UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

VALEURS PROPRES DES OPÉRATEURS DE MÉLANGE SYMÉTRISÉS

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR

NADIA LAFRENIÈRE

DÉCEMBRE 2019

Remerciements

Les premiers remerciements vont sans conteste à mon directeur, Franco Saliola, qui a cru en moi tout au long de ce projet et qui m'a encouragé dans toutes mes (bonnes et moins bonnes) initiatives. Tu es un excellent motivateur, toujours de bonne humeur et avec un rire contagieux. Merci pour le sujet passionnant, tes patientes explications et ta disponibilité. Tes intérêts diversifiés en mathématiques et ton souci de bien communiquer les mathématiques ont su nourrir ma passion des mathématiques durant les quatre dernières années (et plus), et je t'en suis très reconnaissante. Merci aussi pour tes nombreux conseils et pour le code qui a permis l'élaboration des conjectures.

Merci à ma grande amie Stéphanie Schanck avec qui une partie du travail de cette thèse a été réalisée. Ta curiosité, ta passion des maths, ton énergie et ta bonne humeur sont si inspirantes! Nos rencontres de recherche avec Franco me manquent déjà.

Merci aux membres du jury d'avoir pris le temps de lire ma thèse. Votre intérêt et vos commentaires ont été éclairants. Plus personnellement, merci à Greg Warrington, François Bergeron et Christophe Reutenauer.

Merci à Megan Bernstein, sans qui je n'aurais pas pu écrire la section sur le temps de mélange.

Les Fonds de recherche Québec et l'Institut des sciences mathématiques m'ont apporté le support financier essentiel pour réaliser mon projet de doctorat. Merci de supporter la recherche fondamentale et l'avancement des connaissances.

La très belle communauté du LaCIM ne serait pas la même sans les professeurs, les étudiantes et les étudiants. Merci pour les mots croisés, les discussions de mathématiques et les bons moments. Des remerciements particuliers vont à celles qui partagent mon bureau, pour tout le support durant la rédaction de la thèse : Pauline Hubert, Mélodie Lapointe et Florence Maas-Gariépy. Merci également à Aram Dermenjian, Fanny Desjardins, Herman Goulet-Ouellet et Émile Nadeau.

Un grand merci à Laura Colmenarejo, pour ses encouragements soutenus au cours de mon doctorat.

Enfin, merci à ma famille et à mes amies et amis d'être des personnes si extraordinaires!

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

RÉSUMÉ

L'opérateur de mélange doublement aléatoire explique, par exemple, l'évolution d'un paquet de cartes à jouer au fil de l'exécution de la procédure consistant à piger une carte aléatoirement et à la remettre à une position aléatoire. Si on pige plusieurs cartes avant de toutes les replacer, on obtient plutôt une famille d'opérateurs de mélange symétrisés, tels que définis par Victor Reiner, Franco Saliola et Volkmar Welker.

Cette thèse décrit comment obtenir les valeurs propres de ces opérateurs de mélange. Pour y arriver, on s'appuie notamment sur les travaux d'Anton Dieker et de Franco Saliola, qui ont calculé les valeurs propres du mélange doublement aléatoire (qui est parmi les mélanges étudiés). Ici, on calcule les valeurs propres pour tous les opérateurs de la famille. On procède avec l'aide de la théorie de la représentation du groupe symétrique : on décompose l'espace vectoriel sur lequel les mélanges agissent (dont une base est formée des permutations des cartes) en modules simples. Ceux-ci sont désignés par les tableaux standards, et l'algorithme de calcul des valeurs propres est entièrement combinatoire : elles sont obtenues à partir de calculs sur les tableaux standards.

Les techniques utilisées ici permettent de démontrer d'une nouvelle façon que ces opérateurs de mélange commutent entre eux et de démontrer que les valeurs propres sont entières et positives, résolvant une conjecture laissée ouverte par Reiner, Saliola et Welker. De plus, connaître les valeurs propres pourrait notamment permettre de déterminer le nombre nécessaire d'itérations d'un mélange pour qu'un paquet de cartes soit bien mélangé.

Un second ensemble de mélanges aussi introduit par Reiner, Saliola et Welker est étudié. Nous présentons plusieurs conjectures concernant leurs valeurs propres.

Mots-clefs : Combinatoire algébrique, théorie de la représentation du groupe symétrique, chaînes de Markov, tableaux standards, mélanges de cartes, valeurs propres, opérateurs de mélange symétrisés

ENGLISH ABSTRACT

English title: Eigenvalues of Symmetrized Shuffling Operators

The random-to-random shuffling operator explains, for example, the evolution of a deck of cards subject to the following random process: draw a card randomly from the deck and reinsert it at a random position. If one instead draws more than one card at a time before reinserting, then the resulting operator is an example of a family of symmetrized shuffling operators studied by Victor Reiner, Franco Saliola and Volkmar Welker.

This thesis describes a way to obtain the eigenvalues of these operators. We build on the work of Anton Dieker and Franco Saliola, who computed the eigenvalues of the random-to-random shuffle. Here, we compute the eigenvalues for all the operators of the family. We proceed with the help of the representation theory of the symmetric group. We decompose the vector space on which the shuffles act into simple modules for the symmetric group. These modules correspond to standard Young tableaux, and the algorithm to compute the eigenvalues is combinatorial because it computes the eigenvalues directly from the standard Young tableaux.

As a corollary of our main result, we solve several conjectures of Reiner, Saliola and Welker, including showing that the eigenvalues are all nonnegative integers. Furthermore, the techniques used here allow us to give a new proof of their result that these symmetrized shuffling operators commute. Knowing the eigenvalues is the key step in one method of computing the number of shuffles one needs to execute to get a perfectly shuffled deck, which is briefly explored.

We also study a second family of shuffles introduced by Reiner, Saliola and Welker. We present many conjectures about their eigenvalues.

Keywords: Algebraic combinatorics, representation theory of the symmetric group, Markov chains, standard tableaux, card shuffling, eigenvalues, symmetrized shuffling operators

INTRODUCTION

Supposons que vous êtes en famille, que vous jouez à un jeu de cartes, et que vous venez de terminer une manche. Pour que les prochains tours soient équitables, il faut que les cartes soient bien mélangées. Après tout, peut-être que votre soeur a une mémoire phénoménale, qui lui permettrait d'avoir mémorisé l'ordre dans lequel les cartes ont été rangées; elle serait alors largement avantagée!

Alors, comment s'assurer que les cartes soient bien mélangées? C'est une question qui taraude la communauté mathématique depuis qu'elle a été posée par Henri Poincaré (Poincaré, 1907) et étudiée vers la moitié du XX^e siècle (Borel et Chéron, 1940; Gilbert, 1955). Si les développements ont été sommaires au début de l'étude des mélanges de cartes, ils ont explosé dans les années 1980, notamment avec les travaux de Persi Diaconis. Encore aujourd'hui, c'est un sujet d'actualité; de nombreux articles sont écrits sur le sujet.

Cette thèse porte sur certains mélanges introduits par Victor Reiner, Franco Saliola et Volkmar Welker qu'on appelle les mélanges symétrisés. Nous étudions deux de ces types de mélange :

1. le mélange doublement aléatoire s'exécute en retirant une carte, puis en la réinsérant n'importe où. Au lieu de retirer une seule carte, on peut en piger plusieurs (un nombre déterminé d'avance), les mélanger, puis les réinsérer.

2. on pourrait aussi diviser tout le paquet en un nombre fixé de paquets de 1 et de paquets de 2 cartes, puis battre les paquets ensemble pour n'en obtenir qu'un.

Bien que ces mélanges semblent très distincts, Reiner, Saliola et Welker ont illustré qu'ils ont en commun d'être associés à des matrices dont les valeurs propres sont *jolies* (c'est-à-dire entières et qui s'expriment potentiellement de façon combinatoire). De plus, les opérateurs de la première famille commutent deux à deux, tout comme ceux de la deuxième famille, une propriété rare parmi les mélanges symétrisés, dont font partie ceux présentés plus haut.

Le calcul des valeurs propres est laborieux, notamment parce que les matrices associées aux mélanges sont très grosses. On peut cependant y parvenir en utilisant la théorie de la représentation du groupe symétrique. C'est une technique souvent utilisée pour étudier les mélanges et leurs valeurs propres. Les éléments importants de théorie de la représentation pour comprendre la thèse sont présentés au chapitre 2. Au chapitre 3, on présente les résultats pour la première famille, mais on délègue les preuves au chapitre 4. Pour démontrer les résultats sur la première famille, on utilise largement l'approche adoptée par Anton Dieker et Franco Saliola, qui ont trouvé toutes les valeurs propres des matrices associées au mélange doublement aléatoire (Dieker et Saliola, 2018). Enfin, on présente au chapitre 5 la deuxième famille et ce qu'on sait sur ce mélange.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

1.1 Premières notions

Permutations Un objet d'études central dans cette thèse est l'ensemble des permutations. En effet, nous étudions des mélanges de collections finies d'objets. Ces mélanges ne sont rien d'autre qu'une succession de permutations, choisies en fonction d'une distribution de probabilités fixée.

Une *permutation* est une bijection d'un ensemble vers lui-même. Plus intuitivement, c'est une réorganisation des objets dans l'espace, et la permutation correspond à la façon dont on déplace les objets.

Pour une permutation σ d'un ensemble de n éléments, on utilise principalement trois notations :

— La notation sur deux lignes, dans laquelle on place les nombres de 1 à n sur la première ligne, alignés sur les nombres $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$. Elle n'est pas très utilisée dans cette thèse.

— La notation sur une ligne est définie à partir de la notation sur deux lignes. On retire toutefois la première ligne, puisqu'il s'agit toujours des nombres de 1 à n. À moins d'indication contraire, c'est la notation qui est utilisée dans ce document.

— La notation en cycles consiste à découper la permutation en cycles disjoints, puis à inscrire les cycles entre parenthèses. Notons que, comme ces cycles sont disjoints, on peut les écrire dans n'importe quel ordre. Les points fixes, qui sont des cycles de longueur 1, sont parfois omis.

Exemple 1. La permutation $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&4&7&5&2&6&3\end{smallmatrix}\right)$ peut aussi s'écrire 1475263 et (37)(245).

Le nombre de permutations de n est noté $n!$, prononcé n *factorielle* et correspond au nombre $n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

L'ensemble des entiers de 1 à n est noté $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Groupe symétrique Un ensemble muni d'une loi de composition qui satisfait certaines propriétés algébriques (associativité de la loi de composition, existence d'un élément neutre et existence d'un inverse pour chaque élément) est un groupe, et un groupe est abélien si, pour toute paire d'éléments g et h du groupe, $gh = hg$; on dit alors que g et h commutent. Les permutations de n forment un des exemples les plus connus de groupe non-abélien. Ce groupe est appelé le *groupe symétrique.*

Exemple 2. Les permutations ne commutent pas, comme on peut le voir avec les permutations de 3 éléments $(12) = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)$ et $(23) = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)$. Ainsi,

$$(12) \circ (23) = (123) \text{ et } (23) \circ (12) = (132).$$

Vocabulaire de la combinatoire des mots Les permutations sont très utiles pour exprimer le déplacement d'objets, mais aussi pour lister les objets d'une

collection eux-mêmes lorsqu'ils sont tous distincts. Cependant, il arrive qu'on veuille mélanger des éléments qui ne sont pas forcément distincts. On cherche alors une certaine forme de permutation qui admettrait des répétitions.

Un outil qui permet de faire ça est les mots. Un *mot* est une suite ordonnée de lettres prises dans un alphabet fixé (et fini). Nous ne nous intéressons qu'aux mots finis dans le cadre de cette thèse.

Un mot u est un *sous-mot* de w si toutes les lettres de u apparaissent aussi dans w, dans le même ordre et de façon pas forcément contiguë.

Exemple 3. Le mot de la langue française *symétrique* contient comme sous-mot le mot *yéti*.

Opérations binaires sur les mots : concaténation et battage Nous utiliserons deux opérations binaires sur les mots. La première est la concaténation de deux mots u et v, notée $u \cdot v$, et son résultat est le mot formé de longueur $|u| + |v|$ dont u est le préfixe et v, le suffixe.

Exemple 4. La concaténation des mots de la langue française *pré* et *fixe* donne le mot *préfixe*.

Le nom *parcelle* est la concaténation du nom *parc* et du pronom *elle*.

L'autre opération, un peu plus complexe, est celle de *battage*. Le battage de deux mots u et v, noté $u \sqcup\!\sqcup v$, ressemble, intuitivement, au résultat obtenu en intercalant les lettres de u et v, tout en gardant celles de u (respectivement de v) dans le même ordre que dans le mot original. Le résultat est la combinaison linéaire de tous les résultats possibles, et les coefficients sont le nombre de façons d'obtenir chacun des résultats.

Exemple 5. L'adjectif *versatile* peut être obtenu par battage des mots *veste*

v e r s a t i l e

Figure 1.1 : Le mot *versatile* peut être vu comme un résultat du battage des mots *veste* et *rail*.

et *rail*. On peut le voir à la figure 1.1, où les lettres de *veste* sont en rouge et soulignées, alors que celle de *rail* sont en bleu. Ainsi,

$$\text{veste} \sqcup\!\sqcup \text{rail} = \ldots + \text{versatile} + \ldots$$

Exemple 6. Parmi les battages des mots *tain* et *rente*, on retrouve le nom *trentaine* et l'adjectif *tarentine*. Ainsi,

$$\text{tain} \sqcup\!\sqcup \text{rente} = \ldots + \text{tarentine} + \ldots + \text{trentaine} + \ldots$$

Exemple 7. Le battage des suites de lettre *bo* et *om* donne la combinaison linéaire suivante, qui comprend le mot *boom* :

$$\text{bo} \sqcup\!\sqcup \text{om} = 2 \cdot \text{boom} + \text{bomo} + \text{obom} + \text{obmo} + \text{ombo}.$$

Le battage de mots ne semble peut-être pas si intuitif. Cependant, il peut sembler naturel aux joueurs de cartes à jouer. Il s'agit en effet d'une étape cruciale de plusieurs mélanges habituels, notamment le mélange américain (connu en anglais sous le nom de *riffle shuffle*), dans lequel on sépare le paquet en deux plus petits paquets, que l'on bat pour obtenir un nouveau paquet. Le tout est illustré à la figure 1.2.

Retrait d'un objet dans une liste On note le retrait d'un objet dans une liste par l'accent circonflexe lorsque le contexte est clair. Plus explicitement,

$$(1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n) = (1, 2, \ldots, \widehat{i}, \ldots, n).$$

Figure 1.2 : Battage de cartes dans le mélange américain. [1]

1.2 Opérateurs de mélange

Cette thèse s'intéresse aux mélanges d'une collection d'objets. Il peut s'agir d'une grande diversité d'objets, à commencer par les paquets de cartes à jouer, qui sont souvent cités en exemple. Les cartes à jouer ont la propriété particulièrement intéressante que tous les objets soient distincts (dans un paquet de cartes qui n'est pas truqué, les cartes ne se répètent pas), mais qu'ils se ressemblent tous (les cartes ont toutes la même forme, la même taille, le même poids; et la chance qu'une carte soit pigée ne dépend d'aucune de ces caractéristiques). Toutefois, d'autres collections d'objets peuvent être étudiées, et les propriétés sont alors différentes. Les séquences d'ADN sont des collections avec des objets (les nucléotides) répétés, mais similaires (Durrett, 2003). En revanche, des livres dans une bibliothèque (Phatarfod, 1991) et des fichiers dans un ordinateur (Donnelly, 1991) sont des collections d'objets généralement distincts, mais qui ont aussi des poids distincts. Nous ne nous intéressons pas au dernier cas, mais nous permettons, dans cette thèse, que des objets puissent être répétés.

La littérature sur les mélanges est abondante. En particulier, les mélanges de cartes ont attiré l'attention de nombreux chercheurs, qui ont en revanche trouvé beaucoup de façons de mélanger un paquet de cartes. Parmi les mélanges les plus

1. Source de l'image : Todd Klassy, sur Wikimedia Commons, modifiée.

étudiés, on retrouve :

— le *mélange américain*, qui est l'un des plus utilisés pour les jeux de cartes. L'affirmation voulant que sept itérations du mélange soient nécessaires et suffisantes pour obtenir un paquet bien mélangé s'est même taillé une place dans la presse généraliste, par exemple dans le New York Times. Pour en savoir plus, voir (Aldous et Diaconis, 1986; Bayer et Diaconis, 1992; Diaconis, 2003).

— le *mélange par-dessus la main* est aussi utilisé par les joueurs de carte, et particulièrement par les joueurs de cartes occasionnels. Robin Pemantle a confirmé une impression populaire, soit que ce mélange est particulièrement inefficace, puisqu'il faut mélanger un paquet de n cartes un nombre de fois de l'ordre de $n^2 \log(n)$ avant d'avoir atteint un niveau satisfaisant de hasard (Pemantle, 1989; Jonasson, 2006).

— même le *mélange spatial*, dans lequel on dispose les cartes sur une table et on les déplace approximativement a été modélisé et étudié récemment (Diaconis et Pal, 2017).

— le *mélange par transpositions* est parmi les premiers à avoir été étudié (Diaconis et Shahshahani, 1981). C'est aussi le premier mélange pour lequel l'étude a nécessité d'utiliser la théorie de la représentation, une approche reprise ici.

Afin de définir les opérateurs de mélange symétrisés, nous aurons besoin de certains mélanges moins habituels. Ceux-ci sont listés à la sous-section 1.2.2. Parmi eux, les plus importants sont les trois mélanges décrits ici.

De l'aléatoire au dessus : la bibliothèque de Tsetlin Un des mélanges les plus étudiés est celui de la bibliothèque de Tsetlin. On peut s'imaginer qu'on dispose d'une collection de livres ordonnée d'une certaine façon; contrairement

aux cartes à jouer, les livres représentent généralement le cas où les objets sont sélectionnés selon des probabilités différentes. On s'imagine plutôt facilement que, lorsque vient le temps de sélectionner un livre dans une vraie bibliothèque, la popularité des différents livres n'est pas égale. Dans le mélange de la bibliothèque de Tsetlin, les objets sont numérotés de 1 à n, et on sélectionne le livre i avec probabilité p_i. Avant de pouvoir piger un autre livre, on doit rendre le livre i. On le remet alors sur *le dessus* de la collection; on définit une telle position s'il n'y a pas d'endroit évident pour le dessus. Ce mélange a été étudié par de nombreuses personnes, dont plusieurs qui étaient motivées par les similitudes entre ce mélange et la gestion de la mémoire cache dans les ordinateurs. Pour en savoir plus, on peut notamment lire (Fill, 1996), qui présente un historique élaboré de l'étude de ce mélange.

Un cas particulier de la bibliothèque de Tsetlin est lorsque tous les livres ont la même chance d'être sélectionnés. Ça peut paraître curieux pour une bibliothèque, et c'est pourquoi on privilégie alors l'exemple du mélange de cartes. Dans ce cas, on appelle le mélange celui *de l'aléatoire au dessus*, ou *random-to-top* en anglais. Pour plus d'informations sur ce mélange, particulièrement lorsqu'il est vu comme un opérateur de BHR, voir l'exemple 19.

L'opérateur du dessus à l'aléatoire Un mélange plutôt similaire à la bibliothèque de Tsetlin est celui où, plutôt que de retirer un objet et de le placer sur le dessus, on place l'objet du dessus n'importe où. Ces mélanges se ressemblent étant donné qu'ils correspondent à l'opération inverse, dans le sens suivant : si on pouvait obtenir une collection d'objets placés dans l'ordre donné par la permutation σ à partir de la permutation τ avec la bibliothèque de Tsetlin avec une certaine probabilité, la probabilité est la même d'obtenir une collection placée selon τ à partir de σ avec le mélange du dessus à l'aléatoire. Nous introduisons les matrices

associées aux opérateurs de mélange à la prochaine sous-section; une fois qu'on aura les outils nécessaires, on pourra tout simplement dire que les matrices des opérateurs de l'aléatoire au dessus et du dessus à l'aléatoire sont mutuellement transposées.

Le mélange du dessus à l'aléatoire (*top-to-random*, en anglais) a par exemple été étudié par (Aldous et Diaconis, 1986), pour la version expliquée ici et dans le cas d'une collection d'objets tous de même poids. Une version plus générale a également été définie, dans laquelle on retire un nombre fixé d'objets sur le dessus de la collection, puis on les réinsère un à un, sans forcément préserver l'ordre (Diaconis *et al.*, 1992).

Le mélange doublement aléatoire Enfin, le mélange doublement aléatoire, ou *random-to-random* en anglais, consiste à retirer n'importe quel objet de façon aléatoire dans notre collection, puis à le replacer n'importe où. C'est en quelque sorte la composition des mélanges de la bibliothèque de Tsetlin et de celui du dessus à l'aléatoire.

Imaginé par Persi Diaconis et Laurent Saloff-Coste (Diaconis et Saloff-Coste, 1993), il a attiré beaucoup d'attention depuis (Uyemura-Reyes, 2002; Saloff-Coste et Zúñiga, 2008; Subag, 2013; Qin et Morris, 2017; Dieker et Saliola, 2018), notamment parce que son temps de mélange, c'est-à-dire le nombre d'itérations requises pour bien mélanger les objets, s'est avéré très difficile à calculer. Il a finalement été calculé récemment par Megan Bernstein et Evita Nestoridi (Bernstein et Nestoridi, 2019). L'ingrédient-clef pour le calcul était une description combinatoire des valeurs propres de l'opérateur, trouvée par Anton Dieker et Franco Saliola (Dieker et Saliola, 2018). Leur approche est décrite à la sous-section 3.3.3.

Certains opérateurs de mélanges symétrisés correspondent à une généralisation

du mélange doublement aléatoire, dans laquelle nous déplaçons un plus grand nombre d'objets; on discute de ces mélanges au chapitre 3. On dira plus tard que le mélange doublement aléatoire est la version symétrisée de la bibliothèque de Tsetlin.

1.2.1 Matrices, valeurs propres, vecteurs propres

Les opérateurs de mélange sont des opérateurs linéaires, ce qui fait qu'on peut définir des matrices leur étant associées. Les lignes et les colonnes de ces matrices carrées sont indexées par les dispositions possibles de notre collection d'objets. En particulier, lorsque les objets sont tous distincts, ce sont les permutations qui indexent les lignes et les colonnes. L'entrée de la matrice de l'opérateur φ à la position (c_1, c_2) est le nombre de façons d'obtenir des objets disposés selon c_2 à partir de c_1 en utilisant une fois l'opérateur φ.

Exemple 8. Considérons une collection de trois objets distincts, 1, 2 et 3, de poids respectivement p_1, p_2 et p_3. Si l'on place le dessus de la liste à la fin du mot, on obtient la matrice du mélange de la bibliothèque de Tsetlin :

$$\begin{array}{c} \\ 123 \\ 132 \\ 213 \\ 231 \\ 312 \\ 321 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 123 & 132 & 213 & 231 & 312 & 321 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_3 & p_2 & 0 & p_1 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & 0 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & p_2 & p_3 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & p_1 & p_2 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & p_2 & p_1 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & p_2 & p_1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exemple 9. Il y a 6 façons de disposer une collection contenant seulement deux paires d'objets identiques. On peut les représenter par des mots sur un alphabet binaire : chaque mot contient deux fois chacune des lettres. Alors, la matrice du

mélange doublement aléatoire est

$$\begin{array}{c} \\ \text{aabb} \\ \text{abab} \\ \text{baab} \\ \text{abba} \\ \text{baba} \\ \text{bbaa} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{aabb} & \text{abab} & \text{baab} & \text{abba} & \text{baba} & \text{bbaa} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Les *valeurs propres d'un opérateur* φ sont les valeurs propres de la matrice associée, c'est-à-dire les nombres c pour lesquels il existe au moins un vecteur non-nul $\vec{v}$ satisfaisant $\varphi(\vec{v}) = c \cdot \vec{v}$. Un tel vecteur est appelé un *vecteur propre.*

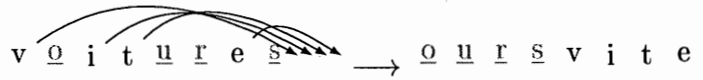
Il y a plusieurs raisons de s'intéresser aux valeurs propres des opérateurs de mélange. Celle qui est la plus souvent citée est que connaître les valeurs propres permet parfois de calculer le temps de mélange, c'est-à-dire le nombre d'itérations nécessaires pour que la collection soit bien mélangée. On en parle davantage à la sous-section 3.4.4.

Comme pour toute matrice diagonalisable, connaître les valeurs propres et les vecteurs propres permet de diagonaliser la matrice, et donc de calculer très rapidement ses puissances. Ici, la puissance m-ième de la matrice donne de l'information sur le nombre de façons de passer d'un état à un autre de notre collection après m itérations du mélange. Une interprétation des puissances de la matrice en termes de probabilités est aussi présentée à la sous-section 1.2.4. On verra au même endroit une interprétation pour au moins un des vecteurs propres.

1.2.2 Opérateurs de Bidigare–Hanlon–Rockmore (BHR)

Une façon de généraliser la bibliothèque de Tsetlin est de prendre un sous-ensemble de k objets dans la suite $w_1 \dots w_n$ puis de les placer sur le dessus de la collection, tout en préservant leur ordre. Dans la littérature, on retrouve ce mélange sous le nom de k *déplacés vers le dessus* (« k-pop shuffle » ou « k-move-to-front »). Ainsi, si $v_1 \dots v_k$ est un sous-mot de $w_1 \dots w_n$ et $u_1 \dots u_{n-k}$ est son complémentaire, alors $v_1 \dots v_k u_1 \dots u_{n-k}$ serait un résultat possible du mélange k déplacés vers l'avant.

Exemple 10. Dans le mot *voitures*, *vite* est un sous-mot et *ours* est son complémentaire. Un des résultats possibles du mélange 4 déplacés vers le dessus est donc *oursvite*. Ici, le dessus est la fin du mot.



De façon encore plus générale, on pourrait partitionner notre suite $w_1 \dots w_n$ en plusieurs sous-mots (disjoints), puis concaténer chacun de ces sous-mots, après avoir déterminé un ordre pour ceux-ci. Une façon de décrire l'ordre dans lequel on concatène les sous-mots est d'utiliser les compositions ensemblistes (expliquées plus loin dans cette section).

C'est d'ailleurs la notation qu'ont utilisé en 1999 Pat Bidigare, Phil Hanlon et Dan Rockmore (Bidigare *et al.*, 1999). Ils ont étudié les mélanges *par éclatement* (pop shuffles), dans lesquels les mots sont partitionnés en un certain nombre de sous-mots de longueur fixe, puis concaténés.

Compositions ensemblistes

Définition 11. Une *composition ensembliste* d'un ensemble S est une liste (ordonnée) de sous-ensembles non-vides et disjoints dont l'union est S.

Autrement dit, une composition de S en est une partition ordonnée.

Exemple 12. $[\{1,3,5\},\{2,4\}]$ est une composition de l'ensemble $[5]$ et $[\{2,4\},\{1,3,5\}]$ en est une autre.

Exemple 13. $[\{5\},\{3\},\{4\},\{1\},\{2\}]$ est une composition de l'ensemble $[5]$ dans laquelle tous les ensembles sont des singletons. De telles compositions sont en bijection avec les permutations. Ainsi, la composition $[\{5\},\{3\},\{4\},\{1\},\{2\}]$ peut être associée à la permutation 53412.

Exemple 14. $[\{1,2\},\{2,3\}]$ n'est pas une composition ensembliste, parce que les sous-ensembles ne sont pas disjoints.

La *forme d'une composition ensembliste de* S est la composition de l'entier $|S|$ dans laquelle on ne retient que la taille des blocs. Autrement dit, la forme de c est la liste (ordonnée) qui contient la taille du premier bloc de c, celle du deuxième bloc, et ainsi de suite.

Exemple 15. $[\{1,3,5\},\{2,4\}]$ est une composition de $[5]$ de forme $(3,2)$, alors que $[\{2,4\},\{1,3,5\}]$ est de forme $(2,3)$.

Produit de compositions ensemblistes Le produit de deux compositions ensemblistes $b = [b_1,\ldots,b_j]$ et $c = [c_1,\ldots,c_l]$ est défini en raffinant les compositions. Par exemple, si on fait le produit $b * c$, b raffine les blocs de c et on obtient l'expression

$$[b_1,\ldots,b_j] * [c_1,\ldots,c_l] = [c_1 \cap b_1, c_1 \cap b_2, \ldots, c_1 \cap b_j, \ldots, c_l \cap b_1, \ldots, c_l \cap b_j],$$

dans laquelle on retire les ensembles vides de l'expression à droite.

Exemple 16. Avec des compositions de $[5]$,

$$[\{1,3\},\{2,4,5\}] * [\{2,3,4\},\{5\},\{1\}] = [\{3\},\{2,4\},\{5\},\{1\}],$$

$$[\{2,3,4\},\{5\},\{1\}] * [\{1,3\},\{2,4,5\}] = [\{3\},\{1\},\{2,4\},\{5\}]$$

et

$$[\{1,3\},\{2,4,5\}] * [\{12345\}] = [\{1,3\},\{2,4,5\}].$$

Il est facile de voir que ce produit n'est pas commutatif, puisque les blocs ne se retrouveraient pas forcément dans le même ordre dans la composition résultante. Un contre-exemple de la commutativité est donné à l'exemple 16. En revanche, ce produit est associatif.

Remarque 17. Dans plusieurs articles, notamment (Bidigare *et al.*, 1999), où les opérateurs de mélange sont définis, le produit de composition s'effectue dans l'autre sens, c'est-à-dire que, si $b * c$, alors c raffine les blocs de b. Or, comme nous travaillons avec des vecteurs ligne multipliés à droite par des matrices (tel qu'expliqué à la remarque 27), nous avons choisi de modifier la définition pour qu'elle soit cohérente avec le but que nous poursuivons.

Monoïde de compositions ensemblistes On peut munir l'ensemble des compositions ensemblistes de $[n]$ d'une loi de composition pour le doter d'une structure algébrique. Cette loi est le produit de compositions ensemblistes, qui est associatif. Le *monoïde de compositions* est obtenu en notant que la composition formée d'un seul sous-ensemble agit comme l'élément neutre, comme à l'exemple 16.

Mélanges et compositions

Bidigare, Hanlon et Rockmore, dans leur étude des mélanges par éclatement, ont étudié le produit de composition sur les permutations (Bidigare *et al.*, 1999). En fait, les permutations de $[n]$ sont en bijection avec les compositions ensemblistes de $[n]$ composées uniquement de singletons : pour passer de la composition à la

permutation, il suffit de noter dans l'ordre les éléments dans chacun des singletons, comme à l'exemple 13.

De plus, si on multiplie une composition ensembliste composée uniquement de singletons avec une autre composition ensembliste, on obtient de nouveau une liste de singletons. En utilisant la bijection, on peut donc multiplier une permutation avec une composition ensembliste pour obtenir de nouveau une permutation.

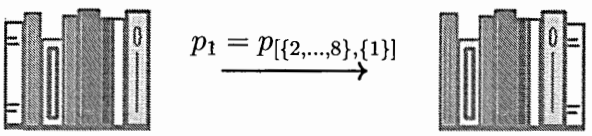
Les mélanges par éclatement sont définis sur les permutations comme la multiplication (à droite) par une combinaison linéaire de compositions ensemblistes. Chaque mélange est défini par la distribution de probabilités sur les combinaisons linéaires.

Exemple 18. On peut multiplier 13254 par une combinaison linéaire de compositions de [5] :

$$13254 * ([\{2,3\},\{1\},\{4,5\}] + 2 \cdot [\{5\},\{1,2,3\},\{4\}]) = 32154 + 2 \cdot 51324.$$

Pour obtenir les mélanges par éclatement, on choisit avec probabilité p_c la composition c, puis on agit avec c sur les permutations. La probabilité de transition de σ à τ est $\sum_{c|\sigma * c = \tau} p_c$.

Exemple 19 (La bibliothèque de Tsetlin)**.** On a défini la bibliothèque de Tsetlin comme le mélange qui déplace le i-ième objet vers le dessus de notre collection. On fixe ici que le dessus soit à la droite des mots. Si nous admettons que les objets aient des poids différents, nous définissions $p_i = p_{[[n]\setminus\{i\},\{i\}]}$ comme la probabilité de déplacer le i-ième livre.



La bibliothèque de Tsetlin correspond ainsi à multiplier à droite par $\sum_{i=1}^{n} p_i[[n]\backslash\{i\}, \{i\}]$.

Valeurs propres et vecteurs propres des opérateurs de BHR

Un des grands résultats obtenus par Bidigare, Hanlon et Rockmore est une façon combinatoire de calculer les valeurs propres de tous les mélanges par éclatement (Bidigare *et al.*, 1999, théorème 2.1). Celles-ci sont indexées par les partitions ensemblistes (les listes non-ordonnées de sous-ensembles non-vides et disjoints dont l'union est l'ensemble de départ) et peuvent être calculées à l'aide d'outils combinatoires simples.

Remarque 20. Les opérateurs de BHR sont définis en fonction de la probabilité de choisir une certaine composition ensembliste, et cette valeur est inscrite comme le coefficient devant la composition, dans la combinaison linéaire. Dans le cadre de cette thèse, la probabilité de choisir une certaine combinaison linéaire a toujours été fixée soit à 0, soit elle correspond à 1 divisé par le nombre de combinaisons linéaires qu'on pourrait choisir. Pour la suite de la thèse, on utilise donc 0 ou 1 comme coefficients pour les combinaisons linéaires.

1.2.3 Opérateurs de mélange symétrisés

Les opérateurs de mélange symétrisés sont construits à partir des opérateurs de BHR. Pour un opérateur de BHR π, sa *version symétrisée* s'écrit $\pi^\top \circ \pi$. Nous nous intéressons ici à deux familles d'opérateurs symétrisés : la première, $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, est présentée au chapitre 3, et est telle que ν_k est un multiple de $\pi_k^\top \circ \pi_k$ avec π_k la somme des compositions de la forme $(n-k, 1, \ldots, 1)$. Quant à la deuxième famille, $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, elle est telle que γ_k est un multiple de $\pi'^\top_k \circ \pi'_k$ lorsque π'_k est la

multiplication par la somme des compositions formées de k blocs de taille 2 suivis de singletons. Cette famille est étudiée au chapitre 5.

Exemple 21. Le mélange doublement aléatoire, présenté à la page 10, est la version symétrisée de la bibliothèque de Tsetlin. En effet, il consiste à appliquer successivement les mélanges de l'aléatoire au dessus et du dessus à l'aléatoire.

Bien qu'on connaisse les valeurs propres des opérateurs de BHR, cela est peu utile pour trouver les valeurs propres des opérateurs symétrisés. Malheureusement, très peu de propriétés d'une certaine matrice sont forcément vraies pour sa version symétrisée.

Suites croissantes

Un outil essentiel pour notre étude des opérateurs de mélange symétrisés est la notion de suites croissantes d'une permutation. En effet, on verra qu'une façon de calculer les entrées des matrices est à l'aide des suites croissantes de permutations (pour plus d'informations sur la construction des matrices, voir la sous-section 3.1.3 et la sous-section 5.1.4).

Définition 22. Dans une permutation σ, une *suite croissante de longueur* k est un ensemble $\{i_1, \ldots, i_k\}$, où à la fois les suites $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ et $(\sigma^{-1}(i_1), \ldots, \sigma^{-1}(i_k))$ sont placées en ordre croissant.

Exemple 23. Considérons la permutation $\sigma = 5623147$. Sa plus longue suite croissante est de longueur 4 et est unique : il s'agit de 2347. En plus des sous-suites de cette dernière, σ contient comme sous-suites croissantes de longueur 3 les suites 147 et 567.

1.2.4 Chaînes de Markov

Un autre point de vue sur les opérateurs de mélange, très répandu, est celui des chaînes de Markov. Une *chaîne de Markov* est un ensemble d'états (ici, les dispositions de notre collection d'objets) muni de transitions entre les états, qui s'effectuent avec une probabilité donnée. Ces probabilités de transition d'un état à un autre restent les mêmes tout au long du processus et ne dépendent pas de ce qui s'est passé auparavant.

Les chaînes de Markov sont souvent représentées par leur matrice de transition. Comme la probabilité d'effectuer une transition reste constante tout au long de l'exécution du processus, la seule information dont on ait besoin pour décrire complètement la chaîne de Markov est la matrice qui donne les probabilités de transition. Cette matrice est indexée par les états, et l'entrée (i, j) de la matrice représente la probabilité de passer de l'état i à l'état j.

Exemple 24. Un premier exemple de chaîne de Markov est souvent celui-ci. Quelqu'un lance successivement une pièce de monnaie biaisée qui a une probabilité p de tomber sur le côté pile et une probabilité $f = 1 - p$ de tomber sur le côté face. Il y a deux états : l'un correspond à avoir, jusqu'à un certain moment, obtenu un nombre pair de fois *pile*, c'est l'état **0**. L'autre état, **1**, est atteint lorsqu'on a obtenu un nombre impair de fois *pile*.

On peut expliciter la chaîne de Markov par la matrice de transition qui suit. Rappelons que, dans cette situation, on change d'état exactement lorsque le joueur obtient le résultat pile : on change d'état avec probabilité p, et on reste dans le

même avec probabilité f.

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} f & p \\ p & f \end{pmatrix} \end{array}.$$

Les deux états pourraient correspondre à deux emplacements, et le lanceur de pièce se déplace d'un emplacement à l'autre seulement s'il obtient pile. Ce joueur est souvent personnalisé comme une grenouille qui se promène d'un nénuphar à l'autre; ici, les nénuphars représentent les états.

