UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

L'ERREUR EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES : REPENSER SON RÔLE, EXPLORER SON POTENTIEL

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

CHARLOTTE MEGROURECHE

NOVEMBRE 2020

REMERCIEMENTS

C’est avec grande fierté et émotion que j’écris ces lignes qui bouclent la boucle en pensant à vous qui avez été à mes côtés au cours de ces deux belles années et, je l’espère, pour la suite.

Merci à mon directeur Jérôme Proulx de m’avoir partagé, si généreusement, cette manière de faire de la recherche. Merci pour toutes les discussions inspirantes, pour le support, pour l’implication et, par-dessus tout, merci de m’avoir irréversiblement sensibilisée à toute cette richesse des mathématiques et de la classe. Tu m’as légué un héritage bien précieux que j’espère être à la hauteur de porter et de faire fleurir.

Merci à ma collègue et amie Rox-Anne d’avoir été là tous les jours , la semaine comme la fin de semaine, du matin jusqu’au soir, au deuxième comme au cinquième, à Montréal comme à Manchester. Avoir eu la chance de me développer, de me remettre en question, de rire, de pleurer, bref de me former à tes côtés, presque dans ta réflexion, a été un réel et sincère bonheur.

Merci aussi à mes collègues étudiants qui m’ont donné envie et même hâte de venir passer ces longues heures à l’université. Les cours, les dîners, les séminaires, les cafés, les rires que nous avons partagés sont inestimables. Un merci spécial à Anabel, Fiorella, Catherine et Camille que j’admire et avec qui j’ai partagé des moments qui me sont très chers.

Un autre merci spécial à Jean-François Maheux qui a grandement marqué mon parcours. Merci pour les échanges, pour ta générosité et pour tes idées inspirantes. J'espère avoir le plaisir de continuer à graviter dans ton bel univers.

Finalement, merci à ma famille d'avoir toujours été a mes côtés et de continuer à l'être aujourd'hui. Votre support, vos conseils, vos encouragements, votre fierté sont des moteurs précieux qui me permettent et me motive à avancer.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

Depuis plusieurs années, l’intérêt lié à l’erreur stimule la recherche en didactique des mathématiques. Parmi les différents courants développés pour envisager les rapports de l’erreur dans le développement des compréhensions mathématiques des élèves, certains didacticiens des mathématiques ont mis en avant une vision productive de l’erreur dans laquelle elle prend le sens non pas de lacune à rectifier ou de fausse conception à dépasser, mais plutôt d’une occasion pour contribuer au développement des mathématiques. Inspirée de l’histoire des mathématiques, où les erreurs ont permis de nouvelles idées et compréhensions mathématiques, cette vision appelée productive de l’erreur la conçoit comme une opportunité pour générer des nouvelles mathématiques. Cette recherche de maîtrise offre des pistes pour comprendre cette question de productivité mathématique des erreurs dans la classe de mathématiques.

L’histoire des mathématiques offre plusieurs exemples où les erreurs ont transformé, voire même révolutionné, la discipline mathématique en stimulant de nouvelles idées. À la lumière de retombées productives des erreurs soulevées pour la discipline mathématique, des séances de résolution de problèmes réalisées en classe avec des élèves sont analysées. Ces analyses font ressortir des éléments de réponses pour donner un sens à la productivité mathématique des erreurs en salle de classe.

Ce travail de recherche à la maîtrise dégage une productivité des erreurs qui portent un potentiel pouvant être exploité dans la classe pour faire des mathématiques. Un parallèle important entre la productivité des erreurs au niveau de la discipline et celle au niveau de la classe de mathématiques est tracé et précise (1) la nature des retombées mathématiques permises par diverses erreurs réalisées par les élèves et (2) de quelles façons les erreurs peuvent participer au développement des mathématiques en classe, soit le contexte et le sens de cette productivité mathématiques des erreurs.

Mots clés : Didactique des mathématiques ; Enseignement des mathématiques ; Erreur en mathématiques ; Productivité mathématique ; Activité mathématique ; Histoire des mathématiques

INTRODUCTION

Ma recherche s'inscrit dans une lignée de travaux en didactique des mathématiques s'intéressant à l'erreur. Dans le but de donner un sens à une perspective dite productive de l'erreur mise en avant par certains didacticiens des mathématiques, mon travail à la maîtrise s'intéresse à la nature des retombées productives des erreurs dans la classe, c'est-à-dire à ce qu'elles peuvent produire en termes de mathématiques avec les élèves lorsque celles-ci sont envisagées comme opportunités pour faire des mathématiques.

Dans le Chapitre 1, je retrace l'origine de mon questionnement sur l'erreur en mathématiques à partir d'une réflexion sur une expérience vécue durant ma formation. Je dresse ensuite un portrait des travaux sur l'erreur en didactique des mathématiques, en soulignant divers courants idéologiques qui ont marqué la manière de la concevoir en classe. Je présente finalement plus en détail les travaux de Raffaella Borasi marquant la vision productive de l'erreur dans laquelle s'inscrit ma recherche.

Dans le Chapitre 2, j'offre dans un premier temps une conceptualisation de l'erreur en mathématiques, ce qui permet de clarifier le sens à donner au concept d'erreur dans cette recherche. Dans un deuxième temps, je présente une analyse de diverses erreurs s'étant produites dans l'histoire des mathématiques et dégage cinq retombées productives de l'erreur pour la discipline. Ce double cadrage apporte une première réponse théorique à mes questions de recherche sur la nature de la productivité des erreurs en classe de mathématiques.

Dans le Chapitre 3, je justifie les orientations méthodologiques me permettant d'aborder mes questions de recherche. Je présente les séances de résolution de problèmes analysées, les unités d'observations et d'analyse, la grille d'analyse et la démarche d'analyse entreprise.

Dans le Chapitre 4, j'analyse les retombées de diverses erreurs issues de séances de résolution de problèmes en classe de mathématiques. Ces analyses précisent la nature des retombées productives des erreurs dans la classe.

Dans le Chapitre 5, je discute de certains enjeux autour de la productivité des erreurs en classe de mathématiques et fais ressortir un potentiel des erreurs pouvant être exploité dans la classe de mathématique. Je présente le contexte entourant la productivité mathématique des erreurs en classe en soulevant ses acteurs et les rôles de ces acteurs dans cette productivité mathématique.

Finalement, dans le Chapitre 6, je présente les conclusions de cette étude sur la productivité mathématique des erreurs dans la classe de mathématiques. Je termine en soulevant différentes pistes de questionnements pour des futures études et offre, en guise de remarques finales, un retour sur les préoccupations à l'origine de ce travail de recherche.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

1.1 Origine du questionnement

Les discussions reliées à la place de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques ont teinté mon cheminement au baccalauréat à la formation à enseignement des mathématiques au secondaire (BES-Maths). Les réflexions amorcées sur les conceptions erronées et l'importance de leurs diagnostics m'ont sensibilisé quant aux rôles que peuvent avoir les erreurs dans le développement des compréhensions mathématiques des élèves. Toutefois, vers la fin de mon parcours dans le programme de formation, un évènement a provoqué chez moi un questionnement plus profond à propos de la nature de l'erreur en mathématiques. Durant un cours de mathématiques, mon professeur a voulu factoriser l'équation $3x^2 - 5x - 6$. Sa démarche au tableau ressemblait à ceci :

$$3x^2 - 5x - 2$$

Somme : -5 et Produit : -6

Les 2 nombres sont donc -6 et 1

$$3x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$$

En utilisant la méthode somme/produit de manière erronée, c'est-à-dire sans considérer la valeur non unitaire du paramètre a (ici 3), il a généré une nouvelle expression algébrique qui n'était pas équivalente à l'expression de départ. Sans s'en rendre compte, mon professeur a plutôt factorisé l'expression algébrique $x^2 - 5x - 6$ qui n'offrait pas une solution au problème étudié et pour lequel cette factorisation était une sous-étape. Constatant cette contradiction avec ses calculs faits en préparation du cours, il a expliqué qu'une erreur s'était probablement glissée dans le processus. Sans plus d'explications et surtout sans revenir sur les étapes précédentes pour comprendre l'erreur et la corriger, mon professeur nous a donné la bonne réponse en expliquant que, normalement, c'est ce à quoi nous aurions dû arriver. Le cours s'est ensuite poursuivi, sans que personne ne revienne sur cette factorisation erronée.

À ce moment, que personne ne soit intervenu (ni les étudiants du cours, ni mon professeur, ni même moi qui avais remarqué l'erreur et qui en avais même décelé la cause) et n'ait senti le besoin de corriger l'erreur m'a troublé. Je me suis dit que si une même erreur avait été commise dans une classe du secondaire, si un élève avait effectué cette factorisation erronée, il m'aurait semblé nécessaire d'intervenir pour corriger une compréhension mathématique défaillante. Dans le contexte du secondaire, la volonté de réparer ce qui venait de se passer aurait fort probablement orienté de manière différente le reste de la séance : les interventions dans la classe se seraient possiblement centrées sur la cause de cette production erronée et sur la correction de celle-ci pour la comprendre et l'éviter autant que possible dans le futur. Dans le cas de mon professeur universitaire, que je suppose être en mesure de factoriser adéquatement, l'intervention sur cette erreur ne me semblait cependant pas du tout essentielle.

Le fait qu'une « même » erreur puisse être dérangeante dans un contexte et banale dans un autre était pour moi frappant. Comment une même production mathématique pouvait à la fois être synonyme d'une simple inattention à laquelle n'accorder aucune importance dans le cas de mon professeur universitaire et d'une incompréhension marquée sur laquelle il faut intervenir dans le cas d'un élève du secondaire ? Si une même manifestation, dans des contextes différents, n'engendre pas les mêmes interventions ou interprétations, il devient alors possible de penser que le concept d'erreur mathématique puisse cacher plus de nuances que les oppositions marquées bon/mauvais, compris/incompris et vrai/faux. Il y avait certainement d'autres possibilités, car si l'erreur ne cachait pas certaines subtilités, la « même » production n'engendrerait pas des actions aussi différentes.

La conception tenue de l'erreur, l'interprétation que nous en faisons, le jugement que nous portons sur la personne qui la produit et le contexte dans lequel celle-ci est produite, semblent avoir un impact sur le statut qui lui est accordé et la manière de l'envisager dans la classe. Cette réflexion amorcée de manière informelle dans un cours de mathématiques universitaire m'a menée à vouloir investiguer, dans le cadre de ma maîtrise, le sens que l'erreur peut prendre en classe de mathématiques.

1.2 Quelques courants sur l'erreur en didactique des mathématiques

L'intérêt pour l'erreur n'est pas nouveau en didactique des mathématiques. Depuis déjà plusieurs années, le désir de mieux comprendre le rôle qu'elle peut jouer dans les compréhensions mathématiques des élèves alimente le domaine de recherche. Au fil du temps, différents cadres pour envisager son (r)apport à l'apprentissage se sont développés et ont influencé la manière de concevoir l'erreur en classe de mathématiques. Un regard sur ces différents cadres permet de dégager trois principaux courants idéologiques ayant façonné les manières d'encadrer l'erreur en classe. D'abord, un courant médical, envisageant l'erreur comme la manifestation d'une déviance à rectifier. Ensuite, un courant humaniste, considérant l'erreur comme une étape naturelle, voire même essentielle, de l'apprentissage. Puis, un courant mathématique, invitant à penser l'erreur comme une occasion de creuser et de développer les mathématiques elles-mêmes. Dans ce qui suit, ces différents courants sur l'erreur sont présentés et illustrés à l'aide d'exemples.

1.2.1 Le courant médical : une vision déficitaire de l'erreur

À travers une vision dirigée par le diagnostic et la remédiation, l'erreur a d'abord été envisagée comme le symptôme de l'échec d'un apprentissage. Inspirée par un courant dit « médical » (Bélanger, 1990-91) où une norme est fixée et agit comme référence menant à ce que tout ce qui en dévie soit normalisé, l'erreur est alors décrite comme un manque à combler, une incompréhension à rectifier. Des expressions comme « lacune » ou « déficit » sont alors employées pour décrire l'erreur et façonnent les manières de la concevoir et la traiter.

De ce courant médical se dégage qu'au niveau des connaissances l'erreur est la marque d'un manque. L'erreur n'est en ce sens pas seulement un raté momentané qui se corrigerait de lui-même, elle est décrite et envisagée comme le symptôme d'une incompréhension plus profonde auquel il est primordial de remédier. Tel que l'exprime Bélanger (1990-91), dans ce courant médical les erreurs prennent le sens de « facultés mentales incomplètes ou sous-développées » (p. 50). Dans un même ordre d'idée, Kundu et Sengupta (2014) expliquent que des pauvres compréhensions, voire des incompréhensions dans des concepts mathématiques de base expliqueraient ces productions erronées :

> A large number of students are not able to understand the basic concepts of [mathematics]. Because of the lack of basic understanding, they grasp certain methods, statements and theories, and so forth instead of grasping the spirit of the subject. As a result, students commit errors. (p. 105)

L'erreur s'explique en ce sens comme étant le produit de lacunes dans la structure des connaissances de l'élève, des faiblesses dans ses compréhensions mathématiques.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$$

Selon le courant médical, cette erreur d'addition de fractions est interprétée comme un manque de connaissances ou de compréhensions. Parce que l'élève ne comprend pas ou comprend mal le concept de fraction, il ne peut pas opérer correctement sur les fractions. Il en résulte une erreur.

Sous-jacent à ce courant médical de l'erreur se trouve une vision de l'apprentissage comme étant un processus linéaire et séquentiel. Le processus d'apprentissage est conçu comme une série d'étapes qui s'enchaînent selon une certaine hiérarchie, où les nouvelles connaissances s'appuient sur les précédentes pour se développer. Sur la base des compréhensions préalables, des compréhensions mathématiques de plus en plus complexes sont construites. Il ressort d'ailleurs qu'il est important d'intervenir le plus rapidement sur les erreurs pour qu'elles ne se reproduisent plus, mais surtout pour qu'elles n'affectent pas les compréhensions subséquentes de l'élève. Kundu et Sengupta (2014) notent à cet effet que :

> The most effective method of eliminating errors is to address them immediately when observed. This is imperative, so students do not carry these errors any further and develop a better understanding of the subject. (p. 122)

D'une étape à l'autre, les erreurs doivent être éliminées dès leur manifestation pour asseoir les nouvelles connaissances sur des bases solides.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$$

Selon le courant médical, une incompréhension du concept de fraction préalable aux opérations sur celles-ci pourrait expliquer cette erreur. Parce que, selon la hiérarchie des connaissances et de l'apprentissage, il faudrait comprendre les fractions avant de pouvoir opérer sur celles-ci, une incompréhension des fractions pourrait entraîner une incapacité à les additionner correctement. Une fois la connaissance des fractions ajustée (et ce, rapidement), il sera possible de développer cette connaissance plus complexe.

De manière connexe, Astolfi (1997) souligne que ce courant médical de l'erreur où celle-ci doit être rectifiée et même effacée du processus propose de comprendre le développement des mathématiques, autant au niveau de la discipline qu'au niveau de l'apprentissage, à travers les lunettes du progrès : l'histoire d'un concept est considérée « sur le mode d'une progression linéaire, par victoire de l'irrésistible et irréversible vérité » (*ibid*, 1997, p. 36). En ce sens, le temps corrige et efface les erreurs à travers lequel elles sont remplacées par des compréhensions et des connaissances adéquates. Selon ce courant, les compréhensions mathématiques des élèves devraient tendre vers les connaissances mathématiques où la vérité a triomphé et a même effacé les erreurs.

Dans la classe de mathématique, ce courant médical a mis l'accent sur l'importance du diagnostic et de la remédiation efficace des erreurs. Tel qu'exprimé dans l'introduction de son livre traitant des erreurs en arithmétique, Ashlock (1976) suggère d'améliorer l'enseignement des mathématiques justement en centrant la pratique enseignante sur un diagnostic continu :

> This book is designed to help us improve mathematics instruction in our classrooms by becoming more diagnostically oriented. Diagnosis should be continuous throughout instruction. (p. 1)

L'enseignant est alors conçu comme un expert qui investigue et qui a pour but de diagnostiquer et rectifier les compréhensions mathématiques des élèves.

Dans le but de toujours mieux corriger et éliminer les erreurs, ce courant a vu naître un certain nombre de catégorisations d'erreurs fréquentes (e.g. les travaux d'Ashlock, 1976, sur les erreurs en arithmétique). Bélanger (1990-91, p. 56) explique que cette période des travaux sur l'erreur a été marquée par une « prolifération de listes d'erreurs ». À titre de répertoires d'erreurs fréquemment rencontrés, ces catégories d'erreurs récurrentes ont pour but de faciliter le diagnostic et l'élimination des erreurs dans les compréhensions mathématiques des élèves. En sensibilisant à des concepts ou à des notions où certaines erreurs ont été reconnues comme « chroniques », ces listes favorisent une intervention rapide pour que la suite du processus d'apprentissage s'en retrouve affectée le moins possible.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$$

Cette erreur d'addition de fractions est assez commune et fréquente. Être sensible à cette « chronicité » pourrait, selon cette perspective, amener l'intervenant à être plus méticuleux pour favoriser une appropriation adéquate du concept de fraction et ensuite de l'addition en contexte de fractions.

De ce courant médical de l'erreur ressort un désir que les erreurs marquent le moins possible la progression normale des compréhensions mathématiques des élèves en cherchant des moyens de traiter et d'éliminer efficacement leurs occurrences. Au fil des travaux, ce courant s'est toutefois transformé pour laisser place à un courant dit humaniste où l'erreur est devenue davantage synonyme d'apprentissage.

1.2.2 Le courant humaniste : une vision compréhensive de l'erreur

Ce courant humaniste a ouvert vers une manière d'envisager l'erreur non plus en termes de manques à combler, mais plutôt comme étant une étape naturelle, voire même essentielle, du processus d'apprentissage. Avec cette vision renouvelée de l'erreur, celle-ci passe d'un état d'incompréhension à éliminer à celui d'une compréhension qu'il faudra plutôt faire grandir et améliorer. Décrite comme étant « constitutive de l'acte de connaître » (Astolfi, 1997, p. 38), l'erreur prend le sens d'une partie centrale du développement des connaissances mathématiques.

Avec le courant humaniste, l'erreur devient, positivement, la marque d'une connaissance en cours de formation. Comprise à la fois comme le signe d'une connaissance partielle et encore imparfaite, l'erreur devient la marque d'une construction en cours de réalisation. C’est en ce sens qu’elle est décrite par Astolfi (1997, p. 23) en termes de « progrès en cours d’obtention ».

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$$

Selon le courant humaniste, cette erreur d’addition de fractions est interprétée comme une compréhension encore incomplète. Parce que l’élève ne comprend encore que partiellement le concept de fraction, ce dernier ne peut pas encore opérer correctement sur les fractions.

Selon ce courant humaniste, l’apprentissage est compris à travers un processus de dépassement d’obstacles et d’élargissement de schèmes dans lesquels les erreurs jouent un rôle central. « On apprend de nos erreurs », comme le dit le fameux dicton. L’erreur est envisagée comme la manifestation d’un rationnel, qui est encore limité, mais rationnel tout de même. L’erreur proviendrait d’une manière de penser qui s’est déjà montrée adéquate, d’« une connaissance qui a fait ses preuves dans un certain domaine » (IREM d’Aquitaine, p. 8) et qui ouvre à être ajustée. En ce sens, Smith et al. (1993) argumentent la force de ces compréhensions limitées, amenant à voir que les erreurs découlent de l’utilisation de connaissances en dehors des contextes où elles sont fonctionnelles et même utiles :

> “Multiplication makes numbers larger” is an accurate general characterization of the effect of multiplication on natural numbers—a very large and frequently used, though restricted set of numbers. That this conception fails to adequately characterize multiplication with rational and real numbers does not relegate it simply to the status of a mistake. Most, if not all commonly reported misconceptions represent knowledge that is functional but has been extended beyond its productive range of application. (p.152)

La possibilité de progression que marque l’erreur amène à la concevoir comme une occasion de continuer la construction des connaissances, de la bonifier. Ceci fait écho aux travaux de Brousseau (e.g., 1986, 2009), qui lui-même s'inspire de Bachelard (1983), dans lesquels la notion d'obstacle est un élément fondamental et même inévitable du développement des connaissances mathématiques. Le fait que des compréhensions mathématiques ne soient plus valides dans de nouveaux contextes, qu'il y ait présence d'un obstacle sert à motiver et produire le développement de compréhensions plus adaptées. En ce sens, Astolfi (1997) décrit qu'une organisation continue et active de l'expérience permet un développement et enrichissement des schèmes qui tendent vers ce qui est mieux, vers ce qui est plus valable. Il en ressort que les structures passagères et moins adaptées dont témoignent les erreurs sont fondamentales et permettent justement que des modifications s'opèrent et que des améliorations aient lieu.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$$

Selon le courant humaniste, cette erreur pourrait provenir d'une compréhension de l'addition qui est fonctionnelle dans le cas des nombres naturels, mais qui ne l'est plus en contexte de fractions. Avec les nombres naturels, il est possible d'additionner les nombres présents sur une même ligne : 1 + 1 est bien égal à 2. Ceci n'est pas possible dans le cas des fractions. L'erreur devient ainsi la marque d'une limite dans les compréhensions de l'addition de l'élève qui provoque un besoin de changement et d'adaptation. L'erreur devient alors l'occasion d'apprendre en surpassant cet obstacle, en bonifiant le schème additif de l'élève.

Dans la classe, l'enseignant donne une place centrale aux erreurs des élèves. Puisque l'apprentissage est maintenant pensé à travers un processus de surpassement d'obstacles, l'erreur devient « un outil pour enseigner » comme le révèle le titre de l'ouvrage d'Astolfi (1997). Puisque les erreurs renseignent sur les compréhensions des élèves, qu'elles donnent accès à leurs rationnels, les erreurs dans la classe ne sont plus à éviter ou à éliminer sur-le-champ, elles sont plutôt attendues, voire provoquées :

> Pour que l'enseignant puisse prendre en compte les erreurs et les traiter, il faut que les élèves soient mis en situation de les produire. (IREM d'Aquitaine, 2013, p. 8)

L'erreur en tant qu'outil pour moduler les compréhensions des élèves doit être présente en classe. Pour bonifier les conceptions mathématiques erronées des élèves, ceux-ci doivent être placés dans des contextes où ces dernières pourront être confrontées et feront obstacle.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$$

En classe, un enseignant pourrait aller jusqu'à provoquer cette erreur d'addition de fractions. Pour faire émerger un rationnel additif qu'il veut travailler et bonifier avec les élèves, il pourrait choisir un contexte où cette erreur a de fortes chances de se produire.

Ce courant humaniste ouvre certes vers une vision plus acceptante de l'erreur pour son rapport fondamental au processus d'apprentissage. Les visées de ce processus demeurent cependant aussi d'arriver à éliminer la trace et l'occurrence des erreurs en veillant à la réforme des compréhensions pour aller vers des compréhensions plus adaptées et valides. Il est possible de reconnaître et même d'accueillir le rationnel derrière l'erreur, mais l'erreur demeure tout de même symptôme d'un état à dépasser en visant le développement de compréhensions générales qui transcenderont les compréhensions locales s'étant montrées valides par le passé. À travers ces travaux, un troisième courant sur l'erreur a toutefois vu le jour en didactique des mathématiques, invitant alors à comprendre l'erreur comme contribuant au développement de compréhensions mathématiques.

1.2.3 Le courant mathématique : une vision productive de l'erreur

En parallèle aux courants médical et humaniste de l'erreur, un troisième courant s'inspirant de l'histoire du développement des connaissances mathématiques, a mené certains didacticiens des mathématiques à penser l'erreur non seulement comme une partie intégrante du processus d'apprentissage, mais comme enrichissant et stimulant le développement des connaissances mathématiques (voir Borasi, 1996 ; Lakatos, 1976 ; Proulx & Maheux, 2012 ; Davis & Hersh, 1981). Alors que le courant humaniste valorise l'erreur en voulant respecter le processus d'apprentissage, ce courant mathématique place les mathématiques à l'avant-plan et invite à envisager l'erreur comme occasion de développer les mathématiques elles-mêmes.

Ce courant mathématique considère les erreurs comme étant plus que des ouvertures pour connaître plus adéquatement, mais plutôt comme occasions à saisir pour transformer le développement des connaissances et des compréhensions mathématiques. Un regard sur la discipline montre que les erreurs ont joué un rôle productif pour les mathématiques en générant, voire même en forçant de nouvelles idées (Borasi, 1987, 1994,1996 ; Lakatos, 1976). Certains auteurs vont même jusqu'à affirmer que les erreurs en mathématiques ont façonné les mathématiques telles que nous les connaissons aujourd'hui et qu'elles ne seraient pas comme elles sont sans elles (Davis & Hersh, 1981 ; Kline, 1980). Historiquement, par exemple, les manques de rigueur et incohérences dans les méthodes ont façonné le développement de l'analyse, les imprécisions au niveau de l'écriture ont permis de travailler des symbolismes puissants et novateurs ou, encore, les ambiguïtés soulevées dans les tentatives vaines et incorrectes de prouver le postulat des parallèles ont ouvert la porte à de nouvelles géométries. Tel que le souligne Borasi (1994) « mathematicians have often been able to capitalize on errors in ways that go beyond their diagnostic and remediation » (p. 169) amenant à entretenir cette vision dite *productive* des erreurs pour les mathématiques.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$$

Selon ce courant, cette erreur d'addition de fractions peut prendre le sens d'une opportunité à saisir pour faire et produire des mathématiques. Elle peut par exemple être l'occasion de se demander dans quels contextes cette méthode « fautive » d'addition de fraction produit des résultats valables. Voici quelques exemples :

(1) Dans des cas où les numérateurs des fractions en jeu sont nuls, cette méthode fonctionne : $\frac{0}{2}+\frac{0}{3}$ est bien égal à $\frac{0}{5}$.

(2) En contexte de ratio, cette addition est aussi correcte. En effet, dans un examen, avoir 1 point sur 2 à un numéro et 1 point sur 3 à un autre reviendrait effectivement à avoir 2 points sur 5 comme note finale. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ donne effectivement $\frac{2}{5}$.

(3) Si les touts des fractions additionnés sont appelés à changer, cette addition devient aussi correcte : s'il ne s'agit pas de la demie et du tiers d'un même tout, la réponse dite « erronée » devient « possible », car $\frac{1}{2}(2)+\frac{1}{3}(3)$ est bien égal à $\frac{2}{5}(5)$

Ce courant mathématique n'amène pas à penser que toutes les erreurs sont valables, au contraire. Les erreurs sont plutôt des occasions pour chercher et se questionner mathématiquement. Les fouilles générées par le travail sur les erreurs sont vues comme productives pour les mathématiques permettant de faire et de produire encore plus de mathématiques. Pour reprendre l'expression de Borasi (1994) les erreurs prennent le sens de « tremplins » pour faire des mathématiques.

Dans la classe, ce courant mathématique pourrait signifier que les erreurs sont maintenant attendues non plus seulement pour être rectifiées ou dépassées, mais parce qu'elles représentent des occasions à saisir pour faire et façonner les mathématiques. Les erreurs des élèves pourraient teinter de manière positive les mathématiques qui sont faites en ouvrant vers des possibilités additionnelles pour les mathématiques dans la classe. Par leurs erreurs, les élèves pourraient en ce sens participer au processus de développement des mathématiques en provoquant, par exemple, des explorations ou en soulevant des questions.

Ce courant mathématique où les erreurs sont envisagées comme productives soulève d'importantes questions pour la classe. En effet, bien que développé depuis plusieurs années (voir les travaux de Borasi, par exemple), l'impact de cette vision productive des erreurs dans la classe demeure à creuser : De quelles façons les erreurs mathématiques peuvent-elles permettre de développer des mathématiques en classe ? Comment prendre en compte et tirer profit des erreurs, non pas pour les corriger, mais pour développer les mathématiques ? Les travaux cités de Borasi offrent plusieurs pistes de réflexion pour approfondir ces questions et pour mieux saisir le sens que cette vision productive de l'erreur pourrait avoir en classe de mathématiques. Dans la suivante section, les travaux de Borasi sur l'erreur sont abordés pour mieux comprendre comment ceux-ci débouchent sur les questions orientant cette recherche de maîtrise.

1.3 Les travaux de Borasi sur l'erreur comme « tremplin » pour les mathématiques

Les travaux de recherche de Borasi (1987, 1994, 1996) sur l'erreur comme « tremplin » pour les mathématiques contribuent au développement d'une vision productive des erreurs en classe de mathématiques. En offrant des exemples et en ciblant des retombées possibles de ce travail sur l'erreur avec les élèves, ses travaux permettent de donner un sens à cette productivité des erreurs dans la classe de mathématiques.

Borasi a travaillé à la compréhension de ce que signifie « tirer profit » des erreurs dans la classe de mathématiques avec les élèves. Son discours, visant à questionner et même à transformer les pratiques mathématiques de la classe, invite à concevoir les erreurs comme des occasions de poser des questions (sur les) mathématiques. Elle propose en ce sens de tirer avantage des erreurs en les considérant comme des « tremplins » qui engagent dans des fouilles mathématiques importantes et stimulantes. Borasi (1996) propose qu'il soit possible et même souhaitable de dépasser la volonté de diagnostiquer et corriger les erreurs en classe et de tirer profit du questionnement productif qu'elles génèrent pour supporter un travail mathématique riche et intéressant :

> Errors have the potential to raise constructive doubt and questions that can, in turn lead to worthwhile mathematical inquiries. Furthermore, such inquiries do not always need to be reduced to the search for the causes of errors, with the ultimate goal of eliminating it. Rather, if we are open pursuing more challenging questions—Such as "what would happen if we accept this result?" Or "in what circumstances could this result be considered correct?"—then the analysis of errors might lead to reformulation of the problem under study, a deeper understanding of the context in which the problem was generated, and even some unexpected and novel results. (p. 29)

Borasi amène à voir que les erreurs peuvent être des occasions de (se) poser des questions mathématiques : plutôt que d'éliminer une erreur ou de la corriger, il peut s'agir de (se) demander pourquoi elle ne fonctionne pas ou encore dans quels cas celle-ci est fonctionnelle (tel que le montre les exemples de l'encadré de la page 23).

Les travaux de Borasi offrent aussi plusieurs exemples d'explorations mathématiques dans lesquels peuvent engager les erreurs. L'encadré présente des exemples illustratifs d'investigations motivées par les erreurs dégagées de ses travaux :

$$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}}$$

Borasi (1987) amène à voir que cette erreur peut être productive en étant envisagée comme point de départ pour des questions comme « is it ever the case that $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$? » ouvrant à des questions plus générales sur la nature des mathématiques comme « can something be right and wrong at the same time in mathematics? »

$$0^0 = 1$$

$$0^0 = 0$$

Borasi (1996) suggère que ces deux affirmations contradictoires peuvent être productives pour les mathématiques, en amenant à se questionner et à investiguer le rôle de la certitude en mathématiques.

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}$$

D'une façon similaire, Borasi (1987) explique que le doute généré par cette simplification de fraction erronée peut amener à vouloir comprendre pourquoi cette « méthode » non conventionnelle fonctionne dans le cas de la fraction $\frac{16}{64}$ (qui est bien équivalente à $\frac{1}{4}$) ou encore, représente une occasion de trouver d'autres cas fonctionnels.

Il ressort de travaux de Borasi sur l'erreur plusieurs pistes importantes pour comprendre ce que pourrait signifier concrètement, dans le travail mathématique de la classe, cette vision productive des erreurs. En étant envisagées non pas comme des points d'arrivée insatisfaisants pour une question ou un problème, mais plutôt comme des points de départ pour se questionner mathématiquement, les erreurs peuvent stimuler et générer des fouilles importantes.

Borasi (1996) souligne plusieurs retombées métamathématiques de cette vision productive des erreurs en classe, c'est-à-dire des retombées au niveau des manières de faire et de concevoir les mathématiques des élèves. Contribuant à développer un regard positif vis-à-vis la discipline, elle souligne que cette vision productive des erreurs bonifie leurs expériences (des) mathématiques dans la classe en amenant à (1) vivre des doutes et des conflits mathématiques, (2) poursuivre les explorations mathématiques, (3) s'engager dans la résolution de problèmes mathématiques, (4) justifier et contrôler l'activité mathématique, (5) s'approprier le travail mathématique, (6) reconnaître les mathématiques comme activité humaine et (7) verbaliser et communiquer les idées mathématiques. Ceci permet de dégager que le travail sur les erreurs en classe transformerait les pratiques mathématiques des élèves et leur rapport au savoir (Charlot, 1992), c'est-à-dire la vision qu'ils soutiennent vis-à-vis la discipline.

Les retombées soulevées par Borasi amènent à se questionner sur les retombées mathématiques de ce courant dans le concret de la classe. En effet, ces fouilles mathématiques supplémentaires et l'expérience de ces dimensions métamatémathiques ne se font pas à vide : elles sollicitent différents contenus mathématiques (concepts, techniques, méthodes, raisonnements, symbolismes, problèmes, etc.). En ce sens, les transformations que souligne Borasi engagent, en retour, à poser des questions sur les transformations possibles des mathématiques elles-mêmes qui sont produites à travers ces explorations. C'est cette piste de réflexion spécifique que mon travail de maîtrise s'intéresse à investiguer dans le contexte de la classe de mathématiques.

