

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

COMBINATOIRE DES ALGÈBRES AMASSÉES

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR

VÉRONIQUE BAZIER-MATTE

AVRIL 2021

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.04-2020). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

À Grand-Maman Coucou, ma chère grand-mère décédée le 26 décembre 2020

Je tiens d'abord à remercier mon superviseur, Hugh Thomas, pour son support tout au long de mon doctorat et, en particulier pour cette thèse. Ses nombreuses relectures et ses commentaires l'ont assurément améliorée. Je voudrais également remercier Ibrahim Assem, mon superviseur de maîtrise. Dès mon entrée à l'université, il a cru en moi et m'a toujours encouragée. Il continue de jouer un rôle de mentor et c'est très apprécié! Par ailleurs, je voudrais remercier Pierre-Guy Plamondon qui m'a accueillie à Paris-Saclay. J'ai adoré travailler avec lui dans le cadre de mon stage dans lequel j'ai énormément appris.

Je remercie également les membres de mon jury de thèse : Yann Palu, Charles Paquette et Franco Saliola. Leurs commentaires ont permis non seulement d'éviter plusieurs coquilles, mais surtout d'augmenter la qualité de cette thèse

D'un côté financier, je remercie le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie pour le financement qu'il m'a offert pendant trois des quatre années de mon doctorat ainsi que le Fonds de recherche du Québec – Nature et technologies pour le financement de la dernière année. Je remercie en plus Mitacs, le Centre de recherches mathématiques et, encore une fois, le Fonds de recherche du Québec – Nature et technologies pour les bourses de stage à l'étranger qui m'ont permis de passer cinq mois en France. Finalement, je remercie à nouveau Hugh Thomas, car j'ai pu assister et présenter des exposés dans de nombreuses conférences à travers le monde grâce à ses fonds de recherche.

J'aimerais aussi exprimer ma gratitude envers Mathcamp pour l'expérience, certes, parfois difficile, mais ô combien enrichissante. C'est tellement motivant de travailler avec des jeunes si passionnés et allumés par rapport aux mathématiques. Un merci particulier à Laurie et Maggie qui m'ont fait goûter aux joies du mentorat dans un projet de recherche commun.

Par ailleurs, je remercie notre premier ministre François Legault, qui en nous im-

posant un confinement, en plus de préserver notre santé, a créé un environnement propice à la rédaction de thèse. J'ai ainsi pu profiter d'un printemps sans l'attrait des sorties et de la visite des amis et de la famille, à me concentrer uniquement sur cette thèse.

Sur un plan personnel, je remercie mes parents, qui me traitent toujours aux petits oignons, ainsi que mes frères pour leur soutien, en particulier Xavier, qui relit et peaufine mes demandes de bourses. Je remercie également Mireille qui a évité à cette thèse tant d'erreurs grammaticales ! Pour terminer, je remercie mon mari, Guillaume Douville, pour son appui toutes ces dernières années.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	vii
RÉSUMÉ	ix
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I ALGÈBRES AMASSÉES	3
1.1 Définition	3
1.1.1 Carquois	3
1.1.2 Amas et graines	7
1.1.3 Algèbres amassées	9
1.2 Propriétés des algèbres amassées	12
1.3 Algèbre amassée provenant de surface	13
1.3.1 Surfaces marquées et triangulations	14
1.3.2 Algèbres amassées provenant de surface	18
1.3.3 Bases des algèbres amassées provenant de surface	21
1.3.4 Produit de variables amassées et relations d'écheveau	24
1.4 Catégorification	27
1.4.1 Algèbre de chemins et catégorie de modules	27
1.4.2 Catégories triangulées, dérivées et amassées	30
1.4.3 Propriétés de la catégorie amassée	34
1.4.4 Propriétés des objets inclinants-amassés	37
1.5 Lien entre algèbres amassées et catégories amassées	38
CHAPITRE II ASSOCIAÈDRE GÉNÉRALISÉ	41
2.1 Préliminaires	43
2.1.1 Algèbre inclinée-amassée	43
2.1.2 Classes et paires de torsion	49

2.1.3	Index et \mathfrak{g} -vecteurs	54
2.2	Construction de l'associaèdre	56
2.3	Démonstration de la validité de la construction de l'associaèdre	59
2.3.1	Caractérisation de points de $\mathcal{E}_{\mathfrak{c}}$ et $\mathcal{U}_{\mathfrak{c}}$	59
2.3.2	Polytope $\mathcal{P}_{\mathfrak{c}}$	66
2.3.3	Sommets de l'associaèdre	71
2.3.4	Démonstration de la structure d'associaèdre de $\mathcal{A}_{\mathfrak{c}}$	76
2.4	Propriétés de cette construction de l'associaèdre	79
2.4.1	Normales aux facettes	79
2.4.2	Lien entre l'associaèdre et le treillis des classes de torsion	80
CHAPITRE III UNISTRUCTURALITÉ		85
3.1	Définitions et historique de l'unisstructuralité	86
3.2	Démonstration de l'unisstructuralité	88
CONCLUSION		95
APPENDICE A TRANSLATION D'AUSLANDER-REITEN		97
A.1	Catégorie de modules	97
A.2	Catégorie dérivée bornée et catégorie amassée	98
APPENDICE B CATÉGORIE DE FONCTEURS		101
RÉFÉRENCES		103

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Carquois	4
1.2 Mutation de carquois	6
1.3 Graine	8
1.4 Mutation de graines	9
1.5 Algèbre amassée de type \mathbb{A}_2	11
1.6 Graphe d'échange d'une algèbre amassée de type \mathbb{A}_2	12
1.7 Surface marquée sans ponction	14
1.8 Arcs compatibles et incompatibles	16
1.9 Boucle essentielle	16
1.10 Triangulation d'une surface marquée (ou hibou dubitatif)	17
1.11 Flip de l'arc γ_5	18
1.12 Flip de l'arc γ_4	21
1.13 1-bracelet, 2-bracelet et 3-bracelet	22
1.14 Multicourbe \mathcal{C}' -compatible	23
1.15 Multicourbe	25
1.16 Lissage d'une multicourbe	26
1.17 Résolution lisse d'une multicourbe	26
2.1 Projection dans \mathbb{R}^2 de l'associaèdre donné par le parenthésage d'un mot de quatre lettres avec la triangulation du pentagone associée à chaque mot	42
2.2 Catégorie de modules sur l'algèbre B	44

2.3	Carquois ordinaire de l'algèbre B	48
2.4	Treillis des classes de torsion sur l'algèbre B	52
2.5	L'espace $\mathcal{E}_{\underline{c}}$ pour Q de type \mathbb{A}_1	58
2.6	L'espace $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ pour Q de type \mathbb{A}_1	58
2.7	L'espace $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ pour Q de type \mathbb{A}_1	59
2.8	Polytope $\mathcal{P}_{\underline{c}}$	67
2.9	Associaèdre obtenu pour l'espace $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ à partir d'un carquois de type \mathbb{A}_3 cyclique	79

RÉSUMÉ

Le premier chapitre de cette thèse introduit les algèbres amassées ; ce sont des algèbres de polynômes de Laurent dont les générateurs s'obtiennent par un processus récursif appelé *mutation*. On commence avec une *graine*, paire formée d'un ensemble de n variables, appelé *amas*, et d'un carquois, graphe orienté à n points. La mutation d'une graine remplace une variable à la fois et modifie le carquois, donnant ainsi une nouvelle graine. L'algèbre amassée est engendrée par toutes les variables obtenues par mutations successives, qu'on appelle *variables amassées*.