À partir de la définition, on peut déduire certaines propriétés des matrices de transition :

Proposition 25. *Les matrices de transition des chaînes de Markov n'ont que des entrées positives ou nulles et la somme des entrées d'une même ligne vaut* 1 *: c'est la somme des probabilités de transition d'un état donné vers tous les états, et ça correspond donc à tous les événements possibles. De telles matrices sont appelées des matrices stochastiques.*

Les opérateurs de mélange ont tous des entrées positives. Cependant, les matrices des opérateurs de mélange ne contiennent que des entiers, et la somme des entrées d'une même ligne est en général beaucoup plus grande que 1.

En revanche, la somme des entrées d'une même ligne correspond au nombre de suites de mouvements qu'on peut faire. Ceci est indépendant de la configuration de notre collection d'objets, et donc la somme d'une ligne est toujours la même. Pour obtenir une chaîne de Markov, on peut diviser la matrice par la somme des entrées d'une ligne.

Exemple 26. À l'exemple 9, on a vu la matrice de l'opérateur de mélange doublement aléatoire sur les collections d'objets qui contiennent deux paires d'objets

identiques. La somme de chaque ligne est 16. Ainsi, la matrice de transition associée à ce mélange est

$$\frac{1}{16} \times \begin{array}{c} \\ \text{aabb} \\ \text{abab} \\ \text{baab} \\ \text{abba} \\ \text{baba} \\ \text{bbaa} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{aabb} & \text{abab} & \text{baab} & \text{abba} & \text{baba} & \text{bbaa} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Une chaîne de Markov est un processus qui est en général répété plusieurs fois. On souhaite donc connaître les puissances de la matrice. Les entrées de la puissance m-ième d'une matrice de transition correspondent en effet aux probabilités de transition en m étapes.

Remarque 27. Une convention largement répandue dans la littérature sur les chaînes de Markov correspond à ce qu'on fait intuitivement : on part d'une certaine distribution, qui représente les probabilités de se trouver dans un état donné au temps t, puis on multiplie à droite par la matrice de transition. On obtient ainsi une nouvelle distribution, qui symbolise les probabilités de se retrouver dans chacun des états au temps $t + 1$. Cette convention, qui s'oppose à celle souvent retenue pour les opérateurs (multiplier une matrice par un vecteur colonne pour obtenir un vecteur colonne), est toutefois celle retenue pour cette thèse.

Valeurs propres des chaînes de Markov Plusieurs choses sont connues sur les valeurs propres des chaînes de Markov. C'est donc de l'information que nous avons *a priori* sur les valeurs propres. Parmi celles-ci, le théorème de Perron-Frobenius est particulièrement utile.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q_{1,t} & \cdots & q_{n,t} \end{pmatrix}}_{\text{Distribution initiale}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice de transition}} = \underbrace{\begin{pmatrix} q_{1,t+1} & \cdots & q_{n,t+1} \end{pmatrix}}_{\text{Distribution finale}} \cdot$$

Figure 1.3 : Multiplication à droite par les matrices.

Proposition 28 (Théorème de Perron-Frobenius, reformulé). *Les matrices de transition des chaînes de Markov ont comme valeurs propres des nombres complexes dont le module est inférieur ou égal à* 1, *et* 1 *est une valeur propre de toutes les matrices de transition. Si de plus la chaîne est irréductible, c'est-à-dire qu'à partir de n'importe quel état on peut rejoindre tous les autres états en un nombre fini d'étapes, et apériodique (une condition généralement satisfaite par les opérateurs de mélanges), alors,*

- 1 *est la seule valeur propre dont le module est* 1
- *le vecteur propre (à gauche) associé à la valeur propre* 1 *est l'unique distribution stationnaire, soit la distribution vers laquelle la chaîne de Markov converge :* $\vec{v} \cdot T = \vec{v}$.[2]

Les relations entre propriétés algébriques des matrices de transition et des questions sur les probabilités sont exhibées au tableau 1.1.

2. Pour les mélanges d'objets de même poids, la distribution stationnaire est généralement la distribution uniforme, mais ce n'est pas le cas des mélanges où les objets ont des poids distincts.

Tableau 1.1 : Correspondances entre propriétés algébriques et questions de probabilités.

Questions sur les processus aléatoires		Propriétés algébriques
les probabilités après m étapes?	$\longleftrightarrow$	les entrées de T^m
le comportement à long terme? (la distribution stationnaire)	$\longleftrightarrow$	les vecteurs propres $\vec{v}$ tels que $\vec{v}T = \vec{v}$
le taux de convergence à la distribution stationnaire?	$\longleftrightarrow$	contrôlé par les valeurs propres de T

CHAPITRE 2

THÉORIE DE LA REPRÉSENTATION DU GROUPE SYMÉTRIQUE

Un outil fondamental à la recherche des valeurs propres d'opérateurs est ce qu'on appelle la théorie de la représentation. Cette théorie permet en effet de réduire la tâche titanesque de calculer les valeurs propres sur d'immenses espaces vectoriels à celle, plus réaliste, de réaliser des calculs sur des sous-espaces de taille (plus) raisonnable. Nous nous servons aussi de la théorie de la représentation pour procéder par induction des mélanges de n objets à ceux de $n+1$ objets. Le point de vue retenu pour présenter la théorie de la représentation est celui des modules. La démarche adoptée est la suivante :

— On décompose l'espace vectoriel sur lequel on agit (l'algèbre du groupe symétrique) en sous-espaces stables pour une action du groupe symétrique. Ceux-ci sont appelés des *modules* (section 2.2).

— On pousse la décomposition jusqu'à ce qu'on obtienne des *modules simples*, c'est-à-dire des modules qui ne contiennent pas de sous-modules (propres). On verra que cela est possible, comme l'indique le *théorème de Maschke*

(sous-section 2.2.1).

— Heureusement, la décomposition de l'algèbre du groupe symétrique en modules simples est bien connue. On présente la *règle de Young*, qui nous donne le détail de cette décomposition. Ce théorème donne une correspondance entre les modules simples et des objets combinatoires, qu'on appelle des tableaux standards (sous-section 2.3.1).

— On utilise le *lemme de Schur*, qui nous permet d'associer les valeurs propres des opérateurs de mélange aux modules simples (théorème 34).

— Pour procéder par induction entre les espaces correspondant à des collections de n et $n+1$ objets, on a besoin de la *règle de branchement* pour passer d'un module simple à un autre (sous-section 2.3.3).

— Enfin, on présente les *caractères du groupe symétrique.* Les caractères d'un groupe sont un outil particulièrement efficace pour une diversité de calculs. Bien qu'ils ne soient que sporadiquement utilisés dans cette thèse, certaines propriétés des caractères essentielles au projet sont présentées à la section 2.4.

2.1 Actions du groupe symétrique

Définition 29. Une *action du groupe symétrique* S_n sur un ensemble E de taille n est une fonction

$$. : S_n \times E \to E$$

qui permute les éléments de E et qui respecte les contraintes suivantes, pour toutes les permutations σ et τ et pour tous les éléments x et y de l'ensemble E :

— $\mathrm{Id}. x = x$,

— $\sigma.(\tau. x) = (\sigma \circ \tau). x$,

— $\sigma.(kx + ly) = k(\sigma.x) + l(\sigma.y)$, pour tous scalaires k et l.

2.2 Modules

Un espace vectoriel V est un S_n-*module* s'il existe une action de S_n qui préserve V, c'est-à-dire telle que $\sigma.\vec{v} \in V$ pour toute permutation σ et pour tout vecteur $\vec{v}$. Pour un groupe G en général, on peut définir un G-module de la même façon.

Exemple 30. Soit V un espace vectoriel de dimension n, et considérons l'action de S_n par permutation des coordonnées. Sous une telle action, le vecteur $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ est envoyé sur $\sigma.\vec{v} = (v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$.

Les deux sous-espaces vectoriels suivants sont des S_n-modules :

— le module trivial, qui est de dimension 1,

$$\{\vec{v} \mid v_1 = v_2 = \ldots = v_n\}.$$

— le module standard, de dimension $n - 1$,

$$\{\vec{v} \mid v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0\}.$$

Morphismes de modules

Définition 31. Une application linéaire qui préserve l'action d'un groupe est appelée un *homomorphisme de modules* (ou tout simplement *un morphisme de modules*). Une telle application θ satisfait $\theta(g.v) = g.\theta(v)$ pour tout élément g du groupe et pour tout vecteur v de l'espace sur lequel g agit.

Exemple 32. Supposons que le groupe est S_3 et que l'espace sur lequel S_3 agit est $\mathbb{R}_3$, par permutation des coordonnées. Alors, une homothétie de rapport

k est un homomorphisme, car $k \cdot (v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}) = ((kv)_{\sigma(1)}, (kv)_{\sigma(2)}, (kv)_{\sigma(3)})$. En revanche, l'application qui multiplie uniquement la première coordonnée par le scalaire k n'est pas un homomorphisme, car, pour la permutation (12), $(k \cdot v_2, v_1, v_3) \neq (v_2, k \cdot v_1, v_3)$.

2.2.1 Décomposition en modules simples

Comme mentionné dans le préambule du chapitre, nous nous intéressons aux modules parce qu'ils nous permettent de limiter les calculs de valeurs propres à de beaucoup plus petits espaces vectoriels. Deux résultats sont fondamentaux dans l'étude de la décomposition des modules : le premier, dû à Heinrich Maschke, est originalement paru en 1899 (Maschke, 1899) [1], alors que le second est dû à Issaï Schur et est paru en 1907 (Schur, 1907). Les théorèmes cités ici sont une adaptation dans le langage moderne de la théorie de la représentation, et peuvent être retrouvés dans divers ouvrages : (Dummit et Foote, 1991, théorème 15.1 et lemme 15.11), (Fulton et Harris, 1991, théorèmes 1.5 et 1.7), (Sagan, 2001, théorèmes 1.5.3 et 1.6.5), entre autres. La version donnée ici s'applique aux algèbres de groupe dont le corps de base est algébriquement clos et de caractéristique 0, les nombres complexes par exemple.

Théorème 33 (Théorème de Maschke). *Soit G un groupe fini et soit V un G-module non-nul. Alors, V se décompose en une somme directe de sous-modules simples :*

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_k.$$

---

1. La théorie de la représentation était naissante à l'époque de Maschke, et l'article original de Maschke ne parle ni de représentations, ni de modules, mais plutôt d'actions linéaires de groupes.

Théorème 34 (Lemme de Schur). *Soit G un groupe et soit U et V deux G-modules simples. Un homomorphisme $\phi : U \to V$ est soit nul, soit un isomorphisme. De plus, si $U = V$, ϕ est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $c \in \mathbb{C}$ tel que $\phi = c \cdot \mathrm{Id}$.*

La conséquence du lemme de Schur qui nous intéresse le plus est que, pour chaque homomorphisme d'un module simple vers lui-même, il existe une unique valeur propre. La raison pour laquelle ceci est particulièrement utile est que les opérateurs de mélange sont des actions de groupe, et donc des homomorphismes de modules. Pour plus de précisions, voir la sous-section 4.1.1. Le théorème de Maschke nous indique d'ailleurs qu'il est possible de décomposer pleinement les modules sur lesquels nous agissons, jusqu'à l'obtention d'une somme directe de modules simples. Le détail de la décomposition des modules sur l'algèbre du groupe symétrique (notre principal sujet d'intérêt) est donné à la section 2.3.

2.3 Algèbre du groupe symétrique

Soit G un groupe. L'algèbre du groupe (sur le corps des nombres complexes), notée $\mathbb{C}G$, est formée des combinaisons linéaires formelles d'éléments de G à coefficients parmi les nombres complexes.

Exemple 35. La combinaison linéaire $4 \cdot 312 + \sqrt{2} \cdot 213$ appartient à l'algèbre du groupe symétrique S_3 sur le corps $\mathbb{C}$.

Lorsque nous étudions les mélanges d'une collection d'objets, nous agissons par une combinaison linéaire de permutations. Les opérateurs de mélange sont donc des éléments de l'algèbre du groupe symétrique, $\mathbb{C}S_n$, (la preuve est donnée à la sous-section 4.1.1) et nous nous penchons ici sur la décomposition de cette algèbre

en modules simples. Cette décomposition est bien connue depuis la première moitié du XX^e siècle, et a d'abord été énoncée par Ferdinand Georg Frobenius et Issaï Schur, avant d'être reprise par Alfred Young, qui a exprimé la décomposition dans les termes que nous reprenons (James et Kerber, 1981, avant-propos par Paul Moritz Cohn). L'outil combinatoire utilisé pour la comprendre est ce qu'on appelle les tableaux. Nous introduirons brièvement les tableaux, puis donnons la décomposition en modules simples de l'algèbre du groupe symétrique.

2.3.1 Tableaux

Partages et diagrammes Pour un entier positif n, un *partage* λ *de* n est une suite décroissante d'entiers strictement positifs $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ dont la somme est n. À chaque partage $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \vdash n$, on associe un *diagramme* formé de λ_1 boîtes dans la première rangée, de λ_2 boîtes placées dans la seconde (juste au-dessus de la première), et ainsi de suite. On place toutes les boîtes comme dans un escalier et on les aligne à gauche (comme dans l'exemple 37); cet escalier compte donc n boîtes au total et l rangées. Des exemples de diagrammes et de partages sont donnés dans l'exemple 37.

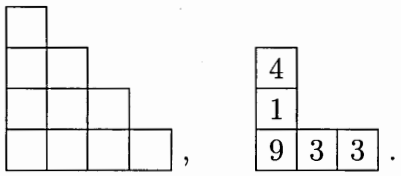
Remarque 36. Au chapitre 1, nous nous sommes penchés notamment sur les compositions d'un entier n, soit des listes ordonnées de nombres naturels dont la somme est n. Les partages diffèrent des compositions puisqu'ils sont des listes placées en ordre décroissant. On peut associer à une composition un partage en triant la composition en ordre décroissant. Par exemple, la composition $(1,3,3,1) \vDash 8$ est envoyée sur le partage $(3,3,1,1) \vdash 8$ lorsqu'on la trie. Évidemment, ceci n'est pas une injection. Toujours en prenant l'exemple de $(1,3,3,1)$, six compositions sont associées au partage $(3,3,1,1)$:

$$(1,1,3,3),\ (1,3,1,3),\ (1,3,3,1),\ (3,1,1,3),\ (3,1,3,1),\ (3,3,1,1).$$

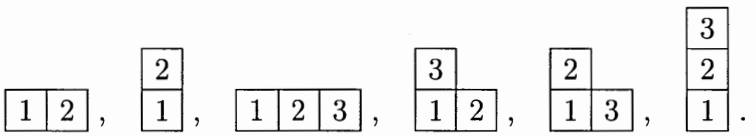
En général, à un partage $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, on peut associer $\frac{l!}{\prod_{j\in[n]} \#\{i|\lambda_i=j\}!}$ compositions d'entiers.

Tableau Pour un diagramme donné, on peut remplir ses boîtes par des entiers positifs; le résultat est appelé un *tableau* ou un *tableau de Young*. Un tableau est un dit standard si les nombres inscrits dans les n boîtes sont les entiers 1 à n et si, de plus, ils sont placés de la manière suivante : lorsqu'on lit une ligne de gauche à droite ou de bas en haut, les nombres sont placés en ordre (strictement) croissant. Tous les tableaux standards de taille 2 et 3 sont listés à l'exemple 38.

Exemple 37. Le tuple $\lambda = (4, 3, 2, 1)$ est un partage de 10 et peut être représenté comme le premier diagramme ci-dessous. La deuxième illustration montre un tableau (pas standard) de forme $(3, 1, 1)$.



Exemple 38. Les tableaux standards de taille 2 et 3 sont



Tableaux standards et suites croissantes d'une permutation Comme mentionné à la sous-section 1.2.3, les opérateurs de mélange symétrisés peuvent être décrits en termes de suites croissantes d'une permutation. En plus d'être utiles pour décomposer l'algèbre du groupe symétrique, les tableaux standards sont pratiques pour étudier les suites croissantes d'une permutation, grâce à une correspondance entre les permutations et les paires de tableaux standards d'une même forme, explicitée par Craige Schensted et Gilbert de Beauregard Robinson

(Schensted, 1961). Toutefois, c'est principalement pour leur lien avec la théorie de la représentation du groupe symétrique qu'ils sont présentés ici.

2.3.2 Modules de Specht

Les modules simples du groupe symétrique ont été définis par Wilhelm Specht (Specht, 1935), et portent son nom. Chaque module de Specht est associé à un partage, et celui associé à $\lambda \vdash n$ est noté S^λ, par exemple. Les $\{S^\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ forment la collection complète de tous les modules simples du groupe symétrique S_n, à isomorphisme près.

Quant à la construction de ces modules, elle est omise ici, mais se trouve dans divers ouvrages de référence, notamment au chapitre 2 de (Sagan, 2001). Cependant, nous aurons besoin de connaître la dimension de chacun des modules :

Théorème 39 (Conséquence du théorème 2.5.2 de (Sagan, 2001)). *Il existe une base du module S^λ qui soit indexée par les tableaux standards de forme λ.*

Ce dernier résultat nous donne en particulier la dimension du module de Specht S^λ : c'est f^λ, le nombre de tableaux standards de forme λ.

Exemple 40. Le module trivial (présenté à l'exemple 30) est représenté par le diagramme formé d'une seule part (de taille n). Sa dimension est 1, ce qui correspond au nombre de tableaux standards de cette forme; l'unique tableau est $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{\ldots}\boxed{n}$. Quant au module standard (aussi à l'exemple 30), il correspond au diagramme $(n-1,1)$ et les $n-1$ tableaux standards de cette forme ressemblent à

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline i & & & & & \\ \hline 1 & \ldots & i{-}1 & i{+}1 & \ldots & n \\ \hline \end{array},$$

avec $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$.

Si nous avons présenté les modules de Specht, c'est surtout pour pouvoir décomposer l'algèbre du groupe symétrique en modules simples. Nous sommes maintenant en mesure de le faire.

Théorème 41 (Règle de Young - Décomposition de $\mathbb{C}S_n$). *L'algèbre du groupe symétrique sur n éléments peut se décomposer en une somme directe de modules de Specht. Plus précisément,*

$$\mathbb{C}S_n \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} f^\lambda S^\lambda \cong \bigoplus_{\substack{t \text{ tableau standard} \\ \text{de taille } n}} S^{\text{forme}(t)},$$

où f^λ est le nombre de tableaux standards de forme λ et S^λ est un module de Specht.

Exemple : La décomposition de l'algèbre du groupe symétrique S_3

L'algèbre du groupe symétrique S_3, de dimension 6, peut être décomposée avec les tableaux standards. Il y a quatre tableaux standards contenant trois boîtes, dont 2 de forme $(2,1)$:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|c|}\hline 3\\\hline 1&2\\\hline\end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|c|}\hline 2\\\hline 1&3\\\hline\end{array}\ \text{et}\ \begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 2\\\hline 1\\\hline\end{array}\ .$$

Ainsi,

$$\mathbb{C}S_3 \cong S^{\square\square\square} \oplus 2\, S^{\square\!\square\!\square} \oplus S^{\begin{array}{|c|}\hline \ \\\hline \ \\\hline \ \\\hline\end{array}}.$$

L'algèbre $\mathbb{C}S_3$ contient donc trois modules simples :

— un premier, $S^{\square\square\square}$, de dimension 1, car c'est le nombre de tableaux standards de forme (3). Il correspond au module trivial.

— un deuxième, $S^{\square\!\square\!\square}$, de dimension 2, car il existe deux tableaux standards de cette forme. Il correspond au module standard. Sa multiplicité dans la

décomposition est 2, aussi parce qu'il y a deux tableaux standards de cette forme.

— un troisième, $S^{\ydiagram{1,1}}$, aussi de dimension 1. Il correspond au module qu'on appelle le module signe.

Valeurs propres et modules de Specht Une conséquence de la règle de Young est qu'il y autant de copies de modules simples dans $\mathbb{C}S_n$ qu'il existe de tableaux standards de taille n. Dans les prochains chapitres, on se sert donc de cette bijection, notamment en conjonction avec un corollaire du lemme de Schur.

Le lemme de Schur dit que les morphismes d'un module simple vers lui-même sont des homothéties, et ces morphismes n'ont donc qu'une seule valeur propre. Or, dans le cas du groupe symétrique, chaque copie d'un module simple est associée (de façon bijective) à un tableau standard. On peut donc associer à chaque tableau standard une valeur propre. La multiplicité d'une valeur propre associée à un tableau standard est alors la dimension du module de Specht correspondant. Celle-ci est donnée par le théorème 39, et est égale au nombre de tableaux standards ayant pour forme le partage auquel le module est associé. Le tout est schématisé à la figure 2.1.

2.3.3 Règle de branchement

Rappelons que la technique que nous souhaitons utiliser pour calculer les valeurs propres utilise l'induction : nous souhaitons en effet trouver une manière de calculer les valeurs propres pour les mélanges d'une collection de $n+1$ objets à partir des valeurs propres pour les mélanges d'une collection de n objets. Ainsi, puisque nous savons ce qui se passe pour un nombre (très) petit d'objets, nous pouvons utiliser cette information pour comprendre les mélanges d'une plus grande collec-

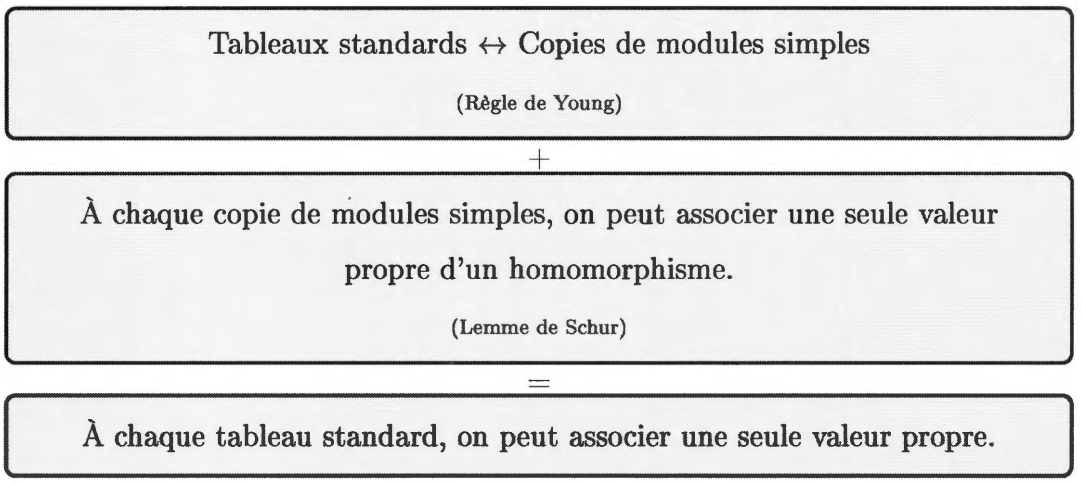


Figure 2.1 : Les valeurs propres de tous les homomorphismes du groupe symétrique sont indexées par les tableaux standards.

tion. Pour faire l'induction, nous utilisons le fait qu'on peut projeter S_n dans S_{n+1} pour en faire un sous-groupe. Ce faisant, on utilise l'induction pour passer de S_n à S_{n+1}, et les modules de $\mathbb{C}S_n$ « deviennent », en quelque sorte, des modules de $\mathbb{C}S_{n+1}$.

Le processus inverse, la *restriction*, est aussi utilisé.

La *règle de branchement* est le théorème qui nous permet de comprendre ces transformations entre $\mathbb{C}S_n$ et $\mathbb{C}S_{n+1}$:

Théorème 42 (Règle de branchement, (James, 1978)). *Soit λ un partage de n. Le module induit de S^λ dans $\mathbb{C}S_{n+1}$ se décompose comme la somme directe des modules S^μ, où μ est un partage obtenu de λ en ajoutant une boîte :*

$$S^\lambda \uparrow^{S_{n+1}} \cong \bigoplus_{\text{Partages } \mu=\lambda+\square} S^\mu.$$

Le module restreint de S_λ dans $\mathbb{C}S_{n-1}$ se décompose comme la somme directe des

S^μ, où μ est un partage de λ obtenu en retirant une boîte :

$$S^\lambda \downarrow_{S_{n-1}} \cong \bigoplus_{\text{Partages } \mu=\lambda-\square} S^\mu.$$

Exemple 43. Considérons l'induction de $\mathbb{C}S_4$ vers $\mathbb{C}S_5$ du module $S^{\ydiagram{2,1,1}}$. À partir du diagramme $\ydiagram{2,1}$, on peut ajouter une boîte dans la première, la deuxième ou quatrième ligne. On ne peut pas en ajouter une dans la troisième ligne, car $(2,1,2)$ n'est pas un partage. Ainsi,

$$S^{\ydiagram{2,1,1}} \uparrow^{S_5} \cong S^{\ydiagram{3,1,1}} \oplus S^{\ydiagram{2,2,1}} \oplus S^{\ydiagram{2,1,1,1}}.$$

De la même façon, la restriction de $S^{\ydiagram{2,1,1}}$ à $\mathbb{C}S_3$ se fait en enlevant une boîte dans la première ou la troisième ligne; enlever la boîte dans la deuxième ligne ne donne pas un diagramme :

$$S^{\ydiagram{2,1,1}} \downarrow_{S_3} \cong S^{\ydiagram{2,1}} \oplus S^{\ydiagram{1,1,1}}.$$

La règle de branchement nous dit donc que, pour l'induction, on pourra se contenter de trouver une procédure d'induction de S^λ à $S^{\lambda+\square}$, plutôt que sur toute l'algèbre. Le schéma de la quête de valeurs propres par l'induction ressemble plutôt à ce qui est à la figure 2.2.

2.4 Caractères du groupe symétrique

Les caractères d'un groupe sont un outil très puissant pour comprendre la structure du groupe; c'est d'ailleurs la raison pour laquelle ils ont été inventés. En plus de cette application, ils peuvent décrire les valeurs propres de certains opérateurs de mélange, sous certaines conditions. La principale condition est que la probabilité d'agir par un élément du groupe soit constante au sein même d'une classe de

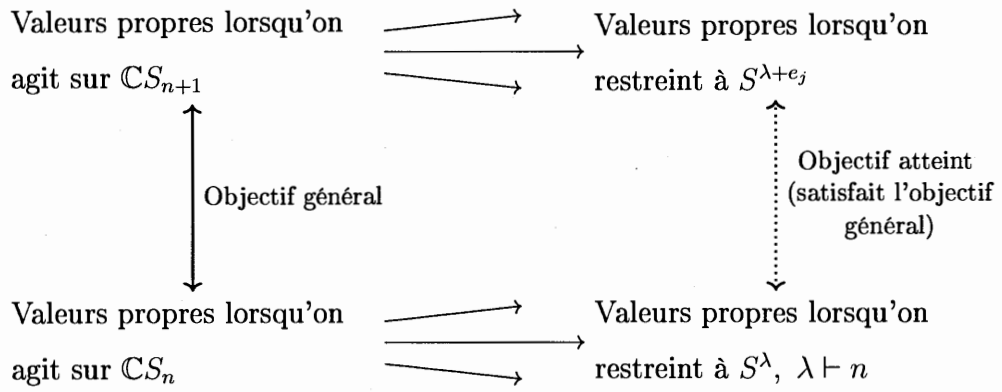


Figure 2.2 : Schéma de la recherche des valeurs propres par induction et par restriction.

conjugaison; voir, par exemple, (Diaconis et Shahshahani, 1981) pour un exemple d'un tel opérateur de mélange, ou (Saloff-Coste, 2004) pour plus de détails sur les techniques. Malheureusement, les opérateurs de mélange symétrisés ne satisfont pas cette propriété, mais les caractères seront tout de même utiles.

Définition 44. Soit φ un morphisme de groupes de G vers $GL(\mathbb{C})$, le groupe des matrices inversibles à coefficients complexes. Le *caractère* χ^{φ} de ce morphisme est la fonction qui associe à chaque élément g du groupe la trace de la matrice $\varphi(g)$.

Proposition 45. *Le caractère d'un groupe est constant sur une classe de conjugaison : c'est ce qu'on appelle une fonction centrale.*

Démonstration. En effet, φ est un morphisme de groupes, et $\varphi(hgh^{-1}) = \varphi(h)\varphi(g)(\varphi(h))^{-1}$. De plus, la trace étant invariante par similitude, $\chi^{\varphi}(hgh^{-1}) = \mathrm{tr}(\varphi(h)\varphi(g)(\varphi(h))^{-1}) = \mathrm{tr}(\varphi(g)) = \chi^{\varphi}(g)$. □

Que des nombres entiers : la règle de Murnaghan-Nakayama Les caractères du groupe symétrique ont ceci de particulier qu'ils sont tous des nombres réels et entiers et qu'ils peuvent être décrits de façon combinatoire, bien qu'ils ne

soient pas toujours positifs. Ils sont en effet décrits par le retrait d'un ensemble de boîtes dans un diagramme. La procédure qui décrit le calcul des caractères du groupe symétrique est la règle de Murnaghan-Nakayama et peut facilement être trouvée dans les ouvrages de référence (par exemple, (Sagan, 2001, §4.10) et (Stanley, 1999, §7.17))

Corollaire 46 (de la règle de Murnaghan-Nakayama). *Les caractères du groupe symétrique sont des entiers.*

À titre d'exemples, tous les caractères irréductibles des groupes S_3 et S_4 sont représentés aux tableaux 2.1 et 2.2. Comme les caractères sont des fonctions centrales, une seule permutation par classe de conjugaison est représentée dans les tables. Les caractères des groupes $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sont représentés aux tableaux 2.3 et 2.4, où l'on peut observer qu'ils ne sont pas tous des entiers.

Le produit de caractères et les relations d'orthogonalité entre les caractères sont présentés plus loin, à la sous-section 4.2.1.

Tableau 2.1 : Table de caractères de S_3.

	Id	(12)	(123)
$\chi^{\ydiagram{3}}$	1	1	1
$\chi^{\ydiagram{2,1}}$	1	−1	1
$\chi^{\ydiagram{2,1}}$	2	0	−1

Tableau 2.2 : Table de caractères de S_4.

	Id	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
$\chi^{\ydiagram{4}}$	1	1	1	1	1
$\chi^{\ydiagram{1,1,1,1}}$	1	−1	1	1	−1
$\chi^{\ydiagram{2,2}}$	2	0	2	−1	0
$\chi^{\ydiagram{3,1}}$	3	−1	−1	0	1
$\chi^{\ydiagram{3,1}}$	3	1	−1	0	−1

Tableau 2.3 : Table de caractères de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

	0	1	2	3
χ^1	1	1	1	1
χ^2	1	i	-1	$-i$
χ^3	1	-1	1	-1
χ^4	1	$-i$	-1	i

Tableau 2.4 : Table de caractères de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, où $\zeta = e^{2\pi i/5}$.

	0	1	2	3	4
χ^1	1	1	1	1	1
χ^2	1	ζ^1	ζ^2	ζ^3	ζ^4
χ^3	1	ζ^2	ζ^4	ζ^1	ζ^3
χ^4	1	ζ^3	ζ^1	ζ^4	ζ^2
χ^5	1	ζ^4	ζ^3	ζ^2	ζ^1

CHAPITRE 3

UNE PREMIÈRE FAMILLE D'OPÉRATEURS

On entre maintenant dans le vif du sujet. Des deux familles d'opérateurs sur lesquels porte principalement cette thèse, la première famille est certainement celle sur laquelle nous savons le mieux expliquer les phénomènes. Elle était déjà bien étudiée dans le chapitre VI de (Reiner *et al.*, 2014), mais certaines conjectures étaient laissées en plan. Ce chapitre donne la réponse à celles-ci. La plus importante est que les valeurs propres de ces opérateurs sont toutes entières, et c'est le contenu du corollaire 95. Le résultat principal, qui décrit comment calculer explicitement les valeurs propres des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, est décrit ici (théorème 78), mais sa preuve est présentée au chapitre 4.

3.1 Définition

On peut définir les opérateurs de la famille $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de plusieurs façons. Trois sont décrites dans cette section, et l'équivalence des définitions est démontrée. La forme matricielle de ces opérateurs linéaires est aussi donnée. Une quatrième définition, plus technique, est présentée au chapitre 4.

3.1.1 Comme un humain qui mélange...

La première définition est la plus utile, à la fois pour raconter les opérateurs de mélange symétrisés, mais aussi pour comprendre ce qui se passe. Il s'agit en fait de sa définition en tant qu'opérateur de mélange. Si on voulait mélanger une collection finie d'objets avec un opérateur ν_k, c'est ce qu'on ferait, concrètement.

Définition 47. Soit $w = (w_1, \ldots, w_n)$ une suite ordonnée d'objets, des lettres dans un mot, par exemple. L'opérateur ν_k retire k des n objets de la suite w, puis les réinsère un après l'autre de telle façon que l'ordre de ces k objets n'est pas nécessairement préservé. On encode le résultat de cette opération dans une combinaison linéaire formelle des permutations de $w_1, \ldots, w_n$ que l'on peut obtenir en réalisant ce mélange. Dans cette combinaison linéaire, le coefficient d'une suite donnée est le nombre de façons dont on peut obtenir cette suite en une itération du mélange.

Exemple 48. Appliquer ν_1 à la suite abc revient à retirer une des trois lettres et à la réinsérer dans un des trois espaces restants. Par exemple, en retirant la lettre a, les suites abc, bac et bca peuvent chacune être obtenue d'une façon. En retirant plutôt b ou c, on obtient

$$\nu_1(\mathsf{abc}) = 3 \cdot \mathsf{abc} + 2 \cdot \mathsf{bac} + 2 \cdot \mathsf{acb} + \mathsf{cab} + \mathsf{bca}.$$

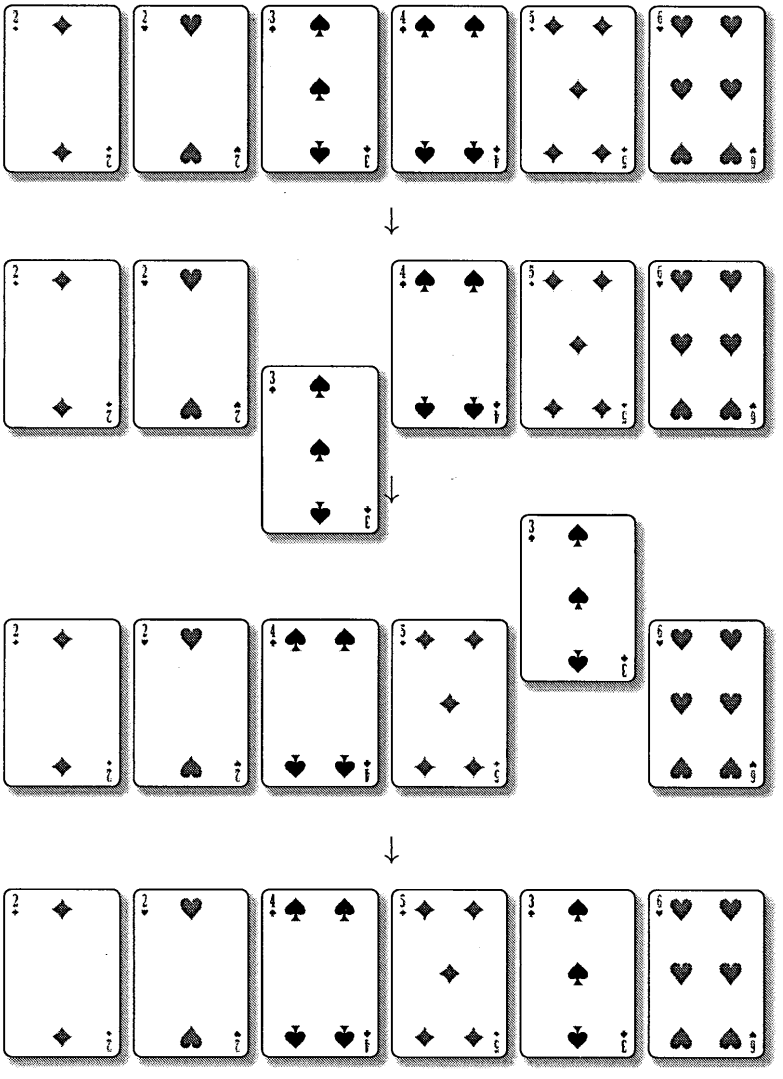
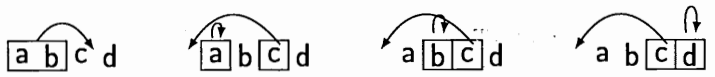


Figure 3.1 : Le mélange doublement aléatoire déplace une seule carte à la fois.

Exemple 49. L'opérateur ν_2 agir sur le mot abcd en déplaçant deux lettres, les lettres pouvant être « déplacées » à l'endroit où elles étaient déjà. En supposant que les lettres a, b, c et d soient toutes distinctes, le coefficient de cabd dans ν_2(abcd) est 4. Les paires de lettres à déplacer pour obtenir cabd sont soit {a,b}, {a,c}, {b,c} ou {c,d}.



Ainsi,

$$\nu_2(\mathsf{abcd}) = \ldots + 4 \cdot \mathsf{cabd} + \ldots$$

L'opérateur ν_0 est l'identité; il y a en effet une seule façon de ne retirer aucun objet dans la suite. Quant à ν_1, c'est le mélange doublement aléatoire, présenté à la page 10.

Remarque 50. Ces opérateurs ont aussi été notés sous la forme $\nu_{(n-k,1^k)}$ (Reiner *et al.*, 2014). Dans le contexte de leur article, il est naturel que les auteurs utilisent cette notation puisqu'ils couvrent le cas des opérateurs $\{\nu_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ indexés par les partages d'entiers.

Dans ce chapitre et le suivant, nous ne nous intéresserons qu'aux partages de la forme $(n-k, 1^k)$. Au besoin, nous préciserons la valeur de n. Au chapitre 5, nous étudions les partages d'une autre forme, mais les opérateurs portent un autre nom.