1.4 Vers mes questions de recherche

Les différents cadres développés pour comprendre la place de l'erreur dans le développement de compréhensions mathématiques des élèves permettent de voir comment les visions de l'erreur influencent les manières de les considérer dans la classe et façonnent les mathématiques qui sont faites à partir de celles-ci. Ne se situant pas dans la vision médicale ou encore humaniste de l'erreur, le travail de recherche entrepris dans le cadre de cette maîtrise s'insère dans cette vision dite productive de l'erreur qui l'envisage comme une opportunité à saisir pour le développement des mathématiques.

Les travaux de Borasi permettent de mieux comprendre le potentiel de cette vision de l'erreur comme « tremplin » pour faire des mathématiques avec les élèves. Ses travaux de recherche font ressortir des retombées métamathématiques importantes de ce travail sur les erreurs dans la classe amenant à voir que cette vision productive stimule l'investigation et transforme les manières de faire et de voir les mathématiques des élèves. Ces transformations au niveau des pratiques mathématiques et du rapport au savoir ouvrent en retour vers des questions concernant l'impact de ce travail au niveau des mathématiques elles-mêmes faites en classe. Elles soulignent l'importance de s'intéresser à l'impact du travail des erreurs en classe sur les mathématiques en termes de contenus, de méthodes, de compréhensions, de raisonnements, de symbolisme, etc.

Mon projet de maîtrise veut investiguer ce que les erreurs peuvent produire au niveau des mathématiques dans la classe, c'est-à-dire concernant la nature de leur productivité mathématique. En effet, si les erreurs transforment les manières de faire et d'aborder les mathématiques en classe, quelle est la nature de ces (nouvelles) mathématiques qui sont produites ? Si les erreurs motivent à faire plus de mathématiques dans la classe, quelles sont les mathématiques qui sont faites ? Amenant aussi à tracer un parallèle avec l'histoire des mathématiques où les erreurs ont stimulé la production de concepts, de méthodes, de symbolismes et de théories mathématiques, que peuvent-être ces retombées mathématiques des erreurs au niveau de la classe avec les élèves? Cette vision productive des erreurs tire ses fondements dans la discipline où les erreurs ont produit des mathématiques. Toutefois, comment les erreurs peuvent participer au développement des mathématiques avec les élèves dans la classe? Ce travail de maîtrise est orienté par les questions de recherche suivantes :

Questions de recherche

Quelle est la nature des retombées mathématiques des erreurs en classe de mathématiques?

De quelles façons les erreurs peuvent participer au développement des mathématiques en classe?

Pour aborder ces questions, le prochain chapitre fait état des considérations conceptuelles qui ancrent théoriquement mon travail de recherche en abordant (1) le sens de l'erreur en mathématiques et (2) les retombées mathématiques du travail sur les erreurs dans l'histoire des mathématiques. En ce sens, le prochain chapitre offre des premières réponses théoriques à mes questions de recherche en plus de guider vers le développement d'un cadre d'analyse qui permet par la suite de les aborder empiriquement.

CHAPITRE II

CADRE CONCEPTUEL

Dans ce chapitre 2, une première section 2.1 sert à développer une conceptualisation de l'erreur en mathématiques à travers une revue de définitions et de travaux en didactique des mathématiques. Dans une deuxième section 2.2, une analyse de diverses erreurs s'étant produites dans l'histoire des mathématiques est réalisée. Cette analyse fait ressortir des retombées mathématiques des erreurs, c'est-à-dire ce que ces erreurs ont produit mathématiquement au niveau de la discipline. En spécifiant le sens donné au concept d'erreur et en offrant une base théorique pour comprendre la productivité des erreurs en mathématiques, ces deux sections servent d'ancrages théoriques pour aborder les questions de recherche de cette recherche de maîtrise sur la productivité des erreurs en classe de mathématiques.

2.1 Conceptualisation de l'erreur : les définitions usuelles

Cette section sert à marquer certaines distinctions que soulèvent des dictionnaires de la langue française au sujet de l'erreur. Les définitions de l'erreur que donnent le Multidictionnaire (2020), Le Petit Robert (2014) et le Larousse en ligne (2019) mettent en avant certaines idées qui contribuent à une conceptualisation de l'erreur en mathématiques. Ces définitions soulignent cinq attributs de l'erreur, développés dans ce qui suit et réinvestis dans les Sections 2.2 et 2.3 en tant que piliers pour asseoir une conceptualisation de l'erreur en classe de mathématiques.

Les définitions du dictionnaire soulignent que *l'erreur est un état de comparaison avec une réponse attendue*. Le Multidictionnaire (2020), qui propose pour définir l'erreur de se référer au mot « inexactitude », amène à envisager l'erreur comme étant à côté de ce qui est prévu. En effet, l'erreur comme in/exactitude, donc non-exacte, dévie de ce qui est exact, supposant que cette exactitude existe, que quelque chose de mieux est possible et même attendu. En ce sens l'erreur est un état marqué de certaines attentes auxquelles ladite erreur ne répond pas.

Les définitions du dictionnaire offrent à voir que l'erreur dépasse sa manifestation elle-même en englobant aussi le processus menant à cette manifestation. *L'erreur est un résultat et un processus menant à ce résultat.* Cette idée que l'erreur est à la fois dans la manifestation elle-même, le résultat, mais aussi dans l'acte réalisé de façon erronée, apparaît dans les définitions offertes par le Larousse en ligne (2020), où l'erreur est décrire à la fois comme une « chose » et comme un « acte » :

> Chose fausse, erronée par rapport à la vérité, à une norme, à une règle.
>
> Acte de se tromper, d'adopter ou d'exposer une opinion non conforme à la vérité, de tenir pour vrai ce qui est faux.

Un regard sur les mots employés pour décrire l'erreur (noms et verbes) dans ces définitions conduit à penser que l'erreur n'est pas seulement la marque laissée et reconnue en tant qu'erreur, par exemple le résultat $\frac{2}{5}$ identifié erreur de $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, mais qu'elle englobe aussi le processus ayant mené à cette marque, c'est-à-dire le moment où l'opération $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ a été réalisée de façon erronée par un élève, par exemple. Cette manière de dépasser de sa simple marque invite à concevoir l'erreur dans une temporalité où celle-ci est non seulement identifiée erreur, mais est aussi commise comme erreur, ce qui amène à voir que le processus ayant mené à sa manifestation contribue au statut qui lui est donné, voire la rend erreur.

D'autres définitions des dictionnaires soulignent que *l'erreur est rationnelle pour la personne qui la réalise au moment où elle se réalise.* En effet l'erreur est l'action de « tenir pour vrai ce qui est faux ». Il s'agit d'une nuance importante qui implique que l'erreur n'est pas intentionnelle ou encore le simple signe d'une inattention, elle est « vraie » pour la personne qui la commet lorsqu'elle la commet. Précisant cette temporalité en deux temps (où l'erreur est identifiée comme erreur, mais aussi commise comme erreur) les définitions du Larousse en ligne (2020) présentées plus haut décrivent l'erreur comme étant le signe d'une cohérence, comme l'action « de tenir pour vrai ». Une définition du Petit Robert (2014) permet aussi d'insister sur ce rationnel dont elle découle :

> Acte de l'esprit qui tient pour vrai ce qui est faux et inversement ; jugement, faits psychiques qui en découlent.

Rappelant le courant humaniste de l'erreur décrit dans la Section 1.2.2, où l'erreur est présentée comme une connaissance s'étant *déjà* montrée valide, l'erreur apparaît ici cohérente au moment de sa réalisation. Dans le cas du $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$, ceci signifie que bien qu'il s'agisse d'une addition insatisfaisante ou inexacte, selon certains critères mathématiques, cette addition découle d'un rationnel tenu pour vrai, mais qui est faux. Par exemple, avec les nombres entiers, les nombres présents sur une « même ligne » sont additionnés entre eux : 1 + 1 est bien égal à 2 donnant un certain rationnel à cette technique erronée d'addition de fractions.

Les définitions des dictionnaires permettent aussi de dégager que *l'erreur est relative à un cadre de référence*. Invitant à voir que l'erreur est erreur en fonction d'une certaine « norme » ou d'un certain « dogme », deux autres définitions du Petit Robert (2014) décrivent l'erreur comme une :

> Chose fausse, erronée, action non prévue par rapport à une norme (différence par rapport à un modèle ou au réel).
>
> Conviction, doctrine qui s'écarte d'un dogme, au regard de ceux qui le défendent.

Ceci rappelle le courant médical de l'erreur décrit à la Section 1.1.1, où l'erreur prend le sens d'une déviance face à une norme, déviance qu'il faudra rectifier. Ceci pointe que l'erreur n'est pas erreur dans l'absolu, mais bien en fonction d'un certain cadre de référence pour lequel elle est erreur et en dehors duquel son statut est possiblement autre. Dans l'exemple d'addition de fractions, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ est erreur si la norme veut que les touts en jeu soient fixés. Toutefois, si une autre norme est possible, par exemple si les touts sont appelés à bouger et qu'il s'agit maintenant de la demie de deux, du tiers de trois et du deux cinquièmes de cinq alors $\frac{1}{2}(2)+\frac{1}{3}(3)$ est bien égal à $\frac{2}{5}(5)$. C'est en ce sens que c'est la norme mathématique dans laquelle l'erreur est envisagée qui lui confirme le statut d'erreur. Ce dernier point fait écho à la perspective développée par Borasi (1996), qui remet en question les cadres préalables et appelle à générer, voire à inventer, des cadres mathématiques dans lesquels les erreurs deviennent valides.

Finalement, les définitions du dictionnaire amènent à voir que *l'erreur est un jugement* a posteriori. Se dégage de la définition du Petit Robert que si l'erreur est commise de manière rationnelle, c'est à travers des jugements ou des faits psychiques qui l'invalident que celle-ci obtient le statut d'erreur. Si l'erreur est cohérente au moment de sa réalisation, c'est relativement à une norme précise qu'elle obtient un statut d'erreur après coup. C'est un regard ayant certaines attentes mathématiques relativement au résultat de l'addition de fractions $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$, par exemple l'attente du résultat $\frac{2}{5}$, qui lui donne le statut d'erreur après coup. C'est en fonction de ces attentes que cette addition devient erreur en dehors de l'action où celle-ci a été commise rationnellement.

Ensemble, ces cinq attributs de l'erreur offrent une base de compréhension pour le concept d'erreur en mathématiques. Dans la section suivante, ces attributs sont réinvestis à la lumière des travaux en didactique des mathématiques.

2.2 Conceptualisation de l'erreur : les travaux en didactique des mathématiques

En didactique des mathématiques, le concept d'erreur a pris un sens bien particulier à travers les années et l'intérêt qui lui a été porté. Certaines de ces distinctions sont même devenues fondamentales dans certains travaux et sont ici soulevées. Ces distinctions concernent particulièrement deux caractéristiques importantes (1) le statut de l'erreur relativement à la faute en mathématiques et (2) les domaines de validité en mathématiques. Dans les sections 2.2.1 et 2.2.2, ces deux distinctions sont creusées dans le but de donner un sens à l'erreur ancré en didactique des mathématiques.

2.2.1 L'erreur et la faute

Bien qu'*erreur* et *faute* soient synonymes dans le langage courant, ces mots ont pris certaines significations particulières en didactique des mathématiques. Cette distinction sous-tend certains critères qui sont devenus importants, voire même fondamentaux, lorsqu'il est question de l'analyse des productions d'élèves par exemple.

Pour plusieurs travaux en didactique des mathématiques (Brousseau, 1998 ; Pellerey, 1987), l'idée que *l'erreur est rationnelle pour la personne qui la réalise au moment où elle se réalise* marque la différence entre l'erreur et la faute. Alors que la faute serait superficielle, voire le résultat d'une inattention, l'erreur aurait des causes conceptuellement plus profondes. Pellerey (1987) souligne en ce sens que la faute serait le « symptôme d'un manque de contrôle ou d'attention » (p. 115), alors que l'erreur renvoie à une « manière de connaître, une conception caractéristique cohérente sinon correcte » (*ibid*). D'une manière analogue, Brousseau (2001) marque cette distinction entre erreur et faute en expliquant qu'une « faute est une erreur qui va à l'encontre d'une règle parfaitement connue de celui qui la commet » (p. 8). La faute, comprise comme superficielle, aurait pu être évitée puisqu'elle relève de compréhensions qui sont déjà acquises. Toutefois, l'erreur relève de compréhensions mathématiques plus profondes. Le $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ est compris comme une faute s'il relève superficiellement d'une mauvaise lecture ou encore d'une confusion momentanée. Le $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ est compris comme une erreur s'il relève conceptuellement d'une technique d'addition qui s'est déjà révélée fonctionnelle. Ce rationnel sous-jacent à l'erreur, amenant à la différencier de la faute, fait voir que les erreurs ont des racines profondes et même possiblement stables. Le rationnel investi dans les erreurs en fait des productions mathématiques qui perdurent dans le temps. À ce sujet, Brousseau (1976) précise que les « erreurs ne sont pas dues au hasard. Fugaces, erratiques, elles sont reproductibles et persistantes » (p.105).

Cette distinction entre erreur et faute en didactique des mathématiques souligne que *l'erreur est un résultat et un processus menant à ce résultat*. Si, au niveau de leurs manifestations, la faute et l'erreur sont semblables et même indécidables, c'est le moment où celles-ci sont réalisées qui leur donnera le statut d'erreur ou de faute. Ce besoin d'investiguer le rationnel sous-jacent aux erreurs mis en avant en didactique des mathématiques, par exemple par Bednarz (1987), permet d'insister sur la temporalité entourant l'erreur étant non seulement un résultat mathématique inexact, mais étant aussi l'aboutissement d'un processus cohérent, bien qu'erroné. Pour un même résultat mathématique, par exemple $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$, c'est une compréhension du processus rationnel (ou pas) ayant mené à ce résultat qui déterminera son statut d'erreur ou de faute mathématique. Bien que l'erreur et la faute soient toutes deux *des états de comparaison avec une réponse attendue*, c'est l'investigation du rationnel derrière leurs manifestations qui donne un sens à l'erreur en didactique des mathématiques.

La distinction entre erreur et faute en didactique des mathématiques souligne aussi que *l'erreur est relative à un cadre de référence*. Le rationnel sous-jacent aux erreurs permet de leur reconnaître une force mathématique. En effet, tel que le souligne Brousseau (1976), les erreurs révèlent « une manière de connaître, cohérente, sinon correcte, ancienne et qui a réussi dans tout un domaine d'action » (p. 106). Rappelant le courant humaniste présenté à la section 1.2.2, l'erreur est une « connaissance qui a fait ses preuves » (IREM d'Aquitaine, 2013, p. 8). Ceci implique que l'erreur, contrairement à la faute, l'erreur admet un cadre mathématique où celle-ci peut être valide, mais qui dévie de ce qui est attendu.

La distinction entre erreur et faute pointe finalement aussi sur l'idée que *l'erreur est un jugement* a posteriori. Dans l'action, lors de leur travail mathématique, les élèves ne commettent pas des erreurs de façon intentionnelle. Ceux-ci agissent de manière rationnelle et c'est après coup, en fonction de certaines attentes ou normes, que ce qu'ils ont fait est identifié comme une erreur. L'importance du rationnel sous-jacent amène à reconnaître que l'addition de fractions $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ n'est pas une erreur pour la personne qui la commet au moment même de l'addition, mais elle devient erreur lorsqu'une norme mathématique vient questionner sa validité *a posteriori* de sa réalisation.

La considération du cadre mathématique restreint à l'intérieur duquel un résultat ou un raisonnement mathématique est valable et en dehors duquel il devient erreur *a posteriori* constitue un critère important en didactique des mathématiques pour définir l'erreur. Ce cadre mathématique permet d'insister sur la relativité des erreurs en mathématiques, car dans un autre cadre, ces erreurs seraient possiblement jugées autrement. Ces dimensions mettent en avant une seconde couche de compréhension à la relativité de l'erreur, appelant au concept de domaines de validité mathématique.

2.2.2 Les domaines de validité mathématiques

Le rationnel sous-jacent à l'erreur a été souligné comme un élément central de la compréhension du concept d'erreur en didactique des mathématiques. En tant que connaissances limitées ou encore connaissances qui ont déjà fait leurs preuves, les erreurs sont jugées erreurs selon le cadre mathématique considéré. En même temps, elles pourraient admettre un cadre mathématique dans lequel elles seraient possiblement valides. En didactique des mathématiques, ce cadre particulier est appelé domaine de validité mathématique (Adihou, 2011). Attachant la validité d'une production mathématique au cadre dans lequel celle-ci est considérée, le concept de domaine de validité permet de spécifier de quelles façons *l'erreur est relative à un cadre de référence*.

Le concept de domaine de validité souligne que l'erreur n'est pas fausse dans l'absolu. L'erreur admet un certain domaine où elle s'est montrée préalablement valide, mais en dehors duquel elle devient erreur. À cet effet, Brousseau (2009) définit l'erreur comme « une déclaration contradictoire avec un certain contexte accepté au préalable » (p. 4). Faisant écho au concept de « norme » ou de « dogme » duquel l'erreur s'écarte, tel que retrouvé dans les définitions des dictionnaires, l'erreur est relative à un nouveau cadre mathématique dans lequel elle est envisagée et pour lequel elle n'est toutefois plus valide. Par exemple, si la technique d'addition où les nombres présents sur une même ligne sont additionnés entre eux fonctionne dans le cas des entiers, cette technique est erronée dans le nouveau domaine des fractions parties d'un même tout. Ainsi, c'est en dehors de leurs domaines de validité que les mathématiques en viennent à être considérées des erreurs.

Le cadre mathématique dans lequel les résultats mathématiques sont envisagés a une importance particulière concernant la validité (ou non) qui est accordée. Brousseau (2009) ira même jusqu'à affirmer que « hors de tout contexte un énoncé n'est ni vrai ni faux » (p. 4). Ceci implique que c'est le cadre mathématique considéré, dans lequel une idée ou une compréhension est envisagée, qui contribue à produire le vrai ou le faux. D'une manière connexe, Smith et al. (1993) expliquent que c'est dans la reconnaissance des limites et forces des raisonnements que ceux-ci deviennent valides. Ceci signifie que, dans l'absolu, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ n'est ni vérité, ni erreur. Une fois que le domaine des ratios ou des fractions est « choisi », alors elle peut prendre le sens de vérité ou d'erreur. C'est dans ce pairage entre le résultat mathématique lui-même et le cadre mathématique dans lequel il est envisagé que le statut d'erreur prend forme. En ce sens, l'erreur est relative à son cadre mathématique.

Finalement, le concept de domaine de validité permet de voir que ces cadres mathématiques dans lesquels les productions sont (in)valides ne vivent pas non plus dans l'absolu. En effet, si différents contextes coexistent et donnent une relativité à l'erreur en mathématiques, le choix sur ces cadres est aussi empreint d'une certaine relativité. À ce sujet, Brousseau (2009) explique que « [ce] contexte est celui d'une culture ou plus généralement celui d'une action en cours » (p. 4). Ceci signifie que ces cadres mathématiques rendant les résultats des erreurs sont inscrits dans un temps, dans une époque. Ils correspondent aux habitudes et aux pratiques qui sont valorisées dans une certaine communauté, dans une certaine culture. L'addition $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ fait réagir avec raison parce que les pratiques à l'école veulent que cette addition fasse référence à des fractions qui sont, par habitude, relatives à un même tout et non à des touts différents ou à des ratios.

Cette culture mathématique amenant à identifier des erreurs est une force pour les mathématiques, où il devient possible d'avancer sans s'arrêter pour faire des choix à chaque étape d'une résolution. Lorsque l'addition $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ réfère, par habitude, à des fractions parties d'un même tout, la réponse est $\frac{5}{6}$ sans avoir à définir chacun des éléments de la question. Ce cadre devient un allant de soi. Toutefois, le concept de domaine de validité fait prendre conscience que ces choix, ces cadres, sont souvent culturellement implicites comme le dit Brousseau et confèrent alors une seconde couche de relativité à l'erreur. En effet, si ces choix sont faits par une personne qui prône, de manière implicite ou explicite, une certaine culture mathématique, l'erreur en mathématique devient relative au contexte dans lequel elle est envisagée qui est lui-même relatif à la personne qui l'envisage. Cette seconde couche de relativité de l'erreur fait intervenir le concept d'observateur de Maturana.

2.3 Conceptualisation de l'erreur : l'observateur

Le concept de domaine de validité attaché à l'erreur permet d'expliciter que le statut d'erreur est relatif à certains cadres mathématiques dans lesquels les idées et raisonnements mathématiques sont envisagés. Toutefois, ces contextes n'existent pas dans l'absolu, mais plutôt dans des choix culturels (souvent implicites). Cette seconde couche de relativité de l'erreur (relativité *au* cadre, relativité *du* cadre) fait écho au concept d'observateur de Maturana (1987). Ce dernier ramène les distinctions qui sont faites sur le monde, par exemple le statut d'erreur, à la personne qui opère ces distinctions, à l'observateur.

Le concept d'observateur amène à voir que les distinctions qui sont faites sur le monde, comme lorsqu'une erreur est identifiée, sont intrinsèquement liées à l'observateur qui fait ces distinctions. Ces distinctions ne vivent pas dans l'absolu. Dans Maturana et Varela (1987), cette relation entre l'observateur et l'observé est présentée de cette façon :

> Everything is said by someone. Every reflection brings forth a world. As such it is a human action by someone in particular in a particular place. (pp. 26-27)

Ceci met en évidence que chaque fois qu'une distinction est faite, celle-ci est faite par quelqu'un. Cette position, toute simple, comporte de fortes implications lorsque vient le temps de donner un sens à la notion d'erreur en mathématiques. Ceci attache le statut d'erreur à la personne qui reconnaît une erreur dans une certaine production mathématique. En effet, lorsque $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ est identifiée comme erreur, c'est qu'une personne reconnaissant un certain domaine de validité à la stratégie d'addition déployée considère cette addition dans un domaine où celle-ci n'est plus valide, comme celui des fractions parties d'un même tout.

Maturana (2004) précise que ce qui est vu par l'observateur — par exemple l'erreur — est attaché à, voire déterminé par, l'observateur lui-même et sa structure : « When you see something, the act of seeing is in fact an act or a process that entails an experience determined in the structure of the observer » (p. 4). Ceci fait écho à Brousseau (2009), cité plus tôt, qui explique que les contextes mathématiques dans lesquels les idées et compréhensions sont considérées erreurs font partie d'une culture mathématique qui promeut certaines manières de faire en mathématiques. Cette culture mathématique qui agit comme référent mathématique prend forme à travers les pratiques mathématiques des personnes, des observateurs, qui sont les actants de cette culture, qui l'alimentent et qui la font progresser. L'observateur de Maturana met en lumière que ces références aux domaines de validité des résultats mathématiques ne se font pas dans l'absolu, mais qu'elles se font à partir d'un observateur qui rend ces distinctions possibles en référence à une certaine culture mathématique. Le statut d'erreur de $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ est jugé par un observateur qui peut y reconnaître une contradiction avec ses propres référents mathématiques, avec sa propre culture, où une tâche de fractions comme $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ fait habituellement référence à des fractions d'un même tout, par exemple. En attachant la relativité des erreurs à l'observateur comme acteur d'une certaine culture mathématique, le concept d'observateur apporte une couche de compréhension supplémentaire à la relativité de l'erreur en mathématiques.

Dans la section 1.1 relative à l'origine du questionnement, une situation vécue dans un cours de mathématiques est détaillée. Dans cet exemple, il est expliqué comment une « même » erreur, dans des contextes différents (une classe du secondaire et un cours de mathématiques universitaire) peut entraîner des interventions très contrastées. Il a été discuté que ce jugement porté sur les résultats mathématiques est en fonction d'un cadre mathématique — les raisonnements, stratégies et réponses mathématiques attendues — s'inscrivant aussi dans une certaine culture mathématique où des pratiques, par exemple la factorisation, ont un statut et un sens particulier. Toutefois, ce jugement est aussi teinté par les dimensions contextuelles entourant la manifestation de l'erreur, par exemple, le rôle d'enseignante dans un cours de mathématiques au secondaire ou le rôle d'étudiante dans un cours de mathématiques universitaire. Dans cet exemple détaillé, bien qu'il s'agisse de la « même » erreur de factorisation, les contextes différents de leurs manifestations expliquent les perspectives bien différentes soutenues vis-à-vis elle. Cette « même » erreur qui devient dans le cas de la classe du secondaire une compréhension mathématique à travailler et dans le cas du cours universitaire une simple inattention à ignorer, rappelant la distinction entre erreur et faute mentionnée plus haut. De ceci ressort que la personne jugeant l'état d'erreur ne le fait pas sans faire certaines nuances au niveau du contexte de sa manifestation. Maturana (1987) explique de manière imagée la dimension changeante et évolutive de ce qui est jugé comme (in)satisfaisant par l'observateur :

> When a child comes to his or her mother and asks "where do I come from?" the mother provides an explanation. Now, throughout history the answer provided by mothers have changed. When I was a little boy, mother used to tell about the bees and the flowers and things of the sort, and we children would go away to play, completely— until the next day. That was an explanation for a child, at least until the next day, when either the same question or a new one arose, because the explanation that had been given was no longer satisfactory. (pp. 66-67)

Ce qui est satisfaisant est appelé à bouger selon des attentes façonnées par le contexte entourant l'erreur, soit la personne ayant fait l'erreur, la relation entre l'observateur et cette personne, le contexte mathématique de sa production, etc. Dans le cas de l'erreur de mon professeur d'université, l'intervention sur l'erreur dans le cours n'a pas semblé importante à cause de mon statut d'étudiante dans son cours, du contexte de mathématiques avancées dans lequel cette erreur de factorisation a été commise et du statut de mon professeur que je suppose en mesure de factoriser des polynômes. Dans le cas d'une classe au secondaire, mon statut d'enseignante, le fait que la factorisation est l'objet de l'apprentissage de la classe et que les élèves ont besoin d'être encadrés dans ce processus aurait possiblement orienté mes interventions autrement. Ces attentes mathématiques ne sont en ce sens pas complètement stables et immuables, elles évoluent et se transforment au fil du temps et en fonction des contextes mathématiques où elles sont rencontrées.

Cet observateur qui juge des propositions mathématiques selon son cadre de référence mathématique, qui est inscrit dans une certaine culture mathématique et dans un certain contexte, permet finalement de revenir sur la distinction faite voulant que *l'erreur est un jugement* a posteriori. Le concept d'observateur implique un décalage entre le moment où une proposition mathématique est réalisée et le moment où celle-ci est jugée erreur. En ramenant l'idée du rationnel sous-tendant les erreurs, Proulx et Savard (2016) soulignent que, dans l'action, les élèves ne commettent pas d'erreur, mais que c'est plutôt un observateur qui, après coup, juge de leurs propositions mathématiques :

> Conséquemment, ce n'est pas l'élève qui fait l'erreur, mais ce sont plutôt les autres, les parents, les enseignants, les chercheurs (ou encore l'enfant lui-même), après coup, qui perçoivent ce qui a été fait comme étant une erreur. Mais, ce jugement sur l'action de l'élève est toujours après coup, *a posteriori*. (p. 3)

C'est de façon externe à une action qu'un observateur, qui peut être la personne elle-même jugeant de sa propre action, produit la distinction d'erreur. Les erreurs sont observées selon un décalage qui amène à voir que les « erreurs » des élèves sont le fruit d'un travail mathématique légitime. Le concept d'observateur permet de détacher le statut d'erreur du moment où celle-ci est réalisée par un élève amenant à voir que les élèves, dans l'action, ne commettent pas d'erreurs. En ce sens, le concept d'observateur amène à faire le pont avec la perspective productive de l'erreur qui est investiguée dans ce projet de maîtrise. Parce que l'observateur amène à détacher, dans le temps, le moment où un résultat mathématique est réalisé et le moment où le statut d'erreur lui est accolé par un observateur, l'erreur devient une production mathématique à part entière qu'il vaut la peine de comprendre mathématiquement.

2.4 Conceptualisation de l'erreur : synthèse

Il ressort de cette investigation du concept d'erreur certains points importants à souligner pour la manière d'envisager l'erreur dans ce projet de maîtrise. D'abord, dans le statut d'erreur, coexistent le moment où l'erreur est identifiée et le moment où elle est réalisée, permettant d'inscrire le concept d'erreur dans une temporalité en deux temps. Des caractéristiques particulières ont été attachées à ces deux temps soulignant que bien que l'erreur soit état de comparaison avec une réponse attendue par une personne qui la juge erreur, celle-ci découle d'un processus rationnel pour la personne qui la réalise au moment où elle se réalise.

Cette conceptualisation de l'erreur spécifie les attentes mathématiques menant à ce statut d'erreur. Ces attentes prennent forme selon certains cadres de référence mathématiques dans lesquels les propositions mathématiques ont un statut de vérité. Le concept de domaine de validité mathématique, c'est-à-dire les cadres de références mathématiques à l'intérieur desquels les résultats mathématiques sont vrais et à l'extérieur desquels ils sont faux, ressort comme expliquant le statut d'erreur attribué à un résultat mathématique. Il se dégage aussi que ce cadre de référence mathématique prend sens dans une certaine culture mathématique dans lequel des pratiques mathématiques (concepts, méthodes, raisonnements, etc.) ont un sens et un statut particulier. Ces référents mathématiques, implicites ou explicites, amènent à donner une valeur plus ou moins grande à certains raisonnements ou idées amenant à voir des erreurs dans certains résultats mathématiques. Finalement, ces cadres et cultures mathématiques sont ceux d'un observateur qui, par les distinctions qu'il fait, promeut une certaine manière de faire en mathématiques. Il en résulte que l'erreur en mathématiques est relative à ces cadres de références rendus légitimes par certaines cultures mathématiques, qui prennent forme à travers un observateur donnant (ou non) le statut d'erreur à un résultat mathématique.

Cette conceptualisation de l'erreur a aussi permis de comprendre l'erreur comme une production rationnelle pour la personne qui la commet au moment où elle est commise. L'erreur n'est pas la conséquence d'une inattention ou d'un oubli, mais plutôt le résultat d'un travail légitime de la part de la personne qui la commet. Ce dernier point amène à noter que, dans l'action, les élèves ne commettent pas d'erreurs, ils agissent de manière cohérente à un rationnel qui sous-tend leurs actions. De ceci, se dégage que l'erreur a un statut *a posteriori* à sa production. Dans l'action, les mathématiques sont réalisées de manières cohérentes et c'est après coup qu'un observateur leur confère le statut d'erreur.

Ces distinctions amènent à emprunter une expression à Maturana (1988) et à placer mon objectivité « entre parenthèses » pour cette recherche. Les précédentes distinctions dégagent une relativité de l'erreur qui peut remettre en question le statut qui leur est attribué. Afin de tenir compte de ces diverses couches de relativité attachées aux distinctions faites par un observateur, Maturana parle d'une objectivité entre parenthèses. Ces parenthèses permettent de faire des distinctions tout en soulignant que les choses pourraient être considérées autrement, que le statut d'erreur attribué à une proposition mathématique n'est pas dans l'absolu et qu'il est attaché à la personne qui lui attribue ce statut :

> The assumption of objectivity, objectivity without parenthesis, entails the assumption that existence is independent of the observer, that there is an independent domain of existence, the *universum*, that is the ultimate reference for the validation of any

> explanation. […] Contrary to all this, objectivity with parenthesis entails accepting that existence is brought forth by the distinctions of the observer, that there are as many domains of existence as kinds of distinctions the observer performs: objectivity in parenthesis entails the *multiversa*, entails that existence is constitutively dependent on the observer, and that there are as many domains of truths as domains of existence she or he brings forth in her or his distinctions. (Maturana, 1988, p. 5)

La suivante section présente une analyse d'erreurs provenant de l'histoire des mathématiques faisant ressortir leurs retombées mathématiques. Ceci apporte des premières réponses théoriques à mes questions de recherche sur la nature de la productivité des erreurs dans la classe de mathématiques.

2.5 Les retombées productives des erreurs pour la discipline mathématique

Le développement des mathématiques contient plusieurs exemples où les erreurs se sont montrées productives pour la discipline, soit qui ont participé à la production de mathématiques. En ayant stimulé le travail mathématique, les erreurs ont façonné le développement de la discipline en générant, voire même forçant, le développement de concepts, théorèmes, méthodes, théories, etc. L'histoire des mathématiques offre en ce sens des cas spécifiques où les erreurs ont été productives pour les mathématiques. Dans cette section, une analyse de cinq erreurs provenant de l'histoire des mathématiques est réalisée, dégageant pour chacune une retombée productive pour les mathématiques. Ce regard sur l'histoire souligne que les erreurs ont permis de : (1) prendre des décisions pour les mathématiques, (2) raffiner des objets mathématiques, (3) créer de nouveaux objets mathématiques, (4) établir des domaines de validité mathématiques et (5) continuer à avancer dans la résolution mathématique.

