'élève, je me suis dotée d'un cadre théorique constitué d'éléments du constructivisme radical, eux-mêmes à la base des théories et approches mises en avant par certains chercheurs tels Thompson (1994 ; 2008 ; 2011) et Moore (2010 ; 2012 ; 2013 ; 2014). C'est donc à partir de la théorie sur le raisonnement quantitatif et l'approche par arc de la mesure d'angle que je me permettrais de décrire les façons de concevoir l'angle et sa mesure, en particulier en radian, pour ainsi contribuer potentiellement à une meilleure

compréhension des enjeux relatifs à l'apprentissage de la trigonométrie. Dès lors je me proposais d'apporter des éléments de réponses aux questions de recherche suivantes :

D'un point de vue général,

- Quelles conceptualisations semblent favorables à une compréhension robuste, polyvalente et cohérente de la mesure d'angle afin de permettre un apprentissage signifiant de la mesure d'angle en radian ?

Plus spécifiquement,

- Quelles opérations quantitatives sont développées et/ou mobilisées et comment s'articulent-elles lors d'une séquence d'enseignement visant l'apprentissage de la mesure d'angle en radian dans une approche par arc ?
- Comment favorisent-elles ou pas une compréhension robuste, polyvalente et cohérente de la mesure d'angle en radian ?

Par la méthodologie du TE (Steffe et Thompson, 2000), je me suis outillée pour générer des données à travers un environnement d'enseignement-apprentissage autour de tâches et d'interactions de proximité. C'est en deux temps, une étape de préparation (analyse et élaboration d'une trajectoire d'apprentissage, questionnaire diagnostique) puis une étape de 6 séances d'enseignement-apprentissage, que s'est déroulée l'expérimentation. Une étudiante de secondaire 4, Justine, a donc été sélectionnée pour participer à l'étude. Après quoi une analyse de type générative (théorisation enracinée de Glaser et Strauss, 1967) m'a permis de dégager des caractéristiques de ses raisonnements quantitatifs mobilisés lors de l'apprentissage du radian, ainsi que des constituants de ses conceptions à propos de l'angle et de sa mesure.

## 6.2 Contributions et retombées

Au terme de ce travail de recherche, je crois avoir apporté quelques éléments importants à propos des raisonnements quantitatifs impliqués dans l'apprentissage de la mesure d'angle en radian. De plus, une caractérisation des conceptions de l'angle et de sa mesure chez Justine montre qu'une image mentale robuste de l'angle naturellement placé au centre d'un cercle peut contribuer à une compréhension cohérente de la mesure d'angle en radian. Les éléments principaux et en lien avec les questions de recherche, discutés dans le chapitre précédent, sont résumés ici.

### 6.2.1 La quantification de la mesure d'angle et l'approche par arc

Il semble effectivement que la quantification, au sens de Thompson, de la mesure d'angle en lien avec le cercle centré en son sommet permettrait une mobilisation solide et cohérente de raisonnements signifiants. Il semble que l'approche par arc s'avère féconde pour une compréhension profonde du processus de mesurage d'un angle indépendamment de l'unité de mesure. On remarque, au départ de l'étude des actions de Justine, que cette façon de concevoir l'angle et sa mesure permet de raisonner à propos des quantités en jeu. Qui plus est, dans ce contexte, l'apprentissage de l'unité de mesure « radian » semble se faire à travers un fort lien entre le rayon et l'arc sous-tendu par l'angle, ainsi qu'à travers le report du rayon le long du cercle. Or, ceci sous-entend qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur l'attribut que l'on mesure (l'ouverture de l'angle plutôt que l'arc de cercle). Dans le cas de Justine, sa conception de l'angle implique un cercle de rayon variable. Cette conception aurait pu être préoccupante au regard de la confusion de l'attribut que l'on mesure, mais puisque sa conception impliquait aussi l'idée que l'angle se situe proche du centre, ceci n'a pas causé de problème. Au contraire, il semble que de voir l'angle plein comme un mini disque couplé avec l'idée d'égalité des rapports  $\frac{\text{arc}}{\text{circonférence}}$  et  $\frac{\text{angle}}{\text{angle plein}}$  lui a permis de