3.1.2 Suites croissantes d'une permutation

La définition de ces opérateurs en termes de mélanges est pratique pour développer une certaine intuition, mais son utilité décroît rapidement lorsqu'on souhaite écrire

une définition formelle des matrices de ces opérateurs linéaires. Pour pallier cette lacune, on peut utiliser une définition alternative des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ utilisant les suites croissantes d'une permutation, définies à la page 18. On note le nombre de suites croissantes de longueur i dans une permutation σ par $\text{noninv}_i(\sigma)$. Notons que ces suites ne doivent pas nécessairement être disjointes.

Remarque 51. La notation noninv_i provient de (Reiner *et al.*, 2014) et est nommée ainsi en référence aux i-non-inversions, comme elles sont appelées dans ce texte. Une suite décroissante de longueur 2 dans une permutation étant une inversion, une non-inversion serait une suite croissante. C'est pourquoi une suite croissante de longueur i est appelée une i-non-inversion.

Rappelons que, dans une permutation σ, une *suite croissante de longueur k* est un ensemble $\{i_1, \ldots, i_k\}$, où à la fois les suites $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ et $(\sigma^{-1}(i_1), \ldots, \sigma^{-1}(i_k))$ sont placées en ordre croissant. En d'autres mots, il s'agit d'un sous-mot formé de lettres placées en ordre croissant dans le mot qu'est la permutation.

Proposition 52. *Soit σ une permutation. Le nombre de suites croissantes de longueur k est le même dans σ et dans son inverse, σ^{-1}.*

Démonstration. Pour le démontrer, il suffit de construire une suite croissante de longueur k dans σ^{-1} pour chacune de celles dans σ.

Soit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ une suite croissante de σ. Alors $\sigma^{-1}(i_1) < \ldots < \sigma^{-1}(i_k)$.

Posons $j_1 = \sigma^{-1}(i_1), \ldots, j_k = \sigma^{-1}(i_k)$. Alors, $(\sigma(j_1), \ldots, \sigma(j_k)) = (i_1, \ldots, i_k)$ et $(j_1, \ldots, j_k)$ est une suite croissante de longueur k dans σ^{-1}. □

Ce dernier résultat nous permet, plus loin, de démontrer que les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont symétriques. Pour cela, voici une autre définition de ces opérateurs, donnée par (Reiner *et al.*, 2014).

Définition 53. Soit σ une permutation de n éléments et notons $\text{noninv}_i(\sigma)$ le nombre de séquences croissantes de longueur i dans σ. Alors, ν_k agit sur σ de la façon suivante :

$$\nu_k(\sigma) = \sum_{\tau \in S_n} \text{noninv}_{n-k}(\sigma^{-1}\tau)\tau.$$

Remarque 54. Cette définition fonctionne bien pour $\nu_k(\sigma)$, mais, contrairement à la définition 47, elle ne permet pas de décrire $\nu_k(w)$ sur un mot w qui admettrait des répétitions de lettres. Cette lacune sera comblée par la définition 55.

Preuve de l'équivalence des définitions 47 et 53. Pour simplifier la preuve, on suppose que notre mot de départ est la permutation $\sigma = \text{Id}$. Notre preuve pourra alors être étendue à toutes les permutations étant donné que la définition 53 tient compte de la permutation de départ. Pour les mots qui ne sont pas des permutations, la définition est donnée plus loin (définition 55) et l'équivalence est alors démontrée.

On peut alors écrire formellement la définition 47. Pour ce faire, on rappelle une notation. Le *battage*, noté $u \sqcup\!\sqcup v$, est la combinaison linéaire formelle de tous les mots qui contiennent exactement u et v comme sous-mots disjoints. Alors,

$$\nu_k(12\ldots\mathsf{n}) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \sum_{\eta \in S_k} 12\ldots(\mathsf{i}_1 - 1)(\mathsf{i}_1 + 1)\ldots(\mathsf{i}_k - 1)(\mathsf{i}_k + 1)\ldots\mathsf{n} \sqcup\!\sqcup\ \mathsf{i}_{\eta(1)}\cdots\mathsf{i}_{\eta(k)}.$$

Pour montrer l'équivalence avec la définition 53, il faut que le coefficient de la permutation τ dans cette équation soit $\text{noninv}_{n-k}(\tau)$. Or, le nombre de suites croissantes de longueur $(n-k)$ dans τ est calculé ainsi : c'est le nombre de sous-mots $12\ldots(\mathsf{i}_1 - 1)(\mathsf{i}_1 + 1)\ldots(\mathsf{i}_k - 1)(\mathsf{i}_k + 1)\ldots\mathsf{n}$ tels que $\tau(1)\tau(2)\ldots\tau(i_1 - 1)\tau(i_1 + 1)\ldots\tau(i_k - 1)\tau(i_k + 1)\ldots\tau(n)$ est également un sous-mot. Ensuite, pour une telle sous-suite croissante, il n'y a qu'un choix pour η et les

positions auxquelles insérer $\mathsf{i}_{\eta(1)}, \ldots, \mathsf{i}_{\eta(k)}$ pour obtenir τ. Ainsi, on peut réécrire

$$\nu_k(\mathrm{Id}) = \sum_{\tau} \mathrm{noninv}_{n-k}(\tau)\tau,$$

ce qui est la définition 53. □

Une définition analogue sur les mots

Comme noté précédemment, la définition 53 ne fonctionne que sur les permutations, n'étant pas bien définie sur les mots qui auraient des répétitions puisque ces mots ne peuvent pas être inversés. Nous présentons une définition alternative.

Définition 55 (Alternative à définition 53)**.** Soit w un mot de taille n. Alors,

$$\nu_k(w) = \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{noninv}_{n-k}(\tau)\ w \cdot \tau,$$

où $w \cdot \tau = w_{\tau(1)} \ldots w_{\tau(n)}$.

Cohérence des définitions 53 et 55. Cette définition découle de la définition 53. En effet, on peut réécrire, pour $\sigma \in S_n$,

$$\begin{aligned}
\nu_k(\sigma) &= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{noninv}_{n-k}(\sigma^{-1}\tau)\ \tau \\
&= \sum_{\sigma\tau \in S_n} \mathrm{noninv}_{n-k}(\sigma^{-1}\sigma\tau)\ \sigma\tau \\
&= \sum_{\sigma\tau \in S_n} \mathrm{noninv}_{n-k}(\tau)\ \sigma\tau \\
&= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{noninv}_{n-k}(\tau)\ \sigma\tau.
\end{aligned}$$

La dernière égalité découle du fait qu'on somme sur toutes les permutations, alors que la deuxième provient d'un changement de variable.

Cette définition ne demandant pas qu'on « inverse » un mot, elle peut être directement étendue des permutations aux mots :

$$\nu_k(w) = \sum_{\tau \in S_n} \text{noninv}_{n-k}(\tau)\ w \cdot \tau. \qquad \square$$

3.1.3 Matrices

Ces dernières définitions de ν_k nous permettent de définir facilement les matrices représentant les opérateurs linéaires ν_k. Rappelons que l'espace vectoriel dans lequel on se place est l'algèbre du groupe symétrique, $\mathbb{C}S_n$, et que les éléments de cet espace sont tous des combinaisons linéaires de permutations des nombres de 1 à n. Nous définissons d'abord les matrices pour les permutations, qui forment une base de $\mathbb{C}S_n$, puis nous généralisons aux mots avec répétitions possibles (sur un autre espace vectoriel). La matrice M_k est telle que $(\vec{v} \cdot M_k)_\sigma = \nu_k(\sigma)$ lorsque $\vec{v}$ est le vecteur ligne de toutes les permutations de S_n, dans le même ordre que les lignes de la matrice.

L'entrée (σ, τ) de la matrice M_k associée à ν_k vaut $\text{noninv}_{n-k}(\sigma^{-1}\tau)$. On a alors bien que le vecteur de toutes les permutations multiplié par la colonne σ vaut $\sum_{\tau \in S_n} \text{noninv}_{n-k}(\sigma^{-1}\tau)\tau = \nu_k(\sigma)$.

Exemple 56. La matrice de l'opérateur linéaire ν_1 sur les permutations de lon-

gueur 3 est

$$\begin{array}{c} \\ \mathsf{abc} \\ \mathsf{acb} \\ \mathsf{bac} \\ \mathsf{bca} \\ \mathsf{cab} \\ \mathsf{cba} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathsf{abc} & \mathsf{acb} & \mathsf{bac} & \mathsf{bca} & \mathsf{cab} & \mathsf{cba} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Pour les mots avec répétitions, on indexe les lignes (et les colonnes) par tous les mots qu'on peut obtenir en permutant les positions d'un mot. Ces mots sont tous les mots qui comportent le même nombre d'occurrences de chacune des lettres. Encore une fois, si $\vec{v}$ représente le vecteur (ligne) de tous les états (les mots) possibles et si M_k est la matrice de ν_k, on souhaite que l'unique élément de la colonne w de $\vec{v} \cdot M_k$ soit l'élément $\nu_k(w)$; un exemple est donné avec ν_2 et le mot abab (exemple 57). Étant donné la définition de $\nu_k(w)$, l'entrée (w, u) de M_k vaut $\sum_{\substack{\tau \in S_n, \\ w \cdot \tau = u}} \mathrm{noninv}_{n-k}(\tau)$.

Exemple 57. Cette matrice décrit l'opérateur ν_2 sur les mots contenant deux occurrences de a et deux occurrences de b :

$$\nu_2 = \begin{array}{c} \\ \mathsf{aabb} \\ \mathsf{abab} \\ \mathsf{baab} \\ \mathsf{abba} \\ \mathsf{baba} \\ \mathsf{bbaa} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathsf{aabb} & \mathsf{abab} & \mathsf{baab} & \mathsf{abba} & \mathsf{baba} & \mathsf{bbaa} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 16 & 12 & 12 & 8 & 4 \\ 16 & 14 & 12 & 12 & 10 & 8 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 8 & 10 & 12 & 12 & 14 & 16 \\ 4 & 8 & 12 & 12 & 16 & 20 \end{pmatrix} \end{array}.$$

De plus, soit le vecteur $\vec{v} = (\mathsf{aabb}, \mathsf{abab}, \mathsf{baab}, \mathsf{abba}, \mathsf{baba}, \mathsf{bbaa})$.

Ici, l'unique élément de la deuxième colonne du vecteur ligne $\vec{v} \cdot \nu_2$ vaut

$$16 \cdot \mathsf{aabb} + 14 \cdot \mathsf{abab} + 12 \cdot \mathsf{baab} + 12 \cdot \mathsf{abba} + 10 \cdot \mathsf{baba} + 8 \cdot \mathsf{bbaa},$$

soit $\nu_2(\mathsf{abab})$.

Ces matrices étant définies, on peut analyser leurs propriétés. Quelques-unes d'entre elles se retrouvent ci-dessous.

Matrices entières Les matrices ainsi formées contiennent uniquement des entiers positifs, étant donné que leurs entrées comptent le nombre de suites croissantes d'une permutation.

Matrices symétriques On a remarqué, à la proposition 52 que $\mathrm{noninv}_k(\sigma^{-1}\tau) = \mathrm{noninv}_k(\tau^{-1}\sigma)$. Or, $\mathrm{noninv}_k(\sigma^{-1}\tau)$ est l'entrée (σ, τ) de la matrice de ν_k. Ainsi, les entrées (σ, τ) et (τ, σ) de la matrice sont égales et la matrice est symétrique. Comme elle est aussi réelle, elle est hermitienne.

Matrices stochastiques... ou presque! Celles et ceux à qui les chaînes de Markov sont familières remarqueront peut-être que la matrice ci-dessus n'est pas une matrice de transition. Dans une matrice de transition, les entrées sont des probabilités de transition, et prennent donc des valeurs entre 0 et 1. De plus, les entrées d'une même ligne d'une matrice de transition ont toujours pour somme 1, puisqu'il s'agit de la somme des probabilités pour tous les événements qui peuvent se produire lorsque l'on se trouve dans un certain état.

Cela dit, dans l'exemple 56, la somme de chaque ligne est toujours 9 et toutes les entrées sont comprises entre 0 et 9. Pour retrouver une matrice de transition, on pourrait donc diviser chacune des entrées par 9 (elles ne seraient alors plus des entiers).

Chaque ligne de la matrice ν_k représente ce qui peut se produire à partir d'un état donné. Chaque état correspond à une suite $w = (w_1, \ldots, w_n)$, et les événements obtenus après une transition le sont en :

— sélectionnant k lettres à retirer parmi $w_1, \ldots, w_n$ ($\binom{n}{k}$ possibilités);

— permutant ces k lettres ($k!$ possibilités);

— réinsérant les k lettres pour former une nouvelle suite $w' = (w'_1, \ldots, w'_n)$ ($\binom{n}{k}$ possibilités).

Le nombre d'événements possibles, en comptant les répétitions, est ainsi $\binom{n}{k}^2 k!$, ce qui correspond au produit du nombre de façons d'accomplir chacune des trois étapes ci-haut. Ainsi, $\frac{\nu_k}{\binom{n}{k}^2 k!}$ est la matrice de transition de la chaîne de Markov associée à ν_k.

Il est connu que les matrices des chaînes de Markov ont des valeurs propres complexes dont le module est inférieur ou égal à 1. Il est de plus connu que la multiplicité de la valeur propre 1 est toujours 1 pour les chaînes de Markov qui satisfont deux propriétés (irréductibilité et apériodicité), satisfaites par les opérateurs de mélange symétrisés, de même que par beaucoup d'opérateurs de mélange. Normaliser les entrées de la matrice nous permet d'avoir des valeurs propres entières, dont la plus grande est $\binom{n}{k}^2 k!$.

Matrices semi-définies positives Une matrice M est **semi-définie positive** si, pour tout vecteur colonne à coefficients complexes z, le nombre $z^* M z$ est réel et positif, où z^* désigne le vecteur ligne dans lequel z_i^* est le conjugué complexe de z_i.

Les opérateurs de mélange symétrisés sont des matrices semi-définies positives. En effet, pour chaque opérateur de mélange symétrisé M, il existe une matrice réelle π telle que $\pi\pi^\top = M$: à la sous-section 1.2.3, on disait justement que les

opérateurs de mélange symétrisés s'écrivaient toujours comme $\pi^\top \circ \pi$ pour un certain opérateur (réel) de BHR π. Comme on multiplie les matrices à droite (tel qu'expliqué dans la remarque 27), ceci revient à dire que $M = \pi\pi^\top$. L'opérateur π est décrit dans la prochaine sous-section. Ainsi, pour tout vecteur colonne z à coefficients complexes,

$$z^*Mz = z^*\pi\pi^\top z = (\pi^\top \overline{z})^\top(\pi^\top z) = \sum_{i=1}^{\dim(M)} \overline{(\pi^\top z)}_i(\pi^\top z)_i = \sum_{i=1}^{\dim(M)} \| (\pi^\top z)_i \|^2 \in \mathbb{R}_+.$$

3.1.4 Opérateurs de BHR symétrisés

On a énoncé plus tôt (sous-section 1.2.3 et sous-section 3.1.3) que les matrices des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ pouvaient s'écrire comme la composition d'une matrice π_k et de sa transposée ($\pi_k^\top$). En effet, chacun des ν_k consiste en deux grandes étapes : retirer k objets et les mélanger de toutes les façons possibles, puis les placer sur le dessus est la première grande étape; la seconde consiste à retirer les k objets du dessus de notre collection, à les mélanger, puis à les battre avec le reste de la collection.

Ainsi, la première grande étape est une généralisation de l'opérateur de l'aléatoire vers le dessus dans laquelle on retire k objets plutôt qu'un seul; on note cet opérateur π_k. Pour la notation ici, on suppose que le dessus est à la droite des mots. Pour une permutation $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n$, on obtient alors

$$\pi_k(\sigma) = \sum_{1\le i_1<\dots i_k\le n} \sum_{\tau\in S_k} \sigma_1 \dots \widehat{\sigma_{i_1}} \dots \widehat{\sigma_{i_k}} \dots \sigma_n \sigma_{i_{\tau_1}} \dots \sigma_{i_{\tau_k}}. \tag{3.1}$$

On peut voir sans trop de difficulté que π_k est un opérateur de BHR, puisqu'on l'obtient en multipliant σ à droite par une certaine somme de composition. En effet, le produit de σ par la somme de toutes les compositions de $k+1$ blocs, le premier étant de taille $n-k$ et suivi de k singletons, donne exactement le résultat de l'équation (3.1).

Exemple 58. L'opérateur π_2 appliqué à 1234 donne le résultat

$$\pi_2(1234) = 1234 + 1243 + 1324 + 1342 + 1423 + 1432 \\ + 2314 + 2341 + 2413 + 2431 + 3412 + 3421.$$

C'est aussi le résultat de $\sigma \cdot \left(\sum_{c_1,c_2}[\{1,2,3,4\}\backslash\{c_1,c_2\},\{c_1\},\{c_2\}]\right)$.

La deuxième grande étape des opérateurs de mélange ν_k est le battage des k objets du dessus avec les autres objets. Ceci n'est pas un opérateur de BHR, puisque l'action effectuée ne dépend pas des objets à déplacer, mais plutôt de leur position. On fait toutefois le mouvement inverse de celui à la première étape : plutôt que de déplacer k objets de n'importe quelle position vers le dessus, on déplace les k objets du dessus vers n'importe quelle position. C'est d'ailleurs une généralisation d'un mélange bien connu, celui du dessus vers l'aléatoire. Ainsi, le nombre de façons d'obtenir σ à partir de τ à la première étape correspond au nombre de façons d'obtenir τ à partir de σ à la seconde étape. La matrice de la seconde étape est donnée par $\pi_k^\top$.

Enfin, il est utile de remarquer que, dans la définition de chacune des deux étapes, nous avons dit que nous mélangions les k objets retirés. Dans les faits, nous n'avons besoin de le faire qu'une fois, plutôt que deux (à la fin de la première étape et au début de la deuxième). En mélangeant deux fois, nous n'avons pas changé les résultats possibles. Nous n'avons qu'artificiellement introduit $k!$ fois plus de résultats possibles, et nous devons donc diviser par ce nombre pour obtenir une définition adéquate de ν_k.

On trouve donc la définition suivante pour l'opérateur ν_k :

Définition 59. Soit π_k la multiplication à droite par la somme des compositions de la forme $(n-k,1,\ldots,1)$. Alors, ν_k est la multiplication à droite par $\frac{\pi_k\pi_k^\top}{k!}$.

Notons que la dernière définition ne s'applique qu'aux permutations, et non aux

mots.

3.2 Commutativité

Théorème 60 (Théorème I.1.1 de (Reiner *et al.*, 2014)). *Les opérateurs de la famille $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ commutent entre eux.*

Victor Reiner, Franco Saliola et Volkmar Welker remarquaient, dans leur article, que cette propriété était très particulière à la famille $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. En effet, parmi les opérateurs de mélange symétrisés, seules les familles $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (présentée au chapitre 5) voient leurs opérateurs commuter entre eux (à l'exception de cas triviaux). Dans leur étude de la famille $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, ils notaient toutefois un défi : trouver une preuve plus éclairante que la leur du théorème 60. Une telle preuve se trouve au chapitre 4.

3.3 Valeurs propres

Dans leur article sur les opérateurs de mélange symétrisés, Reiner, Saliola et Welker ont largement discuté des valeurs propres des opérateurs de mélange symétrisés, ce qui a permis d'en dégager quelques propriétés.

Ils ont d'abord démontré que les valeurs propres de tous les opérateurs de mélange symétrisés étaient réelles et positives. Dans la sous-section 3.3.1, nous en détaillons les raisons.

Ils ont aussi remarqué que les valeurs propres semblaient être entières pour les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Dans le second cas, une formule utilisant les ca-

ractères du groupe symétrique existe pour calculer les valeurs propres; ceci est d'ailleurs expliqué à la sous-section 5.2.1. Ils ont de plus conjecturé qu'il s'agit des deux seules familles d'opérateurs de mélange symétrisés dont les valeurs propres sont entières.

Dans cette section, on démontre que les valeurs propres de ν_k sont bel et bien entières. Pour les valeurs propres de γ_k, elles sont détaillées au chapitre 5. Quant au fait que les valeurs propres des autres opérateurs ne sont pas entières, ce sujet n'est pas abordé ici.

En plus de démontrer que les valeurs propres de ν_k sont entières, on donne une formule récursive permettant de les calculer explicitement, c'est-à-dire qu'on peut calculer les valeurs propres de ν_k à partir de celles de ν_{k-1}. Notons que les valeurs propres pour le mélange doublement aléatoire, ν_1, ont déjà été calculées par Anton Dieker et Franco Saliola (Dieker et Saliola, 2018); leur résultat est présenté à la sous-section 3.3.3. La façon de faire combinatoire présentée ici permet notamment de calculer les valeurs propres quand les suites de lettres sont longues : la complexité du calcul est en effet donnée plus loin (sous-section 3.4.4).

3.3.1 Positivité

Dans leur étude des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, Reiner, Saliola et Welker ont remarqué que leurs valeurs propres étaient toujours réelles et positives. Le coeur de leur argument est que chaque matrice ν_k est réelle, symétrique et semi-définie positive.

En effet, le théorème spectral pour les matrices indique que toute matrice réelle et symétrique M est diagonalisable par une matrice unitaire P (c'est-à-dire que $P^\top = P^{-1}$; voir, par exemple, (Horn et Johnson, 1990, théorème 2.5.6)). Les valeurs propres de M sont les éléments sur la diagonale de $P^\top MP$ et, comme M est

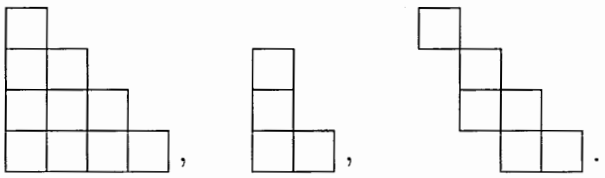
semi-définie positive, elles sont des nombres réels et positifs.

3.3.2 Valeurs propres et tableaux : statistiques importantes

Les notions suivantes sont essentielles pour exprimer les valeurs propres.

Diagramme gauche Considérons deux diagrammes λ et μ de sorte que toutes les boîtes de μ soient aussi dans λ. On définit alors le *diagramme gauche* λ/μ comme l'ensemble des boîtes qui sont dans λ sans être dans μ. Comme dessiné dans l'exemple 61, ces boîtes ne sont pas nécessairement justifiées à gauche.

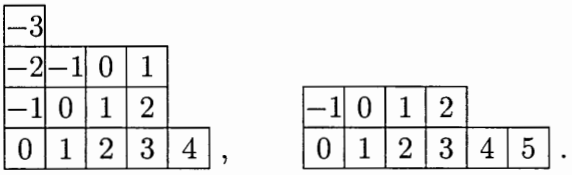
Exemple 61. Le tuple $\lambda = (4, 3, 2, 1)$ est un partage de 10, alors que $\mu = (2, 1, 1)$ est un partage de 4. La troisième illustration est le diagramme gauche λ/μ, et il contient $10 - 4 = 6$ boîtes.



Indice diagonal Une statistique sur les diagrammes (incluant les diagrammes gauches) qui sera utile pour nos calculs est son *indice diagonal.* À chaque boîte dans le diagramme, on associe un nombre en prenant ses coordonnées (i, j), comme dans un plan cartésien, et on calcule la différence $j - i$ (voir l'exemple 62). Pour un diagramme (gauche) λ, son indice diagonal est la somme des indices diagonaux de ses boîtes et est noté $\mathrm{diag}(\lambda)$.

Exemple 62. L'indice diagonal des boîtes dans les diagrammes ci-dessous est inscrit dans chacune des boîtes. Le diagramme de gauche a pour indice diagonal

7, alors que celui de droite a un indice diagonal de 17.



Remarque 63. Certains textes font référence à l'indice diagonal en termes de *contenu* d'une boîte. Toutefois, le contenu d'un tableau peut aussi qualifier les nombres que l'on trouve dans les boîtes. Pour éviter toute ambiguïté, on n'utilise le mot contenu que dans le dernier cas, et cela est détaillé à la sous-section 3.4.2.

Opérateur Δ de Schützenberger

La stratégie présentée pour calculer les valeurs propres est une induction à la fois sur l'indice de l'opérateur, k, et sur le nombre d'objets dans la collection, n. L'idée de base est qu'il n'est pas difficile de calculer les valeurs propres des matrices pour de très petites collections. Par contre, les dimensions augmentent de façon factorielle, et calculer les valeurs propres de façon naïve paraît rapidement complètement irréaliste.

Pour calculer une valeur propre pour un opérateur ν_k et une collection de taille n donnés, on procède ainsi : on attribue à chaque tableau de taille n un autre tableau, cette fois de taille $n-1$. On fait donc le pari que la valeur propre associée au tableau de taille $n-1$ sera plus facile à calculer. En faisant ce processus, on fait donc la restriction de $\mathbb{C}S_n$ à $\mathbb{C}S_{n-1}$. Avec la règle de branchement, présentée à la sous-section 2.3.3, on sait que le plus petit tableau a la même forme que le plus grand, auquel on aurait enlevé une boîte.

Pour trouver une façon d'associer à chaque tableau de taille n le bon tableau de taille $n-1$, c'est-à-dire celui qui nous permet de calculer les valeurs propres, on

utilise l'*opérateur* Δ *de Schützenberger* (Schützenberger, 1963). Pour l'exécuter sur un tableau t de taille n :

1. On retire l'élément 1 et on le remplace par une boîte vide.
2. Tant que la boîte vide n'est pas dans un coin extérieur du tableau, on la déplace vers l'extérieur en faisant des mouvements de jeu-de-taquin : ceci veut dire que, si (i, j) est la position de la boîte vide, on l'échange avec la boîte qui contient le minimum des boîtes aux positions $(i+1, j)$ et $(i, j+1)$.
3. Une fois que la boîte vide est dans un coin extérieur, on obtient un nouveau tableau, sans boîte vide, qui contient les nombres $2, \ldots, n$. Pour retrouver un tableau standard, on remplace ces nombres par $1, \ldots, n-1$, en préservant l'ordre, et on enlève la boîte vide.

Un exemple de ce processus apparaît à l'exemple 64.

Exemple 64. Appliquer l'opérateur Δ de Schützenberger au tableau standard t de taille 7 retourne un tableau standard de taille 6.

$$t = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & & \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & & \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline \bullet & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & & \\ \hline 3 & 4 & 7 \\ \hline 2 & \bullet & 5 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & & \\ \hline 3 & \bullet & 7 \\ \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & & \\ \hline 3 & 7 & \bullet \\ \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & & \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} = \Delta(t).$$

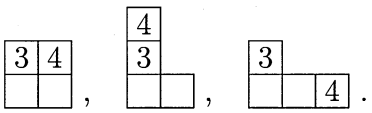
Ce processus nous permet de déduire un unique tableau standard de taille $n-1$ de chaque tableau standard de taille n. Ce faisant, on fait la restriction de $\mathbb{C}S_n$ à $\mathbb{C}S_{n-1}$.

Remarque 65. Il existe aussi une procédure inverse à l'opérateur Δ. Pour passer d'un tableau de taille n à un tableau de taille $n+1$, on doit cependant spécifier dans quelle rangée on souhaite ajouter une boîte. On déplace ensuite la boîte vide vers la première ligne et la première colonne en faisant des mouvements de jeu-de-taquin à l'envers.

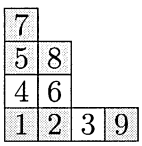
Bandes horizontales et tableaux de désarrangement

Dans un tableau standard de taille n, l'entrée i est une *montée* si $i = n$ ou si la boîte contenant $i + 1$ est située au sud, à l'est ou au sud-est de celle contenant i.

Exemple 66. Dans les tableaux ci-dessous, 3 est une montée dans les tableaux de gauche et de droite. Au centre, par contre, 3 est une descente, puisque que 4 se trouve au nord. Dans tous les cas, 4 est une montée puisque c'est la plus grande entrée dans ces tableaux.



Exemple 67. Dans ce tableau de forme $(4, 2, 2, 1)$, les montées sont identifiées par un arrière-plan de couleur.

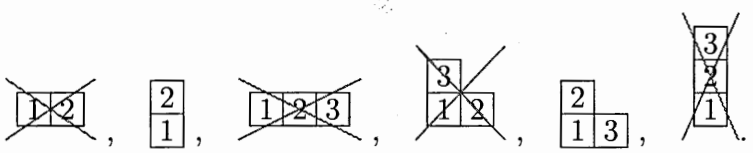


Remarque 68. Les notions de montées et de descentes sur un tableau peuvent être un peu difficile à visualiser avec la notation française des tableaux. En anglais, la première ligne d'un tableau est située tout en haut, et les lignes suivantes sont placées plus bas, comme dans une matrice. Pour un tableau en anglais, une montée apparaît lorsque l'entrée suivante est située plus haut, ce qui correspond à notre intuition. Toutefois, les descentes d'un tableau standard sont liées aux descentes d'une permutation : le tableau $Q(\sigma)$ obtenu de σ par la correspondance de Robinson-Schensted a les mêmes descentes que σ (pour des informations sur cet algorithme, voir, par exemple, (Sagan, 2001, section 3.1) ou (Stanley, 1999, section 7.11)). C'est pour cette raison que les noms descentes et montées d'un tableau sont préservées en français, malgré la confusion visuelle.

Un tableau standard est un *tableau de désarrangement* s'il est vide ou si sa plus

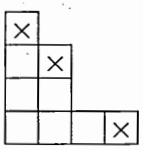
petite descente est à une position paire. [1]

Exemple 69. Parmi les tableaux de taille 2 et 3, il n'y a que deux tableaux de désarrangement :



Un diagramme (ou un diagramme gauche) est une *bande horizontale* s'il n'y a pas deux boîtes dans la même colonne (voir l'exemple 70).

Exemple 70. Le diagramme gauche $(4,2,2,1)/(3,2,1)$ est une bande horizontale, comme le montre le diagramme à la gauche, dans lequel les boîtes qui forment la bande sont identifiées par une croix.



Proposition 71 (Proposition 6.25 de (Reiner *et al.*, 2014)). *À chaque tableau standard t, on peut associer un unique tableau de désarrangement en appliquant l'opérateur Δ jusqu'à ce que le résultat soit un tableau de désarrangement. Lorsqu'on doit appliquer j fois l'opérateur Δ pour obtenir un tableau de désarrangement, alors $t/\Delta^j(t)$ est une bande horizontale de taille j.*

---

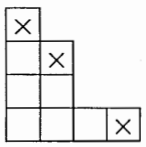
1. Le mot ***désarrangement*** n'apparaît pas dans le dictionnaire. C'est plutôt une contraction du nom Désarménien et des mots dérangement et descentes. Michelle Wachs et Jacques Désarménien ont démontré que les permutations dont la plus petite montée est paire sont en bijection avec les permutations sans point fixe (les ***dérangements***) (Désarménien et Wachs, 1988). Comme les descentes d'une permutation sont les mêmes que les descentes du tableau Q qui lui est associé par la correspondance de Robinson-Schensted, ils ont démontré un certain lien entre les tableaux dont la plus petite montée est paire et les dérangements.

Grâce à la proposition 71, on peut définir le *type* d'un tableau standard t comme le plus petit nombre j tel que $\Delta^j(t)$ est un tableau de désarrangement.

Exemple 72. Le tableau de l'exemple 67 a un type égal à 3 :

$$\Delta^3\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 7 & & & \\\hline 5 & 8 & & \\\hline 4 & 6 & & \\\hline 1 & 2 & 3 & 9 \\\hline\end{array}\right) = \Delta^2\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 6 & & & \\\hline 4 & 7 & & \\\hline 3 & 5 & & \\\hline 1 & 2 & 8 & \\\hline\end{array}\right) = \Delta\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 5 & & & \\\hline 3 & & & \\\hline 2 & 6 & & \\\hline 1 & 4 & 7 & \\\hline\end{array}\right) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4 & & & \\\hline 2 & 5 & & \\\hline 1 & 3 & 6 & \\\hline\end{array}\ .$$

Le diagramme gauche de la forme $t/\Delta^3(t)$ est la bande horizontale de l'exemple 70 :



3.3.3 Le mélange doublement aléatoire

Anton Dieker et Franco Saliola ont récemment décrit les valeurs propres de l'opérateur de mélange doublement aléatoire (Dieker et Saliola, 2018). Cet opérateur, tel que décrit à la section 1.2, est non seulement un mélange plutôt naturel, c'est aussi l'opérateur ν_1, ce qui en fait le cas de base de notre induction pour les valeurs propres de $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Il est utile de rappeler leur description des valeurs propres :

Théorème 73 (Théorème 5 de (Dieker et Saliola, 2018))**.** *Chaque valeur propre de l'opérateur de mélange doublement aléatoire (en tant que chaîne de Markov) est de la forme* $\frac{1}{n^2}\operatorname{eig}(\lambda/\mu)$*, où* λ *est un partage de* n *et* λ/μ *est une bande horizontale. De plus,* eig *est la statistique combinatoire définie sur les partages gauches comme*

$$\operatorname{eig}(\lambda/\mu) = \binom{|\lambda|+1}{2} - \binom{|\mu|+1}{2} + \operatorname{diag}(\lambda/\mu).$$

La multiplicité de la valeur propre $\frac{1}{n^2}\varepsilon$ *est*

$$\sum_{\substack{\lambda/\mu \text{ est une bande horizontale,} \\ \operatorname{eig}(\lambda/\mu)=\varepsilon}} f^\lambda d^\mu,$$

Tableau 3.1 : Valeurs propres du mélange doublement aléatoire avec quatre objets distincts.

Valeurs propres	16	10	6	4	2	0
Multiplicité	1	3	6	2	3	9

où f^λ est le nombre de tableaux standards de forme λ, et d^μ est le nombre de tableaux de désarrangement de forme μ.

Remarque 74. Dans la forme dans laquelle le théorème est formulée, les valeurs propres sont toutes réelles et se situent entre 0 et 1. Dans ce contexte, $\frac{1}{n^2}\operatorname{eig}(\lambda/\mu)$ n'est pas un entier, mais plutôt la valeur propre de la chaîne de Markov du mélange doublement aléatoire. La valeur propre entière de ν_1 est $\operatorname{eig}(\lambda/\mu)$.

Exemple 75. Considérons les valeurs propres du mélange doublement aléatoire sur 4 éléments. La matrice de cet opérateur est carrée et de taille 24; on peut donc calculer en temps raisonnable ses valeurs propres avec un logiciel comme SageMath (Les développeurs et développeuses de SageMath, 2019).

On obtient les valeurs propres affichées au tableau 3.1. On peut aussi les calculer avec le théorème 73, comme au tableau 3.2. Naturellement, on obtient les mêmes valeurs propres qu'au tableau 3.1.

À la sous-section 2.3.2, on a mentionné qu'on pouvait associer à chaque tableau standard une valeur propre. Dans le cas du mélange doublement aléatoire, on peut associer une paire de partages dont la différence est une bande horizontale avec une valeur propre. On aimerait donc trouver une façon d'associer cette paire de partages avec un tableau standard. Or, la proposition 71 nous donne un indice sur comment faire ceci : à partir d'un tableau standard t, on applique $\operatorname{type}(t)$ fois l'opérateur Δ, soit jusqu'à ce qu'on obtienne un tableau de désarrangement. Alors, $t/\Delta^{\operatorname{type}(t)}(t)$ est une bande horizontale, et on peut calculer la valeur propre $\operatorname{eig}(t/\Delta^{\operatorname{type}(t)}t)$. On peut donc associer à un tableau standard une unique paire

Tableau 3.2 : Calcul des valeurs propres pour les collections de quatre objets distincts. Les dernières colonnes n'ont pas été remplies s'il n'y a pas de valeur propre de toute façon (si $d^\mu = 0$ ou si λ/μ n'est pas un tableau de désarrangement). Ici, $\binom{|\lambda|+1}{2} = 10$.

λ	μ si $d^\mu \neq 0$	$\binom{\lvert\mu\rvert+1}{2}$	d^μ	λ/μ est b.h.	f^λ	eig(λ/μ)
	$\emptyset$	0	1	✓	1	16
	$\emptyset$	0	1	×		
		3	1	✓	3	10
		6	1	✓	3	6
		10	1	✓	3	0
	$\emptyset$	0	1	×		
		3	1	×		
		6	1	✓	2	4
		10	1	✓	2	0
	$\emptyset$	0	1	×		
		3	1	✓	3	6
		6	1	✓	3	2
		10	1	✓	3	0
	$\emptyset$	0	1	×		
		3	1	×		
		10	1	✓	1	0

de diagrammes dont la différence est une bande horizontale, et donc une valeur propre du mélange doublement aléatoire. Cette reformulation sera utilisée dans la sous-section 3.4.1 pour calculer les valeurs propres des autres opérateurs. Pour un tableau standard t :

— Si t est un tableau de désarrangement, la valeur propre associée à t est 0.

— Sinon, la valeur propre est $\varepsilon + n + \mathrm{diag}(t/\Delta(t))$, où ε est la valeur propre associée à $\Delta(t)$.

Puisque tous les tableaux standards mènent à un tableau de désarrangement en itérant successivement Δ (proposition 71), ce processus termine toujours.

3.4 Une formule récursive pour les valeurs propres

On est maintenant en mesure de présenter le théorème principal concernant les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, soit une description de toutes leurs valeurs propres. Pour le mélange d'une collection d'objets tous distincts, on présente le résultat à la sous-section 3.4.1; le cas des collections avec objets répétés est présenté à la sous-section 3.4.2. Quant aux preuves des principaux théorèmes présentés ici (théorème 78 et théorème 86), elles se trouvent au chapitre 4.

3.4.1 Le cas particulier des permutations

Pour les collections d'objets tous distincts, on procède en deux temps : on rappelle d'abord un résultat de Reiner, Saliola et Welker concernant le noyau des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, puis on décrit les autres valeurs propres.

Tableau 3.3 : Les tableaux standards de taille 4 et leur type.