Le *graphe d'échange* d'une algèbre amassée permet de visualiser les relations entre ses amas. Dans ce graphe, les sommets correspondent aux amas de l'algèbre amassée et les arêtes correspondent aux mutations : deux sommets sont reliés par une arête si les amas associés s'obtiennent l'un à partir de l'autre par une mutation. Une façon intuitive de construire le graphe d'échange d'une algèbre amassée est de calculer une à une toutes les mutations. Nous donnons dans le deuxième chapitre une façon de réaliser le graphe d'échange d'une algèbre amassée comportant un nombre fini de variables amassées dans \mathbb{R}^n , où n représente le nombre de variables initiales de l'algèbre (ou de points du carquois). Cette réalisation se calcule directement plutôt que récursivement.

Finalement, dans le dernier chapitre de cette thèse, nous prouvons l'*unistructuralité* d'un certain type d'algèbre amassée. Une algèbre amassée est unistructurale si l'ensemble de ses variables amassées détermine uniquement ses amas. En d'autres mots, une algèbre amassée est unistructurale si une autre algèbre amassée, possédant exactement les mêmes variables d'amas, possède aussi forcément les mêmes amas.

INTRODUCTION

Les algèbres amassées sont des algèbres commutatives munies d'une riche structure : leurs générateurs, les *variables amassées* sont groupées en ensembles finis, appelés *amas*, et chacun d'eux est associé à une matrice (ou à un *carquois*). Un amas et une matrice forment ensemble une *graine* de telle façon que chaque graine peut être déduite d'une autre par un procédé appelé *mutation*. Depuis leur définition par S. Fomin et A. Zelevinsky (Fomin et Zelevinsky, 2002; Fomin et Zelevinsky, 2003; Fomin et Zelevinsky, 2007), les algèbres amassées ont été largement étudiées grâce à leurs liens avec de nombreux domaines mathématiques : combinatoire, géométrie de Poisson et géométrie hyperbolique, théorie de Lie, théorie des représentations, triangulation de surfaces, etc.

Après avoir introduit les notions essentielles pour comprendre les algèbres amassées et leurs liens avec les triangulations de surface et la théorie de la représentation dans le premier chapitre de cette thèse, nous étudions certains aspects combinatoires des algèbres amassées dans les deux chapitres suivants. Dans le deuxième chapitre, nous obtenons une réalisation géométrique du *graphe d'échange* de certaines algèbres amassées. Le graphe d'échange décrit les relations entre les amas : chacun de ses sommets correspond à un amas et il y a une arête entre deux amas si et seulement si l'un s'obtient à partir de l'autre par une mutation. Dans le troisième et dernier chapitre, nous prouvons que certaines algèbres amassées sont unistructurelles, c'est-à-dire que leurs variables amassées déterminent uniquement leur amas. Plus précisément, si deux algèbres amassées ont le même ensemble de variables amassées, alors elles ont également les mêmes amas.

CHAPITRE I

ALGÈBRES AMASSÉES

Le but de ce premier chapitre est d'introduire les algèbres amassées et leurs propriétés principales. La présentation est partiellement inspirée de celle du premier chapitre de mon mémoire de maitrise (Bazier-Matte, 2016b), et d'un article dans lequel des résultats de cette thèse sont publiés (Bazier-Matte et Plamondon, 2020).

1.1 Définition

Les algèbres amassées sont construites à partir d'une *graine*, c'est-à-dire une paire composée d'un *carquois* et d'un *amas*. Commençons donc par définir les carquois.

1.1.1 Carquois

Définition 1.1.1. Un *carquois* Q est un quadruplet (Q_0, Q_1, s, b) où

- Q_0 est un ensemble de *sommets* ;
- Q_1 est un ensemble de *flèches* ;
- $s, b : Q_1 \rightarrow Q_0$ sont deux fonctions qui associent à chaque flèche deux sommets respectivement appelés sa *source* et son *but*.

Le carquois *opposé* à un carquois Q est obtenu en inversant les flèches et est noté Q^{op}

Par simplicité, pour un carquois à n sommets, notons $Q_0 = \{1, \dots, n\}$.

Le *graphe sous-jacent* d'un carquois est le graphe obtenu en retirant l'orientation de ses flèches.

Exemple 1.1.2. Considérons le carquois Q représenté à la figure 1.1. L'ensemble des sommets de Q est $Q_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et l'ensemble de ses flèches est $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota\}$.

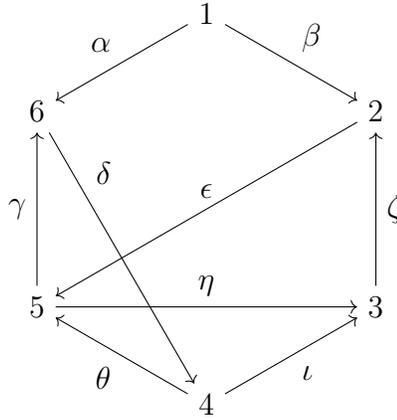


Figure 1.1. Carquois

Pour $i \in Q_0$, on note i^+ l'ensemble des flèches de Q_1 de source i . De la même façon, on note i^- l'ensemble des flèches de Q_1 de but i . De plus, on note $Q(i, j) = i^+ \cap j^-$, c'est-à-dire l'ensemble des flèches de i vers j .

Exemple 1.1.3. Reprenons le carquois à la figure 1.1. Remarquons que $s(\beta) = 1$, $b(\beta) = 2$, $4^+ = \{\theta, \iota\}$, $5^- = \{\epsilon, \theta\}$ et $Q(6, 4) = \{\delta\}$.

Définition 1.1.4. Un *cycle orienté* de longueur n est un n -uplet de flèches $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ telles que $b(\alpha_n) = s(\alpha_1)$ et $b(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ pour $k = 1, \dots, n - 1$. Une *boucle* est un cycle orienté de longueur 1.

Dans le cadre de l'étude des algèbres amassées, on s'intéresse uniquement aux

carquois sans boucles ni cycles orientés de longueur 2. Ceci revient à considérer des carquois Q tels que pour tous sommets $i, j \in Q_0$, si $Q(i, j) \neq \emptyset$, alors $Q(j, i) = \emptyset$. Cette condition implique que $Q(i, i) = \emptyset$. Ainsi, dans cette thèse, à partir d'ici, on prend pour acquis que tous les carquois que nous mentionnerons ne comportent ni boucles ni 2-cycles.

De surcroît, par mesure de simplicité, nous considérons toujours des carquois *connexes*, c'est-à-dire dont le graphe sous-jacent est connexe.

Exemple 1.1.5. Le carquois de la figure 1.1 est connexe. Il possède plusieurs cycles, dont (ζ, η, ϵ) .

Pour définir les algèbres amassées, nous avons également besoin de définir la notion de mutation pour différents objets, en particulier, pour les carquois.

Définition 1.1.6. La *mutation* d'un carquois Q en un point k de Q_0 transforme Q en un nouveau carquois $\mu_k(Q)$ obtenu par les étapes suivantes :

1. pour toute paire de flèches $\alpha, \beta \in Q_1$ telle que $b(\alpha) = k = s(\beta)$, ajouter une nouvelle flèche γ telle que $s(\gamma) = s(\alpha)$ et $b(\gamma) = b(\beta)$;
2. inverser toutes les flèches incidentes à k ;
3. retirer un à un tous les 2-cycles ainsi créés.

Exemple 1.1.7. À la figure 1.2, nous effectuons sur le carquois de la figure 1.1 la mutation en direction 5.

On peut vérifier facilement que la mutation de carquois est involutive sur les carquois sans boucles ni 2-cycles ; pour tout tel carquois Q et pour tout sommet $k \in Q_0$, on a $\mu_k^2(Q) \simeq Q$.

Définition 1.1.8. Deux carquois Q et Q' sont dits *équivalents par mutations* s'il existe une suite de mutations $\mu_{k_1}, \dots, \mu_{k_m}$ telle que $Q' \simeq \mu_{k_m} \circ \dots \circ \mu_{k_1}(Q)$.

