UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

EFFETS D'UN ENVIRONNEMENT CAS SUR L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE DANS LE COURS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL - LA NOTION DE LIMITE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

CAMILLE ROUSSEAU-MELANÇON

MARS 2021

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier sincèrement Jean-François Maheux qui m'a offert un support juste et précieux. Ces trois années ne sont que le début d'une collaboration riche et stimulante j'en suis certaine. Merci aussi à M Fernando Hitt qui a su allumer l'étincelle pour ce projet.

Ensuite, merci aux enseignants Mme Guylaine Dumont, M Olivier Laroque, M Sébastien Roberge et Mme Julie Racicot qui m'ont ouvert les portes de leur classe pour que je kidnappe leurs étudiants le temps d'une enquête.

Merci à mes précieux collègues de la maîtrise Rox-Anne, Charlotte, Vincent et les autres. Sans vous, le parcours aurait été beaucoup plus difficile et beaucoup moins arrosé. Merci Sarah pour la discussion sur Duval et sur la vie de doctorante.

Finalement, un doux merci à ma famille qui a cru à mon projet, à mes enfants qui ont compris que maman devait se rendre à l'université les lundi soirs et qui ont eu du plaisir à m'accompagner à Montréal les samedi matins.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

RÉSUMÉ

L'utilisation de diverses technologies est de plus en plus fréquente dans les méthodes d'enseignement au Québec et l'enseignement des mathématiques n'y fait pas exception. Certains logiciels mathématiques, appelés CAS, permettent d'effectuer plusieurs opérations algébriques qui sont enseignées dès le début du secondaire et ce jusqu'à l'université.

Cette recherche a pour but de nous informer de l'effet de la technologie CAS sur l'activité mathématique de l'étudiant dans le cadre d'un cours de calcul différentiel au cégep, plus particulièrement lors de l'étude de la notion de limite.

Des questionnaires ont été distribués à 88 étudiants répartis en deux groupes issus de deux cégeps. Dans le premier groupe (CAS), tous les étudiants possédaient une calculatrice CAS et l'utilisation de celle-ci était intégrée à part entière dans leur cours. Dans le second groupe (non CAS), aucune calculatrice n'était permise, mais les étudiants ont été initiés au logiciel Maple dans le cadre de leur cours de calcul différentiel. Par la suite, une courte entrevue a été effectuée auprès de 8 étudiants, 5 provenant du premier groupe et 3 du second, afin d'observer l'activité mathématique des étudiants en action et ainsi de préciser certains éléments d'observation issus des questionnaires.

Nous avons constaté que les étudiants du groupe CAS semblent avoir une meilleure coordination des registres de représentation en ce qui concerne la notion de limite. Il a aussi été observé que les techniques algébriques « papier-crayon » restent un choix de prédilection pour résoudre des problèmes reliés à la notion de limite pour l'ensemble des étudiants et que les étudiants du groupe CAS semblent maîtriser tout aussi bien, sinon mieux, ces techniques que les étudiants du groupe non CAS. D'autre part, des différences ont été observées entre les deux groupes quant aux méthodes de validation des résultats, de la perception de la notion de limite et du choix du registre pour la résolution de certaines limites.

Mots-clés : Calcul différentiel, limites, CAS, langage symbolique, technologie, calculatrice, registre de représentation, didactique des mathématiques.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

1.1 La technologie dans l'enseignement des mathématiques

La technologie prend de plus en plus de place dans la société québécoise et l'enseignement n'y échappe pas. Le Ministère de l'éducation et de l'enseignement supérieur donne une place importante aux technologies en intégrant certaines recommandations face à leur utilisation dans les programmes au primaire et au secondaire. Les classes du primaire sont, pour la plupart, maintenant dotées d'ordinateurs et de tableaux blancs interactifs. Les élèves sont, dès la maternelle, initiés à l'utilisation d'un ordinateur par le biais, entre autres, de sites web interactifs. Certaines classes ont aussi une ou plusieurs tablettes électroniques mises à la disposition de l'enseignant et des élèves. Puis, un peu plus tard au premier ou deuxième cycle, certains enseignants introduisent des logiciels de traitement de textes et de présentations tels Word et Powerpoint. L'utilisation de ces logiciels se poursuit au secondaire et certaines écoles offrent même des cours d'initiation à la programmation et à la robotique.

Dans les cours de mathématiques plus particulièrement, des technologies telles les calculatrices à affichage graphique, des applications sur tablette et certains logiciels tels Géogebra sont de plus en plus utilisés dans l'enseignement au secondaire. Cette utilisation de la technologie dans l'enseignement est appuyée par le ministère via certains organismes. Par exemple, le RÉCIT, soutenu financièrement par le ministère, est un réseau qui soutient les enseignants du milieu scolaire pour favoriser le développement des compétences des élèves par l'intégration des technologies de l'information et de la communication.

Au niveau collégial, le ministère inclut aussi dans les buts généraux de ses programmes l'utilisation appropriée des technologies. Par exemple, le devis ministériel du programme de sciences de la nature mentionne :

> [...] il lui [l'étudiant] faut utiliser les principaux types de logiciels de traitement de l'information [...] Il est indispensable que certains cours prennent en considération ce but général. [...] De plus, il est important, particulièrement pour les futurs étudiants et étudiantes en sciences appliquées et en génie, d'avoir été initiés à la construction et à la programmation d'algorithmes. (Ministère de l'Éducation, 2010, p.4-5)

Comme le ministère ne donne aucune directive quant aux outils précis à utiliser et dans quels cours ces outils doivent être utilisés, au niveau de l'enseignement des mathématiques, cette utilisation de la technologie varie beaucoup d'une institution à l'autre. Dans certains cégep, les tableaux blancs intéractifs et les classes d'apprentissage interactif (CLAAC) avec postes de travail informatiques font tranquillement leur apparition. Les laboratoires informatiques se multiplient pour répondre à la demande des différents programmes qui intègrent l'apprentissage de différents logiciels dans leur curriculum.

Au niveau des cours de mathématiques en sciences de la nature (calcul différentiel et intégral et algèbre linéaire), des logiciels à langage symbolique, tel Maple, sont parfois intégrés dans les activités d'apprentissage régulières du cours. Ces logiciels permettent, entre autres, de manipuler des expressions algébriques complexes, de tracer des graphiques élaborés et de programmer. Plus particulièrement, au niveau collégial, on s'en sert pour résoudre des équations, déterminer une limite, déterminer l'expression d'une dérivée ou d'une intégrale indéfinie, effectuer des opérations matricielles et construire la table de valeurs et tracer le graphique de fonctions à une ou plusieurs variables. Plus récemment, depuis le début des années 90, ces mêmes fonctionnalités se trouvent aussi dans les calculatrices symboliques, aussi appelées calculatrices CAS (Computer Algebra System). Peu importe l'outil présentant ces fonctionnalités, nous parlerons dans cette recherche de technologies CAS ou d'environnement CAS.

Au cégep dans lequel j'enseigne depuis quelques années déjà, le département de mathématiques s'est doté d'une politique d'utilisation de calculatrices. Depuis, l'automne 2000, tous les étudiants du programme de science de la nature doivent se procurer une calculatrice à langage symbolique Ti-NSpire CAS [1]. La calculatrice fait partie intégrante des trois cours de mathématiques obligatoires (calcul différentiel 201-NYA, calcul intégral 201-NYB et algèbre linéaire 201-NYC) ainsi que des trois cours de mathématiques au choix (outils mathématiques 201-101, statistiques et probabilités 201-307, calcul avancé 201-303). Deux ateliers facultatifs d'initiation à la calculatrice sont donnés par un enseignant et des étudiants de deuxième année de sciences de la nature en début de programme, au tout début de la première session. Les enseignants de mathématiques l'intègrent également tout au long du programme et elle est permise dans la plupart des examens. Par ailleurs, pour son étude personnelle, l'étudiant a accès en tout temps à un outil qui lui permet de faire des calculs avancés et de valider ses propres solutions.

Ce type de politique peut influencer les méthodes d'enseignement des cours de mathématiques à différentes échelles. Un enseignant qui décide d'intégrer cet outil dans son enseignement doit généralement repenser en partie son cours, des acti-

1. Le nom du modèle a changé à quelques reprises depuis les années 2000, mais les fonctionnalités sont restées sensiblement les mêmes.

vités d'apprentissage allant aux évaluations. Les enseignants apprécient certains avantages de ces calculatrices, mais peuvent s'inquiéter que l'utilisation de cette dernière nuise aux habiletés des étudiants en algèbre par exemple. On entend ici habiletés en algèbre comme étant être en mesure d'effectuer certaines manipulations à la main, telles factoriser, simplifier et développer des expressions algébriques, résoudre des équations linéaires, exponentielles et trigonométriques, etc. Ces calculs peuvent être dorénavant pris en charge par les technologies CAS. Certains enseignants s'inquiètent aussi des risques de tricheries aux évaluations. En effet, dans le cas de travaux effectués sur logiciel, les étudiants pourraient se partager les fichiers électroniques. Dans le cas des calculatrices symboliques, comme il est souvent possible d'y enregistrer des notes personnelles et des programmes divers, ceux-ci pourraient être utilisés lors des examens.

Mais qu'en est-il au niveau de la compréhension de ces étudiants ? Quelles sont les différences en ce qui concerne la construction d'un concept chez un étudiant ? En quoi l'utilisation de ces calculatrices change la façon dont les étudiants font des mathématiques ? Ces questionnements sont possiblement présents chez des enseignants qui décident d'évoluer dans un environnement CAS ou non et méritent qu'on s'y attarde. [2]

1.2 La notion de limite

La calculatrice symbolique pourrait avoir un impact sur l'activité mathématique des étudiants au cégep. Ellington (2006) montre par exemple que la calculatrice graphique semble avoir un effet bénéfique sur les étudiants du collège et de l'université. L'activité mathématique en est donc transformée d'une quelconque façon.

2. Garner (2002), Heid (1988)

Le cours de calcul différentiel au cégep où j'enseigne est celui où l'introduction au logiciel Maple se fait. Le calcul différentiel est d'ailleurs propice à la présentation de l'aspect symbolique de ces logiciels et de la calculatrice, puisque la résolution d'équations, le calcul de limites et de fonctions dérivées peuvent s'effectuer à l'aide de ceux-ci.

De manière générale, au Québec la notion de limite est enseignée dans le cours de calcul différentiel donné à la première session du programme de science nature ou sciences humaines. Ce cours présente de nombreux défis pour les étudiants et les taux de réussite dans plusieurs collèges en témoignent. Plus particulièrement, la notion de limite présente plusieurs défis tant conceptuels (confusion entre limite et dérivée, difficulté à considérer la limite comme un objet mathématique) que procéduraux (difficulté à appliquer les algorithmes de détermination d'une limite de fonction, difficulté à identifier une limite sur un graphique) pour les étudiants du cégep. Plusieurs recherches indiquent (Cornu, 1991 ; Tall et Vinner, 1981 ; Williams, 1991) que les étudiants ont une vision dynamique ou procédurale de la limite et que cela pourrait interférer avec une vision plus formelle de la limite. On parle de vision dynamique lorsque l'étudiant perçoit du mouvement dans la limite, qu'il y a une itération infinie. Quand l'étudiant voit la limite comme un calcul algébrique, un algorithme ou un outil qu'on applique pour calculer autre chose, on parle ici de vision procédurale. D'autres recherches suggèrent que certaines difficultés proviendraient de notions préalables à la notion de limite comme les nombres réels, les nombres infiniment petits et le concept de l'infini (Le Thai Bao, 1997 ; Rogalski, 2016 ; Tall et Schwarzenberger, 1978).

Williams (Williams, 1991) a étudié en détail les différentes visions propres des étudiants d'un second cours de calcul universitaire aux États-Unis concernant la notion de limites, ce que Williams appelle *modèles*. Dans une première phase, il a sondé 341 étudiants sur leur vision de la limite à l'aide d'un court questionnaire.

Une des questions proposées permettait de catégoriser les modèles de cette façon : (1.) dynamique-théorique (2.) la limite comme frontière (3.) modèle formel (4.) la limite est inatteignable (5.) la limite comme approximation (6.) dynamique-pratique. Le tableau 1.1 présente une formulation plus détaillée de ces différents modèles.

A.	Please mark the following six statements about limits as being true or false :			
	1.	T	F	A limit describes how a fonction moves as x moves toward a certain point.
	2.	T	F	A limit is a number or point past which a function cannot go.
	3.	T	F	A limit is a number that the y-values of a function can be made arbitrarily close to by restricting x-values.
	4.	T	F	A limit is a number or point or point the function gets close to but never reaches.
	5.	T	F	A limit is an approximation that can be made as accurate as you wish.
	6.	T	F	A limit is determined by plugging in numbers closer and closer to a given number until the limit is reached.
B.	Which of the above statements best describes a limit as you understand it ? (Circle one)			
				1 2 3 4 5 6 None
C.	Please describe in a few sentences what you understand a limit to be. That is, describe what it means to say that the limite of a fonction f as $x \to s$ is some number L.			

Tableau 1.1 Questionnaire de la phase 1 de l'étude de Williams (1991)

La seconde phase de l'étude de Williams (1991) consistait à rencontrer 10 étudiants parmi 50 étudiants volontaires ayant participé à la phase 1 de l'étude pendant 5 sessions avec le chercheur sur une période de 7 semaines, l'objectif étant de confronter leurs modèles de limite et de les amener à accepter le modèle formel comme unique modèle valable. Aucun des étudiants volontaires pour la seconde phase ne présentait une préférence pour le modèle formel.

L'auteur souligne plusieurs faits intéressants découlant de cette étude. Tout d'abord, on a remarqué que les modèles présentant un processus dynamique sont les plus populaires (questions 1. et 4.). Deux grandes familles de ces processus sont identifiées par l'auteur. La première étant les processus dits physiques où l'étudiant évalue une fonction en différents points pour déterminer la valeur de la limite. La seconde regroupe les processus mentaux, par exemple s'imaginer un point sur un graphique se rapprochant de plus en plus près d'un point limite.

Par ailleurs, Williams remarque que les étudiants acceptent plusieurs modèles (informels et formels) à la fois comme étant vrais. Les entrevues avec les étudiants lors de la seconde phase révèlent que ceux-ci choisissent un modèle (informel) qu'ils considèrent le mieux adapté selon la situation. Lorsqu'une situation entre en conflit avec leur modèle, ils considèrent cette situation comme exceptionnelle et essaient d'adapter leur modèle ou en choisissent un autre. Même si les étudiants sont contraints d'admettre que, pour une situation donnée, le seul modèle valable est le modèle formel, ils considèrent toujours les autres modèles valables dans d'autres situations. Ils ne voient donc pas la nécessité d'adopter un seul modèle qui soit vrai en tout temps.

William rapporte également que ces modèles persistent tout au long des rencontres de la seconde phase, même lorsque les étudiants ont constaté des contradictions dans leurs modèles dynamiques. L'auteur émet quelques hypothèses quant à cette persistance. L'une d'elles serait que les étudiants sont plus soucieux du côté pratique et facile qu'ils perçoivent de leur modèle que de sa formalité mathématique. Par ailleurs, ces modèles sont généralement suffisants pour répondre aux exigences des évaluations. D'ailleurs, un fait intéressant a été relevé par l'auteur :

> It was noted by several students that neither formal nor dynamic models of limit figure heavily in the procedures students use to work problems from their calculus class ; their procedural knlowledge [...] is largely seperate from their conceptual knowledge. (Williams, 1991, p.233)

Comme nous le verrons dans la prochaine section, souvent la portion procédurale de la construction de notion de limite peut être prise en charge par un outil technologique. Il serait donc intéressant d'observer les différents impacts de cette prise en charge.

Cependant, rarement, dans les cégeps du Québec, la définition formelle de la limite est enseignée. Généralement, on s'en tient à une définition informelle qui ressemble à celle-ci :

Définition. Soit f une fonction définie au voisinage de a, sauf peut-être en a. On dit que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est égal à L, où L est un nombre réel, et on écrit

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si, quelle que soit la façon dont x s'approche indéfiniment de a sans égaler a , $f(x)$ devient aussi proche qu'on le veut du nombre L.

Et dans le cas d'une limite à l'infini :

Définition. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]a, \infty[$. Alors,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

signifie qu'on peut rapprocher indéfiniment la valeur de $f(x)$ du nombre réel L en prenant toute valeur x positive suffisamment grande.

Dans les manuels scolaires utilisés au Québec, le concept de limite est introduit de plusieurs façons différentes. Certains auteurs profitent du concept de vitesse pour introduire la notion de limite (Amyotte et Hamel, 2018 ; Stewart, 2013), d'autres utilise le problème de la tangente (Anton *et al.*, 2007 ; Stewart, 2013) et certains utilisent plutôt des problèmes à contexte (Amyotte et Hamel, 2018 ; Brunelle et Désautels, 2016).

Plusieurs choisissent d'introduire la limite d'une fonction à l'aide de son graphique ou d'une table de valeurs (Amyotte et Hamel (2018), Anton *et al.*, 2007 ; Charron et Parent, 2014 ; Stewart, 2013). Différentes représentations sont donc utilisées à différents endroits dans les sections portant sur le concept de limites. Généralement, les exemples de calculs algébriques de limites sont accompagnés d'un graphique et parfois d'une table de valeurs. Certains auteurs suggèrent même, lors des exercices, d'utiliser un outil technologique pour construire le graphique ou la table de valeurs d'une fonction. Il semble donc que les auteurs de ces manuels considèrent que l'utilisation des différents modes de représentations des limites a un effet bénéfique sur l'apprentissage de certaines notions.

Une des particularités de l'utilisation de la calculatrice CAS en classe est qu'elle permet aux étudiants d'avoir accès rapidement à différentes représentations d'une notion mathématique. Lorsque la notion de limite est introduite dans le cours de calcul différentiel, cela pourrait être fait en utilisant le langage commun. Puis, à mesure que la leçon avance, il serait possible, à l'aide du tableur, de construire des tables de valeurs et tracer des graphiques. Il est également possible d'utiliser les fonctionnalités algébriques pour calculer la valeur d'une limite lorsque l'on travaille sur des concepts utilisant la limite, par exemple les asymptotes et la dérivée. C'est donc dire que la présentation de la notion de limite peut faire appel à plusieurs fonctionnalités et/ou modes de représentation d'une calculatrice symbolique.

1.3 Recherches autour des technologies CAS

Plusieurs recherches se sont penchées sur les effets des technologies sur l'apprentissage, l'enseignement et la construction des mathématiques. Certaines études ont observé les acquis des étudiants qui ont bénéficié d'un enseignement supporté par une calculatrice à affichage graphique. Les études de Drijvers, Adams et Graham et Thomas (dans (Burrill *et al.*, 2002)) ont observé une amélioration de leur savoir conceptuel de la notion de fonction et de variable. Tall (1994) par ailleurs souligne que les apprenants sont dégagés, par la technologie, d'apprendre le processus (par exemple le calcul d'une limite) pour pouvoir étudier les propriétés de l'objet mathématique avant même de débuter quelconque apprentissage de calculs.

D'autres études se sont questionnées à propos de la « performance » des étudiants ayant accès à une certaine technologie. L'étude de Hollar et Norwood (dans (Burrill *et al.*, 2002)) a observé des résultats plus élevés dans un « common comprehensive final exam » chez les étudiants d'un cours de pré-calcul ayant accès à une calculatrice graphique. Palmiter (1991) a observé des résultats sembables dans une étude effectuée auprès d'étudiants de calcul intégral qui ont reçu un enseignement supporté par une technologie CAS. Une méta-analyse des recherches effectuées sur les effets des technologies CAS en mathématiques a révélé elle aussi des résultats semblables (Tokpah, 2008). Des recherches sur l'utilisation d'une calculatrice graphique dans un cours de mathématiques ont aussi constaté de meilleurs résultats aux tests (Drottar, 1994 ; Kissi *et al.*, 2016 ; Quesada et Maxwell, 1994). Certaines études, par contre, rapportent une faible différence, ou une absence de différence, entre les groupes ayant accès à la technologie et ceux n'y ayant pas accès (Blozy, 2002 ; Leigh-Lancaster *et al.*,2010).

Ces études s'intéressent principalement à la finalité de l'utilisation des technologies dans les cours de mathématiques. Les recherches présentées dans les prochains paragraphes s'intéressent plutôt aux impacts intermédiaires et aux différentes transformations durant la construction des mathématiques chez l'étudiant.

1.3.1 La genèse instrumentale

Rabardel (Rabardel, 1995) définit la genèse instrumentale comme une construction par l'individu composée de l'artéfact, dans le cas qui nous intéresse les technologies CAS, et des schèmes d'utilisation de ce même individu. Lors de la genèse instrumentale, le simple artefact devient instrument pour l'individu. Plus précisément, l'auteur soulève que cette genèse instrumentale se produit lorsque deux processus surviennent conjointement : le processus d'instrumentalisation et le processus d'instrumentation.

— **processus d'instrumentalisation** : C'est un mouvement du sujet vers l'artefact. L'individu adapte l'artéfact à ses besoins et les différentes connaissances de l'individu dictent l'utilisation qu'il fera des différentes fonctionnalités de l'outil.

— **processus d'instrumentation** : C'est un mouvement de l'artéfact vers le sujet. Les contraintes de l'artéfact influencent les actions de l'individu et induisent de nouveaux schèmes. L'individu modifie ses actions afin de pouvoir utiliser l'outil.

Ces deux mouvements sont indissociables et se font avec un certain va-et-vient entre l'usager et un artéfact. Chez l'apprenant en mathématiques, ils se produisent probablement sans cesse, depuis le tout jeune âge, par exemple avec des blocs utilisés à la maison. Il existe aussi une variété de matériel de manipulation utilisé en classe : les abaques, les polydrons, les règles et les équerres. Éventuellement, les outils technologiques tels l'ordinateur, la calculatrice et les tablettes électroniques sont introduites dans l'enseignement. Le processus d'instrumentation est particulièrement intéressant dans la mesure où il pourrait influencer grandement l'activité mathématique des étudiants, leur construction des mathématiques, ou du moins, de façon plus évidente que le processus d'instrumentalisation. En effet, il se pourrait que lors de ses premiers contacts avec l'outil technologique, l'étudiant modifie peu son activité mathématique par rapport à une situation papier-crayon seulement. Il l'utilisera, par exemple, pour factoriser, tracer un graphique ou encore calculer une limite. Ce sont toutes des actions qu'il serait en mesure de faire s'il n'avait pas accès à cette technologie.

Par contre, lors du processus d'instrumentation, l'étudiant pourrait prendre plus grande conscience du potentiel de la calculatrice. Par exemple, sachant qu'il est simple de « zoomer » sur une zone particulière du graphique ou qu'il est possible d'automatiser la construction d'une table de valeurs, l'étudiant pourrait, en plus de déterminer la valeur d'une limite avec une méthode algébrique, valider son résultat avec une ou deux fonctionnalités de la calculatrice. Cette activité de validation pourrait être nouvelle chez certains étudiants qui ne l'aurait pas effectuée sans la présence de ces outils technologiques. On peut même imaginer qu'une nouvelle activité mathématique se produirait chez l'étudiant si jamais les résultats obtenus à l'aide de la technologie ne concordaient pas avec ses propres résultats. Bref, on peut penser que la genèse instrumentale de la calculatrice modifiera l'activité mathématique de l'étudiant.

Guin et Trouche (Guin et Trouche, 1999 ; Trouche, 1996) ont étudié le processus d'instrumentation chez des élèves de terminale en France (l'équivalent du cégep au Québec). Les élèves, qui possédaient tous une calculatrice graphique et programmable au départ, ont été suivis pendant toute une année scolaire. Les auteurs ont identifié cinq comportements individuels types au début du processus d'instrumentation (voir tableau 1.2). Ces comportements perdurent et s'expriment tout au long du processus, en particulier lorsque l'élève se retrouve seul devant sa

Rationnel	Pour l'élève rationnel, la calculatrice sera un brouillon interactif ; elle enrichira le travail mathématique de l'élève. Il utilise surtout papier crayon.
Théorique	Pour l'élève du type théorique, la calculatrice est une boîte à problème et renforce la tendance naturelle à se désintéresser aux calculs élémentaires et à présenter une fixation sur les problèmes théoriques généraux. Il utilise les références disponibles, interprète les résultats.
Scolaire	Pour l'élève scolaire, la calculatrice est une béquille. Le travail mathématique est réduit à poser des questions à la machine et à interpréter les réponses données. Il n'a pas d'outils privilégiés, a des difficultés à utiliser les outils mis à sa disposition et à mettre en œuvre les métaconnaissances.
Bricoleur	Pour l'élève bricoleur, la calculatrice est une lanterne magique et renforce la tendance naturelle de l'élève, c'est-à-dire les investigations multiples, les constructions d'itinéraires pour arriver au résultat proposé par la calculatrice. Il utilise surtout la calculatrice et procède par investigation.
Expérimentateur	Pour l'élève de type expérimentateur, la calculatrice joue le rôle de lunette panoramique et lui permet une vue d'ensemble. Elle accentue la tendance à confronter les différents résultats. Tous les outils sont utilisés, il compare les différents résultats.

Tableau 1.2 Les cinq comportements types de Guin et Trouche (1998)

calculatrice.

Les conclusions de ces recherches de Guin et Trouche indiquent que les étudiants évoluant dans un environnement CAS pourraient s'engager de manières bien différentes dans leur activité mathématique, y compris lors de ce présent projet. Les schèmes d'actions qui seront identifiables par leur production écrite pourraient être grandement influencés par le rapport qu'ils ont avec l'instrument au moment où ils répondront aux différentes questions sur la notion de limite. Ainsi, on pourrait penser que ces différents rapports qu'ont les étudiants avec l'instrument influenceront leur activité mathématique tout au long de l'apprentissage d'un concept, plus particulièrement avec la notion de limite où les contraintes internes de la calculatrice donnent lieu à des situations d'exception plutôt intéressantes.

Prenons pour exemple la fonction $f(x) = (1 - \mathrm{e}^{-x})^{x^2}$. Si on s'intéresse au comportement de cette fonction à l'infini, on peut utiliser les fonctions symboliques de la calculatrice pour calculer la valeur de cette limite, qui est une forme indéterminée 1^∞ (figure 1.1.a). Analytiquement, le résultat attendu de cette limite est 1, mais les algorithmes internes de la calculatrice font qu'elle ne parvient pas à donner un résultat clair à l'écran et présente plutôt une nouvelle forme indéterminée $\infty \times 0$.

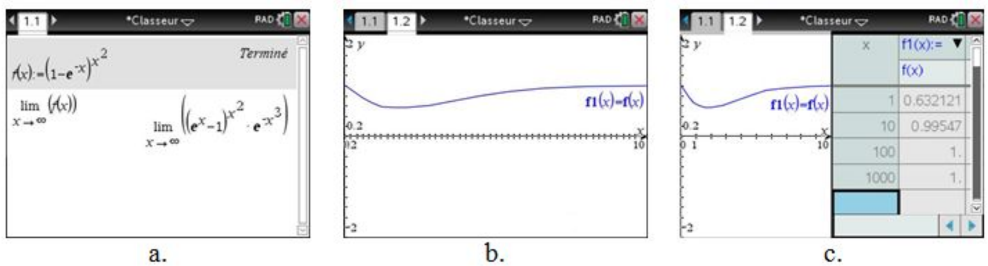


Figure 1.1 Étude de la fonction $f(x) = (1 - \mathrm{e}^{-x})^{x^2}$ à l'aide d'une calculatrice CAS

— L'étudiant scolaire pourrait arrêter son activité mathématique à cet endroit et conclure que la limite ne se calcule pas.

— L'étudiant théorique rejetterait possiblement ce résultat et se mettrait tout de suite à une démarche de résolution papier-crayon.

— L'étudiant rationnel pourrait tenter une solution développée par une technique papier-crayon supportée par la calculatrice. Par exemple, il pourrait "déconstruire" la fonction en fonctions plus simples et se servir de la calculatrice pour calculer ces limites intermédiaires.

— L'étudiant bricoleur pourait expliquer ce résultat en utilisant d'autres fonctionnalités de la calculatrice. Par exemple, il pourrait utiliser la commande *expand* ou la commande *factor* pour trouver une expression équivalente à la première et calculer cette limite.

— L'étudiant expérimentateur pourrait être tenté de tracer le graphique (figure 1.1.b) et, à la vue de ce graphique, il voudrait probablement valider ce nouveau résultat et pourrait construire une table de valeurs, toujours à l'aide de la calculatrice (figure 1.1.c)[3].

On observe donc que ce n'est pas purement l'environnement CAS qui peut influencer les schèmes d'actions des étudiants, mais aussi leurs rapports, propres à l'individu, avec la technologie. D'autant plus, comme le soulignent les auteurs, que ces rapports sont présents avant le processus d'instrumentation. Comme, les étudiants ne seront pas tous au même "endroit" dans leur processus d'instrumentation et il sera important d'en tenir compte lors de la lecture des résultats obtenus lors de cette étude.

D'un autre côté, les auteurs soulignent que ces comportements types perdurent chez les étudiants, surtout lorsqu'ils se retrouvent seuls devant leur calculatrice. Cette adaptation des étudiants face à l'outil pourrait alors enrichir le travail mathématique des "meilleurs" étudiants, alors qu'elle pourrait nuire aux étudiants présentant plus de difficultés.