	1 2 3 4	4 / 1 2 3	3 / 1 2 4	2 / 1 3 4	3 4 / 1 2	2 4 / 1 3	4 / 3 / 1 2	4 / 2 / 1 3	3 / 2 / 1 4	4 / 3 / 2 / 1
Type	4	2	1	0	1	0	2	0	1	0

Théorème 76 (Théorème VI.9.5 de (Reiner *et al.*, 2014)). *Le noyau de ν_k est isomorphe à une somme directe $\bigoplus S^{\text{forme}(t)}$, dans laquelle S^λ représente le module de Specht associé aux partages de forme λ, et la somme directe se fait sur tous les tableaux standards de type strictement inférieur à k.*

Exemple 77. Les tableaux standards de taille 4 sont dans le tableau 3.3, avec leur type. Les noyaux des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ pour une collection de quatre objets distincts sont les suivants :

ν_1	$S^{\square\square\square} \oplus S^{\square\!\square} \oplus S^{\square\square} \oplus S^{\square}$
ν_2	$2S^{\square\square\square} \oplus 2S^{\square\!\square} \oplus 2S^{\square\square} \oplus S^{\square}$
ν_3	$\mathbb{C}S_4 \backslash S^{\square\square\square\square}$
ν_4	$\mathbb{C}S_4 \backslash S^{\square\square\square\square}$
$\nu_{\geq 5}$	$\mathbb{C}S_4$

Ce qu'on doit retenir du théorème théorème 76, c'est qu'à chaque tableau de type au moins k, on doit associer une valeur propre non-nulle pour l'opérateur ν_k. La façon dont nous calculons cette valeur nous permet de montrer que c'est un entier positif (corollaire 95).

Théorème 78. *Les valeurs propres de l'opérateur de mélange ν_k sur des collections de n objets tous distincts sont indexées par les tableaux standards de taille*

n. Pour un tel tableau t, la valeur propre $v_k(t)$ est donnée par

$$v_k(t) = \begin{cases} v_k(\Delta(t)) + (n+1-k+\mathrm{diag}(t/\Delta(t)))\ v_{k-1}(\Delta(t)) & \text{si } \mathrm{type}(t) \geq k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le tableau t contribue pour $f^{\mathrm{forme}(t)}$ à la multiplicité de la valeur propre $v_k(t)$, où $f^{\mathrm{forme}(t)}$ est le nombre de tableaux standards de la même forme que t.

Remarquons que si on pose $k = 1$, on retrouve les valeurs propres calculées pour le mélange doublement aléatoire (ν_1) à la sous-section 3.3.3.

Exemple 79. Avec le théorème 78, on peut par exemple calculer les valeurs propres pour ν_2 sur une collection de quatre éléments distincts. Il y a alors $4! = 24$ états possible (les permutations des quatre éléments); on peut donc encore calculer les valeurs propres de la matrice avec les techniques habituelles. C'est ce qu'on a fait avec l'aide de SageMath (Les développeurs et développeuses de SageMath, 2019), et on sait donc que les valeurs propres sont 0, 4, 20 et 72, de multiplicités 17, 3, 3 et 1, respectivement. Ces valeurs sont confirmées par le théorème 78, comme nous le démontrons ici.
Il y a dix tableaux standards de taille 4; ils sont présentés au tableau 3.3 avec leur type.

On peut déjà calculer la dimension du noyau, et donc la multiplicité de la valeur propre 0 : à l'exemple 77, nous avons calculé que le noyau de ν_2 est $2S^{\ydiagram{3,1}} \oplus 2S^{\ydiagram{2,2}} \oplus 2S^{\ydiagram{2,1,1}} \oplus S^{\ydiagram{1,1,1,1}}$. Nous savons aussi que la dimension du module S^λ est égale au nombre de tableaux standards de forme λ. Ainsi, la dimension du noyau est

$$2f^{\ydiagram{3,1}} + 2f^{\ydiagram{2,2}} + 2f^{\ydiagram{2,1,1}} + f^{\ydiagram{1,1,1,1}} = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 = 17.$$

Pour trouver les valeurs propres non-nulles de ν_2, on doit calculer $v_k(t)$ pour les

tableaux standards de type au moins 2. Il y a trois tels tableaux :

$$\begin{aligned}
v_2\left(\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\right) &= v_2\left(\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\right) + (4+1-2+3)\cdot v_1\left(\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\right) \\
&= \left(v_2\left(\boxed{1}\boxed{2}\right) + (3+1-2+2)\cdot v_1\left(\boxed{1}\boxed{2}\right)\right) + 6\cdot v_1\left(\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\right) \\
&= \left(\left(v_2\left(\boxed{1}\right) + (2+1-2+1)\cdot v_1\left(\boxed{1}\right)\right) + 4\cdot v_1\left(\boxed{1}\boxed{2}\right)\right) + 6\cdot 9 \\
&= \left(\left(0 + 2\cdot v_1\left(\boxed{1}\right)\right) + 4\cdot 4\right) + 54 \\
&= 2\cdot 1 + 16 + 54 = 72.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array}\right) &= v_2\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}\right) + (4+1-2+2)\cdot v_1\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}\right) \\
&= 0 + 5\cdot v_1\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}\right) \\
&= 0 + 5\cdot 4 = 20.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_2\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}\right) &= v_2\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}\right) + (4+1-2+1)\cdot v_1\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}\right) \\
&= 0 + 4\cdot v_1\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}\right) \\
&= 4\cdot 1 = 4.
\end{aligned}$$

Dans le dernier calcul, la deuxième égalité vient du fait que $\begin{array}{|c|c|}\hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}$ est de type strictement inférieur à 2, tandis que la troisième a été calculée en utilisant le résultat de la sous-section 3.3.3, concernant les valeurs propres du mélange doublement aléatoire. On aurait aussi pu faire ce dernier calcul avec le théorème 78, en utilisant le fait que $v_0(t) = 1$ pour tout tableau t, étant donnée que v_0 est l'identité.

3.4.2 Sur les mots en général

Jusqu'ici, nous nous avons présenté les résultats sur les valeurs propres pour des suites d'objets que nous avons supposés tous distincts. Par exemple, un paquet

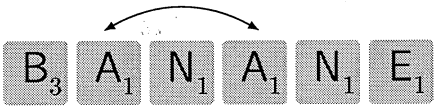


Figure 3.2 : Échanger les deux occurrences de a dans le mot *banane* redonne le mot initial. C'est une opération qu'on effectue, par exemple, au cours d'une partie de Scrabble.

de cartes à jouer, s'il n'est pas truqué, est un ensemble d'objets où toutes les cartes sont différentes. Par contre, les techniques énoncées plus haut s'appliquent aussi aux collections qui admettent des répétitions d'objets. Ainsi, on pourrait mélanger les lettres du mot *banane* (dans un jeu de Scrabble, par exemple), et on souhaiterait que le mot initial et celui obtenu en échangeant les deux a soient considérés comme le même mot. Ceci est illustré à la figure 3.2.

Tel qu'expliqué à la sous-section 3.1.3, et illustré à l'exemple 57, les états de ces chaînes de Markov sont moins nombreux, et correspondent à tous les mots qu'il est possible de faire tout en gardant le nombre d'occurrences de chaque lettre constant.

On appelle le *contenu* d'une suite d'objets le tuple formé du nombre de copies de chacun des objets dans la suite. Ces nombres sont placés en ordre décroissant, ce qui fait qu'on obtient un partage. Ainsi, nous pouvons le comparer aux autres partages.

Exemple 80. Le contenu du mot de langue française *ananas* est $(3, 2, 1)$, alors que celui du mot *banane* est $(2, 2, 1, 1)$.

Exemple 81. Les permutations sont des mots de contenu $(1, 1, \ldots, 1)$.

Ordre de dominance Si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ et $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ sont deux partages du même nombre, on dit que λ *domine* μ, noté $\lambda \trianglerighteq \mu$, si, pour tout

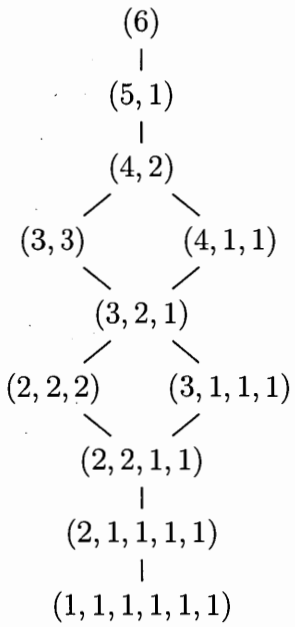


Figure 3.3 : Ordre de dominance sur les partages de 6.

$i \in \{1, 2, \ldots, \min(l, m)\}$,

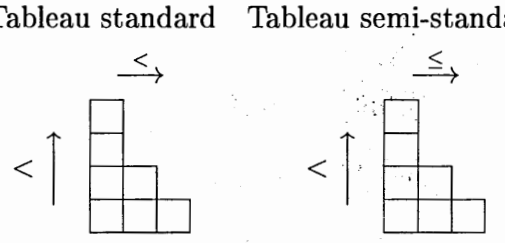
$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_i \geq \mu_1 + \ldots + \mu_i.$$

Exemple 82. L'ordre de dominance des partages de 6 s'illustre par le diagramme de Hasse à la figure 3.3.

Tableaux semi-standards Un tableau semi-standard est d'abord un tableau et c'est donc un remplissage d'un diagramme par des nombres entiers positifs. La notion de tableau semi-standard est plus flexible que celle de tableau standard, puisqu'elle autorise les répétitions dans les entrées du tableau.

Définition 83. Un tableau est dit *semi-standard* si les boîtes sur une même ligne contiennent des nombres placés en ordre faiblement croissant et si les boîtes d'une même colonne contiennent des nombres tous distincts placés en ordre croissant.

Tableau 3.4 : Règle pour les tableaux standards et semi-standards.



Le *contenu* d'un tableau standard est un partage qui compte le nombre d'occurrences de chacune des valeurs des entrées du tableau.

Exemple 84. Le tableau suivant, de forme $(3, 2)$, est semi-standard. Son contenu est $(2, 2, 1)$.

2	3	
1	1	2

Exemple 85. Les tableaux standards sont des tableaux semi-standards de contenu $(1, 1, 1, \ldots, 1)$.

Nous connaissons maintenant toutes les notions pour énoncer l'analogue du théorème 78, pour les mots. Comme les mots sont une généralisation des permutations, le théorème 78 est un cas particulier de ce qui suit.

Théorème 86. *Les valeurs propres non-nulles de ν_k sur les mots de contenu $\mu \vdash n$ sont indexées par les tableaux standards de taille n, de type au moins k et de forme $\lambda \trianglerighteq \mu$. Pour un tel tableau t,*

$$v_k(t) = v_k(\Delta(t)) + (n + 1 - k + \mathrm{diag}(t/\Delta(t)))\ v_{k-1}(\Delta(t)).$$

De plus, le tableau t contribue $m_{\lambda\mu}$, le nombre de tableaux semi-standards de forme λ et remplis avec le contenu μ, à la multiplicité de la valeur propre $v_k(t)$. Ces nombres sont aussi appelés nombres de Kostka.

Tableau 3.5 : Calcul des valeurs propres pour l'opérateur ν_2 sur une collection de taille 4 contenant deux paires d'éléments identiques.

t de forme λ	Tableaux semi-standards de forme λ et contenu $(2,2)$	$v_2(t)$	$m_{\lambda,(2,2)}$
1 2 3 4	1 1 2 2	72	1
4 / 1 2 3	2 / 1 1 2	20	1
3 / 1 2 4	2 / 1 1 2	0	1
2 / 1 3 4	2 / 1 1 2	0	1
3 4 / 1 2	2 2 / 1 1	0	1
2 4 / 1 3	2 2 / 1 1	0	1

Enfin, cela est cohérent avec le théorème 78, puisque les permutations ont pour contenu $(1, 1, \ldots, 1)$, ce qui est minimal pour l'ordre de dominance.

Exemple 87. La matrice pour ν_2 sur les mots de contenu $(2,2)$, comme aabb, est celle exhibée à l'exemple 57. Elle a pour valeurs propres 72, 20 et 0 avec multiplicité 1, 1 et 4, respectivement, ce qui est cohérent avec le théorème 86, comme on peut le voir au tableau 3.5. Ici, le contenu des mots étant $(2,2)$, les partages qui le domine sont (4), $(3,1)$ et $(2,2)$. Les valeurs propres sont celles qui ont été calculées à l'exemple 79, mais leur multiplicité doit être de nouveau calculées. C'est ce à quoi sert le tableau 3.5.

Le théorème 86 découle du théorème 78, puisque les valeurs propres sont les

mêmes, mais les multiplicités des valeurs propres diffèrent. Celles-ci peuvent cependant être retrouvées avec la règle de Young pour les modules de permutation (théorème 106).

3.4.3 Valeurs propres pour la composante isotypique $(n-1,1)$

Aussi intéressant que soit le résultat de cette section, il n'est pas le plus pratique. Pourquoi? Parce que la formule récursive fait qu'il est difficile d'obtenir des bornes inférieures ou supérieures sur les valeurs propres, ou encore de faire la somme de toutes les valeurs propres. On ne connaît toutefois pas de formule close pour les valeurs propres de $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, sauf pour le mélange doublement aléatoire, où elles ont été énoncées par (Dieker et Saliola, 2018). C'est d'ailleurs un des principaux problèmes ouverts pour la famille $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (problème 148).

Cependant, on est capable de calculer les valeurs propres de la restriction des opérateurs ν_k à des copies du module $S^{(n-1,1)}$. On appelle la *composante isotypique* λ de l'algèbre $\mathbb{C}S_n$ la somme directe de toutes les copies de S^λ dans la décomposition de $\mathbb{C}S_n$. Pour plus de détails sur cette décomposition, voir la sous-section 2.3.2.

Théorème 88 (confirme la conjecture VI.12.2 de (Reiner *et al.*, 2014)). *Les valeurs propres de l'opérateur ν_k restreint à la composante isotypique $(n-1,1)$ sont données par la formule*

$$v_k\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline i & & & & & & \\ \hline 1 & \ldots & i-1 & i+1 & \ldots & n & \\ \hline\end{array}\right) = k!\binom{i-2}{k}\binom{2n-i+1}{k} \tag{3.2}$$

pour i un entier entre 2 et n.

Pour le démontrer, on procède par induction sur n et on utilise le théorème 78.

On constate aussi que $i-2$ est le type du tableau

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline i & & & & & & \\ \hline 1 & \ldots & i-1 & i+1 & \ldots & n \\ \cline{1-6}\end{array}\,.$$

Si $i=2$, c'est en particulier un tableau de désarrangement, et la valeur propre ν_k est 0 pour toute valeur de k. Sinon,

$$\Delta\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline i & & & & & & \\ \hline 1 & \ldots & i-1 & i+1 & \ldots & n \\ \cline{1-6}\end{array}\right) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline i-1 & & & & & & \\ \hline 1 & \ldots & i-2 & i & \ldots & n-1 \\ \cline{1-6}\end{array}\,.$$

Avec la notation $t_{i,n} := \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline i & & & & & & \\ \hline 1 & \ldots & i-1 & i+1 & \ldots & n \\ \cline{1-6}\end{array}$, on déduit du théorème 78 ce qui suit.

Lemme 89. *Les valeurs propres de ν_k sur la composante isotypique $(n-1,1)$ sont indexées par les tableaux standards de forme $(n-1,1)$ et sont*

$$v_k(t_{i,n}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i-2<k, \\ v_k(t_{i-1,n-1}) + (2n-k-1)\cdot v_{k-1}(t_{i-1,n-1}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce lemme est la clef pour l'induction dans la preuve du théorème 88.

Preuve du théorème 88. On peut vérifier que ça fonctionne pour l'unique tableau standard de forme $(1,1)$, puisque c'est un tableau de désarrangement.

Supposons maintenant que tous les tableaux de taille $n-1$ (et de forme $(n-2,1)$) satisfont l'équation (3.2). On calcule les valeurs propres associées aux tableaux standards de taille n et de type au moins k :

$$\begin{aligned} v_k(t_{i,n}) = &\quad v_k(t_{i-1,n-1}) + (2n-k-1)\cdot v_{k-1}(t_{i-1,n-1}) \\ \overset{\text{Hyp. ind.}}{=} &\quad k!\binom{i-3}{k}\binom{2n-i}{k} + (2n-k-1)\cdot(k-1)!\binom{i-3}{k-1}\binom{2n-i}{k-1} \\ = &\quad k!\binom{i-3}{k}\binom{2n-i}{k} + (2n-k-1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \cdot (k-1)! \left(\frac{k}{i-2-k} \binom{i-3}{k} \right) \left(\frac{k}{2n-i-k+1} \binom{2n-i}{k} \right) \\
= \; & k! \binom{i-3}{k} \binom{2n-i}{k} \left(1 + \frac{k(2n-k-1)}{(2n-i-k+1)(i-2-k)} \right) \\
= \; & k! \left(\frac{i-2-k}{i-2} \binom{i-2}{k} \right) \left(\frac{2n-i-k+1}{2n-i+1} \binom{2n-i+1}{k} \right) \\
& \cdot \left(1 + \frac{k(2n-k-1)}{(2n-i-k+1)(i-2-k)} \right) \\
= \; & k! \binom{i-2}{k} \binom{2n-i+1}{k} \frac{(i-2-k)(2n-i-k+1) + k(2n-k-1)}{(2n-i+1)(i-2)} \\
= \; & k! \binom{i-2}{k} \binom{2n-i+1}{k},
\end{aligned}
$$

où la dernière égalité est obtenu en vérifiant que le numérateur de la fraction est égal à $(2n-i+1)(i-2)$. □

La dernière preuve n'est pas des plus élégantes, c'est pourquoi il serait intéressant de trouver une preuve plus combinatoire du théorème 88.

De plus, cette nouvelle expression pour les valeurs propres associées à certains tableaux nous permet de déduire la caractéristique suivante :

Proposition 90. *Les valeurs propres associées aux tableaux $t_{i,n}$ sont monotones croissantes en i.*

Démonstration. Rappelons d'abord que, lorsque $i < k+2$, la valeur propre de ν_k associée à $t_{i,n}$ est nulle, car le type (ici, $i-2$) est strictement inférieur à k. Comme les valeurs propres sont toutes positives, $v_k(t_{i,n}) \leq v_k(t_{i+1,n})$ si $i < k+2$.

Sinon, on vérifie que $v_k(t_{i,n}) < v_k(t_{i+1,n})$. Ceci est facile une fois qu'on a démontré le théorème 88, et ce qu'on souhaite vérifier peut se traduire ainsi :

$$
\begin{aligned}
& k! \binom{i-2}{k} \binom{2n-i+1}{k} < k! \binom{i-1}{k} \binom{2n-i}{k} \\
\iff \quad & \frac{2n-i+1}{2n-i+1-k} < \frac{i-1}{i-1-k}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\iff \quad (2n-i+1)(i-1-k) < (2n-i+1-k)(i-1) \\
\iff \quad &(2n-i+1)(i-1) - k(2n-i+1) < (2n-i+1)(i-1) - k(i-1) \\
&\iff \quad 2n-i+1 > i-1 \\
&\iff \quad n > i-1,
\end{aligned}$$

et la dernière inégalité est toujours vraie, confirmant que $v_k(t_{i,n}) \leq v_k(t_{i+1,n})$. □

Corollaire 91. *La valeur propre $v_k(t_{n,n})$ est maximale parmi celles indexées par les tableaux de forme $(n-1,1)$.*

Deuxième valeur propre Comme expliqué à la page 83, il est parfois utile de connaître la deuxième plus grande valeur propre d'une chaîne de Markov (la plus grande est toujours 1, par le théorème de Perron-Frobenius, proposition 28). Pour les mélanges d'une collection d'objets tous distincts, la valeur propre associée au tableau $(n-1,1)$ capture le mouvement d'une seule carte (Diaconis, 1988), et permet ainsi de calculer une valeur minimale pour le temps de mélange. Ce n'est pas étranger au fait que, pour plusieurs opérateurs de mélange, la deuxième valeur propre est associée à un tableau de forme $(n-1,1)$.

Un candidat naturel pour la deuxième plus grande valeur propre de $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ semble donc $v_k(t_{n,n})$. Avec SageMath et le théorème 78, on a pu calculer toutes les valeurs propres pour tous les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ pour des collections de 16 objets et moins. Dans chacun des cas, la deuxième plus grande valeur propre est celle associée au tableau $t_{n,n}$.

Conjecture 92. *La plus grande valeur propre, outre $k!\binom{n}{k}^2$, du mélange ν_k est $v_k(t_{n,n}) = k!\binom{n-2}{k}\binom{n+1}{k}$.*

3.4.4 Conséquences du théorème 78

Si l'accent a été autant mis sur la recherche des valeurs propres, c'est notamment parce que ce résultat peut être utile et qu'il résout quelques conjectures. La formule décrivant toutes les valeurs propres (théorème 78) a notamment les conséquences suivantes : elle permet de conclure que toutes les valeurs propres sont des entiers positifs, elle permet de les calculer rapidement et elle pourrait nous donner des estimations sur les valeurs propres en général, ce qui pourrait même mener à un calcul du temps de mélange.

Valeurs propres entières et positives

On savait déjà que les valeurs propres des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ étaient positives (sous-section 3.3.1). De plus, Reiner, Saliola et Welker ont conjecturé que toutes les valeurs propres sont des entiers, ce que permettent de démontrer les résultats de cette section. Cette conjecture était d'ailleurs une des principales motivations pour étudier les mélanges $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (par rapport aux autres opérateurs de mélange s'exprimant comme la version symétrisée d'un opérateur de BHR, voir sous-section 5.1.2).

Ici, nous donnons une nouvelle preuve de la positivité des valeurs propres, en montrant que le coefficient dans la formule du théorème 78 est toujours un entier positif.

Proposition 93. *Pour tout tableau t de taille n, de forme λ et de type supérieur ou égal à k, $(n+2-k+\mathrm{diag}(t/\Delta(t)))$ est un entier positif.*

Pour démontrer cette proposition, on utilise toutefois une autre définition du type d'un tableau, qui est apparue d'abord dans un document non publié de Victor

Reiner et Michelle Wachs. Les deux définitions apparaissent dans (Reiner *et al.*, 2014) et sont équivalentes.

Définition 94 (Définition alternative du *type* d'un tableau)**.** Soit t un tableau standard de taille n. Le *type* de t est l'unique valeur $j \in \{0, 1, \ldots, n-2, n\}$ telle que

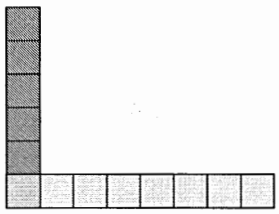
— $1, 2, \ldots, j-1$ sont des montées de t, et

— si t a au moins une descente, la première montée parmi $j+1, \ldots, n$ est à une position $j+l$, avec l pair.

On peut maintenant donner la preuve de la proposition.

Démonstration. On se base sur la relation entre le type d'un tableau et sa forme. À cet effet, notons l'observation suivante : le type d'un tableau ne peut être plus grand que la longueur de la première ligne. Pour s'en convaincre, il suffit de choisir une valeur i entre 1 et λ_1 et un tableau standard de forme λ. Rappelons qu'une descente survient lorsque la case contenant $i+1$ est placée dans la j-ième ligne, avec $i > j$. Comme il n'y a que λ_1 boîtes dans la première ligne, il doit exister une descente parmi $\{1, 2, \ldots, \lambda_1\}$. Sinon, le tableau n'a qu'une ligne et son type est alors $\lambda_1 = n$.

On a donc montré que $\lambda_1 \geq \text{type}(t)$ et, par hypothèse, $\text{type}(t) \geq k$. De plus, pour n'importe quel nombre a tel que $\lambda_a > 0$, le diagramme de forme λ a au moins $\lambda_1 + a - 1$ boîtes; celles-ci sont les λ_1 boîtes de la première ligne et les a boîtes de la première colonne jusqu'à la ligne a.



Ainsi, si a est la ligne dans laquelle se trouve l'unique boîte de $t/\Delta(t)$,

$$\begin{aligned} n+2-k+\operatorname{diag}(t/\Delta(t)) &= n+2-k+\lambda_a-a \\ &> n+2-k-a \\ &\geq n+2-\lambda_1-a \\ &\geq n+2-(n+1)>0. \end{aligned}$$

□

Corollaire 95. *Les valeurs propres de tous les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont des entiers positifs.*

Un algorithme rapide

Une autre conséquence du théorème 78 est que l'on est capable de calculer (plutôt rapidement) les valeurs propres des matrices associées aux $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Jusqu'ici, le mieux que nous savions faire est un calcul naïf utilisant les algorithmes habituels pour trouver les valeurs propres d'une matrice. Or, pour une matrice de taille $n!$, comme celles des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, il est impensable d'obtenir un résultat dès que n commence à grandir. On peut désormais calculer des valeurs propres rapidement. On peut même énumérer toutes les valeurs propres, jusqu'à un certain point. Après tout, il y a $n!$ valeurs propres, avec multiplicités.

Bornes sur les valeurs propres

Bien qu'on ne soit pas capable de donner une formule close pour les valeurs propres, on aimerait déterminer des bornes pour identifier là où elles se trouvent. De telles bornes seraient notamment utiles pour calculer le temps de mélange. Naturellement, on sait que $0 \leq v_k(t) \leq \binom{n}{k}^2 k!$, mais nous aimerions avoir quelque chose de plus circonscrit.

La conjecture suivante est vraie pour tous les tableaux de taille jusqu'à 15; elle a été vérifiée à l'aide du théorème 78 et du logiciel SageMath (Les développeurs et développeuses de SageMath, 2019), et les valeurs pour les tableaux standards de taille 2 à 4 sont au tableau 3.6.

Conjecture 96. *La valeur propre de l'opérateur ν_k associée au tableau t est bornée :*

$$v_k(t) \leq \binom{\text{type}(t)}{k}(n + \lambda_1 - \text{type}(t))^k.$$

Sans pouvoir donner une preuve complète, on peut donner une idée de comment on pourrait prouver une telle affirmation. Remarquons d'abord quelques faits :

1. Le théorème 78 peut se traduire de la façon suivante : la valeur propre $v_k(t)$ peut se réécrire en fonction de certaines valeurs propres de ν_{k-1}. Précisément :

$$v_k(t) = \sum_{i=1}^{\text{type}(t)-k+1} (n + 2 - i - k + \text{diag}(\Delta^{i-1}t/\Delta^i t))\nu_{k-1}(\Delta^i t).$$

2. La proposition 71, qui affirme que $t/\Delta^{\text{type}(t)}t$ est une bande horizontale, permet de déduire que l'indice diagonal de la bande horizontale $\text{diag}(t/\Delta^{\text{type}(t)}t)$ est au plus l'indice diagonal des $\text{type}(t)$ cellules en bas à droite; ceci est d'ailleurs représenté graphiquement à la figure 3.4.

   Ainsi, pour tout j tel que $0 < j \leq \text{type}(t)$,

$$\text{diag}(t/\Delta^j t) \leq \sum_{i=1}^{j} \lambda_1 - i = \lambda_1 j - \frac{j(j+1)}{2}.$$

La première des deux affirmations suggère qu'on puisse procéder par induction sur k. Le cas de base, $k = 1$, est alors le mélange doublement aléatoire. Pour ce

Tableau 3.6 : Comparaison entre les valeurs propres et la borne donnée par la conjecture 96 pour $n = 2, 3, 4$. Les valeurs propres nulles n'apparaissent pas.

t	k	Borne conjecturée	$v_k(t)$
1 2	1	4	4
	2	4	2
1 2 3	1	9	9
	2	27	18
	3	27	6
3 / 1 2	1	4	4
3 / 2 / 1	1	3	1
1 2 3 4	1	16	16
	2	96	72
	3	256	96
	4	256	24
4 / 1 2 3	1	10	10
	2	25	20
4 / 3 / 1 2	1	8	6
	2	16	4
3 / 1 2 4	1	6	6
3 4 / 1 2	1	5	4
3 / 2 / 1 4	1	5	2

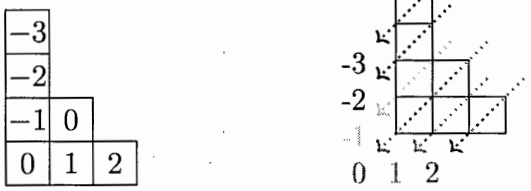


Figure 3.4 : Les cellules ayant le plus gros indice diagonal sont placées en bas à droite. Sur l'image à droite, on voit bien les diagonales.

mélange, la valeur propre $v_1(t) \leq \text{type}(t)\left(\lambda_1 - \frac{\text{type}(t)+1}{2}\right)$, comme le démontre le calcul suivant :

$$\begin{aligned} v_1(t) &\overset{\text{fait 1}}{=} \sum_{i=1}^{\text{type}(t)} \left(n+1-i+\text{diag}(\Delta^{i-1}t/\Delta^i t)\right) \\ &= (n+1)\,\text{type}(t) - \frac{\text{type}(t)(\text{type}(t)+1)}{2} + \sum_{i=1}^{\text{type}(t)} \text{diag}(\Delta^{i-1}t/\Delta^i t) \\ &\overset{\text{fait 2}}{\leq} (n+1)\,\text{type}(t) - \frac{\text{type}(t)(\text{type}(t)+1)}{2} + \text{type}(t)\left(\lambda_1 - \frac{\text{type}(t)+1}{2}\right) \\ &= \text{type}(t)\,(n - \text{type}(t) + \lambda_1)\,. \end{aligned}$$

Si nous savions démontrer la conjecture 96, nous aurions de meilleures chances de trouver le temps de mélange des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, dont nous discutons tout de suite.

Temps de mélange

Le *temps de mélange* d'une chaîne de Markov peut être compris comme le temps nécessaire pour qu'une distribution de probabilités sur laquelle on exécute une chaîne de Markov soit assez proche de la distribution stationnaire. Par exemple, le temps de mélange d'un paquet de cartes à jouer est le temps qu'il faut pour que toutes les permutations aient à peu près la même probabilité de représenter

l'ordre des cartes dans le paquet après ce temps.

Formellement, le temps de mélange se définit en fonction de la *distance de variation totale*, une mesure entre deux distributions de probabilités qui permet de dire à quel point elles sont éloignées l'une de l'autre. Cette distance prend des valeurs entre 0 et 1 : deux distributions sont très éloignées si leur distance de variation totale est près de 1, et elles sont près l'une de l'autre lorsque la distance se rapproche de 0.

Définition 97. Pour deux distributions p et q sur un ensemble fini d'états X, la distance de variation totale entre p et q est

$$||p - q||_{VT} = \frac{1}{2} \sum_{x \in X} |p(x) - q(x)|.$$

Pour les chaînes de Markov, on souhaite souvent comparer la distribution stationnaire (vers laquelle la chaîne converge) et la distribution après un certain temps, puisque ça nous indique le rythme auquel on s'en rapproche. Le temps de mélange est alors le nombre d'itérations de la chaîne de Markov qui sont nécessaires pour que la distance de variation totale soit inférieure à un seuil fixé (souvent entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$). Lorsque le nombre d'états est très grand, calculer la distance de variation totale avec précision peut être laborieux. Il existe différentes techniques pour passer outre cette difficulté. Une qui est particulièrement intéressante pour nous est celle-ci, d'abord donnée spécifiquement pour un autre mélange dans (Diaconis et Shahshahani, 1981), puis généralisée. La version ci-dessous s'apparente à celle qu'on retrouve dans (Levin et Peres, 2017).

Lemme 98 (Lemme 14 de (Diaconis et Shahshahani, 1981), lemme 12.18 de (Levin et Peres, 2017)). *Pour les marches aléatoires sur un groupe G, la distance de variation totale après s itérations du mélange est bornée supérieurement par*

$$\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{j=2}^{|G|} \lambda_j^{2s}},$$

où $1 > \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{|G|} \geq -1$ *sont les valeurs propres de l'opérateur de mélange (vu comme une chaîne de Markov).*

Dans le cas du groupe symétrique, on peut réécrire cette équation avec λ_t *qui désigne la valeur propre associée au tableau* t *:*

$$\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{\text{tableaux standards } t} f^{\text{forme}(t)} \lambda_t^{2s}}, \tag{3.3}$$

où $f^{\text{forme}(t)}$ *est le nombre de tableaux standards de la même forme que* t*.*

C'est notamment pour calculer cette somme que nous aimerions avoir une formule close ou des bornes supérieures suffisamment parlantes pour exprimer les valeurs propres; on serait alors peut-être en mesure de donner une borne supérieure sur le temps de mélange.

On peut toutefois avoir une idée de ce à quoi pourrait ressembler cette somme; c'est le contenu du prochain paragraphe.

Distance de variation et valeurs propres des tableaux de forme $(n-1,1)$

Grâce au théorème 88, on connaît une formule close pour certaines valeurs propres; on a même conjecturé que la deuxième valeur propre pour chacun des opérateurs est parmi celles pour lesquelles on connaît cette expression. On pourrait vouloir calculer la somme des puissances de ces valeurs propres, comme dans l'équation (3.3) : cette équation est

$$\sqrt{\frac{1}{4} \sum_{t \text{ de forme } (n-1,1)} (n-1) \lambda_t^{2s}} = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=2}^{n} (n-1) \left(\frac{\binom{i-2}{k}\binom{2n-i+1}{k}}{\binom{n}{k}^2} \right)^{2s}}.$$

Ceci ne nous donne pas tout à fait une borne supérieure satisfaisante, puisque la grande majorité des valeurs propres sont omises. Cependant, la contribution de ces valeurs propres est la plus grande parmi toutes les valeurs propres et le temps

de mélange est généralement du même ordre de grandeur que celui donné par les plus grandes valeurs propres (pour plus de détails, voir par exemple la notion de temps de relaxation dans (Levin et Peres, 2017, Section 12.2)).

En faisant la somme uniquement sur les valeurs propres associées aux tableaux de forme $(n-1,1)$, on peut arriver à la conjecture suivante :

Conjecture 99 (Megan Bernstein, communication personnelle). *Lorsque k est petit par rapport à n, le temps de mélange des opérateurs ν_k est, à constante près, au plus $\frac{3}{4k}n\log(n)$; formellement, on dit que le temps de mélange est $\mathcal{O}(\frac{3}{4k}n\log(n))$.*

Cette dernière conjecture est démontrée lorsque $k=1$; c'est le temps de mélange du mélange doublement aléatoire, établi par Megan Bernstein et Evita Nestoridi (Bernstein et Nestoridi, 2019).

3.5 Vecteurs propres

Si l'étude des valeurs propres est en soi intéressante, connaître les vecteurs propres permettrait de calculer rapidement les puissances des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Anton Dieker et Franco Saliola ont décrit une procédure pour obtenir une base de tous les espaces propres de l'opérateur de mélange doublement aléatoire, ν_1, à partir des vecteurs propres dans le noyau (qui sont inconnus). Il serait intéressant de voir si cette description peut s'étendre aux autres opérateurs de la famille $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Sans savoir explicitement comment construire les vecteurs propres, on peut démontrer que les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ partagent les mêmes vecteurs propres. Plus explicitement :

Théorème 100. *Il existe une base de $\mathbb{C}S_n$ dont les vecteurs sont des vecteurs propres pour chacun des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.*

Démonstration. On montrera en fait que n'importe quelle famille de matrices symétriques qui commutent peut être associée à une base de vecteurs propres pour tous ses éléments. Rappelons que les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ commutent (théorème 60) et sont symétriques, tel qu'expliqué à la sous-section 3.1.3.

Le théorème spectral affirme que toute matrice réelle et symétrique est diagonalisable (voir, par exemple, (Horn et Johnson, 1990), théorème 2.5.6). C'est donc le cas des opérateurs ν_k.

De plus, des opérateurs diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables (voir par exemple le théorème 1.3.19 de (Horn et Johnson, 1990)).

Enfin deux matrices simultanément diagonalisables partagent une base de vecteurs propres : soit P une matrice telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale pour toute matrice M de la famille. Les vecteurs colonnes de P sont en effet les vecteurs propres de chacune des matrices de la famille. □

En plus de présenter un intérêt intrinsèque et de permettre de calculer les puissances des matrices, les vecteurs propres sont utiles notamment pour connaître le temps de mélange. Pour les opérateurs de mélange en général, on peut aussi utiliser les vecteurs propres, par exemple, pour estimer la distribution stationnaire, lorsqu'il ne s'agit pas forcément de la distribution uniforme. Pour connaître davantage d'usages des vecteurs propres, voir (Diaconis *et al.*, 2014, section 2).

CHAPITRE 4

PREUVES DES THÉORÈMES PRINCIPAUX

Ce chapitre est dédié à prouver le théorème 78, donnant toutes les valeurs propres de ν_k pour une collection de n éléments, et le théorème 60, qui explique que les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ commutent. Pour parvenir à démontrer le premier, on utilise la stratégie suivante, synthétisée à la figure 4.1 :

(A) On s'attarde à ce qui se passe sur les mots. On se place dans le contexte de l'algèbre des mots, et plus précisément des *modules de permutation* (sous-section 4.1.2). Ceux-ci ne sont pas des modules simples, et ils contiennent donc plusieurs copies de modules de Specht, mais ils ont l'avantage d'avoir les mots comme base; comprendre l'action d'un opérateur y est donc beaucoup plus facile.

On veut savoir ce qu'il se passe entre $\mathbb{C}S_n$ et $\mathbb{C}S_{n+1}$; en plus de mélanger, on doit donc insérer une lettre dans notre mot. On compare donc les actions d'insérer puis mélanger et celles de mélanger d'abord et d'insérer ensuite.

C'est le travail que l'on retrouve à la section 4.1

(B) Comme les valeurs propres de l'algèbre $\mathbb{C}S_{n+1}$ sont obtenues de celles de $\mathbb{C}S_n$ de la même façon que celles des modules simples $S^{\lambda+\square}$ proviennent de celles de S^λ, on restreint les équations aux modules de Specht S^λ. Malheureusement, le résultat de plusieurs équations se situe dans le module de permutations plutôt que dans le module de Specht. On en parle à la section 4.2.