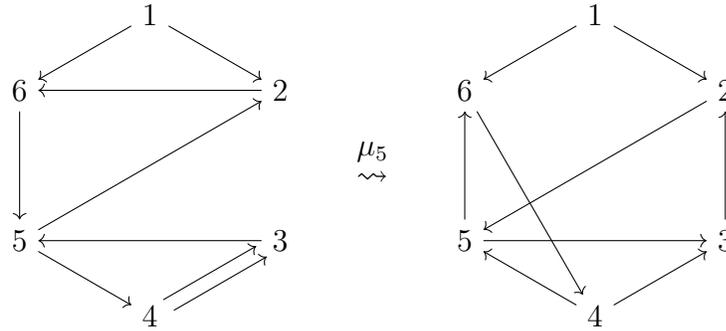


Figure 1.2. Mutation de carquois

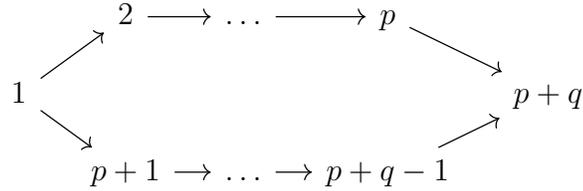
On prouve aisément que ceci définit une relation d'équivalence.

Exemple 1.1.9. Il est évident que les deux carquois présentés à la figure 1.2 sont équivalents par mutations.

Définition 1.1.10. Un carquois Q est *de type Dynkin* s'il est équivalent par mutation à l'un des carquois suivants :

- \mathbb{A}_n : $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n$
- \mathbb{D}_n : $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n-2 \begin{array}{l} \nearrow n-1 \\ \searrow n \end{array}$
- \mathbb{E}_6 : $\begin{array}{cccccc} 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 5 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 6 & & & & \end{array}$
- \mathbb{E}_7 : $\begin{array}{ccccccccc} 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 5 & \rightarrow & 6 \\ & & & & \downarrow & & & & & & \\ & & & & 7 & & & & & & \end{array}$
- \mathbb{E}_8 : $\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 5 & \rightarrow & 6 & \rightarrow & 7 \\ & & & & \downarrow & & & & & & & & \\ & & & & 8 & & & & & & & & \end{array}$

Il est de type $\tilde{\mathbb{A}}_{p,q}$, ou de manière plus simple, $\tilde{\mathbb{A}}$, s'il est équivalent par mutation à



Mentionnons que les différents carquois de type Dynkin listé ci-haut ne sont pas équivalents par mutation entre eux et ne sont pas non plus équivalents par mutation à un carquois de types $\tilde{\mathbb{A}}$.

À la fois en algèbre amassée et en théorie de la représentation, on s'intéresse beaucoup aux carquois de type Dynkin car ils possèdent de nombreuses propriétés qui les rendent uniques. En outre, remarquons que les graphes sous-jacents des carquois de type Dynkin représentés ci-haut sont des diagrammes de Dynkin simplement lacés. Ces diagrammes se manifestent un peu partout en algèbre et en géométrie. Par ailleurs, chacun d'entre eux possède un analogue affine, également d'un grand intérêt ; pour le diagramme \mathbb{A} , il s'agit de $\tilde{\mathbb{A}}$.

1.1.2 Amas et graines

Pour définir une algèbre amassée, nous devons associer certaines variables aux sommets d'un carquois. Nous définissons formellement dans cette section un tel ensemble de variables. Nous commençons par un rappel d'une notion algébrique que nous utiliserons, soit l'indépendance algébrique.

Définition 1.1.11. Soit \mathbf{K} un corps et \mathbf{k} un sous-corps de \mathbf{K} . Un ensemble $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbf{K}$ est *algébriquement indépendant* sur \mathbf{k} si (x_1, \dots, x_n) n'est le zéro d'aucun polynôme non nul de $\mathbf{k}[t_1, \dots, t_n]$.

Exemple 1.1.12. Les singletons $\{\pi\}$ et $\{\sqrt{2\pi+1}\} \subseteq \mathbb{R}$ sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} , mais l'ensemble $\{\pi, \sqrt{2\pi+1}\}$ ne l'est pas. En effet, $(\sqrt{2\pi+1})^2 -$

$2\pi - 1 = 0$, donc le polynôme non nul $f(t_1, t_2) = t_1^2 - 2t_2 - 1$ s'annule en $(\sqrt{2\pi + 1}, \pi)$.

À partir de cette notion, nous pouvons maintenant définir les graines, à partir desquelles nous construirons des algèbres amassées.

Définition 1.1.13. Une *graine* (X, Q) est une paire formée

- d'un carquois Q tel que $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$;
- d'un ensemble $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ appelé *amas*, algébriquement indépendant sur \mathbb{Q} en considérant comme surcorps le corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$, où l'on convient que x_i correspond au sommet i .

Exemple 1.1.14. Reprenons le carquois de la figure 1.1 pour créer une graine que nous représentons à la figure 1.3.

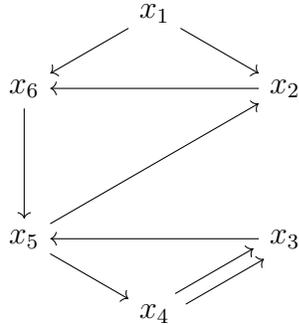


Figure 1.3. Graine

Définition 1.1.15. Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un amas. Le *corps ambiant* donné par ces variables est $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$.

Tout comme nous avons défini une opération de mutation sur les carquois, nous pouvons en définir une sur les amas et ainsi, une sur les graines.

Définition 1.1.16. La *mutation d'une graine* (X, Q) dans la direction x_k (ou dans la direction k s'il n'y a pas d'ambiguïté) transforme (X, Q) en une nouvelle graine $\mu_{x_k}(X, Q) = (\mu_{x_k}(X), \mu_{x_k}(Q))$ où

— $\mu_{x_k}(X) = (X \setminus \{x_k\}) \cup \{x'_k\}$ avec $x'_k \in \mathcal{F}$ défini par la *relation d'échange* :

$$x_k x'_k = \prod_{\alpha \in k^+} x_{b(\alpha)} + \prod_{\alpha \in k^-} x_{s(\alpha)}$$

— $\mu_{x_k}(Q) = \mu_k(Q)$.

Un produit vide est égal à 1 par convention.

Exemple 1.1.17. La figure 1.4 représente la mutation de la graine de la figure 1.3 en x_5 .

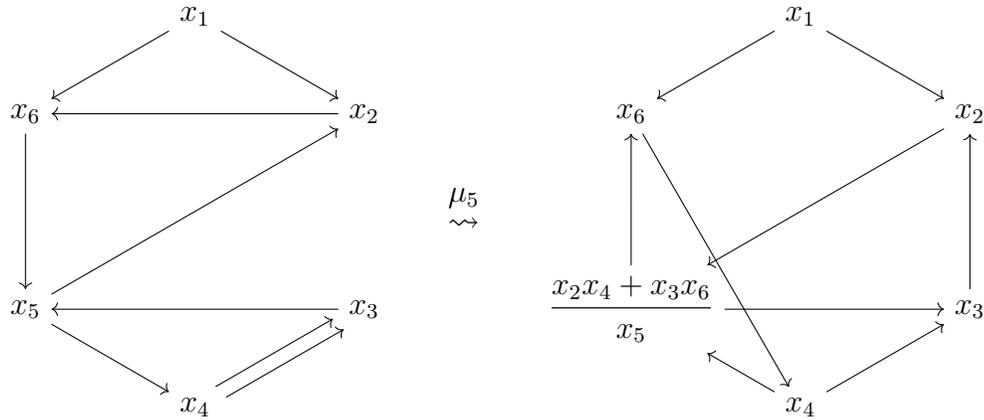


Figure 1.4. Mutation de graines

Tout comme la mutation de carquois, la mutation de graines est involutive, c'est-à-dire que pour toute graine (X, Q) et tout sommet $k \in Q$, on a $\mu_k^2(X, Q) = (X, Q)$.