2.5.1 Prendre des décisions mathématiques : le cas de la cardinalité des ensembles infinis

L'infini est un concept qui a causé beaucoup de controverses en mathématiques. La simple idée de le considérer en tant que concept mathématique n'a pas été acceptée avant plusieurs siècles (Kline, 1980). En particulier, les contradictions provenant des manières d'étendre les connaissances du domaine du fini à celui de l'infini ont posé plusieurs problèmes aux mathématiciens. Elles font partie des raisons pour lesquels des grands efforts de conceptualisations ont dû être déployés afin d'arriver à accepter l'étude de l'infinitésimal comme branche reconnue des mathématiques. Certaines de ces contradictions font d'ailleurs l'objet de plusieurs paradoxes connus (e.g., le paradoxe de Zénon, le paradoxe de l'hôtel infini d'Hilbert). Bien qu'aujourd'hui ces paradoxes puissent être vus comme des raisonnements qui surprennent et qui font même sourire, certaines de ces contradictions se sont cependant montrées plutôt problématiques au cours de l'histoire des mathématiques. C'est le cas, par exemple, de la question de la cardinalité des ensembles infinis. Tel que le détaille Borasi (1996), les raisonnements employés pour comparer la cardinalité d'ensembles finis ont engendré certains problèmes lorsqu'ils ont été utilisés (de manière erronée) dans le contexte d'ensembles infinis.

Borasi (1996) fait état de deux raisonnements valables et qui coexistent pour comparer la cardinalité de deux ensembles finis :

(1) One-to-one correspondence criterion: If we can find a one-to-one correspondence between the elements in the two sets, then we can conclude that they have the same number of elements.
(2) Part-whole criterion: If we can show that one set is a proper subset if the other (i.e., all its elements also belong to the other set and in addition the other set has elements that the first doesn't have) or, alternatively, that one set can be

> put into one-to-one correspondence with proper subset of the other, then we can conclude that the two sets have a different number of elements. (p. 54)

Par exemple, ces raisonnements permettent de comparer sans problème la cardinalité des ensembles finis A et B, comprenant respectivement les facteurs de 4 soit A={1, 2, 4} et les facteurs de 8 soit B={1, 2, 4, 8}. À partir du *one-to-one correspondence criterion*, il est possible de conclure que l'ensemble A et l'ensemble B n'ont pas la même cardinalité puisqu'il n'est pas possible d'associer chaque élément de B à un élément différent de A. Avec le *part-whole criterion*, il est possible d'obtenir une conclusion similaire soit que l'ensemble B a une cardinalité plus grande que A puisque A est un sous-ensemble de B. Jusqu'ici rien ne pose problème et ces deux raisonnements sont valables.

Toutefois, l'utilisation de ces mêmes critères pour comparer des ensembles infinis engendre des contradictions. Borasi (1996) donne les exemples de la comparaison de cardinalité entre l'ensemble infini des nombres naturels N={1, 2, 3,…} et de l'ensemble infini des carrés de ces nombres S= {1, 4, 9,…} et de la comparaison entre les points sur un segment et sur une droite. Ces contradictions apparaissent en reprenant les critères (1) et (2). Pour les ensembles S et N :

(1) *One-to-one correspondence criterion*: Les ensembles N et S peuvent être mis en correspondance un-à-un. Par exemple, chaque nombre naturel de l'ensemble N est associé à son carré dans S : 1 est associé avec son carré 1, 2 avec son carré qui est 4, 3 avec 9, et ainsi de suite. Selon ce critère, il est possible de conclure que les ensembles S et N ont la même cardinalité.

(2) *Part-whole criterion*: L'ensemble S est contenu dans N. Puisque tous les carrés de nombres naturels sont aussi des nombres naturels, l'ensemble S est un sous-ensemble de l'ensemble N. Selon ce critère il est possible de conclure que l'ensemble S est de cardinalité inférieure à celle de l'ensemble N.

Ces deux conclusions sont en contradiction l'une avec l'autre. Pour l'exemple de la comparaison entre un segment AB et une droite *d* :

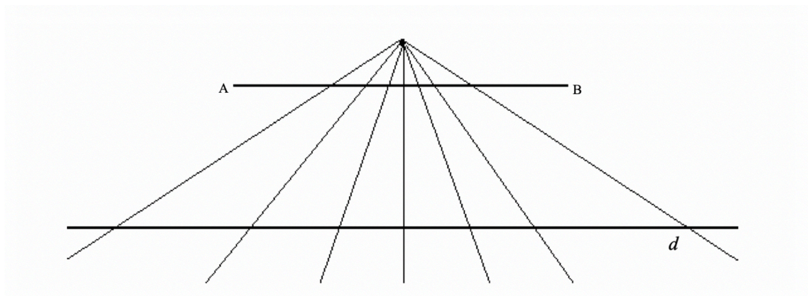


Figure 2.1 Correspondance un-à-un entre un segment AB et une droite *d*

(1) *One-to-one correspondence criterion*: Une correspondance peut être établie entre chacun des points du segment AB et la droite *d* tel que l'illustre la Figure 2.1 inspirée de Borasi (1996). L'ensemble des points du segment et l'ensemble des points de la droite *d* sont donc égaux.

(2) Part-whole criterion: le segment AB peut être vu comme comme un sous-ensemble de la droite permettant de conclure que la droite est un ensemble de points admettant une cardinalité plus grande que celle du segment (voir Figure 2.2).

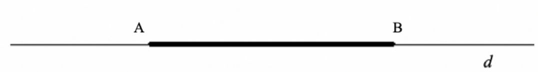


Figure 2.2 Un segment AB comme sous-ensemble d'une droite *d*

Ces contradictions historiques ont été importantes. Elles pointent que l'extension des manières de comprendre les ensembles finis aux ensembles infinis s'avère erronée en mathématiques. Ceci mène à une contradiction, tout comme considérer que ces ensembles ont les mêmes caractéristiques. Cette erreur conceptuelle a toutefois été productive en forçant les mathématiciens de l'époque à *prendre des décisions mathématiques* pour que le travail sur les ensembles infinis se poursuive et soit aujourd'hui une partie intégrante de la discipline.

Borasi (1996), qui retrace l'histoire du développement de cette branche des mathématiques, explique que cette erreur a mené Cantor à trancher sur les manières de comparer les ensembles infinis. Dans ses travaux, Cantor impose le critère mathématique de la correspondance un-à-un pour comparer la cardinalité des ensembles infinis mettant fin aux contradictions à ce sujet. En effet, bien que le mathématicien Bolzano ait, avant Cantor, insisté sur le *part-whole criterion,* la plus grande notoriété mathématique de Cantor a fait du *one-to-one correspondence criterion* qu'il avait choisi, le critère qui s'est mathématiquement imposé au fil des années.

Les contradictions liées à l'erreur initiale de déployer des raisonnements du domaine du fini au domaine infini ont généré le besoin de prendre des décisions pour les mathématiques, amenant Cantor à trancher sur la question. Par ses travaux, il a donné un statut mathématique à une manière de faire complètement arbitraire et qui fait loi en mathématiques. Ceci a, par la suite, permis à toute une branche des mathématiques traitant de l'infinitésimal de se développer formellement et à des concepts comme les différents ordres d'infinités (e.g., Aleph-0, Aleph-1) ou d'infinités dénombrables/indénombrables de se développer. Cantor a aussi pu développer dans ses travaux le concept de nombre ordinal faisant référence à l'ordre conservé ou non des ensembles comparés.

Un regard sur cette histoire du développement de la théorie autour des ensembles infinis montre comment les erreurs initiales ont pu motiver la prise de décisions mathématiques pour permettre aux théories sur les ensembles infinis de continuer de se développer. Cet exemple montre aussi que les erreurs peuvent aussi offrir une base pour que de telles décisions se prennent. Le critère développé par Cantor reprend le *one-to-one correspondence criterion*, initialement problématique, et le réinvestit en termes de balises pour fixer les manières de comparer la cardinalité des ensembles infinis en mathématiques. Les contradictions qu'ont générées les différentes réponses alors possibles pour le problème de comparaison d'ensembles infinis ont poussé à *développer un critère mathématique,* critère qui s'est établi comme une référence pour les mathématiques en jeu. En générant une incertitude quant au résultat à obtenir, les deux réponses possibles pour comparer la cardinalité d'ensembles infinis ont amené à *baliser des manières de faire en mathématiques*. L'encadré suivant offre ce qui se dégage de cette retombée productive des erreurs.

> Les erreurs ont provoqué le besoin de *prendre des décisions pour les mathématiques*. Les contradictions qu'ont soulevé ces erreurs ont mené à *baliser des manières de faire en mathématiques.* C'est en poussant à *définir des critères mathématiques* que ces erreurs se sont montrées productives pour les mathématiques.

2.5.2 Raffiner des objets mathématiques : le cas du développement du Théorème d'Euler sur les polyèdres

Au niveau du développement des mathématiques, le désir de prouver ou de réfuter le Théorème d'Euler a stimulé la communauté mathématique pendant plusieurs siècles. Les multiples contre-exemples réfutant le Théorème d'Euler ont permis, au fil du temps, de raffiner une définition du concept de polyèdre mettant en lumière que les erreurs peuvent permettre de préciser le travail mathématique. Ces erreurs permettent de dégager une productivité mathématique des erreurs qui peuvent amener à *raffiner des objets mathématiques.*

Dans son livre *Proofs and Refutations*, Lakatos (1976) retrace le développement historique du théorème d'Euler. Le théorème d'Euler offre une relation unissant le nombre de sommets (S), le nombre d'arrêtes (A) et le nombre de faces (F) dans les polyèdres reliés par l'égalité suivante :

$$\boxed{S + F - A = 2}$$

Bien que son livre soit construit à partir de dialogues fictifs entre les personnages cherchant à développer une preuve du Théorème d'Euler, l'histoire racontée par Lakatos est inspirée du développement historique réel de la preuve au 17^{e} et 18^{e} siècle. De manière générale, le livre de Lakatos offre une lecture du développement du théorème d'Euler à travers un processus non-linéaire d'allers-retours orientés par la génération de contre-exemples et de réfutations.

Voici un extrait du livre de Lakatos (1976) traduit par Nicolas Balacheff et Jean-Marie Laborde où les personnages discutent du « sort » du Théorème d'Euler. Après avoir trouvé ce qu'ils appellent un « monstre », c'est-à-dire un contre-exemple très problématique pour le théorème, ils se questionnent à savoir si ce contre-exemple réfute ce qui est à ce moment leur conjecture ou s'il faut plutôt ajuster la définition de polyèdre pour exclure ce monstre des solides visés par cette conjecture. Dans une note de bas de page, Lakatos explique que ce contre-exemple a historiquement été généré par le mathématicien Lhuilier en 1812-13. Dans l'extrait, le personnage Delta propose de rejeter ce monstre en transformant la définition de polyèdre. Le contre-exemple en question est illustré à la Figure 2.3 inspirée de la figure proposée par Lakatos (1976, p.14). Il s'agit d'un prisme duquel une partie intérieure (en pointillé) a été retirée. Ayant 16 sommets, 12 faces et 24 arêtes (16 + 12 -24 = 4), ce polyèdre ne vérifie pas la conjecture voulant être prouvée.

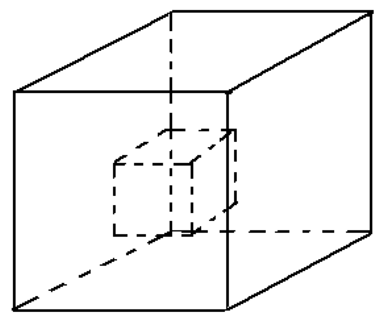


Figure 2.3 Contre-exemple au Théorème d'Euler

Delta : Mais pourquoi accepter le contre-exemple ? Nous avons prouvé notre conjecture, maintenant c'est un théorème. J'admets qu'elle se heurte à ce prétendu « contre-exemple ». L'un ou l'autre doit céder. Mais pourquoi le théorème céderait-il alors qu'il a été prouvé ? C'est la « critique » qui doit battre en retraite, car elle est truquée, cette paire de cubes emboîtés n'est pas du tout un polyèdre. C'est un *monstre*, un cas pathologique, pas un contre-exemple.

Gamma : Pourquoi pas ? *Un polyèdre est un solide dont la surface est constituée de faces polygonales*. Et mon contre-exemple est un solide limité par des faces polygonales.

Le Maître : Appelons cette définition Déf 1.

Delta : Votre définition est incorrecte. Un polyèdre est une surface : il a des faces, des arrêtes, des sommets, il peut être déformé, étiré sur un tableau et n'a rien à voir avec le concept de « solide ». *Un polyèdre est une surface constituée d'un système de polygones*.

Le Maître : Appelons cela : Déf 2.

Delta : Ainsi, de fait, vous nous montrez *deux* polyèdres, *deux* surfaces, l'une complètement à l'intérieur de l'autre. Une femme enceinte n'est pas un contre-exemple à la thèse que les êtres humains n'ont qu'une tête.

Alpha : Ainsi mon contre-exemple fait naître un nouveau concept de polyèdre ! Ou bien iriez-vous jusqu'à soutenir que par polyèdre vous entendez *toujours* une surface ?

> Le Maître : Pour l'instant, acceptons la Déf 2 de Delta. Pouvez-vous maintenant réfuter notre conjecture si par polyèdre nous entendons une surface ? (pp.18-19)

Dans l'extrait, plutôt que de rejeter la conjecture qui s'était déjà montrée valide pour d'autres solides, les personnages proposent de développer une nouvelle définition de polyèdre n'incluant pas ce type de monstre. Lorsqu'Alpha affirme que son contre-exemple a permis « un nouveau concept de polyèdre », il met en lumière que les informations que révèle l'erreur pour la définition de polyèdre orientent le travail sur cette dernière. Historiquement, cette définition raffinée du concept de polyèdre est attribuée à au mathématicien Jonquière, qui protestait contre un courant voulant réfuter le Théorème d'Euler (Borasi, 1996). Dans une note de bas de page, Lakatos (1976) cite le mathématicien qui, en parlant du contre-exemple de Lhuilier, explique que

> such a system is not really a polyhedron, but a pair of distinct polyhedra, each independent of the other… A polyhedron, at least from the classical point of view, deserves the name only if, before all else, a point can move continuously over its entire surface; here this is not the case… This first exception of Lhuilier can therefore be discarded. (p. 16)

En raffinant une définition qui n'inclut pas le contre-exemple de Lhuilier, Jonquière a donné un second souffle au Théorème d'Euler. Il est en ce sens possible de voir que les erreurs, dans ce cas-ci la définition trop large du concept de polyèdre, peuvent préciser le travail mathématique en orientant le raffinement de définitions. En ayant ouvert à la génération et à la considération de ce contre-exemple, cette erreur s'est montrée productive pour les mathématiques en participant à une définition raffinée du concept de polyèdre vérifiant l'égalité $S + F - A = 2$.

Ce court extrait représente bien le processus d'allers-retours entre les contre-exemples générés et les (re)définitions du concept de polyèdre qu'illustre Lakatos dans son livre. En informant et en précisant chaque fois les définitions subséquentes, les réfutations de ces conjectures, erronées, ont mené au raffinement de la définition de polyèdres en tant que solides vérifiant le Théorème d'Euler.

Un regard sur cette histoire du développement de la preuve du Théorème d'Euler montre que les erreurs peuvent motiver le raffinement d'objets mathématiques. Les contre-exemples qu'ont généré les différentes définitions, erronées ou trop larges de polyèdre, ont informé le développement d'une définition plus précise des polyèdres en tant que solides vérifiant le Théorème d'Euler. L'exemple du développement du Théorème d'Euler à travers un processus non-linéaire de preuves et de réfutations montre que les erreurs peuvent amener à établir des compréhensions plus fines des objets mathématiques en jeu comme le concept de polyèdre. L'encadré suivant offre ce qui se dégage de cette retombée productive des erreurs.

> Les informations qu'ont révélées les erreurs sur un problème ont permis de *raffiner des objets mathématiques*. Par la considération de certaines idées sous un autre/nouvel angle, ces erreurs ont *orienté et informé le développement de compréhensions d'objets mathématiques.* Ces erreurs ont été productives pour les mathématiques en amenant à *préciser le travail mathématique*.

2.5.3 Créer des objets mathématiques : le cas du postulat d'Euclide des droites parallèles

Le postulat des droites parallèles d'Euclide a stimulé un travail mathématique important au niveau du développement des théories mathématiques. Des tentatives infructueuses et erronées de le prouver ont mené à la création des géométries non-euclidiennes amenant à voir que les erreurs peuvent permettre la forma(lisa)tion de nouveaux objets mathématiques. Ces tentatives permettent de dégager une productivité mathématique des erreurs qui ouvrent à *créer des objets mathématiques*.

Kline (1980) présente une formulation moderne du postulat des droites parallèles d'Euclide :

> If a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, then the two straight lines if extended will meet on that side of the straight line on which the angles are less than two right angles. (p. 78)

Tant pour son contenu que pour la manière dont il a été formulé, le postulat des droites parallèles d'Euclide a dérangé les mathématiciens pendant plusieurs siècles (Kline, 1980). En effet, des tentatives vaines de le reformuler et de le prouver ont suscité beaucoup d'efforts chez les mathématiciens. Parmi les mathématiciens ayant participé à cette quête, Giovani Girolamo Saccheri (1667-1733) a offert une preuve, erronée, que plusieurs historiens des mathématiques retracent comme étant à l'origine des géométries non-euclidiennes (Borasi, 1996).

Pour prouver le postulat des droites parallèles, Saccheri emploie un raisonnement par l'absurde. Il formule deux hypothèses contredisant le postulat des droites parallèles puis déduit, à partir de ces dernières, une contradiction avec d'autres postulats admis d'Euclide. Arrivant à cette contradiction, il réfute ses hypothèses de départ et tire la conclusion que le postulat des droites parallèles est prouvé. Kline (1980) offre une formulation des deux hypothèses de Saccheri en se référant à une configuration semblable à celle illustrée à la Figure 2.4

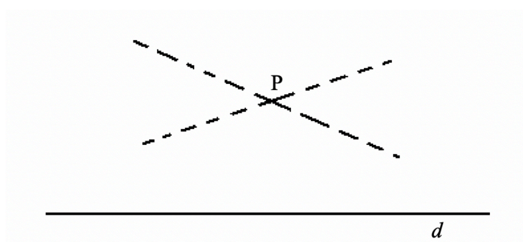


Figure 2.4 Hypothèses pour la preuve erronée de Saccheri du postulat des droites parallèles d'Euclide

> (1) Trought a point P, there are no lines parallel to *d*.
>
> (2) Trought a point P, there are at least two lines *p* and *q* that no matter how far extended do not meet *d*. (p. 80)

Kline explique que plusieurs mathématiciens se sont par la suite attardés à étudier cette preuve. Ils ont toutefois constaté que les contradictions que Saccheri avait soulevées avec les postulats admis d'Euclide n'en étaient pas, rendant sa preuve erronée.

Un regard sur les hypothèses posées par Saccheri permet cependant de dégager une productivité de ces erreurs. Il est possible de reconnaître dans ces hypothèses les fondements de ce qu'ont formalisé les mathématiciens Gauss, Kluger, Lambert, Lobatchevsky et Bolyai comme les géométries non-euclidiennes (Kline, 1980). Les géométries sphérique et hyperbolique définissent en effet des espaces dans lesquels, considérant un point P extérieur à une droite *d*, il n'existe respectivement aucune parallèle à *d* passant par P ou une infinité de parallèles à *d* passant par P rappelant les hypothèses (1) et (2) posées par Saccheri.

L'exemple du la preuve erronée de Saccheri montre que les erreurs peuvent mener à la forma(lisa)tion d'objets mathématiques. La preuve erronée de Saccheri a jeté les bases qui ont transformé, voire même révolutionné, les mathématiques modernes. Ce sont les géométries non-euclidiennes qui ont pu s'établir et se solidifier en tant que branche des mathématiques. Son erreur a échoué à prouver le postulat des parallèles, mais a réussi dans la définition de nouveaux chemins qui ont mené à innover en mathématiques : sa preuve erronée a soulevé de nouvelles possibilités pour les mathématiques, soit la possibilité d'espaces où par une droite *d* et un point extérieur à cette droite il ne passe aucune droite parallèle à *d* et passe une infinité de droites parallèles à *d*. Dans un monde où la géométrie euclidienne était alors *la* géométrie, avoir rendu cette même géométrie un simple cas particulier parmi d'autres possibilités est une innovation mathématique importante. En traçant un chemin amenant à (re)définir ce qu'était la géométrie, l'erreur de Saccheri s'est montrée productive pour les mathématiques. L'encadré suivant offre ce qui se dégage de cette retombée productive des erreurs.

Les nouvelles pistes d'explorations qu'ont permis de définir les erreurs ont *créé de nouveaux objets mathématiques*. Les possibilités ouvertes par les erreurs ont conduit à *(re)définir les objets mathématiques* en jeu. Les erreurs ont été productives pour les mathématiques en menant à la *forma(lisa)tion de nouveaux objets mathématiques.*

2.5.4 Établir des domaines de validité mathématiques : le cas de l'invention des nombres complexes

La question de la racine carrée de nombres négatifs a posé des défis conceptuels et techniques au niveau de la définition mathématique de cette opération. Les manières de considérer ces calculs comme impossibles ou les raccourcis faits pour évaluer leurs valeurs peuvent être considérés aujourd'hui comme des erreurs importantes. Ces erreurs ont toutefois permis de dégager une productivité mathématique où les erreurs peuvent amener à *établir un domaine de validité mathématique*.

Green (1976) retrace les origines du questionnement autour de la racine carrée de nombres négatifs ($\sqrt{-}$) au premier siècle dans les écrits du mathématicien grec Héron. Dans son livre *Stereometria*, Héron s'intéresse au calcul $\sqrt{81-144}$. Pour résoudre cette racine de nombre négatif, Héron transforme l'égalité en une expression raffinée dite équivalente, soit $\sqrt{144-81}$. Cette transformation pourrait aujourd'hui être pointée comme une erreur. En effet, les compréhensions que nous avons aujourd'hui montrent que la racine carrée d'un nombre n'est pas égale à la racine carrée du nombre opposé. Toutefois, à l'époque, l'impossibilité d'opérer associée au calcul de racines carrées de valeurs négatives a engendré toutes sortes de problèmes, résolus de manières parfois insatisfaisantes pour un œil moderne.

Historiquement, les difficultés reliées à la $\sqrt{-}$ ne se sont pas résolues rapidement. Green (1976) explique que c'est à travers un travail de plus de 1750 ans, parsemé d'erreurs comme celle de Héron, que les conceptualisations des nombres complexes connues aujourd'hui se sont établies. En citant des travaux de plusieurs mathématiciens de différentes époques, il explique que ce calcul de la $\sqrt{-}$ a longtemps été vu comme impossible et même comme n'étant pas mathématique. À cet effet, il cite notamment les travaux de Mahavira au 9e siècle disant que « as in the nature of things, a negative quantity is not a square, it has therefore no squareroot » (p. 100), rendant explicite que les $\sqrt{-}$ n'étaient pas des objets d'étude acceptés.

L'existence des nombres complexes aujourd'hui en réponse au $\sqrt{-}$, permet de voir que ces erreurs historiques ont mené au développement d'un domaine de validité pour ce calcul ayant mis du temps à être accepté. L'incertitude reliée aux calculs de $\sqrt{-}$ rencontrées fréquemment dans des équations quadratiques et cubiques a généré un besoin de travail qui a finalement mené à la création d'un contexte dans lequel ces calculs sont *devenus* mathématiquement valides. Green (1976) retrace la première considération d'une solution à la $\sqrt{-}$ à Girolamo Cardano (1501-1576). Il explique que, dans ses écrits, Cardano considère le problème suivant « Split 10 into two parts such that their product is 40 » et offre cette solution :

$$\boxed{x = 5 + \sqrt{-5} \text{ et } y = 5 - \sqrt{-5}}$$

Il s'agit d'une des premières traces d'une solution mathématique faisant intervenir des $\sqrt{-}$ au 16e siècle, alors que l'origine des questionnements autour des racines carrées de nombres négatifs remonte au premier siècle. Cette première considération sérieuse des nombres complexes rend saillante comment le travail erroné au fil des siècles n'a pas été une perte de temps des mathématiciens. Les différentes erreurs, comme celle d'Héron, ont permis au travail sur les $\sqrt{-}$ de continuer et d'en devenir, en passant par Cardano, les nombres complexes tels que compris aujourd'hui.

Ceci permet de voir que des résultats étant interprétés comme des erreurs en mathématiques peuvent mener au développement d'un domaine où ceux-ci sont acceptés. La création des nombres complexes comme domaine de nombre rendant possible et rendant même mathématique le calcul de la racine carrée de nombres négatifs constitue un point tournant dans l'histoire des mathématiques. Le travail, au fil des années, sur ce qui était à l'époque considéré comme une erreur a mené à la définition d'un contexte dans lequel ces erreurs sont maintenant des résultats mathématiques acceptés.

L'exemple du développement des nombres complexes rappelle la perspective mise en avant par Borasi (1996) qui explique que les erreurs en mathématiques peuvent être productives en étant des occasions de définir des contextes dans lesquels elles sont valides. Le travail sur les racines carrées de nombres négatifs ayant historiquement posé problème et ayant même été considéré comme une erreur a mené à la définition d'un domaine de validité pour le calcul de $\sqrt{-}$. En ne répondant pas au cas général, les manières insatisfaisantes de comprendre l'opération racine carrée de l'époque ont mené à la définition du cas particulier des nombres négatifs à travers l'établissement du domaine de validité que représentent les nombres complexes. L'encadré suivant offre ce qui se dégage de cette retombée productive des erreurs.

> Les erreurs en mathématiques ont mené au *développement d'un domaine dans lequel elles peuvent être acceptées*. En ne répondant pas au cas général, ces erreurs se sont montrées des occasions de *définir des contextes dans lesquelles elles sont valides*. Ces erreurs se sont montrées productives pour les mathématiques en permettant d'*établir des domaines de validité mathématique*.

2.5.5 Continuer à avancer dans la résolution mathématique : le cas de la méthode de Fermat pour le calcul de la vitesse instantanée

La question de la vitesse instantanée a historiquement posé des problèmes importants en nécessitant de nouvelles conceptualisations du concept de vitesse. Des erreurs dues aux compréhensions insatisfaisantes de ce qui peut aujourd'hui être compris comme la dérivée en un point ont permis de surmonter des blocages dans les résolutions mathématiques. Une erreur du mathématicien Fermat dans une méthode pour calculer la vitesse instantanée permet de dégager une productivité mathématique des erreurs qui permettent de *continuer à avancer dans la résolution mathématique d'un problème*.

Kline (1980) explique qu'au 17e siècle les compréhensions du concept de vitesse instantanée n'étaient pas assez satisfaisantes pour aborder certains nouveaux problèmes posés, par exemple, par le calcul de la vitesse d'un projectile au moment de son impact. Ce nouveau type de problème concernant une vitesse en un point donné ne peut pas être abordé en divisant la distance parcourue par le temps (vitesse = $\frac{distance}{temps}$). En effet, l'intervalle de temps nul qu'implique le concept de vitesse instantanée engendre des impossibilités de calcul. Ce problème de vitesse instantanée a imposé le développement de nouvelles compréhensions et méthodes pour donner un sens à son calcul.

Tel que le soulignent Kline (1980) et Borasi (1996), ces premiers pas sur la question de la vitesse instantanée ont été marqués par des raisonnements non rigoureux et des méthodes imparfaites. La méthode développée par Fermat pour calculer la vitesse d'une balle en chute libre en un temps donné illustre ce processus approximatif teinté d'erreurs. Reprise de Kline (1980, p. 129) cette méthode est la suivante :

We shall calculate the velocity at the fourth second of a ball whose fall is described by the function

$$(1)\ d = 16t^2$$

When $t = 4$, $d = 16 \cdot 4^2$ or 256. Now let h be any increment of time. In the time 4+h, the ball will fall 256 plus some incremental distance k. Then

$$256 + k = 16(4+h)^2 = 16\,(16 + 8h + h^2)$$

or

$$256 \;+\; k = 256 + 128h + h^2$$

Then, by subtracting 256 from both sides

$$k = 128h + h^2$$

The average velocity in h seconds is

$$(2)\ \frac{k}{h} = \frac{128h + h^2}{h}$$

Fermat was fortunate in the case of this simple function and others he considered in that he could divide the numerator and the denominator of the right side by h

$$(3)\ \frac{k}{h} = 128 + h$$

He then let h be 0 and obtained as the velocity at the fourth second of fall

$$(4)\ d = 128$$

Tel que pointé par Kline, le problème avec la méthode de Fermat se situe aux étapes (3) et (4) de sa démarche. À l'étape (3), il effectue une simplification du h supposant que ce dernier n'est pas égal à zéro : la division par h au numérateur et au dénominateur est acceptable si seulement si h n'est pas égal à zéro. Toutefois, à l'étape (4), il simplifie l'égalité en admettant *h* justement égal à ce zéro. Conceptuellement, cette simplification « illégale » est une erreur importante, car non seulement les valeurs de *h* en jeu soulèvent des contradictions importantes, mais la division par zéro est aussi non-définie en mathématiques et rend sa démarche problématique. Elle révèle toutefois d'une avancée certaine dans la question de la vitesse instantanée qui sort alors de l'impasse décrite plus haut.

La méthode de Fermat, malgré qu'elle soit mathématiquement erronée ou non rigoureuse selon les standards d'aujourd'hui, permet un pas conceptuel important. Sa méthode erronée a donné une existence au concept de vitesse instantanée qui jusque-là avait été problématique. En donnant un sens et en donnant même une valeur à ce nouveau concept de vitesse, la méthode de Fermat a ouvert le chemin aux conceptualisations et aux méthodes de calcul plus rigoureuses qui ont façonné le développement de cette branche du calcul en mathématiques. En tant que premiers pas importants, sa méthode a permis aux pas suivants de se faire, d'avancer, de continuer, en réussissant à développer des algorithmes et méthodes conceptuellement plus solides pour le calcul de la dérivée en un point. En constituant une étape importante dans le surpassement du blocage, son erreur a permis de continuer à avancer dans la résolution mathématique du problème de vitesse instantanée. L'encadré suivant offre ce qui se dégage de cette retombée productive des erreurs.

> Les pas importants qu'ont constituées les erreurs dans l'exploration d'une question ou d'un problème ont *permis aux étapes suivantes de la résolution d'un problème de prendre forme*. En tant que réponses imparfaites, ces erreurs ont *participé au dépassement d'un blocage*. Ces erreurs ont été productives pour les mathématiques en permettant de *continuer à avancer dans la résolution mathématique d'un problème*.

Combinées à la conceptualisation de l'erreur en mathématiques offerte dans ce chapitre, ces cinq retombées productives des erreurs offrent une première réponse théorique aux questions de recherche et servent d'ancrage pour comprendre la nature des retombées mathématiques des erreurs dans la classe de mathématiques. Ces cinq retombées productives des erreurs pour la discipline sont en ce sens réinvesties dans la suite du travail de recherche pour l'analyse de la productivité des erreurs en classe de mathématiques. Le chapitre 3 suivant présente les orientations méthodologiques de ce travail de maîtrise, soit la façon avec laquelle les questions de recherche sont abordées empiriquement.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

Ce chapitre présente la méthodologie encadrant ce travail de maîtrise sur la productivité mathématique des erreurs en classe. Dans un premier temps, les orientations méthodologiques de recherche sont précisées. Ensuite, la nature et la provenance des données qui sont analysées pour répondre à mes questions de recherche sont présentées. Finalement, les outils et la démarche d'analyse sont explicités. Ensemble, ces trois sections présentent la démarche de recherche permettant d'aborder empiriquement les questions de recherche sur la productivité des erreurs en classe de mathématiques.

3.1 Orientations méthodologiques

Ce projet de recherche s'inscrit dans un courant qualitatif/interprétatif. Tel qu'expliqué par Savoie-Zajc (2018), une telle démarche de recherche permet le développement de compréhensions prenant en compte la complexité des phénomènes à l'étude. Ceci est aligné avec les visées de ce projet de recherche qui cherche à développer une compréhension fine des mathématiques qui sont produites à partir des erreurs dans la classe avec les élèves. L'idée n'est pas de répertorier les erreurs ou encore d'étudier leurs occurrences dans la classe, mais plutôt d'investiguer, dans le détail, la nature des retombées mathématiques des erreurs dans la classe. Il s'agit donc d'apporter une compréhension à la dynamique complexe à travers laquelle les mathématiques prennent forme et se transforment à travers l'activité mathématique en classe.

Cette étude des retombées mathématiques des erreurs dans la classe appelle à suivre de près le développement des mathématiques développées dans la classe, c'est-à-dire de porter une attention particulière aux dynamiques internes et interactionnelles de leurs évolutions. C'est alors aussi pour cet enracinement dans le contexte et la temporalité des mathématiques qui sont développées en classe que ce projet de recherche s'inscrit dans le courant qualitatif/interprétatif (Savoie-Zajc, 2018). Cette démarche de recherche se forme dans le but de développer des compréhensions « de l'intérieur » de cette dynamique évolutive des mathématiques développées dans la classe. Les mathématiques étudiées se forment à travers les interactions entre les élèves, des interventions et interactions de l'enseignant, des traces qui sont laissées au tableau, des idées et stratégies qui sont proposées, des gestuelles effectuées, etc. Les retombées productives des erreurs sont ainsi contingentes aux déroulement et développement de ces activités mathématiques et ces retombées mathématiques prennent un sens à l'intérieur même de ce déroulement. La dimension contextuelle des idées et compréhensions mathématiques qui sont développées à partir des erreurs prend ainsi une place importante dans leur étude et dans le sens qui en est produit dans cette recherche.