1.3.2 L'activité mathématique

Dans une perspective de l'observation de l'activité mathématique des élèves, Kieran et Drijvers (Kieran et Drijvers, 2006) se sont intéressés au développement de la pensée algébrique chez des élèves de 8^{e} année (âgés d'environ 15 ans). Ils ont construit deux activités d'apprentissage en environnement CAS, une portant sur l'équivalence de deux expressions et l'autre portant sur la factorisation. Ces activi-

---

3. La figure 1.1.c illustre aussi un phénomène courant qui se produit lorsque l'on fait afficher une table de valeurs : la calculatrice arrondit le résultat au nombre de décimales que permet la fenêtre d'affichage.

tés étaient construites de sorte que des techniques papier-crayon étaient sollicitées en alternances avec des techniques CAS. Ils ont observé "a tendency to reconcile CAS work and theory [...]; students seemed to strive for consistency, and used the CAS on several occasions as a means (*sic*) of checking their theoretical thinking." (Kieran et Drijvers, 2006, p.36) Les élèves n'étaient donc pas indifférents aux résultats produits par la CAS et désirent que les résultats affichés par celle-ci correspondent à leur conception de la notion. Plus encore, ils suggèrent que la variété de représentations qu'offre la calculatrice a poussé les élèves à réfléchir d'une façon qui aurait été plus difficile d'atteindre avec une technique papier-crayon seulement. Par exemple, lors de l'activité sur la factorisation, lorsque la calculatrice affichait une forme factorisée que les élèves ne pouvaient expliquer par leurs connaissances antérieures sur la factorisation (issues des techniques papier-crayon), plusieurs voulaient en savoir plus, connaître le fonctionnement interne de la calculatrice et travailler avec une technique papier-crayon pour justifier l'équivalence des expressions. L'utilisation de la CAS a donc influencé leurs actions et, par le fait même, stimulé le développement de leur pensée algébrique.

Quelle valeur peut avoir l'utilisation des technologies CAS sur l'activité mathématique ? Artigue (Artigue, 2002) répond à cette question en mentionnant dans son article que la valeur pragmatique de la calculatrice symbolique est beaucoup plus évidente que sa valeur épistémologique. En effet, son utilisation permet un accès rapide aux graphiques de fonctions et tous les outils de cette fonctionnalité facilitent l'intégration des graphiques dans l'enseignement. Ses fonctionnalités algébriques permettent d'effectuer rapidement des calculs qui étaient précédemment fait au papier-crayon et de valider certains résultats obtenus par cette même méthode papier-crayon.

Cependant, la valeur épistémologique de cet outil est plus subtile et doit être étudiée plus en profondeur. Par exemple, il arrive souvent que, pour un même calcul, la méthode papier-crayon n'aboutisse pas à la même expression simplifiée que la technologie CAS. L'étudiant pourrait alors chercher à valider l'équivalence de ces deux expressions à l'aide d'une autre technique papier-crayon. Ou encore, il pourrait naviguer entre différents modes de représentation pour arriver à ses fins. Il pourrait aussi, si cela est possible, faire afficher le graphique des deux expressions ou encore utiliser une fonctionnalité symbolique. Par exemple, si l'on désire valider l'équivalence entre l'expression $\tan(x)$ et $\sin(x)/\cos(x)$ avec la technologie CAS, il est possible d'entrer la commande *solve(tan(x)=sin(x)/cos(x),x)* et la calculatrice retourne *true* comme réponse. Il est aussi possible de faire afficher le graphique et la table de valeurs des fonctions $\tan(x)$ et $\sin(x)/\cos(x)$ simultanément.

Par ailleurs, lorsqu'un enseignant intègre un tel outil dans son enseignement, il ne peut pas enseigner ou utiliser en détail toutes les fonctionnalités et leurs options. Ainsi, lorsque l'on affiche le graphique d'une fonction, il y a au moins douze manières de changer la fenêtre d'affichage. Une méthode peut avoir certaines limitations dans une situation donnée, causées, entre autres, par le fonctionnement interne de la calculatrice. La méthode la plus efficace sera donc différente d'une situation à l'autre. L'enseignant doit alors faire un choix didactique d'outils à enseigner. Ce choix est une manifestation de la valeur épistémologique de la calculatrice et ses différents outils. Ces choix pourraient laisser des traces dans les productions des étudiants. Prenons en exemple un étudiant à qui on demande de tracer le graphique d'une fonction. Si son enseignant utilise une fenêtre allant de -10 à 10 dans la majorité des cas, l'étudiant pourrait d'emblée tracer son graphique dans une telle fenêtre, qu'elle soit appropriée ou pas.

Dans le cas particulier de la notion de limite, plusieurs options s'offrent aux utilisateurs d'une technologie CAS. Il est possible de faire calculer tout simplement la limite de façon algébrique par la calculatrice. Si cette limite est non définie, il est même possible de faire calculer la limite à droite et la limite à gauche. Cependant, il serait peut-être plus intéressant d'aller observer le comportement de la fonction à travers son graphique. À ce moment-là, le choix de la fenêtre du graphique sera crucial. Sera-t-il suffisant de laisser la calculatrice "choisir" une telle fenêtre ou devra-t-on établir nous même ces paramètres. Par ailleurs, dans le cas de l'étude d'une limite à plus ou moins l'infini, le graphique de la fonction présentera certaines limitations. En effet, il est impossible de réellement représenter une fonction à l'infini. Alors peut-être que la construction d'une table de valeurs sera un choix plus judicieux pour donner une intuition de la valeur de la limite.

Hitt (2007), dans le cadre d'une recherche sur une méthode d'apprentissage collaboratif nommée ACODESA, s'est intéressé « à l'apport possible de calculatrices symboliques dans la réflexion de ces étudiants lorsqu'ils étaient face à un concept difficile à construire » et a observé des étudiants en début de maîtrise en didactique des mathématiques. Il a proposé différentes activités d'apprentissage autour de la notion de limite dans un environnement CAS. Les conceptions des étudiants face à la notion de limite ont été confrontées par les activités proposées, mais aussi par les contraintes internes de la calculatrice. Hitt conclut que la calculatrice a joué un rôle facilitateur pour l'articulation des différentes représentations associées à la notion de limite chez ces étudiants. Dans le cadre de la théorie de Duval, qui sera expliquée au prochain chapitre, cette conclusion apporte un élément de réponse important sur l'apport de la calculatrice symbolique sur l'activité mathématique des étudiants.

1.4 Questions de recherche

Tout d'abord, une hypothèse sera émise :

Il y a des effets au niveau de l'activité mathématique liée à la notion de limite chez les étudiants évoluant dans un environnement CAS (versus ceux qui évoluent dans un environnement régulier).

Ensuite, on pose la question suivante :

Comment l'utilisation d'une calculatrice symbolique affecte-t-elle l'activité mathématique des étudiants en lien avec la notion de limite ?

Cette hypothèse et cette question seront précisées une fois le cadre théorique de cette étude présenté.

CHAPITRE II

CADRE THÉORIQUE

Comme mentionné au chapitre précédent, les technologies CAS offrent un grand éventail de représentations pour un même objet mathématique. La calculatrice permet aux étudiants évoluant dans un environnement CAS, entre autres, d'obtenir rapidement une équation, un graphique et une table de valeurs pour la même fonction. En contre partie, les étudiants n'évoluant pas dans un environnement CAS travaillent essentiellement, nous semble-t-il, à l'intérieur d'un seul registre à la fois. Nous observons donc déjà une différence dans l'activité mathématique entre ces deux groupes d'étudiants. Il nous semble donc intéressant d'aborder l'impact de l'utilisation d'une telle technologie sous l'angle des représentations.

Bien évidemment, un choix différent de cadre théorique aurait été aussi intéressant et aurait présenté des réponses aux questions de recherche sous un angle différent. Cependant, la théorie de Duval nous donne une bonne piste pour évaluer ce qu'il y aura de différents chez ces étudiants et si l'utilisation de la CAS permettront aux étudiants de « mieux » réussir les questions qui leur seront posées.

2.1 La théorie des registres de représentations de Duval

Duval se penche sur la question des représentations en mathématiques et en linguistique depuis quelques années déjà. Ses travaux l'ont mené à la conclusion que la coordination de plusieurs registres de représentation est nécessaire pour une compréhension conceptuelle des objets mathématiques. Dans cette section, nous discuterons de la nature des représentations, des activités cognitives qui y sont reliées ainsi que des impacts sur l'activité mathématique d'une telle coordination.

Les objets mathématiques, telle la limite, ne sont pas perceptibles comme le sont les objets physiques. Les représentations ou visualisations qui y sont associées sont alors essentielles à leur perception et compréhension. Par ailleurs, selon Duval (1993, 1995), comme un même objet mathématique peut être représenté de plusieurs façons, il ne peut y avoir de compréhension d'un tel objet si on ne distingue pas cet objet de sa ou ses représentations. Plusieurs chercheurs (Bresson, 1987 ; Granger, 1979 ; Piaget, 1972, Vygotsky, 1986), se sont penchés sur ces représentations ou visualisations, tant en linguistique qu'en mathématiques, et Duval a développé une théorie des représentations qu'il appelle registre de représentations sémiotiques.

Avant d'aborder les représentations sémiotiques, Duval souligne qu'il importe de faire une distinction avec les représentations mentales. Les représentations mentales sont « l'ensemble des images et, plus globalement, des conceptions qu'un individu peut avoir sur un objet, une situation, et sur ce qui leur est associé »(Duval, 1993, p.38). En revanche, les représentations sémiotiques sont plutôt « des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentations qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement »(ibid). Par exemple, une table de valeur, la notation fonctionnelle ou le graphe d'une fonction sont des représentations sémiotiques d'objets mathématiques, alors qu'une variable qui se rapproche de plus en plus d'une valeur, dans le cas de la limite d'une fonction, serait plutôt une représentation mentale. Bien évidemment, les représentations mentales sont nombreuses, variant d'un individu à l'autre, et difficilement accessible par autrui. Par ailleurs, une représentation sémiotique, qui est de fait institutionnalisée, n'est que partielle par rapport à une représentation mentale d'un individu.

On pourrait penser que les représentations sémiotiques ne servent qu'à extérioriser les représentations mentales, mais Duval affirme qu'il en est autrement. D'abord, il souligne que ces représentations sont nécessaires à l'activité mathématique. En effet, dans le cas de l'arithmétique par exemple, l'utilisation des symboles et des algorithmes devient rapidement nécessaire lorsque l'addition ou la multiplication de grands nombres doit être effectuée. Il en va de même pour le développement d'une preuve d'un théorème, la transformation d'objets géométriques, l'étude du comportement d'une fonction, etc. Les exemples sont en fait très nombreux. Puis, il ajoute que le progrès des connaissances en mathématiques est souvent accompagné du développement de nouveaux registres de représentation ou du développement d'un registre déjà existant. Finalement, il affirme qu'il n'y a pas de « noésis » sans « sémiosis ». La sémiosis est définie comme étant la production d'une représentation sémiotique et la noésis comme étant les actes cognitifs tels la compréhension conceptuelle d'un objet , la discrimination d'une différence ou la compréhension d'une inférence (Duval, 1995).

Un registre de représentation sémiotique, selon Duval, doit permettre les trois activités cognitives suivantes :

1. **La formation d'une représentation identifiable** : Par exemple, composer une phrase, écrire une formule ou construire un graphe. Cette formation implique une sélection de la part de l'individu de certaines caractéristiques de l'objet à représenter. Cette formation doit respecter certaines règles qui permettront par la suite le traitement sur cette représentation.

   Par exemple, si l'on désire représenter une limite dans le registre de l'algèbre, la notation acceptée est le symbole lim avec l'expression $x \to a$ sous la limite,

a désignant la valeur dont x est proche, suivi de l'expression dont on veut connaître la limite $\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)$. Cette notation est acceptée par la communauté mathématique et permet un traitement algébrique pour déterminer la valeur de la limite.

2. **Le traitement de la représentation** est l'ensemble des transformations pouvant être effectuée sur la représentation à l'intérieur même du registre. Par exemple, résumer un texte, factoriser un polynôme ou effectuer une homothétie seraient des activités de traitement. Comme dans le cas de la formation de la représentation, certaines règles régissent ces activités de traitement.

3. **La conversion d'une représentation vers une représentation d'un autre registre**. La description d'une figure géométrique, la construction du graphique d'une fonction à partir de sa règle de correspondance, l'élaboration d'une table de valeurs pour établir la limite d'une fonction sont des exemples de conversion.

Cette conversion ne doit pas être confondue avec les activités de codage et d'interprétation. La conversion ne peut être obtenue par l'application d'une série de règles (de codage, par exemple). Pour illustrer ce propos, imaginons un individu qui construit une table de valeurs afin d'évaluer la limite d'une fonction. Il n'y a pas de « règles » universelles qui dictent l'incrémentation entre chaque valeur de la variable indépendante. Plus important encore, il n'y a aucune règle qui assure si la table obtenue est suffisante pour déduire la valeur de la limite. Il faut donc examiner certaines caractéristiques de la fonction étudiée pour pouvoir faire une telle conjecture.

Duval (1988) donne comme exemple la coordination des registres algébriques et graphiques avec la notion de la fonction linéaire. Si l'on prend l'équation cano-

Variables visuelles	Valeurs	Unités symboliques correspondantes	
- sens d'inclinaison	trait montant	coefficient > 0	absence du symbole –
	trait descendant	coefficient < 0	présence du symbole –
- angles avec les axes:	partage symétrique	coefficient = 1	pas de coefficient écrit
	angle *plus petit*	coefficient < 1	
	angle plus grand	coefficient> 1	
- position sur l'axe *y*	coupe au-dessus	on ajoute une constante	signe +
	coupe au-dessous	on soustrait une constante	signe –
	coupe à l'origine	pas de correction additive	

Figure 2.1 Lien entre les unités significatives de l'équation $y = ax + b$ et les variables visuelles du graphique de la fonction linéaire (Duval, 1998).

nique $y = ax + b$ pour représenter la droite, l'étudiant doit reconnaître les unités significatives de l'équation (valeurs des paramètres a et b) et les associer aux variables visuelles du graphique de cette droite (sens de la pente, inclinaison de la droite, position de la droite par rapport à l'axe des x) (figure 2.1).

Ce genre de correspondances s'applique aussi à la notion de limite. Par exemple, prenons l'équation $\lim_{x\to\infty} \frac{a}{x} = k$ où a est une constante réelle non nulle. Nous obtenons alors le tableau suivant :

Variables visuelles	Valeur	Unités symboliques correspondantes	
Présence d'une asymptote horizontale	Trait horizontal pointillé	$k \in \mathbb{R}$	différent de $\pm\infty$
Position de l'asymptote horizontale	Sur l'axe des x	$k = 0$	
	Au dessus de l'axe des x	$k > 0$	absence du signe -
	Sous l'axe des x	$k < 0$	présence du signe -
	Extrême droite	Infini postif	absence du signe -
	Extrême gauche	Infini négatif	présence du signe -
Comportement de la courbe	Croissante	$a > 0$	absence du signe -
	Décroissante	$a < 0$	présence du signe -

Tableau 2.1 Tableau de correspondances entre les variables visuelles et les unités significatives d'une limite à l'infini d'une fonction rationnelle

L'étudiant doit donc être en mesure d'effectuer toutes ces correspondances pour effectuer une bonne coordination des registres algébriques et graphiques de ce type de limite en particulier.

2.1.1 Les registres de représentation et l'activité mathématique

Observer l'activité mathématique d'un sujet est loin d'être chose simple. En effet, seules les productions du sujet, qu'elles soient écrites ou verbales, nous sont accessibles. Duval discute de deux voies d'analyse de l'activité mathématique (Duval, 2002). Il mentionne les différentes recherches de Douady (1984, 1986) qui l'ont menée à analyser l'activité mathématique « du côté des différentes organisations d'objets mathématiques au sein desquelles le mathématicien est amené à circuler quand il travaille » (Duval, 2002, p.2). Duval a plutôt privilégié une approche visant à analyser le sujet en fonction des systèmes internes, qui peuvent être des représentations, nécessaires au sujet pour qu'il ait accès aux objets mathématiques et qu'il puisse y effectuer adéquatement des transformations.

Selon les deux approches, c'est lors de la résolution de problème que l'activité mathématique peut être la mieux observée. En effet, selon l'auteur, lors la recherche de solution, des changements de directions de la pensée apparaissent comme des ruptures dans l'activité parce qu'ils ne semblent pas être conséquences de l'« étape » précédente. Lorsque la solution est inconnue et surtout la démarche pour y parvenir, ce sont ces changements de direction, parfois contraires à la « logique », qui témoignent de l'activité mathématique. Duval choisit donc d'observer ces changements à travers les changements de registres sémiotiques, alors que Douady oberve les changements de *cadres.* [1]

Duval résume ces phénomènes dans le tableau de la page suivante. Ce tableau, extrait de Duval (2002,p.4), présente les deux visions, changements de cadres et changements de registres. Nous nous intéresserons seulement à la deuxième colonne qui présente les les problématiques de changements de cadres. L'ensemble II décrit le changement de pensées lors de l'activité mathématique. Attardons-nous sur les points 3 *la congruence entre les unités respectives* et 4 *la discrimination* *entre les variations de représentation* de la colonne « REGISTRE ». Ces composantes, comme le mentionne Duval, sont cruciales et doivent être effectuées par l'élève pour qu'il y ait un réel changement de registres, une conversion proprement dite. Une fois ces principes appropriés par l'élève, alors le point 2. *rendre explicite d'autres propriétés de l'objet et permettre des traitements impossibles ou trop coûteux dans le registre de départ* pourra se manifester.

Prenons comme exemple la transformation d'une fonction simple $f(x) = x + \frac{1}{2}$ et trois registres de représentation : l'algèbre, les graphiques et le numérique (table de valeurs). Admettons que cette fonction soit donnée dans le registre graphique et que l'on demande de tracer le graphique $2 \times f(x)$. Un élève pourrait trouver l'équation de la droite, la multiplier par 2 et ensuite tracer la nouvelle fonction. Il pourrait vérifier la congruence entre les deux registres, par exemple en observant les unités significatives *pente* et *ordonnée à l'origine*. Il pourrait aussi constater les variations d'un registre qui ont un impact dans l'autre registre et celles qui n'en ont pas. Par exemple, écrire $f(x) = \frac{2x+1}{2}$ n'aura pas d'impact sur le graphique de la fonction, au même titre que de change l'échelle des axes n'aura pas d'effet sur l'équation originale. Par contre, changer l'échelle de l'axe des y, par exemple, sans changer l'angle d'inclinaison de la droite aura un impact sur la représentation algébrique de la fonction.

À force de travailler avec ces deux registres, l'élève pourrait conclure que pour résoudre ce problème, il est plus simple de tout simplement doubler l'ordonnée à l'origine et incliner deux fois plus la droite sur le graphique. Certaines propriétés

1. Selon Douady (Douady 1986, p.11), « Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outils, des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. ».

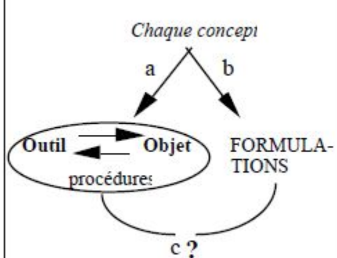
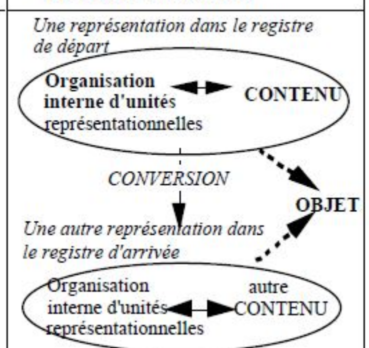
Questions directrices pour l'analyse de l'activité mathématique	CADRE	REGISTRE
I. Comment peut-on DISTINGUER les différents *cadres* et les différents *registres* ?	Un ensemble de concepts susceptibles d'être organisés en une progression théorique une branche des mathématiques	un système sémiotique producteur d'un type de représentations, et dont la production peut répondre à des fonctions cognitives différentes.
II. 1 Comment DéCRIRE l'opération du CHANGEMENT ?	— une **réinterprétation** portant sur la formulation des problèmes à résoudre	— une **conversion** portant sur des unités de représentation, mais conservant la référence de la représentation de départ
2 Qu'apporte un changement ?	— une **création d'objets mathématiques** nouveaux ou des «mises en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas» (1986, p11)	— **rendre explicites d'autres propriétés** de l'objet **permettre des traitements** impossibles ou **trop coûteux dans le registre de départ**
3. Quelle transparence des correspondances entre les données avant et celles après ?	— «**correspondances imparfaites**»	— **congruence** ou **non congruence** entre les unités respectives des représentations de départ et d'arrivée
4. Quelles conditions pour comprendre le processus du changement ?	— utilité du **recours à «un cadre auxiliaire de représentation»**	— **discrimination entre les variations de représentation dans un registre** qui entraînent une variation de représentation dans l'autre registre et celles qui ne changent rien
III Quelles sont LES DISTINCTIONS OPéRATOIRES UTILISéES POUR ANALYSER LE FONCTIONNEMENT de *l'activité mathématique ?*		

Figure 2.2 Les problématiques de changement de cadres et de registres (Duval, 2002, p.4)

de la droite et des transformations de fonctions lui seraient alors plus accessibles. La coordination d'un registre à l'autre serait en partie atteinte.

En conclusion, l'observation de l'activité mathématique, selon Duval, se fait entre autres à travers les changements observables de registres sémiotiques lors de la recherche de solution. Un problème survient lorsque l'élève ne voit pas ou ne croit pas a priori qu'un tel changement est nécessaire. Prenons l'expression suivante $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$. C'est une limite de forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Un élève pourrait conclure que cette limite vaut 1, puisque le numérateur et le dénominateur ont la même valeur numérique lorsque $x = 2$. En présentant le graphique de cette fonction à cet étudiant, où l'on voit bien que la limite est égale à 4, il pourrait continuer à dire que la « première » limite qu'on lui présente est égal à 1. Il y a alors blocage. Duval mentionne que ces élèves considèrent généralement que deux registres de représentation équivalent à deux objets mathématiques différents, d'où la nécessité de cette coordination des registres.

2.1.2 Les registres de représentation pour la notion de limite

Dans le cas de la notion de limite, plusieurs registres de représentation peuvent être utilisés. Pour illustrer ceci, l'exemple $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ sera utilisé. D'entrée de jeu, pour présenter cet exemple, j'ai eu recours au registre de l'algèbre. On pourrait se servir de ce registre, avec les méthodes de factorisation et de substitution, pour trouver la valeur de cette limite.

Le registre de la langue naturelle pourrait aussi être utilisé pour parler de cette limite. C'est parfois le cas dans les manuels scolaires lorsqu'on introduit la notion de limite. Prenons en exemple cet extrait d'un manuel de calcul différentiel qui décrit $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ ainsi : « [...] lorsque x est proche de 2 (d'un côté ou de l'autre de 2), $f(x)$ est proche de 4. » (Stewart, 2013, p.129))n peut aussi penser qu'un enseignant décrit ainsi la limite d'une fonction lorsqu'il enseigne cette notion, et que les étudiants font de même lorsqu'ils interagissent verbalement avec l'enseignant et leurs collègues.

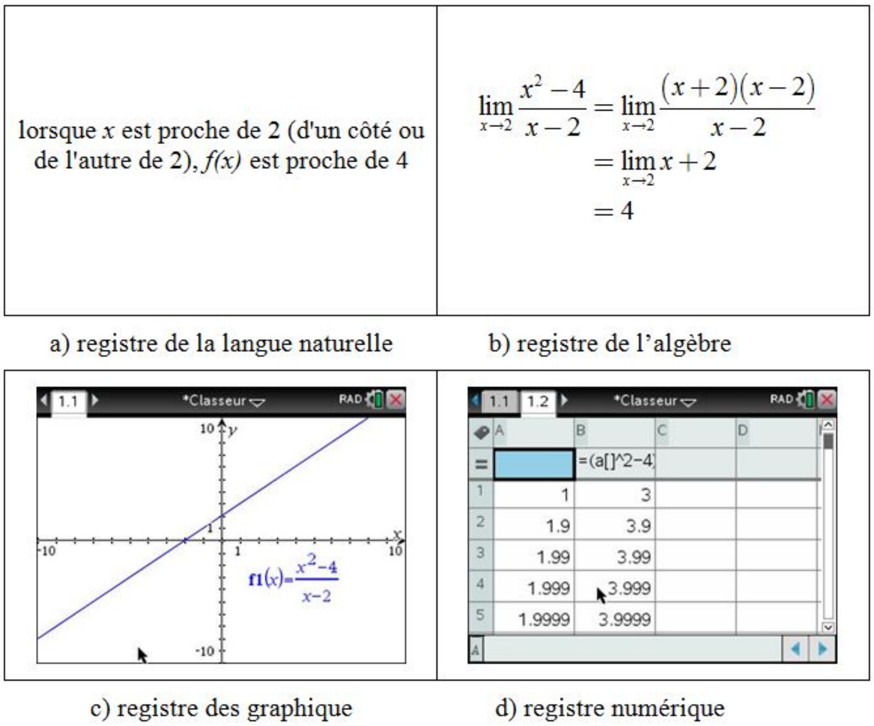


Figure 2.3 Les quatre registres de représentation sémiotique pour la notion de limite

Il y a aussi le registre des graphiques. Il peut être intéressant de tracer le graphique pour représenter le comportement général d'une fonction. Dans le cas précis d'une limite de fonction, le graphique peut donner un aperçu satisfaisant de la valeur de celle-ci (voir figure 2.3 c). Par ailleurs, à l'intérieur de ce registre, certaines règles ont été établies par la communauté mathématiques en ce qui concerne les limites, plus particulièrement les limites infinies et à l'infinie. Ainsi, on représente une asymptote verticale ou horizontale à l'aide d'un trait pointillé.

Le dernier registre employé pour l'étude des limites de fonction est celui que nous appellerons le registre des représentations numériques. Une table de valeurs de la fonction est alors utilisée pour déduire la valeur de la limite. On observe alors des valeurs de $f(x)$ lorsque x est proche de 2, par exemple.

Ces quatre registres, présents dans les manuels scolaires et utilisés par mes collègues et moi-même lors de l'enseignement de la notion de limite, seront ceux qui retiendront notre attention lors de cette recherche. L'utilisation des CAS permet de naviguer rapidement parmi trois de ces registres, c'est-à-dire l'algèbre, la table de valeurs et le graphique. Les fonctionnalités algébriques des CAS permettent de calculer de manière exacte la limite d'une fonction ou encore d'effectuer les étapes intermédiaires d'un calcul d'une limite, par exemple la factorisation lors d'un calcul d'une forme indéterminée. Le tableur présent dans la calculatrice facilite la construction d'une table de valeurs, le processus étant quasiment automatisé. Finalement, il est possible d'observer la courbe d'une fonction dans le module graphique de la calculatrice afin, entre autres, de déterminer la valeur d'une limite.

2.1.3 L'intérêt des registres de représentation

Quel est l'intérêt de l'existence de plusieurs registres de représentation en mathématiques ? Duval répond en trois temps. Tout d'abord, le changement de registres peut permettre d'effectuer des traitements de façon plus efficace. Par exemple, si nous désirons effectuer une multiplication complexe, le registre de la langue sera rapidement insuffisant et il faudra passer au registre de l'algèbre. Il en est de même pour le calcul d'une limite. Prenons par exemple la limite suivante : $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+4}{x-8}$. Il serait possible, quoique risqué, de déterminer la valeur de cette limite à voix haute dans le registre de la langue naturelle. Un graphique pourrait aussi être utilisé, mais comment tracer le comportement de la fonction à l'infini ? Le registre de l'algèbre semble donc le plus approprié pour déterminer la valeur de cette limite.

Ensuite, comme chaque représentation est cognitivement partielle par rapport à l'objet représenté, les registres de représentation sont complémentaires entre eux. Chaque représentation force une sélection, qui n'est pas nécessairement la même selon le registre choisi, des éléments significatifs de cet objet. Par exemple, les graphiques et les tables de valeurs ne représentent que des états et ne peuvent pas représenter des actions. Il faut passer au registre d'algèbre ou encore au langage naturel pour représenter des actions.

Finalement, Duval émet l'hypothèse qu'une « compréhension (intégrative) d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion »(Duval, 1993, p.47). Chez un individu en apprentissage, cette coordination est loin d'être naturelle, mais son absence (totale ou partielle) n'empêche pas toute compréhension. Il semblerait cependant que cela créerait souvent un « handicap pour les apprentissages conceptuels » (Duval, 1995, p.44), plus particulièrement lorsque les élèves sont confrontés à un contexte différent du contexte dans lequel l'apprentissage a été fait. Cependant, il fait l'argument que

> Lorsque ces deux conditions [la présence d'au moins deux registres et la conversion de l'un vers l'autre] ne sont pas remplies la representation et l'objet représenté sont confondus, et deux représentations différentes d'un même objet ne peuvent pas être reconnues comme étant les représentants du même objet. (Duval, 1995, p.22)

Par ailleurs, lors d'une expérimentation où un travail axé sur la coordination des différents registres, Duval rapporte que l'on constate

> [...] une modification complète dans les initiatives et dans les démarches des élèves pour effectuer des traitements mathématiques, pour les contrôler, pour la rapidité d'exécution et aussi pour l'intérêt pris à la tâche. [...] Ce saut qualitatif dans le développement des « compétences » et des « performances » apparaît lié à la coordination des systèmes sémiotiques chez les élèves.(ibid, p.6)

Il semble donc qu'une coordination des registres de représentation sémiotique affecte de façon positive l'activité mathématique des élèves. Dans cette optique, cette expérimentation tentera d'observer cette coordination chez des étudiants du cégep travaillant avec la limite.[2]

2.2 Le caractère fonctionnelle des représentations

La théorie de Duval sur les représentations sémiotiques ne réunit que les représentations institutionnelles, c'est-à-dire celles qui sont reconnues par la communauté (mathématiciens, professeurs, auteurs de manuels, etc). Cependant, tel qu'il a été mentionné dans le chapitre précédent, les étudiants produisent bien souvent des représentations spontanées des notions mathématiques qui leur sont propres et, dans le cas qui nous intéresse, de la notion de limite. Lors de leur apprentissage, on peut donc penser que ces étudiants n'utiliseront pas nécessairement des représentations institutionnelles, mais des représentations plutôt « transitoires ». Ces représentations pourraient s'avérer justes et suffisantes dans certaines situations, alors qu'elles ne seraient plus adéquates dans d'autres situations. D'autre part, ces représentations ne peuvent être considérées comme faisant partie d'un registre de représentation sémiotique tel que Duval l'entend, car elles ne permettent pas les trois activités cognitives mentionnées dans la section précédente. Prenons par

2. Il serait aussi intéressant d'observer le travail des étudiants à l'intérieur d'un seul registre de représentations. Cependant, dans le cadre de ce projet, nous avons plutôt se concentrer sur la coordination des registres et effectuer cette observation plus en détail.

exemple cet extrait tiré d'une expérimentation menée par Hitt (Hitt, 2003) où un étudiant représente la limite à l'infini d'une certaine fonction.