1.1.3 Algèbres amassées

Nous avons maintenant présenté toutes les notions nécessaires à la définition des algèbres amassées.

Définitions 1.1.18. Soit (X, Q) une graine. Considérons toutes les graines obtenues par mutations successives de (X, Q) . Notons \mathcal{X} l'union de tous les amas dans de telles graines; ses éléments sont les *variables amassées*.

L'*algèbre amassée* $\mathcal{A}(X, Q)$ est la \mathbb{Z} -sous-algèbre de \mathcal{F} engendrée par \mathcal{X} , l'ensemble de toutes les variables amassées.

Introduisons également du vocabulaire relié aux algèbres amassées.

Définitions 1.1.19. Soit $\mathcal{A}(X, Q)$ une algèbre amassée.

- Deux variables amassées sont dites *compatibles* s'il existe un amas les contenant toutes les deux.
- Un *monôme d'amas* est un produit de variables amassées appartenant toutes à un même amas.
- Le *rang* de l'algèbre amassée $\mathcal{A}(X, Q)$ est n , le nombre de sommets du carquois Q .
- L'algèbre amassée $\mathcal{A}(X, Q)$ est de *type Dynkin* si Q est de type Dynkin. Plus précisément, elle est de *type* $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7$ ou \mathbb{E}_8 si Q est respectivement de type $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7$ ou \mathbb{E}_8 . De même, l'algèbre amassée $\mathcal{A}(X, Q)$ est de *type* $\tilde{\mathbb{A}}_{p,q}$ si Q est de type $\tilde{\mathbb{A}}_{p,q}$.
- Une algèbre est de *type amassé fini* si elle compte un nombre fini de variables amassées.
- Un graphe dont l'ensemble des sommets est en bijection avec l'ensemble des amas d'une algèbre amassée et dans lequel deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les amas correspondants s'obtiennent l'un à partir de l'autre par une seule mutation est un *graphe d'échange*.

Présentons un exemple pour mettre en application ces nombreuses définitions.

Exemple 1.1.20. Construisons l'algèbre amassée donnée par la graine

$$(X, Q) = x_1 \leftarrow x_2.$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mu_{x_1} \frac{x_2+1}{x_1} \rightarrow x_2 & & \mu_{x_2} \\
 \sim \nearrow & & \searrow \sim \\
 x_1 \leftarrow x_2 & & \frac{x_2+1}{x_1} \leftarrow \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2} \\
 \Downarrow & & \Downarrow \mu_{\frac{x_2+1}{x_1}} \\
 x_2 \rightarrow x_1 & & \frac{x_1+1}{x_2} \rightarrow \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2} \\
 \nwarrow \sim & & \swarrow \sim \\
 \mu_{\frac{x_1+1}{x_2}} \frac{x_1+1}{x_2} \leftarrow x_1 & & \mu_{\frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}}
 \end{array}$$

Figure 1.5. Algèbre amassée de type \mathbb{A}_2

Étudions cette algèbre amassée.

- Il s'agit d'une algèbre amassée de type \mathbb{A}_2 et de type amassé fini.
- L'ensemble des variables amassées est

$$\mathcal{X} = \left\{ x_1, x_2, \frac{x_1+1}{x_2}, \frac{x_2+1}{x_1}, \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2} \right\}$$

- Un exemple de variables incompatibles est $\frac{x_1+1}{x_2}$ et $\frac{x_2+1}{x_1}$.
- Les cinq amas de $\mathcal{A}(X, Q)$ sont $\{x_1, x_2\}$, $\left\{x_1, \frac{x_1+1}{x_2}\right\}$, $\left\{x_2, \frac{x_2+1}{x_1}\right\}$, $\left\{\frac{x_1+1}{x_2}, \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}\right\}$ et $\left\{\frac{x_2+1}{x_1}, \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}\right\}$.
- Un exemple de monôme d'amas est $\frac{x_1^2+x_1}{x_2}$ car $\frac{x_1^2+x_1}{x_2} = x_1 \cdot \frac{x_1+1}{x_2}$.
- Le graphe d'échange de $\mathcal{A}(X, Q)$ est donné à la figure 1.6.

Remarque 1.1.21. Il existe une définition plus large d'algèbre amassée où les graines sont constituées d'un amas et d'une matrice antisymétrisable. Dans le

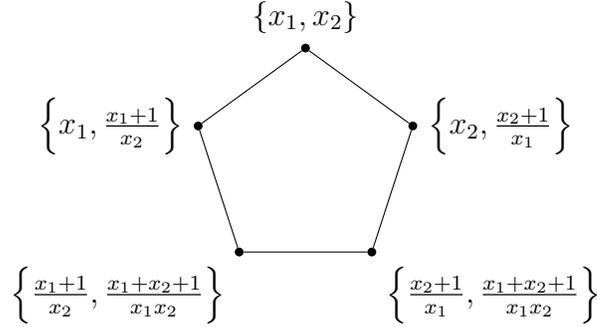


Figure 1.6. Graphe d'échange d'une algèbre amassée de type A_2

cadre de cette thèse, nous étudions uniquement les algèbres amassées données par une matrice antisymétrique, ce qui est équivalent aux algèbres amassées données par un carquois sans boucles ni 2-cycles.

1.2 Propriétés des algèbres amassées

Nous donnons ici quelques propriétés des algèbres amassées que nous utiliserons pour prouver l'unistructuralité. Remarquons que l'algèbre amassée donnée à l'exemple 1.1.20 compte un nombre fini de variables amassées. Toutefois, ceci n'est pas toujours le cas.

Théorème 1.2.1. *Soit $\mathcal{A}(X, Q)$ une algèbre amassée. Elle est de type amassé fini si et seulement si le carquois Q est de type Dynkin, (Fomin et Zelevinsky, 2003, Théorèmes 1.6 et 1.7).*

Caractérisons les variables amassées. Pour alléger l'écriture, notons les polynômes de Laurent en X par $\mathcal{L}(X)$ et ceux à coefficients positifs par $\mathcal{L}_+(X)$.

Théorème 1.2.2. *Soit $\mathcal{A}(X, Q)$ une algèbre amassée, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ un amas et \mathcal{X} l'ensemble des variables amassées.*

— *Phénomène Laurent (Fomin et Zelevinsky, 2002) : Cette algèbre amassée*

est contenue dans l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbb{Z}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_n^{\pm 1}]$. De manière équivalente, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}(Y)$.

- *Positivité* (Lee et Schiffler, 2015; Gross et al., 2018) : Les variables amassées de $\mathcal{A}(X, Q)$ sont des polynômes de Laurent aux coefficients positifs dans les variables amassées de n'importe quel amas, c'est-à-dire que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}_+(Y)$.

Nous aurons également besoin des deux résultats suivants.

Théorème 1.2.3. *Les monômes d'amas sont linéairement indépendants sur \mathbb{Z} (Cerulli Irelli et al., 2013; Gross et al., 2018).*

Proposition 1.2.4. *Soit $\mathcal{A}(X, Q)$ une algèbre amassée et soit Y un amas. Si une variable amassée y est un monôme de Laurent en Y , alors $y \in Y$ (Cerulli Irelli et al., 2013, Lemme 3.7).*

Exemple 1.2.5. Reprenons l'algèbre amassée donnée par la graine $x_1 \leftarrow x_2$ explicitée à l'exemple 1.1.20. L'ensemble des variables amassées est

$$\mathcal{X} = \left\{ x_1, x_2, \frac{x_1 + 1}{x_2}, \frac{x_2 + 1}{x_1}, \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1 x_2} \right\}.$$

Considérons l'amas $Y = \left\{ x_1, \frac{x_1 + 1}{x_2} \right\}$. Un monôme en Y est de la forme $\frac{x_1^a (x_1 + 1)^b}{x_2^b}$. On observe donc que les seuls monômes en Y qui sont également des variables amassées sont les éléments de Y .