(C) On résout ce problème en projetant le résultat sur les modules de Specht; on procède en projetant sur une composante isotypique S^λ, à la sous-section 4.2.1.

On obtient ainsi toutes les valeurs propres, dont on parle à la section 4.3.

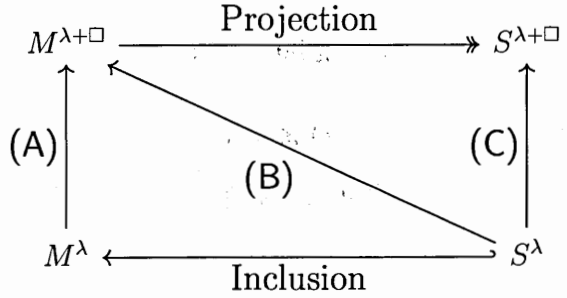


Figure 4.1 : Schéma de la preuve du théorème 78. Rappelons que nous cherchons à comprendre comment les valeurs propres de S^λ et de $S^{\lambda+\square}$ sont liées.

L'autre théorème important qui est démontré est que les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ commutent entre eux. Pour démontrer celui-ci, on réutilise le théorème 117, qui explique les relations entre l'insertion d'une lettre et les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sur les modules de permutation. Puis, on décrit une relation similaire avec la suppression d'une lettre. Conjointement avec une définition alternative de ν_k (théorème 116), cela nous permettra de démontrer par induction la commutativité.

Afin de faciliter la lecture de ce chapitre, la liste de tous les théorèmes (incluant les propositions, lemmes et corollaire) qui y sont présentés se trouve à l'annexe A.

4.1 L'algèbre des mots

Pour ce chapitre, nous travaillons sur l'algèbre des mots (définie à la page 90). Rappelons qu'un *mot* est une suite de lettres présentées dans un certain ordre. Dans le contexte de cette thèse, tous les mots sont finis et on peut donc définir leur longueur : il s'agit du nombre de *lettres* (incluant les répétitions) que contient le mot. Les lettres sont tirées d'un ensemble fini totalement ordonné, appelé *alphabet* et noté A. Pour un mot de longueur n, on utilise l'alphabet des lettres 1 à n (sans forcément utiliser toutes les lettres). Notons que tous les mots de longueur n peuvent se rapporter à cet alphabet; l'injection explicite sera détaillée sous peu.

Certains mots ont la particularité que toutes leurs lettres sont distinctes. Ces mots sont peu étudiés en combinatoire des mots parce que la recherche de motifs y est difficile, mais ils ont ceci de très intéressants qu'il s'agit des permutations. Appliquer un mélange sur une telle suite est intéressant, puisqu'il s'agit de mélanger des éléments tous distincts. Un paquet de cartes dont on aurait retiré les jokers est un exemple d'un mot dont chaque lettre a une unique occurrence.

Passage à l'alphabet de 1 à n Pour passer d'un mot quelconque de longueur n à un mot sur l'alphabet des nombres de 1 à n, on restreint l'alphabet aux seules lettres dans le mot. Ensuite, on réordonne les lettres de la plus fréquente à celle qui l'est le moins; en cas d'égalité, on conserve l'ordre alphabétique. Les deux exemples qui suivent détaillent ce processus.

Exemple 101. Le nom québécois *efface* est composé de quatre des six premières lettres de l'alphabet : a, c, e et f, les deux dernières ayant deux occurrences dans le mot. En réordonnant l'alphabet, on trouve l'injection suivante :

a	b	c	d	e	f	...
↕	-	↕	-	↕	↕	...
3	-	4	-	1	2	...

Notons que e et f précèdent a et c étant donné leur nombre d'occurrences supérieur.

	e	f	f	a	c	e
Valeur de la lettre après l'injection	1	2	2	3	4	1

Ainsi, l'alphabet du mot étant $\{a, c, e, f\}$, le mot *efface* est réécrit 122341.

Exemple 102. Le mot *banane* est composé des première, deuxième, cinquième et quatorzième lettres de l'alphabet, et a et n sont plus fréquentes. L'injection est

a	b	e	n
↓	↓	↓	↓
1	3	4	2

Le mot *banane* devient 312124 sur l'alphabet composé des nombres de 1 à 6.

Algèbre des mots À partir d'un alphabet A, les mots de A^* sont formés par concaténation, c'est-à-dire que, pour une certaine suite de lettres $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, on obtient un mot en collant les lettres de la suite tout en préservant leur ordre : $a_1 a_2 \ldots a_n$. La concaténation est une opération associative, mais elle n'est pas commutative. Si l'on considère les lettres comme des variables non-commutatives, on peut définir l'*algèbre des mots*, notée $\mathbb{C}\langle A \rangle$, formée des polynômes dont les variables sont les lettres de A : les monômes sont alors des mots (avec leur coefficient). Le produit non-commutatif de deux monômes est la concaténation et la somme est définie de la façon habituelle sur les espaces vectoriels.

On peut décomposer l'algèbre $\mathbb{C}\langle A\rangle$ de plusieurs façons. Une d'elle est de décomposer $\mathbb{C}\langle A\rangle$ en sous-espaces vectoriels engendrés par les mots de même longueur : on note alors $\mathbb{C}A^n$ le sous-espace vectoriel dont les éléments sont les combinaisons linéaires de mots de longueur n. Alors, $\mathbb{C}\langle A\rangle = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}A^n$.

4.1.1 Actions du groupe symétrique sur $\mathbb{C}A^n$

Le sous-espace vectoriel $\mathbb{C}A^n$ est un module pour l'action du groupe symétrique. Il existe en fait deux actions du groupe symétrique sur $\mathbb{C}A^n$: une action (à gauche) qui permute les lettres de l'alphabet, puis une autre action (à droite) qui permute les positions des lettres. Les mélanges sont un exemple de cette action à droite.

Action à gauche : les *coccyx* des *nonnes* L'action à gauche du groupe symétrique sur les mots permute les lettres de l'alphabet. Par exemple, si on travaille sur l'alphabet latin habituel, la permutation (notée en cycles) $\sigma = \{(cn), (ey), (sx)\}$ échange, dans le mot *coccyx*, les c et les n, les e et les y, et enfin les s et les x, pour chaque occurrence de ces lettres. Elle fixe toutes les autres lettres de l'alphabet (le o, par exemple). Ainsi, $\sigma \cdot coccyx = nonnes$.

Plus formellement, l'action sur les lettres de l'alphabet est définie comme ceci, pour un mot $w = a_1 \dots a_n$ et une permutation $\sigma \in S_n$:

$$\sigma \cdot w = \sigma(a_1) \dots \sigma(a_n).$$

Évidemment, cette action ne change pas la longueur des mots et préserve donc les modules $\{\mathbb{C}A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Action à droite : *imaginer* une *migraine* Une autre action par permutation peut être définie sur $\mathbb{C}A^n$. Chaque mot garde le même ensemble de lettres qui le

constituent, mais l'ordre de ces lettres est changé. Cette action à droite est définie comme suit pour un mot $w = a_1 \dots a_n$ et une permutation σ :

$$w \cdot \sigma = a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n)}.$$

Comme cette action ne change pas la longueur des mots, elle préserve les modules $\{\mathbb{C}A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 103. Le mot *imaginer* est une anagramme du mot *migraine*, c'est-à-dire qu'ils ont le même nombre d'occurrences de chaque lettre. On peut obtenir *imaginer* à partir de *migraine* par la permutation 21536784 :

$$migraine \cdot 21536784 = imaginer.$$

Exemple 104. Soit $w = \underline{13154}$, un mot sur l'alphabet $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, et soit la permutation $\sigma = 43251$. Notons que, pour cet exemple, les mots ont été soulignés pour les distinguer de la permutation qui agit sur le mot.
L'action à gauche de σ sur (l'alphabet de) w donne

$$43251 \cdot \underline{13154} = \underline{42415}.$$

En revanche, l'action à droite de σ sur (les positions de) w donne

$$\underline{13154} \cdot 43251 = \underline{51341}.$$

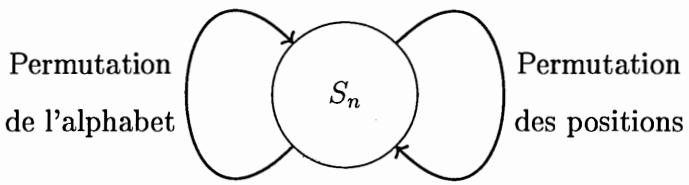


Figure 4.2 : Action par permutation, à gauche et à droite.

Les mélanges sont des éléments de l'algèbre du groupe symétrique qui agissent sur $\mathbb{C}A^n$. On peut interpréter les opérateurs de mélange comme des éléments de $\mathbb{C}S_n$ qui agissent sur $\mathbb{C}A^n$: en effet, chaque mot de A^n est envoyé, par un opérateur de mélange, sur une combinaison linéaire d'anagrammes de ce mot.

La notation en termes de sommes de permutations des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas particulièrement élégante. Toutefois, on peut exprimer les éléments de l'algèbre du groupe $\mathbb{C}S_n$ correspondant aux opérateurs $\{\pi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, dont les $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont des multiples des symétrisés :

$$\pi_k = \sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_k\leq n} \sum_{\sigma\in S_k} 1\cdot\ldots\cdot\widehat{i_1}\cdot\ldots\cdot\widehat{i_k}\cdot\ldots\cdot n\cdot i_{\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot i_{\sigma(k)}.$$

En revanche, $\pi_k^\top$ requiert la notion de battage, présentée au chapitre 1. Ainsi,

$$\pi_k^\top = \sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_k\leq n} \sum_{\sigma\in S_k} \left(1\cdot\ldots\cdot\widehat{i_1}\cdot\ldots\cdot\widehat{i_k}\cdot\ldots\cdot n\right) \sqcup\!\sqcup \left(i_{\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot i_{\sigma(k)}\right),$$

et $\pi_k^\top$ est aussi une somme de permutations.

Comme le produit d'éléments de l'algèbre du groupe est aussi dans l'algèbre, les opérateurs de mélange $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont bien dans l'algèbre.

4.1.2 Modules de permutations

Le *contenu* d'un mot (parfois aussi appelé son *évaluation*) est une liste $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, où λ_i est le nombre d'occurrences de la lettre i dans ce mot.

Exemple 105. Le contenu du mot 123321121 est $(4, 3, 2)$, parce qu'il contient quatre occurrences de la lettre 1, trois occurrences de la lettre 2 et que 2 apparaît deux fois. En suivant la définition donnée plus haut, on trouve $(4, 3, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Toutefois, on omet généralement les 0 à la fin du tuple.

Il est assez pratique de considérer λ comme un partage (comme on le faisait à la sous-section 3.4.2). Pour que ça soit possible, il faut réordonner les valeurs de λ. C'est possible de le faire en réordonnant l'alphabet en suivant l'injection présentée à la page 89. Enfin, pour considérer λ comme un partage, on retire les 0 qui apparaissent à la fin; c'est ce qui est fait dans l'exemple précédent.

On considère le sous-espace vectoriel M^λ engendré par tous les mots de contenu λ. Pour l'action à droite du groupe symétrique, M^λ est un module; bien sûr, changer les positions des lettres du mot n'altère pas le contenu de ce mot. On appelle M^λ le *module de permutations* associé à λ et une décomposition de l'algèbre des mots de longueur n est la suivante :

$$\mathbb{C}A^n \cong \bigoplus_{c \vDash n} M^{\text{partage}(c)},$$

où partage(c) est le partage obtenu de la composition c en ordonnant ses parts en ordre décroissant.

Modules de permutation et modules de Specht

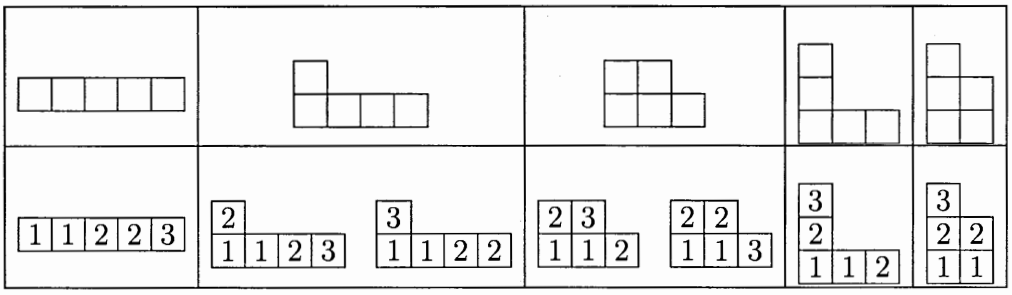
Contrairement aux modules de Specht (présentés à la sous-section 2.3.2), les modules de permutations ne sont pas simples. Ils contiennent différentes copies des modules de Specht, et nous présentons leur décomposition ici. Cela est particulièrement utile pour comprendre les théorèmes de la sous-section 3.4.2, mais aussi pour réaliser les preuves dans le présent chapitre.

Théorème 106 (Règle de Young pour les modules de permutation)**.** *Les modules de permutations se décomposent en modules simples de la façon suivante :*

$$M^\mu \cong \bigoplus_{\lambda \trianglerighteq \mu} m_{\lambda\mu} S^\lambda,$$

où $m_{\lambda\mu}$ est le nombre de tableaux semi-standards de forme λ et de contenu μ. Pour la définition de tableaux semi-standards, voir à la page 69.

Tableau 4.1 : Tableaux semi-standards de contenu $(2,2,1)$.



Exemple 107. On décompose le module de permutations $M^{\ydiagram{2,2}}$ de la façon suivante.

— On énumère les partages qui dominent $(2,2,1)$: il s'agit de (5), $(4,1)$, $(3,2)$, $(3,1,1)$ et $(2,2,1)$.

— Pour chacun de ces partages λ, on énumère les tableaux semi-standards de forme λ qui ont pour contenu $(2,2,1)$. Ceux-ci sont illustrés au tableau 4.1.

— On trouve, à l'aide du tableau 4.1, que

$$M^{\ydiagram{2,2}} \cong S^{\ydiagram{5}} \oplus 2\, S^{\ydiagram{4,1}} \oplus 2\, S^{\ydiagram{3,2}} \oplus S^{\ydiagram{3,1,1}} \oplus S^{\ydiagram{2,2,1}}.$$

La règle de Young pour les modules de permutations est en fait l'ingrédient-clé de la preuve du théorème 86, qui liste toutes les valeurs propres d'un opérateur de mélange ν_k lorsque la collection d'objets peut admettre des répétitions. La règle de Young pour les modules de permutations est l'élément qui dit quelles valeurs propres de ν_k sont aussi des valeurs lorsque la collection a des objets répétés, en plus de permettre de calculer la multiplicité de chacune des valeurs propres.

4.1.3 Opérateurs sur l'algèbre des mots

On aborde maintenant les collections triées d'objets comme des mots. Pour ce faire, on réutilise le vocabulaire de la combinatoire des mots, présenté au chapitre 1. Les objets deviennent alors des lettres, et la collection triée est vue comme un mot. En général, on utilise l'alphabet latin $\{a, b, \ldots\}$ pour représenter les lettres. Par exemple, a pourrait aussi représenter 6 ou α si nous modifions l'alphabet.

Insertion et suppression de lettres

On définit, sur l'algèbre des mots deux opérateurs linéaires, correspondant respectivement à l'insertion d'une lettre dans les mots et au retrait d'une lettre.

Insertion d'une lettre : sh_a Nous avons défini au chapitre 1 le battage de deux mots u et v en disant que c'était la combinaison linéaire formelle de tous les mots qu'on peut obtenir en intercalant des lettres de u et de v, tout en s'assurant que u et v soient des sous-mots disjoints dans le résultat. Lorsqu'un des mots est composé d'une seule lettre. Ainsi, on définit la fonction $\mathsf{sh}_a(w)$ comme $a \sqcup\!\sqcup w$.

Soit $\vec{e_a}$ le vecteur qui est de la même longueur que la taille de l'alphabet et qui ne contient que des 0, à l'exception d'un 1 à la position de la lettre a. Explicitement, sh_a est une application $M^{\lambda} \to M^{\lambda+\vec{e_a}}$ qui est définie par

$$\mathsf{sh}_a(w) = \sum_{i=1}^{n+1} w_1 \cdot \ldots \cdot w_{i-1} \cdot a \cdot w_i \cdot \ldots \cdot w_n.$$

Exemple 108. Lorsque $w = abaa$,

$$\mathsf{sh}_a(abaa) = 2 \cdot aabaa + 3 \cdot abaaa,$$
$$\mathsf{sh}_b(abaa) = babaa + 2 \cdot abbaa + ababa + abaab.$$

Retrait d'une lettre : ∂_a De la même façon qu'on peut exprimer l'insertion d'une occurrence de la lettre, on peut exprimer l'opération contraire, soit le retrait d'une occurrence de la lettre a. On note ainsi l'opérateur de retrait $\partial_a : M^{\lambda} \to M^{\lambda - \vec{e_a}}$, défini explicitement comme

$$\partial_a(w) = \sum_{1 \leq i \leq n} \delta_{a,w_i} w_1 \dots w_{i-1} w_{i+1} \dots w_n.$$

Exemple 109. Lorsque $w = abaa$,

$$\partial_a(abaa) = baa + 2 \cdot aba$$
$$\partial_b(abaa) = aaa$$

Comme expliqué dans (Dieker et Saliola, 2018), les opérateurs ∂_a et sh_a sont mutuellement adjoints. En effet, considérons le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ associé à la base des mots. Ainsi, $\langle u, w \rangle$ vaut 1 lorsque u et w sont égaux, et 0 sinon. Alors,

$$\langle \mathsf{sh}_a(u), v \rangle = \langle u, \partial_a(v) \rangle.$$

Proposition 110 (Équations (11) et (12) de (Dieker et Saliola, 2018))**.** *Les opérateurs d'insertion commutent entre eux, et il en est de même pour les opérateurs de suppression :*

$$\mathsf{sh}_a \circ \mathsf{sh}_b = \mathsf{sh}_b \circ \mathsf{sh}_a,$$
$$\partial_a \circ \partial_b = \partial_b \circ \partial_a .$$

Cependant, les opérateurs d'insertion et de suppression ne commutent pas entre eux, tel qu'expliqué au lemme 114.

L'opérateur de remplacement $\theta_{a,b}$

Enfin, on définit un opérateur pour remplacer une lettre dans un mot par une autre. Ainsi, on note $\theta_{a,b}$ l'opérateur visant à remplacer, de toutes les façons pos-

sibles, une occurrence de a par une occurrence de b. Formellement,

$$\theta_{a,b}(w) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{w_i,a}\ w_1 \cdot \ldots \cdot w_{i-1} \cdot b \cdot w_{i+1} \cdot \ldots \cdot w_n.$$

Lemme 111. *L'opérateur de remplacement, $\theta_{a,b}$, est un morphisme de S_n-modules à droite.*
En particulier, θ commute avec les actions à droite de S_n.

Démonstration. Pour prouver le lemme 111, on montre d'abord le deuxième énoncé, c'est-à-dire que θ commute avec les actions de S_n. Comme l'opérateur θ est une application linéaire, il est automatiquement un morphisme de S_n-modules s'il commute avec les actions de S_n.

Il faut donc montrer que pour tout mot $w \in \langle A \rangle$ et pour toute permutation $\sigma \in S_n$,

$$(\theta_{a,b}(w)) \cdot \sigma = \theta_{a,b}(w \cdot \sigma).$$

Comme les mots forment une base de l'algèbre des mots $\mathbb{C}\langle A \rangle$, montrer cet énoncé démontre également la commutativité sur toute l'algèbre. Or,

$$\begin{aligned}
(\theta_{a,b}(w)) \cdot \sigma &= \left(\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ w_i = a}} w_1 \ldots w_{i-1} \cdot b \cdot w_{i+1} \ldots w_n \right) \cdot \sigma \\
&= \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ w_{\sigma(i)} = a}} w_{\sigma(1)} \ldots w_{\sigma(i-1)} \cdot b \cdot w_{\sigma(i+1)} \ldots w_{\sigma(n)} \\
&= \theta_{a,b}(w \cdot \sigma),
\end{aligned}$$

achevant la démonstration du lemme 111. □

4.1.4 Opérateurs de mélange $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sur l'algèbre des mots

Proposition 112. *À l'aide des opérateurs* sh *et* ∂*, on peut donner cette nouvelle définition des opérateurs* $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *dans l'algèbre des mots :*

$$\nu_k = \sum_{1\leq a_1\leq\ldots\leq a_k\leq n} \frac{1}{\prod_{j\in[n]} \#\{l\in[k] \mid a_l = j\}!}\, \mathsf{sh}_{a_1}\circ\ldots\circ\mathsf{sh}_{a_k}\circ\partial_{a_1}\circ\ldots\circ\partial_{a_k}.$$

Remarque 113. La proposition plus haut apparaissait déjà (sans preuve) dans l'article de Dieker et Saliola (Dieker et Saliola, 2018, remarque 37), mais une erreur dans la formule faisait que l'égalité ne tenait que pour le cas du mélange doublement aléatoire (lorsque $k = 1$.)

Démonstration. En utilisant la définition 47 de ν_k, on sait que $\nu_k(w)$ retire k lettres (pas nécessairement distinctes) à w, puis réinsère les mêmes lettres dans n'importe quel ordre.

Supposons que les lettres retirées soient $a_1,\ldots,a_k$. L'ordre dans lequel ces lettres sont retirées n'importe pas, puisque les opérateurs ∂_{a_i} et ∂_{a_j} commutent (proposition 110). Sans perte de généralité, on peut supposer que $a_1\leq\ldots\leq a_k$. Le retrait puis la réinsertion des lettres correspond à $\mathsf{sh}_{a_1}\circ\ldots\circ\mathsf{sh}_{a_k}\circ\partial_{a_1}\circ\ldots\circ\partial_{a_k}$.

Pour décrire ν_k, on doit considérer la somme sur tous les ensembles de lettres $\{a_1,\ldots,a_k\}$ possibles. Toutefois, dans l'expression

$$\sum_{1\leq a_1\leq\ldots\leq a_k\leq n} \mathsf{sh}_{a_1}\circ\ldots\circ\mathsf{sh}_{a_k}\circ\partial_{a_1}\circ\ldots\circ\partial_{a_k},$$

le terme $\mathsf{sh}_{a_1}\circ\ldots\circ\mathsf{sh}_{a_k}\circ\partial_{a_1}\circ\ldots\circ\partial_{a_k}$ peut apparaître plus d'une fois : lorsque l'ensemble $\{a_1,\ldots,a_k\}$ compte m occurrences d'une certaine lettre $a_i=\ldots=a_{i+m}$, il y a $m!$ façons d'ordonner les lettres dans la suite d'inégalités. En faisant le produit pour chacune des lettres de l'alphabet, on trouve qu'il y a $\prod_{j\in[n]}\#\{l\in[k]\mid a_l=j\}!$ façons possibles d'ordonner $\{a_1,\ldots,a_k\}$.

En éliminant les doublons, on trouve que l'opérateur ν_k s'écrit aussi

$$\sum_{1\leq a_1\leq\ldots\leq a_k\leq n} \frac{1}{\prod_{j\in[n]} \#\{l\in[k] \mid a_l = j\}!}\, \mathsf{sh}_{a_1}\circ\ldots\circ\mathsf{sh}_{a_k}\circ\partial_{a_1}\circ\ldots\circ\partial_{a_k}\,. \qquad \square$$

4.1.5 Identités sur l'algèbre des mots

La prochaine sous-section est dédiée à prouver le théorème 117, énoncé plus loin. On y présente différentes propriétés des opérateurs ν_k, ainsi que leurs relations avec d'autres opérateurs sur l'algèbre des mots. Notamment, on étudie ce qui se produit lorsqu'on insère ou retire une lettre du mot.

Les identités qui suivent permettent en quelque sorte de quantifier *à quel point* les différents opérateurs sur les mots ne commutent pas. S'ils commutaient, alors le côté droit de ces équations serait nul.

Lemme 114. *Sur l'algèbre des mots de longueur n, les identités suivantes sont vérifiées :*

i. $\partial_b\circ\mathsf{sh}_a - \mathsf{sh}_a\circ\partial_b = \theta_{b,a} + (n+1)\delta_{a,b}\ \mathrm{Id}$,

ii. $\theta_{b,c}\circ\mathsf{sh}_a - \mathsf{sh}_a\circ\theta_{b,c} = \delta_{a,b}\,\mathsf{sh}_c$,

où $\delta_{a,b}$ vaut 1 si $a=b$ et 0, sinon.

Démonstration. La première de ces deux équations est déjà présente dans le lemme 36 de (Dieker et Saliola, 2018). La seconde partie se démontre en distinguant les différents cas. Pour nous aider, on peut rappeler une autre partie du lemme 36 de (Dieker et Saliola, 2018) :

$$\theta_{a,c}\circ\mathsf{sh}_a - \mathsf{sh}_a\circ\theta_{a,c} = \mathsf{sh}_c\,.$$

Dans l'identité qu'on souhaite démontrer, cela correspond au cas où $a=b$.

Si $a \neq b$, alors on doit montrer que sh_a et $\theta_{b,c}$ commutent. Or, si a et b sont distinctes, l'insertion de la lettre a ne change rien aux façons de modifier un b en c, et réciproquement. □

Ce dernier lemme est grandement utilisé dans les preuves tout au long de ce chapitre. Il est notamment utilisé dans la preuve du prochain lemme.

Celui-ci est plutôt technique et donne une façon plus compliquée de décrire l'action de $\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1}$. Cependant, il semble que ce détour soit nécessaire pour la preuve du théorème 117.

Lemme 115. *Sur l'algèbre des mots de longueur n,*

$$\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{1 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_k \leq n} \delta_{a,a_i} \frac{1}{\prod_{j \in [n]} \#\{l \in [k] \mid a_l = j\}!} \mathsf{sh}_a \circ \mathsf{sh}_{a_1} \circ \ldots \circ \widehat{\mathsf{sh}_{a_i}} \circ \ldots \circ \mathsf{sh}_{a_k} \circ \partial_{a_1} \circ \ldots \widehat{\partial_{a_i}} \circ \ldots \circ \partial_{a_k}.$$

Ici, notons que sh_{a_i} et ∂_{a_i} sont retirées du côté droit de l'équation afin d'obtenir ν_{k-1}.

Démonstration. On sait déjà, par la définition de ν_{k-1} (proposition 112) que

$$\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1} = \mathsf{sh}_a \sum_{1 \leq b_1 \leq \ldots \leq b_{k-1} \leq n} \frac{1}{\prod_{j \in [n]} \#\{l \in [k-1] \mid b_l = j\}!} \mathsf{sh}_{b_1} \circ \ldots \circ \mathsf{sh}_{b_{k-1}} \circ \partial_{b_1} \circ \ldots \circ \partial_{b_{k-1}}. \tag{4.1}$$

Pour chacun des termes de la somme à la droite de l'équation, on fixe le multi-ensemble (ou ensemble admettant les répétitions) $\{b_1, \ldots, b_{k-1}\}$. On note alors

$$\{a, b_1, \ldots, b_{k-1}\} = \{a_1, \ldots, a_k\}.$$

Supposons qu'il y ait q occurrences de a dans $\{b_1, \ldots, b_{k-1}\}$. Alors,

$$\sum_{i=1}^{k} \delta_{a,a_i} = q+1 \text{ et } \prod_{j\in[n]} \#\{l \in [k] \mid a_l = j\}! = (q+1) \prod_{j\in[n]} \#\{l \in [k-1] \mid b_l = j\}!.$$

Comme la lettre a est fixée, l'équation (4.1) vaut aussi

$$\mathsf{sh}_a \sum_{1\leq a_1\leq\ldots\leq a_k\leq n} \frac{\sum_{i=1}^{k} \delta_{a,a_i}}{\prod_{j\in[n]} \#\{l \in [k] \mid a_l = j\}!} \mathsf{sh}_{a_1} \circ \ldots \circ \widehat{\mathsf{sh}_{a_i}} \circ \ldots \circ \mathsf{sh}_{a_k} \circ \partial_{a_1} \circ \ldots \widehat{\partial_{a_i}} \circ \ldots \circ \partial_{a_k}. \qquad \square$$

L'équation qui suit nous donne une nouvelle façon d'écrire ν_k en fonction de ν_{k-1}, ce qui nous permettra de réaliser des preuves par induction faisant intervenir ν_k.

Théorème 116. *Sur l'algèbre des mots,*

$$\sum_{a=1}^{n} \mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1} \circ \partial_a = k\ \nu_k.$$

Démonstration. La preuve se fait essentiellement à l'aide du lemme 115 et de quelques égalités :

$$\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{n} \mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1} \circ \partial_a \\
&\overset{\text{lemme 115}}{=} \sum_{a=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{1\leq a_1\leq\ldots\leq a_k\leq n} \delta_{a,a_i} \frac{1}{\prod_{j\in[n]} \#\{l \in [k] \mid a_l = j\}!} \mathsf{sh}_a \circ \mathsf{sh}_{a_1} \circ \ldots \circ \\
&\qquad \widehat{\mathsf{sh}_{a_i}} \circ \ldots \circ \mathsf{sh}_{a_k} \circ \partial_{a_1} \circ \ldots \widehat{\partial_{a_i}} \circ \ldots \circ \partial_{a_k} \circ \partial_a \\
&\overset{\text{proposition 110}}{=} \sum_{a=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{1\leq a_1\leq\ldots\leq a_k\leq n} \delta_{a,a_i} \frac{1}{\prod_{j\in[n]} \#\{l \in [k] \mid a_l = j\}!} \mathsf{sh}_{a_1} \circ \ldots \circ \\
&\qquad \mathsf{sh}_{a_{i-1}} \circ \mathsf{sh}_a \circ \mathsf{sh}_{a_{i+1}} \circ \ldots \circ \mathsf{sh}_{a_k} \circ \partial_{a_1} \circ \ldots \partial_{a_{i-1}} \circ \partial_a \circ \partial_{a_{i+1}} \circ \ldots \circ \partial_{a_k} \\
&= \sum_{a=1}^{n} \sum_{1\leq a_1\leq\ldots\leq a_k\leq n} \frac{\#\{l \in [k] \mid a_l = a\}}{\prod_{j\in[n]} \#\{l \in [k] \mid a_l = j\}!} \mathsf{sh}_{a_1} \circ \ldots \circ \mathsf{sh}_{a_k} \circ \partial_{a_1} \circ \ldots \circ \partial_{a_k}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{1\leq a_1\leq\ldots\leq a_k\leq n} \frac{\sum_{a=1}^{n}\#\{l\in[k]\mid a_l=a\}}{\prod_{j\in[n]}\#\{l\in[k]\mid a_l=j\}!}\,\mathsf{sh}_{a_1}\circ\ldots\circ\mathsf{sh}_{a_k}\circ\partial_{a_1}\circ\ldots\circ\partial_{a_k}$$

$$= \sum_{1\leq a_1\leq\ldots\leq a_k\leq n} \frac{k}{\prod_{j\in[n]}\#\{l\in[k]\mid a_l=j\}!}\,\mathsf{sh}_{a_1}\circ\ldots\circ\mathsf{sh}_{a_k}\circ\partial_{a_1}\circ\ldots\circ\partial_{a_k}$$

$$\overset{\text{proposition 112}}{=} k\ \nu_k,$$

où l'avant-dernière égalité vient du fait que $\sum_{a=1}^{n}\#\{l\in[k]\mid a_l=a\}$ compte le nombre total d'éléments dans $\{a_1,\ldots,a_k\}$. □

On est maintenant en mesure d'énoncer le théorème principal de cette section. C'est une règle essentielle pour procéder à l'induction de ν_{k-1} à ν_k.

Théorème 117. *Sur les mots de longueur n,*

$$\nu_k\circ\mathsf{sh}_a-\mathsf{sh}_a\circ\nu_k=(n+2-k)\,\mathsf{sh}_a\circ\nu_{k-1}+\sum_{1\leq b\leq n}\mathsf{sh}_b\circ\theta_{b,a}\circ\nu_{k-1}.$$

De façon grossière, cette équation décrit la différence entre insérer d'abord une lettre dans notre mot de longueur n, puis mélanger avec ν_k, ou faire ces deux opérations dans l'ordre inverse. On pourra ainsi comparer l'action de ν_k sur un mot de taille n et sur un mot de taille $n+1$.

Dans la suite d'égalités, des parties de certaines équations ont été encadrées; ceci indique des parties qui changeront à la ligne suivante.

Démonstration. La preuve se fait par induction sur k. Le cas de base est celui du mélange doublement aléatoire, ν_1, et correspond au théorème 38 de (Dieker et Saliola, 2018) :

$$\nu_1\circ\mathsf{sh}_a-\mathsf{sh}_a\circ\nu_1=(n+1)\,\mathsf{sh}_a+\sum_{1\leq b\leq n}\mathsf{sh}_b\circ\theta_{b,a}.$$

Supposons maintenant que, pour une certaine valeur $k \geq 2$, et sur des mots de longueur $n-1$,

$$\nu_{k-1} \circ \mathsf{sh}_a - \mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1} = (n+2-k)\,\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-2} + \sum_{1 \leq b \leq n-1} \mathsf{sh}_b \circ \theta_{b,a} \circ \nu_{k-2}.$$

C'est notre hypothèse d'induction.

Alors, sur des mots de longueur n,

$$\begin{aligned}
&\nu_k \circ \mathsf{sh}_a - \mathsf{sh}_a \circ \nu_k \\
&\overset{\text{théorème 116}}{=} \nu_k \circ \mathsf{sh}_a - \frac{1}{k}\left(\boxed{\mathsf{sh}_a \textstyle\sum_{1 \leq b \leq n} \mathsf{sh}_b} \circ \nu_{k-1} \circ \partial_b\right) \\
&\overset{\text{proposition 110}}{=} \nu_k \circ \mathsf{sh}_a - \frac{1}{k}\left(\sum_{1 \leq b \leq n} \mathsf{sh}_b \circ \boxed{\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1}} \circ \partial_b\right) \\
&\overset{\text{Hyp. induction}}{=} \nu_k \circ \mathsf{sh}_a - \frac{1}{k}\Bigg(\sum_{1 \leq b \leq n} \mathsf{sh}_b \left(\nu_{k-1} \circ \mathsf{sh}_a - (n+2-k)\,\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-2}\right. \\
&\qquad \left. - \sum_{1 \leq c \leq n-1} \mathsf{sh}_c \circ \theta_{c,a} \circ \nu_{k-2}\right) \circ \partial_b\Bigg) \\
&\overset{\text{proposition 110}}{=} \nu_k \circ \mathsf{sh}_a - \frac{1}{k}\Bigg(\Big(\sum_{1 \leq b \leq n} \mathsf{sh}_b \circ \nu_{k-1} \circ \boxed{\mathsf{sh}_a \circ \partial_b}\Big) - (n+2-k) \\
&\qquad \cdot \mathsf{sh}_a\Big(\boxed{\textstyle\sum_{1 \leq b \leq n} \mathsf{sh}_b \circ \nu_{k-2} \circ \partial_b}\Big) - \sum_{1 \leq b,c \leq n} \mathsf{sh}_b \circ \mathsf{sh}_c \circ \theta_{c,a} \circ \nu_{k-2} \circ \partial_b\Bigg) \\
&\overset{\substack{\text{lemme 114} \\ \text{théorème 116}}}{=} \nu_k \circ \mathsf{sh}_a - \frac{1}{k}\Bigg(\Big(\sum_{1 \leq b \leq n} \boxed{\mathsf{sh}_b \circ \nu_{k-1} \circ (\partial_b} \circ \mathsf{sh}_a - \theta_{b,a})\Big) - (n+1)\,\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1} \\
&\qquad - (n+2-k)(k-1)\,\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1} - \sum_{1 \leq b,c \leq n} \mathsf{sh}_b \circ \mathsf{sh}_c \circ \theta_{c,a} \circ \nu_{k-2} \circ \partial_b\Bigg) \\
&\overset{\text{théorème 116}}{=} \nu_k \circ \mathsf{sh}_a - \frac{1}{k}\Bigg(k\,\nu_k \circ \mathsf{sh}_a - \sum_{1 \leq b \leq n} \mathsf{sh}_b \circ \nu_{k-1} \circ \theta_{b,a} - (n+1)\,\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1} \\
&\qquad - (n+2-k)(k-1)\,\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1} - \sum_{1 \leq b,c \leq n} \boxed{\mathsf{sh}_b \circ \mathsf{sh}_c} \circ \theta_{c,a} \circ \nu_{k-2} \circ \partial_b\Bigg) \\
&\overset{\text{proposition 110}}{=} \frac{1}{k}\Bigg(\Big(\sum_{1 \leq b \leq n} \mathsf{sh}_b \circ \boxed{\nu_{k-1} \circ \theta_{b,a}}\Big) + \big((n+1) + (n+2-k)(k-1)\big)\,\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1} \\
&\qquad + \sum_{1 \leq b,c \leq n} \mathsf{sh}_c \circ \mathsf{sh}_b \circ \theta_{c,a} \circ \nu_{k-2} \circ \partial_b\Bigg)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{lemme 111}}{=} \left(n+3-k-\frac{1}{k}\right)\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1} + \frac{1}{k}\Bigg(\Big(\sum_{1\le b\le n}\mathsf{sh}_b \circ \theta_{b,a}\circ\nu_{k-1}\Big) \\
&\qquad + \sum_{1\le c\le n}\mathsf{sh}_c \sum_{1\le b\le n}\boxed{\mathsf{sh}_b \circ \theta_{c,a}}\circ\nu_{k-2}\circ\partial_b\Bigg) \\
&\overset{\text{lemme 114}}{=} \left(n+3-k-\frac{1}{k}\right)\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1} + \frac{1}{k}\Bigg(\Big(\sum_{1\le b\le n}\mathsf{sh}_b \circ \theta_{b,a}\circ\nu_{k-1}\Big) \\
&\qquad + \sum_{1\le c\le n}\boxed{\mathsf{sh}_c}\sum_{1\le b\le n}(\theta_{c,a}\circ\mathsf{sh}_b\circ\nu_{k-2}\circ\partial_b - \delta_{b,c}\boxed{\mathsf{sh}_a}\circ\nu_{k-2}\circ\partial_b)\Bigg) \\
&\overset{\text{proposition 110}}{=} \left(n+3-k-\frac{1}{k}\right)\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1} + \frac{1}{k}\Bigg(\Big(\sum_{1\le b\le n}\mathsf{sh}_b \circ \theta_{b,a}\circ\nu_{k-1}\Big) \\
&\qquad + \sum_{1\le c\le n}\mathsf{sh}_c\circ\theta_{c,a}\boxed{\textstyle\sum_{1\le b\le n}\mathsf{sh}_b\circ\nu_{k-2}\circ\partial_b} - \boxed{\textstyle\sum_{1\le b\le n}\mathsf{sh}_a\,\mathsf{sh}_b\circ\nu_{k-2}\circ\partial_b}\Bigg) \\
&\overset{\text{théorème 116}}{=} \left(n+3-k-\frac{1}{k}\right)\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1} + \frac{1}{k}\Bigg(\Big(\sum_{1\le b\le n}\mathsf{sh}_b \circ \theta_{b,a}\circ\nu_{k-1}\Big) \\
&\qquad + (k-1)\sum_{1\le c\le n}\mathsf{sh}_c\circ\theta_{c,a}\circ\nu_{k-1} - (k-1)\,\mathsf{sh}_a\circ\nu_{k-1}\Bigg) \\
&= \quad (n+2-k)\,\mathsf{sh}_a\circ\nu_{k-1} + \sum_{1\le b\le n}\mathsf{sh}_b\circ\theta_{b,a}\circ\nu_{k-1}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

4.2 De l'algèbre des mots aux modules de Specht

Modules de Specht Les modules de Specht sont les modules simples du groupe symétrique et sont définis à la sous-section 2.3.2. Comme c'est décrit à la figure 2.1, ils sont particulièrement intéressants parce qu'ils forment le lien entre les valeurs propres et les tableaux standards.