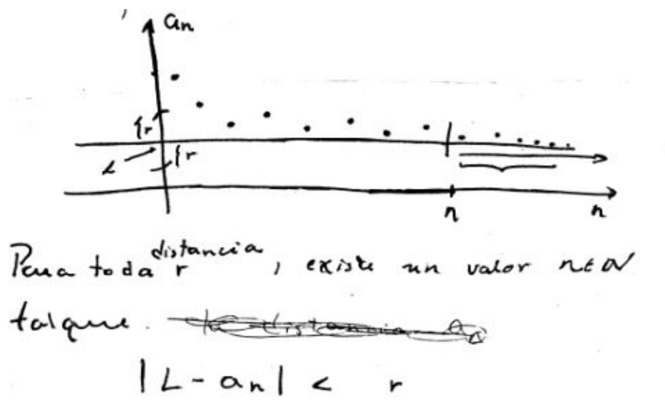


Figure 2.4 Représentation fonctionnelle d'une limite à l'infini

Cette représentation (figure 2.4) n'est pas reconnaissable par l'ensemble des individus d'une classe par exemple ou par la communauté mathématique (condition 1) puisqu'elle n'est régie par aucune règle précise de production. Par ailleurs, il serait très difficile de la convertir en une autre représentation et vice-versa pour les mêmes raisons (condition 2). Par contre, il serait dommage d'ignorer ce genre de représentations dans l'analyse de la construction mathématique du concept chez cet étudiant.

Hitt (2003, 2006) adresse cette nuance en développant sur les représentations qu'il appelle *fonctionnelles spontanées*, plus particulièrement dans le contexte des notions de fonction et de limite. Il définit les représentations fonctionnelles comme étant « les représentations spontanées que les étudiants utilisent [produisent] dans une situation mathématique »(Hitt, 2006, p.255). Ces représentations jouent un rôle particulièrement important dans un contexte d'apprentissage. De plus, de telles représentations, si elles sont analysées en détail, peuvent révéler une compréhension conceptuelle riche de sens. En effet, dans le cas vu précédemment,

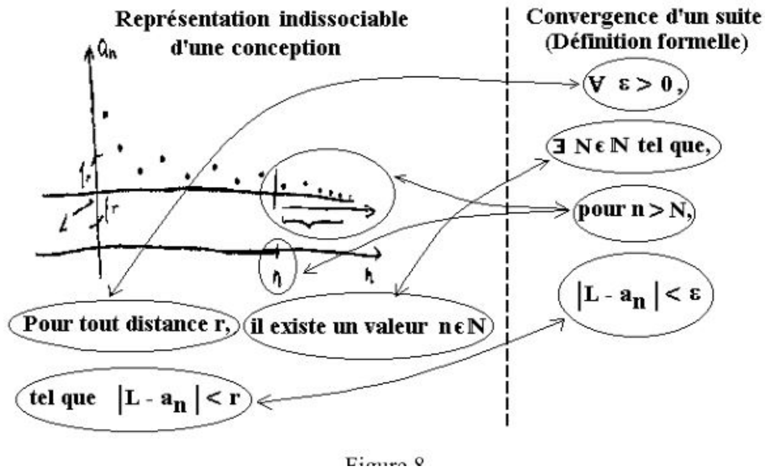


Figure 2.5 Représentation fonctionnelle d'une limite à l'infini expliquée

l'analyse de la représentation fonctionnelle spontanée de l'étudiant (figure 2.5) révèle que ce dernier a une compréhension acceptable de la définition formelle de la limite.

Dans le cours de calcul différentiel dans les cégeps du Québec, la situation est d'autant plus particulière puisque la définition formelle de la limite n'est enseignée que très rarement et, si tel est le cas, très rapidement (voir chapitre précédent). Cette définition présentée, souvent représentée par le registre de la langue française, quoiqu'institutionnalisée au niveau de la classe, pourrait en fait être considérée comme une représentation fonctionnelle au sens de Hitt et non admissible au sens de Duval comme représentation sémiotique. Par ailleurs, comme les étudiants sont en pleine construction mathématique de la notion de limite, il est fort probable que ceux-ci utilisent, à un moment ou un autre, une ou plusieurs représentations fonctionnelles spontanées.

Bien sûr, les technologies CAS ne permettent pas de construire de telles représentations, mais elles peuvent accompagner le travail de l'étudiant dans l'activité mathématique. Avoir accès aux différentes fonctionnalités de la CAS, qui utilisent des représentations institutionnalisées, pourrait promouvoir cette transition des représentations spontanées vers les représentations sémiotiques.

2.3 Questions de recherche

Comme mentionné au chapitre précédent, la présentation de ce cadre théorique permet de préciser la question de recherche qui peut être raffinée de la manière suivante :

Comment un environnement CAS affecte-t-il l'activité mathématique des étudiants dans l'articulation des registres de représentation en lien avec la notion de limite ? Quelles différences observe-t-on par rapport au travail d'étudiants évoluant dans un environnement non-CAS ?

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

Une approche mixte a été utilisée pour répondre aux questions de recherche. Une première étape, quantitative, a été effectuée afin de dresser un portrait global des différences du point de vue de leur activité mathématique. Par la suite, des entrevues individuelles ont été menées afin d'émettre quelques hypothèses quant à la nature précise et aux raisons de ces différences.

3.1 Conditions de l'expérimentation

3.1.1 Choix des participants

88 étudiants et étudiantes de deux cégeps suivant le cours de Calcul différentiel - 201-NYA ont participé à l'expérimentation. Ces étudiants étaient soit inscrits au programme de Science de la nature, soit au programme de Science informatique et mathématiques ou, plus rarement, dans un autre programme. La majorité d'entre eux (83/86) suivait ce cours pour la première fois. [1]

Dans le cégep CAS, 50 étudiants étaient répartis en deux groupes ayant deux enseignants différents. Au cégep non CAS, les 38 étudiants étaient aussi répartis

1. Il y avait 2 non répondants pour cette question

en deux groupes ayant deux enseignants différents. Le choix de ces groupes a été déterminé par le manuel scolaire utilisé par les enseignants. En effet, les quatre enseignants utilisent l'ouvrage Calcul différentiel de Stewart (2013). Ce choix permet de réduire l'influence que pourrait avoir l'utilisation d'un manuel scolaire ou l'autre sur l'aisance des étudiants avec les différents registres de représentations. Dans cet ouvrage, les divers registres de représentations sont utilisés tout au long de la présentation de la notion de limite.

3.1.2 Milieux

Les étudiants du cégep CAS évoluent dans un environnement CAS (Computer Algebra System), c'est-à-dire que ceux-ci ont accès en tout temps à un outil technologique à langage symbolique. Tous les étudiants possèdent une calculatrice symbolique de modèle Ti NSpire CAS ou TI Voyage 200 et elle est permise, voir même nécessaire, lors de certains examens et évaluations. Ces étudiants sont aussi initiés au logiciel Maple à travers 4 ateliers et une évaluation finale.

Au cégep non CAS, les étudiants n'ont pas accès à une calculatrice symbolique ou graphique en classe. Il leur est également suggéré de n'utiliser aucune calculatrice lors de leur cours et/ou travaux puisque celle-ci n'est pas permise aux examens. Cependant, ces étudiants sont aussi initiés au logiciel Maple à travers 3 ateliers et une évaluation durant la session.

Le cours de Calcul différentiel 201-NYA est dispensé en trois rencontres de 100 minutes par semaine au cégep CAS. Au cégep non CAS, il est dispensé en deux rencontres de 100 minutes et 150 minutes respectivement par semaine.

3.2 Collecte de données

3.2.1 Questionnaires

Deux versions d'un questionnaire écrit ont été créées (voir Annexe A) afin de permettre un plus grand éventail de questions tout en limitant le temps demandé aux participants. Les deux versions de questionnaire avaient certaines questions communes, soit celles concernant la perception des étudiants sur la notion de limite et celles dressant un portrait de leurs habitudes face à l'utilisation de la calculatrice dans le cadre de leur cours en calcul différentiel. L'autre partie différait d'un questionnaire à l'autre, mais l'ensemble des questions portait sur la notion de limite et ses diverses représentations.

Ces questionnaires ont été distribués vers la fin novembre à l'ensemble des étudiants participant à la recherche, alors que la notion de limite avait été entièrement couverte dans les deux cégeps à l'étude. Dans le cégep CAS, 25 étudiants ont répondu à la version A du questionnaire et 25 étudiants ont répondu à la version B du questionnaire. Dans le cégep non CAS, 20 étudiants ont répondu à la version B du questionnaire alors que 18 étudiants ont répondu à la version B du questionnaire.

Dans les deux cégeps, les questionnaires ont été distribués pendant une rencontre régulière du cours de calcul différentiel. Les étudiants avaient une heure pour répondre au questionnaire de façon individuelle. Ils ne pouvaient pas consulter leurs notes de cours ou manuel scolaire. Les étudiants du cégep CAS avaient accès à leur calculatrice symbolique.

Les questionnaires ont été analysés en deux temps. Tout d'abord, une base de données a été construite et une analyse quantitative de base et des tests d'indépendance ont été effectués à l'aide du logiciel Excel. Par la suite, chacun des formulaires a été étudié en détail afin de faire ressortir les faits saillants. Une attention particulière a été portée sur les différents registres utilisés par les participants. Les méthodologies détaillées de ces analyses seront explicitées dans le chapitre 4.

Choix des questions

Première partie du questionnaire

Les questions de la première partie du questionnaire concernaient la notion de limite. Certaines questions étaient identiques dans les deux versions du questionnaire, alors que d'autres étaient propres à chaque version (voir Annexe 1). Les paragraphes suivants détaillent chacune de ces questions et les choix didactiques qui ont été faits lors de l'élaboration du questionnaire.

Question 1 *Tout d'abord, en vos mots, expliquez ce qu'est la limite d'une fonction.*

Cette question, présente dans les deux questionnaires, est inspirée de la première question du questionnaire de Williams (1991). Elle permet à l'étudiant de nous faire part de sa compréhension personnelle de la notion de limite. Aussi, les réponses données à cette question pourront nous guider dans l'analyse des questions suivantes du questionnaire.

Question 2 - Version A *Pour chacune des sous-questions, tracez une esquisse du graphique d'une fonction g possédant les caractéristiques suivantes.*

Cette question permet d'observer l'aisance du participant vis-à-vis la coordination d'un registre quelconque (respectivement : langage naturel, algébrique, numérique et algébrique) vers le registre graphique. Évidemment, plusieurs réponses sont possibles.

a) *La limite de $f(x)$ quand x tend vers 3 n'existe pas*

Deux familles de graphiques pourraient être valables : la première étant celle regroupant les courbes dont la limite à gauche de 3 est différente de la limite à droite de 3. On accepterait aussi une courbe qui présente une limite infinie en $x = 3$ puisque certains auteurs présentent aussi les limites infinies comme étant des cas de limites qui n'existent pas. Un objectif particulier de cette question est de vérifier si l'étudiant fait la distinction entre l'existence de la fonction et l'existence de la limite et est en mesure de représenter ces caractéristiques de manière graphique.

---

b) $\lim_{x \to 1} g(x) = 5$

$g(1) = 2$

De manière semblable à la question précédente, on désire ici vérifier si l'étudiant est en mesure de distinguer la valeur de la fonction et la valeur de la limite à partir de leur représentation algébrique et de représenter ces caractéristiques de manière graphique.

---

c)

x	$f(x)$
0	2
5	$5,1$
10	$4,99$
15	$5,0001$
20	$4,99999$
...	...

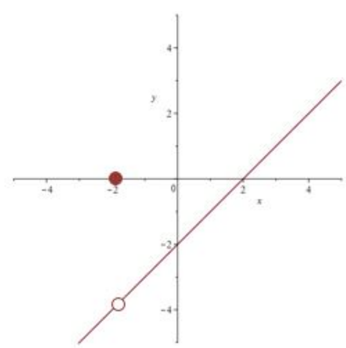
La présentation de cette table de valeurs permet de confronter une idée présente chez certains étudiants comme quoi la limite d'une fonction ne peut-être atteinte, plus particulièrement une limite à l'infini. Dans le registre du graphique, on pourrait traduire cette idée par « la courbe se rapproche de l'asymptote sans jamais l'atteindre. »Il est à noter ici que l'on suppose que les participants sont familiers avec ce type de tables de valeurs et arriveront à la conclusion que l'on observe une limite à l'infini.

---

d) $\lim_{x\to 2} g(x) = \infty$

Question 2 - Version B

a) *Voici le graphique d'une fonction f. Encerclez chaque élément qui pourrait être associé à ce graphique*



i) *La limite de $f(x)$ quand x tend vers -2 n'existe pas*

ii) $\lim_{x\to -2} f(x) = -4$

iii) $\lim_{x\to -2} f(x) = 0$

iv)

x	$f(x)$
-1	-3
$-1,9$	$-3,9$
$-1,99$	$-3,99$
$-1,999$	$-3,999$
...	...
-2	0

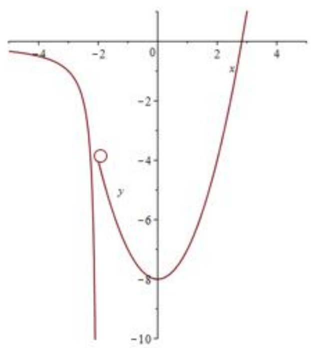
Cette question permet d'observer la coordination du participant du registre graphique vers un registre quelconque (respectivement : langage naturel, algébrique, algébrique et numérique). Tout comme la question 2 a) de la version A du questionnaire, l'énoncé i) vise à vérifier si l'étudiant semble faire la disctinction entre l'existence de la fonction lorsque celle-ci est présentée de manière graphique. De plus, les questions ii) et iii) et iv) permettent d'observer si l'étudiant semble être en mesure de distinguer la valeur de la fonction et la valeur de la limite à partir de leur représentation algébrique ou numérique et graphique, tout comme dans la question 2 b) de la version A du questionnaire. Ici les bonnes réponses sont i), ii) et iv).

---

b) *Encerclez chaque élément qui pourrait être associé à l'expression suivante :* $\lim_{x \to -2^+} h(x) = -4$

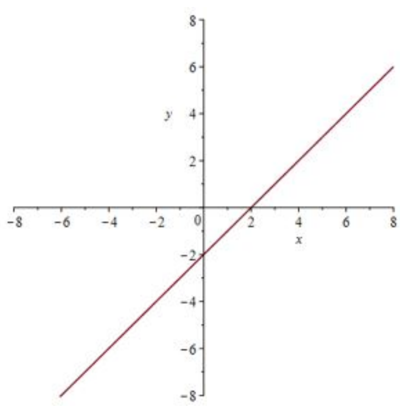
i) *Lorsque x est aussi près de -2 que l'on veut, x plus grand que -2, $h(x)$ devient près de -4*

ii)



iii) *Lorsque x se rapproche de -2 par la droite, y se rapproche de -4*

iv)

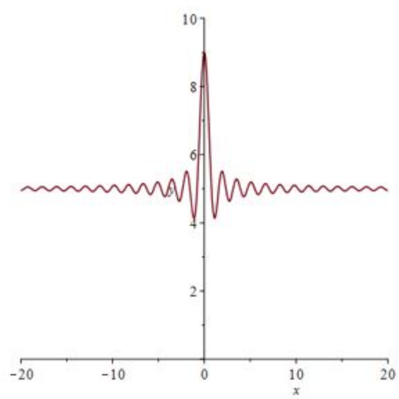


Cette question permet d'observer la coordination du participant ou de la participante du registre algébrique vers un registre quelconque (respectivement : langage naturel, graphique, langage naturel et numérique). Malgré que les énoncés i) et iii) utilisent tous deux le registre de la langue, il y a quelques différences entre les deux. Tout d'abord, l'énoncé i) présente la définition formelle de la limite alors que l'énoncé iii) est plus près de ce qui est présenté généralement au cégep. On peut alors s'attendre à ce que le premier énoncé soit moins populaire. Par contre, un étudiant pourrait se servir des autres énoncés (ii) et iv)) pour tenter d'identifier des correspondances entre l'énoncé en langage naturel et celui dans le registre du graphique, par exemple. À nouveau, les énoncés ii) et iv) permettent d'observer la distinction entre l'existence et la valeur d'une fonction et d'une limite unilatérale dans ce cas-ci. Ici, tous les énoncés sont valables.

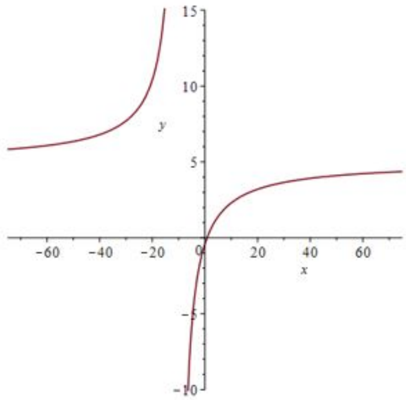
---

c) *Encerclez chaque élément qui pourrait être associé à l'énoncé suivant : Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $g(x)$ se rapproche de la valeur 5.*

i)



ii) $\lim_{x\to\infty} g(x) \to 5$

iii) 

iv)

x	$f(x)$
10	2
1000	$5,1$
100000	$4,99$
10000000	$5,001$
1000000000	$4,99999$
...	...

Cette question permet d'observer la coordination du participant du registre du langage naturel vers un registre quelconque (respectivement : graphique, algébrique, graphique et numérique). Tout comme à la question 2 c) de la version A du questionnaire, les énoncés i) et iv) énoncé permettent de confronter une idée selon laquelle la limite d'une fonction ne peut-être atteinte, plus particulièrement une limite à l'infini.

L'énoncé ii) présente une légère subtilité en remplaçant le symbole d'égalité par une flèche dans l'énoncé algébrique de la limite d'une fonction. Cet énoncé permet, dans le registre de l'algèbre, de vérifier si le participant semble être en mesure de faire la distinction entre les différentes valeurs que la fonction peut prendre et la valeur de la limite, c'est-à-dire $y \to f(a)$ vs $\lim_{x \to a} f(x) = a$.

L'énoncé iii) est un exemple classique que l'on retrouve dans la littérature pour représenter graphiquement une limite à l'infini. On peut s'attendre à ce que les participants soient très familiers avec cet énoncé.

Ici, les énoncés i), iii) et iv) étaient considérés comme bons.

Question 3 - Version A *Déterminez les limites suivantes et expliquez de quelle façon vous y parvenez*

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

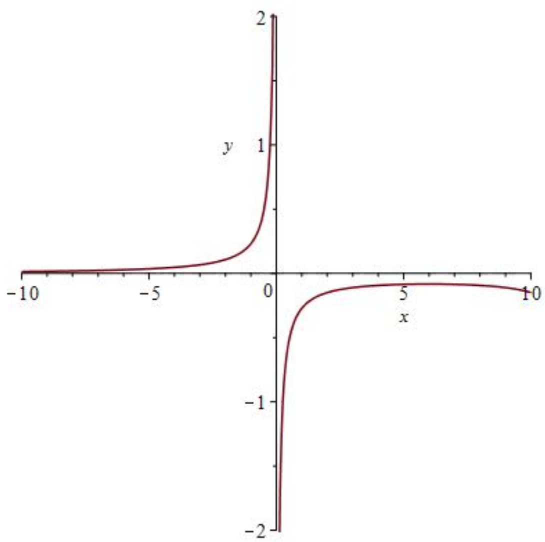
À première vue, cet énoncé en est un qui ne pourrait concerner que le registre algébrique. Par contre, aucune de ces limites ne se calcule par les moyens algébriques enseignés dans le cours de calcul différentiel au cégep. Elles pourraient être résolues par la règle de l'Hospital qui est enseignée dans le cours de calcul intégral dans chacun des deux cégeps visités.

On souhaite donc faire ressortir ici les différentes stratégies des étudiants lorsque la méthode de résolution n'est pas imposée. Cet énoncé vise à mettre en lumière l'utilisation des différents registres connus par les étudiantes. On souhaitait aussi découvrir de quelle façon les participants utilisent la technologie pour résoudre ce type de problème, si tel était le cas.

Dans le premier cas, la limite existe et est égale à 1 et est plutôt facile à déduire avec un graphique ou une table de valeurs. Dans le second cas, la limite n'existe pas et il est encore facile d'en faire la déduction à l'aide du graphique ou d'une table de valeurs. Pour ce qui est de la dernière limite, elle n'existe pas et le graphique et la table de valeurs sont peu utiles. Il faut procéder autrement, par déduction par exemple.

Pour cette question, on peut s'attendre à ce que les étudiants ayant accès à la CAS utilisent l'environnement algébrique de cette dernière pour obtenir directement la solution. L'utilisation du registre du graphique sera probablement plus aisée aussi pour ces participants puisque ce sont des graphiques peu familiers.

Question 3 - Version B *Voici le graphique de la fonction* $f(x) = \dfrac{3x+6}{x^3 - 10x^2 - 24x}$. *Déterminez les limites suivantes et expliquez votre raisonnement.*



a) $\lim_{x \to 0} f(x)$

b) $\lim_{x \to \infty} f(x)$

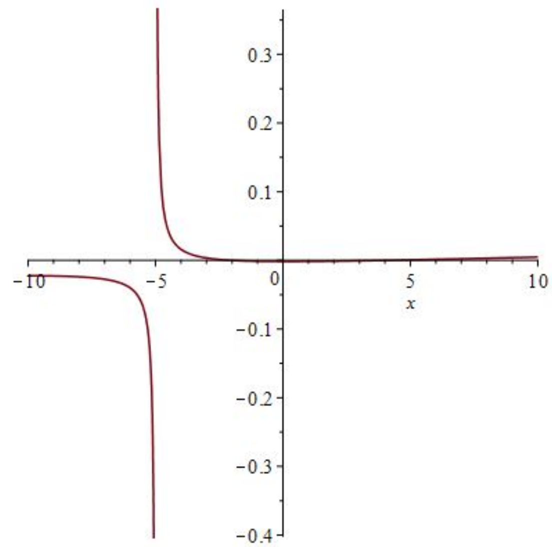
c) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

d) $\lim_{x \to -2} f(x)$

Pour cette question, on présente deux registres pour la même fonction, soit le registre algébrique et le registre graphique. Plusieurs objectifs sont visés. D'abord, est-il possible de déceler un registre préféré par l'étudiant pour déterminer une limite. Ensuite, utilise-t-il les deux registres pour valider ses résultats. Finalement, lorsque ces deux registres sont présentés, en utilisera-t-il un troisième, possiblement celui du numérique.

Dans le cas des énoncés a) et c), les résultats peuvent être obtenus à partir des deux registres proposés, en supposant que l'étudiant se souvienne des méthodes algébriques enseignées en cours de session. Par contre, pour ce qui est des énoncés b) et d), le graphique ne présente pas toutes les informations nécessaires. En effet, dans le premier cas, le graphique laisse croire que la courbe tend vers $-\infty$ alors qu'elle tend vers 0. Dans le second cas, la fonction n'existe pas, mais la limite est égale à $\frac{3}{28}$. Le graphique ne peut présenter ce fait, puisqu'il ne peut pas tracer un « trou »dans la courbe. Par ailleurs, il est difficile de déceler « à l'oeil »dans la forme algébrique que la fonction n'existe pas en $x = -2$. Pour cette question, on peut aussi s'attendre à ce que les étudiants et étudiantes qui ont accès à la CAS l'utilisent pour déterminer la limite directement dans le module algébrique de cette dernière.

Question 4 - Version A *Voici le graphique de la fonction* $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 8x}{1000x^2 + 5000x}$. *Déterminez les limites suivantes et expliquez votre raisonnement.*



a) $\lim_{x \to 0} f(x)$

b) $\lim_{x \to \infty} f(x)$

c) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

d) $\lim_{x \to -5} f(x)$

Cette question est très semblable à la question 3 de la version B du questionnaires, à quelques différences près. Tout d'abord, dans le cas des énoncés d), les résultats pouvaient de nouveau être obtenus à partir des deux registres proposés. Par contre, pour ce qui est des trois autres énoncés, le graphique ne présente pas toutes les informations nécessaires. En effet, dans les énoncés b) et c), le graphique laisse croire que la courbe tend vers 0 alors qu'elle tend vers ∞ dans le premier cas et $-\infty$ dans le second cas. Dans l'énoncé a), tout comme à l'énoncé d) de la version B, la fonction n'existe pas, mais la limite est égale à $\frac{-1}{125}$. Le graphique ne peut présenter ce fait, puisqu'il ne peut pas tracer un « trou »dans la courbe. Par contre, il est un peu plus simple de déceler dans la forme algébrique que la fonction n'existe pas en $x = 0$.

Question 4 - Version B *Tirée de Calcul Différentiel (Brunelle et Désaultels, 2016)*

Dans de nombreuses réactions chimiques, deux réactifs interagissent pour former un nouveau produit. Soit une réaction quelconque entre un réactif A et un réactif B.

Si, au temps $t = 0$, nous avons 2 moles du réactif A et 2 moles du réactif B, et si $x(t)$ est la quantité du nouveau produit au temps t, alors l'équation qui donne la quantité de nouveau produit en fonction du temps est

$$x(t) = 2 - \frac{1}{kt + \frac{1}{2}}$$

où k est une constante positive non nulle qui dépend de la réaction étudiée

Ce genre de question est souvent présenté dans les manuels scolaires de calcul différentiel pour le cégep. Malgré que la question soit presque entièrement énoncée dans le registre de la langue naturelle, l'information qui permet de répondre aux questions proposées est dans le registre de l'algèbre. Alors, avant même que les questions soient posées, l'étudiant doit traduire les informations d'un registre à l'autre pour cerner ce qui est pertinent ou non.

Par ailleurs, dans aucune des questions on ne demande d'effectuer des calculs. L'étudiant doit donc résoudre le problème en naviguant dans les registres de la langue naturelle, graphique ou numérique. Pour la première question, on s'attend à ce que l'étudiant résolve le problème dans le registre de la langue naturelle. Pour la seconde question, puisqu'il faut donner une équation, on s'attend évidemment à une réponse dans le registre de l'algèbre. Finalement, pour la dernière question, l'étudiant ou l'étudiante devait naviguer dans le registre du graphique pour répondre à la question. Il est à noter que les trois questions (a), b) et c)) sont en fait la même question posée dans différents registres.

---

a) *Sans effectuer de calculs, déterminer la quantité de nouveau produit à la fin de la réaction. Expliquer clairement votre raisonnement.*

   La question principale est posée en a). Malgré qu'aucun calcul ne soit demandé, on peut s'attendre à ce que certains participants valident leurs résultats dans le registre de l'algèbre, plus particulièrement les étudiants ayant accès à la CAS. En effet, ils peuvent utiliser le module algèbre de celle-ci pour répondre directement à la question. Si au contraire, le participant ou la participante reste exclusivement dans le registre de la langue, on peut s'attendre à ce qu'il ou elle réponde 4 moles à cette question, en se disant que 2 plus 2 font 4, ce qui est faux dans ce contexte.

---

b) *Exprimer sous forme d'équation le calcul que nous devrions effectuer pour trouver cette quantité.*

   Par la suite, en b), on demande de traduire la question a), qui est dans le registre de la langue naturelle, dans le registre de l'algèbre. On s'attend ici à ce que les étudiants n'aient pas de difficulté à identifier qu'il s'agit d'une limite à l'infini.

---

c) *Tracer un graphique possible de $x(t)$ et expliquer votre raisonnement.*

Finalement, on demande de traduire l'équation posée dans le texte en graphique. À ce moment, l'étudiant peut valider le résultat obtenu en a). Il sera intéressant alors de voir comment la coordination entre le registre de la langue, celui de l'algèbre et du graphique, s'effectue. On peut également s'attendre à ce que les étudiants ayant accès à la CAS utilisent cette dernière pour produire un graphique et s'en inspirer.

Question 5 *Dites si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux.*

1. *Une limite décrit le comportement d'une fonction lorsque x se rapproche d'une certaine valeur.*
2. *Une limite est une valeur que la fonction ne peut dépasser.*
3. $\lim_{x\to a} f(x)$ *signifie qu'il est possible de rendre la distance entre $f(x)$ et la limite arbitrairement petite en choisissant x aussi près de a que l'on veut.*
4. *Une limite est une valeur dont la fonction se rapproche, mais n'atteint jamais.*
5. *Une limite est une approximation qui peut être aussi précise que l'on souhaite.*

Cette question, inspirée de Williams (1991) est présentée à la fin du questionnaire afin d'éviter que les réponses aux questions précédentes en soient influencées. Particulièrement à la toute première question où l'on demande aux participants de décrire ce qu'est une limite pour eux. L'objectif de cette question est d'apporter des précisions aux conceptions des étudiants face à la notion de limite si des ambiguïtés se présentaient à la question 1 a).