1.3 Algèbre amassée provenant de surface

Certaines algèbres amassées, en plus de s'obtenir à partir d'un carquois, s'obtiennent à partir de triangulation de surfaces (Fomin et al., 2008). D'une part, ceci permet de visualiser plus facilement les variables amassées et leurs relations entre elles, et, d'autre part, plus de propriétés sont connues pour les algèbres

amassées provenant de surface. Par ailleurs, ceci permet d'étudier les surfaces d'un point de vue algébrique. Nous introduisons donc dans cette section cette classe d'algèbres amassées.

1.3.1 Surfaces marquées et triangulations

Définition 1.3.1. Une *surface marquée* est une paire (S, M) où :

- S est une surface connexe et orientable dont la frontière est notée δS .
- M est un ensemble fini de points *marqués* tel qu'il y ait au moins un point marqué sur chaque composante connexe de δS .

Les points marqués à l'intérieur de S sont des *ponctions*.

Illustrons cette définition à l'aide d'un exemple.

Exemple 1.3.2. La figure 1.7 donne un exemple de surface marquée avec trois composantes connexes de frontière, un genre nul et trois points marqués :

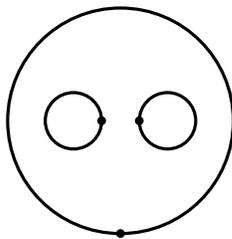


Figure 1.7. Surface marquée sans ponction

Afin de faciliter le lien avec les algèbres amassées, on exclut les surfaces marquées (S, M) où, soit S est un monogone avec une ponction, soit S est un disque avec $|M| = 1, 2, 3$, soit S est une sphère avec $|M| = 1, 2, 3$.

Une fois que les surfaces marquées sont définies, nous y ajoutons des arcs.

Définitions 1.3.3. Soit (S, M) une surface marquée. Un *arc généralisé* de (S, M) est la classe d'*isotopie* d'une courbe (c'est-à-dire l'ensemble des courbes homotopes à cette courbe respectant les propriétés suivantes) telle que :

- les extrémités de la courbe sont dans M ;
- la courbe se coupe elle-même au maximum un nombre fini de fois ;
- la courbe est disjointe de M sauf en ses extrémités ;
- la courbe ne découpe pas un monogone, donc n'est pas contractile en un point de M .

Un *arc* est un arc généralisé qui, de plus, ne se coupe pas lui-même, sauf peut-être à ses extrémités. Un *arc de frontière* de (S, M) est un arc isotope à une courbe contenue dans la frontière de S , tandis qu'un *arc interne* est un arc qui n'est pas un arc de frontière.

Une *boucle* de (S, M) est la classe d'isotopie d'une courbe dans l'intérieur de S dont les deux points d'extrémités coïncident et sont dans S . Une boucle *essentielle* est une boucle sans auto-intersection et non contractile.

Remarquons que les isotopies ne permettent pas de retirer une boucle contractile au sein d'un arc généralisé.

Pour construire une triangulation, il nous faut d'abord définir l'intersection entre deux courbes, qu'on étudie grâce à des isotopies.

Définition 1.3.4. Deux courbes sur une surface S *s'intersectent* si tous représentants de leurs classes d'isotopie s'intersectent dans l'intérieur de S . Si, au contraire, il existe des représentants de leur classe d'isotopie ne s'intersectant pas, elles sont *compatibles*.

Exemple 1.3.5. Dans la figure 1.8, les courbes α et γ sont des arcs internes compatibles puisqu'elles ne s'intersectent pas. Les courbes α et β sont également des

arcs internes compatibles car d'autres représentants de leur classe d'isotopie ne s'intersectent pas. Toutefois les courbes β et γ sont des arcs internes incompatibles. Finalement, la courbe δ est un arc de frontière compatible avec tous les autres arcs.

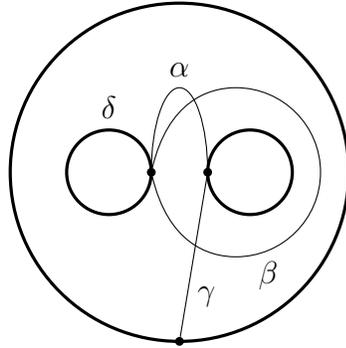


Figure 1.8. Arcs compatibles et incompatibles

Exemple 1.3.6. Nous représentons à la figure 1.9 une boucle essentielle, notée ϵ .

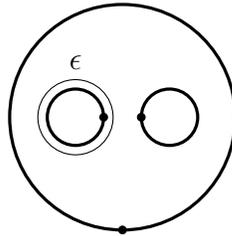


Figure 1.9. Boucle essentielle

Définition 1.3.7. Une *triangulation* est un ensemble maximal d'arcs internes deux à deux compatibles, mais distincts.

Exemple 1.3.8. Reprenons la surface de la figure 1.7 et ajoutons-y des arcs afin d'obtenir la triangulation représentée à la figure 1.10.

Bien que certains des résultats suivants s'appliquent également aux surfaces avec

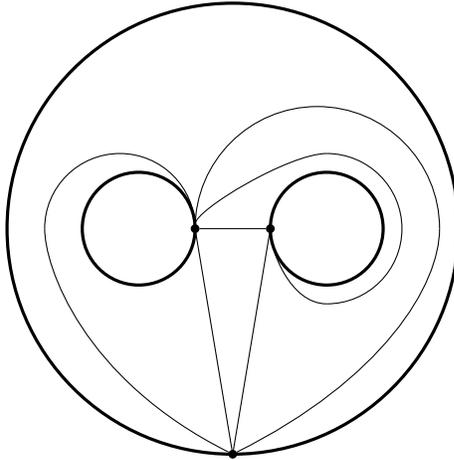


Figure 1.10. Triangulation d'une surface marquée (ou hibou dubitatif)

ponctions, ce n'est pas le cas pour tous ; nous considérons donc dans le reste de cette thèse uniquement les triangulations sans ponctions.

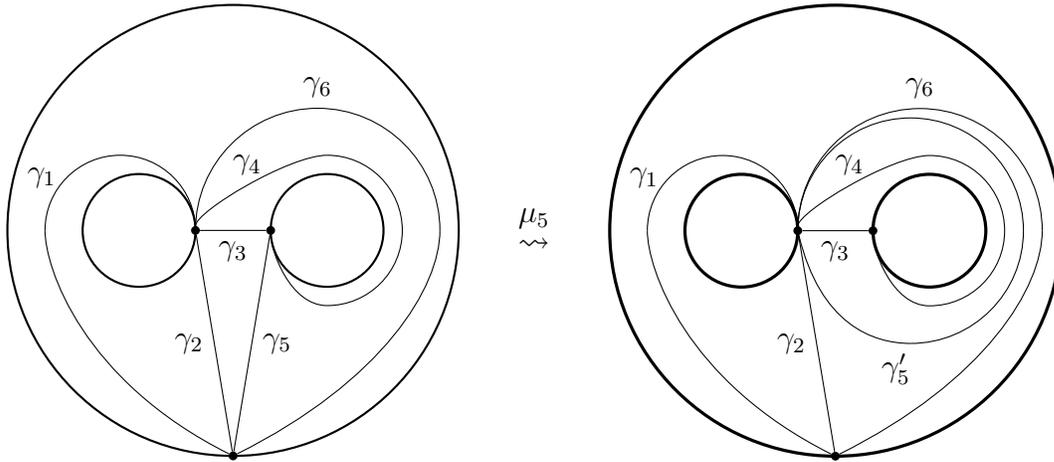
Proposition 1.3.9. *Soit T une triangulation d'une surface et γ un arc de T . Il existe un unique arc $\gamma' \neq \gamma$ tel que $(T \setminus \{\gamma\}) \cup \{\gamma'\}$ soit une triangulation, c'est-à-dire un unique arc qui, avec les autres arcs de T , forme une nouvelle triangulation (Fomin et al., 2008, Définition 3.5).*

Utilisons cette proposition pour définir le flip d'une triangulation.