Cette démarche de recherche se fait aussi dans ce que Savoie-Zajc (2018, p. 207) appelle une logique inductive délibératoire. Une telle démarche consiste à s'appuyer sur le cadre théorique comme point d'ancrage pour étudier et donner un sens aux observations à travers l'analyse. Les retombées productives des erreurs dans la discipline mathématique soulevées au chapitre 2 agissent comme assises théoriques pour guider l'étude de la productivité des erreurs en classe. Ce processus de recherche permet de tenir compte des dimensions théoriques qui agissent ici comme balises pour l'étude, tout en rendant justice à la dynamique évolutive et contingente des idées et compréhensions mathématiques qui sont produites dans l'action de la classe. Ceci veut permettre de dégager un portrait riche des retombées productives des erreurs en classe de mathématiques, portrait enraciné dans le contexte mathématique de leur développement.

3.2 Provenance et nature des données utilisées dans cette recherche

Les questions orientant cette recherche qui vise à investiguer la productivité des erreurs dans la classe de mathématiques appellent à un contexte de classe dans lequel (1) des erreurs sont commises et (2) où ces erreurs ont une place et sont explorées. Les séances de classe analysées sont issues d'un projet de recherche mené par le professeur Proulx au courant de l'année scolaire 2017-2018. Ce projet de recherche porte sur l'activité mathématique déployée par les élèves en contexte de résolution de problèmes.[1] Ayant été amenée, en tant qu'auxiliaire de recherche, à travailler dans le projet du professeur Proulx et à visionner et analyser plusieurs de ces séances, j'ai été à même de leur trouver un grand intérêt pour aborder mes questions de recherche. Dans ces séances de résolution de problème, les élèves sont amenés à proposer diverses stratégies, à les questionner et à les argumenter, qu'elles soient valides ou erronées. Il est donc assez fréquent que les élèves (1) commettent des erreurs et que celles-ci (2) deviennent un sujet d'exploration mathématique pour la classe.

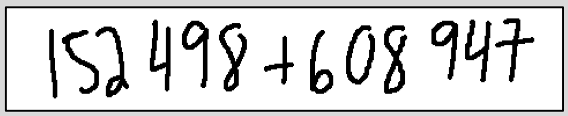
Ces séances de résolution de problème ont été menées et filmées dans des classes du troisième cycle du primaire et du premier cycle du secondaire. Plus précisément, ce travail de recherche a été conduit auprès de cinq types de classes : trois groupes d'élèves en cinquième année du primaire (20-25 élèves), une classe double d'élèves en sixième année (52 élèves), une classe composée uniquement de filles en deuxième secondaire régulier (30 élèves), une classe composée uniquement de garçons en

[1] Voir le recueil issu de ce travail de recherche (Proulx et al., 2019)

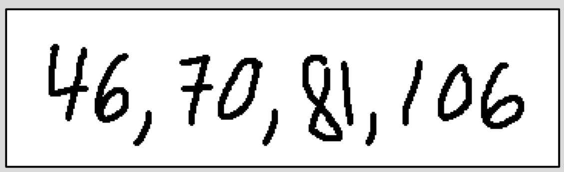
deuxième secondaire (30 élèves) et une classe mixte d'élèves en prolongation de cycle en deuxième secondaire (20 élèves). Les séances de résolution de problème sont d'une durée approximative de 50 minutes pour les classes du primaire et de 75 minutes pour les classes du secondaire. En tout, 56 séances de résolution de problème ont été réalisées durant le projet, à raison d'une séance aux deux semaines par groupe durant 7 mois (octobre 2017 à avril 2018). L'ensemble des 56 séances constituera les données utilisées pour mener cette étude des retombées productives des erreurs en classe de mathématiques.

Le projet de recherche duquel les séances de résolution de problème sont tirées est aligné avec la méthodologie du *Teaching Experiment* développée par Steffe (1991, 2000). Les séances sont particulières au niveau méthodologique, car c'est le chercheur qui assume le rôle d'enseignant où l'enseignement est utilisé comme méthode scientifique d'investigation et de collecte de données. Le chercheur-enseignant a pour intentions scientifiques de questionner les réponses des élèves et de pousser leurs raisonnements. Ce contexte scientifique créé pour explorer les mathématiques des élèves permet bien d'aborder les questions de recherche sur la nature de la productivité des erreurs dans la classe. Les orientations derrière la méthodologie du *Teaching Experiment* font en sorte que les erreurs sont considérées en tant que productions mathématiques authentiques, c'est-à-dire qu'elles sont accueillies, respectées et surtout questionnées au même titre que toute autre production mathématique dans la classe. Les erreurs des élèves sont ainsi explorées à travers des relances du chercheur-enseignant dans le but de mieux comprendre et de pousser les productions et raisonnements mathématiques des élèves. La méthodologie du *Teaching Experiment* rend ces séances particulièrement intéressantes pour mon projet de recherche puisqu'elle s'articule autour d'une prise en compte réelle des mathématiques des élèves (et donc de leurs erreurs) dans le développement et l'avancement des mathématiques qui sont produites en classe. Parce que plusieurs erreurs pourront se produire durant les séances, qu'elles pourront faire partie des résolutions des élèves et seront prises en compte, il s'agit donc d'un site intéressant pour aborder mes questions de recherche sur la productivité des erreurs dans la classe.

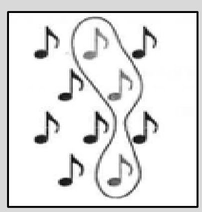
Les tâches proposées aux élèves sont alignées avec ce que Borasi (1986) catégorise comme *exercices* et *word-problems*, c'est-à-dire des tâches mathématiques simples qui sont explorées avec les élèves en classe. L'encadré suivant offre des exemples de diverses tâches données durant les séances de résolution de problèmes.



Estime la somme suivante (5e année)



Lesquels de ces nombres sont divisibles par 2 ? (5e année)



Quelle est la fraction représentée par ce dessin ? (6e année)

$$204 \div 4$$

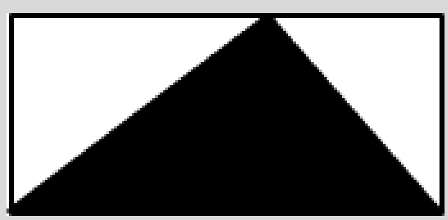
Quel est le résultat de cette division ? (6^e année)

$$\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$$

Résoudre pour x l'équation suivante (2^e secondaire)

Martine a 15,70 \$ en pièces de 25 ¢ et 10 ¢, sachant qu'elle a en tout 100 pièces de monnaie

Trouve le nombre de pièces de chaque sorte ? (2^e secondaire)



Comment se convaincre que l'aire de la partie hachurée est bien la demie de l'aire du rectangle ? (5^e, 6^e et Secondaire 2)

Les séances de résolution de problème suivent plus ou moins le même format et sont guidées par une structure qui s'inspire de celle que propose Douady (1994) :

1) Le chercheur-enseignant offre oralement ou par écrit une tâche à résoudre
2) Les élèves écoutent et résolvent la tâche mentalement ou à l'écrit individuellement ou en sous-groupes
3) Les élèves lèvent la main pour proposer leurs solutions

4) Le chercheur-enseignant demande aux élèves d'expliquer leurs solutions (bonnes ou mauvaises)
5) Le chercheur-enseignant note ces solutions au tableau
6) Les élèves sont invités à questionner à commenter la solution
7) Le chercheur-enseignant invite les élèves qui ont résolu la tâche différemment à offrir leurs solutions
8) Les différentes solutions sont investiguées (et comparées) et le chercheur-enseignant et les élèves discutent de leurs liens, de leurs avantages, de leurs inconvénients, des possibilités qu'elles offrent pour résoudre d'autres problèmes, etc.
9) De nouveaux problèmes émergent de ces discussions ou un autre problème est posé.

Ces neuf étapes non linéaires guident la structure des séances de résolution de problème en classe.

3.3 Outils et démarche d'analyse

3.3.1 Unité d'observation et unité d'analyse

Afin d'aborder les questions de recherche, des extraits où des erreurs sont produites et sont explorées dans les séances de résolution de problèmes sont ciblés. Pour le visionnement de séances, il est utile de clarifier ce que Savoie-Zajc (2018) nomme l'*unité d'observation* c'est-à-dire l'unité représentant « le début et la fin de l'épisode observé » (p. 202). Ces unités d'observation constituent les extraits qui sont d'intérêt pour l'étude en question. Dans le cas de cette recherche, il s'agit de cibler des extraits où des erreurs sont commises et où celles-ci sont l'objet d'exploration mathématique en classe. Voici les étapes guidant l'identification des unités d'observation :

- **Début de l'unité d'observation**
1) Une erreur est commise par un ou des élèves*
2) Cette erreur est prise en compte par la classe
3) Cette erreur devient un sujet de discussion et est explorée par la classe à travers des questions, relances ou réinvestissements
4) Cette erreur n'est plus l'objet de l'exploration de la classe
- **Fin de l'unité d'observation**

*L'identification des erreurs se fait en fonction des questions auxquelles elles répondent. Par exemple, considérant l'addition de fraction suivante « $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$», une production offrant autre chose que la réponse attendue en fonction des attentes de la question, soit la fraction $\frac{5}{6}$ ou une fraction équivalente, est identifiée erreur.

À l'intérieur de ces unités d'observation, l'analyse se centre sur les mathématiques qui sont produites à partir de l'exploration des erreurs (partie 3). Il s'agit de l'*unité d'analyse,* c'est-à-dire l'objet d'étude à l'intérieur de l'unité d'observation (Savoie-Zajc, 2018). Cette clarification est importante, car les unités d'observation ciblées pour le visionnement des séances pourraient apporter des réponses à des questions qui ne font pas l'objet de cette recherche. Par exemple, il serait possible de s'intéresser à la nature des erreurs qui sont produites, à leur origine ou encore au rationnel qui les sous-tend. Toutefois, cette recherche s'intéresse à la nature productive des erreurs relativement aux mathématiques qu'elles peuvent produire dans la classe. Les analyses sont donc centrées sur le point 3 qui constitue les unités d'analyse c'est-à-dire lorsque l'erreur devient un sujet de discussion et est explorée dans la classe. À partir de la grille d'analyse présentée à la Section 3.3.2 suivante, les retombées mathématiques des erreurs sont ciblées et identifiées dans ces unités d'analyse.

3.3.2 Grille d'analyse

Les analyses des unités d'analyse se font à partir d'une grille construite à partir de l'opérationnalisation du cadre théorique au Chapitre 2 sur les retombées productives des erreurs dans la discipline mathématique. Cette grille d'analyse est composée des cinq dimensions suivantes dégageant que les erreurs peuvent permettre de :

(1) Prendre des décisions pour les mathématiques
(2) Raffiner des objets mathématiques
(3) Créer de nouveaux objets mathématiques
(4) Établir des domaines de validité mathématiques
(5) Continuer à avancer dans la résolution mathématique

À ces cinq dimensions s'ajoutent une sixième qui apparaît en filigrane dans l'histoire des mathématiques où les erreurs ont permis de (6) définir de nouveaux problèmes mathématiques. Dans ce qui suit, le Tableau 3.1 présente la grille d'analyse avec un résumé de chacune des dimensions en leur associant des observables relativement à leurs éventuelles présences en classe de mathématiques.

Tableau 3.1 Grille d'analyse des dimensions productives des erreurs en classe de mathématiques

Dimensions productives : l'erreur permet de…	*Description de la productivité*	*Exemples de productivité anticipés en classe (observables possibles)*
(1) Prendre des décisions pour les mathématiques	L'erreur provoque une prise de décision pour les mathématiques. Elle crée le besoin de baliser des manières de faire en mathématiques. L'erreur mène au développement de critères mathématiques.	Une erreur amène les élèves à s'entendre, à développer un consensus, quant à un problème mathématique. Une erreur force les élèves à définir des critères pour (in)valider les réponses.
(2) Raffiner des objets mathématiques	L'erreur mène au raffinement d'objets mathématiques. Elle oriente et informe le développement de compréhensions d'objets mathématiques. L'erreur précise le travail mathématique.	Une erreur ouvre vers une compréhension plus approfondie d'un problème, d'une méthode ou d'un concept. Une erreur questionne et transforme les manières de comprendre les objets mathématiques en jeu.
(3) Créer des nouveaux objets mathématiques	L'erreur provoque la création de nouveaux objets mathématiques. Elle ouvre à la possibilité de (re)définir les objets mathématiques en jeu. L'erreur permet la forma(lisa)tion de nouveaux objets mathématiques.	Une erreur permet de donner un nouveau sens aux concepts, méthodes et algorithmes connus. Une erreur mène au développement d'un objet mathématique.

Dimensions productives : l'erreur permet de…	*Description de la productivité*	*Exemples de productivité anticipés en classe (observables possibles)*
(4) Établir des domaines de validité mathématiques	L'erreur permet l'établissement d'un domaine de validité mathématique. Elle est une occasion pour définir un contexte dans lequel elle est valide. L'erreur provoque le développement d'un domaine dans lequel elle est mathématiquement acceptable.	Une erreur permet définir des cas où elle est valide. Une erreur ouvre à générer des exemples où elle est fonctionnelle.
(5) Continuer à avancer dans la résolution mathématique	L'erreur permet un avancement dans la résolution mathématique. Elle constitue un pas important qui permet aux étapes suivantes de la résolution de prendre forme. L'erreur participe au surpassement d'un blocage mathématique.	Une erreur devient une étape importante dans la résolution d'un problème. Une erreur provoque une sous-étape dans la résolution d'un problème.
(6) Définir des problèmes mathématiques	L'erreur permet le développement de nouveaux problèmes mathématiques. Elle soulève de nouveaux (sous-)problèmes ou de nouvelles (sous-)questions. L'erreur définit de nouvelles pistes de questionnement mathématique.	Une erreur soulève une nouvelle question au sujet d'une stratégie ou d'un raisonnement. Une erreur provoque des questions sur un concept ou une méthode.

3.4 Processus d'analyse

L'analyse des unités d'analyse se fait à partir de la grille présentée à la Section 3.2 qui offre six retombées productives des erreurs et leurs observables en classe de mathématiques. Les 56 séances de résolutions de problèmes en classe décrites à la Section 3.2 sont analysées à partir de cette grille. La démarche d'analyse suit une adaptation du modèle de Powell et al. (2003) qui offre un processus d'analyse de séances vidéo en sept phases. L'adaptation de ces étapes récursives et itératives est explicitée ci-dessous :

(1) *Les visionnements répétés : identification des unités d'observation*

Chacune des séances de résolution de problème est visionnée. Les unités d'observation décrites à la Section 3.3.1 sont ciblées. À travers les visionnements des notes sont prises relativement aux erreurs qui sont commises et à leur impact sur les mathématiques qui sont faites. Ces notes constituent une première couche d'analyse qui sert de fondation au travail d'analyse entrepris. Elles sont réinvesties dans les étapes d'analyse subséquentes en permettant une compréhension globale des unités d'observation.

(2) *La description objective : description des unités d'observation*

Chaque unité d'observation est sommairement décrite. Les idées générales sont dressées et offrent le squelette des mathématiques qui se sont développées dans la classe. Le déroulement de ces extraits, où des erreurs deviennent le sujet d'exploration de la classe dans les séances, est décrit.

(3) *Identification des moments clés : identification des unités d'analyse*

Les unités d'analyse décrites à la Section 3.3.1 sont ciblées. À l'intérieur des unités d'observation, les retombées mathématiques de l'exploration des erreurs en classe sont identifiées. À cette étape, les productions mathématiques permises par les erreurs dans les extraits étudiés sont relevées.

(4) *Transcription des moments clés : description des unités d'analyse*

Des descriptions des unités d'analyses décrites à la Section 3.3.1 sont faites de manière précise. Ces descriptions font ressortir les mathématiques produites et leurs relations avec l'erreur qui a été commise. Les liens de ces mathématiques avec les erreurs sont établis et décrits de manière explicite.

(5) *Le codage des moments clés et (6) la construction de sens : application de la grille d'analyse*

La grille d'analyse présentée à la Section 3.3.2 est utilisée pour faire sens des unités d'analyses identifiées et décrites aux étapes 3 et 4. Ces unités d'analyses sont codées selon les six retombées productives des erreurs soulevées dans la grille d'analyse.

(7) *Composition narrative et interprétative des données : rendu des analyses*

Une vignette est construite pour décrire l'extrait de la séance dans lequel une erreur est commise et explorée. Une description des retombées mathématiques de cette erreur est faite et explicite les liens avec les retombées productives des erreurs pour les mathématiques.

Le rendu de ces analyses fait l'objet des deux chapitres suivants. Le Chapitre 4 présente des analyses d'erreurs issues de la classe de mathématiques, en faisant ressortir leurs retombées productives. Le Chapitre 5 présente ensuite une analyse plus globale des différents enjeux entourant le contexte de la productivité des erreurs dans la classe qui ressort des analyses conduites au Chapitre 4 et aborde le rôle de ses principaux acteurs (enseignant et élèves).

CHAPITRE IV

ANALYSES : LES ERREURS PRODUCTIVES EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES

Dans le but de mieux comprendre la productivité des erreurs dans la classe de mathématiques, les analyses de diverses erreurs issues de différentes classes sont présentées dans ce chapitre. Ces analyses font ressortir la nature des retombées mathématiques de ces erreurs dans la classe en s'appuyant sur les *six dimensions productives des erreurs dans la discipline mathématiques* soulevées dans la grille d'analyse présentée au Chapitre 3, soit où il a été argumenté que les erreurs peuvent permettre de (1) prendre des décisions pour les mathématiques, (2) raffiner des objets mathématiques, (3) créer objets mathématiques, (4) établir des domaines de validité mathématiques, (5) continuer à avancer dans la résolution mathématique et (6) définir des problèmes mathématiques.

Ce chapitre est organisé selon six sous-sections traitant chacune d'une des six retombées productives des erreurs pour les mathématiques. Les retombées productives des erreurs de la grille d'analyse présentée au Chapitre 3 ont permis de catégoriser la productivité des erreurs en classe retenues lors de l'analyse. Toutefois, certaines erreurs auraient pu être mises en lien avec d'autres retombées productives des erreurs. La présentation des analyses suit la même structure : (1) une vignette descriptive d'un extrait de classe dans lequel une ou plusieurs erreurs se produisent est présentée, (2) une description de l'erreur est offerte et (3) une analyse des retombées mathématiques productives de cette erreur en classe est conduite.

4.1 Les erreurs productives qui permettent de prendre des décisions pour les mathématiques dans la classe

Il a été soulevé qu'en étant en contradiction avec une solution souhaitée ou avec d'autres solutions, les erreurs peuvent amener à *prendre des décisions pour les mathématiques.* L'incertitude générée par les erreurs peut être un moteur menant à d*éfinir des critères mathématiques* autour d'une définition, d'un problème ou d'une méthode. En menant et même forçant à *baliser des manières de faire en mathématiques* les erreurs peuvent se montrer productives pour les mathématiques. De manière analogue à l'histoire des mathématiques, ce qui suit suit présente l'analyse d'un l'extrait d'une séance en classe où des erreurs ont amené à *définir des critères mathématiques.*

4.1.1 Vignette descriptive de l'extrait

Dans une classe de 5e année du primaire, les élèves cherchent par calcul mental la réponse à la multiplication suivante écrite au tableau :

$$12 \times 18$$

Après quelques minutes de résolution individuelle, Béatrice offre comme première solution 960. Elle explique avoir fait 12 fois 8 qui lui donne 96 puis avoir multiplié ce 96 par 10 ce qui lui donne un total de 960.

$$12 \times 8 = 96$$
$$96 \times 10 = 960$$

Suite à cette explication, le CE[2] demande aux élèves ce qu'ils pensent de cette solution. Certains approuvent, d'autres sont plutôt en désaccord. Dans un cas comme dans l'autre, les élèves ne sont pas en mesure de formuler des arguments convaincants pour appuyer leurs raisonnements.

Patrick exprime à ce moment avoir 216 comme réponse. Le CE explique toutefois qu'avant de s'attarder à sa nouvelle réponse, il vaut la peine de comprendre le 960 de Béatrice. Une autre élève, Mia questionne alors cette réponse de 960 :

> Mia : Ben déjà 12 fois 12 ça donne 144.
>
> CE : Oh, c'est un bon point ça. Continue donc ce que tu es en train de dire…
>
> Mia : Ça donne 144 puis, il en manque 6 à mettre.
>
> CE : Ok, là ce qu'on a c'est pas 12 fois 12, mais c'est 12 fois 18. Donc il en manque 6.
>
> Mia : Ouais
>
> CE : Parce qu'on l'a fait 12 fois, mais on voudrait le faire 18 fois.
>
> Mia : Après tu fais 6 fois 12, ça fait 72.
>
> CE : Tu as fait 12 fois le 12, il en manquait 6 pour faire 18 fois le 12. Tu as fait ton 6 fois 12 et tu nous dis c'est que ça ensemble (en encerclant 144 et 72) c'est loin de 960.

$$12 \times 12 = 144$$
$$6 \times 12 = 72$$

[2] Chercheur-enseignant

Le CE reprend l'argument de Mia en insistant sur l'idée que ce qu'elle souligne est qu'il « serait surprenant que ce soit 960 » parce que 12 fois 12 donnent 144, que 6 fois 12 donnent 72 et que 144 et 72 ne pourront jamais ensemble donner 960.

Une autre élève, Cynthia, exprime ensuite avoir obtenu la réponse 226. Elle explique avoir d'abord fait 12 fois 6 qui donne 72 puis avoir répété ce calcul trois fois. L'addition de ces trois 72 lui donne 226. Un élève intervient aussitôt pour pointer une erreur dans son addition ce qui permet à la classe de constater que la stratégie de Cynthia mène au 216 que Patrick avait mentionné plus tôt.

$$\begin{array}{r} 12 \times 6 = 72 \\ 12 \times 6 = 72 \\ 12 \times 6 = 72 \\ \hline 216 \end{array}$$

Le CE demande encore au groupe s'ils ont d'autres façons de trouver une réponse à la multiplication 12 fois 18. Charles propose cette nouvelle réponse :

> Charles : Moi j'ai fait 10 fois 10
>
> CE : Ça donne ?
>
> Charles : 100
>
> CE : Ouais
>
> Charles : Après j'ai fait 8 fois 2… ça fait 16. En tout ça a donné 116.

$$\begin{array}{r} 10 \times 10 = 100 \\ 8 \times 2 = 16 \\ \hline 116 \end{array}$$

Le CE souligne qu'à ce stade dans la résolution du problème, ils ont trois différentes réponses pour la multiplication 12 fois 18 : il y a le 960, le 216 et maintenant le 116. Suite à cette intervention, un autre élève explique avoir lui aussi trouvé comme réponse 216. Bien que plusieurs élèves aient trouvé comme solution 216, il n'est pas clair pour le groupe quelle est la bonne réponse pour la multiplication.

Quelques instants plus tard, Marco propose d'arrondir la multiplication 18 fois 12 à 10 fois 20. Alors qu'il explique que le résultat de cette nouvelle multiplication est 200, le CE le questionne pour savoir ce que ce nouveau 10 fois 20 apporte pour la résolution du problème. Marco ne sait alors pas trop quoi répondre. David suggère ceci :

> David : Pour arrondir 12 tu enlèves 2, ça fait 18 et tu le mets au 18 faque ça va faire 20.
>
> CE : Ok
>
> David : Ça fait une multiplication équivalente à 10 fois 20
>
> CE : Donc là, tu es en train de me dire que 10 fois 20 égalent 200 et c'est égal à 12 fois 18.
>
> David : ouais
>
> CE : Donc là ça ne serait plus 216 la réponse ça serait 200.

$$10 \times 20 = 200 = 12 \times 18$$

Un autre élève intervient sur-le-champ pour expliquer que le raisonnement de David ne fonctionne pas parce qu'il « pourrait encore le refaire » en enlevant cinq au 10 et en le rajoutant au 20 pour donner « 5 fois 25 » qui n'est pas équivalent à 10 fois 20.

$$\begin{aligned} &12 \times 18 \\ &10 \times 20 = 200 = 12 \times 18 \\ &5 \times 25 = \underline{125} \end{aligned}$$

Le CE explique qu'en appliquant le raisonnement de David pour générer ce qu'il avait offert comme une « multiplication équivalente » à 12 fois 18, ils se retrouvent avec la multiplication 5 fois 25 qui donne 125. Sur ce, il souligne que le raisonnement de David ne « marche plus bien bien ».

Quelques minutes passent, au cours desquelles les élèves questionnent les diverses solutions ayant été proposées depuis le début de la période. Pour statuer sur la bonne réponse, Xavier offre une manière d'éliminer certaine des réponses déjà formulées. Il exprime ceci à propos du 116 :

> Xavier : Dans le fond, ça se peut pas parce que déjà 12 fois 12 ça donne 144.
>
> CE : Ça c'est pas mal quand même. Alors tu nous dis, c'est une très bonne idée, puisque 12 fois 12 nous donne 144
>
> Xavier : Il manque six 12
>
> CE : Il m'en manque donc ça donnerait plus que 144, puis on a 116… oh…

Le CE explique que Xavier montre par sa stratégie que « quand on a des référents », ces derniers permettent de « juger un peu ce que ça peut donner ». Il explique que la stratégie de Xavier ne donne pas la réponse de 12 fois 18, mais le 12 fois 12 aide à avoir une idée de la réponse attendue. Partant de ce calcul connu, le groupe sait maintenant qu'« une multiplication plus grosse devrait donner plus que 144 ».

Cynthia offre ensuite un autre contre-exemple qu'elle dit « plus facile » à comprendre au raisonnement offert plus tôt par Marco. Elle donne l'exemple de 5 fois 5 qui n'est pas égal à 4 fois 6. Le CE renchérit avec le cas extrême où les cinq unités du 5 lui ont été soustraites et ajoutées au terme de droite transformant la multiplication 5 fois 5 en la multiplication 0 fois 10 qui n'est évidemment pas équivalente.

$$\begin{aligned} 5 \times 5 &= 25 \\ 4 \times 6 &= 24 \\ 0 \times 10 &= 0 \end{aligned}$$

Le retour sur cette stratégie amène le CE à revenir sur l'idée initiale de Marco qui n'était peut-être pas d'offrir une multiplication équivalente, mais plutôt une estimation. Il explique que ce type de stratégie est souvent utilisé « pour se donner une idée » de la réponse et souligne que ce que le 10 fois 20 permet de dire c'est que « la réponse va être autour de 200. » Il conclut en disant que ce 200 « questionne » à nouveau le 960 donné au départ par Marie. L'exploration du 12 × 18 prend fin à ce moment alors que la classe semble s'entendre sur la réponse 216 qui n'a pas été questionnée.

4.1.2 Description de l'erreur

Trois des réponses proposées pour la multiplication 12 × 18 sont des erreurs. Dans chacun des cas, l'erreur est d'avoir considéré une multiplication qui n'est pas équivalente à 12 × 18 :

(1) Le 960 :

$$12\times 8 = 96$$

$$96 \times 10 = 960$$

(2) Le 116 :

$$10 \times 10 = 100 \text{ et } 8 \times 2 = 16$$

$$100 + 16 = 116$$

(3) Le 200 :

$$12 \times 18$$

$$= (12 - 2) \times (18 + 2)$$

$$= 10 \times 20$$

$$= 200$$

4.1.3 Des erreurs qui produisent des critères mathématiques

Cet extrait permet d'illustrer comment les erreurs en classe peuvent être productives en amenant à *prendre des décisions pour les mathématiques.* En étant prises en compte comme réponses potentielles à la multiplication 12 × 18, les réponses 960, 116 et 200 ont poussé la classe à définir des critères mathématiques pour (in)valider les différentes réponses. La considération de ces erreurs a motivé et offert une base pour développer des critères mathématiques locaux et généraux sur la réponse au problème.

Dans l'extrait, l'indécision générée par la considération de plusieurs réponses erronées pour le problème — le 960, le 116 et le 200 — a forcé la génération de critères qui se sont établis comme conditions à remplir pour satisfaire au calcul. Ces critères peuvent être compris comme des informations supplémentaires sur la réponse cherchée amenant à avoir une idée de plus en plus précise de cette réponse cherchée et encore inconnue. Pour (in)valider les réponses, *trois critères mathématiques* ont été développés pour et à partir de ces différentes erreurs.

(1) Critère 1 : la réponse de 12 × 18 est *loin de 960*
La réponse 960 de Béatrice a amené Mia à exploiter des résultats connus de multiplications pour donner un ordre de grandeur du résultat attendu. Elle a d'abord considéré la multiplication 12×12 = 144, puis, en expliquant qu'il manque 6 ×12 = 72 pour arriver au 12 × 18, a expliqué que 144 et 72 paraissent « loin de 960 ».

(2) Critère 2 : la réponse est *plus que 144*
Le 116 de Charles a poussé Xavier à utiliser le produit connu de 12 × 12 = 144 pour expliquer qu'une plus grande multiplication devrait donner « plus que 144 ».

(3) Critère 3 : la réponse est *autour de 200*
Le 200 de David qui a proposé la multiplication 10 x 20 = 200 équivalente à 12 × 18, a amené à mettre en évidence comment le calcul 10 × 20 permet une estimation de la réponse cherchée qui devrait être « autour de 200 ».

Définis pour les erreurs, mais aussi à partir d'elles, ces critères tirent non seulement leur motivation de la présence des erreurs dans la résolution, mais s'appuient aussi sur ces erreurs pour être définis. Les critères « loin de 960 » et « autour de 200 » reprennent même directement les réponses erronées offertes pour le problème et les retournent pour permettre sa résolution. Ces erreurs deviennent en ce sens productives pour les mathématiques parce qu'elles deviennent pour le problème des informations centrales à considérer pour sa résolution et réussir à la valider. Cette exploitation des erreurs comme bases et comme motivation pour formuler des approximations rend saillante leur importance pour les mathématiques qu'elles ont permis de développer dans l'extrait : c'est suite à ces erreurs que ces critères ont été proposés, provoqués par elles.

Pour la résolution du 12 × 18, ces critères mathématiques permettent non seulement de « questionner » certaines des réponses, mais offrent aussi une compréhension différente, voire plus approfondie de la réponse au même problème. Le 216 qui, en répondant aux trois critères, n'a pas été questionné est établi en fin d'extrait comme réponse finale par le groupe. Les critères développés offrent en ce sens un contexte où cette réponse peut être interprétée, validée et prendre un sens : en étant également un nombre « loin de 960 », « plus que 144 » et « autour de 200 », le 216 devient la réponse au problème. Ceci permet de reconnaître une valeur mathématique importante aux opportunités que génèrent les erreurs en permettant non seulement d'invalider certaines réponses, mais en offrant aussi une base pour les interpréter et les valider.

De manière plus large, les erreurs dans l'extrait ont aussi ouvert au développement de critères plus généraux permettant d'encadrer ou de (in)valider les réponses pour d'autres calculs. Lorsque le raisonnement de Xavier utilisant le calcul 12 × 12 =144 pour questionner la réponse 116 est repris pour pointer que « quand on a des référents », ces derniers permettent de « juger un peu de ce que ça peut donner », une manière plus générale de comprendre son critère est offerte. À ce moment la lecture qui est faite du critère développé par Xavier permet de pointer sa dimension plus générale permettant d'encadrer les réponses pour d'autres calculs. C'est ainsi en ce sens que, d'une manière plus large, les erreurs dans l'extrait ont amené à *baliser des manières de faire en mathématiques*. Un peu plus tard dans l'extrait, le retour sur l'utilisation du $10 \times 20 = 200$ pour estimer la réponse au calcul va aussi en ce sens. Lorsque le CE explique que ce type de stratégie est souvent utilisé « pour se donner une idée » de la réponse, il offre une généralisation du critère développé initialement pour le calcul 12×18. La lecture qu'il offre du critère développé à partir de l'idée de Marco a une portée plus large que le calcul dont il est question dans l'extrait et permet d'insister sur les opportunités mathématiques qu'offrent les erreurs dans la classe. La Figure 4.1 résume le mouvement productif des critères mathématiques qu'ont provoqué les erreurs dans l'extrait.

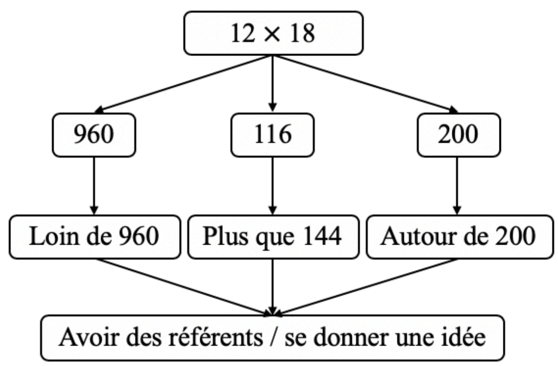


Figure 4.1 Des erreurs qui provoquent le développement de critères mathématiques locaux et généraux pour la résolution

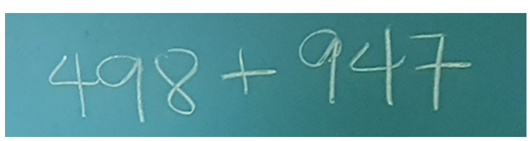
Grâce aux erreurs, des dimensions importantes reliées à la validation de calculs ont pu prendre forme et même être généralisées. L'établissement de ces critères locaux et généraux est une réalisation mathématique importante provoquée par la présence des erreurs. Pour le calcul 12×18 en question, ils ont permis de questionner et de renforcer certaines réponses sans une validation du CE ou encore un recours à la calculatrice. De manière plus générale, ils ont aussi mené à baliser des manières de valider les calculs mathématiques. En étant présentes dans la résolution et en ayant provoqué cette incertitude par rapport à la réponse au problème, les erreurs ont mené à l'élaboration de critères mathématiques.