Deuxième partie du questionnaire

La deuxième partie des deux versions du questionnaire a pour objectif de cerner les habitudes d'utilisation de la calculatrice des étudiants. On s'intéresse également à l'expérience de ceux-ci avec une calculatrice à affichage graphique et/ou langage symbolique. Les questions sont présentées à l'annexe A.

L'analyse des questionnaires s'est faite en deux temps. Tout d'abord, l'ensemble des résultats ont été comparés entre le groupe CAS et le groupe non CAS. Si les fréquences nous le permettent, dans certains cas, nous effectuons un test de Khi-deux pour vérifier s'il y a une différence statistiquement significative entre les deux groupes [2]. D'autres analyses tels des tableaux et graphiques nous permettent aussi d'établir s'il y avait des différences, marquées ou non, entre les deux groupes.

L'objectif étant très différent d'une question à une autre, nous ne nous intéressons pas toujours à la « réussite » du problème ou non. Cependant, dans tous les cas, une attention particulière est apportée aux différents registres de représentations sémiotiques en jeu.

Par la suite, une analyse qualitative de ces données est effectuée. Des hypothèses, appuyées par ces résultats, sont émises quant aux similitudes ou différences dans l'activité mathématique de chacun de ces deux groupes. Certaines productions d'étudiants en particulier qui attirent notre attention sont analysées plus en détails. Des extraits servent aussi parfois à appuyer les hypothèses émises ou à

---

2. Le test du Khi-deux est un test statistique ayant comme hypothèse nulle que les variables statistiques observées sont indépendantes. Dans le cas de cette étude, cela voudrait dire qu'il y aurait indépendance entre la variable observée et le groupe dans lequel se trouvaient les participants, autrement dit qu'il n'y a pas de différence significative entre les deux groupes. Pour réaliser un tel test, la taille de l'échantillon doit être supérieure ou égale à 30 (ce qui est toujours le cas dans cette étude). Par ailleurs, la fréquence théorique de chaque catégorie doit être supérieure ou égale à 5. On rejettera l'hypothèse nulle lorsque la « p-value » sera supérieure à 0,05. Les tests du Khi-deux dans le cadre de cette analyse ont été effectués à l'aide du logiciel Excel 2016.

illustrer nos propos.

3.2.2 Entrevues

De l'analyse des réponses de ces questionnaires, 5 étudiants du cégep CAS et 3 étudiants du cégep non CAS sont sélectionnés pour une entrevue individuelle. Ces étudiants proviennent d'une banque de participants s'étant portés volontaires lors de la première phase de la recherche. La sélection de ces volontaires se fait en fonction de la diversité des réponses.

Les entrevues durent une trentaine de minutes et sont filmées afin de saisir la gestuelle et les voix des participants. De façon générale, l'observation est dirigée sur leur activité mathématique du point de vue des registres de représentations et de l'utilisation de la technologie lors de la recherche de la solution lorsqu'ils y ont accès. Dans un premier temps, on demande aux étudiants de donner plus de détails sur leurs réponses écrites au questionnaire, de décrire leur raisonnement. On s'attarde particulièrement aux questions non réussies ou laissées sans réponses. On désire amener l'étudiant à trouver une solution qui lui convient, avec la méthode qui lui convient. Les étudiants du groupe CAS ont la liberté d'utiliser leur calculatrice CAS ou non, à l'exception d'une question qui sera mentionnée plus loin.

Par la suite, si le temps le permet, on leur demande de répondre à certaines questions provenant de l'autre version du questionnaire. On peut leur demander de commenter les réponses d'un autre participant ou encore d'élaborer une solution. Finalement, il est possible qu'on leur demande de réfléchir à une question supplémentaire sur une limite, en ayant accès au logiciel Maple.

La première question est la reprise d'un énoncé du questionnaire, mais abordé différemment. On leur présente le graphique de la fonction $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ de -2π à

2π sur Maple (figure 3.1) et on leur demande de discuter de la limite autour de 0.

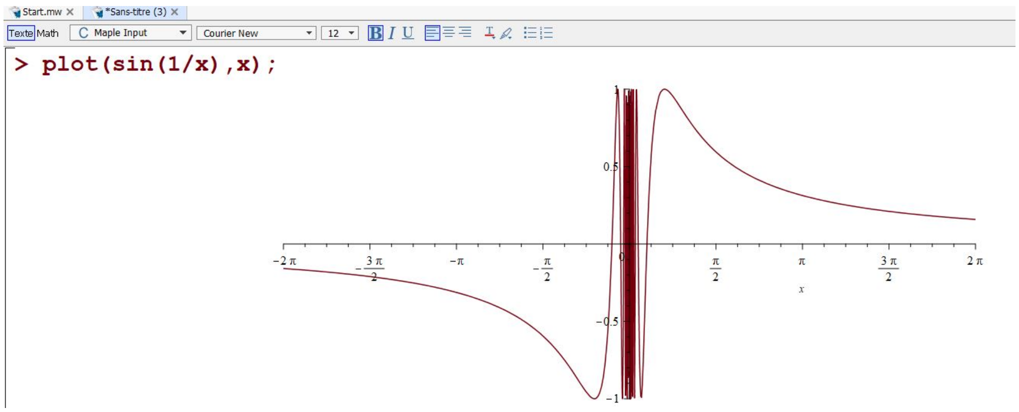


Figure 3.1 Graphique de la fonction $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ obtenu à l'aide du logiciel Maple

Le premier objectif de cette question est d'observer comment les participants réagissaient face à un graphique peu commun présenté par une technologie. Le logiciel à langage symbolique Maple a été choisi pour cette question puisque les étudiants des deux groupes (CAS et non CAS) ont déjà utilisé Maple dans le cadre de leur cours de calcul différentiel. Par exemple, font-ils confiance au résultat affiché par Maple ? Ont-ils le réflexe de remettre en question leurs propres résultats ? Le second objectif est d'observer l'aisance avec laquelle les étudiants manipulent la technologie afin de résoudre le « problème ».

La deuxième question est la suivante : Discuter $\lim_{x\to 0}\left(1 + x + \frac{1}{10^8 x}\right)$. L'objectif principal de cette question est d'observer en détail l'activité mathématique des étudiants lorsqu'ils désirent déterminer la valeur d'une limite. Pour ce faire, les étudiants du groupe CAS ont accès à leur calculatrice, mais pas à la fonction limite qui permet de calculer algébriquement la valeur d'une limite. Les étudiants du groupe non CAS n'ont accès qu'à leur calculatrice « personnelle », c'est-à-dire une calculatrice scientifique pour l'ensemble d'entre eux. L'intérêt avec cette fonction est double. Premièrement, au niveau numérique, lorsque l'on remplace

x par des valeurs près de 0, mais pas plus grandes qu'environ 10^{-8}, la fonction semble tendre vers 1, alors que la limite n'existe pas ($\lim_{x\to 0^+}\left(1+x+\frac{1}{10^8 x}\right)=\infty$, $\lim_{x\to 0^-}\left(1+x+\frac{1}{10^8 x}\right)=-\infty$).

Par ailleurs, lorsque l'on trace le graphique de la fonction à l'aide de la calculatrice sur une fenêtre assez grande, par exemple de -10 à 10, la courbe semble être une droite passant par le point $(0,1)$, ce qui contredit le résultat algébrique. Il est donc intéressant de voir comment l'étudiant navigue à travers les différents registres, tout en ayant un souci du mode de fonctionnement de la calculatrice.

L'analyse des entrevues s'effectue en deux temps. Tout d'abord, chaque entrevue est visionnée en entier en portant une attention particulière sur l'utilisation des différents registres de représentations et l'utilisation de la technologie par les étudiants des deux groupes. Ensuite, des extraits où l'activité mathématique est particulièrement présente dans la gestuelle et les paroles du participant sont analysés plus finement. L'analyse est faite en recherchant les faits saillants des propos des participants. Ceux-ci sont alors notés pour être ensuite comparés avec les propos des autres participants et les résultats obtenus lors de l'analyse des questionnaires.

L'ensemble de ces questions nous informent sur la façon dont la calculatrice influence la navigation des étudiants du groupe CAS à travers les différents registres de représentations. Elles permettent aussi d'identifier des similarités et différences en ce qui concerne l'activité mathématique des étudiants participant à cette étude.

CHAPITRE IV

ANALYSE

La présentation des analyses se déroulera ainsi. Tout d'abord, un portrait des étudiants et de leur utilisation de la calculatrice sera dressé. Par la suite, une analyse détaillée des propos des étudiants portant sur leur(s) conception(s) de la notion de limite sera présentée.

Dans un troisième temps, les analyses quantitatives et qualitatives des résultats sur les exercices sur les limites des questionnaires seront exposées. Il est important de spécifier que la plupart des analyses qualitatives de cette partie sont plutôt spéculatives et sont faites dans un but d'alimenter la réflexion sur les effets de l'environnement CAS sur l'activité mathématique.

Finalement, une brève présentation des résultats d'entrevues sera faite. Les faits saillants de ces entrevues seront soulignés et mis en lien avec les analyses reliées aux résultats des questionnaires.

4.1 Questionnaires

4.1.1 Portrait des habitudes d'utilisation de la calculatrice des participants

À la fin du questionnaire, une série de questions portant sur les habitudes d'utilisation de la calculatrice sont posées aux étudiants (voir Annexe A). Tout d'abord,

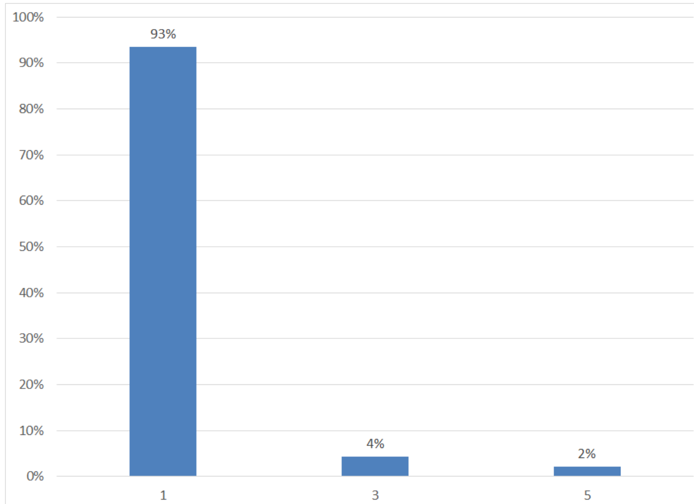


Figure 4.1 Répartition des étudiants du groupe CAS selon le nombre de sessions depuis lesquelles ils possèdent leur calculatrice symbolique

on rappelle que 88 étudiants du cégep ont participé à cette étude. 50 d'entre eux proviennent d'un cégep où le cours de calcul différentiel est offert dans un environnement CAS. Les 38 autres étudiants proviennent d'un cégep où ces derniers n'ont pas accès à une telle calculatrice en classe. Les différents résultats sont présentés dans les figures suivantes. Par ailleurs, parmi le groupe CAS, 56% d'entre eux ont déjà utilisé une calculatrice à affichage graphique au secondaire alors que seulement 29% des étudiants du groupe non CAS ont déjà utilisé une telle calculatrice durant leurs études secondaires ($p=0{,}01$).

La figure 4.3 montre que les fréquences d'utilisation des étudiants du groupe CAS restent sensiblement les mêmes que ce soit en classe ou à la maison. Cependant, pour le groupe non CAS, les habitudes sont plutôt inversées. Les étudiants de ce groupe semblent plus l'utiliser à la maison qu'en classe. Cela pourrait être dû au fait qu'aucune calculatrice n'est permise lors des évaluations dans leur cégep. Les enseignants ont affirmé qu'ils suggèrent donc de ne pas l'utiliser durant les cours.

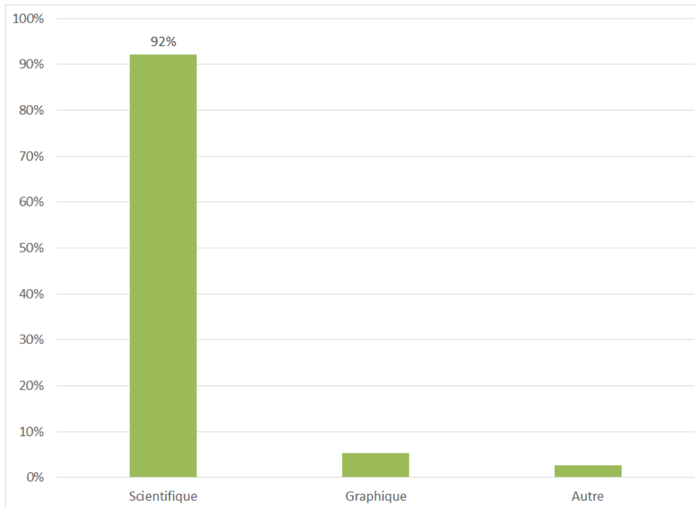
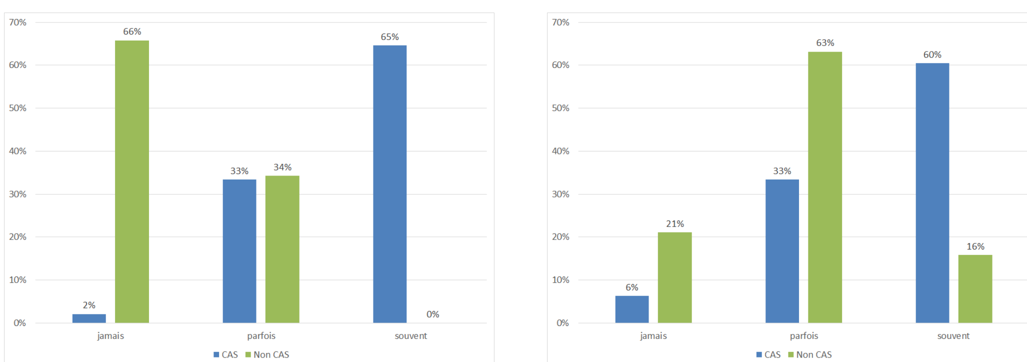


Figure 4.2 Répartition des étudiants du groupe non CAS selon le type de calculatrice qu'ils possèdent



a. b.

Figure 4.3 Répartition des étudiants selon la fréquence d'utilisation de la calculatrice a. en classe b. à la maison

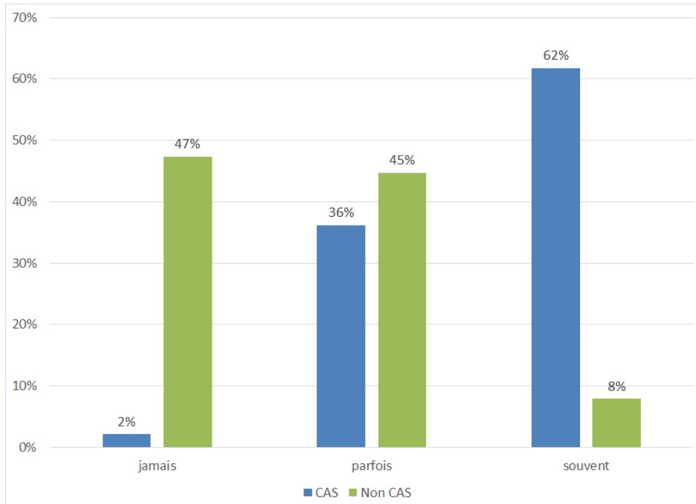


Figure 4.4 Répartition des étudiants selon la fréquence d'utilisation de la calculatrice pour effectuer des calculs numériques (résolution équations, calculs de limites et dérivées, etc)

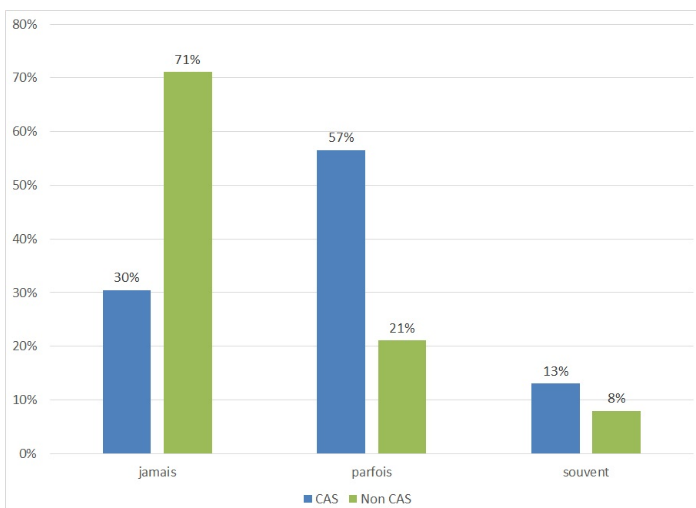


Figure 4.5 Répartition des étudiants selon la fréquence d'utilisation de la calculatrice pour effectuer une démonstration

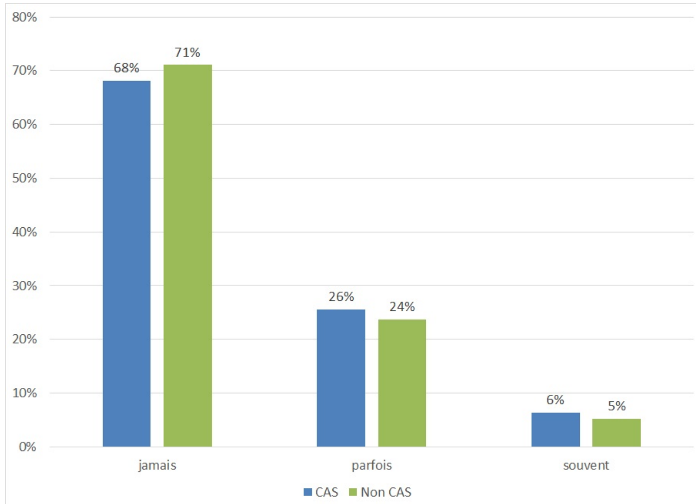


Figure 4.6 Répartition des étudiants selon la fréquence d'utilisation de la calculatrice pour programmer

En ce qui concerne les résultats de la figure 4.6, où les réponses « souvent » et « parfois » sont étonnamment fréquentes dans le groupe non CAS, il n'est pas spécifié dans la question que l'on parle de programmer *la* calculatrice. Certains étudiants peuvent donc avoir répondu « parfois » ou « souvent » en ayant en tête qu'ils utilisent une calculatrice pour effectuer certains calculs lorsqu'ils programment à l'ordinateur.

4.1.2 Analyse de la question 1 des versions A et B

La question 1 vise en quelque sorte à observer les mots, le vocabulaire que les participants utilisent pour décrire une limite de fonction. Elle s'énonçait ainsi : « *Tout d'abord, en vos mots, expliquez ce qu'est la limite d'une fonction* ». Il ne s'agit pas ici de déterminer la proportion de ceux-ci qui utilisent tel ou tel mot ou encore la proportion de ceux-ci qui ont telle ou telle idée de la notion de limite (la question 5 permet d'obtenir la réponse à cette question là), mais d'observer comment le participant navigue dans le registre de la langue naturelle lorsqu'on lui demande de décrire la notion de limite. Quelques grandes idées ressortent parmi les réponses des participants.

L'objet des propos des participants

En premier lieu, l'idée de mouvement est très présente dans les propos des participants des deux groupes. On retrouve des expressions comme « se rapproche », « tend vers », « ne passe pas par » et « sans jamais s'arrêter ». Si le participant n'utilise pas directement des mots décrivant un mouvement, il utilise des mots tels « comportement de la fonction », « par la gauche, par la droite », « la façon dont y varie ». Dans plusieurs cas, le participant a utilisé une combinaison de ces différents termes pour décrire une limite de fonction, par exemple « le comportement de la fonction lorsque x se rapproche d'une valeur. »

Tel que mentionné dans la section 1.2 du présent document, la définition de la limite d'une fonction présentée dans le manuel utilisé par les enseignants des participants est présentée dans le registre de la langue naturelle et utilise cette famille de mots (tend, se rapproche). On peut alors penser que ces mots sont utilisés pour discuter de la limite en classe et que les participants deviennent familiers avec ceux-ci, et ce peu importe s'ils évoluent dans un environnement CAS ou non au moment où cette étude a été effectuée.

Par ailleurs, la navigation dans le registre du graphique et du numérique peut stimuler ce genre de propos. En effet, lorsque l'on trace un graphique, on effectue un mouvement avec le crayon. Cela est encore plus frappant lorsqu'on trace une fonction rationnelle, par exemple $f(x) = \frac{1}{x}$, et que notre trait se rapproche de l'axe des x sans jamais y toucher. Par ailleurs, lorsqu'on construit une table de valeurs, généralement, on y présente des valeurs de la variable indépendante dans un ordre croissant ou décroissant, ce qui donne un effet de rapprochement, de mouvement. Bien évidemment, lorsque l'on génère le graphique d'une fonction avec la calculatrice, il n'y a pas de mouvement dans ce processus. Le graphique est présenté une fois sa construction effectuée, il est statique. Par contre, toujours avec la calculatrice, lors de la construction d'une table de valeurs, l'utilisateur doit lui-même choisir les valeurs de la variable indépendante, ce qui revient à peu près au même processus que de construire une table des valeurs à la main. Comme il ne semble pas y avoir de différence entre les deux groupes (60% des étudiants du groupe CAS et 55% des étudiants du groupe non CAS), l'utilisation de la technologie ne semble donc pas avoir d'effet remarquable sur l'utilisation de ce type de vocabulaire en particulier chez les participants.

On remarque aussi que Williams (1991) l'avait observé dans son étude, on décèle l'idée de la limite comme quelque chose d'« inatteignable ». On voit alors des expressions comme « sans jamais l'atteindre », « sans être directement sur le point », « sans y toucher » et « sans l'atteindre ». Dans ce cas-ci, parfois l'étudiant distingue s'il parle de la variable indépendante ou de la valeur de la fonction, parfois non. L'analyse des questionnaires montre une certaine différence entre le groupe CAS et le groupe non CAS ; 8% et 24% des participants respectivement ont utilisé des mots faisant partie de cette famille de mots. Cela peut s'expliquer par la nature des fonctions étudiées dans le cadre de l'introduction de la notion de limite. Par exemple, les fonctions présentées à la figure 4.7 de la page suivante présentent des caractéristiques très différentes quant aux valeurs de la fonction versus la valeur de la limite à plus ou moins l'infini. Il est possible, entre autres, lors de l'étude des asymptotes, que des fonctions rationnelles semblables à celle illustrée à la figure 4.7 a) soient utilisées pour illustrer celles-ci dans le registre graphique. En effet, ces fonctions présentent des variations assez simples et, donc, on peut facilement construire une table de valeurs et tracer un graphique sans l'aide de la technologie et, que dans ces cas, la fonction « n'atteint pas » la valeur de la limite. De plus, si l'on trace ces fonctions à la main, une façon possible de faire est de tracer d'abord l'asymptote horizontale et de s'assurer, lors du traçage de la fonction, de ne pas toucher celle-ci avec notre trait de crayon. Encore une fois, tout comme dans le cas de l'idée de mouvement dans la limite, tracer la fonction à la main pourrait accentuer cette impression de limite inatteignable. En contrepartie, l'utilisation de la CAS permet de tracer ou de construire rapidement des tables de valeurs de fonctions qui sont plus « complexes », y compris des fonctions comme celle de la figure 4.7 b) qui « croise » plusieurs fois la droite représentant l'asymptote horizontale et donc « atteint » la valeur de ses limites à l'infini. Il se peut donc que les étudiants n'évoluant pas dans un environnement CAS soient plus souvent en contact avec des fonctions qui n'atteignent pas la valeur de la limite et ainsi utilisent en plus grand nombre ces expressions faisant référence à une limite infranchissable.

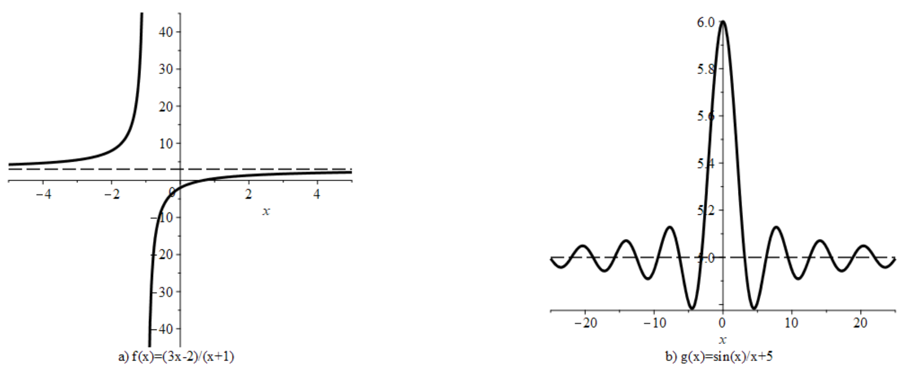


Figure 4.7 Exemples de fonction pour l'étude des asymptotes horizontales

Une tout autre façon d'aborder la notion de limite pour certains étudiants est de parler de son utilité, de l'aborder comme un outil qui sert à calculer ou déterminer autre chose et non comme un objet mathématique en soi. Des expressions comme « c'est un indicateur des moments où la fonction n'existe pas », « savoir y vaut quoi », « aller regarder (voir) ce qui se passe... », « ça sert à trouver la pente ou la continuité », « aller vérifier... », « permet à son utilisateur de voir plus précisément », « trouver les asymptotes » et « rechercher si la fonction existe » sont utilisées dans ce cas-là. Il peut ici y avoir un mélange dans la description de ce qu'est une limite. Prenons par exemple, un participant qui aurait écrit quelque chose semblable à « C'est le comportement de la fonction quand x tend vers une valeur. Cela sert à trouver les asymptotes. » La première partie de cet énoncé décrit la nature de la limite, alors que la seconde partie donne un exemple de son application, de son utilité.

Dans le cadre de cette étude, il y a une certaine différence entre le groupe CAS et le groupe non CAS pour ce qui est de ce dernier aspect ($p = 0,02$). En effet, 44% des participants du groupe CAS utilisent des mots qui indiquent l'utilité de la notion de limite, alors que seulement 21% des participants du groupe non CAS le font. Cela pourrait s'expliquer par le fait que dans un environnement papier, il semble naturel de prendre du temps pour effectivement *calculer* des limites qu'on souhaite connaître « pour elles-mêmes », pour ainsi dire. La calculatrice est un outil qui permet de connaître instantanément cette valeur, sans calculs. Et il est plus normal dans cet environnement de travailler avec la limite comme un « moyen » de faire quelque chose et non comme une fin en soi. Par exemple, on effectue le calcul de limite sur la calculatrice afin d'identifier les asymptotes, afin de déterminer la continuité de la fonction à l'étude, de calculer la dérivée en un point, etc. On peut aussi penser que lors de la résolution de problèmes concernant la dérivée (analyse de fonction, optimisation, taux liés, etc), l'utilisation de la calculatrice pour effectuer le calcul de limites pourrait permettre à l'étudiant de se concentrer sur la compréhension et la résolution du problème. La limite se présente donc comme un outil pour la résolution des problèmes où celle-ci n'est qu'une étape, une notion mathématique parmi tant d'autres dans l'activité mathématique.

Dans cet ordre d'idée, il serait possible que l'utilisation de la calculatrice pour le calcul de la limite dans le cadre de l'étude d'une fonction permette à l'étudiant de considérer la fonction comme un objet d'étude en soi plus rapidement que celui ou celle qui doit déterminer la valeur des limites à la main. Autrement dit, le fait que plus de participants du groupe CAS parlent de l'utilité de la limite dans l'étude des fonctions pourrait être un signe que ceux-ci se concentrent plus, au moment de répondre au questionnaire, à l'étude des fonctions plutôt que l'étude de la notion de limite, comme pourraient le faire les participants du groupe non CAS.

D'ailleurs, quelques participants du groupe d'étude CAS semblent confondre la notion de limite d'une fonction avec celle de dérivée. On voit apparaître alors les termes « pente », « tangente », « limite instantanée » [1]ou encore « le h tend vers / la valeur de h » [2]. Nous n'avons par observé de tels exemples dans le groupe non CAS. Cela aussi pourrait être un signe que certains étudiants sont concentrés sur un autre objet d'étude, dans ce cas-ci la notion de dérivée.

Les participants parlent aussi parfois d'« approximation », d'un « zoom pour avoir la valeur la plus près, la plus exacte possible » ou « de voir plus précisément ». Par contre, fait intéressant, on ne retrouve ces mots que dans les réponses de trois participants du groupe CAS [3]. Ces termes ne sont pas sans rappeler les tables de valeurs qui sont à l'occasion construites pour présenter la valeur d'une limite. Cependant, contrairement à l'idée de mouvement présentée précédemment, les valeurs sont ici « figées » et présentent une approximation de la valeur de la fonction jugée acceptable par l'utilisateur. Cette acceptabilité peut être jugée, entre autres, par le nombre de décimales présentées ou encore par le nombre de décimales qui se répètent d'une approximation à l'autre. Ce nombre de décimales

2. Le participant voulait peut-être parler de la vitesse instantanée, qui est une description de la dérivée abordée au niveau collégial.