Définition 1.3.10. Le *flip* ou la *mutation* d'une triangulation T en un arc γ de T transforme T en une nouvelle triangulation $\mu_\gamma(T)$ telle que $\mu_\gamma(T)$ est l'unique triangulation $(T \setminus \{\gamma\}) \cup \gamma'$, où $\gamma' \neq \gamma$.

Exemple 1.3.11. À la figure 1.11, nous reprenons la triangulation de la figure 1.10, étiquetons ses arcs et effectuons un flip à l'arc 5.

Remarque 1.3.12. Il est clair qu'un flip est une opération involutive.

Figure 1.11. Flip de l'arc γ_5

1.3.2 Algèbres amassées provenant de surface

Il est possible d'associer un carquois Q_T à une triangulation T . Pour ce faire, il faut fixer une orientation de la surface. Les arcs internes de la triangulation correspondent aux sommets du carquois et il y a une flèche d'un sommet associé à un arc γ_1 à un sommet associé à un arc γ_2 si γ_1 et γ_2 ont une extrémité commune et, qu'à cette extrémité, γ_2 suit γ_1 selon l'orientation fixée de la surface. En d'autres mots, les arcs internes de la triangulation correspondent aux sommets du carquois et il y a une flèche d'un sommet associé à un arc γ_1 à un sommet associé à un arc γ_2 si γ_1 et γ_2 découpent un triangle commun et qu'à l'extrémité qu'ils partagent, γ_2 suit γ_1 selon l'orientation fixée de la surface.

Exemple 1.3.13. En considérant la triangulation T de la figure 1.10 et en fixant l'orientation horaire, on trouve que le carquois Q_T associé à T est le carquois de droite de la figure 1.2.

Théorème 1.3.14. *Supposons que l'arc γ de la triangulation T est associé au sommet k du carquois Q_T . Alors,*

$$\mu_k(Q_T) = Q_{\mu_\gamma(T)},$$

(Fomin et al., 2008, Lemme 9.7)

Exemple 1.3.15. Soit T la triangulation de la figure 1.10 et Q_T le carquois de droite de la figure 1.2. Cette dernière figure ainsi que la figure 1.11, jumelées au fait que la mutation de carquois soit involutive, nous indiquent que $\mu_5(Q_T)$ est le carquois associé à la triangulation $Q_{\mu_{\gamma_5}(T)}$.

Ce dernier théorème nous indique qu’effectuer un flip dans une triangulation revient au même que de muter son carquois associé. Il devient donc naturel de définir une algèbre amassée à partir d’une surface marquée.

Définition 1.3.16. Soit T une triangulation d’une surface (S, M) et soit (X, Q_T) un amas. L’algèbre amassée $\mathcal{A}(X, Q_T)$ est une *algèbre amassée provenant de la surface* (S, M) .

Il est effectivement possible de montrer que $\mathcal{A}(X, Q_T)$ ne dépend pas de la triangulation initiale T et ne dépend que de la surface marquée (S, M) (Fomin et al., 2008). En effet, à partir de la triangulation initiale T , on peut obtenir n’importe quelle triangulation de la surface par une suite de mutations. Qui plus est, si deux suites différentes de flips à partir de T permettent d’arriver au même arc, les deux variables amassées de l’algèbre $\mathcal{A}(X, Q_T)$ obtenues par les suites de mutations correspondantes sont en fait égales. En d’autres mots, l’application qui associe une variable amassée à un arc est bien définie. Ainsi, on peut étudier les algèbres amassées associées à des surfaces marquées par le biais des triangulations de cette surface.

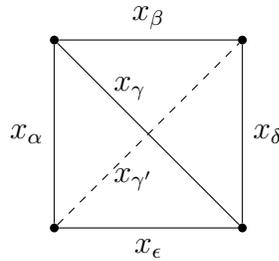
Explicitement, on a une bijection entre

- les arcs internes de (S, M) et les variables amassées de $\mathcal{A}(X, Q_T)$;
- les triangulations de (S, M) et les amas de $\mathcal{A}(X, Q_T)$

(Fomin et al., 2008).

Théorème 1.3.17. *Le carquois Q_T est de type \mathbb{A}_n si et seulement si T est la triangulation d'un $(n + 3)$ -gone et de type $\tilde{\mathbb{A}}_{p,q}$, si et seulement si T est la triangulation d'une couronne avec p points sur une frontière et q points sur l'autre (Fomin et al., 2008; Assem et al., 2010, Théorème 1.1).*

Un des avantages des algèbres amassées provenant de surface consiste en étudier la mutation de graines au travers des flips de triangulations plutôt que par la mutation de carquois. Considérons un arc γ et sa variable amassée correspondante x_γ . Puisque chaque arc interne sert à découper la surface en triangles, il est encadré dans un quadrilatère. Le produit de x_γ et $x_{\gamma'}$, la variable amassée associée au flip de γ , est la somme du produit des variables amassées associées aux côtés opposés dudit quadrilatère :

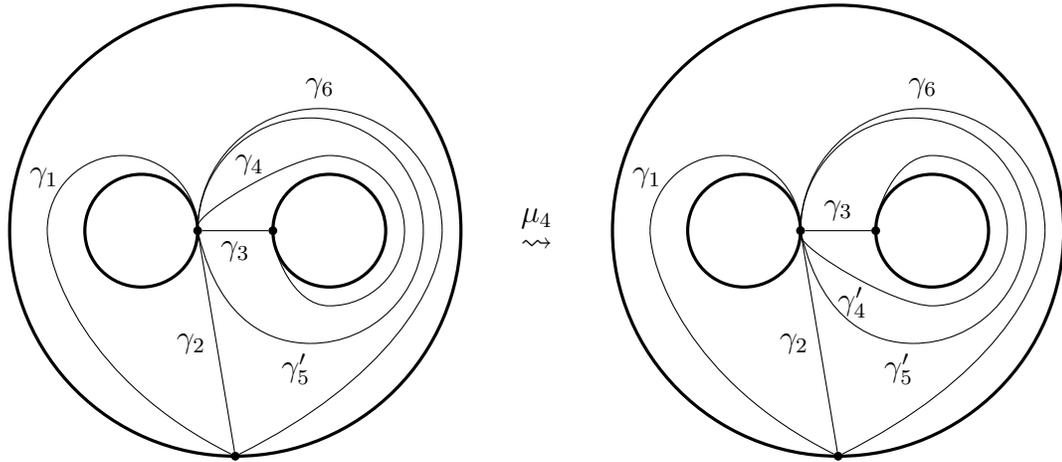


$$x_\gamma x_{\gamma'} = x_\alpha x_\delta + x_\beta x_\epsilon$$

On considère que la variable associée à un arc de frontière est 1.

Exemple 1.3.18. Reprenons la triangulation $\mu_{\gamma_5} T$ de la figure 1.11 et mutons maintenant l'arc γ_4 à la figure 1.12. Calculons directement la nouvelle variable amassée sans passer par le carquois associé à cette triangulation. Notons x_k la variable associée à γ_k pour $k = 1, \dots, 6$ et x'_k la variable associée à γ'_k pour $k = 4, 5$. Considérons le quadrilatère dans lequel γ'_4 est encadré pour déduire que

$$x'_4 = \frac{x'_5 + x_3^2}{x_4} = \frac{x_2 x_4 + x_3 x_6 + x_3^2 x_5}{x_4 x_5}$$

Figure 1.12. Flip de l'arc γ_4

1.3.3 Bases des algèbres amassées provenant de surface

À partir de maintenant, considérons (S, M) une surface marquée sans ponctions, T une triangulation et $\mathcal{A}(X, Q_T)$ l'algèbre amassée provenant de cette surface.