4.2 Les erreurs productives qui permettent de raffiner des objets mathématiques dans la classe

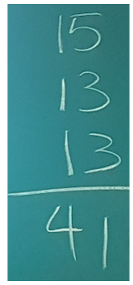
Il a été soulevé que les erreurs peuvent amener à *raffiner des objets mathématiques e*n amenant à considérer sous un nouvel/autre angle des idées ou concepts mathématiques. Les informations que révèlent les erreurs sur un problème peuvent *orienter le travail mathématique* et *informer la compréhension d'idées mathématiques*. En ce sens, en poussant à *préciser le travail mathématique*, les erreurs peuvent se montrer productives pour les mathématiques. De manière analogue à l'histoire des mathématiques, ce qui suit présente l'analyse d'un extrait de séance en classe où une erreur a permis une *compréhension raffinée des valeurs de position*.

4.2.1 Vignette descriptive de l'extrait

Dans une classe de 5e année au primaire, les élèves travaillent à trouver mentalement la somme suivante :



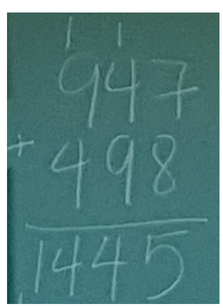
Le CE commence par demander aux élèves s'ils peuvent estimer la réponse. Lambert propose comme solution 1500. Lorsque le CE lui demande d'expliquer sa réponse, il explique qu'ensemble 8 et 7 donnent 15 ; 9 et 4 donnent 13 puis 4 et 9 donnent 13. Le CE note les sommes partielles en colonne au tableau :



Il fait l'addition et arrive à la somme 41. Lorsqu'il écrit 41, Lambert s'empresse rectifier et de dire que ce serait plutôt 4100. Le CE souligne que ce 4100 est « loin du 1500 » qu'il avait initialement offert comme estimation, puis demande aux élèves de prendre un peu de temps pour travailler individuellement dans leurs cahiers sur la somme 498 + 947.

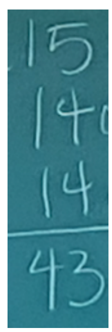
Cinq minutes de résolution individuelle s'écoulent, puis la classe reprend le travail en groupe. Tout de suite, Maryse propose de reprendre le 15, 13 et 13 de Lambert et de les additionner à nouveau. Après avoir fait la somme de 15, 13 et 13, elle obtient 41 auquel elle ajoute un zéro pour faire 410. Elle explique que contrairement à ce qu'a fait Lambert, il faut ajouter un seul zéro au 41 parce que l'addition 498+ 947 « est dans les centaines ».

Une autre élève, Émilie, exprime aussitôt son désaccord avec cette solution. De son côté, elle obtient plutôt la réponse 1445 qu'elle explique en faisant l'algorithme d'addition suivant au tableau :



Il est expliqué qu'elle a d'abord fait 7 plus 8 qui donnent 15 et avoir retenu 1. Ensuite, elle a fait 9 plus 4 qui donnent 13, avoir rajouté le 1 de la retenue qui donne 14 et avoir retenu 1. Puis, Émilie a finalement fait 9 plus 4 qui donnent 13, avoir ajouté le 1 de la retenue qui donne 14. Certains élèves expriment alors que le 1445 est près du 1500 mentionné plus tôt par Lambert. La classe semble alors assez convaincue que le résultat de l'addition 947 + 498 est 1445.

Le CE revient sur les 15, 13 et 13 de Lambert et dit qu'ils pourraient alors « essayer de les trouver » dans le calcul d'Émilie. Félix intervient alors pour dire que, dans les calculs de Lambert et de Maryse, « il manque les retenues ». Pour donner suite à cette idée, le CE propose la nouvelle addition suivante avec les retenues :



L'idée de Lambert les mène maintenant à une somme de 43 ce qui ne règle pas vraiment la question puisque ce 43 est loin du 1445 établit plus tôt comme la réponse à l'addition 947 + 498. Didier formule alors une autre explication :

> Didier : Dans le fond, c'est 498 : c'est des centaines, des unités et des dizaines.
>
> CE : Ok, mais là mon 15 est-ce que c'est bon ?
>
> Didier : Non parce que… oui, ton 15 il est bon. Ton 14 il n'est pas bon.
>
> CE : Mon 13 non plus là…
>
> Didier : Parce que c'est des dizaines, tu corriges. C'est 40 + 90.
>
> CE : Ah, donc c'est pas 4 + 9.

Didier : Non c'est 40 + 90

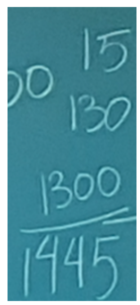
CE : Oh, c'est 4 dizaines et 9 dizaines !

Didier : Ouais

CE : Donc là, mon 13 il est bon, si j'écris dizaines à côté.

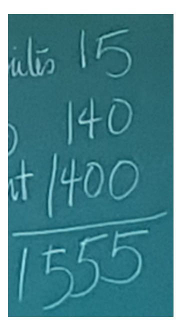
Didier : Le 13 vu que c'est des dizaines tu rajoutes un zéro…

L'échange se poursuit et Didier explique que puisque l'autre 13 représente des centaines « tu rajoutes deux zéros ». Ceci les amène à produire l'addition suivante :

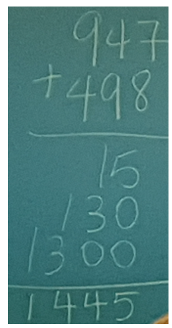


La classe conclut que de cette manière ils arrivent à la même réponse qu'Émilie lorsqu'elle est venue présenter l'algorithme d'addition.

Le CE revient alors sur le commentaire de Félix qui avait mentionné plus tôt que le problème avec le 15, 13 et 13 de Lambert était qu'ils ne tenaient pas compte des retenues. Il reprend le raisonnement de Didier, mais cette fois avec le 15, le 14 et le 14 qui contiennent les retenues. Ces nombres deviennent respectivement 15, 140 et 1400 :



À ce moment le CE demande des explications au sujet du 1555. Il propose alors de faire un lien entre la stratégie de Didier et d'Émilie. Au tableau, il refait alors l'algorithme d'addition proposé par Émilie en reprenant le nouveau 15, 130 et 1300. En additionnant ces trois sommes partielles, il obtient le 1445 attendu :



Pour répondre à la question des retenues soulevées par le CE, Victor exprime que dans ce calcul « les retenues sont quand même là » que ce sont « les premiers uns ». Le CE acquiesce et encercle un de ces « uns » pour souligner où étaient ces retenues que la classe avait précédemment pensées manquantes. Cette intervention clos alors la discussion au sujet de l'addition 498 + 947.

4.2.2 Description de l'erreur

Les 15, 13 et 13 que Lambert offre comme étapes pour le calcul 498 + 947 en début d'extrait sont des erreurs. Précisément, les erreurs sont dans sa manière de parler des trois sous-sommes qu'il considère pour l'addition 498 + 947 :

(1) $8 + 7 = 15$

(2) $9 + 4 = 13$

(3) $4 + 9 = 13$

Son erreur est de ne pas avoir pris en compte la valeur de position ou le type de groupements additionnés soient en (2) des dizaines et en (3) des centaines dans sa verbalisation des différentes sous-sommes. Traduites littéralement par le CE au tableau, ces étapes de calcul erronées ont mené à la considération de la nouvelle addition 15 + 13 + 13, donnant 41 comme somme à 498 + 947.

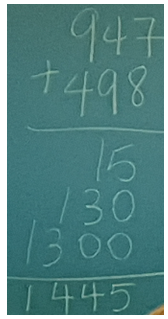
4.2.3 Une erreur qui produit une compréhension des valeurs de position

Cet extrait permet d'illustrer comment les erreurs en classe peuvent être productives en amenant à *raffiner des objets mathématiques*. En étant réinvestie dans une explicitation des valeurs des sous-sommes considérées pour l'addition 498 + 947, l'erreur de Lambert a forcé à développer une compréhension plus fine des valeurs associées aux positions dans l'écriture des nombres, soient les unités, dizaines, centaines. En ayant poussé à revisiter les étapes du calcul 498 + 947, le travail fait autour du 15+13+13 de Lambert a permis une explicitation de ces valeurs pour les calculs et a ouvert à une *compréhension raffinée des valeurs de position*.

Le 15, 13 et 13 de Lambert ont la particularité de ne pas être si loin de l'addition 498 + 947. Ils peuvent même être compris comme les étapes successives de l'algorithme d'addition lorsque celles-ci sont récitées ou exécutées machinalement. Dans l'extrait, ceci transparaît dans les étapes du calcul d'Émilie où le 15, le 13 et le 13 apparaissent presque explicitement : 7 et 8 donnent 15, 4 et 9 donnent 13 et 9 et 4 donnent 13. L'algorithme d'addition standard peut en effet donner l'impression que des unités sont additionnées les unes après les autres et que finalement, ensemble, ces additions sont des additions d'unités qui produisent la somme totale cherchée. Par la manière qu'il organise les sous-sommes successives dans l'espace, l'algorithme traditionnel d'addition se retrouve à gérer implicitement les différentes valeurs associées au positions des nombres additionnées. Le fait que certaines dimensions du calcul soient cachées par le fonctionnement de l'algorithme d'addition n'est certainement pas nouveau, mais permet toutefois d'insister sur ce que les erreurs permettent pour *informer la compréhension mathématique* de certaines de ces dimensions importantes.

Dans l'extrait, une compréhension des valeurs de position des groupements additionnés prend forme à partir justement d'une considération du 15 + 13 + 13 erroné de Lambert pour le calcul 498 + 947 et d'un travail à partir de ce dernier. Par son commentaire lorsqu'il explique que le 15, 13 et 13 considérés plus tôt par Lambert sont plutôt « des centaines, des unités et des dizaines », Didier met en avant une valeur mathématique de l'erreur de Lambert qui provoque ce besoin d'expliciter des valeurs positionnelles des sous-sommes considérées pour l'addition. L'erreur de Lambert et les surprenantes sommes de 41, 4100 ou encore 410, offrent une motivation et une base qui *orientent le travail mathématique* vers l'explicitation de ces valeurs de position. En étant présent dans la résolution, les 15, 13 et 13 de Lambert qui deviennent 15 unités, 13 dizaines et 13 centaines, puis 15 + 130 +1300 amènent à mettre en évidence cette valeur associée aux positions des chiffres pour le calcul.

Cette nouvelle compréhension des valeurs de position permise par l'erreur dans l'extrait est aussi réinvestie dans une reformulation des étapes de l'algorithme standard où encore une fois, les valeurs des sous-sommes considérées sont rendues explicites. En étant encore bien présents et même visibles dans cette nouvelle formulation de l'addition, le 15, le 13 et le 13 de Lambert amènent à une compréhension différente, voire plus approfondie, des étapes du calcul. Précédemment apparentés à des sommes d'unités, les 7 + 8 = 15, 4+9 = 13 et 9+4 = 13 énoncés plus tôt par Émilie deviennent, suite à l'exploration de l'erreur, des sous-sommes d'unités, de dizaines et de centaines :



Ici, l’erreur de Lambert peut être comprise comme une couche de compréhension additionnelle aux sommes partielles et à leurs valeurs dans l’addition. Ces trois étapes décortiquées qui sont laissées implicites dans l’utilisation habituelle de l’algorithme se retrouvent ici explicitées offrant une compréhension plus approfondie de ces étapes. C’est ainsi en ayant amené à *préciser le travail mathématique*, en ayant ouvert à une relecture du calcul à travers l’erreur elle-même, que les 15, 13, 13 de Lambert dans l’extrait offrent un bon exemple pour comprendre comment les erreurs peuvent amener à raffiner des compréhensions mathématiques. La Figure 4.2 résume les retombées productives de l’erreur de Lambert pour la compréhension mathématique des valeurs de position.

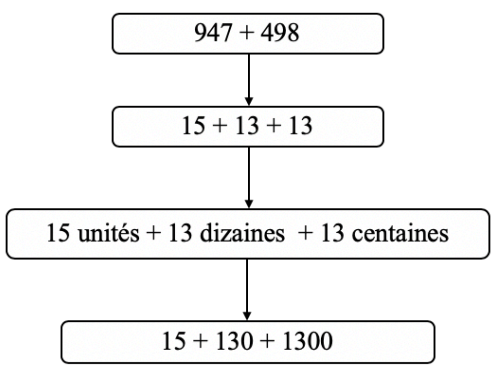


Figure 4.2 Une erreur qui provoque le raffinement d’une compréhension des valeurs de position

L'erreur de Lambert a amené à creuser des compréhensions qui sont non-négligeables pour la compréhension des nombres et la gestion des quantités additionnées. En offrant une manière de revisiter et même reformuler le calcul 498 + 947, son erreur a ouvert à des compréhensions mathématiques importantes sur les valeurs de position et l'algorithme d'addition. C'est par les compréhensions mathématiques raffinées qu'elle a permis de produire que l'erreur dans l'extrait est un exemple qui illustre comment les erreurs en classe peuvent être productives pour les mathématiques.

4.3 Les erreurs productives qui permettent de créer des objets mathématiques dans la classe

Il a été explicité qu'en soulevant de nouvelles distinctions, les erreurs peuvent amener à *créer des concepts, méthodes et théories mathématiques*. Les nouvelles pistes d'explorations mathématiques que peuvent définir les erreurs, peuvent conduire à la *forma(lisa)tion de nouveaux objets mathématiques*. En forçant la *(re)définition d'objets mathématiques*, les erreurs peuvent se montrer productives pour les mathématiques. De manière analogue à l'histoire des mathématiques, ce qui suit présente l'analyse d'un extrait de séance en classe où des erreurs ont mené à *créer une méthode pour la résolution d'une équation.*

4.3.1 Vignette descriptive de l'extrait

Dans une classe de 2e secondaire, les élèves travaillent à résoudre pour x l'équation suivante écrite au tableau :

$$\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$$ [3]

Après quelques instants, Samuel, propose la solution $x = 10$ en expliquant avoir fait le produit croisé. Il explique avoir « dans sa tête » fait « 6 fois 5 divisé par 3 » ce qui lui donne 10 comme valeur de x vérifiant l'équation. Allant dans le sens de la proposition de Samuel, un autre élève, Henri, explique avoir de son côté d'abord fait 5 fois 6 qui donne 30 et s'être ensuite demandé « 3 fois quoi va donner le 30 » ce qui lui donne aussi 10. À ce moment dans la résolution, il semble assez clair pour le groupe que la solution au problème est $x = 10$. Le CE demande toutefois si des élèves ont d'autres manières d'aborder la résolution :

> Thomas : Moi j'ai multiplié le 3 par le 6, ça m'a donné 18 sur 5
>
> CE : Alors tu as multiplié le 3 par 6…
>
> Thomas : Oui
>
> CE : Et là, ça t'a donné 6 sur x est égal à… qu'est-ce que ça te donnait ?
>
> Thomas : Ça m'a donné x égal à 18 sur 5

$$\frac{6}{x} = \frac{3 \times 6}{5}$$

$$x = \frac{18}{5}$$

[3] Dans cette vignette, les extraits de tableaux sont des reproductions de ce qui a originalement été fait lors de la séance en classe avec les élèves.

Le CE reformule alors la stratégie de Thomas en expliquant qu'il a pris le 6 du « 6 sur *x* », a multiplié le 3 par ce 6 ce qui lui a donné la nouvelle égalité « *x* égale à 18 sur 5 ».

Certains élèves expriment leur désaccord avec la stratégie de Thomas en disant qu'elle ne fonctionne pas. Un élève explique que ce n'est pas possible parce que 18 divisé par 5 donne un « nombre à virgule ». En disant que cela ne suffit pas pour rejeter la réponse de Thomas, le CE explique que la solution d'une équation aurait pu par exemple être « 3 reste 3 ». Sandrine intervient alors pour ajuster la proposition de Thomas :

> Sandrine : Si tu fais fois 6 en haut, il faut faire fois 6 en bas aussi.
>
> CE : Ahhhh, pour avoir des fractions équivalentes ?
>
> Sandrine : Oui
>
> CE : Donc là, pour le 3 cinquièmes, si j'ai le droit de multiplié par 6, il faut que je multiplie par 6 ici aussi. Donc là, ça donnerait 18 trentièmes.

$$\frac{6}{x} = \frac{3 \times 6}{5 \times 6} = \frac{18}{30}$$

Le CE propose de continuer la résolution avec ce nouveau 18 sur 30 et demande au groupe s'ils arriveraient à la même réponse soit le 10 énoncé plus tôt. Il écrit la nouvelle équation suivante tableau :

$$\frac{6}{x} = \frac{18}{30}$$

Quelques minutes plus tard, Joseph propose une résolution pour la nouvelle équation :

> Joseph : Si admettons le 18 tu le divises pour que ça donne 6

CE : Ok (il écrit divisé par3 à côté du 18)

Joseph : En bas aussi

CE : Pour garder des fractions équivalentes

Joseph : Alors ça va donner 6 dixièmes

CE : Oh, c'est intéressant ça. Et puis là ?

Joseph : Tu as ta réponse !

$$\frac{6}{x} = \frac{18 \div 3}{30 \div} = \frac{6}{10}$$

Suite à cette intervention de Joseph, en arrivant à la même réponse $x = 10$ obtenue plus tôt pour l'équation, la classe conclue que l'équation a encore une fois été résolue. Le CE insiste alors sur l'idée que la stratégie proposée plus tôt par Thomas fonctionnait, mais « qu'il lui manquait un petit bout ». Il explique que Thomas avait fait une multiplication du 3 par 6 suivie d'une division par 5 (le 18 cinquièmes). Cependant pour conserver des fractions équivalentes, il fallait multiplier par 6 le numérateur et le dénominateur du $\frac{3}{5}$. La séance prend fin sur cette intervention mettant l'accent sur l'importance de conserver des fractions équivalentes pour que la résolution fonctionne.

4.3.2 Description de l'erreur

Dans cet extrait, le « fois 6 » de Thomas utilisé comme opération permettant de trouver directement la valeur de *x* vérifiant l'égalité dans l'équation $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$ est une erreur. Les trois étapes ci-dessous présentent le calcul offert par Thomas pour résoudre l'équation :

$$(1)\ \frac{6}{x} = \frac{3}{5}$$

$$(2)\ \frac{6}{x} = \frac{3 \times 6}{5}$$

$$(3)\ x = \frac{18}{5}$$

L’équation générée par ce calcul en (3) n’est pas équivalente à l’équation de départ. Ainsi, la valeur de x vérifiant cette nouvelle équation soit $x = \frac{18}{5}$ n’est pas la même que la valeur de x vérifiant l’équation initiale soit $x = 10$.

4.3.3 Une erreur qui produit une méthode pour résoudre une équation

Cet extrait permet d’illustrer comment les erreurs en classe peuvent être productives en amenant à *créer une méthode mathématique pour résoudre une équation*. En étant réinvestie pour une résolution de l’équation, le « fois 6 » erronée de Thomas mène vers la formation d’une résolution de l’équation $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$ par génération de fractions équivalentes à $\frac{3}{5}$. Son erreur a amené à envisager un autre (et même possiblement nouveau) chemin pour cette résolution produisant une méthode particulière pour résoudre pour x de l’équation $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$

L’intervention de Sandrine dans l’extrait rend saillante cette importance du « fois 6 » erroné de Thomas pour la résolution de l’équation prend forme. Lorsqu’elle exprime que « si tu fais fois 6 en haut, il faut faire fois 6 en bas aussi », Sandrine propose de rendre utile pour la résolution de l’équation l’erreur de Thomas, son « fois 6 », en le faisant « en bas aussi ». Son intervention montre que son « fois 6 » est une possibilité qui, bien qu’encore incomplète pour résoudre l’équation, ouvre un chemin possible pour la résolution de l’équation. En pouvant être ajustée ou adaptée, son erreur offre une occasion nouvelle pour le problème travaillé. Et par l’ajustement qu’elle propose c’est-à-dire par son « faire fois 6 en bas aussi » pour conserver l’équivalence à la fraction $\frac{3}{5}$, Sandrine propose d'exploiter cette ouverture générée par l'erreur pour former *une méthode mathématique pour résoudre l'équation* dans l'extrait.

Dans la suite des événements, une résolution se dessine à partir de ce « fois 6 » erroné. Suite à l'intervention de Sandrine voulant exploiter le « fois 6 » de Thomas non pas pour résoudre directement l'équation, mais plutôt pour générer une fraction équivalente à $\frac{3}{5}$, la résolution de l'équation pour *x* peut se résumer comme suit :

$$\frac{6}{x} = \frac{3 \times 6}{10 \times 6}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{18}{30}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{18 \div 3}{30 \div 3}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{6}{10}$$

La méthode de résolution de l'équation $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$ vers laquelle a engagé l'erreur de Thomas se distingue d'abord par sa centration sur le côté droit de l'égalité. Plutôt que de travailler sur les deux côtés de l'égalité en même temps et de faire des opérations « légales » usuelles pour former des équations équivalentes comme « fois 2 » ou « moins 5 » des deux côtés de l'égalité, les opérations menant à la résolution de $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$ dans l'extrait ont la particularité d'être axées essentiellement sur la transformation de la partie de droite. Par l'exploitation de la transitivité de la relation d'égalité, différentes équations équivalentes à l'équation de départ $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$ sont produites et permettent une résolution pour l'équation $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$. En ce sens, une lecture de la méthode de résolution présentée dans l'extrait peut être la suivante :

$$\text{Si } \frac{6}{x} = \frac{3}{5} \text{ et } \frac{3}{5} = \frac{18}{30} \text{ alors } \frac{6}{x} = \frac{18}{30}$$

$$\text{Si } \frac{6}{x} = \frac{18}{30} \text{ et } \frac{18}{30} = \frac{6}{10} \text{ alors } \frac{6}{x} = \frac{6}{10}$$

Tout au long de cette résolution, la partie gauche de l'égalité demeure inchangée. C'est lorsque la partie de droite $\frac{6}{10}$ en vient à correspondre avec la partie de gauche $\frac{6}{x}$, rendant explicite la solution pour *x*, que la résolution prend fin. C'est ce que permet de pointer le commentaire de Joseph qui, une fois face à l'égalité $\frac{6}{x} = \frac{6}{10}$ s'exclame « tu as ta réponse ! ». Bien que le *x* ne soit pas isolé dans cette nouvelle équation équivalente à $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$, cette équation est utilisée comme une forme finale par Joseph qui indique à ce moment y voir directement la solution, soit que $x = 10$.

C'est aussi par son exploitation d'une classe de fractions équivalentes à $\frac{3}{5}$ que cette méthode de résolution pour l'équation $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$ se distingue des autres résolutions de la classe. En début d'extrait, les résolutions de Henri et de Samuel par le produit croisé reposent sur l'équivalence directe entre les fractions $\frac{6}{x}$ et $\frac{3}{5}$ pour résoudre l'équation $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$. En effet, en exploitant une propriété des proportions voulant que lorsque deux fractions sont équivalentes, le produit des moyens ($3x$) est égal au produit des extrêmes (6 x 5) les résolutions qu'ils offrent reposent directement sur la relation d'égalité existant dans l'équation entre $\frac{6}{x}$ et $\frac{3}{5}$. La méthode de résolution qu'a permis le « fois 6 » de Thomas ne s'appuie toutefois pas sur cette relation directe entre le $\frac{6}{x}$ et le $\frac{3}{5}$. Elle s'appuie plutôt sur les différentes formes que peut prendre la fraction $\frac{3}{5}$ et l'équivalence de ces différentes formes avec le $\frac{6}{x}$. C'est ainsi non pas directement le $\frac{3}{5}$ et son équivalence avec le $\frac{6}{x}$ qui appuie la résolution, mais plutôt les autres manières d'exprimer ce $\frac{3}{5}$ comme $\frac{18}{30}$ et $\frac{6}{10}$ qui motivent la résolution et la rendent possible.

Dans un mouvement instigué par l'erreur de Thomas, une résolution de l'équation $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$ par génération de fractions équivalentes à $\frac{3}{5}$ prend forme. Cette méthode qui tel que discuté est centrée sur le côté droit de l'égalité et fonctionne à partir de la classe de fractions équivalentes à $\frac{3}{5}$ montre les innovations mathématiques vers lesquelles peuvent ouvrir les erreurs dans la classe. La Figure 4.3 résume la résolution de l'équation $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$ découlant de l'erreur de Thomas.

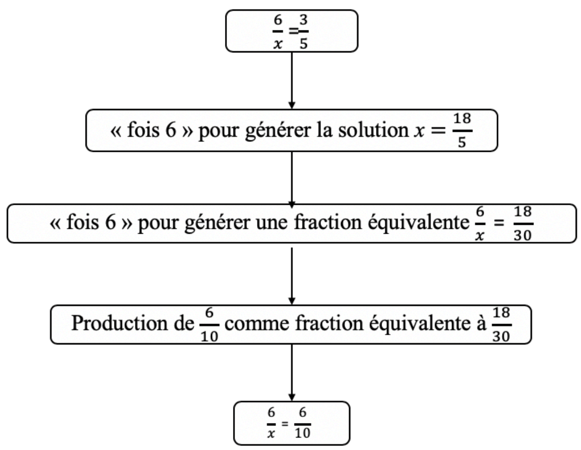


Figure 4.3 Une erreur qui provoque la formation d'une méthode pour résoudre une équation

En n'étant pas totalement adaptée au problème rencontré, l'erreur ouvre à la possibilité d'être repensée pour répondre d'une manière adéquate à la tâche. La méthode de résolution d'équation qui s'est développée dans l'extrait constitue un exemple de comment les erreurs, en étant réinvesties dans la résolution mathématique, peuvent permettre de créer des méthodes mathématiques intéressantes et même innovantes. Ici l'erreur de Thomas a forcé un travail réparateur et a fait découler la résolution sur l'utilisation de fractions équivalentes. La résolution d'équation à travers la génération de fractions équivalentes n'est pas usuelle, et permet de mettre en valeur la place que peuvent prendre les erreurs en amenant à développer d'autres méthodes de résolution.

4.4 Les erreurs productives qui permettent d'établir des domaines de validité mathématiques dans la classe

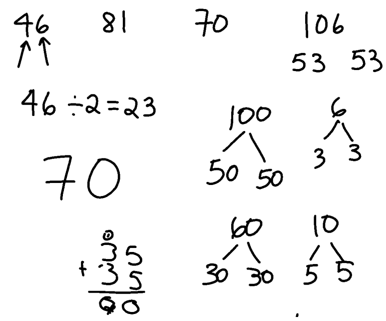
Il a été soulevé qu'en n'étant pas générales ou en ne s'appliquant pas à tous les cas possibles, les erreurs peuvent amener à *établir un domaine de validité mathématique* pour une méthode ou une conjecture. Les erreurs en mathématiques peuvent être envisagées comme des occasions à saisir pour *définir des contextes dans lesquelles elles sont valides*. En provoquant le *développement d'un domaine où elles peuvent être acceptées*, les erreurs peuvent se montrer productives pour les mathématiques. De manière analogue à l'histoire des mathématiques, ce qui suit présente l'analyse d'un extrait de séance en classe où une erreur a permis *d'établir un domaine de validité pour une conjecture réfutée.*

4.4.1 Vignette descriptive de l'extrait

Dans une classe de 5e année, les élèves travaillent à déterminer lesquels des nombres suivants sont divisibles par deux :

46 81 70 106

Durant les vingt premières minutes de la séance, la divisibilité par deux de 46, 70 et 106 est établie. Diverses manières d'argumenter et de justifier cette divisibilité à partir de la production de découpages et redécoupages de ces nombres sont offerts par les élèves et font l'objet de discussions. Ces traces sont laissées au tableau :



Alors qu'une discussion sur différentes manières de diviser et subdiviser le nombre 106 en deux parties anime la classe, André fait l'observation suivante :

> André : J'ai remarqué quelque chose... À chaque fois que tu divises par deux, ça donne deux nombres impairs.
>
> CE : Oh!
>
> André : Ben si tu divises un nombre pair par 2 ça donne tout le temps des nombres impairs.
>
> Robert : Ah oui, mais si tu fais 100 divisé par deux ça fait 50, c'est pas impair…
>
> CE : Oh ok, il faut comprendre qu'est-ce que c'est ça. Merci Robert d'être aussi rapide.

Bien que Robert formule presque immédiatement un contre-exemple, le CE reformule la proposition d'André en insistant sur l'idée qu'il serait important de la comprendre. Il explique qu'André propose que « chaque fois qu'on a un nombre pair et qu'on le divise par 2, on obtient un nombre impair ». Il souligne d'un même coup le contre-exemple de Robert, c'est-à-dire le cas du nombre 100 qui divisé par deux donne 50.

André propose alors d'ajuster sa conjecture à tous les nombres pairs « sauf ceux qui terminent par zéro ». Un autre élève pointe cependant le cas de 48 qui divisé par deux donne 24. Constatant l'enthousiasme du groupe, le CE demande aux élèves de prendre quelques instants pour travailler individuellement sur la proposition d'André. Il leur demande de formuler des cas où ça fonctionne et des cas où ça ne fonctionne pas pour qu'ils puissent après travailler ensemble à mieux la comprendre.

Après une quinzaine de minutes, le CE demande aux élèves de lui donner les exemples et contre-exemples qu'ils ont trouvés. Au tableau, il les note en deux colonnes : la colonne de gauche pour les exemples et la colonne de droite pour les contre-exemples à la conjecture. Alors que différents cas sont offerts et classés, Ariane intervient pour lire une idée qu'elle a noté dans son cahier : « Si à l'unité est le nombre 2 ou 6 je pense alors que ça devient un nombre impair, mais quand le nombre 0, 4 ou 8 est à la position des unités ça devrait donner un nombre pair ». Le CE, surpris de cette intervention, l'invite à vérifier si sa proposition fonctionne avec les exemples qu'il continue à prendre en note au tableau. Après quelques minutes supplémentaires, le tableau a l'allure suivante :

$82 \div 2 = 41$	$208 \div 2 = 104$
$62 \div 2 = 31$	$52 \div 2 = \cancel{28}\ 26$
$10 \div 2 = 5$	$32 \div 2 = 16$
$106 \div 2 = 53$	$120 \div 2 = 60$
$18 \div 2 = 9$	$36 \div 2 = 18$
$66 \div 2 = 33$	$104 \div 2 = 52$
$30 \div 2 = 15$	$500 \div 2 = 250$
	$56 \div 2 = 28$

Le CE questionne alors le groupe à savoir s'il y a quelque chose à comprendre de ces cas. Sylvain explique que « les deux réponses sont possibles ». Le CE renchérit en expliquant que les exemples générés montrent qu'il y a en effet « pleins de nombres pairs que je divise en deux qui vont me donner des résultats impairs » et « aussi pleins de nombres pairs que je divise en deux qui me donnent des résultats impairs ». Le CE insiste sur l'idée que ceci montre que ce qu'a dit André plus tôt n'était pas complètement faux vu la colonne de gauche qui offre plusieurs exemples, mais toutefois pas toujours vrai tel que l'illustre la colonne droite au tableau.

À la demande du CE, Ariane répète à ce moment l'idée qu'elle avait exprimée un peu plus tôt sans que le groupe ne s'y attarde. Bien qu'elle explique que sa proposition ait depuis changé, elle répète que « quand l'unité est le nombre 2 ou 6 je pense alors que ça devient un nombre impair ». Le groupe s'attarde alors à passer en revue tous les cas se terminant par un 2 ou par un 6 au tableau en commençant par la colonne de gauche. Le CE demande ensuite à Ariane de répéter l'autre partie de sa proposition qu'elle offre comme « quand le nombre 0, 4, 8 est à la position des unités ça devrait donner un nombre pair ». Le CE les encercle et souligne au tableau :

$82 \div 2 = 41$	$208 \div 2 = 104$
$62 \div 2 = 31$	$52 \div 2 = \cancel{28}\ 26$
$10 \div 2 = 5$	$32 \div 2 = 16$
$106 \div 2 = 53$	$120 \div 2 = 60$
$18 \div 2 = 9$	$36 \div 2 = 18$
$66 \div 2 = 33$	$104 \div 2 = 52$
$30 \div 2 = 15$	$500 \div 2 = 250$
	$56 \div 2 = 28$

Bien que plusieurs de ces exemples fonctionnent, un problème est alors pointé lorsque des nombres se terminant par zéro (le 10 et le 30) sont trouvés dans la colonne de gauche. D'un même souffle, le groupe soulève que les nombres 56 et 36 dans la colonne de droite contredisent aussi la conjecture ajustée d'Ariane puisqu'ils se terminent par un 6 et que la division de ces nombres par 2 donne des nombres pairs. Le groupe semble alors déçu de constater que ça ne fonctionne pas. Le CE questionne alors Ariane sur comment elle en était venue à proposer cette idée sur les nombres.