constamment distinguer les mesures et objets relatifs au cercle, et ceux relatifs à l'angle. Je crois donc que par l'étude du cas de Justine, il est raisonnable d'avancer que cette façon de concevoir cet objet géométrique semble favoriser une certaine souplesse et une compréhension de sa mesure. Il est à noter que dans la littérature, cette caractérisation n'est pas celle généralement observée en contexte scolaire.

### 6.2.2 L'articulation des opérations quantitatives et arithmétiques

Dans l'étude des façons de faire de Justine et l'identification de certains blocages rencontrés, je crois qu'un des points importants qui a émergé de cette étude est le rôle apparemment crucial d'une articulation entre les opérations quantitatives et leurs opérations arithmétiques associées. Dans le cas de Justine, on peut voir que les opérations quantitatives sont mobilisées pour expliquer conceptuellement la quantification de la mesure d'angle. On remarque même que ceci est fait de façon cohérente et articulée en termes des grandeurs en jeu et de leurs relations. Or, au moment où le contexte implique des opérations arithmétiques, ces grandeurs semblent perdre leur sens conceptuel ou du moins, ces sens ne sont pas mobilisés pour déterminer quelles opérations effectuer. Il semble qu'une attention particulière sur les liens entre les opérations arithmétiques et les relations quantitatives qu'elles représentent est un enjeu de taille. Effectivement, dans le cas de Justine, cette lacune a constitué un frein à la conceptualisation des idées visées dans les tâches.

### 6.2.3 L'articulation des raisonnements multiplicatifs

Tel que soulevé, il semble que les conceptualisations visées par l'approche adoptée dans cette étude impliquaient certains types de raisonnements multiplicatifs : d'une part la proportionnalité et d'autre part la RRGR entre la circonférence et l'unité de mesure donnée. De plus, l'approche repose sur la mobilisation d'opérations multiplicatives de comparaison de grandeurs qui sont alors imbriquées dans les opérations relatives aux dits raisonnements. Il semble que cette structure relativement

complexe n'est pas nécessairement accessible à un élève de secondaire 4 ; du moins pas dans un contexte où les tâches décortiquent chacun des constituants de ces structures comme c'était le cas ici. Or, étant donné que j'ai observé un certain niveau de mobilisation de ces raisonnements vers la fin des six séances et que ceci semble avoir poussé Justine à expliciter plus aisément l'articulation entre les opérations quantitatives et des opérations arithmétiques, ceci me porte à croire que de favoriser le développement de tels raisonnements pourrait être bénéfique à une compréhension plus profonde et cohérente de la mesure d'angle en radians, et éventuellement des autres concepts trigonométriques abordés au secondaire.

### 6.3 Limites

Dans un premier temps, je dois soulever le fait que mon étude n'a porté que sur un seul cas, celui de Justine. Bien que son profil n'ait pas fait l'objet d'étude dans la littérature (l'apprentissage du radian auprès d'un apprenant ne l'ayant pas encore abordé en contexte scolaire), il demeure que la question de contribution à la recherche peut se poser. Or, il est à noter que l'objectif de cette étude était d'amener des éléments qui nous permettraient potentiellement d'approfondir notre compréhension 1) de l'apprentissage de ce concept, 2) des raisonnements mobilisés et conceptualisations développés lors de cet apprentissage et d'offrir des caractérisations des organisations mathématiques possibles chez l'élève. Cette étude ne visait pas à construire un modèle exhaustif des façons de penser à propos de l'angle et de sa mesure.