Cette algèbre possède une base en tant qu'espace vectoriel que nous exposons ici. L'ordre de présentation est inspiré de l'article présentant les résultats du chapitre 3, (Bazier-Matte et Plamondon, 2020) et les définitions sont tirées des travaux de G. Musiker et L. Williams, (Musiker *et al.*, 2013).

Définition 1.3.19. Soit γ une boucle essentielle de (S, M) . Le m -bracelet $\text{Brac}_m\gamma$ est la boucle obtenue par concaténation de γ avec lui-même exactement m fois.

Ainsi, $\text{Brac}_m\gamma$ a $m - 1$ auto-intersections.

Exemple 1.3.20. La figure 1.13 illustre le 1-bracelet $\text{Brac}_1\epsilon$, le 2-bracelet $\text{Brac}_2\epsilon$ et le 3-bracelet $\text{Brac}_3\epsilon$ où ϵ est la boucle essentielle donnée à la figure 1.9. Remarquons que $\text{Brac}_1\epsilon = \epsilon$.

Musiker et Williams donnent un algorithme pour associer à un arc généralisé ou

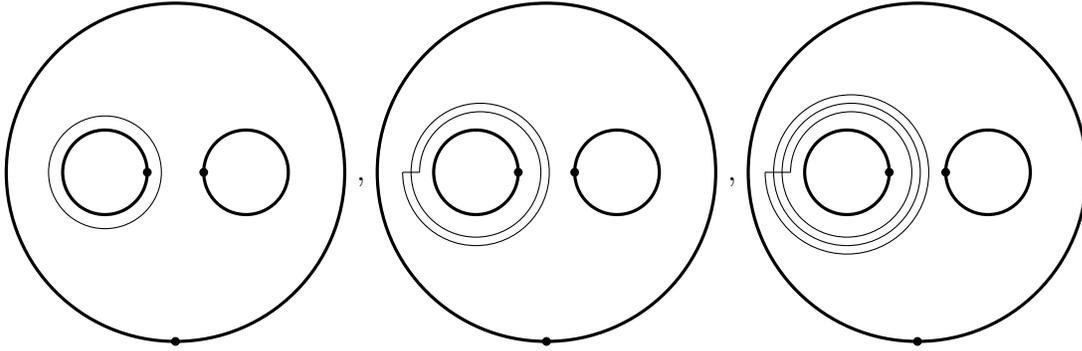


Figure 1.13. 1-bracelet, 2-bracelet et 3-bracelet

à une boucle γ un polynôme de Laurent x_γ dans le corps ambiant \mathcal{F} , de sorte qu'à partir d'un arc interne, on obtient la variable amassée correspondante. Ce polynôme possède la propriété suivante pour les bracelets.

Lemme 1.3.21. *Soit Y un amas de $\mathcal{A}(X, Q_T)$. Les bracelets de (S, M) s'écrivent comme polynôme de Laurent à coefficients positifs en n'importe quel amas : pour n'importe quelle boucle essentielle γ , $\text{Brac}_m \gamma \in \mathcal{L}_+(Y)$ (Musiker et al., 2013, Théorème 1.1)*

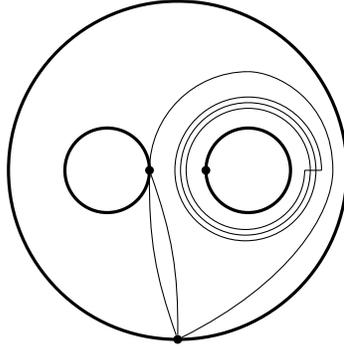
Par ailleurs, selon cet algorithme, le polynôme associé à une boucle contractile est -2 et celui associé à une courbe isotope à un point marqué est 0 .

Définitions 1.3.22. Une multicourbe est un multiensemble d'arcs généralisés et de boucles sur la surface.

Une multicourbe c formée uniquement d'arcs internes compatibles est dite \mathcal{C} -compatible.

Une multicourbe c' est dite \mathcal{C}' -compatible si :

- les éléments de c' ne s'intersectent pas entre eux, sauf pour les auto-intersection des bracelets;
- il existe au moins une boucle essentielle γ dans (S, M) telle que $\text{Brac}_m \gamma \in c'$

Figure 1.14. Multicourbe \mathcal{C}' -compatible

avec $m \geq 1$. De plus, il existe exactement une copie de $\text{Brac}_m \gamma$ dans \mathcal{C}' et si $m' \neq m$, alors $\text{Brac}_{m'} \gamma \notin \mathcal{C}'$.

En d'autres mots, il n'y a aucun bracelet dans les multicourbes \mathcal{C} -compatibles, mais il y en a toujours dans les multicourbes \mathcal{C}' -compatibles et au plus un par boucle essentielle.

Remarquons que cette définition n'est pas exactement identique à celle de G. Musiker, R. Schiffler et L. Williams, (Musiker *et al.*, 2013) : une multicourbe est \mathcal{C} -compatible dans leur article si elle est \mathcal{C} -compatible ou \mathcal{C}' -compatible au sens de cette thèse.

Exemple 1.3.23. Nous donnons à la figure 1.14 un exemple de multicourbe \mathcal{C}' -compatible.

Définissons $\mathcal{C}(S, M)$ comme étant l'ensemble de toutes les multicourbes formées d'arcs \mathcal{C} -compatibles dans (S, M) . De même, définissons $\mathcal{C}'(S, M)$ comme étant l'ensemble de toutes les multicourbes d'arcs et de bracelets \mathcal{C}' -compatibles dans (S, M) . Notons

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\gamma \in \mathcal{C}} x_{\gamma} \mid c \in \mathcal{C}(S, M) \right\} \text{ et } \mathcal{B}' = \left\{ \prod_{\gamma \in \mathcal{C}'} x_{\gamma} \mid c' \in \mathcal{C}'(S, M) \right\}.$$

Définition 1.3.24. Soit A une \mathbb{Z} -algèbre libre en tant que \mathbb{Z} -module et soit B une base de A . La base B est *positive* si pour tout $b_1, b_2 \in B$,

$$b_1 b_2 = \sum_{b \in B} m_b b$$

avec $m_b \geq 0$ pour tout $b \in B$.

Théorème 1.3.25. *L'ensemble $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base positive pour l'algèbre amassée $\mathcal{A}(X, Q_T)$ (Musiker et al., 2013; Thurston, 2014; Çanakçı et al., 2015).*

Il est prouvé dans (Çanakçı et al., 2015, Théorème 2) et dans (Musiker et al., 2013, Théorème 1.1) que $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base et dans (Thurston, 2014, Théorème 1) qu'elle est positive.

1.3.4 Produit de variables amassées et relations d'écheveau

Le produit de variables amassées peut se calculer à l'aide d'arcs dans une surface, comme nous l'expliquons ici. Pour ce faire, nous donnons quelques définitions et résultats tirés de (Musiker et Williams, 2013).

Définitions 1.3.26. Soit D une *multicourbe* telle que :

- $D = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ où γ_1 et γ_2 sont des arcs généralisés ou des boucles s'intersectant à un point p ;
- $D = \{\gamma\}$ où γ a une auto-intersection à un point p .

Le *lissage* de D au point p est l'ensemble de multicourbes $l_p(D) = \{D_1, D_2\}$ où D_1 (respectivement D_2) est identique à D , sauf au point p où on effectue un changement local qui remplace le point d'intersection \times par la paire de segments de courbes \bigcup (ou $\supset\subset$, respectivement) (Musiker et Williams, 2013, Définition 6.1).