Les deux prochains lemmes décrivent le comportement des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\theta_{b,a}$ lorsqu'ils sont restreints aux modules de Specht.

Lemme 118. *Pour toute valeur de k et pour tout partage λ, l'image de $\nu_k|_{S^\lambda}$ est*

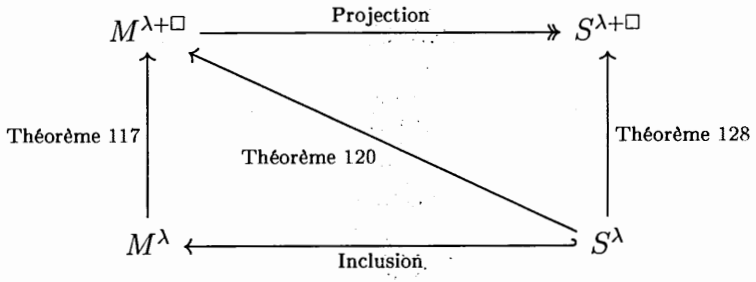


Figure 4.3 : Schéma de la preuve du théorème 78. Rappelons que nous cherchons à comprendre comment les valeurs propres de S^λ et de $S^{\lambda+\square}$ sont liées. Ici, les numéros des théorèmes concernés ont été ajoutés. C'est le théorème 128 qui est utilisé pour la preuve du théorème 78.

comprise dans S^λ.

Démonstration. Les modules de Specht S^λ sont des modules, et, pour toute action ρ du groupe symétrique, l'image de $\rho|_{S^\lambda}$ est comprise dans S^λ. Pour prouver le théorème, on se rappelle que les opérateurs de mélange sont des actions du groupe symétrique (sous-section 4.1.1). □

Lemme 119 (Lemme 43 de (Dieker et Saliola, 2018)). *Soit λ un partage. Si $a < b$, alors $\theta_{b,a}|_{S^\lambda} = 0$.*

Idée de preuve. L'argument-clé pour la preuve du lemme ci-dessous est la proposition 2.4.5 de (Sagan, 2001). Celle-ci dit que si un homomorphisme de S^λ vers $M^{\lambda'}$ est non-nul, alors $\lambda \trianglerighteq \lambda'$. Or, le partage λ est dominé par $\lambda' = \lambda + \vec{e_a} - \vec{e_b}$ lorsque $a < b$, et $\theta_{b,a}|_{S^\lambda}$ doit forcément être nul. □

On a maintenant tous les outils en main pour prouver le théorème suivant :

Théorème 120. *Soit $\lambda \vdash n$. Alors, pour toute lettre a,*

$$(\nu_k \circ \mathsf{sh}_a - \mathsf{sh}_a \circ \nu_k)\,|_{S^\lambda} = (n+2-k)\,(\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1})\,|_{S^\lambda} + \sum_{1 \le b \le a} (\mathsf{sh}_b \circ \theta_{b,a} \circ \nu_{k-1})\,|_{S^\lambda}.$$

Démonstration. On procède par suite d'égalités :

$$\begin{aligned}
&\left(\nu_k \circ \mathsf{sh}_a - \mathsf{sh}_a \circ \nu_k\right)|_{S^\lambda} \\
&\qquad \overset{\text{théorème 117}}{=} (n+2-k)\left(\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1}\right)|_{S^\lambda} + \left(\sum_{1\leq b\leq n} \mathsf{sh}_b \circ \theta_{b,a}\right) \circ \nu_{k-1}|_{S^\lambda} \\
&\qquad \overset{\substack{\text{lemme 118}\\ \text{lemme 119}}}{=} (n+2-k)\left(\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1}\right)|_{S^\lambda} + \left(\sum_{1\leq b\leq a} \mathsf{sh}_b \circ \theta_{b,a}\right) \circ \nu_{k-1}|_{S^\lambda}.
\end{aligned}$$

Dans la dernière égalité, le lemme 118 est nécessaire pour utiliser le lemme 119 et, ainsi, affirmer que la somme est nulle lorsque $a < b$. □

Enfin, un fait intéressant concernant l'insertion d'une lettre dans un élément d'un module de Specht est rapporté ici et sera utilisé plus tard.

Proposition 121 (Lemme 46 de (Dieker et Saliola, 2018)). *L'image de* $(\mathsf{sh}_a)|_{S^\lambda}$ *est contenue dans un sous-module de* $M^{\lambda+\vec{e_a}}$ *isomorphe à* $\bigoplus_{\mu=\lambda+\vec{e_r},\ r\leq a} S^\mu$.

4.2.1 Projecteurs isotypiques

Considérons une algèbre de groupe $\mathbb{C}G$ pouvant se décomposer en modules simples, notés $\{S^i\}_i$, et notons $S^{[i]} = \bigoplus m_i S^i$, où m_i est le nombre de copies de S^i dans $\mathbb{C}G$. On suppose que S^i et S^j ne sont pas isomorphes si $i \neq j$. Ainsi,

$$\mathbb{C}G \cong c_1 S^{[1]} \oplus c_2 S^{[2]} \oplus \ldots \oplus c_l S^{[l]}.$$

Un module est dit *isotypique* s'il est une somme directe de sous-modules simples isomorphes, et $S^{[i]}$, tel que défini plus haut, est la i-ième composante isotypique.

Il est connu que tout module admet une unique décomposition maximale en sous-modules isotypiques. Dans le cas de l'algèbre du groupe symétrique, cette décom-

position se fait sur les partages :

$$\mathbb{C}S_n \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (\mathbb{C}S_n)^{[\lambda]} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (S^\lambda)^{\oplus f^\lambda},$$

où f^λ désigne le nombre de tableaux standards de forme λ et correspond à la multiplicité de S^λ dans $\mathbb{C}S_n$ (d'après la règle de Young, théorème 41).

Définition 122. Soit G un groupe fini et soit S un G-module simple. Soit χ^S le caractère de S. Alors, on note p_S l'élément de $\mathbb{C}G$

$$p_S = \frac{\dim(S)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi^S(g)} g,$$

où $\overline{\chi}$ désigne le conjugué complexe de χ. La multiplication à droite par cet élément constitue la fonction sur l'algèbre du groupe G

$$\begin{aligned} \text{isoproj}_S : \mathbb{C}G &\to \mathbb{C}G^{[S]} \\ w &\mapsto w \cdot p_S. \end{aligned}$$

Dans le cas du groupe symétrique, il sera démontré prochainement que isoproj_λ est un projecteur isotypique sur le module simple S^λ. C'est également le cas pour les groupes en général et la preuve se fait de la même façon.

Proposition 123 (Propriétés du projecteur isotypique isoproj)**.** *La fonction* isoproj_μ *satisfait les énoncés suivants :*

1. *elle commute avec les actions du groupe symétrique.*
2. *c'est un morphisme de S_n-modules.*
3. *c'est un projecteur isotypique de $\mathbb{C}S_n$ vers la composante isotypique associée au module simple S^μ.*

Avant de pouvoir donner une démonstration de la proposition, il y a deux notions qu'il est essentiel de définir. Il s'agit du produit de deux caractères et des relations d'orthogonalité. Ces deux concepts bien connus sont l'objet des prochains paragraphes.

Produit de caractères

Définition 124. Soit G un groupe et soit φ et ψ deux fonctions $G \to \mathbb{C}$ (des caractères, par exemple). Leur produit interne est donné par l'équation

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)}\, \psi(g).$$

Ce produit est utile pour comprendre les caractères irréductibles, c'est-à-dire ceux qui forment une base de tous les caractères. Les caractères irréductibles sont associés aux modules simples, ce qui nous donne la proposition suivante :

Proposition 125 (Première relation d'orthogonalité)**.** *Si U et V sont des modules simples, les caractères associés à U et à V sont orthonormaux, c'est-à-dire que*

$$\langle \chi^U, \chi^V \rangle = \delta_{U,V} = \begin{cases} 1 & si\ U = V \\ 0 & si\ U \neq V \end{cases}.$$

De retour aux projecteurs isoptypiques On a maintenant les outils nécessaires pour démontrer la proposition 123.

Démonstration de la proposition 123. 1. *Elle commute avec les actions du groupe symétrique.* On montre d'abord que isoproj_μ est dans le centre de $\mathbb{C}S_n$. Pour ce faire, choisissons $\tau \in S_n$. Étant donné que le caractère est une fonction centrale, $\chi^\mu(\sigma) = \chi^\mu(\tau\sigma\tau^{-1})$, et

$$\begin{aligned} p_\mu \cdot \tau &= \left(\frac{f^\mu}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \overline{\chi^\mu(\sigma)} \sigma \right) \tau \\ &= \frac{f^\mu}{n!} \sum_{\tau\sigma\tau^{-1} \in S_n} \overline{\chi^\mu(\sigma)} \tau\sigma \\ &= \tau \left(\frac{f^\mu}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \overline{\chi^\mu(\sigma)} \sigma \right) \end{aligned}$$

$$= \tau \cdot p_\mu. \tag{4.2}$$

Ainsi, l'action à droite de toute permutation σ commute avec isoproj_μ :

$$\text{isoproj}_\mu(v \cdot \sigma) = (v \cdot \sigma) \cdot p_\mu \overset{\text{Éq.(4.2)}}{=} (v \cdot p_\mu) \cdot \sigma = \text{isoproj}_\mu(v) \cdot \sigma.$$

2. *C'est un morphisme de S_n-modules.* On a vu que isoproj_μ commute avec les actions du groupe symétrique. De plus,

$$\text{isoproj}_\mu(u+v) = (u+v) \cdot p_\mu = u \cdot p_\mu + v \cdot p_\mu = \text{isoproj}_\mu(u) + \text{isoproj}_\mu(v)$$

et isoproj_μ est un morphisme de S_n-modules.

3. *C'est un projecteur isotypique de $\mathbb{C}S_n$ vers la composante isotypique associée au module simple S^μ.* On fait cette preuve en deux étapes : d'abord, on montre que, pour tout module de Specht S^λ, $\text{isoproj}_\mu|_{S^\lambda}$ est nul si $\lambda \neq \mu$ et l'identité sinon. Ensuite, on montre comment on étend cette propriété à $(\text{isoproj}_\mu)|_{\mathbb{C}S_n}$.

   (a) On a montré plus tôt que isoproj_μ est un morphisme de S_n-modules. Comme S^μ et S^λ sont des modules simples, on peut utiliser le lemme de Schur pour montrer que $\text{isoproj}_\mu|_{S^\lambda}$ est un multiple de l'identité : $\text{isoproj}_\mu|_{S^\lambda} = c \cdot \text{Id}$.

   Pour connaître la valeur de c, on calcule la trace de $\text{isoproj}_\mu|_{S^\lambda}$. Notons qu'une notion essentielle pour ce calcul est le produit des caractères, présenté à la définition 124. Ainsi,

$$\begin{aligned}\text{tr}(\text{isoproj}_\mu|_{S^\lambda}) &= \text{tr}\left(\underbrace{\frac{f^\mu}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\overline{\chi^\mu(\sigma)}\sigma}_{p_\mu}|_{S^\lambda}\right) \\ &= \frac{f^\mu}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\overline{\chi^\mu(\sigma)}\,\text{tr}(\sigma|_{S^\lambda})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{f^\mu}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \overline{\chi^\mu(\sigma)} \chi^\lambda(\sigma) \\
&= f^\mu \langle \chi^\mu, \chi^\lambda \rangle \\
&= \begin{cases} f^\mu & \text{si } S^\lambda \cong S^\mu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},
\end{aligned}
$$

par la première relation d'orthogonalité.

Ainsi, puisque la trace de $\text{isoproj}_\mu|_{S^\lambda}$ est égale à la dimension de S^λ ou nulle, on conclut que, $\text{isoproj}_\mu|_{S^\lambda}$ est l'identité lorsque $\lambda = \mu$ et nul sinon.

(b) Considérons la décomposition de $\mathbb{C}S_n$ en modules simples :

$$\mathbb{C}S_n \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} S^{[\lambda]} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (S^\lambda)^{\oplus f^\lambda}.$$

Par ce qui précède, $\text{isoproj}_\mu(S^\lambda)$ est non-nul seulement si $\mu = \lambda$, auquel cas il agit comme l'identité. Ainsi,

$$\text{isoproj}_\mu(\mathbb{C}S_n) \cong (S^\mu)^{\oplus f^\mu} \cong S^{[\mu]},$$

ce qui permet de démontrer que isoproj_μ agit véritablement comme le projecteur isotypique. □

Les propriétés des projecteurs isotypiques sont notamment utiles pour évaluer avec quels opérateurs ils commutent (comme au lemme 126) et avec lesquels ils ne commutent pas (lemme 127).

Lemme 126. *Le projecteur isotypique* isoproj_μ *commute avec l'opérateur de remplacement* $\theta_{a,b}$ *:*

$$\theta_{a,b}(\text{isoproj}_\mu(v)) = \text{isoproj}_\mu(\theta_{a,b}(v)).$$

Démonstration. Comme $\theta_{a,b}$ est un morphisme de S_n-modules (lemme 111), il commute avec les éléments de l'algèbre du groupe. Or, p_μ est un élément de

l'algèbre du groupe.

$$\theta_{a,b}(\text{isoproj}_\mu(v)) = \theta_{a,b}(v \cdot p_\mu) = \theta_{a,b}(v) \cdot p_\mu = \text{isoproj}_\mu(\theta_{a,b}(v)). \qquad \square$$

Nous avons introduit la notion de projecteur isotypique pour avoir une façon de revenir vers les modules simples même en ajoutant une lettre. Ainsi, pour simplifier la notation, nous reprenons la notation de (Dieker et Saliola, 2018) et introduisons l'opérateur projlift, qui est la composition de l'insertion puis de la projection isotypique :

$$\begin{aligned} \text{projlift}_a^\mu : M^\lambda &\to S^\mu \\ v &\mapsto \text{isoproj}_\mu(\mathsf{sh}_a(v)) \end{aligned}$$

lorsque $\mu = \lambda + \vec{e_a}$ et $v \in M^\lambda$.

Lemme 127. *Soit* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \vdash n$, $a \in [l+1]$ *et* $\mu = \lambda + \vec{e_r}$, *avec* $r \in [a]$. *Alors,*

$$\left(\nu_k \circ \text{projlift}_a^\mu - \text{projlift}_a^\mu \circ \nu_k\right)|_{S^\lambda} =$$
$$(n+3-k+\lambda_a-a)\left(\text{projlift}_a^\mu \circ \nu_{k-1}\right)|_{S^\lambda} + \left(\sum_{r \le b < a} \theta_{b,a} \circ \text{projlift}_b^\mu \circ \nu_{k-1}\right)|_{S^\lambda}.$$

Démonstration. Cette preuve se fait encore une fois par une suite d'égalités. Mentionnons toutefois l'argument suivant, qui est utile pour la preuve : *Si* $\mu = \lambda + \vec{e_r}$ *et* $b < r$ *:*

$$\text{projlift}_b^\mu|_{S^\lambda} = 0. \tag{4.3}$$

Pour démontrer cette affirmation, on se sert de deux résultats auxiliaires, la proposition 121 et le lemme 119, qui nous indiquent dans quels espaces les modules sont envoyés par la suite d'opérateurs. Graphiquement :

$$S^\lambda \xrightarrow{\mathsf{sh}_b} \bigoplus_{r \le b} S^{\lambda+\vec{e_r}} \xrightarrow{\text{isoproj}_\mu} \left(\sum_{r \le b} \delta_{\mu,\lambda+\vec{e_r}}\right) S^\mu.$$

Or, si $r > b$, comme dans l'hypothèse, l'image de $\mathrm{projlift}_b^{\lambda+\vec{e_r}}$ à partir de S^λ est nulle.

De plus, $\theta_{a,a}(w)$ est un multiple de l'identité. Le résultat est toujours le mot lui-même, et le nombre de façons de l'obtenir est le nombre d'occurrences de a dans w. En particulier, $\theta_{a,a}|_{M^\lambda} = \lambda_a \cdot \mathrm{Id}$.

Enfin,

$$
\begin{aligned}
&\left(\nu_k \circ \mathrm{projlift}_a^\mu - \mathrm{projlift}_a^\mu \circ \nu_k\right)|_{S^\lambda} \\
&\quad = \left(\nu_k \circ \mathrm{isoproj}_\mu \circ \mathsf{sh}_a\right)|_{S^\lambda} - \left(\mathrm{isoproj}_\mu \circ \mathsf{sh}_a \circ \nu_k\right)|_{S^\lambda} \\
&\quad \overset{\text{lemme 126}}{=} \mathrm{isoproj}_\mu \left(\nu_k \circ \mathsf{sh}_a - \mathsf{sh}_a \circ \nu_k\right)|_{S^\lambda} \\
&\quad \overset{\text{théorème 120}}{=} \mathrm{isoproj}_\mu \left((n+2-k)(\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1})|_{S^\lambda} + \sum_{1 \le b \le a} \boxed{\mathsf{sh}_b \circ \theta_{b,a}} \circ \nu_{k-1}|_{S^\lambda} \right) \\
&\quad \overset{\text{lemme 114}}{=} (n+2-k)\,\mathrm{projlift}_a^\mu \circ \nu_{k-1}|_{S^\lambda} + \sum_{1 \le b \le a} \boxed{\mathrm{isoproj}_\mu \circ \theta_{b,a}} \circ \mathsf{sh}_b \circ \nu_{k-1}|_{S^\lambda} \\
&\qquad\qquad - \sum_{1 \le b \le a} \underbrace{\mathrm{isoproj}_\mu \circ \mathsf{sh}_a}_{\mathrm{projlift}_a^\mu} \circ \nu_{k-1}|_{S^\lambda} \\
&\quad \overset{\text{lemme 126}}{=} (n+2-k-a)\,\mathrm{projlift}_a^\mu \circ \nu_{k-1}|_{S^\lambda} + \sum_{\boxed{1 \le b \le a}} \theta_{b,a} \circ \mathrm{projlift}_b^\mu \circ \nu_{k-1}|_{S^\lambda} \\
&\quad \overset{\text{équation (4.3)}}{=} (n+2-k-a)\,\mathrm{projlift}_a^\mu \circ \nu_{k-1}|_{S^\lambda} + \sum_{r \le b \le a} \theta_{b,a} \circ \mathrm{projlift}_b^\mu \circ \nu_{k-1}|_{S^\lambda} \\
&\quad = (n+2-k-a)\,\mathrm{projlift}_a^\mu \circ \nu_{k-1}|_{S^\lambda} + \underbrace{\theta_{a,a}}_{(\lambda_a+1)\,\mathrm{Id}} \circ \mathrm{projlift}_a^\mu \circ \nu_{k-1}|_{S^\lambda} \\
&\qquad\qquad + \sum_{r \le b < a} \theta_{b,a} \circ \mathrm{projlift}_b^\mu \circ \nu_{k-1}|_{S^\lambda} \\
&\quad = (n+3-k+\lambda_a-a)\,\mathrm{projlift}_a^\mu \circ \nu_{k-1}|_{S^\lambda} + \sum_{r \le b < a} \theta_{b,a} \circ \mathrm{projlift}_b^\mu \circ \nu_{k-1}|_{S^\lambda}. \ \square
\end{aligned}
$$

On peut maintenant décrire le comportement de nos opérateurs sur les modules de Specht : la prochaine équation vient simplifier celle du lemme 127.

Théorème 128. *Soit* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \vdash n$, $a \in [l+1]$ *et* $\mu = \lambda + \vec{e_r}$, *avec* $r \in [a]$. *Alors,*

$$(\nu_k \circ \text{projlift}_a^\mu - \text{projlift}_a^\mu \circ \nu_k)\,|_{S^\lambda} = (n+2-k+(\lambda_r+1-r))\,(\text{projlift}_a^\mu \circ \nu_{k-1})\,|_{S^\lambda}.$$

Une grosse partie du travail nécessaire à la preuve de ce théorème a déjà été réalisé à ce point. En fait, le lemme 127 est l'ingrédient-clé de la preuve qui suit.

Démonstration. Grâce au lemme 127, on sait que

$$\begin{aligned}&\left(\nu_k \circ \text{projlift}_a^\mu - \text{projlift}_a^\mu \circ \nu_k\right)|_{S^\lambda} = \\ &\qquad (n+3-k+\lambda_a-a)\,(\text{projlift}_a^\mu \circ \nu_{k-1})\,|_{S^\lambda} + \left(\sum_{r \le b < a} \theta_{b,a} \circ \text{projlift}_b^\mu \circ \nu_{k-1}\right)|_{S^\lambda}.\end{aligned}$$

On distingue deux cas :

Si $r = a$: Alors le deuxième terme du côté droit de l'équation est nul (la somme est vide), et l'équation est simplement

$$(\nu_k \circ \text{projlift}_r^\mu - \text{projlift}_r^\mu \circ \nu_k)\,|_{S^\lambda} = (n+3-k+\lambda_r-r)\,(\text{projlift}_r^\mu \circ \nu_{k-1})\,|_{S^\lambda}. \quad (4.4)$$

Sinon, $r < a$: On se sert de l'équation (4.4). On multiplie à gauche chaque côté

de cette équation par $\theta_{r,a}$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
&(n+3-k+\lambda_r-r)\theta_{r,a}\circ \mathrm{projlift}_r^\mu \circ \nu_{k-1}|_{S^\lambda} \\
&\overset{\text{équation (4.4)}}{=} \boxed{\theta_{r,a}\circ\nu_k\circ\mathrm{projlift}_r^\mu}|_{S^\lambda} - \boxed{\theta_{r,a}\circ\mathrm{projlift}_r^\mu}\circ\nu_k|_{S^\lambda} \\
&\overset{\substack{\text{lemme 111}\\ \text{lemme 126}}}{=} \nu_k\circ\mathrm{isoproj}_\mu\circ\boxed{\theta_{r,a}\circ\mathsf{sh}_r}|_{S^\lambda} - \mathrm{isoproj}_\mu\circ\boxed{\theta_{r,a}\circ\mathsf{sh}_a}\circ\nu_k|_{S^\lambda} \\
&\overset{\text{lemme 114}}{=} \nu_k\circ\mathrm{isoproj}_\mu\circ(\mathsf{sh}_r\circ\theta_{r,a}+\mathsf{sh}_a)|_{S^\lambda} - \mathrm{isoproj}_\mu\circ(\mathsf{sh}_r\circ\theta_{r,a}+\mathsf{sh}_a)\circ\nu_k|_{S^\lambda} \\
&= \big(\nu_k\circ\mathrm{projlift}_r^\mu\circ\theta_{r,a}+\nu_k\circ\mathrm{projlift}_a^\mu \\
&\qquad -\mathrm{projlift}_r^\mu\circ\boxed{\theta_{r,a}\circ\nu_k} - \mathrm{projlift}_a^\mu\circ\nu_k\big)|_{S^\lambda} \\
&\overset{\text{lemme 111}}{=} (\nu_k\circ\mathrm{projlift}_a^\mu - \mathrm{projlift}_a^\mu\circ\nu_k)|_{S^\lambda} \\
&\qquad +(\nu_k\circ\mathrm{projlift}_r^\mu - \mathrm{projlift}_r^\mu\circ\nu_k)\circ\theta_{r,a}|_{S^\lambda} \\
&\overset{\text{équation (4.4)}}{=} (\nu_k\circ\mathrm{projlift}_a^\mu - \mathrm{projlift}_a^\mu\circ\nu_k)|_{S^\lambda} \\
&\qquad +(n+3-k+\lambda_r-r)\,\mathrm{projlift}_r^\mu\circ\nu_{k-1}\circ\theta_{r,a}|_{S^\lambda}.
\end{aligned}
$$

En comparant la première et la dernière ligne de cette suite d'équations, on trouve

$$
\begin{aligned}
&\big(\nu_k\circ\mathrm{projlift}_a^\mu - \mathrm{projlift}_a^\mu\circ\nu_k\big)|_{S^\lambda} \\
&\quad = (n+3-k+\lambda_r-r)\left(\boxed{\theta_{r,a}\circ\mathrm{projlift}_r^\mu}\circ\nu_{k-1} - \mathrm{projlift}_r^\mu\circ\nu_{k-1}\circ\theta_{r,a}\right)|_{S^\lambda} \\
&\quad \overset{\text{lemme 126}}{=} (n+3-k+\lambda_r-r)\,\mathrm{isoproj}_\mu\left(\theta_{r,a}\circ\mathsf{sh}_r\circ\nu_{k-1} - \mathsf{sh}_r\circ\boxed{\nu_{k-1}\circ\theta_{r,a}}\right)|_{S^\lambda} \\
&\quad \overset{\text{lemme 111}}{=} (n+3-k+\lambda_r-r)\,\mathrm{isoproj}_\mu\left(\boxed{\theta_{r,a}\circ\mathsf{sh}_r - \mathsf{sh}_r\circ\theta_{r,a}}\right)\circ\nu_{k-1}|_{S^\lambda} \\
&\quad \overset{\text{lemme 114}}{=} (n+3-k+\lambda_r-r)\,\mathrm{isoproj}_\mu\circ\mathsf{sh}_a\circ\nu_{k-1}|_{S^\lambda} \\
&\quad = (n+3-k+\lambda_r-r)\,\mathrm{projlift}_a^\mu\circ\nu_{k-1}|_{S^\lambda},
\end{aligned}
$$

ce qui achève la démonstration du théorème 128. □

On peut déduire du théorème 128 le corollaire suivant sur les valeurs propres de ν_k.

Corollaire 129. *Soit $\lambda \vdash n$ et soit $v \in S^\lambda$ un vecteur propre à la fois pour ν_k et ν_{k-1}, associé aux valeurs propres v_k et v_{k-1}, respectivement. Alors, soit*

— $\text{projlift}_a^{\lambda+\vec{e_r}}(v) = 0$

ou

— $$\begin{aligned}\nu_k \circ \text{projlift}_a^{\lambda+\vec{e_r}}(v) &= \text{projlift}_a^{\lambda+\vec{e_r}}\left(v_k + (n+2-k+(\lambda_r+1-r))v_{k-1}\right)(v) \\ &= \left(v_k + (n+2-k+(\lambda_r+1-r))v_{k-1}\right)\text{projlift}_a^{\lambda+\vec{e_r}}(v).\end{aligned}$$

L'hypothèse faite ici qu'un vecteur soit à la fois un vecteur propre pour ν_k et ν_{k-1} peut sembler contraignante. Toutefois, on a démontré que les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ admettent une base commune de vecteurs propres (théorème 100). L'existence de vecteurs propres à la fois pour ν_k et ν_{k-1} est non seulement garantie par ce théorème; on sait en plus que, dans une certaine base, tous les vecteurs propres sont ainsi. Cela nous garantit que ce processus nous permettra de trouver *toutes* les valeurs propres des opérateurs ν_k.

4.3 Théorème principal

On souhaite maintenant calculer explicitement toutes les valeurs propres de ν_k. On aura ainsi démontré le théorème 78. Pour ce faire, on procède comme suit :

1. On décrit, à l'aide d'un résultat de (Reiner *et al.*, 2014), le noyau de chacun des opérateurs ν_k (sous-section 4.3.1).
2. On présente une procédure pour obtenir tous les autres vecteurs propres, à partir de ceux du noyau (sous-section 4.3.2).
3. Pour ces vecteurs propres, on peut calculer la valeur propre associée à l'aide du corollaire 129 (sous-section 4.3.3).

4.3.1 Vecteurs propres du noyau

Le noyau des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est connu depuis (Reiner *et al.*, 2014), où il est l'objet du théorème VI.10.5. Ce que Reiner, Saliola et Welker ont démontré, c'est que l'opérateur Δ de Schützenberger connecte les tableaux de taille n et type j à ceux de taille $n-1$ et type $j-1$. Ils ont de plus démontré que les espaces propres des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sur les collections de n et $n-1$ objets étaient reliés de la même façon. Les trois auteurs expliquent la construction du noyau en fonction des tableaux d'un certain type :

Théorème 130 (Théorème VI.10.5 de (Reiner *et al.*, 2014))**.** *Le noyau de ν_k est*

$$\ker(\nu_k) \cong \bigoplus_{\substack{\textit{tableau standard } t\ , \\ \mathrm{type}(t)<k}} S^{\mathrm{forme}(t)}.$$

Ce théorème est pratique parce qu'il nous permet non seulement de donner la dimension du noyau, mais aussi parce qu'il est la base de l'induction que nous faisons pour décrire les autres espaces propres. Malheureusement, le dernier théorème ne donne pas une base du noyau; si nous avions une telle base, ce qui est présenté dans les prochains paragraphes permettrait de décrire une base de tous les espaces propres.

4.3.2 Vecteurs propres qui ne sont pas dans le noyau

On étudie d'abord la structure de l'image de $\nu_k|_{S^\lambda}$. On sait déjà que ν_k est un élément de l'algèbre de groupe, d'où $\mathrm{im}(\nu_k|_{S^\lambda}) \subseteq S^\lambda$. On peut toutefois raffiner ce résultat.

Proposition 131. *L'image de ν_k sur S^λ est comprise dans la somme suivante :*

$$\mathrm{im}(\nu_k|_{S^\lambda}) \subseteq \sum_{1\le a_1\le\ldots\le a_k\le n} \mathrm{im}\left(\mathrm{isoproj}_\lambda \circ \mathsf{sh}_{a_k} \circ \ldots \circ \mathsf{sh}_{a_1}|_{S^{\lambda-e_{\vec{a_1}}-\ldots-e_{\vec{a_k}}}}\right)$$

$$\subseteq \sum_{1 \leq a \leq n} \operatorname{im}\left(\operatorname{projlift}_a^{\lambda}|_{S^{\lambda-\vec{e_a}}}\right).$$

Démonstration. On fait d'abord quelques observations sur ν_k qui sont utiles pour démontrer la proposition.

1. Soit π_k l'opérateur de BHR tel que ν_k est un multiple de $\pi_k^{\top} \circ \pi_k$ (pour plus de détails, voir la sous-section 3.1.4). Alors, l'image de ν_k est comprise dans l'image de $\pi_k^{\top}$. En effet, si un vecteur $\vec{v}$ est dans l'image de ν_k, il existe $\vec{u}$ tel que $\vec{v} = \nu_k(\vec{u}) = \pi_k^{\top}(\pi_k(\vec{u}))$.

2. Soit w un mot de longueur n, et notons $v = w_1 \dots w_{n-k}$. Soit u le mot trié de longueur k formé des lettres $w_{n-k+1}, \dots, w_n$ avec répétitions, c'est-à-dire le mot formé des lettres de w qui ne sont pas dans v, placées en ordre croissant. La définition de π_k donnée à la sous-section 3.1.4 nous indique qu'on peut écrire

$$\pi_k^{\top}(w) = \sum_{1 \leq u_1 \leq \dots \leq u_k \leq n} \mathsf{sh}_{u_k} \circ \dots \circ \mathsf{sh}_{u_1}(v).$$

3. De plus, v est le mot obtenu de w en retirant les k dernières lettres. Dans (Dieker et Saliola, 2018), l'opérateur $\operatorname{proj}_a(w)$ est défini ainsi : si a est la dernière lettre de w, alors $\operatorname{proj}_a(w) = w_1 \dots w_{n-1}$; sinon, $\operatorname{proj}_a(w) = 0$.[1] Dans cet article, il est démontré (dans la preuve de la proposition 53) que l'image de $\operatorname{proj}_a|_{S^{\lambda}}$ est comprise dans $S^{\lambda-\vec{e_a}}$.

   Remarquons que v peut s'écrire comme $v = \operatorname{proj}_{w_{n-k+1}} \circ \dots \circ \operatorname{proj}_{w_n}(w)$.

En combinant les deuxième et troisième observations, on trouve que

$$\operatorname{im}(\pi_k^{\top}|_{S^{\lambda}}) \subseteq \sum_{1 \leq u_1 \leq \dots \leq u_k \leq n} \mathsf{sh}_{u_k} \circ \dots \circ \mathsf{sh}_{u_1}|_{S^{\lambda-e\vec{u}_1-\dots-e\vec{u}_k}}.$$

---

1. On devine, par le nom de l'opérateur, que $\operatorname{proj}_a|_{S^{\lambda}}$ est une projection sur le sous-module $S^{\lambda-\vec{e_a}}$.

Rappelons que π_k est un élément de l'algèbre du groupe. Ainsi, son image, lorsque restreint à un module, est dans ce module. D'où :

$$\begin{aligned}\operatorname{im}(\nu_k|_{S^\lambda}) &\subseteq \operatorname{im}(\pi_k^\top|_{S^\lambda}) \\ &= \operatorname{im}\left(\operatorname{isoproj}_\lambda \circ \pi_k^\top\right)|_{S^\lambda} \\ &\subseteq \sum_{1\le u_1\le\ldots\le u_k\le n} \operatorname{im}\left(\operatorname{isoproj}_\lambda \circ \mathsf{sh}_{u_k} \circ \ldots \circ \mathsf{sh}_{u_1}\right)|_{S^{\lambda-e_{\vec{u}_1}-\ldots-e_{\vec{u}_k}}},\end{aligned}$$

ce qui correspond à la première inclusion à démontrer.

De plus, la proposition 55 de (Dieker et Saliola, 2018) indique que, lorsque $u_1 \le u_2 \le \ldots \le u_k$ représentent des rangées dans lesquelles se trouvent des boîtes de λ, alors

$$\begin{aligned}\operatorname{isoproj}_\lambda \circ \mathsf{sh}_{u_k} \circ \ldots \circ \mathsf{sh}_{u_1}|_{S^{\lambda-e_{\vec{u}_1}-\ldots-e_{\vec{u}_k}}} &= (\operatorname{isoproj}_\lambda \circ \mathsf{sh}_{u_k}) \circ \left(\operatorname{isoproj}_{\lambda-e_{\vec{u}_k}} \circ \mathsf{sh}_{u_{k-1}}\right) \\ &\quad \circ \ldots \circ \left(\operatorname{isoproj}_{\lambda-e_{\vec{u}_2}-\ldots-e_{\vec{u}_k}} \circ \mathsf{sh}_{u_1}|_{S^{\lambda-e_{\vec{u}_1}-\ldots-e_{\vec{u}_k}}}\right)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\operatorname{im}(\nu_k|_{S^\lambda}) &\subseteq \sum_{1\le u_1\le\ldots\le u_k\le n} \operatorname{im}\left(\operatorname{isoproj}_\lambda \mathsf{sh}_{u_k} \circ \ldots \circ \mathsf{sh}_{u_1}|_{S^{\lambda-e_{\vec{u}_1}-\ldots-e_{\vec{u}_k}}}\right) \\ &\subseteq \sum_{1\le u_1\le\ldots\le u_k\le n} \operatorname{im}\big(\operatorname{isoproj}_\lambda \circ \mathsf{sh}_{u_k} \circ \operatorname{isoproj}_{\lambda-e_{\vec{u}_k}} \circ \mathsf{sh}_{u_{k-1}} \\ &\qquad\qquad \circ \ldots \circ \mathsf{sh}_{u_1}|_{S^{\lambda-e_{\vec{u}_1}-\ldots-e_{\vec{u}_k}}}\big) \\ &\subseteq \sum_{1\le u_k\le n} \operatorname{im}\big(\underbrace{\operatorname{isoproj}_\lambda \circ \mathsf{sh}_{u_k}}_{\operatorname{projlift}^\lambda_{u_k}}|_{S^{\lambda-e_{\vec{u}_k}}}\big).\end{aligned}$$

□

D'après le résultat de la dernière proposition, tout vecteur de S^λ qui est dans l'image de ν_k peut s'écrire comme

$$\sum_{1\le a\le n} \operatorname{projlift}^\lambda_a(\vec{v_a}),$$

où $\vec{v_a}$ est un vecteur de $S^{\lambda-\vec{e_a}}$. En particulier, si $\vec{v} \in S^\lambda$ est un vecteur propre de ν_k et de ν_{k-1} qui n'est pas dans le noyau, alors il existe des vecteurs propres $\vec{v_1} \in S^{\lambda-\vec{e_1}}, \ldots, \vec{v_n} \in S^{\lambda-\vec{e_n}}$ de ν_k et de ν_{k-1} tels que

$$\vec{v} = \sum_{1 \leq a \leq n} \delta_a \, \text{projlift}_a^\lambda(\vec{v_a}),$$

où δ_a peut valoir 0 ou 1. Autrement dit, les vecteurs propres de ν_k qui ne sont pas dans le noyau sont tous construits à partir de vecteurs propres de ν_k pour un mot dont la longueur est inférieure (de 1) et avec l'opérateur projlift.