Ariane explique avoir pris les nombres 100, 102, 104, 106 et 108 et avoir vérifié pour chacun si la division par deux donnait un nombre pair ou impair.

100 102 104 106 108

Le 100 divisé par deux donnait un nombre pair, le 102 un nombre impair, le 104 un nombre pair, le 106 un nombre impair et le 108 un nombre pair. Ariane explique que c'est en constatant cette alternance entre pairs et impairs qu'elle a établi sa proposition.

Suite à cette intervention, la cloche sonne et la séance prend fin. Avant de quitter le groupe, le CE exprime que l'intervention d'Ariane semble être une bonne piste et propose au groupe de continuer la série de nombres offerte par Ariane en fin de séance et de vérifier avec 112, 114, 116, etc. si la division par deux leur donne des nombres pairs ou impairs.

4.4.2 Description de l'erreur

La conjecture d'André au sujet des nombres pairs « si tu divises un nombre pair par deux ça donne tout le temps des nombres impairs » est fausse. La parité de la division par deux n'est pas le cas de tous les nombres pairs, plusieurs contre-exemples de cette conjecture sont produits dans l'extrait. Par exemple, les nombres 100 et 48 sont des nombres pairs qui ne donnent pas des nombres impairs, lorsque divisés en deux.

4.4.3 Une erreur qui produit un domaine de validité pour une conjecture réfutée

Cet extrait permet d'illustrer comment les erreurs en classe être productives en amenant à *établir un domaine de validité mathématique pour une conjecture réfutée*. En n'étant ni complètement fausse et ni complètement vraie non plus, la conjecture réfutée d'André au sujet des nombres pairs a stimulé à circonscrire un ensemble de nombres dans lequel celle-ci pourrait être valide. À travers l'étude de différents exemples et contre-exemples, l'erreur d'André a mené à la définition d'un ensemble de nombres à laquelle sa conjecture s'applique, c'est-à-dire des nombres pairs donnant des nombres impairs lorsque divisés par deux.

À l'intérieur du court échange qui prend forme autour de sa conjecture lorsque celle-ci est offerte à la classe, la proposition d'André passe d'une conjecture à investiguer à une conjecture réfutée. Toutefois, les limites pointées par les contre-exemples des nombres 100 et 48 en début d'extrait, plutôt que d'amener à rejeter sa conjecture complètement, instiguent un travail mathématique qui motive tout le reste de la séance visant à départager les cas fonctionnels des cas qui ne le sont pas. Informé par différents cas de nombres pairs produits et étudiés, un domaine mathématique où son « si tu divises un nombre pair par deux ça donne tout le temps des nombres impairs » est valide est ainsi peu à peu raffiné. Dans l'extrait *quatre domaines mathématiques* sont définis et raffinés pour la conjecture :

(1) L'ensemble des nombres pairs
(2) L'ensemble des nombres pairs ne se terminant pas par le chiffre zéro
(3) L'ensemble des nombres pairs se terminant par les chiffres deux ou six
(4) L'ensemble d'un nombre pair sur deux en alternance

Dans ce travail mathématique, la génération d'exemples et de contre-exemples joue un rôle clé: les exemples permettent de dégager des caractéristiques sur l'ensemble de nombres pairs qui cherche à être défini et les contre-exemples amènent à le raffiner davantage par l'exclusion des cas problématiques de celui-ci. Dans un mouvement de zigzag, dirait Lakatos (1976), où les exemples sont intégrés et les contre-exemples sont écartés, *un domaine dans lequel son erreur peut être acceptée se développe*. Par exemple, lorsqu'au départ André affirme qu'un nombre pair divisé en deux donne « tout le temps » un nombre impair, il offre de considérer sa conjecture pour l'ensemble des nombres pairs en s'appuyant sur plusieurs exemples qui se trouvent à ce moment au tableau comme le 46, 70 et 106. Le contre-exemple du nombre 100 est ensuite pointé et amène André à raffiner cet ensemble à tous les nombres pairs « sauf ceux qui terminent par zéro » afin d'écarter ce cas problématique. L'étude systématique de différents cas amène la classe peu à peu à circonscrire des cas de nombres pairs qui divisés en deux donnent bien des nombres impairs. À la fin de l'extrait, l'idée que la conjecture d'André puisse fonctionner pour un nombre pair sur deux en alternance est évoquée comme une piste importante.

Pour les mathématiques de la classe, ceci peut signifier qu'au-delà de pouvoir être réfutées, les erreurs ont potentiellement une valeur mathématique qui ouvre la porte à être explicitée. Dans l'extrait, la conjecture erronée d'André a une valeur mathématique qui est exploitée. Dès que celle-ci est énoncée, plusieurs nombres présents au tableau l'appuient et la justifient : les nombres 106, 6, 70 et 46 à ce moment écrits au tableau sont des cas de nombres pairs qui divisés en deux donnent des nombres impairs. Cette valeur mathématique de l'erreur est aussi mise en évidence plus tard par l'intervention de Sylvain qui explique au sujet des exemples et des contre-exemples listés au tableau que « les deux réponses sont possibles », c'est-à-dire que certains nombres pairs divisés par deux donnent en effet des nombres impairs et que certains autres donnent des nombres pairs. Son intervention pointe justement le fait que plusieurs cas (même une infinité) vont dans le sens de la proposition d'André, un travail peut être fait pour les circonscrire et les définir. D'où la motivation de cet effort mathématique déployé dans la séance pour comprendre ces cas de nombres pairs, voire les généraliser.

De l'autre côté — et c'est justement la dimension productive des erreurs que l'extrait met en valeur — parce que la proposition d'André ne fonctionne pas toujours, parce qu'elle est erronée, un travail mathématique est à faire pour la comprendre et la valider. Justement parce que la conjecture d'André n'est pas totalement fonctionnelle, elle permet, voire elle appelle à un travail mathématique pour *établir les cas où elle est valide*. C'est ce mouvement vers la recherche et la production d'un domaine de validité pour sa conjecture, que le travail qui est fait dans l'extrait pour définir des cas fonctionnels permet de souligner. Parce que ce qu'il a offert au sujet des nombres pairs ne fonctionne pas dans tous les cas, ceci provoque un travail mathématique pour saisir ces cas plus particuliers. La Figure 4.4 résume le travail de définition d'un domaine de validité provoqué par l'erreur dans l'extrait.

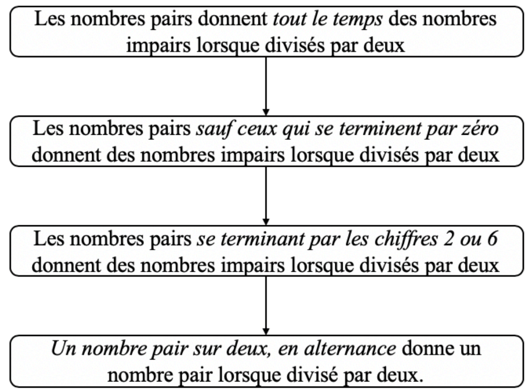


Figure 4.4 Une conjecture réfutée qui provoque la (re)définition de domaines où elle peut être valide

Cet extrait sensibilise aux opportunités mathématiques qu'ouvrent les erreurs dans la classe pour *définir des contextes dans lesquelles elles sont valides*. En n'ayant pas été mise de côté ou encore simplement corrigée, la conjecture erronée d'André a mis en route et stimulé un travail mathématique riche qui a amené la classe à raffiner un domaine de validité mathématique pour sa conjecture. En ce sens, cette erreur permet de souligner que lorsqu'elles sont envisagées non pas en termes de conjectures échouant à répondre au cas général, mais plutôt comme conjectures ouvrant à la considération et à l'explicitation de cas particuliers, les erreurs en classe peuvent amener à *établir un domaine de validité mathématique*.

4.5 Les erreurs productives qui permettent de continuer à avancer dans la résolution mathématique dans la classe

Il a été soulevé qu'en constituant un premier pas dans l'exploration d'une question ou d'un problème, les erreurs peuvent permettre de *continuer à avancer dans la résolution mathématique*. En tant que réponses imparfaites, les erreurs peuvent *participer au surpassement d'un blocage* en ouvrant vers les pas suivants dans la résolution. En étant des étapes importantes qui peuvent *permettre aux étapes suivantes de prendre forme*, les erreurs peuvent se montrer productives pour les mathématiques. De manière analogue à l'histoire des mathématiques, ce qui suit présente l'analyse d'un extrait de séance en classe où des erreurs ont permis de *continuer à avancer dans la résolution mathématique d'un problème*.

4.5.1 Vignette descriptive de l'extrait

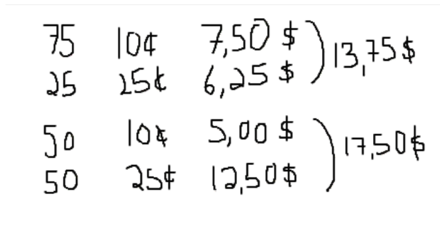
En début d'une séance réalisée avec un groupe d'élèves en 2e secondaire, la tâche suivante est donnée aux élèves :

> *Martine a 15,70 $ en pièces de 25 ¢ et 10 ¢, sachant qu'elle a en tout 100 pièces de monnaie, trouve le nombre de pièces de chaque sorte.*

Cinq minutes s'écoulent et les élèves sont dans une impasse. Les élèves cherchent une solution algébrique au problème, mais sont incapables d'entrer dans la tâche. Face à ce blocage, le CE propose au groupe de mettre l'algèbre de côté et pose cette question :

> CE : Si c'était 100 pièces de 10 ¢, ça donnerait quoi ?
>
> Élève : 10 dollars
>
> CE : Donc, c'est pas 100 pièces de 10 ¢. Est-ce que ça peut être 100 pièces de 25 ¢ ?
>
> Élève : Non, c'est trop, on aurait 25.

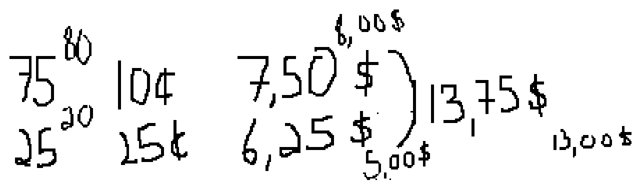
Ce court échange donne l'idée aux élèves de passer par une stratégie qu'ils nomment « essais-erreurs ». Sachant maintenant que les 100 pièces de monnaie ne peuvent pas toutes être des 10 ¢ ou des 25 ¢, les élèves proposent d'explorer les combinaisons suivantes : 75 pièces de 10 ¢ avec 25 pièces de 25 ¢ et 50 pièces de 10 ¢ avec 50 pièces de 25 ¢. Les traces suivantes sont laissées sur le tableau :



[4]

Le groupe fait alors deux constats : pour la première combinaison qui produit une somme totale de 13,75 $, « il en manque » et pour la seconde qui fait un total de 17,50 $, « c'est trop ». Jonathan, propose alors d'augmenter le nombre de pièces de 10 ¢ à 80 :

> CE : D'où il vient ton 80 ?
>
> Jonathan : C'est parce que là tu as 75
>
> Jonathan : Tu as 13,75 $ alors il manque 2 $
>
> CE : Ok, donc là si on veut se rendre à 15,70 $ tu nous dis, il nous en manque, donc là on va en ajouter.
>
> Jonathan : Ben le 80, je sais pas s'il est bon
>
> CE : On va regarder



La nouvelle combinaison produit un total de 13,00 $. Constatant que le montant total a diminué Cédric exprime qu'« il faudrait augmenter les 25 ¢ à la place ». Il propose donc de le « monter de cinq ». Au tableau, le CE formule son idée :

---

[4] Dans cette vignette, les extraits de tableaux sont des reproductions de ce qui a originalement été fait lors de la séance en classe avec les élèves.

8,00 \$

75 80 70 10¢ 7,50 \$ 5,00 \$ 13,75 \$
25 20 30 25¢ 6,25 \$ 5,00 \$ 7,50 \$ 13,00 \$ 14,50 \$

Le CE invite les élèves à constater de combien les essais de Jonathan et de Cédric ont fait bouger le 13,75 \$ initial. Il rend alors explicite que la combinaison de Jonathan a fait diminuer le montant total de 0,75 \$ alors que la nouvelle proposition de Cédric l’a fait augmenter de 0,75 \$. Un peu de temps est ensuite donné aux élèves pour qu’ils abordent le reste de la résolution individuellement.

Après seulement quelques instants, Mathias explique avoir réussi à être à 30 ¢ de la somme souhaitée. Sa solution est la suivante : 60 pièces de 10 ¢ et 40 pièces de 25 ¢ qui lui donnent une somme d’argent totale de 16,00 \$:

$$\left.\begin{array}{l} 40 \times 0{,}25\$ = 10{,}00\$ \\ 60 \times 0{,}10\$ = 6{,}00\$ \end{array}\right) 16{,}00\$$$

Un autre élève propose d’un même souffle que le nombre de 25 ¢ doit être pair si on veut arriver à une quantité d’argent équivalente à 15,70 \$. Alors que le groupe est en train de donner un sens à ce nouvel élément de réponse en expliquant que si le nombre de 25 ¢ est impair, il n’est pas possible d’obtenir une somme d’argent se terminant par un zéro, Liam s’exclame « je l’ai ! » et dit avoir trouvé la réponse « trente-huit 25 ¢ ». Alors qu’il écrit cette réponse au tableau, le CE explique en comparant cette réponse avec la réponse offerte quelques instants plus tôt par Mathias:

> CE : Si la réponse c’est 38, on a 2 pièces de 25 ¢ de moins, donc 50 ¢ de moins
>
> Élève : Plus 20
>
> CE : Puis là, plus 20, c’est ton 30 de tantôt, c’est le 30 qu’il te manquait (en pointant Mathias)

CE : Donc on arrive à notre fameux 15,70 $

Suite à cette intervention, le groupe ayant maintenant la réponse retourne au développement d'une solution algébrique.

4.5.2 Description de l'erreur

Dans l'extrait, les différentes combinaisons nombre de 10 ¢ — nombre de 25 ¢ suivantes 75 – 25, 50 – 50, 80 – 20, 70 – 30 et 60 – 40 sont des erreurs. Ces combinaisons ne répondent pas au problème en ne produisant par une somme d'argent totale de 15,70 $.

4.5.3 Des essais-erreurs qui produisent l'avancement dans la résolution mathématique d'un problème

Cet extrait permet d'illustrer comment les erreurs en classe peuvent être productives en amenant à *continuer à avancer dans la résolution mathématique*. En étant chaque fois des pas de plus permettant voire provoquant les pas suivants, les erreurs successives — les différents essais de combinaisons non fonctionnels de 10 ¢ et de 25 ¢ produisent la résolution du problème. Permettant chaque fois d'être plus près d'une solution satisfaisante pour le problème et en étant des supports pour les essais subséquents, les erreurs dans l'extrait sont centrales à la poursuite de la résolution qui prend forme.

La résolution du problème qui est faite dans l'extrait est produite à coup d'erreurs. Les élèves caractérisent d'ailleurs eux-mêmes la stratégie générale déployée pour résoudre d'« essais-*erreurs* », c'est-à-dire que des réponses erronées sont produites successivement jusqu'à l'obtention d'une réponse satisfaisante pour le problème. L'essai des deux premières combinaisons erronées — les essais des combinaisons 75 pièces de 10 ¢ avec 25 pièces de 25 ¢ et 50 pièces de 10 ¢ et 50 pièces de 25 ¢ — peut être compris comme un point tournant dans la résolution pour le *surpassement du* *blocage* qu'il permet. Alors qu'en début de séance, les élèves qui cherchent à trouver directement la bonne réponse par une résolution algébrique sont bloqués, ces erreurs deviennent des exemples de, des modèles d'une solution. Bien qu'elles ne fonctionnent pas, les erreurs offrent une base qui permet désormais aux élèves d'en envisager de nouvelles et même surtout d'en produire des mieux adaptées.

En étant chaque fois considérée comme solutions potentielles au problème et en permettant ainsi de pointer à un ajustement à faire pour l'essai subséquent, chaque erreur génère l'essai suivant qui à son tour génère le suivant, etc., et ce, jusqu'à ce qu'une solution répondant au problème soit trouvée. Ainsi, en *permettant aux étapes suivantes de prendre forme*, ces erreurs deviennent davantage que des mauvaises réponses pour la résolution : elles sont des étapes permises par les étapes précédentes qui motivent les étapes subséquentes en les orientant. Par exemple, l'intervention de Jonathan qui dans l'extrait propose d'augmenter le nombre de pièces de 10 ¢ à 80, lorsqu'il constate que l'essai précédent créait un « manque 2 $ », illustre ce mouvement provocateur des étapes suivantes stimulées par les erreurs. L'idée de Jonathan est d'utiliser ce que révèle l'erreur précédente de 75 pour la résolution du problème pour continuer à avancer vers une réponse plus satisfaisante. D'une certaine façon, Jonathan montre que l'erreur précédemment commise, la considération de la combinaison 75 pièces de 10 ¢ et 25 pièces de 25 ¢, révèle une avancée plus grande sur la question que de ne simplement pas être la réponse cherchée. En effet, ce nouveau « manque » est permis, voire même produit par l'erreur. Le 80 qu'il propose comme nouvel essai plus adéquat pour le nombre de 10 ¢ est un 75 + 5 dans lequel l'erreur occupe une place fondamentale en générant cette nouvelle possibilité pour la résolution.

À travers cette poussée des erreurs vers la solution, une solution au problème informée des erreurs précédentes prend forme et est trouvée. Les essais-erreurs produits sont ainsi chaque fois *des pas (de plus) dans la résolution du problème* qui produisent les pas subséquents dans une sorte de relation cause à effet : des erreurs sont produites et informent la résolution en mettant à jour des informations qui permettent aux prochains essais-erreurs de se faire de manière de plus en plus précise et ainsi de suite. La figure 4.5 illustre ce mouvement provocateur des erreurs pour la résolution du problème dans la séance :

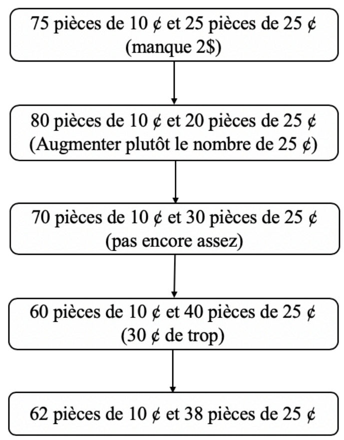


Figure 4.5 Des essais-erreurs qui provoquent la résolution d'un problème

En ayant permis non seulement de mettre en route et d'alimenter la résolution jusqu'à l'obtention d'une solution satisfaisante pour un problème qui posait beaucoup de problèmes en début de séance, les erreurs dans l'extrait sensibilisent quant aux opportunités pour la résolution que peuvent ouvrir les erreurs lorsqu'elles sont prises en compte. Alors qu'aucune piste n'est envisagée par les élèves en début de séance, une résolution du problème a peu à peu pris forme. Ceci permet d'insister sur le mouvement productif des erreurs qui informent et même participent à faire avancer la résolution mathématique.

4.6 Les erreurs productives qui permettent de définir des problèmes mathématiques dans la classe

Il a été argumenté qu'en soulevant des interrogations, les erreurs peuvent amener à *développer de nouveaux problèmes mathématiques*. Les erreurs peuvent *définir de nouvelles pistes d'exploration* en stimulant des fouilles mathématiques. En ce sens, en amenant à faire des distinctions, les erreurs peuvent être des occasions pour *formuler de nouvelles (sous-) questions*. Afin de mieux comprendre ce que ce type de retombée productive des erreurs peut signifier dans la classe, cette section présente l'analyse de deux extraits de séance où des erreurs ont permis de *(re)définir des nouveaux problèmes*. De manière analogue à l'histoire des mathématiques, la Section 4.6.1 présente un extrait de classe dans lequel une erreur a permis de *définir un nouveau problème mathématique* et la Section 4.6.2 présente un extrait de classe dans lequel une erreur a permis de *redéfinir un problème mathématique.*

4.6.1 Les erreurs productives qui permettent de définir un nouveau problème mathématique

4.6.1.1 Vignette descriptive de l'extrait

Dans une classe de sixième année, les élèves travaillent à trouver une solution à ce problème :

Un élève a eu les notes suivantes à ses 4 examens de mathématiques : 60 %, 67 % et 75 %. Sachant que tous les examens ont la même valeur, quel résultat doit-il obtenir à son quatrième examen afin que sa moyenne soit de 75 %.

Après quelques minutes de résolution en équipes de deux ou trois élèves, le groupe reprend le travail en plénière et essai de comprendre différentes solutions offertes. Marie propose 84 % comme solution :

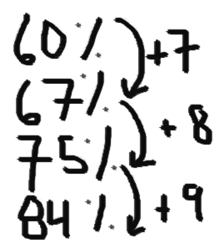
CE : Comment tu arrives à 84 ?

Marie : Moi j'avais regardé pour que 60 arrive à 67 tu ajoutes 7.

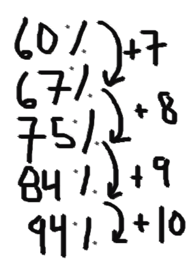
CE : Attends un peu, on a nos notes qui sont 60 %, 67 % et 75 %. Alors tu dis, pour aller de 60 à 67, il y a 7.

Marie : Ben il faut plus 7. Après, de 67 à 75, c'était plus 8. Comme ça faisait 7… 8… peut-être que l'autre ça fait plus 9.

CE : Alors si on fait plus 9 ça va nous donner 84.



Le CE demande aux élèves ce qu'ils en pensent. La classe est d'abord un peu bouche bée avant qu'Olivier ne dise que « ça ne marche pas » en justifiant que le raisonnement de Marie n'utilise pas le 75 % souhaité comme moyenne pour les quatre examens. Il explique ainsi que la stratégie de Marie ne peut pas fonctionner parce que le problème vise à déterminer, « si tu as une moyenne de 75 », quelle note il faut avoir au quatrième examen. Bien qu'Olivier ait exprimé son désaccord, le CE propose de continuer la « série » de Marie et explique qu'ils pourraient, par exemple, obtenir la note suivante de 94 % en faisant « plus 10 » :



Le CE souligne que Marie a vu une progression dans les notes d'examen de la question. Il explique que cette tendance qu'elle a dégagée l'a amené à dire que « si ça continu comme ça », si les notes continuent de s'améliorer, la prochaine note sera de 84 %, puis 94 %. Il poursuit en demandant au groupe « combien après ? » :

> Mélodie : 105
>
> CE : 105 toi tu dis ? Pourquoi ?
>
> Mélodie : Si tu prends juste ton 90 plus 10 ça fait 100. Ton 4 plus 1 ça fait 5. Plus 5 ça fait 105.
>
> CE : Alors la note d'après ça serait 105
>
> Mélodie : Pis l'autre, ça serait 117
>
> CE : Oui, là on continuerait…

À ce moment, il revient aux explications d'Olivier et souligne qu'en effet, ce raisonnement ne dit rien sur la moyenne. Il demande alors au groupe de tester la moyenne si l'élève avait effectivement eu 84 % à son prochain examen. James fait alors le calcul de la moyenne avec le 84 % de Marie en additionnant les notes et en les divisant par quatre. Il obtient 71,5. N'arrivant pas à la moyenne de 75 % souhaitée, le groupe conclut que l'élève n'a pas pu avoir 84 % à son prochain examen. Ils poursuivent alors sur une discussion sur le sens du calcul de la moyenne qu'a fait James ce qui les mène ultérieurement à la réponse au problème soit 98 %.

4.6.1.2 Description de l'erreur

Le 84 % de Marie proposé comme réponse au problème de moyenne est une erreur. Tel qu'explicité par l'intervention d'Olivier et par le calcul de James dans l'extrait, cette quatrième note de 84 % ne produit pas une moyenne de 75 % pour les quatre examens. Bien que le raisonnement expliquant sa réponse dans l'extrait soit explicité, 84 % de Marie est une erreur puisqu'il ne répond pas au problème posé au groupe.

4.6.1.3 Une erreur qui produit un nouveau problème mathématique

Le 84 % de Marie illustre de quelles façons les erreurs en classe peuvent *définir des problèmes mathématiques.* En ne répondant pas adéquatement au problème de moyenne, mais en répondant plutôt à une progression soulevée dans les notes, son erreur a formulé une nouvelle piste d'exploration de la tâche pour la classe. En mettant en évidence des relations entre les nombres qui n'étaient pas exploitées par la question initiale, son erreur a ouvert à la création d'un nouveau problème mathématique.

Le nouveau problème auquel le 84 % de Marie répond est rendu explicite dans sa manière de justifier sa réponse. Lorsqu'elle explique que sa réponse vient d'un « plus 7 » et « plus 8 » dégagés dans les données du problème, Marie explique que son 84 % exploite une progression dégagée dans les données du problème. Bien qu'il n'est pas directement énoncé dans l'extrait, une formulation du problème pourrait ainsi être la suivante :

Un élève a eu les notes suivantes à ses 3 examens de mathématiques : 60 %, 67 % et 75 %. S'il continue à progresser en suivant cette régularité, quel résultat obtiendra-t-il à son quatrième examen ?

Un élément surprenant est que l'erreur de Marie amène la résolution ailleurs ; tout en restant connectée au problème initial. La réponse de Marie soulève des relations mathématiques qui ne faisaient pas partie de la question initiale. Alors que le problème initial était un problème de moyenne, le problème de Marie exploite un « si ça continu comme ça » qui amène à définir une suite arithmétique +7, +8, +9, +10, etc. En amenant à faire cette nouvelle distinction dans les données du problème, son erreur a permis de *définir une nouvelle piste d'exploration mathématique*. Dans l'extrait, cette nouvelle piste d'exploration a amené la classe à générer mathématiquement des notes au-delà de cette quatrième note initialement cherchée. En exploitant la régularité mise en évidence par l'erreur de Marie, une cinquième, sixième et une septième « note » d'examen (94, 105 et 117) sont trouvées.

Cette exploration mathématique imprévue permet de souligner de quelles façons les erreurs, lorsqu'elles sont considérées non pas pour les problèmes auxquelles elles ne répondent pas, mais bien pour les problèmes auxquelles elles pourraient potentiellement répondre (Borasi, 1996), représentent des occasions pour en *formuler de nouveaux.* Bien qu'il ne réponde par au problème de la moyenne, voire même justement parce qu'il n'y répond pas, le 84 % Marie invite à en poser un autre problème sur la progression des notes. Ainsi, en amenant à voir une progression dans les notes, le 84 % dans l'extrait produit ce nouveau problème permet d'exploiter des relations mathématiques toutes autres. La Figure 4.6 résume cette production du problème provoqué par l'erreur de Marie :

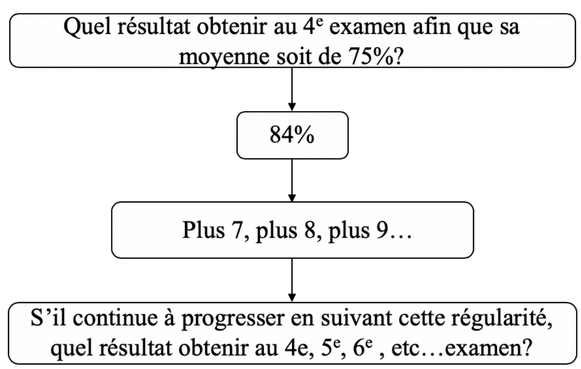


Figure 4.6 Une erreur qui provoque un nouveau problème mathématique

Le fait d'avoir donné une place au 84 % a permis à de nouvelles relations mathématiques d'être exploitées dans l'extrait. Cette courte exploration mathématique a permis à la réponse erronée de Marie d'être mise en valeur tout en permettant à la classe d'apprécier des relations mathématiques existant entre les notes 67, 75 et 84. Ces retombées sont non négligeables pour la classe, qui a pu profiter et participer à cette exploration. Ceci sensibilise aux portes que peuvent ouvrir les erreurs pour développer de nouveaux problèmes mathématiques.

4.6.2 Les erreurs productives qui permettent de redéfinir un problème mathématique

4.6.2.1 Vignette descriptive de l'extrait

Dans un groupe de 6e année, la tâche suivante est proposée :

Quelle est la fraction représentée par ce dessin ?

Aussitôt la tâche donnée, Maxime propose la solution 3 dixièmes et justifie en expliquant que sur dix notes de musiques, il y en a trois qui sont encerclées. Lorsque le CE demande si d'autres élèves arrivent à cette réponse, la totalité ou presque des élèves lèvent la main pour acquiescer. Les élèves semblent alors s'entendre sur la réponse au problème et n'ont pas d'autres solutions à offrir malgré les relances du CE.

Quelques instants passent et Justine propose la réponse 1 tiers :

> CE : Comment ça tu dis 1 tiers ?
>
> Justine : Parce que, par exemple tu peux faire…. Ah non, non…
>
> CE : Continu, je suis intrigué
>
> Justine : Ça aurait marché, mais j'avais pas vu la note de musique en bas.

> CE : Celle-là ici ? (Il pointe la note de musique en bas à gauche du dessin)
>
> Justine : Oui
>
> CE : On va l'enlever
>
> Justine : Si j'avais enlevé celle-là ça aurait fait 1 tiers à cause de 3 neuvièmes

Le CE propose de rayer cette note de musique et de comprendre comment ce nouveau dessin peut représenter 1 tiers :

Justine explique que puisqu'il reste maintenant neuf notes de musique, il est possible de faire trois paquets de trois notes et que puisqu'il y en aurait un d'encerclé ceci lui donne 1 tiers. L'échange plutôt court se poursuit comme suit :

> CE : Tu nous as dit tantôt, ça peut aussi être 3 neuvièmes, mais là dans le fond, chaque paquet de 3 ça fait 1.
>
> Justine : Si exemple on le réduit à sa fraction la plus simple, si on la simplifie ça fait 1 tiers.
>
> CE : Ok et tu avais 3 neuvièmes aussi.

Après avoir statué sur l'équivalence entre 1 tiers et 3 neuvièmes, c'est-à-dire après avoir compris comment ce nouveau dessin pouvait représenter ces deux fractions, le groupe retourne au dessin initial avec 10 notes de musique. Aussitôt Amélie propose ceci :

Amélie : 6 vingtièmes.

CE : Comment tu vois ça ?

Amélie : Tu doubles le numérateur et le dénominateur…

Les 38 prochaines minutes de la séance se déroulent autour du thème des fractions équivalentes à 3 dixièmes. Des réponses comme 6 vingtièmes, 9 trentièmes sont explorées pour donner un sens au dessin des notes de musique et mis en relation avec d'autres touts comme des palettes de chocolat. En fin de séance, la question devient de trouver l'équivalence à la fraction 3 dixièmes en « cinquièmes ». La séance prend fin alors qu'un élève explique l'équivalence entre la fraction 3 dixièmes et 1,5 cinquièmes.

4.6.2.2 Description de l'erreur

Le « 1 tiers » de Justine pour parler du dessin où 3 notes sur 10 sont encerclées est une erreur. Tel qu'explicité dans sa justification, une des notes de musique n'a pas été prise en compte dans sa réponse. Son 1 tiers est donc une erreur pour le problème qui était en cours d'exploration par la classe.

4.6.2.3 Une erreur qui produit la redéfinition d'un problème mathématique

Le « 1 tiers » de Justine offre un exemple qui illustre comment les erreurs en classe peuvent permettre de *redéfinir un problème mathématique*. L'exploration du « 1 tiers » erroné dans l'extrait a donné un second souffle au problème des notes de musique en amenant à l'envisager sous l'angle des fractions équivalentes. Son erreur a permis à un problème qui semblait être résolu et même épuisé d'être réinterprété et d'animer l'activité de la séance pour les 45 minutes suivantes.

En ouvrant vers le jeu des fractions équivalentes, l'erreur de Justine a « transformé » un problème d'identification de fraction en un problème de fractions équivalentes. Bien que l'énoncé « quelle fraction est représentée par le dessin ? » n'ait pas changé, deux lectures de cette même question marquées par l'avant et l'après de l'erreur coexistent dans la séance. Avant l'erreur, la seule réponse qui semble envisageable par le groupe est 3 dixièmes. Aussitôt que le problème est posé, la solution 3 dixièmes est offerte par Maxime et les élèves qui semblent majoritairement en accord avec cette réponse, n'ont pas de solutions différentes à offrir malgré les relances du CE. La solution 3 dixièmes semble non seulement être une solution possible et acceptable, mais même la seule solution cherchée comme si le problème était terminé.

Suite à l'exploration du « 1 tiers » et « 3 neuvièmes » de Justine, plusieurs autres réponses deviennent toutefois envisageables et ont même alimenté le reste de la séance. Pour ce « même » problème de notes de musique donnant 3 dixièmes, des nouvelles réponses comme 6 vingtièmes, et 9 trentièmes, ou 1,5 cinquièmes sont soudainement devenues possibles. Cette nouvelle abondance de réponses pour un problème qui semblait pourtant être résolu amène à voir une ouverture générée par l'erreur pour le problème en question. Le problème qui semblait jusqu'alors « quelle fraction est représentée par ce dessin ? » prend maintenant plutôt le sens pour la classe de « quelles fractions équivalentes pourraient être représentées par le dessin ? ».