Dans un deuxième temps et en lien avec ce qui vient d'être soulevé, les tâches et interactions qui se sont déroulées étaient fortement influencées et guidées par l'analyse conceptuelle adoptée. De plus, dans un effort de se laisser guider par les mathématiques de Justine, les tâches et interactions ont été très personnalisées. Ceci est entièrement en cohérence avec la méthodologie que j'ai décidé d'utiliser. Par



conséquent, tel que j'ai tenté de laisser transparaître dans ce mémoire, par exemple en ne mettant pas toutes les tâches sous forme de questionnaire en annexe, cette étude, d'une part, ne visait pas une reproductibilité et, d'autre part, ne représente pas ce qui pourrait se passer en milieu scolaire. Cette décision a été motivée par la nature même de l'objectif de recherche, c'est-à-dire d'investiguer certains types de raisonnements et conceptualisations dans le contexte de l'apprentissage d'un concept en trigonométrie. Ainsi, ma méthodologie « en évolution » m'a permis de suivre les actions et comportements de la participante afin de générer des données qui me permettraient d'atteindre cet objectif.

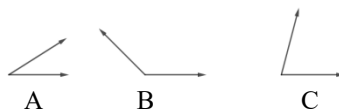
#### 6.4 Prolongements

À la lumière des résultats mis en avant sous forme de thèmes, on peut proposer quelques prolongements à cette étude. Premièrement, étant donné les conceptions existantes, non conventionnelles, de Justine, et plus généralement les différentes conceptions de l'angle que peuvent avoir les élèves, il serait intéressant de mener d'autres études de cas similaires, afin d'enrichir notre compréhension non seulement de l'apprentissage de la mesure en radians, mais aussi de celui-ci dans le contexte d'une approche par arc au sens de Thompson et de Moore. De plus, Justine avait déjà abordé, il n'y a pas si longtemps, les rapports trigonométriques dans le triangle rectangle. Bien que durant ces six séances, nous n'ayons aucunement discuté de ceux-ci, il serait intéressant de mener une étude similaire auprès d'élèves n'ayant pas abordé ce sujet. Aussi, tel que soulevé au début de ce mémoire, le concept de radian intervient dans d'autres objets de la mathématique scolaire de la fin du secondaire, soit le cercle trigonométrique et les fonctions trigonométriques. On a vu que des enjeux d'apprentissage sont aussi soulevés par ces sujets et seraient possiblement en lien avec les conceptions des notions élémentaires en trigonométrie. De ce fait, il

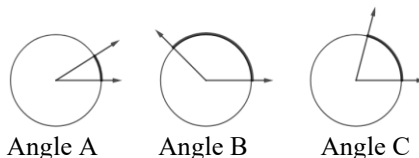
serait pertinent de poursuivre l'investigation jusqu'à l'apprentissage des fonctions trigonométriques, mais toujours dans le cas d'élèves ne les ayant pas encore abordées.

ANNEXE A  
QUESTIONNAIRE DIAGNOSTIC

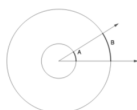
1. Selon toi, qu'est-ce qu'un angle ?
2. Selon toi, qu'est ce que ça signifie de mesurer un angle ?
3. Selon toi, qu'est-ce que ça signifie qu'un angle ait une mesure de
  - a) 1 degré
  - b) 10 degrés
  - c) 47 degrés
4. Observe les trois schémas ci-dessous.



- a) Sur ces schémas, vois-tu un(des) angle(s) ? Si oui, indique-le(s) directement sur le(s) schéma(s). Sinon, passe à la question 5.
  - b) Lequel des angles que tu as indiqués a la plus grande mesure ? Décris ce sur quoi tu as porté ton attention pour déterminer cette plus grande mesure puis indique-le sur le(s) schéma(s).
  - c) Lequel des angles que tu as indiqués a la plus petite mesure ? Décris ce sur quoi tu as porté ton attention pour déterminer cette plus petite mesure puis indique-le sur le(s) schéma(s).
5. Imagine des cercles de même rayon centrés au sommet des angles A, B et C. Chacun de ces trois angles coupent une portion de la circonférence du cercle centré en son sommet.