De la même façon, pour tout $\vec{v_a} \in S^{\lambda-\vec{e_a}}$ qui est un vecteur propre pour les opérateurs ν_k et ν_{k-1}, $\text{projlift}_a^\lambda(\vec{v_a})$ est un vecteur propre de ν_k (corollaire 129). De plus, le corollaire donne deux choix pour la valeur propre associée à $\text{projlift}_a^\lambda(\vec{v_a})$: elle est soit nulle, soit entièrement déterminée par les valeurs propres de $\vec{v_a}$, par la lettre (a) qui est ajoutée au mot et par k (les détails sont dans l'énoncé du corollaire 129).

4.3.3 Valeurs propres

Les sous-sections 4.3.1 et 4.3.2 décrivent certaines propriétés des vecteurs propres. Avec celles-ci, on a suffisamment d'informations pour donner toutes les valeurs propres des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

On rappelle de la figure 2.1 que les valeurs propres distinctes des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ correspondent aux tableaux standards de taille n. Pour un tableau t, la multiplicité de la valeur propre associée est la dimension du module de Specht $S^{\text{forme}(t)}$, soit le nombre de tableaux standards qui ont la même forme que t.

Tableaux standards $\longrightarrow$ Valeurs propres

Le sujet de la sous-section 4.3.1 est le noyau des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Grâce à cette section, on connaît la multiplicité de la valeur propre 0 et on sait combien de copies de chaque module de Specht sont dans le noyau :

Tableaux standards de type inférieur à $k-1 \rightarrow$ Valeur propre nulle pour ν_k

Les deux résultats plus haut nous disent que les valeurs propres non-nulles de ν_k sont données par les tableaux standards de type supérieur ou égal à k.

On a vu plus tôt que les vecteurs propres de ν_k sur le module de Specht S^λ qui ne sont pas dans le noyau s'écrivent tous comme la somme $\sum_{1\leq a\leq n} \delta_a \,\mathrm{projlift}_a(\vec{v_a})$, où $\vec{v_a}$ est un vecteur propre situé dans $S^{\lambda-\vec{e_a}}$ et δ_a vaut soit 0 ou 1. On peut donc dire que $\mathrm{projlift}_a^\lambda$ permet d'obtenir des vecteurs propres de S^λ à partir de ceux de $S^{\lambda-\vec{e_a}}$. Or, on sait d'après la règle de branchement (sous-section 2.3.3) que

$$S^\lambda \downarrow_{S_{n-1}} \cong \bigoplus_{1\leq a\leq n} S^{\lambda-\vec{e_a}}.$$

Donc, pour associer valeurs propres et tableaux standards,

— on sait que, si la valeur propre est nulle, on peut associer un tableau de type (strictement) inférieur à k;

— sinon, une valeur propre de S^λ doit être associée à un tableau t de forme $\lambda \vdash n$. De plus, il existe une certaine valeur a telle que $\lambda - \vec{e_a}$ est un partage et t est lié à un tableau t' de forme $\lambda - \vec{e_a}$ de la façon suivante : la valeur propre de ν_k associée à t est

$$v_k(t) = v_k(t') + (n+1-k+\lambda_a - a)v_{k-1}(t').$$

Cette dernière condition découle du corollaire 129.

— la procédure qui associe à t exactement un tel tableau est l'opérateur Δ de Schützenberger, présenté à la page 57. Ainsi, à t, on associe un tableau $t' =$

$\Delta(t)$, et la rangée dans laquelle se trouve l'unique boîte de t qui n'apparaît pas dans t' est notée a; on peut donc calculer la valeur propre associée à t. Réciproquement, à partir de t', on peut construire un tableau de taille n pour chaque rangée dans laquelle on peut ajouter une boîte et obtenir un diagramme. En spécifiant qu'on veut ajouter une boîte dans la rangée a, on retrouve le tableau t (le détail de la procédure inverse de Δ se trouve à la remarque 65).

Comme le type de $\Delta(t)$ est strictement inférieur à celui de t, on sait qu'en un nombre fini d'étapes, on atteint la valeur propre 0.

Ceci achève de démontrer le théorème 78.

Tableaux standards de type au moins $k \rightarrow$ Valeurs propres non-nulles

4.4 Commutativité des opérateurs

Le but de cette section est de donner une nouvelle preuve à un résultat de Victor Reiner, Franco Saliola et Volkmar Welker, affirmant que les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ commutent entre eux (Théorème I.1.1 de (Reiner *et al.*, 2014)). Dans le même article, ils invitent le lectorat à chercher une preuve alternative de leur résultat (problème VI.1.4 du même article). En effet, leur preuve se fait par récurrence et compare différents cas, ce qui rend la lecture plutôt technique. Sans prétendre que la preuve donnée ici soit nécessairement plus éclairante, elle présente une façon alternative de comprendre le résultat.

4.4.1 Une autre identité sur l'algèbre des mots

Afin de démontrer la commutativité des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, nous avons besoin d'un résultat concernant le retrait d'une lettre dans un mot et son interaction avec les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. C'est un outil très similaire au théorème 117, qui comparait l'effet de l'ajout d'une lettre avant ou après avoir mélangé, et les techniques de preuve utilisées sont les mêmes.

Théorème 132. *La propriété suivante concernant l'opérateur de suppression est vraie sur l'algèbre des mots de longueur n :*

$$\partial_a \circ \nu_k - \nu_k \circ \partial_a = (n+1-k)\nu_{k-1} \circ \partial_a + \sum_{1\le b\le n} \theta_{a,b} \circ \nu_{k-1} \circ \partial_b \,.$$

Démonstration. La preuve se fait par induction sur k. Le cas de base est celui du mélange doublement aléatoire, soit lorsque $k = 1$. Alors,

$$\begin{aligned}
\partial_a \circ \nu_1 - \nu_1 \circ \partial_a &\overset{\text{proposition 112}}{=} \partial_a \circ \sum_{1\le b\le n} \mathsf{sh}_b \circ \partial_b - \sum_{1\le b\le n} \mathsf{sh}_b \circ \partial_b \circ \partial_a \\
&\overset{\text{lemme 114}}{=} \sum_{1\le b\le n} \left(\partial_a \circ \mathsf{sh}_b \circ \partial_b - (\partial_a \circ \mathsf{sh}_b - \theta_{a,b} - n\delta_{a,b})\,\partial_b\right) \\
&= \sum_{1\le b\le n} \theta_{a,b} \circ \partial_b + n\,\partial_a \,.
\end{aligned}$$

On pose l'hypothèse d'induction suivante : pour une certaine valeur de $k \ge 0$, et sur les mots de longueur $n-1$,

$$\partial_a \circ \nu_k - \nu_k \circ \partial_a = (n-k)\nu_{k-1} \circ \partial_a + \sum_{1\le b\le n-1} \theta_{a,b} \circ \nu_{k-1} \circ \partial_b \,.$$

L'étape d'induction va comme suit :

$$\begin{aligned}
&\partial_a \circ \nu_{k+1} - \nu_{k+1} \circ \partial_a \\
&\overset{\text{théorème 116}}{=} \partial_a \circ \nu_{k+1} - \frac{1}{k+1} \sum_{1\le b\le n} (\mathsf{sh}_b \circ \nu_k \circ \partial_b) \circ \partial_a
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{proposition 118}}{=} \partial_a \circ \nu_{k+1} - \frac{1}{k+1} \sum_{1\le b\le n} \mathsf{sh}_b \circ \nu_k \circ \partial_a \circ \partial_b \\
&\overset{\text{Hyp. induction}}{=} \partial_a \circ \nu_{k+1} - \frac{1}{k+1} \sum_{1\le b\le n} \mathsf{sh}_b \circ \Big(\partial_a \circ \nu_k - (n-k)\nu_{k-1} \circ \partial_a \\
&\qquad - \sum_{1\le c\le n-1} \theta_{a,c} \circ \nu_{k-1} \circ \partial_c \Big) \circ \partial_b \\
&\overset{\text{proposition 118}}{=} \partial_a \circ \nu_{k+1} - \frac{1}{k+1} \Big(\sum_{1\le b\le n} \boxed{\mathsf{sh}_b \circ \partial_a} \circ \nu_k \circ \partial_b \\
&\qquad - (n-k) \underbrace{\sum_{1\le b\le n} \mathsf{sh}_b \circ \nu_{k-1} \circ \partial_b}_{k\cdot\nu_k} \circ \partial_a - \sum_{1\le b,c\le n} \boxed{\mathsf{sh}_b \circ \theta_{a,c}} \circ \nu_{k-1} \circ \partial_c \circ \partial_b \Big) \\
&\overset{\text{lemme 114}}{=} \partial_a \circ \nu_{k+1} - \frac{1}{k+1} \Big(\sum_{1\le b\le n} (\partial_a \circ \mathsf{sh}_b - \theta_{a,b} - n\delta_{a,b}) \circ \nu_k \circ \partial_b \\
&\qquad - (n-k)k \cdot \nu_k \circ \partial_a - \sum_{1\le b,c\le n} (\theta_{a,c} \circ \mathsf{sh}_b - \delta_{a,b}\, \mathsf{sh}_c) \circ \nu_{k-1} \circ \boxed{\partial_c \circ \partial_b} \Big) \\
&\overset{\text{proposition 118}}{=} \partial_a \circ \nu_{k+1} - \frac{1}{k+1} \Big(\partial_a \circ \underbrace{\sum_{1\le b\le n} \mathsf{sh}_b \circ \nu_k \circ \partial_b}_{(k+1)\cdot\nu_{k+1}} - \sum_{1\le b\le n} \theta_{a,b} \circ \nu_k \circ \partial_b - n\ \nu_k \circ \partial_a \\
&\qquad - (n-k)k \cdot \nu_k \circ \partial_a - \sum_{1\le c\le n} \theta_{a,c} \circ \underbrace{\Big(\sum_{1\le b\le n} \mathsf{sh}_b \circ \nu_{k-1} \circ \partial_b \Big)}_{k\cdot\nu_k} \circ \partial_c \\
&\qquad + \underbrace{\sum_{1\le c\le n} \mathsf{sh}_c \circ \nu_{k-1} \circ \partial_c \circ \partial_a}_{k\cdot\nu_k} \Big) \\
&\overset{\text{théorème 116}}{=} \frac{1}{k+1} \Big(\sum_{1\le b\le n} \theta_{a,b} \circ \nu_k \circ \partial_b + (n + (n-k)k) \cdot \nu_k \circ \partial_a \\
&\qquad + k \sum_{1\le c\le n} \theta_{a,c} \circ \nu_k \circ \partial_c - k \cdot \nu_k \circ \partial_a \Big) \\
&= \frac{1}{k+1} \Big((n-k)(k+1)\nu_k \circ \partial_a + (k+1) \sum_{1\le b\le n} \theta_{a,b} \circ \nu_k \circ \partial_b \Big) \\
&= (n-k)\nu_k \circ \partial_a + \sum_{1\le b\le n} \theta_{a,b} \circ \nu_k \circ \partial_b,
\end{aligned}
$$

ce qui termine la preuve. □

4.4.2 Nouvelle preuve de commutativité

Une des conséquences des résultats démontrés jusqu'ici est que les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ commutent entre eux. Ceci était déjà connu (Reiner *et al.*, 2014, Théorème I.1.1), mais le résultat apparaît de façon plus directe ici.

Théorème 60. Les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ commutent deux-à-deux.

La preuve qui suit n'est pas la seule qui existe; (Reiner *et al.*, 2014) en contient également une. Toutefois, leur preuve se termine en mettant au défi son lectorat de trouver une autre preuve, plus directe. Avec les théorèmes précédents, il est plus direct de montrer la commutativité. On le fait ici par induction.

Preuve du théorème 60. Il suffit de montrer que, pour toutes valeurs de j et k, $\nu_j \circ \nu_k = \nu_k \circ \nu_j$. On fait la preuve en fixant k et par induction sur j.

Cas de base : $j = 1$

Remarquons d'abord que la proposition 112 et le théorème 116 impliquent que

$$\nu_1 \circ \nu_k - (k+1)\nu_{k+1} = \sum_{1\le a\le n} \left(\mathsf{sh}_a \circ \partial_a \circ \nu_k - \mathsf{sh}_a \circ \nu_k \circ \partial_a\right).$$

Ainsi, sur les mots de longueur n,

$$\begin{aligned}\nu_1 \circ \nu_k = \quad & (k+1)\nu_{k+1} + \sum_{1\le a\le n} \mathsf{sh}_a \left(\boxed{\partial_a \circ \nu_k - \nu_k \circ \partial_a}\right) \\ \overset{\text{théorème } 132}{=} \quad & (k+1)\nu_{k+1} \\ & + \sum_{1\le a\le n} \mathsf{sh}_a \circ \left((n+1-k)\nu_{k-1} \circ \partial_a + \sum_{1\le b\le n} \theta_{a,b} \circ \nu_{k-1} \circ \partial_b\right)\end{aligned}$$

$$= \quad (k+1)\nu_{k+1} + (n+1-k)\underbrace{\sum_{1\le a\le n} \mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1} \circ \partial_a}_{k\cdot\nu_k}$$

$$+ \sum_{1\le a,b\le n} \mathsf{sh}_a \circ \theta_{a,b} \circ \nu_{k-1} \circ \partial_b$$

$$\overset{\text{théorème 116}}{=} (k+1)\nu_{k+1} + (n+1-k)k\cdot\nu_k + \sum_{1\le a,b\le n} \mathsf{sh}_a \circ \theta_{a,b} \circ \nu_{k-1} \circ \partial_b\,.$$

De plus,[2]

$$\nu_k \circ \nu_1 \overset{\text{proposition 112}}{=} \nu_k \circ \sum_{1\le a\le n} \mathsf{sh}_a \circ \partial_a$$

$$\overset{\text{théorème 117}}{=} \sum_{1\le a\le n} \left(\mathsf{sh}_a \circ \nu_k + (n+1-k)\,\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1} + \sum_{1\le b\le n} \mathsf{sh}_b \circ \theta_{b,a} \circ \nu_{k-1} \right) \circ \partial_a$$

$$= \underbrace{\sum_{1\le a\le n} \mathsf{sh}_a \circ \nu_k \circ \partial_a}_{(k+1)\nu_{k+1}} + (n+1-k)\underbrace{\sum_{1\le a\le n} \mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1} \circ \partial_a}_{k\cdot\nu_k}$$

$$+ \sum_{1\le a,b\le n} \mathsf{sh}_b \circ \theta_{b,a} \circ \nu_{k-1} \circ \partial_a$$

$$\overset{\text{théorème 116}}{=} (k+1)\nu_{k+1} + (n+1-k)k\cdot\nu_k + \sum_{1\le a,b\le n} \mathsf{sh}_b \circ \theta_{b,a} \circ \nu_{k-1} \circ \partial_a,$$

Ceci permet de démontrer l'égalité de $\nu_1 \circ \nu_k = \nu_k \circ \nu_1$.

Hypothèse d'induction :

Supposons que, pour toute valeur $i \le j$, $\nu_i \circ \nu_k = \nu_k \circ \nu_i$.

Étape d'induction :

Il reste à montrer que $\nu_{j+1} \circ \nu_k = \nu_k \circ \nu_{j+1}$:

$$\nu_{j+1} \circ \nu_k \overset{\text{théorème 116}}{=} \frac{1}{j+1}\left(\sum_{1\le a\le n} \mathsf{sh}_a \circ \nu_j \circ \boxed{\partial_a} \right) \circ \nu_k$$

---

2. Dans la deuxième égalité, $\nu_k \circ \mathsf{sh}_a$ agit sur les mots de longueur $n-1$ et le théorème 117 est ajusté en conséquences.

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{théorème 132}}{=} \frac{1}{j+1}\sum_{1\le a\le n} \mathsf{sh}_a \circ \boxed{\nu_j \circ \Big(\nu_k} \circ \partial_a + (n+1-k)\boxed{\nu_{k-1}} \circ \partial_a \\
&\qquad + \sum_{1\le b\le n} \boxed{\theta_{a,b}\circ\nu_{k-1}} \circ \partial_b \Big) \\
&\overset{\substack{\text{Hyp. induction et}\\ \text{lemme 111}}}{=} \frac{1}{j+1}\Big(\sum_{1\le a\le n} \boxed{\mathsf{sh}_a \circ \nu_k} \circ \nu_j \circ \partial_a \\
&\qquad + (n+1-k)\sum_{1\le a\le n} \mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1}\circ\nu_j\circ\partial_a \\
&\qquad + \sum_{1\le a,b\le n} \mathsf{sh}_a \circ \theta_{a,b}\circ\nu_{k-1}\circ\nu_j\circ\partial_b \Big) \\
&\overset{\text{théorème 117}}{=} \frac{1}{j+1}\Big(\sum_{1\le a\le n} \Big(\nu_k\circ\mathsf{sh}_a - (n+1-k)\,\mathsf{sh}_a\circ\nu_{k-1} \\
&\qquad - \sum_{1\le b\le n} \mathsf{sh}_b\circ\theta_{b,a}\circ\nu_{k-1}\Big)\circ\nu_j\circ\partial_a \\
&\qquad + (n+1-k)\sum_{1\le a\le n} \mathsf{sh}_a\circ\nu_{k-1}\circ\nu_j\circ\partial_a \\
&\qquad + \sum_{1\le a,b\le n} \mathsf{sh}_a\circ\theta_{a,b}\circ\nu_{k-1}\circ\nu_j\circ\partial_b \Big) \\
&= \frac{1}{j+1}\nu_k\circ\sum_{1\le a\le n}\mathsf{sh}_a\circ\nu_j\circ\partial_a \\
&\overset{\text{théorème 116}}{=} \nu_k\circ\nu_{j+1}.
\end{aligned}
$$

On conclut ainsi que les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ commutent entre eux. □

Chapitre 5

Une deuxième famille d'opérateurs qui commutent

Jusqu'à présent, on a défini les opérateurs de mélange symétrisés comme une généralisation du mélange doublement aléatoire dans laquelle on retirait plus d'un objet à chaque itération. On peut cependant aller beaucoup plus loin dans la généralisation : dans leur travail précurseur sur les opérateurs de mélange symétrisés, Victor Reiner, Franco Saliola et Volkmar Welker ont défini ceux-ci pour des groupes de réflexion. Nous nous en tiendrons ici au cas du groupe symétrique, mais nous examinerons en particulier un ensemble d'opérateurs qui ont des propriétés similaires à ceux de la première famille. Nommément, ils commutent entre eux et ont des valeurs propres entières. Cela les distingue des autres opérateurs définis dans (Reiner *et al.*, 2014) pour le cas du groupe symétrique.

On décrit spécifiquement les opérateurs $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, ceux qui nous intéressent, dans la section qui suit. Pour avoir tout le matériel nécessaire pour comprendre la multitude de définitions équivalentes, on s'attarde brièvement à définir les autres opérateurs de mélange sur le groupe symétrique (nommés plus loin ν_λ) à la sous-

section 5.1.2. Ceux-ci ne sont cependant pas l'objet de ce chapitre et nous les délaissons rapidement. Après avoir décrit les matrices des opérateurs $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et leurs propriétés, nous nous attardons à leurs valeurs propres et présentons des conjectures pour certaines d'entre elles.

5.1 Définitions équivalentes

On présente quatre définitions des opérateurs $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. La première s'exprime en termes de mélange d'une collection d'éléments distincts; comme plus tôt, les objets représentés peuvent être des cartes d'un paquet de cartes à jouer. Ensuite, nous rappelons que nous étudions les versions symétrisées de certains opérateurs de BHR et détaillons lesquels. Puis, nous nous intéressons à l'interprétation en termes de suites croissantes de tous les opérateurs $\{\nu_\lambda\}_{\lambda\vdash n}$ en spécifiant ce que cela veut dire pour la famille $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Enfin, nous examinons les différentes propriétés des matrices associées à $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

5.1.1 Comme ~~une~~ personne (ne) mélangerait

Tout comme les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, les opérateurs $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont d'abord des opérateurs de mélange. On peut ainsi les expliquer à quelqu'un qui souhaiterait mélanger une collection d'objets. Pour prendre l'exemple le plus simple, considérons un paquet de cartes. Pour le mélanger, on le divise en k plus petits paquets de deux cartes et $n-2k$ paquets d'une seule carte. Ensuite, on combine de nouveau tous ces paquets de la façon suivante : on bat le premier paquet avec le deuxième, puis le paquet résultant avec le troisième, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les paquets soient fusionnés. Pour battre deux paquets, on intercale leurs cartes en préservant l'ordre des cartes dans chacun des deux plus petits paquets, comme

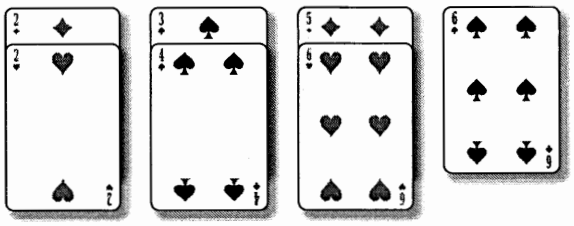


Figure 5.1 : Paquets d'une et de deux cartes pour l'exécution du mélange γ_3.

illustré sur la figure 1.2. L'opérateur γ_k attribue à la permutation σ la combinaison linéaire formée de toutes les permutations τ obtenues de cette façon, auxquelles on affecte, comme coefficient, le nombre de façons de les obtenir.

Exemple 133. Appliquer γ_2 revient à séparer le paquet de quatre cartes en deux paquets de deux cartes, puis à les battre. Ainsi, $\gamma_2(1234) = 3 \cdot 1234 + 2 \cdot 1243 + 2 \cdot 1324 + 1423 + 1342 + 2 \cdot 2134 + 2 \cdot 2143 + 2314 + 2413 + 3124 + 3142 + 3412$. Par exemple, pour obtenir le résultat 2143, on peut soit séparer 1 et 3 de 2 et 4, ou encore placer 1 et 4 ensemble, isolés de 2 et 3. C'est pourquoi on retrouve 2 comme coefficient devant 2143.

5.1.2 Opérateurs de BHR symétrisés

Les opérateurs de la famille $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont également des multiples des versions symétrisées de certains opérateurs de BHR. De la même façon qu'on pouvait obtenir ν_k en séparant les cartes pour obtenir un paquet de taille $n-k$ et des paquets de taille 1, puis en battant les cartes, on peut séparer notre paquet en k paquets de taille 2 et $n-2k$ paquets de taille 1, puis les recombiner pour obtenir γ_k. Or, en séparant puis recombinant les paquets, on applique en fait un opérateur de BHR et son opérateur dual :

— l'opérateur de BHR π_λ, défini comme le produit par la somme de compositions $\sum_{c \text{ de forme } \lambda} c$, divise le paquet en sous-ensembles de taille $\lambda_1, \ldots, \lambda_{|\lambda|}$,

puis les empile dans cet ordre.

— son opérateur dual (dont la matrice est $\pi_\lambda^\top$) divise le paquet de la façon suivante : il retire les λ_1 premières cartes et en fait un nouveau paquet, il fait de même avec les λ_2 cartes suivantes, et ainsi de suite jusqu'à la fin du paquet. Ensuite, les paquets sont recombinés par battage.

Ainsi, l'opérateur γ_k est *presque* $\pi^\top_{(2^k,1^{n-2k})} \circ \pi_{(2^k,1^{n-2k})}$.

Remarque 134. Afin d'alléger la notation, les partages avec k parts de taille 2 et tels que toutes les autres parts sont des singletons sont notés $(2^k, 1^{n-2k})$. Bien qu'il puisse y avoir une certaine ambiguïté avec le partage à deux parts, une de taille 2^k et une taille 1, le contexte fera que nous parlerons toujours de partage avec des parts de taille 1 ou 2, ce qui est d'ailleurs un partage de n.

Définition 135. L'opérateur γ_k est un multiple de la version symétrisée d'un opérateur de BHR. Plus précisément,

$$\gamma_k = \frac{1}{k!(n-2k)!}\pi^\top_{(2^k,1^{n-2k})} \circ \pi_{(2^k,1^{n-2k})},$$

où $\pi_{(2^k,1^{n-2k})}$ est la multiplication par la somme des compositions de forme $(2^k, 1^{n-2k})$.

Preuve de l'équivalence des définitions. On a déjà remarqué que γ_k est un multiple de $\pi^\top_{(2^k,1^{n-2k})} \circ \pi_{(2^k,1^{n-2k})}$. La présence d'un dénominateur s'explique par le fait que l'ordre dans lequel les paquets de même taille sont séparés pour être recombinés n'importe pas dans γ_k. Il est cependant pris en compte dans le produit de compositions. En effet, deux compositions sont différentes si les blocs sont les mêmes, mais que des blocs de même taille ont été permutés.

Pour calculer le dénominateur, il suffit de comparer la somme des coefficients dans $\gamma_k(\mathrm{Id})$ tel que défini à la sous-section 5.1.1 et celle dans $\pi^\top_{(2^k,1^{n-2k})} \circ \pi_{(2^k,1^{n-2k})}(\mathrm{Id})$.

Remarquons que, dans ce dernier cas, la somme des coefficients est le carré de celle dans $\pi_{(2^k,1^{n-2k})}(\mathrm{Id})$.

La somme des coefficients dans $\gamma_k(\mathrm{Id})$ est le nombre de façons de faire ce qui suit :

1. Faire k paquets de taille 2, et $n-2k$ paquets de taille 1. Comme on ne souhaite pas tenir compte de l'ordre des paquets identiques, il y a $\frac{\binom{n}{(2^k,1^{n-2k})}}{k!(n-2k!)}$ façons de faire ceci.
2. Battre successivement les paquets. Pour chaque paquet de l cartes battu avec un paquet de m cartes, on trouve $\binom{l+m}{l}$ recombinaisons possibles. Ainsi, il y a
$$\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\dots\cdot\binom{2k}{2}\cdot(2k+1)\cdot\dots\cdot n=\frac{n!}{2^k}=\binom{n}{(2^k,1^{n-2k})}$$
façons de recombiner les paquets.
3. Pour obtenir la somme des coefficients, on multiplie le nombre de résultats possibles pour chacune des deux étapes :
$$\frac{\binom{n}{(2^k,1^{n-2k})}^2}{k!(n-2k)!}.$$

En revanche, la somme des coefficients dans $\pi_k(\mathrm{Id})$ correspond au nombre de termes dans $\sum_{c \text{ de forme } (2^k,1^{n-2k})} c$, et donc au nombre de compositions ensemblistes de cette forme. Il y en a $\binom{n}{(2^k,1^{n-2k})}$. On peut conclure que la somme des coefficients dans $\pi^{\top}_{(2^k,1^{n-2k})}\circ\pi_{(2^k,1^{n-2k})}(\mathrm{Id})$ est $\binom{n}{(2^k,1^{n-2k})}^2$. C'est $k!(n-2k)!$ fois plus que dans la définition de γ_k. □

5.1.3 De multiples suites croissantes

De la même façon qu'on peut écrire les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en termes de suites croissantes, on peut le faire pour les opérateurs $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. De manière plus générale, on pourrait le faire pour des opérateurs de mélange symétrisés associés à un partage.

Les opérateurs ν_λ sur le groupe symétrique À partir de la définition des opérateurs comme la version symétrisée d'opérateurs de BHR, on peut généraliser la définition des opérateurs ν_k en termes de suites croissantes. Ceci a été fait par Victor Reiner, Franco Saliola et Volkmar Welker; leur travail est toutefois beaucoup plus général, puisqu'il porte sur un grand nombre de groupes de réflexions, et pas seulement sur le groupe symétrique. En se restreignant au groupe symétrique, on trouve la définition suivante :

Définition 136. Soit λ un partage de n et soit π_λ l'opérateur de BHR correspondant à la multiplication par la somme de compositions $\sum_{c \text{ de forme } \lambda} c$. Alors, l'entrée (σ, τ) de la matrice $\nu_\lambda = \frac{\pi_\lambda \pi_\lambda^\top}{\prod_{j\in[n]} \#\{i\in[|\lambda|] \mid \lambda_i=j\}!}$ est le nombre de façons de partitionner la permutation $\sigma^{-1}\tau$ en suites croissantes de longueurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{|\lambda|}$.

Tout au long de la preuve qui suit, nous utilisons $y(\lambda)$ pour désigner le nombre de permutations des blocs qui ne changent pas la taille des blocs (dans l'ordre), c'est-à-dire $y(\lambda) = \prod_{j\in[n]} \#\{i \in [|\lambda|] \mid \lambda_i = j\}!$.

Preuve de l'équivalence des définitions. Par la définition de π_λ, l'entrée (σ, τ) de la matrice est égale au nombre de compositions c de forme λ telles que $\sigma * c = \tau$. Rappelons que c agit à droite par le produit de composition sur les permutations. Remarquons que, pour un certain partage λ, il y a $y(\lambda)$ fois plus de compositions ensemblistes de forme λ que de façons de partitionner les nombres de 1 à n en ensembles de taille λ_1 à $\lambda_{|\lambda|}$. En effet, ce ratio est le nombre de façons de permuter les blocs de la composition ensembliste.

Pour simplifier la notation, nous notons π pour désigner π_λ. Ainsi,

$$\begin{aligned}[\nu_\lambda]_{\sigma,\tau} &= \frac{[\pi\pi^\top]_{\sigma,\tau}}{y(\lambda)} \\ &= \sum_{\omega\in S_n} \frac{\pi_{\sigma,\omega}\pi^\top_{\omega,\tau}}{y(\lambda)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\omega \in S_n} \frac{\pi_{\sigma,\omega}\pi_{\tau,\omega}}{y(\lambda)} \\
&= \sum_{\omega \in S_n} \frac{\#\{c \text{ de forme } \lambda \mid \sigma * c = \omega = \tau * c\}}{y(\lambda)} \\
&= \frac{\#\{c \text{ de forme } \lambda \mid \sigma * c = \tau * c\}}{y(\lambda)} \\
&= \frac{\#\{c \text{ de forme } \lambda \mid \mathrm{Id} * c = \sigma^{-1}\tau * c\}}{y(\lambda)} \\
&= \#\left\{ \begin{array}{l|l} i_{1,1} < i_{1,2} < \ldots < i_{1,\lambda_1} & \tau^{-1}\sigma(i_{1,1}) < \ldots < \tau^{-1}\sigma(i_{1,\lambda_1}) \\ \quad \vdots & \quad \vdots \\ i_{|\lambda|,1} < i_{|\lambda|,2} < \ldots < i_{|\lambda|,\lambda_{|\lambda|}} & \tau^{-1}\sigma(i_{|\lambda|,1}) < \ldots < \tau^{-1}\sigma(i_{|\lambda|,\lambda_1}) \end{array} \right\} \\
&= \#\left\{ \begin{array}{l} \text{Façons de partitionner la permutation } \sigma^{-1}\tau \text{ en suites} \\ \text{croissantes de longueurs } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{|\lambda|} \end{array} \right\}.
\end{aligned}
$$

Notons que l'avant-dernière égalité est déduite de la remarque faite précédemment sur le nombre de façons de permuter les blocs de même taille et du fait que les nombres dans un même bloc doivent être présentés dans le même ordre dans $\sigma^{-1}\tau$ et dans la permutation identité. □

Pour simplifier les notations, on note le nombre de façons de partitionner la permutation σ en suites croissantes de longueurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{|\lambda|}$ par $\mathrm{noninv}_\lambda(\sigma)$. Ainsi, $\mathrm{noninv}_i(\sigma)$, tel que présenté à la définition 53, correspond aussi à $\mathrm{noninv}_{(i,1,1,\ldots,1)}(\sigma)$. Cela nous permet de définir les opérateurs $\{\nu_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$.

Définition 137. Soit σ une permutation de n. L'opérateur de mélange symétrisé ν_λ peut être défini en termes de suites croissantes de la façon suivante :

$$\nu_\lambda(\sigma) = \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{noninv}_\lambda(\tau)\sigma \cdot \tau.$$

Cette définition des opérateurs $\{\nu_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ est notamment compatible avec les opérateurs $\{\nu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et peut être élargie aux mots de la même façon :

Définition 138. Soit w un mot de longueur n. L'opérateur de mélange symétrisé ν_λ agit à droite sur w ainsi :

$$\nu_\lambda(w) = \sum_{\tau \in S_n} \text{noninv}_\lambda(\tau) w \cdot \tau.$$

On est alors en mesure de définir les opérateurs $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$:

Définition 139. L'opérateur de mélange symétrisé γ_k est associé au partage $(2^k, 1^{n-2k})$ de n :

$$\gamma_k = \nu_{(2^k,1^{n-2k})}.$$

5.1.4 Matrices

Comme expliqué à la définition 136, la valeur de la matrice ν_λ à la position (σ, τ) est le nombre de façons de partitionner $\sigma^{-1}\tau$ en suites croissantes de taille $\lambda_1, \ldots, \lambda_{|\lambda|}$. En particulier, pour $\gamma_k = \nu_{(2^k,1^{n-2k})}$, on doit partitionner $\sigma^{-1}\tau$ en k suites croissantes de taille 2 et en $n - 2k$ singletons.

Cette définition est donnée de sorte que, si $\vec{v}$ est le vecteur formé de toutes les permutations (dans le même ordre que les lignes de la matrice), alors la colonne σ de $\vec{v} \cdot M_\lambda$ vaut $\nu_\lambda(\sigma)$.

Grâce à la structure de ces matrices, on peut déduire certaines de leurs propriétés.

Matrices entières Les entrées de la matrice étant le nombre de partitions des nombres de 1 à n, les valeurs de la matrices sont évidemment entières (et positives).

Matrices symétriques La matrice de γ_k est un multiple de la matrice $\pi\pi^\top$, lorsque π est un opérateur de BHR (décrit à la sous-section 5.1.2). Or,

$(\pi\pi^\top)^\top = \pi\pi^\top$, et c'est donc une matrice symétrique.

Matrices semi-définies positives De la même façon que les opérateurs de mélange symétrisés de la première famille correspondent à des matrices semi-définies positives, les opérateurs de la deuxième famille le sont également. En effet, l'argument-clé pour montrer qu'elles sont semi-définies positives est que c'est le cas pour les matrices qui s'écrivent sous la forme $\pi\pi^\top$. On a vu, à la sous-section 5.1.2, que c'était le cas pour les opérateurs $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Pour un rappel de la preuve complète, voir à la page 51.

Matrices stochastiques, après renormalisation Les matrices des opérateurs $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont construites de façon à ce que toutes leurs entrées soient positives et que la somme d'une ligne soit la même pour chaque ligne. Ce sont donc des multiples de matrices stochastiques.

On rappelle que la valeur à la position (σ, τ) dans la matrice associée à γ_k correspond au nombre de façons d'obtenir τ à partir de σ. La somme de chaque ligne est donc le nombre d'événements pouvant se produire, avec multiplicités. Or, on a vu à la sous-section 5.1.2 qu'il y avait $\frac{(n!)^2}{(2^k)^2\cdot k!\cdot(n-2k)!}$ suites d'événements possibles; ce nombre est donc égal à la somme des valeurs sur une ligne.

Famille de matrices qui commutent La propriété la plus intéressante des matrices $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est qu'elles commutent entre elles. Cette propriété se distingue des autres propriétés énoncées jusqu'ici qui sont vraies en général pour les opérateurs ν_λ. Prouvé dans (Reiner *et al.*, 2014) (Théorème I.4.3) en utilisant plusieurs notions qui ne sont pas définies ici, ce résultat a d'ailleurs mené à la conjecture suivante :

Conjecture 140 (Conjecture I.4.4 de (Reiner *et al.*, 2014)). *Soit λ et μ deux différents partages de n, qui sont distincts de (n) et de (1^n). Les opérateurs ν_λ et ν_μ commutent si et seulement s'ils appartiennent tous les deux à la première famille d'opérateurs de mélange symétrisés, $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, ou s'ils appartiennent tous les deux à la deuxième famille d'opérateurs, $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.*

5.2 Valeurs propres

Le travail de Victor Reiner, Franco Saliola et Volkmar Welker a aussi permis de comprendre les valeurs propres des opérateurs $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Le résultat principal à cet égard est que celles-ci sont des entiers (Théorème I.4.3). Cela est particulièrement intéressant, puisque les auteurs de ce théorème ont aussi conjecturé que seuls les opérateurs de mélange symétrisés qui appartiennent aux familles $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ont des valeurs propres entières. Ils ont de plus donné une formule pour calculer explicitement toutes les valeurs propres de γ_k en utilisant les caractères irréductibles du groupe symétrique.

5.2.1 Avec les caractères

On connaît déjà une façon de décrire toutes les valeurs propres des matrices γ_k. Celle-ci est donnée par le théorème 5.2 de (Reiner *et al.*, 2014) :

Théorème 141 (Théorème 5.2 de (Reiner *et al.*, 2014)). *On peut décomposer $\mathbb{R}S_n$ en une somme directe de modules orthogonaux :*

$$\mathbb{R}S_n = K \bigoplus_{\lambda\vdash n} U^\lambda,$$

où K est dans le noyau de tous les opérateurs $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et U^λ est compris dans un espace propre de chacun des opérateurs $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Pour une certaine valeur

de k, l'unique valeur propre de $\gamma_k|_{U^\lambda}$ est notamment déterminée par le caractère irréductible χ^λ associé à ce partage. Plus précisément, cette valeur propre est

$$c_k^\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \text{noninv}_{(2^k,1^{n-2k})}(\sigma) \cdot \chi^\lambda(\sigma).$$

Ce théorème nous permet entre autres de dire que les valeurs propres des opérateurs $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont des entiers. Rappelons, à ce titre, que les caractères du groupe symétrique sont des entiers (voir le corollaire 46 pour plus de détails).