2. La défintion algébrique de la dérivée est généralement présentée au cégep sous la forme $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

pouvant être très grand et la simplicité avec laquelle on construit cette table avec la calculatrice pourrait favoriser cette idée selon laquelle la valeur de la limite peut passer par une approximation. Il en est de même lorsque l'on utilise les fonctionnalités graphiques de la calculatrice pour évaluer une limite. Une façon d'estimer la valeur de cette limite est d'effectuer un zoom sur le graphique en ajustant les paramètres de la fenêtre d'affichage. La façon de procéder et l'objet d'étude interchangeraient de rôle, c'est-à-dire faire un zoom pour estimer la valeur de la limite versus la limite un zoom sur la fonction.

D'un autre côté, lorsque les méthodes algébriques de calcul de limite enseignées en classe ne permettent pas de déterminer la valeur d'une limite, l'étudiant pourrait se tourner vers la construction d'une table de valeurs pour estimer la valeur de cette limite. On peut penser ici aux limites telles $\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ ou $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ dont les valeurs ne se déterminent pas avec l'une ou l'autre des méthodes algébriques vues dans le cadre du cours de calcul différentiel au cégep. Cela pourrait donc expliquer en partie pourquoi les étudiants du groupe Non CAS considèrent aussi la limite comme une approximation à la question 5 des questionnaires.

Toujours en ce qui a trait aux manières dont les participants parlent de limite, il y a les termes qui sont plus difficiles, voir impossibles à interpréter sans un échange avec le participant. Ce sont des termes qui sont difficilement associables avec les grandes catégories d'idées présentées par Williams (1991) par exemple. Pour n'en présenter que quelques-uns, un participant du groupe non CAS a écrit « Comment la fonction se comporte dans les limites de son domaine ». Ici, il utilise des mots communs comme comporte, limites et domaine. Par contre, il est difficile d'interpréter ce que sont les limites du domaine. Peut-être veut-il dire les

3. Cependant, tel que nous le verrons à l'analyse de la question 5, peu importe leur groupe d'appartenance, environ 50% des participants ont sélectionné « approximation » pour décrire la notion de limite.

valeurs de la variable indépendante pour lesquelles la fonction est discontinue. Il semble y avoir une confusion entre la signification du mot limite dans la langue courante, c'est-à-dire les limitations, les restrictions et la définition mathématique de la limite.

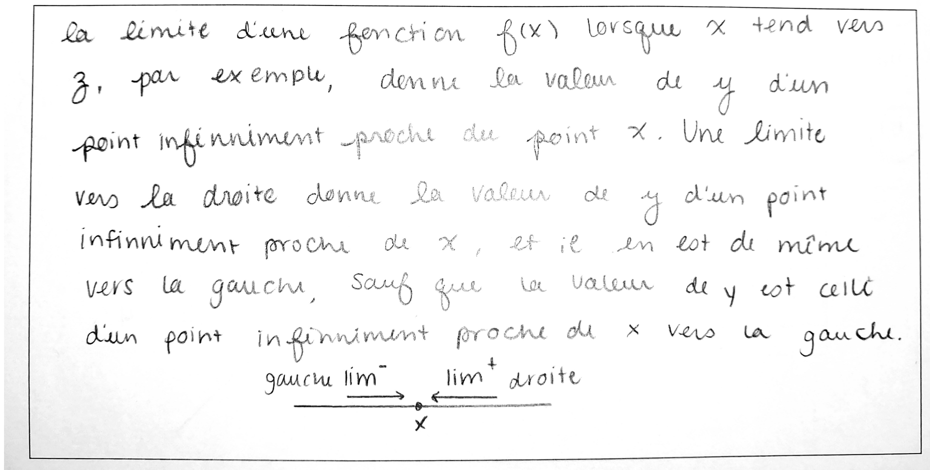
Une autre description, provenant d'un participant du groupe CAS, présente aussi des propos plus difficiles à interpréter : « C'est aller regarder infiniment près d'un point. Cela permet d'aller (*sic*) la valeur « imaginaire » d'un point d'une fonction. » La première phrase de cette description présente des termes plutôt communs. Par contre, plus loin, le participant parle de la valeur imaginaire d'un point. Le fait qu'il mette le mot imaginaire entre guillemets pourrait porter à penser qu'il ne croit pas que ce soit le mot juste, qu'il est conscient que ce n'est pas un terme très formel pour décrire la limite. D'ailleurs, c'est un mot jamais utilisé par les autres participants de cette étude. Que voulait-il dire par imaginaire ? On pourrait émettre l'hypothèse que ce participant croit que la limite ne peut être atteinte et donc cette valeur est imaginaire, elle provient de notre calcul et non de la fonction en soi. Cela pourrait aussi signifier qu'il parle des discontinuités de la fonction, valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ n'existe pas. La valeur de la limite serait donc « imaginaire » par rapport à une limite qui « existerait ». D'autre part, l'emploi du mot regarder (d'ailleurs, on peut penser que le mot qui manque entre « aller » et « point » est « voir ») présente un autre aspect intéressant. En effet, comme mentionné précedemment, la production d'un graphique à l'aide d'une technologie permet de regarder, de voir rapidement de « plus en plus près » d'un point de la fonction. Et si le participant parlait des discontinuités de la fonction, on peut « zoomer » afin d'estimer cette valeur qui n'est pas illustrée sur le graphique, cette valeur « imaginaire ».

Un autre participant du groupe CAS a écrit « La limite d'une fonction c'est l'addition des plus petites valeurs. » Ces termes pourraient faire penser au processus d'approximation où l'on peut approcher une valeur de x en augmentant la précision par le nombre de décimales. Par exemple, si l'on désire s'approcher de la valeur de $x = 2$ pour approximer $f(2)$, on peut effectuer $f(1,9)$, $f(1,99)$, $f(1,999)$, $f(1,9999)$, etc. Entre chaque approximation, on ajoute $0,9$, puis $0,09$, $0,009$ et $0,0009$ à la valeur de x. Ce sont, peut-être du point de vue de l'étudiant, des plus petites valeurs. Cette technique peut être utilisée pour la construction d'une table de valeurs. L'utilisation de la CAS, où il faut entrer manuellement les valeurs de la variable indépendante, pourrait stimuler l'utilisation de ce genre de termes pour décrire la limite.

La forme des propos des participants

Dans les derniers paragraphes, le contenu des propos des participants ont été présentés. À présent, les manières dont les propos sont présentés seront soulignées. Tout d'abord, certains participants ont explicitement utilisé un autre registre de représentations pour compléter leur explication. Quelques-uns ont utilisé un graphique, certains l'algèbre et d'autres un schéma. Le cas illustré à la figure 4.8, provenant d'un questionnaire du groupe CAS, est particulièrement intéressant. Quoique la description dans le registre de la langue manque un peu de cohérence, on peut voir que les propos de ce participant évoluent dans un registre fonctionnel tel que proposé par Hitt (2006, 2007). Le schéma pris à lui seul pourrait être considéré comme incomplet. En effet, si on le considérait comme dans le registre graphique, plusieurs éléments manqueraient : l'axe des ordonnées, la courbe d'une fonction, une illustration quelconque du voisinage, etc. Cependant, ce dernier vient appuyer les propos présentés précédemment et prend son sens à ce moment-là.

Certains participants ont intégré en entier la notation algébrique de la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ (ou une variante). D'autres ont plutôt utilisé qu'une partie de la notation algébrique, par exemple « $x \to a$ », « a^+ », « a^- ». Un des avantages


la limite d'une fonction f(x) lorsque x tend vers 3, par exemple, donne la valeur de y d'un point infinniment proche du point x. Une limite vers la droite donne la valeur de y d'un point infinniment proche de x, et il en est de même vers la gauche, sauf que la valeur de y est celle d'un point infinniment proche de x vers la gauche.

gauche lim$^-$ lim$^+$ droite

x

Figure 4.8 Exemple de description utilisant plusieurs registres de représentation extrait du questionnaire d'un participant du groupe CAS

d'utiliser plusieurs registres est d'être efficace dans la communication. On peut penser que les participants qui utilisent plusieurs registres reconnaissent cette efficacité et l'intègrent dans leurs propos par souci de clarté, de rapidité, d'efficacité. En outre, ils sélectionnent les éléments qu'ils considèrent significatifs dans l'un ou l'autre des registres. Il y a donc des signes de navigation, de coordination entre les différents registres malgré que l'on soit au stade des registres fonctionnels selon Hitt (2006,2007).

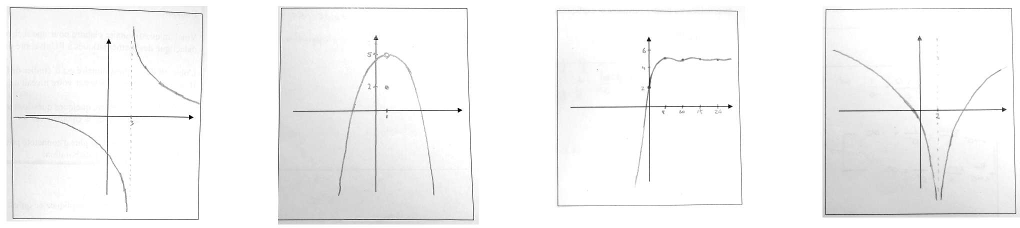
Parfois, la navigation entre deux registres n'est pas explicite, elle peut se cacher dans les propos du langage courant. Par exemple, un participant du groupe non CAS a mentionné le fait qu'« [...] on peut assumer que la limite existe et donc la fonction n'a pas de distinction visuelle ». On assume ici que le participant faisait référence au graphique de la fonction. Il arrive également à quelques reprises qu'un participant décrive en mots une définition algébrique. Par exemple, dans le cas où le participant parle de la dérivée et qu'il utilise la variable h, celle qui est employée de façon répandue dans la définition algébrique de la dérivée. En effet, la définition algébrique de la dérivée peut être récitée de cette façon « la limite quand h tend vers 0 de f de x plus h moins f de x sur h » par opposition à une définition de la dérivée dans le langage naturel qui peut être « la pente de la tangente », « le taux de variation instantané » ou « le taux de variation de la fonction pour des intervalles de la variable indépendante infiniment petits. »

Si l'on regarde l'ensemble des cas où les participants ont utilisé plusieurs registres pour parler de la limite, on retrouve 26% des participants dans le groupe CAS et 13% dans le groupe non CAS. Bien que cette différence ne soit pas statistiquement significative ($p = 0,14$), elle pourrait être le reflet d'une différence entre les deux groupes en ce qui a trait à l'activité mathématique. En effet, si un étudiant évoluant dans un environnement CAS inclut régulièrement dans son activité mathématique la navigation entre plusieurs registres, cela pourrait se refléter dans sa description de la limite. Comme l'accès aux registres graphiques et numériques est facilité par la technologie, cela pourrait expliquer pourquoi plus de participants du groupe CAS présentent plusieurs registres dans leurs propos.

4.1.3 Analyse de la question 2 de la version A

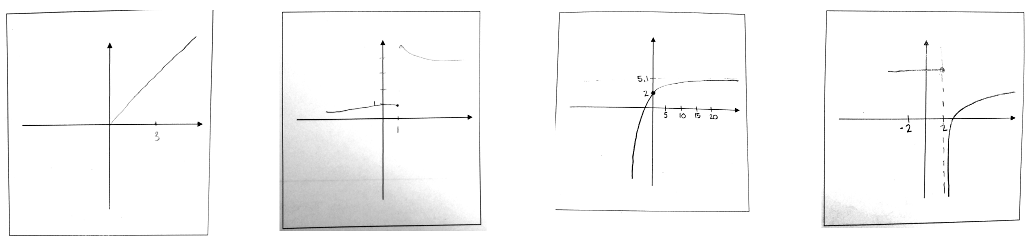
Pour cette question, on demandait aux participants de tracer un graphique pouvant représenter la limite d'une fonction qui était présentée dans un registre autre que graphique (langage naturel, algébrique, numérique). Pour que le graphique soit considéré comme correct, on devait retrouver tous les critères énoncés et qu'une fonction soit représentée (certains participants ont tracé des graphiques de relations n'étant pas des fonctions). Les figures 4.9 et 4.10 montrent des exemples de graphiques qui étaient respectivement acceptés et rejetés.

Les résultats de la question révèlent peu de différences entre les deux groupes quant au nombre de questions réussies. En effet, un test du Khi-deux indique que



a b c d

Figure 4.9 Exemples de graphiques acceptés



a b c d

Figure 4.10 Exemples de graphiques rejetés

la proportion des participants ayant réussi les quatre questions est sensiblement la même dans les deux groupes (28% CAS, 15% non CAS, $p = 0,30$).

Par contre, de manière générale, cette question a mieux été réussie au sein du groupe CAS. Ceci pourrait être expliqué par le fait qu'il est simple et rapide de tracer le graphique d'une fonction à l'aide de la calculatrice symbolique. Cette fonctionnalité peut être utilisée pour visualiser la limite demandée et devenir ainsi une sorte d'outil de validation. Par ailleurs, lorsque le graphique est tracé à l'aide d'un outil technologique, une réflexion doit avoir lieu sur le rendu de ce graphique. Est-ce que la fenêtre d'affichage du graphique est adéquate ? Il y a-t-il des discontinuités dans cette fonction ? Si oui, sont-elles bien affichées ? La limite représentée graphiquement correspond-elle à celle demandée algébriquement ? Pour faire cette réflexion, il faut avoir conscience des éléments significatifs de chacun des registres et établir les correspondances entre ceux-ci d'un registre à l'autre.

Par ailleurs, lorsqu'un étudiant doit transmettre un graphique à une autre personne, son enseignant par exemple, il le fait rarement directement en transmettant sa calculatrice. Il doit donc interpréter et traduire le graphique affiché par la calculatrice pour en tracer un sur papier. Il ne s'agit pas en effet d'un exercice bête de copier/coller. Il doit y avoir une réflexion sur le domaine de la fonction, sa continuité, l'échelle utilisée, etc. Une fois cet exercice fait, l'étudiant peut transposer ces habiletés pour tracer à la main, sans le support d'une technologie, le graphique d'une fonction. Comme il est plus facile d'accéder à un graphique pour les participants du groupe CAS, ceux-ci pourraient être donc plus familiers avec le registre graphique.

Par ailleurs, les deux groupes ne semblent pas avoir réussi les mêmes questions. Le tableau 4.1 montre ces différences. L'énoncé a) était présenté dans le registre du langage naturel, les énoncés b) et d) étaient présentés dans le registre de l'algèbre alors que l'énoncé c) était présenté dans le registre numérique. Le registre dans lequel l'énoncé est présenté ne semble donc pas expliquer la différence entre les deux groupes.

Énoncé	CAS	Non CAS	Khi-deux
a)	88%	50%	p=0,005
b)	72%	35%	$p = 0,01$
c)	48%	30%	$p = 0,22$
d)	64%	55%	$p = 0,54$

Tableau 4.1 Proportions des participants de chaque groupe ayant réussi les énoncés de la question 2 de la version A du questionnaire

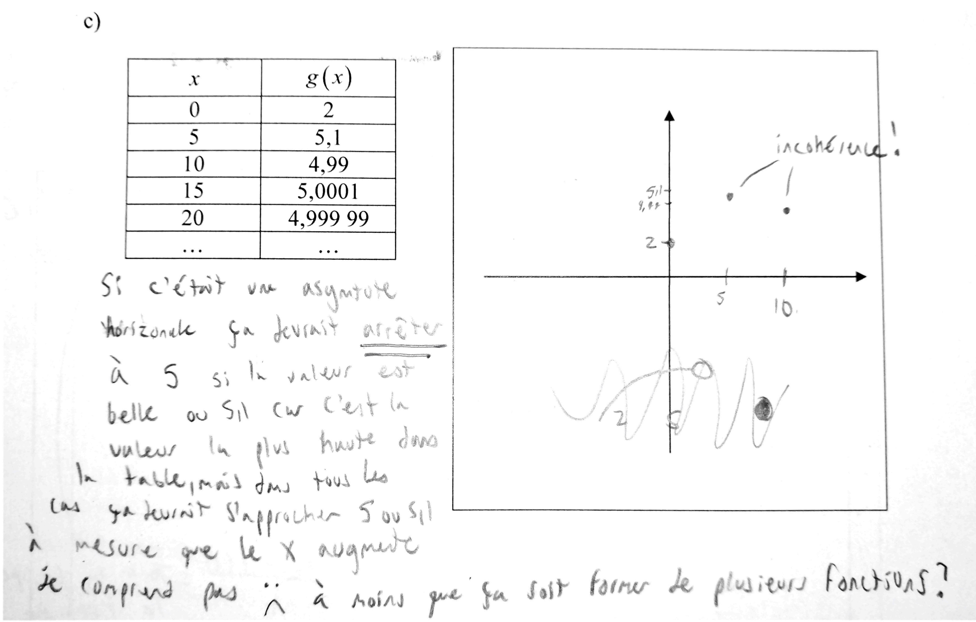
Regardons en détail chacun des énoncés. Pour l'énoncé a) présenté dans le registre de la langue, la plupart des étudiants du groupe non CAS (7 sur 10) n'ayant pas réussi cette question ont présenté une fonction dont la limite existe en $x = 3$ et

2 étudiants sur 10 n'ont pas répondu à la question. Du côté du groupe CAS, un seul étudiant sur trois n'ayant pas réussi la question a présenté une fonction dont la limite existe en $x = 3$, alors que deux étudiants n'ont rien tracé.

Pour ce qui est de l'énoncé b), les éléments inexacts étaient semblables dans les deux groupes. Parfois, la courbe tracée n'était pas une fonction (1 sur 10 CAS et 3 sur 11 non CAS), parfois la limite n'existait pas (3 sur 10 CAS et 3 sur 11 non CAS) et parfois l'étudiant confondait variable dépendante et indépendante dans l'évaluation de la fonction et/ou de la limite (3 sur 10 CAS et 3 sur 11 non CAS).

Les résultats des deux derniers énoncés semblent montrer que les étudiants des deux groupes font sensiblement les mêmes erreurs, avec une plus grande prévalence chez les étudiants non CAS. On peut penser que l'ensemble des étudiants des deux groupes ont fait à un moment ou l'autre de leur apprentissage de la notion de limite ce genre d'erreurs, mais qu'une plus grande partie des étudiants du groupe CAS ont surmonté ces erreurs. L'utilisation de la CAS pourrait donc favoriser la coordination des registres en permettant aux étudiants de constater et surmonter ces erreurs plus rapidement que les étudiants du groupe non CAS.

Deux éléments intéressants ressortent de l'analyse de la question c). Tout d'abord, parmi les participants du groupe CAS, 12% d'entre eux ont tracé une courbe qui ne « franchit » pas l'asymptote horizontale. Dans le groupe non CAS, 20% d'entre eux ont tracé ce même genre de courbe. Ces résultats rappellent ceux de la question 1 où 8% des participants du groupe CAS et 24% des participants du groupe non CAS avaient décrit la limite d'une fonction comme étant inatteignable. La table de valeurs présentée dans cet énoncé fait référence à une fonction comme celle mentionnée dans la section 1.1 (voir figure 4.7), c'est-à-dire une fonction qui diffère des fonctions modèles présentée pour le calcul de la limite, comme les polynômes et les fonctions rationnelles. Il est possible qu'une plus grande variété de fonctions soit abordée lorsque la technologie est utilisée en classe, plus précisément, les fonctions transcendantes qui ne sont pas abordées dans le calcul algébrique des limites de fonctions. Cela peut donc expliquer la différence entre les deux groupes pour cet aspect-là. La figure 4.11[4] montre la production d'un étudiant du groupe non CAS. Cet étudiant se retrouve embêté par le fait que la fonction devrait « arrêter » avant la valeur 5, comme c'est le cas dans des fonctions rationnelles simples. Il propose alors comme solution de créer deux fonctions, mais ne semble pas convaincu par cette porte de sortie.



x	$g(x)$
0	2
5	5,1
10	4,99
15	5,0001
20	4,999 99
…	…

Figure 4.11 Extrait de la production d'un étudiant du groupe non CAS pour la question 2 de la version A du questionnaire

Un autre aspect intéressant est que plusieurs ont commencé à reporter les points de la table de valeurs dans le graphique de l'énoncé c), mais n'ont pas poursuivi leur démarche pour clairement représenter la limite (38% des étudiants du groupe

4. Les traits de soulignement ont été ajoutés par l'auteure lors du travail d'analyse.

CAS n'ayant pas réussi l'énoncé c) et 14% des étudiants du groupe non CAS). Ces étudiants ont effectué ce que Duval nomme du *codage*. Leur tracé a été effectué avec un manque de coordination entre le registre numérique et le registre graphique. Certains éléments sont absents comme un tracé de courbe (figure 4.11), une oscillation claire ou encore une oscillation qui devenait de moins en moins prononcée. Cependant, par leur production, ces étudiants semblent admettre que la limite peut être « franchie » par la courbe. Considérant que les participants du groupe CAS ont mieux réussi cette question (48% versus 30% pour l'énoncé c)), on peut penser aussi que l'ensemble des étudiants de ce groupe sont plus avancés dans le processus de coordination des registres numériques et algébriques au sens de Duval dans le cadre de cet énoncé. En effet, 48% de ceux-ci seraient à l'étape de coordination et 8% à l'étape de *codage* contre 30% et 10% respectivement dans le groupe non CAS. Encore une fois, il est possible qu'il y ait une exposition plus fréquente à une plus grande variété de fonctions chez les étudiants du groupe CAS et que cette exposition favorise le passage de l'étape du *codage* vers l'étape de coordination des registres.

En ce qui concerne l'énoncé d), c'est un énoncé tout de même assez classique de limite infinie dans le registre de l'algèbre et les deux groupes ont bien réussi cette question. D'autre part, parmi les étudiants n'ayant pas réussi cette question, plusieurs l'ont partiellement réussi en ce sens qu'ils ont tracé une courbe à gauche ou à droite de l'asymptote, mais non des deux côtés. Si l'on considère que le participant réussit tout de même, alors 92% des étudiants du groupe CAS ont réussi cette énoncé et 80% des étudiants du groupe non CAS. Encore ici, les étudiants du groupe CAS semblent donc un peu mieux réussir que les étudiants du groupe non CAS.

En tout et partout, il semble que le dernier énoncé soit le mieux réussi dans les deux groupes si l'on considère les nouvelles proportions. D'un autre côté, l'énoncé

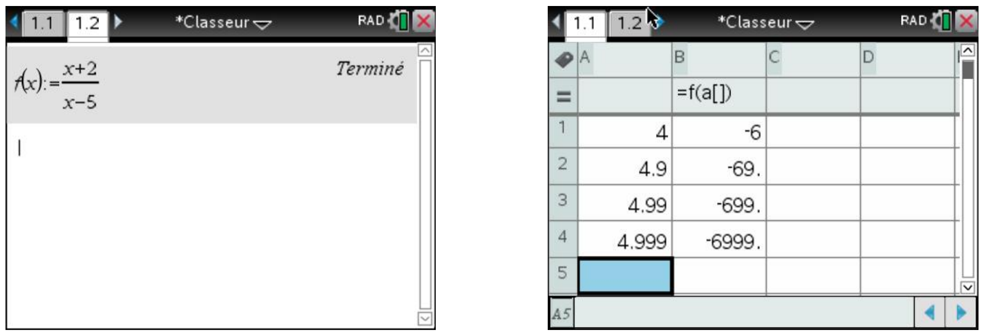


Figure 4.12 Captures d'écran de la calculatrice présentant la construction d'une table de valeurs

dans le registre numérique est le moins réussi. L'énoncé présenté dans le registre du numérique arrivant en dernier dans les deux groupes pourrait être dû en partie par le fait que construire une table de valeurs, avec ou sans l'aide de la technologie, soit plutôt laborieux. En effet, même si la calculatrice détermine la valeur de la fonction pour une valeur de variable indépendante donnée, pour créer une table de valeurs, l'utilisateur doit changer de module dans la calculatrice, créer la fonction et l'enregistrer en mémoire et ensuite entrer les valeurs de la variable indépendante dans la table (voir figure 4.12). D'autre part, ce registre ne donne pas de valeur exacte comme pourrait le donner le registre de l'algèbre. C'est peut-être donc un registre qui inspire moins confiance aux étudiants.

4.1.4 Analyse de la question 2 de la version B

Pour cette question, on donnait un énoncé au participant dans un registre quelconque et on lui demandait de sélectionner, parmi quatre autres énoncés présentés dans un registre différent, tous ceux qui pouvaient être associés à l'énoncé principal.

Pour réussir la question a), le participant devait sélectionner seuls les énoncés

ii) et iv). Pour la question b), on considérait que le participant avait réussi la question s'il sélectionnait minimalement les énoncés ii) à iv). En effet, l'énoncé i) correspond à la définition formelle de la limite qui n'est pas abordée au cégep. Il était donc probable qu'un étudiant ne choisisse pas cet énoncé, non pas parce qu'il ne coordonne pas les différents registres, mais plutôt parce qu'il n'avait jamais rencontré cette définition. Pour la question c), le participant devait sélectionner les énoncés i), iii) et iv) pour que l'on considère la question comme réussi. Un étudiant qui sélectionnait l'énoncé ii) en plus des trois autres réussissait tout de même la question. En effet, il est considéré que cette « erreur » est plus au niveau de la notation de la limite que de la coordination des registres.

Énoncé	CAS	Non CAS	Khi-deux
a)	48%	28%	$p = 0,18$
b)	60%	28%	$p = 0,04$
c)	28%	6%	S/O [5]

Tableau 4.2 Proportions des participants de chaque groupe ayant réussi les énoncés de la question 2 de la version B du questionnaire

En tenant compte de ces critères, le tableau 4.2 présente la proportion des étudiants ayant réussi chaque question dans chacun des deux groupes. Bien qu'il semble que le groupe évoluant dans un environnement CAS semble mieux réussir l'ensemble des énoncés, seul l'énoncé b) présente une différence significatice.

Si on observe plus en détail chaque énoncé, quelques faits intéressants ressortent. En ce qui concerne la question a), un étudiant sur 25 (4%) dans le groupe CAS et 5 étudiants sur 18 (28%) dans le groupe non CAS ont sélectionné à la fois l'énoncé ii) et l'énoncé iii), ce qui laisse croire que certains étudiants admettent qu'une limite peut avoir deux valeurs différentes à la fois. Quoiqu'il est impossible d'effectuer

5. Le test du Khi-deux n'a pas pu être effectué car au moins l'une des fréquences théoriques est inférieure à 5

un test de Khi-deux sur ces données, il semble que le groupe évoluant dans un environnement CAS aurait moins tendance à faire ce genre d'erreur. Une bonne coordination entre le registre du graphique et celui de l'algèbre pourrait être la cause de cette tendance. Une autre cause pourrait être le type de question proposée ici, c'est-à-dire un choix de réponse. Ce type de question pourrait favoriser une activité mathématique linéaire, c'est-à-dire que l'étudiant considère chacune des propositions individuellement, une après l'autre, sans avoir une vue d'ensemble du problème. Les étudiants du groupe CAS pourraient donc avoir une activité mathématique plus « spirale » ou plus « globale ». Produire un résultat sur la calculatrice, naviguer entre les différents modules de celle-ci n'est pas une activité linéaire. Il n'y a pas de marche précise à suivre. Il faut plutôt avoir une idée d'ensemble du fonctionnement de ces modules et des productions qu'ils présentent. On peut alors penser que travailler avec une telle technologie favorise une activité mathématiques plus « globale » et, par le fait même, une meilleure coordination des registres.

Pour ce qui est de la question b), malgré qu'il y ait une différence marquée entre les groupes quant au nombre de participants ayant réussi la question, il en est autrement si l'on considère chacun des énoncés individuellement (voir tableau 4.3). Il semble donc que la différence entre les deux groupes ne soit pas causée par un énoncé en particulier, bien que l'énoncé iv) semble avoir causé un peu plus de difficulté chez les deux groupes. Il est intéressant aussi de remarquer que les énoncés ii) et iv) sont tous deux dans le registre graphique. Cela pourrait donc vouloir dire que les difficultés rencontrées lors de ce problème ne sont pas liées à un registre en particulier.

Finalement, en ce qui concerne la question c), il semble que ce soit l'énoncé i) qui ait causé le plus de difficulté aux participants (voir tableau 4.4), plus particulièrement chez ceux du groupe non CAS. L'énoncé iv) semble avoir aussi causé

Énoncé	CAS	Non CAS	Khi-deux
ii)	80%	78%	S/O
iii)	92%	83%	S/O
iv)	76%	56%	0,16

Tableau 4.3 Proportions des participants de chaque groupe ayant sélectionné les énoncés de la question 2b) de la version B du questionnaire

Énoncé	CAS	Non CAS	Khi-deux
i)	36%	22%	S/O
iii)	84%	78%	S/O
iv)	60%	33%	0,08

Tableau 4.4 Proportions des participants de chaque groupe ayant sélectionné les énoncés de la question 2c) de la version B du questionnaire

des tracas, quoique légèrement plus marqué dans le groupe non CAS que dans le groupe CAS. Ces deux énoncés présentent le même type de fonction, c'est-à-dire dont la valeur limite à plus ou moins l'infini est atteinte à plusieurs reprises par la fonction. Ce résultat concorde avec celui présenté dans la section 4.1.1 où l'on observe plus d'étudiants dans le groupe non CAS qui utilisent des mots en lien avec l'idée d'une limite inatteignable que dans le groupe CAS.

Par contre, il est surprenant de constater qu'une certaine proportion de participants (32% dans le groups CAS et 33% dans le groupe non CAS) sélectionnaient l'énoncé i), mais non l'énoncé iv) et vice versa. Il y a donc là une lacune au niveau de la coordination entre les registres numériques et graphiques pour ce type de limite peu importe le groupe d'étude.