Le dessin initial n'amène pas directement à penser à la fraction 6 vingtièmes, 9 trentièmes ou 1,5 cinquièmes. Sur 10 notes de musique, 3 de ces notes sont encerclées, 3 dixièmes est donc la fraction irréductible évidente pour en parler. La réaction des élèves en début de séance montre bien que pour eux, à ce moment, ce dessin ne peut pas évoquer d'autres fractions. L'erreur de Justine force cependant une nouvelle entrée sur le problème. En omettant de considérer une des notes de musique — ce qui peut sembler être une omission sans importance ou une faute pour reprendre la distinction de Pellerey (1987) et Brousseau (2001) — Justine s'est retrouvée à travailler avec un différent tout amenant à parler de l'équivalence entre les fractions 3 neuvièmes et 1 tiers. Ce bref travail sur les fractions équivalentes a teinté tout le retour sur la question initiale. Sans même reposer la question, de nouvelles possibilités de réponses qui n'existaient pas pour le groupe avant qu'un travail sur l'erreur ne soit fait se sont alors imposées. C'est en ce sens que l'erreur de Justine a amené à *redéfinir un problème mathématique*. Bien qu'il s'agisse textuellement de la « même » question, l'avant et l'après erreur sont teintés de réactions totalement différentes. La figure 4.7 résume comment l'erreur a ici transformé le problème initial en problème de fractions équivalentes.

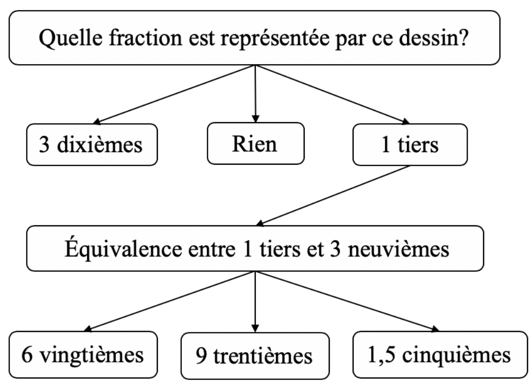


Figure 4.7 Une faute qui provoque la redéfinition d'un problème

Ceci sensibilise quant aux opportunités de redéfinition de problèmes que peuvent ouvrir les erreurs dans la classe. L'erreur de Justine, en ayant mené à un travail sur les fractions équivalentes a provoqué le renouvellement d'un problème mathématique. En effet, tel que dit plus haut, le problème semblait être résolu et même presque évident pour les élèves du groupe presque aussitôt qu'il leur a été posé. L'erreur de Justine a ouvert à l'envisager autrement et lui a permis d'animer le reste de la séance.

4.7 Remarques sur la productivité des erreurs en classe de mathématiques

Les analyses précédentes offrent une lecture dans le détail de ce que peut être une possible productivité des erreurs en classe de mathématiques. Elles ont permis de cibler de manière précise ce que peuvent être les retombées mathématiques des erreurs possibles pour la classe en termes d'idées, de raisonnements et de stratégies mathématiques. Pour chacune des erreurs analysées, il en ressort que les erreurs ont permis à la classe (1) le développement de critères mathématiques (pour (in)valider les réponses à 12×18), (2) la formation de compréhensions mathématiques supplémentaires (sur les valeurs de position), (3) la création d'une méthode mathématique (pour résoudre une équation), (4) l'établissement d'un domaine de validité (pour une conjecture sur les nombres pairs), (5) l'avancée dans la résolution mathématique d'un problème (par essais-erreurs) et (6) la (re) définition de problèmes mathématiques (pour un problème de moyenne et un problème d'identification de fractions)

De manière transversale, les analyses soulignent des éléments qui permettent de faire une lecture de cette productivité mathématique des erreurs en termes plus généraux. Les erreurs se sont montrées productives pour les mathématiques dans la classe particulièrement en (1) stimulant des explorations mathématiques supplémentaires et en (2) ouvrant de nouvelles possibilités pour les mathématiques. Dans ce qui suit, ces deux types de productivité mathématique sont discutés à travers un retour sur les différentes erreurs analysées.

4.7.1 Les erreurs productives qui produisent des explorations mathématiques supplémentaires dans la classe

Des analyses conduites ressort qu'en posant problème dans le travail mathématique, les erreurs peuvent *stimuler des explorations mathématiques supplémentaires*. Ceci s'aligne avec les idées de Borasi (1996, p.168) qui propose que les erreurs « are considered likely to motivate the kind of doubt that set the inquiry process in motion ». Ce doute productif généré par les erreurs a été rencontré à plusieurs reprises dans les extraits. Les analyses présentées dans les sections 4.1, 4.2, 4.4 et 4.5 permettent d'éclairer la compréhension de ce type de productivité des erreurs en classe.

À la Section 4.1, le doute généré par les différentes réponses erronées telles le 960, le 116 et le 200 a forcé une investigation mathématique supplémentaire à la recherche de la réponse à la question 12 × 18. Ces erreurs ont conduit la fouille mathématique à aller plus loin que l'établissement d'une solution pour le calcul, ici 216, en forçant à produire des critères mathématiques pour (in)valider ces différentes réponses. D'une manière analogue, le 15 +13 +13 = 41 en réponse au calcul 498 + 947 présenté à la Section 4.2 a suscité un doute productif par rapport à la réponse au calcul. En étant loin du résultat attendu et même connu de 1445, le calcul erroné de 41 à provoqué une exploration (additionnelle) visant à lui donner un sens relativement aux valeurs de positions et à l'ajuster à 15 unités, 13 dizaines et 13 centaines puis à 15 + 130 + 1300. L'exploration mathématique instiguée par la conjecture fausse présentée à la Section 4.4 est un autre exemple. L'exploration d'exemples et de contre-exemples qu'a définie cette erreur montre bien de quelles façons les erreurs peuvent engager à faire et à produire plus de mathématiques. En pouvant chaque fois être réfutés, les nouveaux domaines de validité considérés — l'ensemble des nombres pairs, les nombres pairs qui ne se terminent pas par zéro, les nombres pairs se terminant par deux ou six — ont stimulé le raffinement de ces derniers poussant toujours plus loin l'exploration mathématique. D'une façon semblable, cette valeur provocatrice des erreurs qui appelle à plus de mathématiques peut aussi être soulignée par la résolution du problème à coup d'essais-erreurs présentée à la Section 4.5. Pour cette résolution, chaque erreur — chaque combinaison de 10 ¢ et de 25 ¢ non fonctionnelle — provoque les essais-erreurs subséquents faisant en sorte que la résolution mathématique continue d'avancer.

Ces exemples amènent à souligner que les erreurs, en amenant à douter de la réponse à un problème ou de la validité d’une solution proposée, peuvent générer le besoin de faire des investigations mathématiques supplémentaires. Il ressort qu’en conduisant à questionner les mathématiques qui sont faites, les erreurs appellent à faire plus de mathématiques en classe. Ce besoin d’explorations mathématiques supplémentaires qu’elles provoquent apporte un éclairage à la productivité mathématique des erreurs en salle de classe.

4.7.2 Les erreurs productives qui produisent des possibilités pour les mathématiques dans la classe

Les analyses soulignent un second type de productivité des erreurs qui, en sortant de ce qui est prévu, peuvent *ouvrir des possibilités pour les mathématiques*. Faisant écho à Borasi (1996) qui relève que les erreurs peuvent mener à des résultats mathématiques inattendus et même nouveaux, les analyses montrent que les erreurs peuvent définir des chemins inattendus pour les mathématiques. Ces autres, voire nouveaux, chemins que permettent d’envisager les erreurs peuvent menés à répondre de manières surprenantes (et même innovantes) à des problèmes ou des questions mathématiques. Les analyses présentées dans les Sections 4.3 et 4.6 mettent en valeur cette dimension transversale de la productivité des erreurs qui génèrent des possibilités mathématiques en classe.

Le « fois 6 » erroné présenté à la Section 4.3 illustre que les erreurs peuvent amener à considérer d’autres chemins pour la résolution mathématique. En générant une nouvelle possibilité — la nouvelle possibilité de faire ce « fois 6 » d’abord erronée pour résoudre l’équation $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$ — cette erreur a ouvert à une manière inattendue de répondre à la résolution de l’équation par la génération de fractions équivalentes. D’une manière semblable, le 84 % présenté à la Section 4.6.1 a provoqué la définition d’un problème sur la progression des notes d’examen en sortant des attentes initiales définies par le problème de moyenne. En ne répondant justement pas au problème de moyenne à ce moment exploré, cette erreur a généré une nouvelle possibilité pour en définir un nouveau exploitant une progression qui ne faisait pas l'objet de la question initiale. D'une manière semblable, le « 1 tiers » offert comme réponse erronée au problème des notes de musique à la Section 4.6.2, en amenant à considérer des fractions équivalentes, a généré de nouvelles possibilités de réponses pour le problème initial d'identification de fractions. En transformant le problème en problème de fractions équivalentes, cette erreur a amené la fouille mathématique ailleurs où celle-ci n'était pas envisagée au départ.

Ces exemples amènent à souligner ce second type de productivité des erreurs en classe qui, en ne répondant pas aux attentes, peuvent ouvrir des possibilités pour les mathématiques. En étant justement à côté de ce qui est prévu, les erreurs peuvent provoquer des mathématiques qui sortent de ce qui est tracé et donc de ce qui est aussi attendu. Ainsi, le sens de cette productivité mathématique des erreurs peut aussi être dans ces autres chemins qu'elles peuvent amener à considérer. En appelant à faire des mathématiques autres ou autrement, les erreurs peuvent ouvrir à envisager différemment et de manières inattendues des problèmes ou des idées.

Ces deux types de productivité des erreurs en classe soulevés de manière transversale — les erreurs qui stimulent le besoin d'explorations mathématiques supplémentaires et les erreurs qui ouvrent des possibilités pour les mathématiques — soulignent comment en étant en marge des mathématiques voulues soit par les doutes qu'elles stimulent ou les portes qu'elles ouvrent les erreurs appellent à faire plus de mathématiques, à en produire davantage. Dans le Chapitre 5 suivant, l'exploration de la productivité des erreurs se poursuit en portant une attention particulière au contexte entourant leur productivité mathématique dans la classe.

CHAPITRE V

ENJEUX AUTOUR DE L'EXPLOITATION DES ERREURS EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES

Les analyses conduites au Chapitre 4 ont précisé la nature de la productivité des erreurs en classe de mathématiques. Ces analyses d'erreurs commises dans la classe ont permis de tracer un parallèle important avec la productivité des erreurs soulevée au niveau de la discipline en donnant un sens ancré dans la classe aux six dimensions productives des erreurs pour les mathématiques. De manière transversale, ces analyses ont aussi spécifié deux types de productivité mathématique des erreurs en classe. En amenant à voir que les erreurs peuvent stimuler des explorations mathématiques supplémentaires et ouvrir des possibilités pour les mathématiques, les analyses ont permis de donner un sens à la productivité mathématique des erreurs.

Au fil des analyses, le contexte dans lequel les erreurs sont productives pour les mathématiques est apparu de plus en plus important. Ceci mène à aborder de manière explicite la deuxième question de recherche orientant ce travail voulant mieux comprendre de quelles façons les erreurs peuvent participer au développement des mathématiques en classe. Toutes les erreurs rencontrées dans les séances de résolution de problème n'ont pas été productives pour les mathématiques : certaines erreurs ont rapidement été mises de côté et n'ont pas été un sujet d'exploration pour la classe faisant en sorte qu'elles ont été peu, voire pas, productives pour les mathématiques qui ont été faites[5]. L'exploitation des erreurs s'est donc imposée comme étant un élément central dans leurs productivités mathématiques en classe. À comprendre plus comme des occasions ou des « tremplins » pour reprendre l'expression de Borasi (1994), les erreurs ouvrent des opportunités qui offrent d'être saisies pour produire plus ou d'autres mathématiques. D'une certaine façon pour expliciter que les erreurs ne sont pas productives en elles-mêmes, mais qu'elles portent plutôt le *potentiel* de l'être lorsque celles-ci sont exploitées dans la classe, ce qui suit présente les acteurs de la productivité des erreurs en classe de mathématiques.

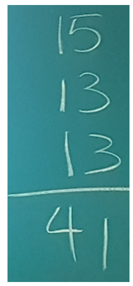
5.1 La place de l'enseignant

Dans les extraits analysés, l'enseignant a joué un rôle important dans la productivité des erreurs en classe. En reformulant les propos des élèves, en questionnant leurs stratégies et en insistant sur des dimensions particulières, il a donné une place à certaines erreurs qui ont alors pu se montrer productives en devenant le sujet de l'exploration mathématique de la classe. Les analyses soulignent que par sa manière de (1) donner une place aux erreurs, (2) faire des erreurs des sujets d'exploration mathématiques et (3) donner des pistes pour les alimenter l'exploration mathématique des erreurs, l'enseignant est un acteur de la productivité mathématique des erreurs en classe. Dans les extraits analysés, des interventions du CE aident à mieux comprendre ces rôles de l'enseignant.

L'enseignant contribue à la productivité des erreurs par sa manière de *donner une place aux erreurs dans la classe*. Par la place qu'il leur fait en ne les écrasant pas et en les exposant au groupe, il participe au réinvestissement productif des erreurs dans les mathématiques qui sont faites. Par exemple, à la Section 4.2 où une compréhension des valeurs de position se développe à partir du 15 + 13 + 13= 41 offert en réponse au

[5] La section 5.4 traite de ces erreurs non-productives.

calcul 947 + 498, le CE rend possible l'exploitation de l'erreur en l'exposant à la classe. En traduisant littéralement au tableau les sous-sommes 15, 13 et 13 de Lambert en 15 + 13 + 13, le CE donne une place importante à l'erreur dans la séance:



En ne l'écrasant pas, au contraire, et en la rendant disponible à toute la classe, il permet à cette erreur de prendre une place centrale dans la séance.

Dans la suite de l'extrait, le CE contribue aussi à *faire de cette erreur le sujet de l'exploration mathématique de la classe*. Par exemple, par le commentaire qu'il fait lorsqu'il dit que cette réponse 41 est « loin du 1500 » proposé initialement comme estimation du 947 + 498, il rend problématique cette solution pour la classe. En pointant un « problème » avec le calcul 15 + 13 + 13 et en donnant même un temps aux élèves pour travailler individuellement sur ce dernier, il engage la classe à creuser cette erreur et participe en ce sens à la productivité qui lui a été associée.

Le CE offre aussi des *pistes pour alimenter l'exploration de l'erreur dans la classe*. Par ses questions et ses commentaires, l'enseignant participe à réinvestir les erreurs de manière productive dans la classe. Lorsqu'il propose aux élèves dans cette même Section 4.2 d'« essayer de les trouver » dans le calcul fait avec l'algorithme d'addition, il oriente les élèves à éventuellement reformuler le 15, 13, 13 comme 15 unités, 13 dizaines et 13 centaines puis à produire 15 + 130 + 1300 pour l'addition 498 + 947 donnant ainsi un sens aux différentes valeurs de position.

La Section 4.6 offre aussi des exemples du rôle de l'enseignant dans l'exploitation des erreurs en classe. Dans ces extraits, le CE n'écrase pas le « 84 % » de Marie et le « 1 tiers » de Justine donnés comme réponses erronées aux problèmes de moyenne et de notes de musique. Le CE se montre plutôt ouvert à transformer les problèmes étudiés pour donner une place à ces erreurs rendant leurs productivités possibles: il offre d'explorer la régularité dégagée par le 84 % de Marie et raye une des notes de musique au tableau pour mieux comprendre son tiers.

Dans cet extrait, le CE offre aussi des pistes pour creuser ces erreurs. Par exemple, suite au 84 % de Marie, il offre 94 % comme prochaine note suivant la régularité et propose au groupe de « continuer la série ». Dans le cas du 1 tiers, il demande comment ce nouveau dessin avec neuf notes de musique peut donner à la fois 1 tiers et 3 neuvièmes amenant sur le terrain des fractions équivalentes. Cet extrait montre ainsi bien comment, par la place qu'il fait aux erreurs, par les questions qu'il formule et par les pistes de réflexion qu'il lance, l'enseignant participe à la productivité des erreurs dans la classe.

D'une manière semblable, à la Section 4.4 le CE accueille l'erreur d'André même si le contre-exemple du nombre 100 donné par Robert a réfuté sa conjecture sur les nombres pairs aussitôt qu'elle a été énoncée. Après qu'elle ait été réfutée, plutôt que de la mettre de côté, il mentionne à la classe qu'il serait important de la comprendre, la rendant ainsi sujet d'exploration. Il offre ensuite au groupe la piste de générer différents exemples et contre-exemples pour l'étudier. Il les note au tableau en deux colonnes pour alimenter et supporter l'exploration mathématique de l'erreur, permettant à la classe de raffiner peu à peu un domaine de validité mathématique pour la conjecture c'est-à-dire l'idée qu'elle puisse s'appliquer à un nombre pair sur deux.

Les extraits analysés regorgent de moments où le CE par ses questions, ses relances et ses pistes contribue à l'exploitation des erreurs dans la classe de mathématiques. Par la place qu'il leur fait dans la classe en ne les écrasant pas, par l'exploration mathématique qu'il oriente autour de celles-ci et par les pistes d'explorations qu'il alimente, il participe à la productivité des erreurs dans la classe de mathématiques.

5.2 La place des élèves

De manière complémentaire à la place soulevée pour l'enseignant, les élèves jouent un rôle important pour la productivité des erreurs en classe. Les élèves n'écoutent pas passivement les propositions et les relances de l'enseignant. Au contraire, leur engagement dans les fouilles fait en sorte que les erreurs *sont* creusées et poussées plus loin : les désaccords qu'ils expriment pour questionner les solutions, les corrections qu'ils apportent pour ajuster les raisonnements et les idées qu'ils offrent en réponse aux relances de l'enseignant stimulent l'exploration mathématique des erreurs. Faisant écho à Borasi (1992) qui souligne que les élèves peuvent accepter ou refuser d'entrer dans les investigations mathématiques faites en classe, les élèves ont leur mot à dire sur cette productivité mathématique des erreurs. Sans leur engagement, l'exploitation des erreurs serait fort différente. Les analyses soulignent que par (1) leur engagement dans les explorations mathématiques des erreurs et (2) les réinvestissements des erreurs qu'ils proposent, les élèves sont acteurs de la productivité des erreurs dans la classe. Plusieurs contributions des élèves dans les extraits analysés permettent de souligner leur place dans l'exploitation des erreurs en classe.

L'analyse présentée à la Section 4.6.1 apporte des pistes de compréhensions relativement à l'importance de *leur engagement dans l'exploration mathématique des* *erreurs.* Lorsque le CE demande aux élèves de continuer la « série » portée par l'erreur 84 % dans les notes pour déterminer la moyenne, les élèves auraient pu porter peu d'attention à cette piste, la trouver hors sujet ou encore ne pas savoir y répondre. L'intervention d'Olivier à ce moment est d'ailleurs saillante à cet effet. En disant à ce moment que le 84 % ne « marche pas », il exprime vouloir mettre de côté cette mauvaise réponse et retourner à la question sur la moyenne. D'une certaine façon en lien avec le besoin que les élèves « embarquent » dans les investigations de la classe soulevé par Borasi (1992), la réaction d'Olivier montre que tout ceci n'est pas nécessairement évident et qu'il peut y avoir un blocage ou un refus. Toutefois, dans l'extrait, Mélodie accepte peu après de creuser cette nouvelle piste ouverte par l'erreur en offrant les réponses 105 et 117 et pousse cette erreur plus loin. Parce que Mélodie a accepté d'« embarquer » dans cette exploration de l'erreur, un nouveau problème prend forme et est exploré.

À la Section 4.4, les contributions des élèves dans l'exploration mathématique de l'erreur permettent aussi d'insister sur l'importance de l'engagement des élèves pour la productivité des erreurs en classe. Dans cet extrait, les élèves abordent de manière enthousiaste le travail sur la conjecture proposée par André sur la non-parité de la division par deux des nombres pairs, même après qu'elle ait été réfutée dès le début de l'extrait. Au tableau, la large liste d'exemples et de contre-exemples générés par les élèves témoigne de leurs apports sur la question :

$82 \div 2 = 41$	$208 \div 2 = 104$
$62 \div 2 = 31$	$52 \div 2 = \cancel{28}\ 26$
$10 \div 2 = 5$	$32 \div 2 = 16$
$106 \div 2 = 53$	$120 \div 2 = 60$
$18 \div 2 = 9$	$36 \div 2 = 18$
$66 \div 2 = 33$	$104 \div 2 = 52$
$30 \div 2 = 15$	$502 \div 2 = 250$
	$56 \div 2 = 28$

La participation engagée des élèves à trouver plusieurs cas (non-)fonctionnels pour la conjecture l'a rendue productive pour les mathématiques, où cet engagement a mené au raffinement d'un domaine de validité mathématique pour la conjecture.

Dans la classe, les élèves contribuent aussi à la productivité mathématique des erreurs par *les réinvestissements d'erreurs qu'ils proposent*. À la Section 4.3, une méthode pour résoudre l'équation $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$ par génération de fractions équivalentes est développée à partir d'une erreur, illustre bien aussi comment les élèves ouvrent eux aussi des portes pour rendre les erreurs productives. Dans l'extrait, Sandrine propose de faire ce « fois 6 » erroné « en bas aussi » pour générer une fraction équivalente à $\frac{3}{5}$, ce qui entraîne une résolution de l'équation par génération de fractions équivalentes. Sandrine offre une manière de réinvestir l'erreur de Thomas et d'en faire quelque chose de plus fort mathématiquement, quelque chose qui fonctionne. Ceci met en valeur la contribution des élèves qui, par les ajustements qu'ils proposent, réinvestissent des erreurs d'une manière productive pour les mathématiques de la classe.

De manière similaire, les différents calculs connus offerts par les élèves pour questionner les réponses au 12×18 à la Section 4.1 ont amené à réinvestir les erreurs de manières productives pour les mathématiques dans la séance. Par exemple, les calculs connus $12 \times 12 = 144$ et $12 \times 6= 72$ offerts par Mia pour expliquer que la réponse du calcul devrait être « loin de 960 » montrent comment, par les idées mathématiques qu'ils proposent, les élèves peuvent réinvestir les erreurs de manières productives dans la classe. Ces produits connus sont des exemples d'idées spontanées offertes par les élèves qui amènent à exploiter les erreurs dans la classe.

Les extraits analysés montrent plusieurs moments où par leurs participations aux fouilles et par leurs contributions originales, les élèves participent à l'exploitation du potentiel des erreurs dans la classe. Ainsi, par leur engagement dans l'exploration mathématique des erreurs et par les réinvestissements des erreurs qu'ils proposent, les élèves jouent un rôle dans la productivité des erreurs en classe.

5.3 La dynamique de classe

La dynamique de classe particulière dans laquelle la productivité des erreurs prend forme et se déploie est aussi importante à souligner. Les interactions décrites plus haut entre l'enseignant et les élèves contribuent à la création d'une dynamique de classe qui rend possible et encourage l'exploitation des erreurs dans la classe. À travers le travail commun de l'enseignant et des élèves qui acceptent les erreurs, les travaillent et les réinvestissent, une dynamique non menaçante où des erreurs peuvent être commises et explorées prend forme au fil de leurs interactions. Bien qu'elle apparaisse de manière plutôt implicite, différents moments dans les extraits analysés permettent de pointer cette dynamique et de comprendre son influence sur la productivité des erreurs en classe de mathématiques.

À la Section 4.1, l'intervention du CE qui explique qu'il vaudrait la peine de s'attarder à la réponse 960 avant de la dire erronée et répond à Patrick qui veut directement passer à une autre réponse montre bien la nature et la présence de cette dynamique de classe participant à la productivité des erreurs. Son commentaire souligne une dynamique de classe où les réponses des élèves, même lorsqu'elles sont fausses, valent la peine d'être prises au sérieux et investiguées. Malgré que Patrick veuille à ce moment passer à « autre chose », l'importance de ne pas mettre de côté les erreurs est renforcée et permet au 960 de devenir une erreur productive pour les mathématiques de la classe en devenant un critère mathématique pour juger des réponses obtenues.

À la Section 4.4, la manière qu'a le CE d'insister sur l'importance de comprendre la conjecture fausse d'André après que le contre-exemple du nombre 100 ait été offert d'emblée par Robert permet aussi de mettre en valeur cette dynamique de classe où les erreurs sont acceptées. Bien qu'à ce moment la conjecture est pointée comme fausse par le contre-exemple de Robert, une manière de faire en classe avec les erreurs est rendue explicite par ce commentaire qui invite non pas à écarter l'erreur, mais à la creuser davantage. Ce commentaire pointe que les réponses ne sont pas mises de côté lorsqu'elles sont fausses dans la classe et que même lorsqu'elles le sont, elles prennent plutôt le sens d'opportunités pour mieux comprendre différentes dimensions des mathématiques en jeu. Bien que dans ces exemples, ceci est stimulé par le CE, c'est aussi l'acceptation d'entrer dans le jeu des élèves qui contribue à l'établissement de cette dynamique de classe : ensemble, enseignant et élèves, forment cette dynamique de classe où les erreurs ont une place et font partie intégrante des mathématiques qui y sont faites.

Cette dynamique de classe où les erreurs sont prises en compte transparaît aussi dans les manières qu'ont les élèves de risquer des réponses pour lesquels ils sont incertains. À la Section 4.5, où différentes combinaisons erronées de 10 ¢ et de 25 ¢ sont proposées une à la suite de l'autre par les élèves et produisent une résolution du problème, la dynamique non menaçante où les erreurs sont acceptées est centrale. Dans cet extrait, les élèves se risquent à offrir des réponses bien qu'ils ne soient pas certains de celles-ci, produisant l'avancée de la résolution qui est décrite. Cette manière qu'ils ont d'offrir des réponses incertaines et erronées les unes après les autres jusqu'à l'obtention d'une solution satisfaisante témoigne de cette dynamique de classe où les risques sont possibles et où les solutions, même incomplètes, sont considérées.

Au fil de ces interactions entre l'enseignant et les élèves qui font des mathématiques ensemble avec les erreurs, une dynamique prend forme dans la classe contribuant à la productivité des erreurs. Cette dynamique de classe peut être illustrée par une boucle présentée à la Figure 5.1 dans laquelle l'enseignant et des élèves, qui travaillent *avec les erreurs,* donnent forme à une manière de travailler dans la classe de mathématiques.

Au fil de leurs échanges, cette boucle prend force et contribue à la productivité des erreurs en classe.

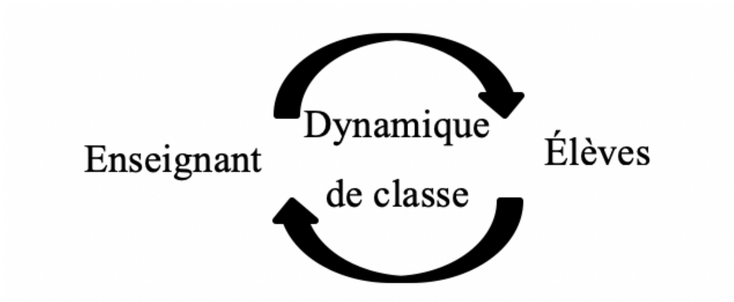


Figure 5.1 Dynamique de classe et ses acteurs

De son côté, l'enseignant instigue et alimente la boucle en donnant une place aux erreurs, en les rendant sujets d'exploration et en offrant des opportunités pour les réinvestir. De leur côté, les élèves participent à cette boucle en s'engageant dans ces explorations et en apportant des idées pour réinvestir les erreurs dans la classe. Ensemble, l'enseignant et les élèves mettent en place une dynamique dans laquelle les erreurs sont acceptées et font partie des mathématiques qui sont faites dans la classe.

Cette dynamique de classe de laquelle découle la productivité des erreurs est, en retour, alimentée par cette productivité mathématique des erreurs dans la classe. Les retombées productives des erreurs soulevées au Chapitre 4 alimentent à leur tour l'enseignant et les élèves qui se trouvent renforcés dans leurs manières de faire une place aux erreurs en classe. En ce sens, cette productivité des erreurs participe à soutenir les rôles respectifs de ces acteurs pour l'exploitation des erreurs dans la classe. En permettant cette productivité, mais en étant aussi alimentée par cette productivité, la dynamique de classe que soutiennent l'enseignant et les élèves apporte une compréhension du contexte entourant la productivité des erreurs dans la classe de mathématiques.

En représentant une manière de faire en classe de mathématiques où les erreurs sont importantes et valent la peine d'être creusées, la dynamique de classe qui prend force à travers les interactions entre élèves et enseignant contribue à la productivité des erreurs en classe. C'est ainsi aussi à travers et grâce à cette boucle que la productivité des erreurs prend forme. Dans le but de confronter cette boucle et même de comprendre son rôle, la Section 5.4 porte un regard sur d'autres événements des séances où, justement, diverses erreurs n'ont pas été productives pour les mathématiques.

5.4 Des erreurs non-productives dans la classe

Les erreurs en classe peuvent ne pas toujours devenir un sujet d'exploration. Le rôle de l'enseignant, des élèves et de la dynamique de classe qu'ils entretiennent par leurs interactions peuvent aider à comprendre comment et pourquoi. Dans ce qui suit, deux erreurs qui n'ont pas été productives pour les mathématiques de la classe sont abordées. En plus d'insister sur l'idée que les erreurs ne sont pas productives en elles-mêmes et que leur exploitation ne va de soi en classe, le retour sur ces deux erreurs apporte une couche de compréhension supplémentaire au contexte dans lequel les erreurs sont productives pour les mathématiques.

Un exemple d'erreur non productive se trouve dans l'extrait de la Section 4.1, où la classe cherche à trouver une réponse au calcul 12×18. Dans la séance, Cynthia offre la réponse erronée 226 en expliquant avoir faire trois fois « $6 \times 12 = 72$ ». Contrairement aux 960, 116 et 200 qui ont, dans cet extrait, amené à développer des critères mathématiques, cette erreur est aussitôt corrigée par un élève qui explique que la réponse de son calcul est 216. Cette intervention amène le CE à rectifier l'erreur en remplaçant directement le 2 par un 1 au tableau :

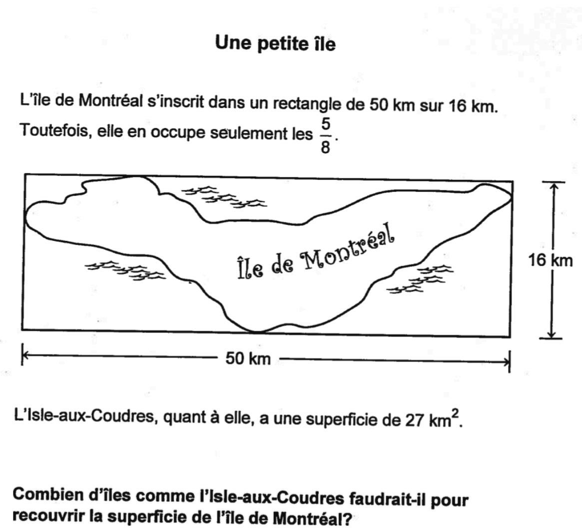
12 × 6 = 72
12 × 6 = 72
12 × 6 = 72
216

Le 226, contrairement aux 960, 116 et 200, est passé presque inaperçu dans la séance. Rapidement corrigé à 216, l'erreur 226 est même associée au 216 précédemment offert par Patrick comme solution au problème. Comme si le 226 avait toujours été 216. Contrairement aux trois autres erreurs pointées comme productives dans cet extrait, le CE n'a pas insisté sur l'importance de le comprendre et les élèves n'ont pas senti le besoin de le questionner. Bien que cette erreur fut accueillie et même notée au tableau, le contexte de sa considération n'a pas amené à l'explorer davantage. Ceci montre que les erreurs sont des occasions à exploiter et que sans cette exploitation, celles-ci peuvent tomber à plat et rapidement être mises de côté.

Une des raisons pouvant expliquer cette mise de côté de l'erreur dans l'extrait est qu'elle a pris le sens d'une faute (Pellerey, 1987). D'un côté, l'élève qui corrige la réponse de Cynthia à 216, apporte simplement un petit correctif amenant à penser qu'il comprend et qu'il est en accord avec le raisonnement derrière son calcul. De son côté, en acceptant tout de suite cette correction du 226 en 216 au tableau, le CE montre qu'il interprète sa réponse comme une inattention qui s'est glissée dans le processus. Bien qu'elle soit accueillie par la classe, le fait qu'elle soit interprétée comme une faute a amené les élèves et l'enseignant à mettre rapidement le 226 de côté, son potentiel mathématique demeurant inexploité.

Dans les séances analysées, certaines erreurs qui pourraient être interprétées comme des fautes ont toutefois été explorées. Par exemple, à la Section 4.6.2 lorsque Justine exprime que son « 1 tier » provient d'une simple omission en expliquant ne pas avoir vu une des dix notes de musique, elle pointe qu'il n'y a pas de rationnel mathématique justifiant sa réponse pour le problème qui est au tableau. Une différence qui peut être pointée entre ce «1 tiers» exploité et le « 226» inexploité est que le tiers venait un peu « sauver » le problème pour lequel aucune autre solution n'était alors envisagée. Le retour sur cette distinction entre erreur et faute amène à mieux comprendre que dans certains cas, les fautes peuvent ne pas devenir sujets de l'exploration mathématique en étant possiblement conceptuellement moins riches à investiguer.