Ce qui est plus difficile à voir dans le dernier théorème est que les valeurs propres sont toutes positives : ce sont en effet les valeurs propres d'un matrice semi-définie positive (comme démontré à la sous-section 5.1.4). Nous avons vu (sous-section 3.3.1) que ces matrices ont des valeurs propres positives.

Par contre, déduire la positivité des valeurs propres à partir du théorème 141 n'est pas évident, puisque les caractères du groupe symétrique peuvent aussi être négatifs. C'est pourquoi on aimerait avoir une autre façon d'exprimer c_k^λ. Victor Reiner, Franco Saliola et Volkmar Welker souhaitaient déjà, dans (Reiner *et al.*, 2014), qu'il existe une expression explicite des valeurs propres qui mettrait en évidence la positivité (remarque V.2.3). La sous-section 5.2.2 explique quelques conjectures à cet effet.

5.2.2 Formules récursives pour les valeurs propres non-nulles

Pour la première famille d'opérateurs de mélange symétrisés, $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, on a trouvé une façon d'exprimer les valeurs propres de l'opérateur ν_k sur S_n en fonction de ν_{k-1} et de ν_k sur S_{n-1}. Ceci nous permettait donc de calculer rapidement toutes les valeurs propres de tous les opérateurs de la famille, en plus de démontrer que

toutes les valeurs propres sont des entiers positifs.

On s'est donc demandé s'il pouvait exister une façon similaire d'exprimer les valeurs propres des opérateurs $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Expérimentalement, nous pensons avoir trouvé une expression récursive pour certaines valeurs propres. Les observations les plus intéressantes ont été faites sur les valeurs propres lorsqu'on se restreint aux modules de Specht $S^{(n-m,1^m)}$. Ce sont les modules indexés par les diagrammes en forme d'équerre et qui sont associés à certaines des représentations les plus connues (triviale, standard et signe). Pour ces modules, les valeurs c_k^λ sont affichées aux tableaux 5.1 à 5.4 pour n entre 4 et 8. Certaines relations entre les valeurs propres sont mises en évidence dans ces tableaux. Dans ceux-ci, les lignes représentent des modules et, sur une même colonne, on retrouve différentes valeurs propres d'un même opérateur. Des relations ont lieu autant entre les valeurs propres de différents opérateurs sur un même module (ce sont les flèches horizontales) et entre les valeurs propres du même opérateur, sur différents modules. Elles sont données par les flèches verticales.

Tableau 5.1 : Valeurs propres des opérateurs γ_k sur les modules $S^{(n)}$, associés à la représentation triviale, pour n entre 2 et 8. Les flèches verticales arrivant à la ligne n sont étiquetées par $\frac{n^2}{n-2k}$, et les flèches horizontales arrivant dans la colonne k, par des produits d'un nombre triangulaire et de $\frac{1}{2k}$.

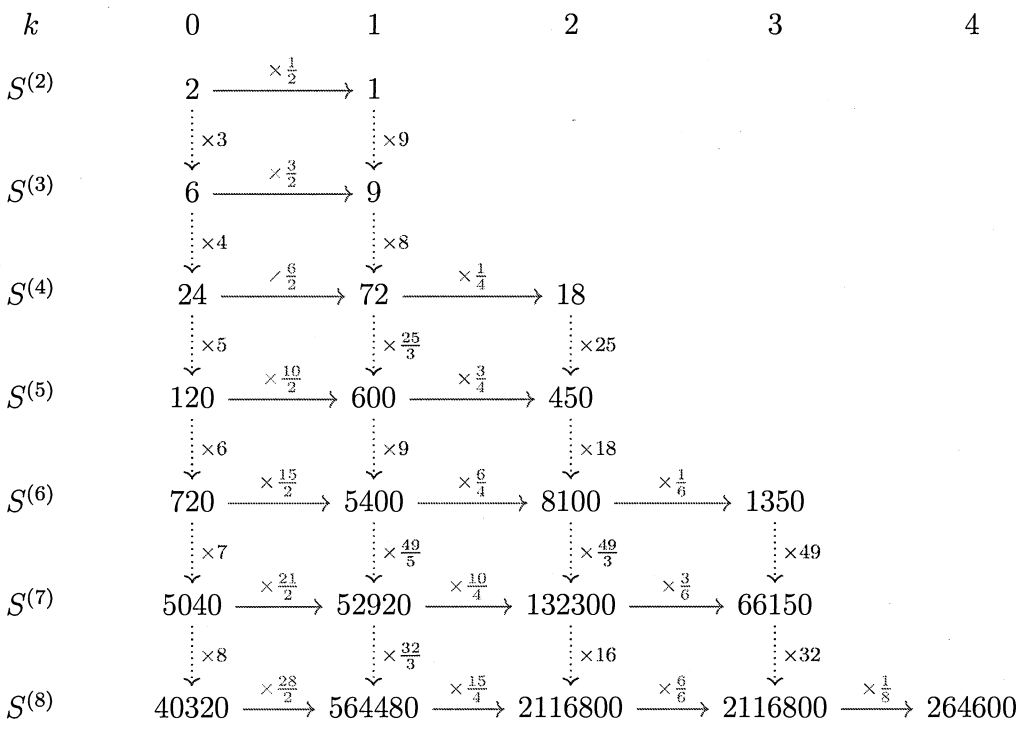


Tableau 5.2 : Valeurs propres des opérateurs γ_k sur les modules $S^{(n-1,1)}$, associés à la représentation standard, pour n entre 4 et 8. Les flèches verticales vers la ligne n sont étiquetées par $\frac{(n-2)(n+1)}{n-2k}$, et les flèches horizontales arrivant dans la colonne k, par des produits d'un nombre triangulaire et de $\frac{1}{2(k-1)}$.

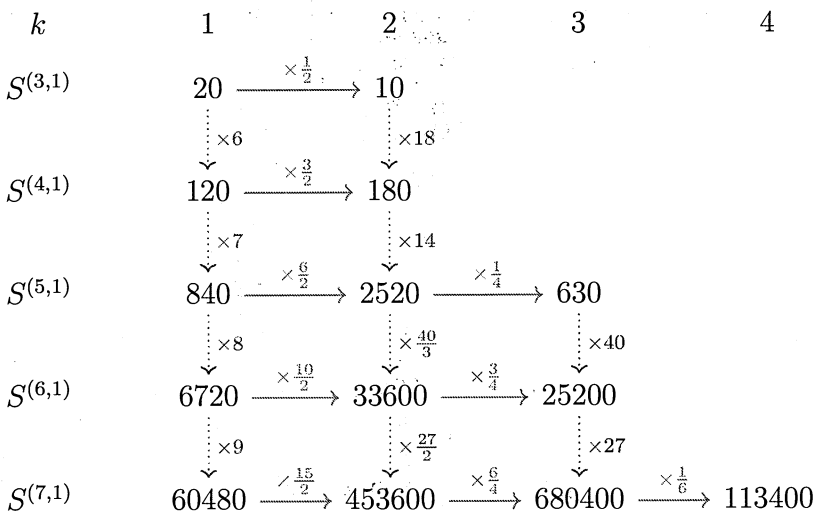


Tableau 5.3 : Valeurs propres des opérateurs γ_k sur les modules $S^{(n-2,1,1)}$ pour n entre 4 et 8. Les flèches verticales arrivant à la ligne n sont étiquetées par $\frac{n(n-2)}{n-2k}$, et les flèches horizontales arrivant dans la colonne k, par des produits d'un nombre triangulaire et de $\frac{1}{2(k-1)}$.

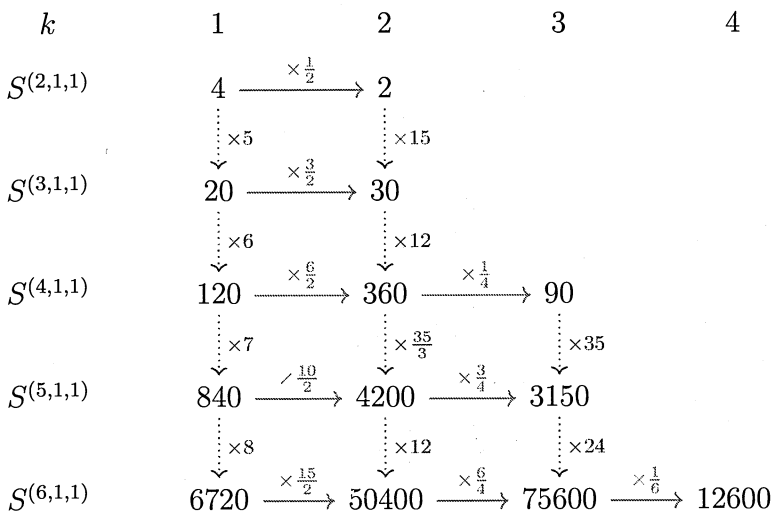


Tableau 5.4 : Valeurs propres des opérateurs γ_k sur les modules $S^{(n-3,1,1,1)}$ pour n entre 4 et 8. Les flèches verticales arrivant à la ligne n sont étiquetées par $\frac{(n-4)(n+1)}{n-2k}$, et les flèches horizontales arrivant dans la colonne k, par des produits d'un nombre triangulaire et de $\frac{1}{2(k-2)}$.

k	1	2	3	4
$S^{(1,1,1,1)}$	0	2		
		$\vdots\ \times 6$		
$S^{(2,1,1,1)}$	0	12		
		$\vdots\ \times 7$		
$S^{(3,1,1,1)}$	0	84 $\xrightarrow{\times\frac{1}{2}}$	42	
		$\vdots\ \times 8$	$\vdots\ \times 24$	
$S^{(4,1,1,1)}$	0	672 $\xrightarrow{\times\frac{3}{2}}$	1008	
		$\vdots\ \times 9$	$\vdots\ \times 18$	
$S^{(5,1,1,1)}$	0	6048 $\xrightarrow{\times\frac{6}{2}}$	18144 $\xrightarrow{\times\frac{1}{4}}$	4536

Sur les modules de Specht associés aux diagrammes en forme d'équerre

Les tableaux 5.1 à 5.4 montrent l'unique valeur propre non-nulle (lorsqu'elle existe) de $\gamma_k|_{S^{(n-m,1^m)}}$ pour n entre 4 et 8. Les seuls tableaux représentés sont pour m de 0 à 3. Au-delà de ce nombre, la quantité de données facilement calculables dans le tableau est trop faible pour vraiment voir des relations entre elles. Rappelons que les données deviennent rapidement difficiles à obtenir lorsque n croît.

Après avoir regardé ces tableaux, il semble que certaines soient multiples des autres. En faisant le ratio des valeurs sur les mêmes colonnes d'un même tableau, nous trouvons les valeurs indiquées à côté des flèches verticales. Ceci mène à la conjecture suivante :

Conjecture 142. *La valeur propre non-nulle $c_k^{(n-m,1^m)}$ de l'opérateur $\gamma_k|_{S^{(n-m,1^m)}}$*

satisfait l'équation :

$$\frac{c_k^{(n-m,1^m)}}{c_k^{(n-m-1,1^m)}} = \begin{cases} \frac{(n-m)n}{n-2k} = \frac{\lambda_1 n}{n-2k} & \text{si } m \text{ est pair;} \\ \frac{(n-m-1)(n+1)}{n-2k} = \frac{(\lambda_1-1)(n+1)}{n-2k} & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

Notons toutefois que cette dernière formule n'est pas tout à fait élégante. On aimerait pouvoir expliquer les divergences entre les cas pairs et impairs pour m. Or, comme les valeurs apparaissent dans des tableaux différents pour chaque m, dans notre démarche, nous arrivons difficilement à voir pourquoi c'est le cas. C'est toutefois quelque chose qui devrait être exploré. Enfin, même si la conjecture 142 était prouvée, il resterait à trouver au moins une valeur propre pour γ_k sur chaque module $S^{(n-m,1^m)}$.

On aimerait donc aussi connaître des liens entre les valeurs propres des différents opérateurs $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sur les collections de même taille (les différents éléments d'une même ligne des tableaux 5.1 à 5.4). C'est d'ailleurs l'objet de la prochaine observation :

Conjecture 143. *En regardant les valeurs dans les tableaux 5.1 à 5.4, il semble que les valeurs sur une même ligne soient des multiples l'une de l'autre. Plus spécifiquement, si la colonne indexée par k est la i-ième à contenir des valeurs propres non-nulles sur $S^{(n-m,1^m)}$, alors*

$$\frac{c_{k+1}^{(n-m,1^m)}}{c_k^{(n-m,1^m)}} = \frac{\binom{n-2k}{2}}{2i}$$

pour chacun des cas présents dans les tableaux 5.1 à 5.4.

Remarque 144. La conjecture 143, contrairement à la conjecture 142, semble vraie sur tous les modules simples, et pas seulement sur $S^{(n-m,1^m)}$.

Sur les modules de Specht $S^{(n)}$

Le cas pour lequel nous savons vérifier la conjecture 142 pour l'instant est celui du module $S^{(n)}$. La raison pour cela est que ce module simple correspond à la représentation triviale; le caractère associé est donc la fonction constante 1. En utilisant le théorème 141, on trouve :

$$\begin{aligned} c_k^{(n)} &= \sum_{w \in S_n} \mathrm{noninv}_{(2^k,1^{n-2k})}(w) \underbrace{\chi^{(n)}(w)}_{=1} \\ &= \sum_{w \in S_n} \mathrm{noninv}_{(2^k,1^{n-2k})}(w). \end{aligned}$$

Cette dernière valeur est égale à la somme des éléments sur la première ligne de la matrice associée à γ_k. On a démontré, à la sous-section 5.1.2, que cette valeur était $\frac{\binom{n}{2^k,1^{n-2k}}^2}{k!(n-2k)!}$.

Cela concorde avec la conjecture 142. On disait alors que

$$c_k^{(n)} = \frac{n^2}{n-2k} \cdot c_k^{(n-1)}.$$

C'est bien ce que l'on obtient ici :

$$\frac{c_k^{(n)}}{c_k^{(n-1)}} = \frac{\binom{n}{(2^k,1^{n-2k})}^2}{(n-2k)!k!} \cdot \frac{(n-1-2k)!k!}{\binom{n-1}{(2^k,1^{n-1-2k})}^2} = \frac{n^2}{n-2k}.$$

5.2.3 L'opérateur γ_1 et ν_{n-2}

Enfin, notons qu'il existe un opérateur qui est commun aux deux familles. Il s'agit de $\gamma_1 = \nu_{n-2}$. Cela nous permet, par exemple, de justifier que, sur $S^{(n-3,1^3)}$, il n'y ait aucune valeur propre non-nulle pour cet opérateur (dans le tableau 5.4). En effet, il n'y a aucun tableau de type au moins $n-2$ qui soit de forme $(n-3,1^3)$, et la théorie sur les opérateurs de la première famille implique que toute copie de $S^{(n-3,1^3)}$ est dans le noyau de ν_{n-2}, et donc de γ_1.

De plus, si nous étions capables de prouver la conjecture 143 et de mieux expliquer les liens entre $c_k^{(n-m,1^m)}$ et $c_{k+1}^{(n-m,1^m)}$, l'égalité de γ_1 et de ν_{n-2} pourrait être très intéressante. En effet, les valeurs propres de ν_{n-2} sont toutes données par le théorème 78. En plus de nous permettre de calculer les valeurs propres de γ_1, mieux comprendre les liens entre les valeurs propres des différents opérateurs pourrait nous permettre de décrire toutes les valeurs propres des $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sur les espaces qui ne sont pas compris dans le noyau de γ_1.

CONCLUSION

Cette thèse porte essentiellement sur deux familles d'opérateurs de mélange symétrisés qui commutent entre eux. Pour ces deux familles, on sait calculer les valeurs propres (par des moyens différents) : dans le premier cas, c'est le résultat du théorème 78, alors que, dans le second, on sait le faire depuis (Reiner *et al.*, 2014). Bien qu'on connaisse des algorithmes pour calculer ces valeurs, plusieurs questions restent irrésolues. Certaines sont listées ici.

La première famille : le mélange doublement aléatoire et les mélanges analogues

La procédure pour calculer les valeurs propres est récursive : on obtient celles de ν_k à partir de celles de ν_{k-1}. C'est intéressant, notamment parce que ça nous permet de démontrer que toutes les valeurs propres sont entières, mais aussi parce que ça donne un algorithme rapide pour les calculer. Cependant, certaines choses ne sont pas faciles à faire avec une telle façon d'énumérer les valeurs propres. Par exemple, faire la somme de toutes les valeurs propres (pour calculer le temps de mélange) s'avère très ardu. Ceci suggère le problème suivant :

Problème 145. Trouver une formule close pour les valeurs propres des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Ceci n'est probablement pas facile. À défaut de trouver une formule close, on pourrait se satisfaire de bornes suffisamment proches des valeurs propres. Ceci pourrait être suffisant pour calculer le temps de mélange. Une conjecture sur une borne supérieure pour les valeurs propres est donnée à la page 79. Il faudrait toutefois vérifier que c'est suffisamment proche pour rendre les calculs intéressants. Si c'est le cas, il est possible que le temps de mélange puisse être calculé.

Problème 146. Calculer le temps de mélange des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Bien que les valeurs propres aient été toutes trouvées, nous ne savons pas décrire complètement les espaces propres. À partir d'une base du noyau, nous savons décrire les autres espaces propres (par l'opérateur projlift, décrit au chapitre 4). Toutefois, connaître une base du noyau est suffisant pour décrire tous les vecteurs propres des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Problème 147. Donner une base du noyau des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Plus généralement, décrire une base des espaces propres des opérateurs.

L'autre famille d'opérateurs

En plus de la famille d'opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, Reiner, Saliola et Welker ont identifié une autre famille d'opérateurs $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui commutent et dont les valeurs propres sont entières (Reiner *et al.*, 2014). Ces dernières peuvent être explicitement calculées par une formule faisant intervenir les caractères du groupe symétrique. Toutefois, cette formule ne permet pas, par exemple, d'expliquer pourquoi les valeurs propres sont toujours positives. C'est pourquoi, au chapitre 5, plusieurs conjectures sont proposées pour expliquer les relations entre ces valeurs propres et, notamment, mettre en évidence le fait qu'elles sont positives.

Problème 148. Trouver une explication combinatoire aux valeurs propres des opérateurs $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et résoudre les conjectures du chapitre 5.

Plus d'opérateurs de mélanges symétrisés

Les opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont des opérateurs de mélange symétrisés, mais ils sont loin d'être les seuls. Toutefois, si nous nous intéressons à ces deux familles, c'est qu'elles sont telles que les opérateurs d'une même famille commutent, ce qui n'est pas le cas des opérateurs de mélange symétrisés en général (ils sont décrits à la sous-section 5.1.3 et dans (Reiner *et al.*, 2014)). La conjecture I.4.4 de (Reiner *et al.*, 2014) détaille l'intuition de ses auteurs : elle dit que si deux opérateurs de mélange symétrisés commutent, ils sont soit tous les deux dans la famille $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ou tous les deux dans la famille $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, sauf quelques cas triviaux. De plus, elle dit que si un opérateur n'a que des valeurs propres entières, il doit être dans une de ces deux familles. Pourtant, les techniques, pour démontrer la commutativité et pour démontrer que les valeurs propres sont entières sont très différentes d'une famille à l'autre, et il est difficile de comprendre pourquoi la conjecture devrait être vraie.

Problème 149. Comprendre *pourquoi* les valeurs propres des autres opérateurs de mélange symétrisés (ceux qui ne sont pas dans $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, ni dans $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$) ne sont pas entières.

Problème 150. Donner une explication combinatoire de la commutativité des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et des opérateurs $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Sur d'autres structures

Les opérateurs décrits plus haut agissent sur le groupe symétrique. C'est utile de considérer ce cas parce que la théorie des modules y est bien développée. Il serait intéressant de s'attarder à ce qui se produit sur d'autres structures algébriques pour généraliser le problème. Je pense notamment aux monoïdes dont la théorie

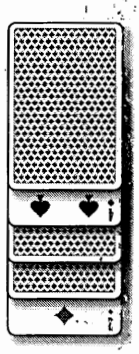


Figure 5.2 : Un paquet avec des cartes à l'endroit et à l'envers représente un élément du groupe hyperoctaédral.

de la représentation et les relations avec les chaînes de Markov ont été développées dans les dernières années (Ayyer *et al.*, 2015), mais aussi aux extensions linéaires de posets, sur lesquelles le mélange doublement aléatoire a déjà été étudié (Ayyer *et al.*, 2017).

Même parmi les groupes, on pourrait avoir des surprises. Par exemple, si on remplace le groupe symétrique par le groupe hyperoctaédral, les opérateurs de mélange ont aussi une interprétation en termes de mélange de cartes : en plus de mélanger les cartes, on peut choisir de les retourner, individuellement, ou pas.

Il serait intéressant de savoir lesquels, parmi les résultats de cette thèse, sont toujours vrais sur cette structure. Par exemple, il serait intéressant de savoir si des opérateurs similaires à ceux des première et deuxième familles ont toujours des valeurs propres entières. Les calculs préliminaires suggèrent que cela est vrai.

ANNEXE A

THÉORÈMES DU CHAPITRE 4

Théorème 106 ou règle de Young pour les modules de permutation

Les modules de permutations se décomposent en modules simples de la façon suivante :

$$M^{\mu} \cong \bigoplus_{\lambda \trianglerighteq \mu} m_{\lambda\mu} S^{\lambda},$$

où $m_{\lambda\mu}$ est le nombre de tableaux semi-standards de forme λ et de contenu μ. Pour la définition de tableaux semi-standards, voir à la page 69.

Proposition 110 Les opérateurs d'insertion commutent entre eux, et il en est de même pour les opérateurs de suppression :

$$\mathsf{sh}_a \circ \mathsf{sh}_b = \mathsf{sh}_b \circ \mathsf{sh}_a,$$

$$\partial_a \circ \partial_b = \partial_b \circ \partial_a .$$

Lemme 111 L'opérateur de remplacement, $\theta_{a,b}$, est un morphisme de S_n-modules à droite.

En particulier, θ commute avec les actions à droite de S_n.

Proposition 112 À l'aide des opérateurs sh et ∂, on peut donner cette nouvelle définition des opérateurs $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans l'algèbre des mots :

$$\nu_k = \sum_{1\leq a_1\leq\ldots\leq a_k\leq n} \frac{1}{\prod_{j\in[n]} \#\{l\in[k],\mid a_l=j\}!}\, \mathsf{sh}_{a_1}\circ\ldots\circ\mathsf{sh}_{a_k}\circ\partial_{a_1}\circ\ldots\circ\partial_{a_k}\,.$$

Lemme 114 Sur l'algèbre des mots de longueur n, les identités suivantes sont vérifiées :

i. $\partial_b\circ\mathsf{sh}_a - \mathsf{sh}_a\circ\partial_b = \theta_{b,a} + (n+1)\delta_{a,b}\ \mathrm{Id}$,

ii. $\theta_{b,c}\circ\mathsf{sh}_a - \mathsf{sh}_a\circ\theta_{b,c} = \delta_{a,b}\,\mathsf{sh}_c$,

où $\delta_{a,b}$ vaut 1 si $a=b$ et 0, sinon.

Lemme 115 Sur l'algèbre des mots de longueur n,

$$\mathsf{sh}_a\circ\nu_{k-1} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{1\leq a_1\leq\ldots\leq a_k\leq n} \delta_{a,a_i}\frac{1}{\prod_{j\in[n]}\#\{l\in[k]\mid a_l=j\}!}\,\mathsf{sh}_a\circ\mathsf{sh}_{a_1}\circ\ldots\circ \widehat{\mathsf{sh}_{a_i}}\circ\ldots\circ\mathsf{sh}_{a_k}\circ\partial_{a_1}\circ\ldots\widehat{\partial_{a_i}}\circ\ldots\circ\partial_{a_k}\,.$$

Théorème 116 Sur l'algèbre des mots,

$$\sum_{a=1}^{n}\mathsf{sh}_a\circ\nu_{k-1}\circ\partial_a = k\,\nu_k.$$

Théorème 117 Sur les mots de longueur n,

$$\nu_k\circ\mathsf{sh}_a - \mathsf{sh}_a\circ\nu_k = (n+2-k)\,\mathsf{sh}_a\circ\nu_{k-1} + \sum_{1\leq b\leq n}\mathsf{sh}_b\circ\theta_{b,a}\circ\nu_{k-1}.$$

Lemme 118 Pour toute valeur de k et pour tout partage λ, l'image de $\nu_k|_{S^\lambda}$ est comprise dans S^λ.

Lemme 119 Soit λ un partage. Si $a < b$, alors $\theta_{b,a}|_{S^\lambda} = 0$.

Théorème 120 Soit $\lambda \vdash n$. Alors,

$$(\nu_k \circ \mathsf{sh}_a - \mathsf{sh}_a \circ \nu_k)\,|_{S^\lambda} = (n+2-k)\,(\mathsf{sh}_a \circ \nu_{k-1})\,|_{S^\lambda} + \sum_{1 \leq b \leq a} (\mathsf{sh}_b \circ \theta_{b,a} \circ \nu_{k-1})\,|_{S^\lambda}.$$

Proposition 121 L'image de $(\mathsf{sh}_a)|_{S^\lambda}$ est contenue dans un sous-module de $M^{\lambda+\vec{e_a}}$ isomorphe à $\bigoplus_{\mu=\lambda+\vec{e_r},\ r\leq a} S^\mu$.

Proposition 123 La fonction $\mathrm{isoproj}_\mu$ satisfait les énoncés suivants :

1. elle commute avec les actions du groupe symétrique.
2. c'est un morphisme de S_n-modules.
3. c'est un projecteur isotypique de $\mathbb{C}S_n$ vers la composante isotypique associée au module simple S^μ.

Proposition 125 Si U et V sont des modules simples, les caractères associés à U et à V sont orthonormaux, c'est-à-dire que

$$\langle \chi^U, \chi^V \rangle = \delta_{U,V} = \begin{cases} 1 & \text{si } U = V \\ 0 & \text{si } U \neq V \end{cases}.$$

Lemme 126 Le projecteur isotypique $\mathrm{isoproj}_\mu$ commute avec l'opérateur de remplacement $\theta_{a,b}$:

$$\theta_{a,b}(\mathrm{isoproj}_\mu(v)) = \mathrm{isoproj}_\mu(\theta_{a,b}(v)).$$

Lemme 127 Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \vdash n$, $a \in [l+1]$ et $\mu = \lambda + \vec{e_r}$, avec $r \in [a]$. Alors,

$$\left(\nu_k \circ \mathrm{projlift}_a^\mu - \mathrm{projlift}_a^\mu \circ \nu_k\right)|_{S^\lambda} =$$
$$(n+3-k+\lambda_a-a)\left(\mathrm{projlift}_a^\mu \circ \nu_{k-1}\right)|_{S^\lambda} + \left(\sum_{r \le b < a} \theta_{b,a} \circ \mathrm{projlift}_b^\mu \circ \nu_{k-1}\right)|_{S^\lambda}.$$

Théorème 128 Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \vdash n$, $a \in [l+1]$ et $\mu = \lambda + \vec{e_r}$, avec $r \in [a]$. Alors,

$$\left(\nu_k \circ \mathrm{projlift}_a^\mu - \mathrm{projlift}_a^\mu \circ \nu_k\right)|_{S^\lambda} = (n+2-k+(\lambda_r+1-r))\left(\mathrm{projlift}_a^\mu \circ \nu_{k-1}\right)|_{S^\lambda}.$$

Corollaire 129 Soit $\lambda \vdash n$ et soit $v \in S^\lambda$ un vecteur propre à la fois pour ν_k et ν_{k-1}, associé aux valeurs propres v_k et v_{k-1}, respectivement. Alors, soit

— $\mathrm{projlift}_a^{\lambda+\vec{e_r}}(v) = 0$

ou

— $\nu_k \circ \mathrm{projlift}_a^{\lambda+\vec{e_r}}(v) = \mathrm{projlift}_a^{\lambda+\vec{e_r}}\left(v_k + (n+2-k+(\lambda_r+1-r))v_{k-1}\right)(v)$
$$= (v_k + (n+2-k+(\lambda_r+1-r))v_{k-1})\,\mathrm{projlift}_a^{\lambda+\vec{e_r}}(v).$$

Théorème 130 Le noyau de ν_k est

$$\ker(\nu_k) \cong \bigoplus_{\substack{\text{tableau standard } t\,,\\ \mathrm{type}(t)<k}} S^{\mathrm{forme}(t)}.$$

Proposition 131 L'image de ν_k sur S^λ est comprise dans la somme suivante :

$$\mathrm{im}(\nu_k|_{S^\lambda}) \subseteq \sum_{1 \le a_1 \le \ldots \le a_k \le n} \mathrm{im}\left(\mathrm{isoproj}_\lambda \circ \mathsf{sh}_{a_k} \circ \ldots \circ \mathsf{sh}_{a_1}|_{S^{\lambda - e_{\vec{a}_1} - \ldots - e_{\vec{a}_k}}}\right)$$
$$\subseteq \sum_{1 \le a \le n} \mathrm{im}\left(\mathrm{projlift}_a^\lambda|_{S^{\lambda - e_{\vec{a}}}}\right).$$

Théorème 132 La propriété suivante concernant l'opérateur de suppression est vraie sur l'algèbre des mots de longueur n :

$$\partial_a \circ \nu_k - \nu_k \circ \partial_a = (n+1-k)\nu_{k-1} \circ \partial_a + \sum_{1 \leq b \leq n} \theta_{a,b} \circ \nu_{k-1} \circ \partial_b \,.$$

RÉFÉRENCES

Aldous, D. et Diaconis, P. (1986). Shuffling cards and stopping times. *American Mathematical Monthly*, *93*(5), 333–348. http://dx.doi.org/10.2307/2323590

Ayyer, A., Schilling, A., Steinberg, B. et Thiéry, N. M. (2015). Markov chains, $\mathcal{R}$-trivial monoids and representation theory. *International Journal of Algebra and Computation*, *25*(1-2), 169–231. http://dx.doi.org/10.1142/S0218196715400081

Ayyer, A., Schilling, A. et Thiéry, N. M. (2017). Spectral gap for random-to-random shuffling on linear extensions. *Experimental Mathematics*, *26*(1), 22–30. http://dx.doi.org/10.1080/10586458.2015.1107868

Bayer, D. et Diaconis, P. (1992). Trailing the dovetail shuffle to its lair. *The Annals of Applied Probability*, *2*(2), 294–313.

Bernstein, M. et Nestoridi, E. (2019). Cutoff for random to random card shuffle. *Annals of probability*, *47*(5), 3303–3320.

Bidigare, P., Hanlon, P. et Rockmore, D. (1999). A combinatorial description of the spectrum for the Tsetlin library and its generalization to hyperplane arrangements. *Duke Mathematical Journal*, *99*(1), 135–174. http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-99-09906-4

Borel, E. et Chéron, A. (1940). *Théorie Mathématique du Bridge à la Portée de Tous*. Monographies des Probabilités, Fascicule V. Gauthier-Villars, Paris.

Désarménien, J. et Wachs, M. L. (1988). Descentes des dérangements et mots circulaires. *Séminaire Lotharingien de combinatoire*, *19*, 13–21.

Diaconis, P. (1988). *Group representations in probability and statistics*, volume 11 de *Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes—Monograph Series*. Ins-

titute of Mathematical Statistics, Hayward, CA.

Diaconis, P. (2003). Mathematical developments from the analysis of riffle shuffling. In *Groups, combinatorics & geometry (Durham, 2001)* 73–97. World Sci. Publ., River Edge, NJ

Diaconis, P., Fill, J. A. et Pitman, J. (1992). Analysis of top to random shuffles. *Combinatorics, Probability and Computing*, *1*(2), 135–155.

Diaconis, P. et Pal, S. (2017). Shuffling cards by spatial motion. arXiv:1708.08147.

Diaconis, P., Pang, C. Y. A. et Ram, A. (2014). Hopf algebras and markov chains: two examples and a theory. *Journal of Algebraic Combinatorics*, *39*(3), 527–585. http://dx.doi.org/10.1007/s10801-013-0456-7

Diaconis, P. et Saloff-Coste, L. (1993). Comparison techniques for random walk on finite groups. *The Annals of Probability*, *21*(4), 2131–2156.

Diaconis, P. et Shahshahani, M. (1981). Generating a random permutation with random transpositions. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, *57*(2), 159–179. http://dx.doi.org/10.1007/BF00535487

Dieker, A. B. et Saliola, F. (2018). Spectral analysis of random-to-random Markov chains. *Advances in Mathematics*, *323*, 427–485. http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2017.10.034

Donnelly, P. (1991). The heaps process, libraries, and size-biased permutations. *Journal of Applied Probability*, *28*(2), 321–335. http://dx.doi.org/10.2307/3214869

Dummit, D. S. et Foote, R. M. (1991). *Abstract algebra.* Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.

Durrett, R. (2003). Shuffling chromosomes. *Journal of Theoretical Probability*, *16*(3), 725–750. http://dx.doi.org/10.1023/A:1025676617383

Fill, J. A. (1996). An exact formula for the move-to-front rule for self-organizing lists. *Journal of Theoretical Probability*, *9*(1), 113–160. http://dx.doi.org/10.1007/BF02213737

Fulton, W. et Harris, J. (1991). *Representation theory*, volume 129 de *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-0979-9

Gilbert, E. (1955). Theory of shuffling. Rapport technique, tel que cité dans (Bayer et Diaconis, 1992).

Horn, R. A. et Johnson, C. R. (1990). *Matrix analysis.* Cambridge University Press, Cambridge. Corrected reprint of the 1985 original.

James, G. et Kerber, A. (1981). *The representation theory of the symmetric group*, volume 16 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass. Avec un avant-propos de P. M. Cohn, avec une introduction de Gilbert de B. Robinson.

James, G. D. (1978). *The representation theory of the symmetric groups*, volume 682 de *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, Berlin.

Jonasson, J. (2006). The overhand shuffle mixes in $\Theta(n^2 \log n)$ steps. *The Annals of Applied Probability*, *16*(1), 231–243. http://dx.doi.org/10.1214/105051605000000692

Les développeurs et développeuses de SageMath (2019). *SageMath, (Version 8.7).* https://www.sagemath.org.

Levin, D. A. et Peres, Y. (2017). *Markov chains and mixing times* (2^e éd.). American Mathematical Society, Providence, RI. Avec la contribution d'Elizabeth L. Wilmer.

Maschke, H. (1899). Beweis des Satzes, dass diejenigen endlichen linearen Substitutionsgruppen, in welchen einige durchgehends verschwindende Coefficienten auftreten, intransitiv sind. *Mathematische Annalen*, *52*(2-3), 363–368. http://dx.doi.org/10.1007/BF01476165

Pemantle, R. (1989). Randomization time for the overhand shuffle. *Journal of Theoretical Probability*, *2*(1), 37–49. http://dx.doi.org/10.1007/BF01048267

Phatarfod, R. M. (1991). On the matrix occurring in a linear search problem. *Journal of Applied Probability*, *28*(2), 336–346. http://dx.doi.org/10.1017/s0021900200039723

Poincaré, H. (1907). Le hasard. *La revue du mois*, *3*, 257–276.

Qin, C. et Morris, B. (2017). Improved bounds for the mixing time of the random-to-random shuffle. *Electronic Communications in Probability*, *22*, 1–7. http://dx.doi.org/10.1214/17-ECP3955

Reiner, V., Saliola, F. et Welker, V. (2014). Spectra of symmetrized shuffling operators. *Memoirs of the American Mathematical Society*, *228*(1072), vi+109.

Sagan, B. E. (2001). *The symmetric group. Representations, combinato-*

rial algorithms, and symmetric functions (2^e éd.). Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-6804-6

Saloff-Coste, L. (2004). Random walks on finite groups. In *Probability on discrete structures*, volume 110 de *Encyclopaedia Math. Sci.* 263–346. Springer, Berlin

Saloff-Coste, L. et Zúñiga, J. (2008). Refined estimates for some basic random walks on the symmetric and alternating groups. *ALEA. Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*, *4*, 359–392.

Schensted, C. (1961). Longest increasing and decreasing subsequences. *Canadian Journal of Mathematics. Journal Canadien de Mathématiques*, *13*, 179–191. http://dx.doi.org/10.4153/CJM-1961-015-3

Schur, J. (1907). Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. [Crelle's Journal]*, *132*, 85–137. http://dx.doi.org/10.1515/crll.1907.132.85

Schützenberger, M.-P. (1963). Quelques remarques sur une construction de Schensted. *Mathematica Scandinavica*, *12*, 117–128. http://dx.doi.org/10.7146/math.scand.a-10676

Specht, W. (1935). Die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe. *Mathematische Zeitschrift*, *39*(1), 696–711. http://dx.doi.org/10.1007/BF01201387

Stanley, R. P. (1999). *Enumerative combinatorics. Volume 2*, volume 62 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge. Avec un avant-propos de Gian-Carlo Rota et l'annexe 1 par Sergey Fomin, http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511609589

Subag, E. (2013). A lower bound for the mixing time of the random-to-random insertions shuffle. *Electronic Journal of Probability*, *18*(20), 1–20. http://dx.doi.org/10.1214/EJP.v18-1950

Uyemura-Reyes, J.-C. (2002). *Random walk, semidirect products, and card shuffling*. (Thèse de doctorat). Stanford University.

INDEX DES NOTATIONS

Opérateurs