4.1.5 Analyse de la question 3 de la version A

Dans la question 3 de cette version du questionnaire, on demandait aux participants de déterminer la limite de trois fonctions trigonométriques. Généralement, la détermination de ces limites n'est pas abordée de façon algébrique et formelle dans le cours de calcul différentiel au cégep.

On observait trois éléments dans leurs réponses. Tout d'abord, quelle méthode ou registre le participant a utilisé principalement pour déterminer la limite. Les méthodes possibles étaient : l'algèbre, le graphique, le langage naturel, la calculatrice ou sans objet. Pour que l'on considère que la méthode utilisée soit la calculatrice, il fallait que le participant indique explicitement que la calculatrice avait été utilisée. Par ailleurs, les participants n'ont pas indiqué quelles fonctionnalités de la calculatrice ils utilisaient, alors les différentes méthodes possibles ont été regroupées dans une seule catégorie, soit calculatrice. Lorsque qu'il n'y avait aucune trace de démarche, par exemple lorsqu'il y avait le résultat seul ou l'énoncé et le résultat seuls, lorsqu'il était écrit « je ne sais pas », « je ne me souviens plus », etc, ou qu'il n'y avait rien d'écrit, on indiquait alors sans objet pour la méthode de résolution.

Ensuite, on notait si le résultat était exact. Quatre résultats étaient possibles : correct, incorrect, incomplet ou sans objet. Dans le cas d'incomplet, le participant présentait un début de démarche correct, mais ne complétait pas la résolution. Cela pouvait être dû au manque de temps. S'il n'y avait pas de réponse, on notait sans objet.

Finalement, on recherchait des traces de validation de la solution dans un autre registre que celui utilisé pour la résolution. Si traces il y avait, on notait le registre ou la méthode de la même manière que pour la résolution principale.

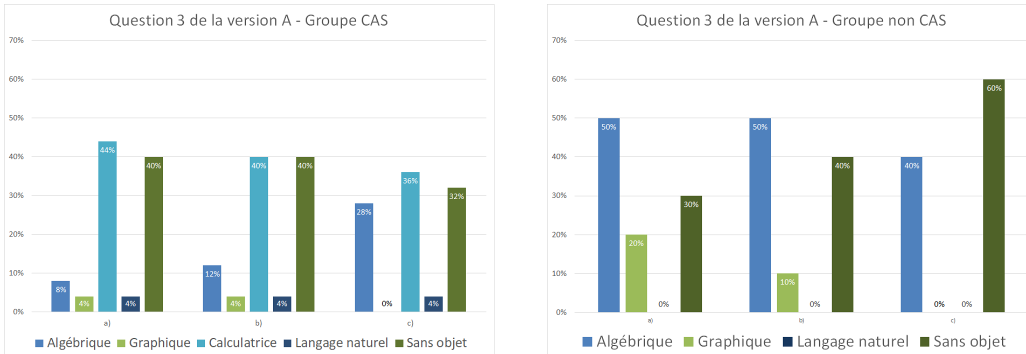


Figure 4.13 Proportions des étudiants selon la méthode utilisée à la question 3 de la version A du questionnaire

La figure 4.13 montre une différence marquée entre les deux groupes quant aux méthodes utilisées. En effet, alors que le groupe n'ayant pas accès à la calculatrice symbolique utilise pour la plupart d'entre eux une méthode algébrique, le groupe CAS utilise plutôt une des fonctionnalités de la calculatrice tels le calcul algébrique ou le graphique de la fonction. Comme la limite de ce genre de fonctions est peu ou pas abordée dans le cours de calcul différentiel au cégep, cela est peu surprenant. Les étudiants ayant accès à la calculatrice, n'étant probablement pas en mesure d'associer une méthode algébrique connue avec la limite présentée, utilisent la calculatrice sachant que celle-ci pourra leur donner le résultat. Ils ne cherchent pas nécessairement à associer une méthode déjà connue à la limite présentée, ne sachant sans doute pas s'ils arriveront au résultat ou pas. D'un autre côté, les étudiants de l'autre groupe tentent d'associer une méthode connue avec la limite présentée, parfois en réussissant, parfois non.

En ce qui concerne la réussite des étudiants à la question, cela nous intéresse peu hormis le cas où il était impossible d'identifier la méthode de résolution (« sans objet »). Le tableau 4.5 montre que les étudiants du groupe CAS réussissent mieux la question 3 malgré l'absence de trace de démarche. On peut donc émettre l'hypothèse qu'une certaine portion d'entre eux utilisent la calculatrice pour résoudre les différents problèmes, malgré qu'il ne le soit pas indiqué dans leur questionnaire. La proportion d'étudiants utilisant la calculatrice pour résoudre la question 3 pourrait être donc plus élevée que ce qui est présenté dans la figure 4.13 (68% contre 44% pour l'énoncé a), 72% contre 40% pour l'énoncé b) et 60% contre 36% pour l'énoncé c)).

Énoncé	CAS	Non CAS
a)	60%	0%
b)	80%	0%
c)	75%	0%

Tableau 4.5 Proportions des participants de chaque groupe sans méthode de résolution apparente ayant réussi la question 3 de la version A

Finalement, nous n'avons détecté des traces de validation que chez deux participants, un cas dans le groupe non CAS et l'autre dans le groupe CAS. Le premier présentait une validation dans le langage naturel et le second dans le registre de l'algèbre. Cependant, des validations peuvent être effectuées par les étudiants sans qu'ils en laissent les traces. Plus particulièrement chez les étudiants du groupe CAS qui pourraient tracer un graphique sur leur calculatrice sans reproduire ce dernier sur le questionnaire. Un étudiant n'ayant pas accès à une calculatrice devrait faire une validation graphique mentale s'il ne laisse pas de traces sur le questionnaire. Dans ces conditions, on peut imaginer qu'il est plus facile pour un étudiant du groupe CAS de valider son résultat dans un autre registre.

4.1.6 Analyse de la question 4 de la version A et de la question 3 de la version B

Ces questions étaient très semblables dans les deux versions du questionnaire. On donnait l'équation ainsi qu'une vue d'ensemble du graphique d'une fonction.

On demandait alors aux participants de déterminer différentes limites de cette fonction à l'aide de la méthode de leur choix. L'analyse de ces questions a été faite de la même façon que la question 3 de la version A du questionnaire.

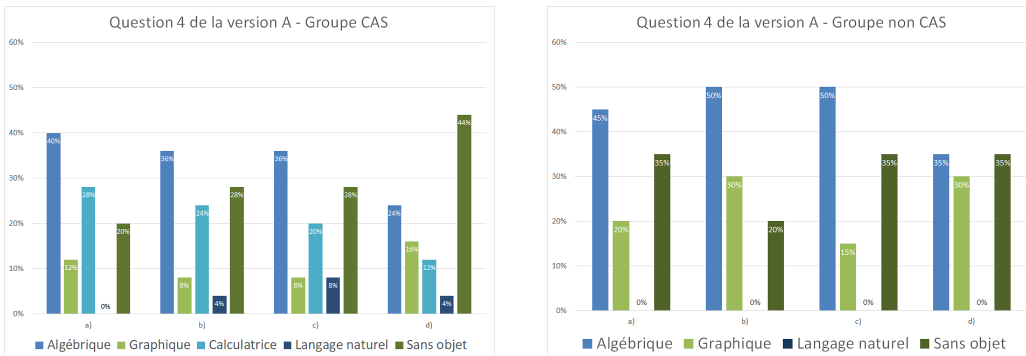


Figure 4.14 Proportions des étudiants selon la méthode utilisée à la question 4 de la version A du questionnaire

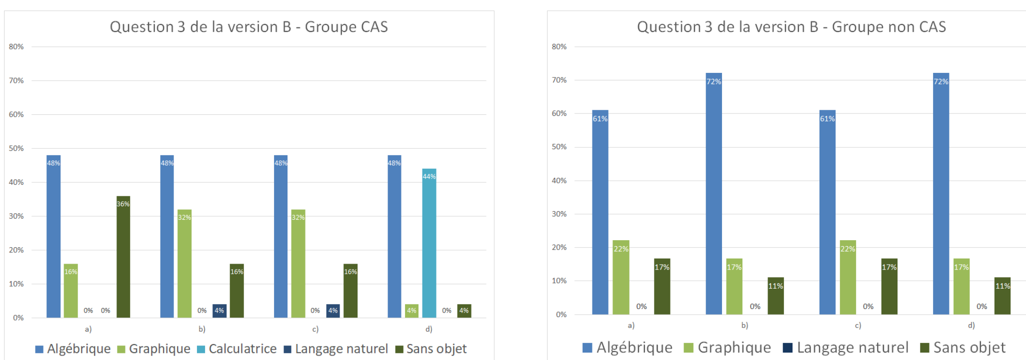


Figure 4.15 Proportions des étudiants selon la méthode utilisée à la question 3 de la version B du questionnaire

Cette question révèle plusieurs points intéressants. Tout d'abord, d'un groupe à l'autre, à l'exception de la question 4d) de la version A du questionnaire, on remarque que le registre de l'algèbre est celui utilisé le plus souvent par les participants pour résoudre les problèmes demandés et ce, peu importe la question et le groupe d'observation (CAS ou non CAS) (voir figures 4.14 et 4.15). Par ailleurs, un test de khi-deux pour chacune des questions confirme qu'il n'y a pas de différence de proportion d'un groupe à l'autre ($p > 0,05$). Alors, pour ce genre de questions, on pourrait infirmer l'hypothèse selon laquelle les étudiants ayant accès à une calculatrice symbolique délaissent le registre de l'algèbre au profil de cette dernière.

			Nb d'étudiants ayant réussi	Total	Pourcentage
Version A Question 4	a)	CAS	5	10	50%
		Non CAS	4	9	44%
	b)	CAS	9	9	100%
		Non CAS	6	10	60%
	c)	CAS	8	9	89%
		Non CAS	6	10	60%
	d)	CAS	5	6	83%
		Non CAS	2	7	29%
Version B Question 3	a)	CAS	12	12	100%
		Non CAS	7	11	64%
	b)	CAS	12	12	100%
		Non CAS	9	13	69%
	c)	CAS	12	12	100%
		Non CAS	8	11	73%
	d)	CAS	11	12	92%
		Non CAS	3	13	23%

Tableau 4.6 Proportions des étudiants ayant utilisé le registre algébrique qui ont réussi la question 4 de la version A et la question 3 de la version B du questionnaire

Dans le même ordre d'idée, on peut observer dans le tableau 4.6 que les participants ayant accès à la calculatrice symbolique et utilisant le registre de l'algèbre pour résoudre ces questions réussissent tout aussi bien, sinon mieux, les problèmes que les participants n'y ayant pas accès. Ceci peut donc venir infirmer une seconde hypothèse selon laquelle les étudiants évoluant dans un environnement CAS présentent plus de lacunes en algèbres que les étudiants qui évoluent dans un environnement sans technologie de ce type. Il semblerait donc que les étudiants ayant accès à la calculatrice utilisent celle-ci comme un complément aux techniques crayon-papier plutôt qu'en remplacement de celles-ci.

Finalement, un autre aspect fort intéressant est révélé par cette question. Nous avions émis comme hypothèse que les étudiants ayant accès à la calculatrice symbolique pourraient avoir tendance à valider plus fréquemment leurs réponses étant donné l'accessibilité aisée à une telle vérification. Cependant, les résultats à cette question ne nous montrent peu ou pas de différences entre les deux groupes. Afin d'affirmer qu'un participant effectuait une validation de sa solution, il devait y avoir des traces de résolution dans un autre registre que celui utilisé pour la démarche de résolution principale. Or, dans la version A du questionnaire, un participant sur 20 du groupe Non CAS a laissé des traces de validation dans la démarche d'une des sous questions et quatre participants sur 25 du groupe CAS ont laissé des traces de validation dans l'une ou l'autre des sous questions. Quant à la version B du questionnaire, un participant sur 18 du groupe non CAS a laissé des traces de validation dans la démarche d'une des sous questions et quatre participants sur 25 du groupe CAS ont laissé des traces de validation dans l'une ou l'autre des sous questions. On voit donc que, dans un groupe ou l'autre, les participants n'ont généralement pas laissé de traces de validation de leurs résultats.

Commentaires sur les questions 3 et 4 de la version A et 3 de la version B

Malgré que les deux questions aient été analysées de la même façon, les enjeux étaient très différents. En effet, pour les questions 4 de la version A et 3 de la version B, les limites demandées étaient des limites familières pour les participants, des limites « classiques ». Cela a eu comme effet que les deux groupes ont principalement utilisé le registre de l'algèbre pour la résolution de ces limites, malgré que le graphique soit présenté. Ils semblent donc faire confiance aux méthodes algébriques enseignées en classe, peu importe s'ils ont accès à une calculatrice à langage symbolique ou non. Pour la question 3 de la version A, comme la limite ne leur est pas familière, ils ont utilisé la méthode qui leur est le plus accessible, soit l'algèbre pour le groupe non CAS (il peut être ardu de tracer un graphique ou construire une table de valeurs à la main) et la calculatrice pour le groupe CAS.

4.1.7 Analyse de la question 4 de la version B

Cette question présentait un problème du domaine de la chimie décrit dans le registre de la langue naturelle. Par contre, l'élément permettant de répondre aux trois sous-questions (l'équation de la fonction représentant la situation) était présenté dans le registre de l'algèbre. Dans le premier énoncé, on demandait aux étudiants d'émettre une hypothèse quant à la quantité finale du produit et d'expliquer leur raisonnement. Pour réussir cette question, l'étudiant devait répondre 2. Dans le second énoncé, on demandait d'écrire l'expression algébrique permettant de calculer cette quantité. Les seules expressions acceptées étaient $\lim_{t\to\infty} x(t)$ et $\lim_{t\to\infty} 2 - \dfrac{1}{kt+\frac{1}{2}}$. Pour ce qui est du dernier énoncé, on demandait aux étudiants de tracer l'esquisse d'un possible graphique de la fonction $x(t)$. Pour que le tracé soit accepté, il fallait qu'il présente une fonction croissante passant par le point $(0,0)$ et ayant une asymptote horizontale en $y = 2$ (on ne s'intéressait pas à la présence ou non d'asymptote verticale).

Pour cette question, nous avons tout d'abord dénombré le nombre de participants dans chacun des groupes ayant réussi les trois sous-questions (a), b) et c)). On rappelle que les trois sous-questions étaient le même problème demandé, sois la détermination d'une limite à l'infini, dans trois registres différents (langue naturelle, algèbre et graphique). Cette donnée nous fournit une piste sur la coordination des registres des participants. En effet, si un étudiant était en mesure de répondre à la même question dans trois registres différents, on peut émettre l'hypothèse qu'une certaine coordination des registres de représentations sémiotiques s'effectue chez cet étudiant.

Dans le groupe CAS, 7 étudiants sur 25 (28%) ont réussi les trois sous-questions, alors qu'aucun des 18 étudiants du groupe non CAS n'a réussi à la fois les trois sous-questions. Si on ne considère pas les participants n'ayant pas répondu à la question, les ratios deviennent alors 7 étudiants sur 19 (37%) pour le groupe CAS et aucun étudiant sur 12 pour le groupe non CAS. Il semble donc qu'il y ait une plus grande proportion d'étudiants dans le groupe CAS qui présentent une certaine coordination des registres de la langue, de l'algèbre et du graphique pour cette question en particulier. Cependant, il est à considérer que cette question était la dernière du questionnaire et que certains étudiants n'ont pas eu le temps de compléter le questionnaire à l'intérieur de la période allouée par l'enseignant. [6]

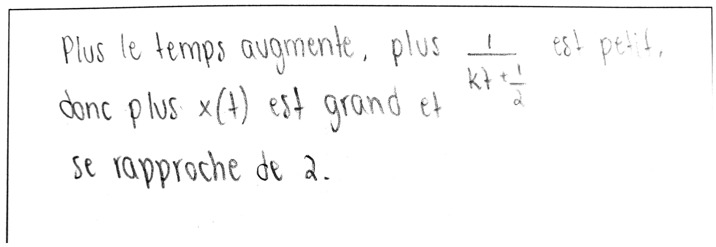
Énoncé	CAS	Non CAS
a)	44%	17%
b)	52%	17%
c)	44%	6%

Tableau 4.7 Proportions des participants de chaque groupe ayant réussi les sous-questions de la question 4 de la version B

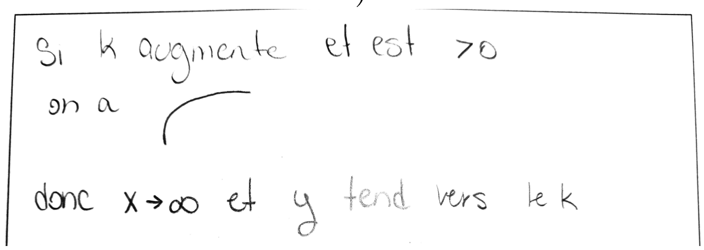
Par la suite, nous avons regardé chaque sous-question individuellement. Les résultats se trouvent dans le tableau 4.7. Par ailleurs, nous avons porté une attention particulière au raisonnement décrit par les étudiants pour répondre à l'énoncé a). Puisque l'on demandait aux participants de décrire clairement leur raisonnement, ils ont tous utilisé le langage naturel pour répondre à cette question. Nous avons donc essayé de déceler dans leur réponse, des traces de démarche dans un autre registre. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.8. Parmi les étudiants qui

6. Un test du Khi-deux révèle que la proportion des participants n'ayant pas répondu à la question est sensiblement la même dans les deux groupes (CAS : 24%, Non CAS 33%, $p = 0,50$)

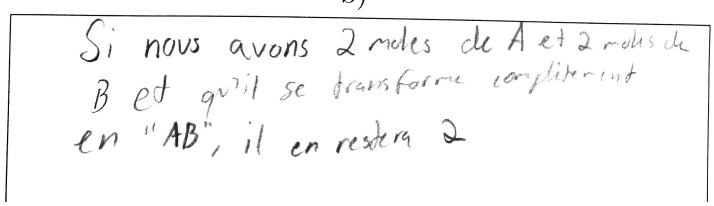
ont fait un raisonnement algébrique, certains ont fait les calculs complets de la limite et d'autres ont décrit un raisonnement basé sur la valeur de $x(t)$ quand t devient très grand (voir figure 4.16a)).



a)



b)



c)

Figure 4.16 Exemples de raisonnement basé sur a) le domaine algébrique b) un hybride de deux domaines c) le contexte

Un étudiant du groupe CAS a utilisé un raisonnement hybride en combinant les registres algébriques et graphiques (figure 4.16b) de la page suivante). Il est intéressant de voir ici que l'étudiant n'a pas utilisé le registre graphique au sens de Duval, mais plutôt un registre de représentation fonctionnelle au sens de Hitt. Malgré cela, la combinaison de ces représentations permet une compréhension suffisante de ses propos.

Raisonnement	CAS	Non CAS
Algébrique	48%	11%
Graphique	0%	0%
Numérique	0%	0%
Calculatrice	0%	0%
Selon le contexte	12%	44%
Hybride	4%	0%
Sans objet	36%	44%

Tableau 4.8 Répartition des participants de chaque groupe selon leur raisonnement à la question 4 a) de la version B

On considérait qu'un étudiant utilisait le contexte pour résoudre le problème s'il ne mentionnait pas l'équation de $x(t)$ ou qu'il faisait clairement appel à ses connaissances (intuitions) en chimie (figure 4.16c)). Il semble que ces étudiants, lorsqu'ils sont dans l'impossibilité de faire des calculs algébriques, ne considèrent pas d'autres registres valides pour résoudre un problème mathématique. Le contexte d'une réaction chimique, qui leur était pour la plupart connu, leur inspirait plus confiance. Par contre, cela pourrait aussi être un signe que les étudiants tentent de valider ou appuyer leur activité mathématique parce qu'ils connaissent « en dehors » des mathématiques. Cette question était la seule parmi toutes les questions des deux versions du questionnaire qui leur permettait de façon évidente d'aller piger dans leurs connaissances d'un autre domaine que celui des mathématiques. Ces étudiants cherchent alors peut-être à rattacher les mathématiques avec leur compréhension concrète de ce phénomène chimique. Cependant, parmi les étudiants ayant utilisé le contexte pour leur raisonnement, un seul dans chacun des groupes a réussi la question (1 sur 3 CAS, 1 sur 8 non CAS). Si l'étudiant n'expliquait pas son raisonnement et donnait la réponse seule, on notait sans objet. On observe qu'aucun étudiant a utilisé le registre numérique ou a indiqué avoir utilisé la calculatrice pour résoudre ce problème.

Tel que mentionné précédemment, on demandait aux étudiants de ne pas effectuer les calculs pour répondre à cet énoncé. Il est intéressant de voir que, dans le groupe CAS, aucun des étudiants n'a mentionné avoir utilisé la calculatrice pour trouver la limite et donc ces derniers semblent avoir respecté la consigne sous cet angle-ci [7]. Par contre, parmi ces mêmes étudiants, certains (3 sur 25) ont fait les calculs algébriques complets pour obtenir la solution. Dans le groupe non CAS, 1 étudiant sur 18 a aussi fait les calculs complets. Il semble donc que, pour ces étudiants, leur seul raisonnement possible, ou du moins celui qui leur est le plus naturel, soit un raisonnement algébrique basé sur des calculs. Ce résultat vient rejoindre celui des questions 4 version A et 3 version B qui laissent croire que les étudiants utilisent la calculatrice en complément au calcul algébrique et non à la place de celui-ci.

	CAS	Non CAS
Réussi	52%	17%
Non Réussi	24%	44%
Sans objet	24%	39%

Tableau 4.9 Répartition des participants de chaque groupe selon leur résultat à la question 4 b) de la version B

Pour le second énoncé, en plus d'observer si l'étudiant avait réussi la question (tableau 4.9), on regardait si ce dernier utilisait l'expression mathématique de limite. En effet, il se peut qu'un étudiant n'ait pas réussi la question, mais ait eu une intuition qu'il s'agissait d'une limite (tableau 4.10). Pour ce dernier tableau, on peut émettre l'hypothèse que les proportions sont les mêmes dans les deux groupes. Les réponses données par les étudiants n'ayant pas réussi la question sont aussi semblables dans les deux groupes. Certains ont calculé $x(0)$, certains ont cherché une asymptote verticale et d'autres ont tenté de résoudre l'équation

7. Il se peut que, parmi les étudiants du groupe CAS n'ayant pas décrit leur raisonnement, certains d'entre eux aient utilisé la calculatrice

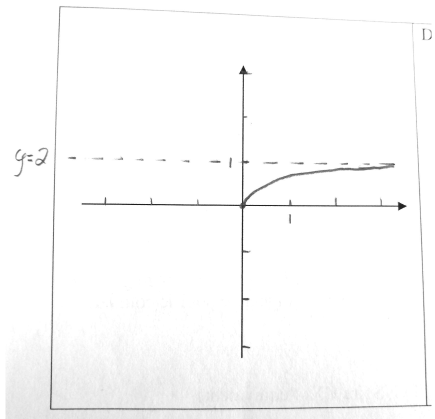
$2 = 2 - \dfrac{1}{kt + \frac{1}{2}}$ et cherchaient donc à trouver le moment où la réaction était terminée et qu'il y avait deux moles du produit final.

	CAS		Non CAS	
	Nb d'étudiants	Pourcentage	Nb d'étudiants	Pourcentage
Limite	1	17%	0	0%
Autre	5	73%	8	100%
Total	6	100%	8	100%

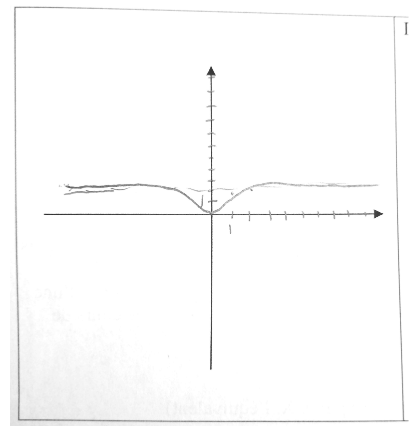
Tableau 4.10 Répartition des participants de chaque groupe n'ayant pas réussi la question selon le type d'expression utilisée

Finalement, on peut voir que la partie graphique est celle qui a causé plus de difficultés, en particulier aux participants du groupe non CAS. En effet, il est possible que certains participants du groupe CAS aient tout simplement reproduit un graphique produit par leur calculatrice, ce qui expliquerait les meilleurs résultats pour ce groupe. Par contre, il se pourrait aussi que l'environnement CAS leur permette de côtoyer des graphiques plus régulièrement, plus facilement que les partipants de l'autre groupe. Comme mentionné pour la question 2 de la version A du questionnaire, cette familiarisation leur permettrait alors de tracer un graphique plus aisément. En effet, lorsqu'un graphique est tracé à l'aide de la calculatrice, il est rarement satisfaisant et l'étudiant doit souvent ajuster la fenêtre pour avoir un aperçu adéquat. Ce travail d'ajustement de fenêtre est lié de près à la notion de limite autour d'un point, à l'infini et de continuité. Par ailleurs, lorsque le graphique est produit, il est impossible de le transmettre à une autre personne, par exemple le professeur. L'étudiant doit donc le retranscrire en portant une attention particulière aux éléments significatifs.

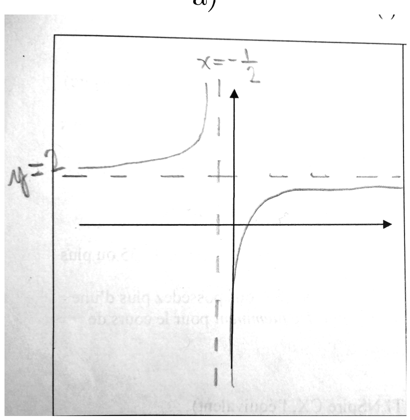
On rappelle que, pour réussir cette question, l'étudiant devait présenter l'esquisse le graphique d'une fonction une fonction croissante passant par le point $(0, 0)$ et ayant une asymptote horizontale en $y = 2$. Cependant, nous avons aussi considéré



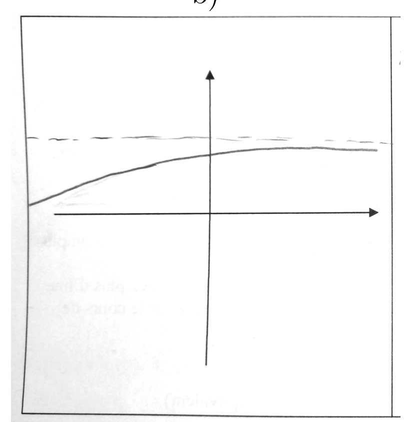
a)



b)



c)



d)

Figure 4.17 Exemples de graphique à l'énoncé c) de la question 4 a) et b) réussis, c) et d) presque réussis certains graphiques comme étant « presque » réussis. Ceux-ci devaient présenter 2 des 3 éléments demandés (croissante, asymptote horizontale en $y = 2$ et passant pr $(0, 0)$). La figure 4.17 présente les différents types d'esquisses réussies présentées. La figure 4.17 a) présente une réponse qui tient compte du domaine algébrique de la fonction alrs que la figure 4.17 b) présente une réponse qui tient compte également du domaine contextuel. Malgré que le graphique b) soit « meilleur », les deux graphiques étaient acceptés.

En incluant ces critères dans l'analyse, nous obtenons les résultats présentés dans le tableau 4.11. Avec ces nouveaux critères, le groupe CAS semble toujours avoir plus d'aisance à tracer des graphiques à partir d'un énoncé à contexte ($p = 0, 04$).

	CAS	Non CAS
Réussi	44%	6%
Presque réussi	8%	17%
Non réussi	20%	22%
S/O	28%	56%

Tableau 4.11 Répartition des participants de chaque groupe pour l'énoncé c)

Maintenant, observons en détail les démarches décrites par les étudiants pour parvenir à tracer leur esquisse. Pour être considérée comme algébrique, la démarche devait présenter des traces de calculs, par exemple, $x(0)$, certaines limites, etc. Lorsque l'étudiant présentait une table de valeurs, sa démarche était alors qualifiée de numérique. Lorsque l'étudiant décrivait le comportement de la fonction à l'aide de mots, ou encore décrivait le contexte chimique du problème, on considérait alors qu'il utilisait le registre de la langue naturelle. Certains étudiants ont présenté une démarche hybride : deux étudiants ont utilisé le registre numérique et celui de l'algèbre, alors qu'un étudiant a utilisé le registre de la langue naturelle et celui de l'algèbre. Lorsqu'il n'y avait aucune description, on classait cet étudiant dans la catégorie sans objet. Le tableau 4.12 présente les résultats.

Raisonnement	CAS	Non CAS
Algébrique	4%	11%
Numérique	4%	11%
Langage	28%	28%
Calculatrice	0%	0%
Hybride	12%	0%
Sans objet	52%	50% [8]

Tableau 4.12 Répartition des participants de chaque groupe selon leur raisonnement à la question 4 c) de la version B

Parmi les 11 étudiants du groupe CAS ayant réussi la question, 2 d'entre eux n'ont laissé aucune explication de leur démarche. On peut émettre l'hypothèse qu'ils ont attribué une valeur arbitraire à la constante k et tracer un graphique à l'aide de leur calculatrice. Il se peut à ce moment que les étudiants hésitent à écrire qu'ils aient utilisé la calculatrice croyant que cette méthode n'est pas valide, qu'elle ne démontre pas qu'ils ont compris ou réussi la question.

4.1.8 Analyse de la question 5 des versions A et B

La question 5 visait essentiellement à identifier les conceptions des participants par rapport à la notion de limite. On rappelle les différents énoncés :

1. Une limite décrit le comportement d'une fonction lorsque x se rapproche d'une certaine valeur.
2. Une limite est une valeur que la fonction ne peut dépasser.
3. $\lim_{x\to a} f(x)$ signifie qu'il est possible de rendre la distance entre $f(x)$ et la limite arbitrairement petite en choisissant x aussi près de a que l'on veut.