Une autre erreur qui tombe à plat au niveau des mathématiques, mais qui n'a pas fait l'objet d'une analyse est la suivante. Dans une classe de 5e année, les élèves travaillent à résoudre le problème suivant projeté au tableau[6] :



Dans la séance, un élève présente sa solution et explique qu'une sous-étape est de faire la soustraction 125 – 132. Il offre le calcul suivant :

[6]Ministère de l'Éducation des Loisirs et du Sport. (Juin 2005). Prototype d'épreuve mathématique, fin du 3e cycle.

$$\begin{array}{r} \cancel{1}{}^{1}25 \\ -\ 132 \\ \hline 193 \end{array}$$

Suite à cette erreur, le résultat de sa différence est surprenant puisque la réponse 193 est plus grande que le nombre de départ 125. Ceci est soulevé par le CE qui énonce la soustraction 132 – 125 pourrait aider à trouver la solution au calcul, mais sans que celle-ci ne soit réalisée. Une trentaine de secondes s'écoulent et le CE ramène le groupe à l'exploration du problème initial.

Cet exemple montre que les erreurs ouvrent des opportunités pour les mathématiques qui doivent être saisies pour devenir productives. Bien que cette erreur porte un potentiel d'amener à mieux comprendre le sens des calculs comme le 15 + 13 + 13 présenté à la Section 4.2, celui-ci demeure toutefois inexploité dans l'extrait. Le CE n'a pas saisi l'occasion pour soulever des questions supplémentaires sur le calcul, mais a plutôt insisté pour revenir à l'objectif alors poursuivi par la classe c'est-à-dire la résolution du problème de superficie. Les élèves n'ont de leur côté pas « embarqué » dans l'exploration de l'erreur. Aucun ajustement ou commentaire vis-à-vis la réponse surprenante n'a été offert de leur part.

Une explication de ceci pourrait se trouver dans le fait que cette erreur soulève des questions qui étaient hors sujet dans le contexte de la question étudiée. Contrairement au 15 + 13 + 13 de Lambert à la Section 4.2 qui amenait à raffiner des compréhensions impliquées dans le calcul du 947 + 498 qui était alors à l'étude par la classe, le 125 – 132 = 193 amène ailleurs expliquant possiblement pourquoi le CE n'a pas exploité l'occasion pour raffiner des compréhensions de la soustraction. Parce que cette erreur est sortie du sujet d'exploration de la classe qui était alors un problème de comparaison de surfaces, cette erreur a rapidement été mise de côté et n'a pas été productive pour les mathématiques de la classe.

Ces deux exemples d'erreurs non-productives mis en reliefs avec des exemples d'erreurs productives pour la classe de mathématiques amènent à souligner que lorsque *les erreurs sont des fautes* c'est-à-dire qu'elles ne sont pas sous-tendues par un rationnel mathématique, ou lorsque *les erreurs sont hors sujet* c'est-à-dire qu'elles amènent à creuser des dimensions qui sont trop loin des mathématiques à l'étude, leurs potentiels est possiblement moins exploité dans la classe. Dans ces situations, il a été soulevé que bien que les erreurs soient tout de même accueillies, l'enseignant et les élèves n'y voient pas le même potentiel et sont plus enclins à simplement les corriger ou à les mettre de côté.

CHAPITRE VI

CONCLUSIONS

Dans le but d'aborder les questions de recherche qui orientent ce travail de maîtrise, ce chapitre relève les éléments centraux qui se dégagent de l'étude de la productivité des erreurs en classe de mathématiques. Ce chapitre est divisé en deux parties. La Section 6.1 aborde un retour sur les questions de recherche en soulevant des éléments de réponses précisant la nature de la productivité des erreurs en classe de mathématiques et de quelles façons les erreurs peuvent participer au développement des mathématiques dans la classe. La Section 6.2 avance des questionnements futurs soulevés par l'étude et des pistes éventuelles de recherche.

6.1 La nature de la productivité mathématique des erreurs dans la classe

Ce travail de recherche est orienté par les questions de recherche suivantes :

Questions de recherche
Quelle est la nature des retombées mathématiques des erreurs en classe de mathématiques?
De quelles façons les erreurs peuvent participer au développement des mathématiques en classe?

Ce travail de recherche à la maîtrise fait ressortir des dimensions qui informent sur la productivité mathématique des erreurs en classe à deux niveaux. Un 1er niveau précise la nature des retombées mathématiques des erreurs en classe de mathématiques. Un 2e niveau aborde de quelles façons les erreurs peuvent participer au développement des mathématiques en classe soit le contexte entourant leur productivité mathématique en classe. Dans ce qui suit, ces deux niveaux de compréhension de la productivité des erreurs dans la classe de mathématiques sont présentés.

La problématique présente un contexte où les réflexions sur l'erreur ont pris une place importante au fil des années et des travaux de recherche. De ces travaux présentant des conceptions variées de l'erreur, un courant mathématique où l'erreur prend le sens d'une occasion pour faire des mathématiques a été souligné. Inspiré de l'histoire des mathématiques, ce courant mathématique dégage une productivité des erreurs au niveau de la discipline où celles-ci sont vues comme ayant façonné la discipline mathématique elle-même (Lakatos, 1978 ; Kline, 1980 ; Davis & Hersh, 1981 ; Proulx & Maheux, 2012). Tirant ancrage dans cette vision dite « productive », ce travail de maîtrise donne un sens à cette productivité mathématique des erreurs dans la classe.

Les travaux de recherche de Borasi sur l'erreur (1987, 1994, 1996) ont participé au développement de cette conceptualisation des erreurs productives pour les mathématiques en classe. Ses travaux, dans lesquels l'erreur est envisagée comme un « tremplin » pour les mathématiques, mettent en lumière des retombées métamathématiques d'une vision productive des erreurs dans la classe : ils soulignent que cette vision productive contribue à développer un rapport positif à la discipline et à développer des habiletés de communication, justification, argumentation, questionnement, engagement et autonomie en mathématiques. Les retombées soulevées par Borasi ouvrent des questionnements relatifs à la nature des mathématiques qui sont produites dans la classe lorsque les erreurs sont envisagées comme productives. En effet, si le travail sur les erreurs transforme les manières de concevoir et de faire les mathématiques en classe, qu'en est-il des mathématiques qui y sont faites ? Se situant dans le prolongement des travaux de Borasi, ce travail de maîtrise investigue la nature mathématique de cette productivité des erreurs dans la classe en précisant leurs retombées possibles pour les mathématiques.

6.1.1 Les retombées mathématiques des erreurs en classe de mathématiques

L'étude conduite trace un parallèle important entre la productivité des erreurs au niveau de la discipline et au niveau de la classe de mathématiques. En ce sens, une première réponse à la question de recherche est qu'il est possible de reconnaître dans la classe une productivité mathématique des erreurs analogue à celle soulevée au niveau de la discipline. Un regard sur l'histoire des mathématiques au Chapitre 2 a permis de dégager théoriquement six retombées productives des erreurs pour les mathématiques, soit les erreurs qui permettent de : (1) prendre des décisions pour les mathématiques, (2) raffiner des objets mathématiques, (3) créer des objets mathématiques, (4) établir des domaines de validité mathématiques, (5) continuer à avancer dans la résolution mathématique et (6) définir des problèmes mathématiques. Réinvesties et interprétées dans la classe, ces retombées précisent pour la classe les manières qu'ont les erreurs d'être productives, c'est-à-dire les retombées mathématiques possibles des erreurs pour la classe.

L'histoire des mathématiques a montré que les erreurs peuvent amener à *prendre des décisions pour les mathématiques* : l'incertitude générée par des erreurs a amené à baliser des manières de faire en mathématiques. De manière analogue, le travail en classe a montré que l'incertitude générée par la prise en compte d'erreurs dans la résolution peut aussi mener à des prises de décisions. L'exemple à la Section 4.1 des erreurs 960, 116 et 200 offertes en réponse au calcul 12×18 montre que les erreurs peuvent générer le besoin de développer des critères mathématiques pour juger d'une solution à un problème. Tout comme dans la discipline mathématique, le besoin de validation engendré par les erreurs peut amener à baliser des manières de faire sens d'une réponse cherchée. Pour la classe, les exemples étudiés montrent que les erreurs peuvent forcer la prise de décisions pour les mathématiques en amenant à préciser des manières pour (in)valider des solutions.

L'histoire des mathématiques a montré que les erreurs peuvent amener à *raffiner des objets mathématiques* : les informations qu'ont révélées des erreurs sur une question ou un problème ont amené à préciser le travail mathématique. De manière analogue, le travail en classe a montré que les erreurs peuvent aussi permettre le raffinement d'objets mathématiques. L'exemple à la Section 4.2 du 15 + 13 +13 offert en réponse au calcul 498 + 947 montre que des erreurs peuvent conduire au développement de compréhensions mathématiques plus fines. Les informations que révèlent les erreurs sur les compréhensions ou les problèmes peuvent générer le besoin de les raffiner en explicitant certaines dimensions implicites. Pour la classe, les exemples étudiés montrent que les erreurs peuvent provoquer le raffinement d'objets mathématiques en amenant à développer une compréhension plus fine des questions, réponses ou stratégies mathématiques.

L'histoire des mathématiques a montré que les erreurs peuvent permettre de *créer des objets mathématiques* : les nouvelles pistes d'exploration qu'ont soulevé les erreurs a ouvert à la forma(lisa)tion nouveaux objets mathématiques. De manière analogue, le travail en classe a montré que les erreurs peuvent aussi créer des objets mathématiques. L'exemple à la Section 4.3 du « fois 6 » erroné dans la résolution d'une équation montre que les erreurs peuvent générer des méthodes mathématiques. En offrant la possibilité d'être réinvesties ou ajustées, les erreurs peuvent ouvrir de (nouvelles) pistes pour la résolution mathématique. Pour la classe, les exemples étudiés montrent que les erreurs peuvent conduire à la création d'objets mathématiques en ouvrant des chemins pour la résolution mathématique.

L'histoire des mathématiques a montré que les erreurs peuvent permettre *d'établir des domaines de validité mathématique* : le contexte possiblement restreint dans lequel les erreurs sont valides étant devenu une occasion de le circonscrire. De manière analogue, le travail en classe a montré que les erreurs peuvent aussi mener à l'établissement de domaines de validité. L'exemple à la Section 4.4 de la conjecture réfutée sur les nombres pairs a mené à la production d'un contexte mathématique dans lequel cette conjecture est valide. En échouant à réponse au cas général, les erreurs peuvent être des occasions de définir des cas particuliers où celles-ci peuvent être mathématiquement valides. Pour la classe, ces exemples montrent que les erreurs peuvent mener à l'établissement de domaines de validité mathématique en amenant à circonscrire des cas où elles sont valides.

L'histoire des mathématiques a montré que les erreurs peuvent permettre de *continuer à avancer dans la résolution mathématique* : en constituant des étapes importantes permettant de dépasser des blocages, les erreurs ont contribué et soutenir les pas suivants dans la résolution mathématique. De manière analogue, le travail en classe a montré que les erreurs peuvent aussi permettre de continuer à avancer. L'exemple à la Section 4.5 d'une résolution mathématique produit à coup d'essais-erreurs montre que les erreurs peuvent produire une résolution mathématique. En tant que réponses imparfaites, les erreurs peuvent motiver et informer les pas suivants dans la résolution et mener à la résolution d'un problème. Pour la classe, ces exemples montrent que les erreurs peuvent permettre de continuer à avancer dans la résolution mathématique en offrant une base pour la poursuite de la résolution mathématique.

Finalement, l'histoire des mathématiques a montré que les erreurs peuvent permettre de *développer de nouveaux problèmes mathématiques* : les particularités qu'ont soulignées les erreurs ont défini des fouilles mathématiques. De manière analogue, le travail en classe a montré que les erreurs peuvent aussi développer des problèmes mathématiques. Les exemples à la Section 4.6 des réponses erronées « 84 % » et « 1 tier » ayant mené à la (re)définition de problèmes mathématiques. En générant de nouvelles distinctions, les erreurs peuvent se montrer des occasions d'aborder d'une nouvelle manière une question ou de poser de nouveaux problèmes. Pour la classe, ces exemples montrent que les erreurs peuvent permettre de développer de nouveaux problèmes en spécifiant de nouvelles interrogations pour les mathématiques.

Ces six retombées productives des erreurs comprises dans la classe avec les élèves spécifient la nature des retombées mathématiques possibles dans la classe. Ces six retombées offrent en ce sens un outil pour comprendre, voire même orienter, la compréhension des mathématiques qui sont produites en classe lorsque des erreurs sont commises et explorées. En ouvrant au potentiel d'être réinvesties et même bonifiées, ces six retombées productives des erreurs dans la classe de mathématiques constituent une première retombée de ce travail de maîtrise.

6.1.2 Les types de productivité mathématique des erreurs en classe

L'étude amène aussi à préciser la productivité elle-même des erreurs en classe de mathématique. Dans ses travaux de recherche, Borasi (1987, 1994, 1996) souligne que les erreurs peuvent être productives pour les mathématiques en étant des occasions, des points de départ, des tremplins pour soulever des questions (sur les) mathématiques. Ce travail de maîtrise permet de raffiner la compréhension de cette productivité à partir des cas précis étudiés dans la classe. De ceci se dégage que les erreurs en classe peuvent participer à la production de mathématiques en (1) stimulant des explorations mathématiques supplémentaires et (2) ouvrant de nouvelles possibilités pour les mathématiques.

En générant ce qui a été caractérisé de « doute productif », les erreurs peuvent *stimuler des explorations mathématiques supplémentaires dans la classe*. Rappelant les propos de Borasi qui souligne que les erreurs peuvent générer un « call to action », les erreurs peuvent générer le besoin de pousser plus loin les investigations mathématiques. Les exemples étudiés où les erreurs ont permis de développer des critères mathématiques sur la solution à un problème, raffiner des compréhensions mathématiques, circonscrire un domaine de validité mathématique et continuer à avancer dans la résolution mathématique montrent que les erreurs peuvent amener à creuser les mathématiques qui sont faites en raffinant et en précisant les fouilles. En amenant à aller plus loin, à faire plus de mathématiques, les erreurs peuvent être productives pour les mathématiques. Ce potentiel des erreurs qui stimule et supporte les investigations mathématiques a été soulevé comme un type de productivité des erreurs dans la classe.

En ne répondant pas aux attentes, les erreurs peuvent aussi *ouvrir de nouvelles possibilités pour les mathématiques dans la classe*. En étant justement à côté de ce qui est déjà tracé et attendu, les erreurs peuvent ouvrir des portes pour la résolution mathématique. Les exemples étudiés, où les erreurs ont mené à la formation d'une méthode mathématique pour résoudre une équation et permis de (re)définir les questions posées montrent cette productivité des erreurs qui amènent mathématiquement ailleurs en générant de nouvelles possibilités pour les fouilles subséquentes réalisées en classe. Ce potentiel des erreurs qui amène à faire de nouvelles distinctions et à faire des mathématiques qui n'étaient pas prévues et tracées a été soulevé comme un type de productivité des erreurs dans la classe.

Ensemble, les six dimensions productives des erreurs dans la classe à travers ces deux types de productivité des erreurs en classe dressent un portrait de la nature de la productivité des erreurs au niveau des mathématiques qu'elles peuvent produire en classe. Dans un tableau synthèse (Tableau 6.1), les erreurs issues de l'étude au niveau de la classe et de la discipline mathématique sont réinvesties pour appuyer la compréhension des catégories issues des croisements dans la grille. Certaines catégories n'ont pas été rencontrées dans l'étude, pour ces dernières une compréhension potentielle de cette productivité des erreurs est offerte.

Tableau 6.1 Synthèse sur la nature de la productivité des erreurs dans la classe de mathématiques

Types de productivité des erreurs en mathématiques			
Dimensions de la productivité des erreurs en mathématiques		*Les erreurs stimulent des explorations mathématiques supplémentaires*	*Les erreurs ouvrent des nouvelles possibilités pour les mathématiques*
	Prendre des décisions sur les mathématiques	Les erreurs produisent des balises ou des critères mathématiques amenant à (in)valider des solutions Exemple: À la Section 2.1 la production de critères pour comparer la cardinalité d'ensembles infinis au niveau de la discipline. À la Section Section 4.1 les erreurs 960, 116 et 200 ont généré des critères pour le calcul 12×18	Les erreurs amènent à sortir du contexte du problème à l'étude pour faire intervenir d'autres/de nouvelles notions permettant de juger de la réponse à un problème.
	Raffiner des objets mathématiques	Les erreurs forcent à expliciter des dimensions implicites relativement à un concept, une méthode ou un raisonnement mathématique. Exemple : À la Section 4.2 l'erreur 15 + 13 + 13 en réponse au calcul 947 + 498 a généré une compréhension plus fine des valeurs de position	Les erreurs bonifient le travail mathématique sur un problème, un concept, une compréhension Exemple : À la Section 2.2, les contre-exemples produits ont mené au raffinement d'une définition nouvellement informée de polyèdre pour le Théorème d'Euler

<table>
<tr><td rowspan="4">Dimensions de la productivité des erreurs en mathématiques</td><td></td><td>Les erreurs stimulent des explorations mathématiques supplémentaires</td><td>Les erreurs ouvrent des nouvelles possibilités pour les mathématiques</td></tr>
<tr><td>Créer des objets mathématiques</td><td>Les erreurs produisent un renouvellement des compréhensions d’un concept, d’une méthode ou d’une théorie mathématique.</td><td>Les erreurs produisent un nouveau concept, une nouvelle méthode ou nouvelle théorie mathématique.

Exemple :

À la Section 2.3 la preuve erronée de Saccheri mène à la création des géométries non-euclidiennes

À la Section 4.3 le « fois 6 » erroné mène à la création d’une méthode pour résoudre une équation</td></tr>
<tr><td>Établir des domaines de validité mathématiques</td><td>Les erreurs amènent à circonscrire des cas fonctionnels pour une conjecture.

Exemple :

À la Section 4.4, la conjecture fausse sur les nombres pairs a généré un domaine de validité mathématique</td><td>Les erreurs créent un nouveau domaine de validité mathématique

Exemple :

À la Section 2.4, le travail sur les racines carrées de nombres négatifs a mené à l’invention des nombres complexes</td></tr>
<tr><td>Continuer à avancer dans la résolution mathématique</td><td>Les erreurs offrent une base pour avancer dans la résolution mathématique

Exemple :

À la Section 4.5, une résolution mathématique est faite à coup d’essais-erreurs.</td><td>Les erreurs participent à la création d’un chemin pour résoudre un problème

Exemple :

À la Section 2.5, la méthode erronée de Fermat produit une avancée dans la question du calcul de la vitesse instantanée</td></tr>
</table>

Dimensions de la productivité des erreurs en mathématiques		*Les erreurs stimulent des explorations mathématiques supplémentaires*	*Les erreurs ouvrent de nouvelles possibilités pour les mathématiques*
	Définir des problèmes mathématiques	Les erreurs redéfinissent un problème mathématique à l'étude. Exemple : À la Section 4.6, l'erreur « 1 tiers» a amené à renouveler un problème mathématique.	Les erreurs définissent un nouveau problème mathématique. Exemple : À la Section 4.6, l'erreur « 84 % » a amené à définir un nouveau problème mathématique.

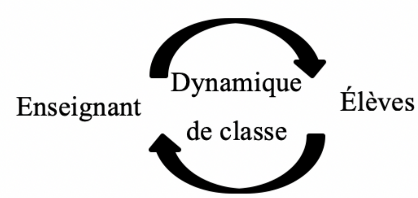
6.1.3 Le contexte entourant la productivité des erreurs en classe de mathématiques

Le contexte encadrant la manière de traiter les erreurs ressort comme central à leur productivité en classe et apporte des réponses à la seconde question de recherche qui motive ce travail sur les façons qu'ont les erreurs de participer au développement des mathématiques dans la classe. En amenant à voir que les erreurs ne sont pas nécessairement productives en elles-mêmes, mais qu'elles portent plutôt *un potentiel mathématique* pouvant être exploité dans la classe, l'explicitation de ce contexte donne un sens, ancré dans la classe, aux façons qu'ont les erreurs d'être productives dans la classe de mathématiques. Le rôle de l'enseignant, des élèves à travers la dynamique de classe qu'ils entretiennent se sont révélés importants dans la productivité des erreurs en classe.

L'enseignant ressort comme un acteur important de la productivité des erreurs en classe. En (1) donnant une place aux erreurs, en (2) les rendant sujets d'exploration et en (3) offrant des pistes pour les creuser/pousser dans la classe, l'enseignant contribue à exploiter le potentiel des erreurs dans la classe en offrant des occasions de les creuser et de les réinvestir de manières productives. D'un autre côté, l'enseignant n'est pas seul avec les erreurs. Les élèves, par (1) leur participation aux investigations mathématiques et par (2) les idées mathématiques qu'ils proposent pour réinvestir les erreurs sont aussi des acteurs importants de la productivité des erreurs en classe. En acceptant de prendre part à ces fouilles et en s'engageant dans la proposition d'idées, les élèves alimentent et contribuent à l'exploitation du potentiel des erreurs en classe.

À travers leur participation mutuelle à l'exploration des erreurs, une dynamique de classe propice à l'exploitation des erreurs se développe dans la classe. Instiguée par l'enseignant qui promeut une manière de faire les mathématiques en classe où les erreurs deviennent sujets d'exploration, et alimentée en retour par les élèves qui acceptent de participer et de contribuer à ces explorations, une dynamique de classe prend forme et prend force au fil des interactions.

Cette dynamique de classe dans laquelle l'exploitation du potentiel des erreurs est possible et même encouragée amène à concevoir une boucle pour faire sens du contexte dans lequel les erreurs sont productives dans la classe. Cette boucle qui alimente et qui est alimentée par la productivité des erreurs propose de mettre en relation les deux acteurs interreliés dans productivité des erreurs en classe : l'enseignant et les élèves.



Ensemble, l'enseignant, les élèves et la dynamique de classe qu'ils entretiennent forment un contexte qui rend possible et même promeut la productivité des erreurs en classe. Cette boucle participe en ce sens à former un contexte où les élèves peuvent risquer des réponses et commettre des erreurs, où ces erreurs peuvent être questionnées et réinvesties et où les erreurs peuvent occuper une place centrale dans l'activité de la classe. En participant à la formation d'un contexte dans lequel les erreurs peuvent être productives pour les mathématiques et en étant, en retour, alimentée par cette productivité, cette boucle fait sens d'un contexte productif pour les erreurs en classe de mathématiques. Cette boucle apporte en ce sens une seconde couche de compréhension à la nature de la productivité des erreurs en classe en spécifiant un contexte particulier attaché à leur productivité mathématique dans la classe.

Les résultats présentés à la Section 6.1 apportent un éclairage important quant à la nature de la productivité des erreurs dans la classe et aux façons qu'ont les erreurs de participer au développement des mathématiques dans la classe, en spécifiant le type de retombées mathématiques possibles des erreurs dans la classe et en donnant un sens au contexte entourant cette productivité dans la classe. Ce sont les réponses explicites aux questions de recherche et les résultats de cette étude. En guise de conclusion, la Section 6.2 souligne certains questionnements soulevés par ce travail de recherche.

6.2 Pistes futures

Cette recherche sur la productivité mathématique des erreurs ouvre à des questions supplémentaires sur la place des erreurs en classe de mathématiques et dans l'enseignement des mathématiques au quotidien. Mon travail de maîtrise a mis en évidence une richesse des idées mathématiques produites par les erreurs en classe en mettant en évidence ce qu'elles peuvent produire en termes de raisonnements, compréhensions, méthodes et questions originales. Les erreurs, ayant une forte présence en classe de mathématiques, teintent et motivent même les activités de la classe, où comprendre est souvent synonyme d'arriver à ne plus en commettre (Bélanger, 1990-91 ; Kundu & Segupta, 2014 ; Astolfi, 1997). Toutefois, cette vision productive où l'erreur est envisagée comme une opportunité ouvrant à l'avancement des mathématiques peut possiblement transformer le quotidien de la classe. En ce sens, mon projet de maîtrise ouvre au besoin d'approfondir des réflexions sur cette vision productive de l'erreur dans le fonctionnement de la classe de mathématiques. En effet, si les erreurs peuvent maintenant aussi devenir synonymes d'occasions pour creuser et même transformer les mathématiques qui sont faites en classe, ceci change possiblement les manières de leur donner une place dans la classe de mathématiques. Ceci souligne le besoin de développer des manières de faire sens et d'encadrer le travail sur les erreurs productives dans la classe.

Mon projet de maîtrise souligne aussi l'importance d'investiguer l'impact des erreurs sur le développement des mathématiques à long terme. Cette étude s'est centrée sur des extraits ciblés dans des séances de résolution de problèmes ponctuelles et isolées. Toutefois, sur le long terme, cette productivité mathématique des erreurs peut avoir un impact réel sur le travail des élèves en façonnant, voire même en transformant, le développement de leurs compréhensions et idées mathématiques subséquentes. Ceci soulève ainsi le besoin d'étudier l'impact, sur le long terme, dans ce que Maheux (2018) nomme la trace des idées mathématiques, c'est-à-dire leurs histoires, leurs évolutions et leurs manières d'être réinvesties et de se solidifier sur le long terme. En effet, si à court terme les erreurs ont le potentiel de transformer, voire même de créer des mathématiques dans la classe, ceci soulève des questions sur le développement de ces mathématiques à l'échelle d'une année scolaire et même d'une formation en mathématiques. Une étude visant à suivre les mathématiques produites à partir des erreurs durant une année scolaire apporterait des réponses importantes à ces questions.

Finalement, dans les extraits analysés, les erreurs se sont souvent révélées productives en étant dans cette zone grise d'incertitude où plusieurs possibilités mathématiques étaient ouvertes. À plusieurs reprises, ce « call to action » de Borasi (1996) généré par l'incertitude entourant les erreurs a été relevé comme un élément central expliquant leur productivité en classe. En amenant à faire plus de mathématiques et en amenant mathématiquement ailleurs, cette incertitude qu'ont le potentiel de générer les erreurs en classe a été pointée comme génératrice de la productivité mathématique ayant été attribuée aux erreurs dans ce travail de maîtrise. Cette incertitude productive souvent pointée comme importante dans le travail mathématique (Kline, 1980 ; Borasi, 1996) se révèle en ce sens d'intérêt à creuser. D'une certaine façon en invitant à élargir l'étude spécifique des erreurs à d'autres éléments de natures connexes tels les paradoxes, les contradictions et des indéfinitions en mathématiques, cette étude amène à vouloir creuser le rôle potentiellement productif de l'incertitude pour les mathématiques dans la classe.

6.3 Remarques finales

Je conclus ce travail en revenant sur le questionnement initial ayant généré l'envie de creuser la thématique de l'erreur durant ma maîtrise. Dans la problématique, j'ai présenté un événement survenu dans un cours de mathématiques où différentes manières d'envisager une même erreur dans différents contextes (contexte d'un cours universitaire et contexte d'une classe au secondaire) m'ont amené à dégager certaines subtilités dans le concept d'erreur. Dans le Chapitre 1, j'explique vouloir mieux comprendre les nuances que renferme le concept d'erreur en mathématique en dépassant ce statut de vrai/faux, noir/blanc qui semble trop tranché pour bien cerner le rôle que peuvent jouer les erreurs en mathématiques.

Au chapitre 2 où les considérations conceptuelles encadrant ce travail de recherche sont présentées, certains attributs de l'erreur en mathématiques sont discutés. Entre autres, l'idée importante que le statut d'erreur soit relatif à certains cadres mathématiques, implicites ou explicites, qui sont portés par un observateur. Cette position apporte plusieurs nuances au concept d'erreur qui devient non plus une production qui s'oppose à des mathématiques figées dans l'absolu, mais plutôt à des mathématiques qui vivent et évoluent dans l'œil d'un observateur qui les pense, qui les fait et qui les questionne.

Cette perspective a amené à envisager dans ce travail de maîtrise l'erreur non plus comme point d'arrivée insatisfaisant ou inexact relativement à des mathématiques déjà pensées et déjà faites, mais plutôt comme un point de départ motivant à faire, voire inventer, des mathématiques. Ceci a ouvert à d'autres possibilités pour les erreurs que d'être corrigées ou dépassées. Alignées avec les préoccupations à l'origine de ce travail de maîtrise, ce regard sur l'erreur a contribué au développement d'une vision positive et surtout productive de l'erreur en classe de mathématiques. Le nouveau monde mathématique qu'ouvre cette positivité vis-à-vis les erreurs permet de sortir d'un travail axé uniquement sur le passé pour aller vers l'avant et continuer à faire avancer les mathématiques en classe. Un tout nouveau monde, bien didactique, s'ouvre donc pour faire sens et exploiter le potentiel des erreurs en classe.

BIBLIOGRAPHIE

Adihou, A. (2011). Enseignement-Apprentissage des mathématiques et souffrance à l'école. *Le collectif du Cirp, 2*, 90–102.

Ashlock, R. B. (1972). *Error patterns in computation: Using errors patterns to help each student learn.* Pearson: Upper Saddle River, New Jersey.

Astolfi, J. P. (1997). *L'erreur, un outil pour enseigner*. ESF éditeur : Paris, France.

Bachelard, G. (1983). *La formation de l'esprit scientifique*. Vrin : Paris, France.

Bednarz, N. (1987). Pour un cadre de référence du thème : extrait de la conférence. Prospective, *22*(3). 159–160.

Bélanger, M. (1990–1991). Les erreurs en arithmétique : Un siècle de présomption américaine. *Petit x*, *26*, 49–71.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *ESM*, *17*, 125–141.

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the exploration of errors. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 2–8.

Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Heinemann : Portsmouth, NH.

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as springboards for inquiry : A teaching experiment. Journal for Research in Mathematics Education, *25*(2), 166–208.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction : A focus on errors*. Ablex : NJ.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In J. Vanhamme & W. Vanhamme (Eds.), La problématique et l'enseignement des mathématiques. Comptes rendus de la 28e rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques. 101-117.

Brousseau, G. (1986). Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique. CIRADE. Les éditions Agence d'Arc inc. 277-285.

Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques* (Textes rassemblés par Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland et Virginia Warfield). Grenoble : La pensée sauvage : Grenoble.

Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques : études dans le cadre de la théorie des situations didactiques. Petit x, 57, 5–30.

Brousseau, G. (2009). L'erreur en mathématique du point de vue didactique. *Tangente Éducation. 7*. 4–7.

Charlot, B., Bautier, E. et Rochex, Y. (1992). *École et savoir dans les banlieues et ailleurs*. Armand Colin : France.

Davis, P.J. et Hersh, D. (1981). *The mathematical experience*. Birkhauser : Boston

Douady, R. (1994). *Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir*. Repères IREM no 15. Topiques Editions, Pont à Mousson.

IREM d'Aquitaine. (2013). L'erreur dans l'apprentissage des mathématiques. *Petit x, 93*, 7–28.

Kline, M. (1980). *Mathematics : the loss of certainty.* Oxford University press : New York.

Kundu, U., et Segupta, D. (2014). Error analysis in mathematics in relation to secondary school students. *Indian Journal of Educational Research*, *3*, 105–125.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. New Cambridge University Press: New York.

Maheux, J.-F. (2018, décembre). *The absence and the presence : a study of living mathematical traces in the classroom*. Séminaire présenté au Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématique (LEAM). UQAM, Montréal.

Maturana, H.R. (1987). Everything is said by an observer. In W.I. Thompson (Ed.) *GAIA: A way of knowing* (pp. 65–82). Lindisfarne Press : Hudson, NY.

Maturana, H.R. (1988). Reality : the search for objectivity or the quest for compelling argument. *The Irish Journal of Psychology*. *9*(1), 25–82.

Maturana, H.R. et Poerksen, B. (2004) The knowledge of knowledge entails responsibility: Humberto R. Maturana on truth and oppression, structure determinism and dictatorship, and the autopoiesis of living. In: Poerksen B. (ed.) The certainty of uncertainty: Dialogues introducing constructivism. 47–83.

Maturana, H.R. et Varela, F. J. (1987). The tree of knowledge : The biological roots of human understanding. Shambhala publication. Boston.

Pellerey, M. (1987). Pour un cadre de référence du thème : extrait de la conférence. Prospective, *22*(3). 115–116.

Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 405–435.

Proulx, J., et Maheux, J.-F. (2012). Épistémologie et didactique des mathématiques : questions anciennes, nouvelles questions. *For the Learning of Mathematics*, *32*(2), 41–46.

Proulx, J., et Savard, A. (2016). Regards sur l'erreur en mathématiques. *Chronique – Fondements et épistémologie de l'activité mathématique*.

Savoie-Zajc. L. (2018). La recherche qualitative/interprétative. In T. Karsenti & L. Savoie-Zajc (Eds,). *La recherche en éducation : étapes et approches (4e éd.).* Presse de l'Université de Montréal : Montréal.

Smith, J.P., DiSessa, A., Roschelle, J. (1993). Misconceptions reconceived : A constructivist analysis of knowledge in transition. *The journal of the learning sciences*. *3*(2), 115-163.

Steffe, L. P., et Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), Research design in mathematics and science education (pp. 267–307). Erlbaum: Hillsdale, NJ.

Steffe, L.P. (1991). The constructivist teaching experiment: illustrations and implications. In E.von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 177–194). Kluwer: Netherlands.