- a) Réfère-toi au schéma ci-dessus pour déterminer lequel des angles a la plus petite mesure et lequel à la plus grande mesure.
  - b) Décris ce sur quoi tu as porté ton attention pour déterminer cette plus petite et plus grande mesure puis indique-le sur le(s) schéma(s).
6. Julien, un étudiant de secondaire 4, affirme ceci :
- « Sur ce schéma, il y a deux angles. L'angle A et l'angle B ! »*



- a) Es-tu d'accord avec l'affirmation de Julien ? Explique ta réponse.
  - b) Compare les mesures des deux angles identifiés par Julien. Explique comment tu procèdes.
7. Selon toi, qu'est-ce que ça signifie que deux angles aient la même mesure ?
8. Choisis une valeur de mesure d'angle. Dessine un schéma de l'angle et de la mesure d'angle que tu as choisie.

Question supplémentaire. Un chef cuisinier veut concevoir un coupe-pizza pouvant couper ses pizzas circulaires de 15 cm de diamètre en 11 morceaux égaux. Il n'a pas accès à un rapporteur d'angle. Comment pourrait-il concevoir son coupe-pizza ? Donne le plus d'explications possible.

## BIBLIOGRAPHIE

Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept image of radian. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 39(7), 857-878. doi:10.080/002073908020544581.

Bloch, I. (2009). La mesure des angles en radians au lycée. *Petit x* (80).

Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. et Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33, 352-378.

Carlson, M. P., Oehrtman, M. et Moore, K. C. (2016). *Precalculus : Pathways to Calculus A problem Solving Approach*. Rational Reasoning, Hayden-Mcneil, Sixth Edition.

Castillo-Garsow, C. (2012). *Continuous quantitative reasoning*. In R. Mayes & L. L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context*, 2, 55-73. Laramie, WY: University of Wyoming College of Education

Castillo-Garsow, C., Johnson, H. L. et Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics*, 33(3), 31-37.

Charbonneau L. (2002). *La trigonométrie : une histoire à l'envers tournée d'abord vers le ciel*, in Des mathématiques qui mènent loin, Actes du 44e congrès annuel de l'Association Mathématique du Québec, Sainte-Foy : Les éditions Le Griffon d'argile, p. 47-56

Chi, M. T. (1997). Quantifying qualitative analyses of verbal data: A practical guide. *The journal of the learning sciences*, 6(3), 271-315.

Clement, J. (2000) *Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability*. In Lesh, R. and Kelly, A., Handbook of research methodologies for science and mathematics education. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cobb P. et Steffe L. P. (1983) The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education* , 14(2): 83–94.

Cobb, P. (1999). *Conducting teaching experiments in collaboration with teachers*. In Handbook of research design in mathematics and science education, Anthony E. Kelly and Richard A. Lesh (Eds). 307-333.

Cobb, P. et Whitenack, J.W. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom videorecordings and transcripts. *Educational Studies in Mathematics*. 30, 213–228.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A. A., Lehrer, R., et Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.

Fi, C. D. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: Subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy*. Unpublished PhD Thesis, University of Iowa, Iowa, USA.

Glaser, B. G. et Strauss, A. (1967). *The discovery of grounded theory: strategies for qualitative research*. New Brunswick, USA: Aldine Transaction.

Glaserfeld, E. v. (1995). *Radical constructivism : A way of knowing*. London : Falmer Press. 53-75.

Glaserfeld, E. v. (2001). Constructivisme radical et enseignement. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*. (2):211-222

Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise éducation préscolaire, enseignement secondaire*. Ministère de l'Éducation.