8. Le pourcentage inférieur de S/O dans la démarche par rapport à celui dans la production d'un graphique (tableau 4.11) est expliqué par le fait qu'un étudiant a fait une table de valeurs sans tracer de graphique

4. Une limite est une valeur dont la fonction se rapproche, mais n'atteint jamais.
5. Une limite est une approximation qui peut être aussi précise que l'on souhaite.

Énoncé	CAS	Non CAS	Khi-deux
1	94%	92%	S/O
2	10%	13%	$p = 0,64$
3	60%	58%	$p = 0,84$
4	48%	68%	$p = 0,06$
5	50%	47%	$p = 0,81$

Tableau 4.13 Proportions des participants de chaque groupe ayant sélectionné les énoncés de la question 5 des versions A et B du questionnaire

Le tableau 4.13 résume les résultats. Tout d'abord, on remarque qu'il y a peu ou pas de différences de conceptions entre les deux groupes participant à l'étude. Par ailleurs, il n'est pas surprenant que le plus fort pourcentage se trouve pour l'énoncé 1 puisque c'est la définition de la limite d'une fonction qui est généralement enseignée au niveau collégial. Cependant, il est intéressant de constater que la majorité des participants ont également sélectionné la définition formelle de la définition de la limite. Comme le constatait Williams (1991), la majorité des étudiants admettent plus d'une définition de la limite d'une fonction (82 sur 87 participants, un non répondant). Nous émettons ici l'hypothèse que la coordination des différents registres chez les étudiants n'est pas encore au point étant donné qu'ils en sont à leur première rencontre avec cette notion. Cela peut stimuler l'idée que la limite peut être plusieurs « choses » à la fois, selon que l'on observe dans le registre graphique, numérique, algébrique ou du langage naturel. Parmi ceux et celles ayant sélectionné qu'un énoncé, 1 sur 5 a choisi l'énoncé 3 et les 4 autres ont sélectionné le premier énoncé.

4.1.9 Discussion

Suite à cette analyse des questionnaires, revisitons les questions de recherche. Tout d'abord, de manière générale, il semble que les étudiants du groupe CAS ont une meilleure coordination des registres de représentations lors de l'exécution des exercices présentés que les étudiants du groupe non CAS. Non seulement ils réussissent mieux de façon générale, mais ils sont plus nombreux à réussir une question unique demandant de produire plusieurs registres différents (question 4 version B).

Par ailleurs, il semble que plus d'étudiants du groupe CAS voient la limite comme un outil servant à trouver ou calculer autre chose. Il se pourrait donc que l'utilisation de la technologie ait favorisé chez ce groupe le passage à une étape suivante quant à la notion de la limite, c'est-à-dire que celle-ci n'est plus seulement un exercice d'algèbre, mais un objet mathématique du calcul différentiel pouvant servir à étudier d'autres objets mathématiques, telles les asymptotes, les variations d'une courbe, la dérivée, etc.

D'autre part, lorsque l'on demande de trouver la valeur d'une limite dont la forme est familière (techniques algébriques vues en classe), le registre de l'algèbre reste le registre de prédilection dans les deux groupes. Pour résoudre les question 3 de la version B et 4 de la version A, les étudiants du groupe CAS ayant utilisé le registre de l'algèbre sont plus nombreux que ceux ayant utilisé la calculatrice. D'autre part, ces étudiants réussissent tout aussi bien, sinon mieux, dans le registre d'algèbre que les étudiants du groupe non CAS.

D'un autre côté, lorsque la limite demandée est moins familière, la différence est marquée entre les deux groupes. En effet, une plus grande proportion d'étudiants du groupe CAS utilisent la calculatrice (sans spécifier la fonctionnalité précise) pour résoudre ce genre de limite, alors que les étudiants du groupe non CAS utilisent le registre de l'algèbre. Ces derniers tentent plutôt de rattacher la nouvelle limite à une forme de limite familière pour pouvoir la résoudre algébriquement.

Un autre aspect intéressant qui a été révélé lors de cette analyse concerne la validation des résultats. Ayant accès à plusieurs registres de représentation rapidement avec la CAS, on pourrait s'attendre à ce que les étudiants du groupe CAS laissent plus de traces de validation de leurs résultats, ce qui n'a pas été le cas lors de cette étude. D'ailleurs, très peu d'étudiants parmi les deux groupes ont laissé de telles traces. Par contre, cela ne signifie pas qu'ils n'effectuent aucune forme de validation lorsqu'ils répondent aux différents exercices demandés. L'analyse des entrevues permettra d'éclaircir un peu cette question

4.2 Entrevues

L'analyse des entrevues se faisait en portant une attention particulière à l'activité mathématique des participants, tout en observant les manières dont s'effectuait la coordination des différents registres selon Duval. L'objectif principal de cette analyse purement qualitative était d'observer des différences et similarités dans l'activité mathématique des participants des deux groupes.

Malheureusement, peu de participants du groupe non CAS se sont portés volontaires pour les entrevues. Il a donc été difficile d'identifier des stratégies dans ce groupe. Malgré ce fait, les entrevues ont permis, entre autres, d'appuyer certaines hypothèses émises dans la section précédente. Par ailleurs, il a été possible d'identifier, à certains moments, comment l'utilisation de la CAS influence l'activité mathématique des participants.

Lors de l'analyse, les participants du groupe CAS seront désignés par C1, C2, C3, C4 et C5 alors que les participants du groupe non CAS seront désignés par N1, N2 et N3.

4.2.1 Les différents registres comme outil de validation

Les entrevues ont permis de discuter plus en détail avec les participants des outils de validation qu'ils utilisent. Si certains ont affirmé ne pas vérifier les résultats qu'ils obtenaient, d'autres ont exposé leurs stratégies.

À la question 3 de la version B du questionnaire et la question 4 de la version A du questionnaire, on donnait l'équation ainsi qu'une vue d'ensemble du graphique d'une fonction. On demandait alors aux participants de déterminer différentes limites de cette fonction à l'aide de la méthode de leur choix. Une des participants du groupe CAS a affirmé avoir calculé les limites avec la commande limite de la calculatrice[9](C3), puis validé avec le graphique qu'on leur fournissait. Deux autres participants du même groupe ont plutôt fait le contraire, c'est-à-dire qu'ils ont obtenu le résultat en observant le graphique, puis a validé avec la commande limite sur la calculatrice (C1 et C5). Dans les trois cas, les participants ont utilisé une fonction algébrique, la commande limite, de la calculatrice et non une fonction numérique ou graphique par exemple.

Dans le groupe non CAS, un seul des étudiants (N1) a affirmé faire une certaine validation de ses résultats, alors qu'un autre a affirmé ne pas valider ses résultats. Le premier étudiant trouvait ses résultats à l'aide d'une démarche algébrique et validait par la suite avec le graphique présenté dans l'énoncé. Le second étudiant obtenait son résultat graphiquement et ne validait pas ses résultats.

On constate donc que les registres utilisés pour valider les résultats à cette ques-

9. On rappelle que cette fonction de la calculatrice utilise des algorithmes pour calculer de manière algébrique la valeur d'une limite demandée

tion, ainsi que l'ordre dans lequel ils sont utilisés sont semblables d'un groupe à l'autre. La calculatrice agit donc ici comme un facilitateur dans le registre algébrique.

4.2.2 L'activité mathématique lors de la résolution d'énoncés moins familiers

Certains énoncés présentés dans le questionnaire et/ou en entrevue avaient été sélectionnés parce que l'on croyait qu'ils leur seraient moins familiers, soit par leur représentation graphique ou numérique particulière ou encore parce qu'ils ne pouvaient pas être résolus par les techniques algébriques enseignées dans le cadre du cours de calcul différentiel.

C'était le cas des questions :

- 2c) de la version A : tracer un graphique à partir d'une table de valeurs où les valeurs de y oscillent autour de 5 ;
- 3a) de la version A : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$;
- 3c) de la version A : $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$;
- 2c) de la version B : graphique et table de valeurs où les valeurs de y oscillent autour de 5.

Par ailleurs, les questions supplémentaires ajoutées aux entrevues faisaient aussi partie de cette catégorie d'énoncé. On rappelle qu'on demandait aux étudiants de travailler une ou les deux limites suivantes :

- $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$;
- $\lim_{x\to 0} \left(1 + x + \frac{1}{10^8 x}\right)$.

Devant de tels problèmes, deux étudiants du groupe CAS (C2 et C3) ont le réflexe d'utiliser la commande limite de la calculatrice. Lorsqu'ils obtiennent un résultat avec la calculatrice, ils ne manifestent pas le besoin de valider avec une autre méthode ou dans un autre registre. Ils le feront s'ils y sont confrontés, par exemple lorsque je leur demande s'ils ont une idée de ce à quoi ressemble le graphique.

Dans le groupe non CAS, un des étudiants abordait ces énoncés de manière algébrique (N1). Par exemple, pour la question 3c), il explique qu'il a obtenu $\sin(\infty)$ et comme la fonction sinus oscille à l'infini, la limite n'existera pas. En lui demandant s'il peut valider avec le graphique de la fonction, il me dit qu'il s'imagine que la fonction oscillera de plus en plus autour de 0, ce qui est juste.

Un autre étudiant du groupe non CAS, a plutôt abordé ces problèmes en essayant de les rattacher à des problèmes vu précédemment, ce qui fait qu'il utilise des registres différents selon l'énoncé. Par exemple, pour l'énoncé 2c) de la version A, il me dit :« Ça me rappelle un cours de Monsieur S. Il nous montrait la limite quand [...]. Mais c'était pas la même chose. » Il construit donc le graphique point par point, en essayant de faire correspondre la table des valeurs à une courbe (le participant N3 a également utilisé cette technique pour cet énoncé). Par la suite, lorsque je le questionne sur sa stratégie de résolution pour la question 3a) de la version A, il dit qu'il a appris cette formule par coeur.

L'énoncé supplémentaire 2

Pour explorer un peu plus leurs stratégies de résolution, pour la question supplémentaire 2, je leur demandais de ne pas utiliser la commande limite. Trois participants du groupe CAS (C1, C3 et C5) et deux étudiants du groupe non CAS (N1 et N3) ont fait cet exercice.

Dans le groupe CAS, cette activité a confirmé que les étudiants avaient développé le réflexe d'utiliser la commande limite, car ils semblaient embêtés par le fait qu'ils ne pouvaient pas utiliser cette fonctionnalité. Une participante a même dit :

— C'est stressant !
— Parce que tu peux pas utiliser la commande limite ?

— Oui ! Je sais pas quoi faire.

Cependant, y restreindre l'accès leur permet d'entrer dans une activité mathématique plus riche. Une fois le malaise passé, les étudiants n'avaient pas de problème à se mettre à la tâche. Deux des trois étudiants (C1 et C5) ont abordé l'exercice par une méthode numérique en calculant la valeur de la fonction pour des x près de 0, allant du dixième au millième. Aucun n'a utilisé la fonctionnalité du tableur permettant de construire une table de valeurs de manière quasi automatique. Ils sont parvenus tous deux à la conclusion que la limite donnait 1.

Une fois ce résultat obtenu, je les relançais en leur disant que le résultat n'était pas 1 (mais je ne leur donnais pas la réponse). Les deux participantes décident alors d'aborder le problème de manière algébrique. L'une y parvient (C1) et obtient l'infini, l'autre ne se souvient pas et décide alors de tracer le graphique à l'aide de sa calculatrice (C5). Les deux issues sont alors très différentes. Alors que la première obtient un résultat qui concorde avec mon affirmation, la seconde obtient un résultat qui confirme son hypothèse de départ, c'est-à-dire que la limite est égale à 1 (voir figure 4.18).

La participante C5 est donc forcée de poursuivre son investigation et ajuste les paramètres de la fenêtre du graphique et est finalement satisfaite de tous les résultats. Elle finit en concluant : « Parce que si tu fais pas les trois [algébrique, numérique, graphique], tu le sais pas. »

L'autre participante (C3) a utilisé sa calculatrice pour calculer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{10^8 x}$ (en regardant son écran de calculatrice, je comprends qu'elle a utilisé la commande limite pour y parvenir), mais se trouve dans une impasse car elle obtient « non défini » comme résultat. Je lui montre alors le graphique sur ma calculatrice et fait alors sensiblement les mêmes étapes que la participante C5. Elle ajuste donc la

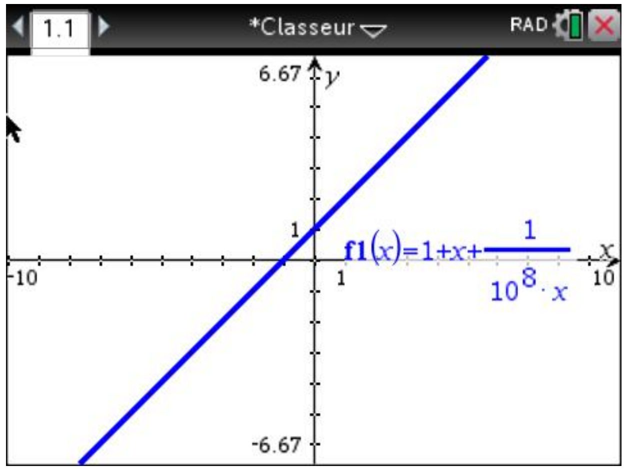


Figure 4.18 Graphique de la fonction $f(x) = 1 + x + \frac{1}{10^8 x}$ obtenu à l'aide de la CAS

fenêtre du graphique jusqu'à ce qu'elle voit mieux le comportement de la fonction autour de 0 et soit ainsi convaincue du résultat.

Du côté du groupe non CAS, les deux participants abordent la question de manière algébrique. Cependant, N1 hésite et il me dit qu'il essaie de visualiser le graphique dans sa tête avant de commencer les calculs. Je lui suggère alors de faire les calculs quand même et il parvient sans problème à la solution. Quand je lui demande de tracer une esquisse de graphique, encore une fois, il réussit sans hésiter.

Pour sa part, N3 hésite parce qu'il ne se souvient plus de ses techniques algébriques, dit-il. Je lui demande s'il pourrait aborder le problème autrement et lui propose de prendre sa calculatrice. Il me répond :« C'est une vieille calcu, elle fait pas de graphique par exemple ! » Cela veut alors peut-être dire qu'il aurait bien aimé utiliser le registre graphique pour poursuivre, mais qu'il n'avait pas les outils nécessaires. Il décide donc de procéder numériquement en calculant $f(x)$ avec des valeurs très près de 0, jusqu'à 10^{-8}, et obtient le bon résultat.

On peut donc émettre l'hypothèse que les étudiants ayant répondu à cette question sont possiblement plus à l'aise avec l'environnement algébrique. Les étudiants du groupe CAS utilisant la calculatrice et les étudiants du groupe non CAS utilisant des techniques à la main. Cependant, si on laisse de côté le registre de l'algèbre, les étudiants du groupe CAS ont eu le réflexe d'utiliser le registre numérique alors que les étudiants du groupe non CAS ont utilisé (ou aurait aimé utiliser) le registre graphique. Il est vrai qu'il peut être plus facile et plus rapide, avec la CAS, d'obtenir différentes valeurs de la fonction que de tracer la courbe de cette dernière. Par contre, avec une calculatrice standard, il est assez fastidieux de construire une table de valeurs. C'est peut-être donc un registre qu'ils utilisent moins souvent.

4.2.3 L'utilisation des outils techonologiques

On a présenté le graphique généré par le logiciel Maple de la fonction $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ aux participants C1, C4, C5 et N2 sur un ordinateur portable. Malgré le fait qu'ils soient surpris par l'allure du graphique, tous ont le réflexe d'ajuster la fenêtre pour aller voir ce qui se passe plus près autour de 0. Avec quelques essais, ils parviennent à la conclusion que la fonction oscille « toujours » lorsque x tend vers 0. Ils font donc le lien entre le caractère périodique de la fonction sinus et le fait que $1/0$ soit non défini. Ils ont donc une certaine confiance au résultat affiché par Maple, mais savent comment investiguer plus en profondeur pour émettre une hypothèse.

D'un autre côté, lorsque je présente le graphique de la fonction $\lim_{x\to 0}\frac{1}{10^8 x}$ au participant N3, sa réponse immédiate est « Ben voyons ! Yé pas bon Maple ! » en riant un peu. Il a un doute sur le résultat obtenu à l'aide de Maple et je dois moi-même changer les paramètres de la fenêtre pour observer ce qui se passe autour de 0. Par contre, une fois cet exercice fait, il est en mesure de tracer une esquisse (figure 4.19) de la courbe en intégrant le graphique fourni par Maple et le résultat algébrique de la limite.

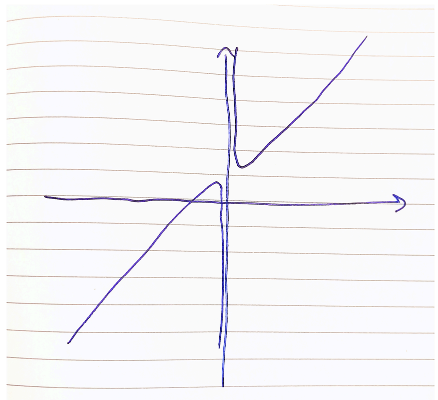


Figure 4.19 Esquisse de la fonction $f(x) = 1 + x + \frac{1}{10^8 x}$

4.2.4 Discussion

L'analyse des entrevues a permis d'observer plus en détail l'activité mathématique des étudiants et de répondre à certaines questions posées lors de l'analyse des questionnaires, notamment en ce qui concerne les activités de validation. En effet, certains étudiants, dans un groupe comme dans l'autre, nous ont exposé leurs stratégies de validation lors des entrevues. D'un groupe à l'autre, les registres de représentation utilisés sont les mêmes. Par contre, dans le groupe CAS, l'utilisation de la calculatrice est bien présente et facilite cette validation.

Nous avons pu également observer quelle(s) fonctionnalité(s) de la calculatrice étaient utilisées lors de la résolution des exercices présentés. On a vu que la fonctionnalité algébrique de la calculatrice était utilisée en premier par certains étudiants. Quelques étudiants poursuivaient leur démarche en utilisant d'autres fonctionnalités comme le graphique et la table de valeurs.

Cependant, ces étudiants du groupe CAS sont tout de même à l'aise avec les différentes fonctionnalité des CAS. Par exemple, lorsqu'un graphique peu satisfaisant leur est présenté, ils n'ont pas de difficulté à améliorer ce dernier en ajustant la fenêtre. Il en était de même pour les étudiants du groupe non CAS. En effet, lorsqu'on leur présentait un graphique généré par Maple, ils connaissaient les commandes pour ajuster les fenêtres et savaient ce qu'ils devaient faire pour obtenir un graphique qui leur permettait une bonne interprétation de la courbe. On rappelle que les étudiants du groupe non CAS ont été initiés au logiciel Maple durant leur cours de calcul différentiel.

CHAPITRE V

CONCLUSION

5.1 Retour sur la recherche

Comme enseignante de mathématiques au collégial, je me questionnais déjà depuis quelques années sur l'utilisation de différentes technologies dans mon enseignement, plus particulièrement des logiciels à langage symbolique (CAS) tel Maple et les calculatrices. Entre collègues, plusieurs fois nous avons discuté des avantages et inconvénients apportés par cette technologie, que ce soit par rapport à la préparation, la présentation et l'évaluation de la matière, mais aussi aux impacts sur l'apprentissage et la réussite de nos étudiants. De manière plus personnelle, je me questionne fréquemment sur l'utilisation de cette technologie et la façon dont elle transforme les mathématiques de l'étudiant.

Dans cette recherche, nous nous intéressions à l'utilisation de la technologie, plus particulièrement les outils CAS, dans les cours de mathématiques au collégial. Bien que plusieurs recherches aient observé les effets de la technologie sur les « performances » ou sur l'activité mathématique, moins de recherches se sont penchées sur les mathématiques au niveau collégial ou sur les technologies de type CAS.

Par ailleurs, la notion de limite enseignée dans le cours de calcul différentiel nous semblait un bon choix pour étudier les effets de la technologie. En effet, celle-ci se prête bien à l'utilisation de plusieurs représentations offertes par les technologies CAS (algébrique, graphique et numérique). Cette pluralité explique aussi pourquoi la théorie des registres sémiotiques de Duval nous semblait tout à fait appropriée pour orienter cette recherche.

L'analyse de questionnaires distribués à deux groupes d'étudiants de première session en sciences de la nature provenant de deux cégeps, un ayant accès à une technologie CAS en tout temps et l'autre non, nous a informés sur les effets de cette technologie sur l'activité mathématique de ceux-ci dans le contexte de la notion de limite. Un résumé de ces résultat est présenté dans le tableau 5.1 des pages 116 à 121.

Tout d'abord, il semble que les étudiants qui ont participé à cette étude et qui ont accès à une technologie CAS ont, de façon générale, une meilleure articulation des différents registres de représentations. Nous avons par ailleurs noté que, dans un groupe ou dans l'autre, les étudiants n'ont pas laissé de trace d'une utilisation des différents registres pour valider leurs résultats.

L'utilisation de la technologie semble par contre avoir un impact sur la perception de la notion de limite. En effet, les étudiants du groupe CAS sont plus nombreux à voir la limite comme un outil servant à calculer ou déterminer autre chose, par exemple une asymptote ou une dérivée. En contraste avec ceci, les étudiants du groupe non CAS sont plus nombreux à voir la limite comme un objet ou une valeur inatteignable ou infranchissable de la fonction . Ces différences pourraient être dues à la variété de fonctions qui peuvent être facilement travaillées à l'aide d'une technologie CAS.

Question	Résumé de la question	Résultats
Q2 vA	Tracer le graphique d'une fonction respectant certains critères	28% des étudiants du groupe CAS ont réussi les quatre graphiques contre 15% des étudiants du groupe non CAS ($p = 0,30$). Par ailleurs, chacun des quatre énoncés a été mieux réussi par le groupe CAS. a. 88% contre 50% ($p = 0,005$) b. 72% contre 35% ($p = 0,01$) c. 48% contre 30% ($p = 0,22$) d. 64% contre 55% ($p = 0,55$)
Q2 vB	Un énoncé était présenté dans un registre quelconque et on demandait de sélectionner parmi quatre autres énoncés présentés dans un registre différent, tous ceux qui pouvaient être associés à l'énoncé principal.	La proportion d'étudiants ayant réussi les différents énoncés est plus élevée dans le groupe CAS que dans le groupe non CAS. a. 48% contre 28% ($p = 0,18$) b. 60% contre 28% ($p = 0,04$) c. 28% contre 6% (S/O)

Question	Résumé de la question	Résultats
Q3vA	Déterminer la limite de trois fonctions trigonométriques différententes	La réussite de cet énoncé nous intéressait peu. Nous avons plutôt analysé le registre dans lequel les étudiants tentaient de résoudre ce problème. a. Le plus utilisé - CAS : calculatrice (44%), aucune démarche (40%) - Non CAS : algèbre (50%), aucune démarche (30%) Le moins utilisé - CAS : graphique (4%), langue naturelle (4%) - Non CAS : graphique (0%) b. Le plus utilisé - CAS : calculatrice (40%), aucune démarche (40%) - Non CAS : algèbre (50%), aucune démarche (40%) Le moins utilisé - CAS : graphique (4%), langue naturelle (4%) - Non CAS : graphique (0%) c. Le plus utilisé - CAS : calculatrice (36%), aucune démarche (32%), algèbre (28%) - Non CAS : algèbre (40%), aucune démarche (60%) Le moins utilisé - CAS : graphique (0%), langue naturelle (4%) - Non CAS : graphique (0%)

Question	Résumé de la question	Résultats
Q3vB	L'équation et le graphique d'une fonction était donnée. On demandait de déterminer différentes limites	Le registre dans lequel les étudiants tentaient de résoudre ce problème a été analysé. a. Le plus utilisé - CAS : algébrique (48%) - Non CAS : algèbre (61%) Le moins utilisé - CAS : graphique (16%), langue naturelle (0%) - Non CAS : graphique (22%), langue naturelle (0%) b. Le plus utilisé - CAS : algèbre (48%), graphique (32%) - Non CAS : algèbre (72%) Le moins utilisé - CAS : langue naturelle (4%) - Non CAS : graphique (17%), langue naturelle (0%) c. Le plus utilisé - CAS : algèbre (48%), graphique (32%) - Non CAS : algèbre (61%) Le moins utilisé - CAS :langue naturelle (4%) - Non CAS : graphique (22%), langue naturelle (0%) d. Le plus utilisé - CAS : algèbre (48%), calculatrice (44%) - Non CAS : algèbre (72%) Le moins utilisé - CAS :graphique (4%), langue naturelle (0%) - Non CAS : graphique (17%), langue naturelle (0%) Nous avons aussi analysé le taux de réussite des énoncés lorsque le registre de l'algèbre a été utilisé. Chacun des quatre énoncés a été mieux réussi par le groupe CAS. a. 100% contre 64% b. 100% contre 69% c. 100% contre 73% d. 92% contre 23%

Question	Résumé de la question	Résultats
Q4vA	L'équation et le graphique d'une fonction était donnée. On demandait de déterminer différentes limites	Le registre dans lequel les étudiants tentaient de résoudre ce problème a été analysé. a. Le plus utilisé - CAS : algébrique (40%), calculatrice (28%) - Non CAS : algèbre (45%) Le moins utilisé - CAS : graphique (12%), langue naturelle (0%) - Non CAS : graphique (20%), langue naturelle (0%) b. Le plus utilisé - CAS : algèbre (36%), calculatrice(24%) - Non CAS : algèbre (50%), graphique (30%) Le moins utilisé - CAS : graphique (8%), langue naturelle (4%) - Non CAS : langue naturelle (0%) c. Le plus utilisé - CAS : algèbre (36%), calculatrice(20%) - Non CAS : algèbre (50%) Le moins utilisé - CAS :graphique, (8%), langue naturelle (8%) - Non CAS : graphique (15%), langue naturelle (0%) d. Le plus utilisé - CAS : algèbre (24%), graphique (16%) - Non CAS : algèbre (35%), graphique (30%) Le moins utilisé - CAS :calculatrice (12%), langue naturelle (4%) - Non CAS : langue naturelle (0%) Nous avons aussi analysé le taux de réussite des énoncés lorsque le registre de l'algèbre a été utilisé. Chacun des quatre énoncés a été mieux réussi par le groupe CAS. a. 50% contre 44% b. 100% contre 60% c. 89% contre 60% d. 83% contre 29%

Question	Résumé de la question	Résultats
Q4vB	On présentait un problème à contexte en chimie avec une équation représentant la situation. On demandait aux étudiants de réfléchir sur la limite à l'infini dans trois registres différents, soit la langue naturelle, l'algèbre et les graphiques.	Dans le groupe CAS, 28% des étudiants ont réussi les trois énoncés contre aucun dans le groupe non CAS. Si l'on s'intéresse à chaque énoncé de manière individuelle, les étudiants du groupe CAS on mieux réussi que les étudiants du groupe non CAS. a. 44% contre 17% b. 52% contre 17% c. 44% contre 6%
Q5	On a demandé à tous les participants d'encercler les énoncés qui décrivaient la notion de limite. Il y avait 5 idées dans les énoncés : 1. y se rapproche lorsque x se rapproche 2. la limite ne peut être franchie 3. définition formelle de la limite 4. la limite ne peut être atteinte 5. la limite est une approximation	La proportion des étudiants ayant encerclé chacun de ces énoncé est semblable dans chacun des groupes (CAS et non CAS) ($p > 0,05$) 1. 94% et 92% 2. 10% et 13% 3. 60% et 58% 4. 48% et 68% 5. 50% et 47%

Tableau 5.1: Résumé des résultats des questions 2 à 5 des deux versions du questionnaire

Dans les deux groupes observés, le registre de représentations de prédilection des étudiants semble être celui de l'algèbre. Fait intéressant, malgré l'accès à un outil de calcul symbolique, les étudiants du groupe CAS réussissent tout aussi bien, sinon plus, les techniques de résolution à la main.

En second lieu, l'analyse des entrevues auprès de 8 étudiants provenant des deux groupes nous a permis de préciser certaines observations. Tout d'abord, nous avons pu observer les activités de validation de ces étudiants en particulier. D'un groupe à l'autre, les registres de représentation utilisés sont les mêmes. Cependant, dans le groupe CAS, l'utilisation de la calculatrice est bien présente et facilite cette validation. Par ailleurs, lorsque les étudiants du groupe CAS utilisent la calculatrice, c'est généralement pour les fonctions de calcul algébrique. Les fonctionnalités numériques ou graphiques ont été peu utilisées par ceux-ci, quoiqu'ils soient tout de même à l'aise avec elles.

Il est important d'interpréter ces résultats avec précaution. En effet, les étudiants proviennent de deux cégeps différents et étaient subdivisés en quatre groupes ayant tous des enseignants différents. Il se peut qu'une partie des différences soit aussi due à l'organisation du contenu, au choix de problèmes présentés, aux différents types d'évaluations, etc. déterminés par chacun de ses enseignants. Aussi, les observations faites lors des entrevues ne concernent que huit étudiants en particulier. Elles ne sont pas garantes de l'ensemble des étudiants, mais offrent plutôt une piste de réflexion sur les effets possibles de la technologie sur l'activité mathématique dans le cadre bien particulier de la notion de limite.