Harel, G. (2007). *A framework for Curriculum Development and Instruction* dans R. Lesh, J. Kaput, E. Hamilton (Eds.), *Foundations for the Future in Mathematics Education*, Erlbaum

Harel, G. et Koichu, B. (2010). An operational definition of learning. *The Journal of Mathematical Behavior* 29(3):115-124

Lappan, G., & Briars, D. (1995). *How should mathematics be taught?* In I. M. & Carl (Eds.), *Seventy-five years of progress: Prospects for school mathematics* (pp. 115–156). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Moore, K. C. (2010). *The Role of Quantitative Reasoning in Precalculus Students Learning Central Concepts of Trigonometry*. Unpublished Dissertation Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy. Arizona State University.

Moore, K. C. (2012). *Coherence, quantitative reasoning, and the trigonometry of students*. In R. Mayes, R. Bonillia, L. L. Hatfield, & S. Belbase (Eds.), *Quantitative reasoning: Current state of understanding*, WISDOMe Monographs, 2, 75–92. Laramie: University of Wyoming.

Moore, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: A teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 225–245. doi:10.1007/s10649-012-9450-6.

Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45, 102–138

Moore, K. C. et LaForest K. R. (2014). The Circle Approach to Trigonometry. *Journal of Mathematics Teacher Education* 107(8):616-623

Passaro, V. (2016). *Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans*. Thèse de doctorat. Université de Montréal.

Powell, A. B., Francisco, J. M., et Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The journal of mathematical behavior*, 22(4), 405-435.

Proulx J. (2003). L'histoire de la trigonométrie comme outil de réflexion didactique. *Bulletin AMQ*. (43)3. 13-27

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.

Simon, M. A., Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning : An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical thinking and learning*, 6(2), p. 91-104.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K., et Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for research in mathematics education*, 305-329.

Simon, M., Saldanha, L., McClintock, E, Akar, G. K., Watanabe, T. et Zembat, I. O. (2010) A Developing Approach to Studying Students' Learning through Their Mathematical Activity. *Cognition and Instruction*, 28(1), 70-112

Steffe L. P. (1991) *The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications*. In: Glasersfeld E. von (ed.) *Radical constructivism in mathematics education*. Kluwer, Dordrecht: 177–194.

Steffe L. P. et Kieren T. (1994) *Radical Constructivism and Mathematics Education*. *Journal for Research in Mathematics Education*. (25)6:711-733

Steffe, L. P. et Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology : Underlying principles and essential elements. In R. Lesh et A. E. Kelly (Eds), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ : Erlbaum.

Tanguay, D (2010). Degrés, radians, arcs et sinusoides. *Petit x*. (82). 59-71.

Tanguay, D. (2012). La notion d'angle au début du secondaire (Première et deuxième parties). *Envol* (158).



Tanguay, D. et Venant, F. (2016). *The semiotic and conceptual genesis of angle*. Dans A. Kuzniak, D. Tanguay et I. Elia (éds.), *Mathematical Working Spaces in Schooling*. *ZDM Mathematics Education*, vol. 48(6), pp. 875-894.

Thompson, P. W. (1990). A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebraic. Center for Research in Mathematics & Science Education: San Diego State University

Thompson, P. W. (1994). *The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate*. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234). Albany, NY: SUNY Press.

Thompson, P. W. (2008). *Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundations of mathematics education*. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sépulveda (Eds.), *Plenary Paper presented at the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol 1, pp. 31-49). Morélia, Mexico: PME.

Thompson, P. W. (2011). *Quantitative reasoning and mathematical modeling*. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education WISDOMe Monographs* (Vol. 1, pp. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming Press.

Thompson, P. W., Carlson, M. P., et Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4-6), 415-432.

Thompson, P. W., et Saldanha, L. (2003). *Fractions and multiplicative reasoning*. In J. Kilpatrick, W. G. Martin et D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 95-113). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W. et Carlson, M. P. (2017). *Variation, Covariation, and Functions: Foundational Ways of Thinking Mathematically*. In J. Cai (Ed.), *Compendium of Research in Mathematics Education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3), 91-112.