Par ailleurs, je tiens à mentionner bien humblement que ces résultats peuvent présenter un certain biais du chercheur étant moi-même enseignante dans un cégep où les étudiants évoluent dans un environnement CAS depuis 15 ans. Le département de mathématiques dont je suis membre défend depuis plus de 20 ans sa position d'utiliser une telle technologie. En toute honnêteté, j'adhère à cette position.

5.2 Prolongements

Cette recherche a été faite avec des étudiants de première session qui utilisaient une technologie CAS pour la première fois dans leur parcours scolaire. Il se peut que, pour la plupart d'entre eux, ils en soient encore à l'étape de se familiariser avec l'instrument. Il serait alors intéressant d'observer l'activité mathématique d'étudiants en fin de formation mathématique au collégial et qui utilisent la CAS depuis plusieurs sessions. Le processus d'instrumentation serait possiblement plus avancé et l'on peut penser que l'activité mathématique en serait affectée différemment, peut-être même plus profondément. Il serait même intéressant d'observer l'activité de mathématiciens universitaires dont la formation mathématique est essentiellement terminée qui ont reçu un enseignement sans CAS mais qui utilisent la technologie dans le cadre de leur travail ou leur enseignement.

D'autre part, cette recherche a questionné les effets de la technologie dans le contexte d'un cours plutôt traditionnel de calcul différentiel, c'est-à-dire où le curriculum est sensiblement le même que dans un cours n'utilisant pas la technologie. On a adapté la technologie à un enseignement déjà bien établi. Il serait intéressant d'observer les effets de cette technologie dans un cours où le curriculum serait pensé en fonction de ce que la technologie offre, c'est-à-dire où on aurait adapté l'enseignement à la technologie en quelque sorte.

Les possibilités qu'offre la technologie de type CAS dans les cours de mathématiques, plus particulièrement à l'enseignement supérieure, sont nombreuses et leur effet sur l'activité mathématique est encore peu étudié. Dans un contexte de questionnements sur la place de la technologie et des mathématiques dans le système d'éducation, les technologies CAS gagnent à être étudiées sous différents angles, celui de l'enseignement par exemple, ou encore de la construction de matériel pédagogique et didactique.

D'ailleurs, le choix du cadre théorique a grandement dirigé ces observations. Aucune observation sur l'activité mathématique à l'intérieur d'un registre, par exemple l'algèbre, n'a été faite. Il serait intéressant d'observer l'activité mathématique à travers les interactions entre les processus et la construction du concept mathématique chez ces mêmes étudiants. Par exemple, il serait intéressant d'observer ce que font les étudiants lorsqu'ils connaissent la solution à un exercice de calcul de limite et que leur résolution crayon/papier ne correspond pas. Est-ce que les étudiants évoluant dans un environnement CAS réagissent de la même façon ? Quelles sont les différences ?

Un tel changement impliquerait évidemment un changement de méthodologie. Il serait alors intéressant d'observer quelques étudiants seulement et d'en faire une analyse exclusivement qualitative. Un protocole qui inclurait des entrevues individuelles où les participants pourraient décrire en détails leur activité mathématique lors de la résolution de problèmes liés à la notion de limite ou autre. Ces analyses pourraient également se faire auprès d'étudiants évoluant dans un environnement CAS et d'autres non.

Bien humblement, je crois que cette recherche pourrait aussi être un point de départ d'une réflexion sur ces technologies pour mes collègues enseignants dans l'ensemble des cégeps du Québec. Les étudiants québécois ont accès gratuitement, par le biais d'internet, à une multitude de logiciels mathématiques tels Geogebra, Sage et Wolfram Alpha. Comme ces étudiants ont la possibilité de côtoyer ces technologies au cours de leur formation en mathématiques, avons-nous de « nouveaux » étudiants dans nos cours ? Si oui, qui sont-ils ? Ces logiciels, transforment-ils leurs mathématiques ? Comment ? Devons-nous, voulons-nous, pouvons-nous, transformer notre enseignement des mathématiques en conséquence ? Et si oui, comment le faire ?

ANNEXE A - QUESTIONNAIRES

Questionnaire sur la notion de limite

A

NOM : ____

Bonjour,

Voici un questionnaire élaboré pour une recherche dans le cadre de ma maîtrise en didactique des mathématiques à l'Université du Québec à Montréal.

L'objectif de ce questionnaire est d'étudier différentes conceptions de la notion de limite. Il ne sert en aucun cas à tester votre niveau de connaissance en calcul différentiel.

À la fin du questionnaire, quelques questions vous sont posées afin de cerner un peu vos habitudes d'utilisation de la calculatrice.

Merci de répondre avec le plus d'honnêteté possible. Je vous suis infiniment reconnaissante de votre collaboration!

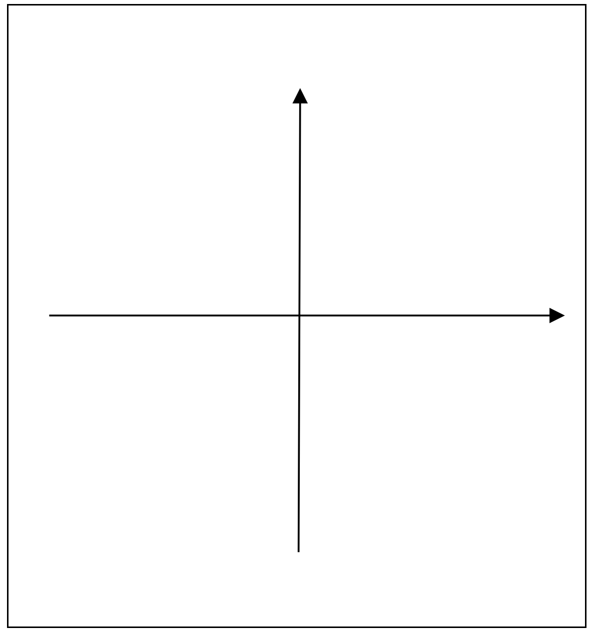
Question 1.

Tout d'abord, en vos mots, expliquez ce qu'est la limite d'une fonction.

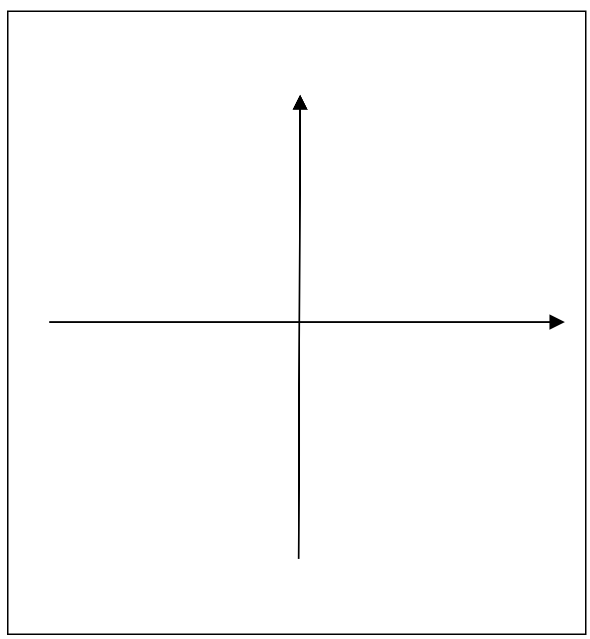
Question 2

Pour chacune des sous questions, tracez une esquisse du graphique d'une fonction g possédant les caractéristiques suivantes.

a) La limite de $f(x)$ quand x tend vers 3 n'existe pas

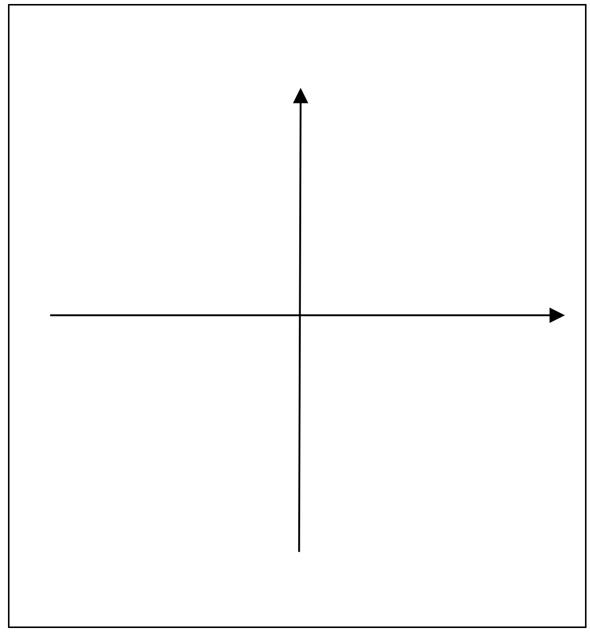


b) $\lim_{x \to 1} g(x) = 5$
$g(1) = 2$

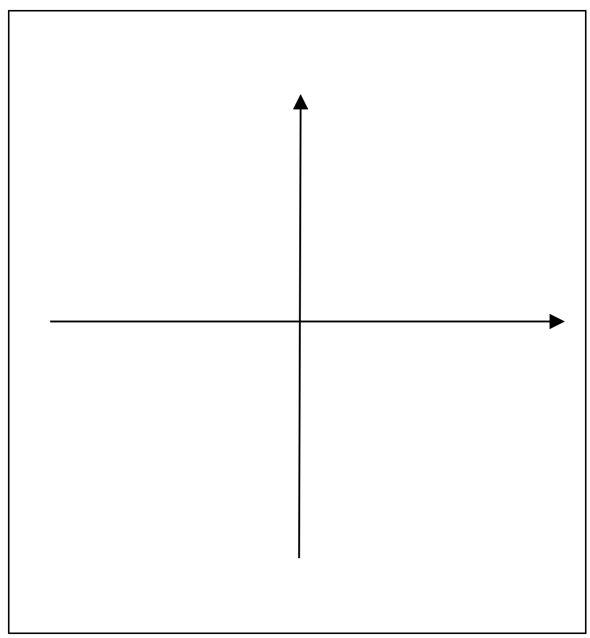


c)

x	$g(x)$
0	2
5	5,1
10	4,99
15	5,0001
20	4,999 99
…	…



d) $\lim_{x \to 2} g(x) = -\infty$



Question 3

Déterminez les limites suivantes et expliquez de quelle façon vous y parvenez.

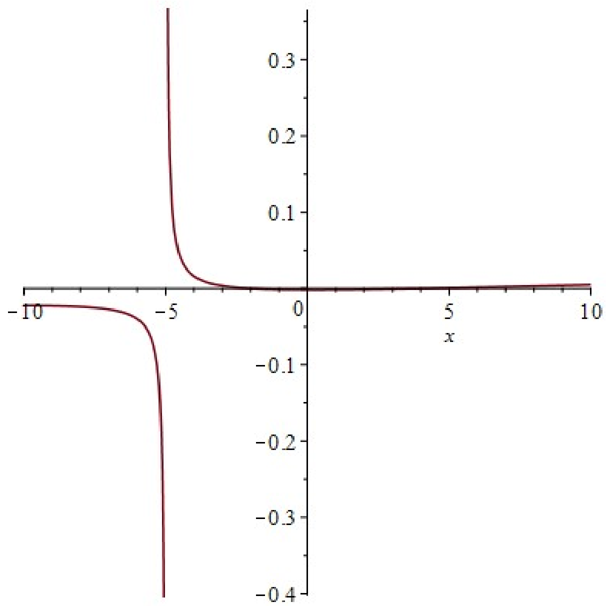
a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x}$

c) $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Question 4

Voici le graphique de la fonction $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-8x}{1000x^2+5000x}$. Déterminez les limites suivantes et expliquez votre raisonnement.



a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

b) $\lim_{x \to \infty} f(x)$

c) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$

Question 5

Dites si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux.

1. Une limite décrit le comportement d'une fonction lorsque x se rapproche d'une certaine valeur — V F
2. Une limite est une valeur que la fonction ne peut dépasser. — V F
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ signifie qu'il est possible de rendre la distance entre $f(x)$ et la limite arbitrairement petite en choisissant x aussi près de a que l'on veut. — V F
4. Une limite est une valeur dont la fonction se rapproche, mais n'atteint jamais — V F
5. Une limite est une approximation qui peut être aussi précise que l'on souhaite — V F

1. Session en sciences de la nature: ☐1ère ☐2e ☐3e ☐4e ☐5e ou plus

2. Est-ce la première fois que vous suivez ce cours ? ☐OUI ☐NON

3. Avez-vous déjà utilisé une calculatrice graphique (ex: TI-83/84, TI-92, TI-Nspire) au secondaire ?

☐OUI ☐NON

4. Possédez-vous une calculatrice symbolique (TI-Nspire CAS, Voyage 200, TI-92 plus ou autre)?

Si OUI : Depuis combien de *sessions* possédez-vous votre calculatrice symbolique ?

☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ou plus

Si NON : Quel type de calculatrice possédez-vous? (Si vous possédez plus d'une calculatrice, encerclez celle que vous utilisez *le plus fréquemment* pour le cours de calcul différentiel)

a. Calculatrice scientifique
b. Calculatrice graphique (TI-83, TI-84, TI NSpire CX, l'équivalent)
c. Autre : ______________________________

5. Comment avez-vous *le plus* appris à vous servir de votre calculatrice (n'encerclez qu'une seule réponse) :

a. avec un professeur
b. lors d'un atelier spécial (par exemple, donné par des tuteurs)
c. par moi-même, sans mode d'emploi ou internet
d. par moi-même, avec le mode d'emploi ou internet
e. avec des collègues

Pour les questions suivantes, cochez la case correspondante à votre réponse (1=jamais, 2=parfois, 3=souvent)

6. Cette session, utilisez-vous votre calculatrice

6.1. En classe :	☐1 ☐2 ☐3
6.2. En dehors de la classe (travaux, devoirs) :	☐1 ☐2 ☐3

7. Cette session, utilisez-vous votre calculatrice :

7.1. Pour faire des calculs numériques (calculer la valeur d'une limite, la solution d'une équation, etc) ?	☐1 ☐2 ☐3
7.2. Lorsque l'on vous demande une démonstration ?	☐1 ☐2 ☐3
7.3. Pour programmer ?	☐1 ☐2 ☐3

QUESTIONNAIRE SUR LA NOTION DE LIMITE

B

NOM : ____

Bonjour,

Voici un questionnaire élaboré pour une recherche dans le cadre de ma maîtrise en didactique des mathématiques à l'Université du Québec à Montréal.

L'objectif de ce questionnaire est d'étudier différentes conceptions de la notion de limite. Il ne sert en aucun cas à tester votre niveau de connaissance en calcul différentiel.

À la fin du questionnaire, quelques questions vous sont posées afin de cerner un peu vos habitudes d'utilisation de la calculatrice.

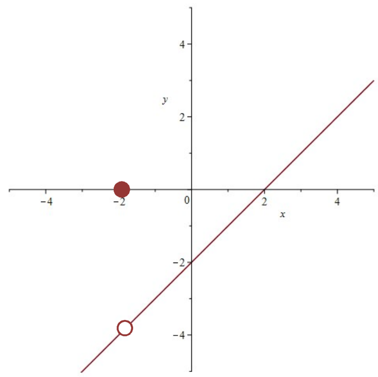
Merci de répondre avec le plus d'honnêteté possible. Je vous suis infiniment reconnaissante de votre collaboration!

Question 1.

Tout d'abord, en vos mots, expliquez ce qu'est la limite d'une fonction.

Question 2

a) Voici le graphique d'une fonction *f*. Encerclez chaque élément qui pourrait être associé à ce graphique



i) La limite de $f(x)$ quand x tend vers -2 n'existe pas

ii) $\lim_{x \to -2} f(x) = -4$

iii) $\lim_{x \to -2} f(x) = 0$

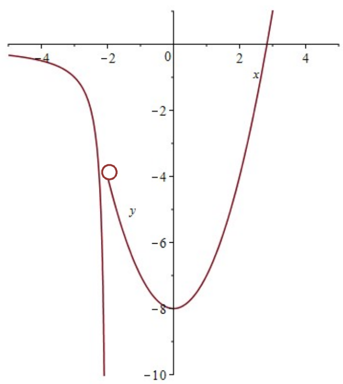
iv)

x	$g(x)$
-1	-3
-1,9	-3,9
-1,99	-3,99
-1,999	-3,999
…	…
-2	0

b) Encerclez chaque élément qui pourrait être associé à l'expression suivante
$\lim_{x \to -2^+} h(x) = -4$

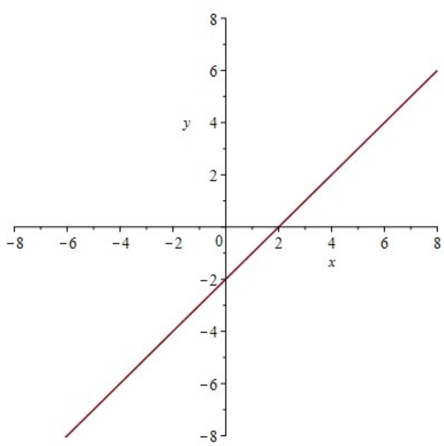
i) Lorsque x est aussi près de -2 que l'on veut, x plus grand que -2, $h(x)$ devient près de -4.

ii)



iii) Lorsque x se rapproche de -2 par la droite, y se rapproche de -4.

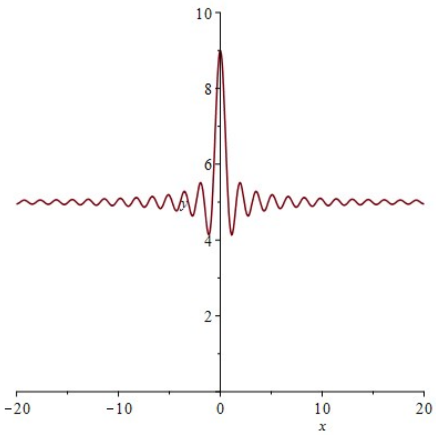
iv)



c) Encerclez chaque élément qui pourrait être associé à l'énoncé suivant :

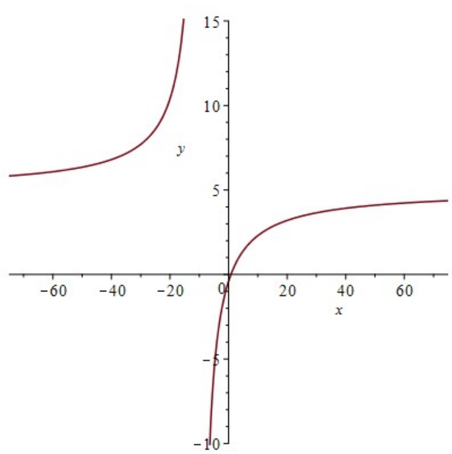
Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, g(x) se rapproche de la valeur 5.

i)



ii) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) \to 5$

iii)

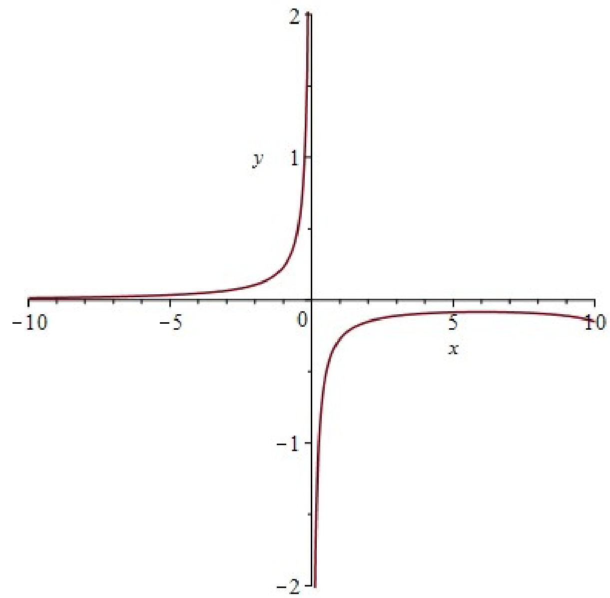


iv)

x	$g(x)$
10	2
1000	5,1
100 000	4,99
10 000 000	5,0001
1 000 000 000	4,999 99
…	…

Question 3

Voici le graphique de la fonction $f\left(x\right)=\dfrac{3x+6}{x^3-10x^2-24x}$. Déterminez les limites suivantes et expliquez votre raisonnement.



a) $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)$

b) $\lim_{x \to \infty} f(x)$

c) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

d) $\lim_{x \to -2} f(x)$

Question 4

Tirée de *Calcul différentiel (Brunet, Désaultels 2016)*

Dans de nombreuses réactions chimiques, deux réactifs interagissent pour former un nouveau produit. Soit une réaction quelconque entre un réactif A et un réactif B.

Si, au temps $t = 0$, nous avons 2 moles du réactif A et 2 moles du réactif B, et si $x(t)$ est la quantité du nouveau produit au temps *t*, alors l'équation qui donne la quantité de nouveau produit en fonction du temps est

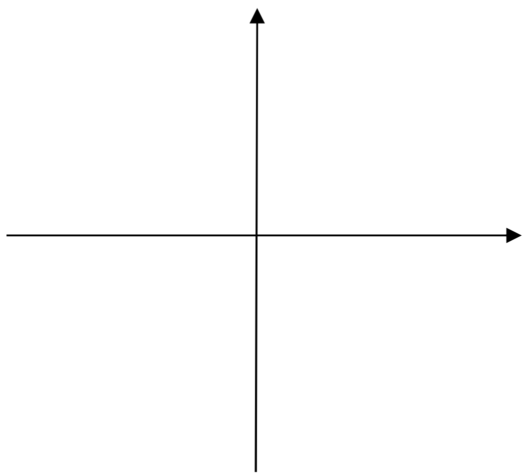
$$x(t) = 2 - \frac{1}{kt + \frac{1}{2}}$$

Où *k* est une constante positive non nulle qui dépend de la réaction étudiée.

a) Sans effectuer de calculs, déterminer la quantité de nouveau produit à la fin de la réaction. Expliquer clairement votre raisonnement.

b) Exprimer sous forme d'équation le calcul que nous devrions effectuer pour trouver cette quantité.

c) Tracer un graphique possible de $x(t)$ et expliquez votre raisonnement.

	Démarche :

Question 5

Dites si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux.

1. Une limite décrit le comportement d'une fonction lorsque x se rapproche d'une certaine valeur — V F
2. Une limite est une valeur que la fonction ne peut dépasser. — V F
3. $\lim_{x \to a} f(x) = L$ signifie qu'il est possible de rendre la distance entre $f(x)$ et la limite arbitrairement petite en choisissant x aussi près de a que l'on veut. — V F
4. Une limite est une valeur dont la fonction se rapproche, mais n'atteint jamais — V F
5. Une limite est une approximation qui peut être aussi précise que l'on souhaite — V F

1. Session en sciences de la nature: ☐1ère ☐2e ☐3e ☐4e ☐5e ou plus

2. Est-ce la première fois que vous suivez ce cours ? ☐OUI ☐NON

3. Avez-vous déjà utilisé une calculatrice graphique (ex: TI-83/84, TI-92, TI-Nspire) au secondaire ?

☐OUI ☐NON

4. Possédez-vous une calculatrice symbolique (TI-Nspire CAS, Voyage 200, TI-92 plus ou autre)?

<u>Si OUI :</u> Depuis combien de *sessions* possédez-vous votre calculatrice symbolique ?

☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ou plus

<u>Si NON :</u> Quel type de calculatrice possédez-vous? (Si vous possédez plus d'une calculatrice, encerclez celle que vous utilisez *le plus fréquemment* pour le cours de calcul différentiel)

a. Calculatrice scientifique
b. Calculatrice graphique (TI-83, TI-84, TI NSpire CX, l'équivalent)
c. Autre : ______________________________

5. Comment avez-vous *le plus* appris à vous servir de votre calculatrice (n'encerclez qu'une seule réponse) :

a. avec un professeur
b. lors d'un atelier spécial (par exemple, donné par des tuteurs)
c. par moi-même, sans mode d'emploi ou internet
d. par moi-même, avec le mode d'emploi ou internet
e. avec des collègues

Pour les questions suivantes, cochez la case correspondante à votre réponse (1=jamais, 2=parfois, 3=souvent)

6. Cette session, utilisez-vous votre calculatrice

6.1. En classe : ☐1 ☐2 ☐3
6.2. En dehors de la classe (travaux, devoirs) : ☐1 ☐2 ☐3

7. Cette session, utilisez-vous votre calculatrice :

7.1. Pour faire des calculs numériques (calculer la valeur d'une limite, la solution d'une équation, etc) ? ☐1 ☐2 ☐3
7.2. Lorsque l'on vous demande une démonstration ? ☐1 ☐2 ☐3
7.3. Pour programmer ? ☐1 ☐2 ☐3

BIBLIOGRAPHIE

Amyotte, L. et Hamel, J. (2018). *Calcul différentiel* (2e éd.). ERPI Pearson.

Anton, H., Bivens, I. et Davis, S. (2007). *Calcul différentiel.* Les éditions CEC.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a cas environment : The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–74.

Blozy, T. A. (2002). *An analysis of performance on calculus questions by students using CAS and Non-CAS graphing calculators.* (thèse).

Bresson, F. (1987). Les fonctions de représentation et de communication (extraits). *Relation*, 933–982.

Brunelle, r. et Désaultels, M.-A. (2016). *Calcul différentiel* (2e éd.). Les éditions CEC.

Burrill, G., Allison, J., Breaux, G., Kastberg, S., Leatham, K. et Sanchez, W. (2002). Handheld graphing technology in secondary mathematics. *Texas Instruments.*

Charron, G. et Parent, P. (2014). *Calcul différentiel* (8e éd.). Chenelière Éducation.

Cornu, B. (1991). *Limits*, Dans D. Tall (dir.). *Advanced mathematical thinking*, volume 11. Springer Science and Business Media.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire.* (phdthesis).

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(0), 2.

Drottar, J. F. (1998). *An analysis of the effect of the graphing calculator on student performance in algebra II.* Boston College.

Dufour, S. (2011). *L'utilisation des représentations par deux enseignantes du collégial pour l'introduction de la dérivée.* (mémoire).

Duval, R. (1988). Graphiques et équations. Dans *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, volume 1, 235–253.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Dans *Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 5, 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Bern : Lang.

Duval, R. (2002). Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? cadres et registres. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, *7*, 83–105.

Ellington, A. J. (2006). The effects of non-cas graphing calculators on student achievement and attitude levels in mathematics : A meta-analysis. *School Science and Mathematics*, *106*(1), 16–26.

Garner, S. (2002). I can do maths now" : How does cas affect the teaching and learning of year 12 mathematics. *Valuing Mathematics in Society*, 389–400.

Granger, G. G. (1979). *Langages et épistémologie.* Klincksieck.

Guin, D. et Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments : The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *3*, 195–227.

Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for research in mathematics education*, 3–25.

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. Dans *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, volume 8, 255–271.

Hitt, F. (2006). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. an example : The concept of limit. Dans *Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 11, 253–268.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés*, 65–88.

Hitt, F. et Kieran, C. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a cas environment with tasks designed from a task–technique–theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *14*(2), 121–152.

Kieran, C. et Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection : A study of cas use in secondary school algebra. *International journal of computers for mathematical learning*, *11*(2), 205.

Kissi, P. S., Opoku, G. et Boateng, S. K. (2016). The effects of the use of microsoft math tool (graphical calculator) instruction on students' performance in linear functions. *Journal of Education and Practice*, *7*(21), 117–127.

Lagrange, J.-B. (2005). *Using symbolic calculators to study mathematics*, Dans *The didactical challenge of symbolic calculators*, (p. 113–135). Springer.

Laporte, C. (2018). Apprentissage des limites à l'infini de fonctions polynomiales rationnelles avec aide du logiciel geogebra en calcul différentiel.

Le Thai Bao, T. T. (2007). *Étude didactique des relations entre notion de limite et décimalisation des nombres réels dans un environnement" calculatrice". Une étude de cas dans l'enseignement mathématique secondaire au Viêt-nam*. (Thesis).

Leigh-Lancaster, D., Les, M. et Evans, M. (2010). Examinations in the final year of transition to mathematical methods computer algebra system (cas). *Mathematics Education Research Group of Australasia*.

Ministère de l'Éducation, d. L. e. d. S. (2010). Sciences de la nature - programme d'études préuniversitaires 200.b0.

Palmiter, J. R. (1991). Effects of computer algebra systems on concept and skill acquisition in calculus. *Journal for research in mathematics education*, 151–156.

Piaget, J. (1972). *La formation du symbole chez l'enfant : imitation, jeu et reve, image et representation. 5e ed.* Delachaux et Niestlé.

Quesada, A. R. et Maxwell, M. E. (1994). The effects of using graphing calculators to enhance college students' performance in precalculus. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(2), 205–215.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies ; approche cognitive des instruments contemporains*. Université de Paris 8.

Rogalski, M. (2016). Revenir à la notion de limite par certaines de ses raisons d'être : un chantier pour le début de l'analyse à l'université. Dans *International Network for Didactic Research in University Mathematics*, Montpellier, France.

Stewart, J. (2013). *Calcul différentiel* (7e éd.). Chenelière Éducation.

Tall, D. (1994). Computer environments for the learning of mathematics. *R. Biehler et al.(Eds., 1994). Didactics of mathematics as a scientific discipline. Dordrecht : Kluwer*, 189–199.

Tall, D. et Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics teaching*, *82*.

Tall, D. et Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151–169.

Tokpah, C. L. (2008). *The effects of computer algebra systems on students' achievement in mathematics.* (thèse).

Trouche, L. (1996). À propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un environnement calculatrice, étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation. *Th1se, Université de Montpellier*, *2*.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language (A. Kozulin, ed.)*. Cambridge, ma : mit Press.

Williams, S. R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for research in Mathematics Education*, 219–236.