Il est important de souligner que le lissage est bien défini sur les arcs généralisés, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas des représentants des classes d'isotopie considérés.

Une multicourbe ne peut contenir qu'un nombre fini de points d'intersection. Par conséquent, en effectuant une succession de lissages, il est possible de tous les éliminer.

Définition 1.3.27. Une *résolution lisse* d'une multicourbe est un multiensemble des multicourbes \mathcal{C} -compatible ou \mathcal{C}' -compatibles obtenues par une succession de lissages jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'intersection.

Plus intuitivement, le lissage d'une multicourbe à un point d'intersection retire ce point d'intersection en modifiant les arcs généralisés ou les boucles autour de ce point d'intersection, tandis que la résolution lisse d'une multicourbe consiste en toutes les multicourbes obtenues par des lissages jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de points d'intersection.

Exemple 1.3.28. Considérons la multicourbe de la figure 1.15. Effectuons première-

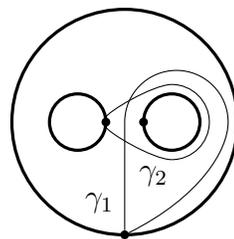


Figure 1.15. Multicourbe

ment le lissage par rapport au point d'intersection le plus haut. On obtient les deux multicourbes de la figure 1.16.

Il reste la première multicourbe à lisser au dernier point d'intersection restant pour obtenir la résolution lisse montrée à la figure 1.17.

Le lissage est mis en application dans les relations d'écheveau, très importantes pour simplifier le produit de variables amassées.

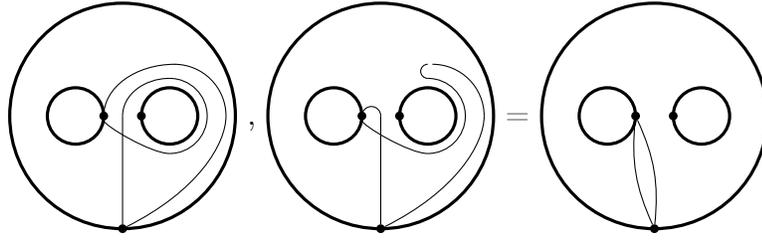


Figure 1.16. Lissage d'une multicourbe

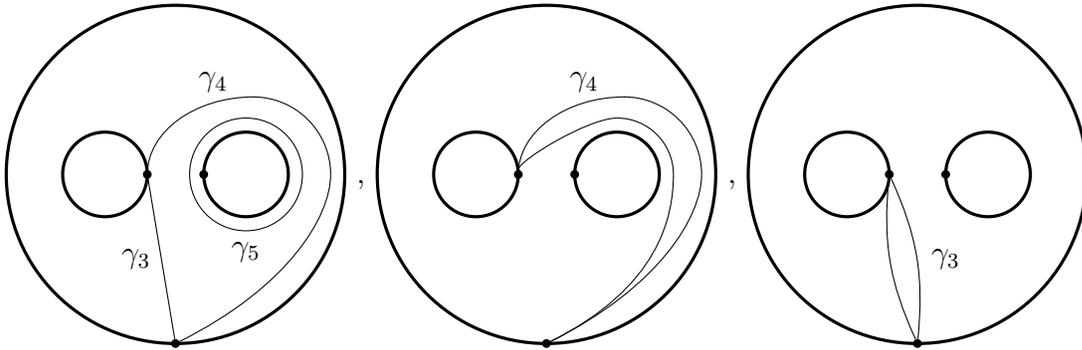


Figure 1.17. Résolution lisse d'une multicourbe

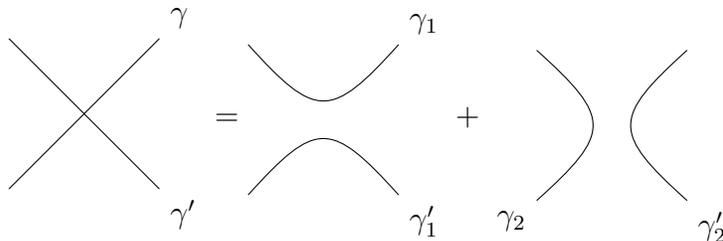
Théorème 1.3.29 (Relation d'écheveau). *Soit M une multicourbe avec un point d'intersection p et soit le lissage $l_p(M) = \{M_1, M_2\}$. Notons par x_M , x_1 et x_2 le produit des polynômes dans \mathcal{F} associés aux arcs généralisés ou aux boucles de M , M_1 et M_2 respectivement. Alors,*

$$x_M = x_1 + x_2,$$

(Musiker et Williams, 2013; Muller, 2016).

Rappelons que le polynôme associé à une boucle contractile est -2 et celui associé à un courbe isotope à un point est 0 .

On peut illustrer la relation d'écheveau ainsi :



Exemple 1.3.30. Prenons la résolution lisse donnée à la figure 1.17. On peut calculer que

$$x_1x_2 = x_3x_4x_5 + x_3^2 + x_4^2,$$

ce qui concorde avec la relation d'écheveau.

Ceci achève la troisième section de ce chapitre; nous avons listé quelques unes des propriétés les plus importantes des algèbres amassées, en particulier de celles provenant de surface.

1.4 Catégorification

Dans cette section, nous introduisons étape par étape la catégorie amassée, qui, comme son nom le laisse présager, nous aidera à étudier les algèbres amassées à l'aide de la théorie des catégories. Pour ce faire, nous considérons un carquois Q et un corps k algébriquement clos.

1.4.1 Algèbre de chemins et catégorie de modules

Nous donnons quelques notions présentées dans (Assem *et al.*, 2006, Chapitre II). Considérons Q un carquois et notons $n = |Q_0|$.

Définition 1.4.1. Un *chemin* de longueur $\ell \geq 1$ de source i et de but j (ou, plus simplement, de i à j) est une suite $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ où $\alpha_k \in Q_1$ pour tout $k \geq 1$ et où

$s(\alpha_1) = i$, $b(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ pour tout $1 \leq k < \ell$ et $b(\alpha_\ell) = j$. Un tel chemin est noté $\alpha_\ell \dots \alpha_1$ et peut être représenté comme suit :

$$i = i_0 \xrightarrow{\alpha_1} i_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{\ell-1}} i_{\ell-1} \xrightarrow{\alpha_\ell} i_\ell = j.$$

Notons Q_ℓ l'ensemble de tous les chemins de Q de longueur ℓ . On convient d'associer à chaque point $a \in Q_0$ le chemin de longueur $\ell = 0$, appelé le *chemin stationnaire* en i , dénoté par ϵ_i .

Remarquons que les chemins de longueur 0 (respectivement 1) sont en bijection avec les sommets de Q_0 (respectivement les flèches de Q_1).

Exemple 1.4.2. Prenons $Q = 3 \xrightarrow{\beta} 2 \xrightarrow{\alpha} 1$.

- $Q_0 = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$;
- $Q_1 = \{\alpha, \beta\}$;
- $Q_2 = \{\alpha\beta\}$
- $Q_k = \emptyset$ pour tout $k \geq 3$.

Définition 1.4.3. L'*algèbre de chemins* $\mathbf{k}Q$ de Q est la \mathbf{k} -algèbre dont le \mathbf{k} -espace vectoriel sous-jacent a comme base l'ensemble de tous les chemins $\alpha_\ell \dots \alpha_1$ de longueur $\ell \geq 0$ dans Q où le produit de deux vecteurs de base $\alpha_\ell \dots \alpha_1$ et $\beta_m \dots \beta_1$ est défini par

$$(\beta_m \dots \beta_1)(\alpha_\ell \dots \alpha_1) = \delta_{b(\alpha_\ell), s(\beta_1)} (\beta_m \dots \beta_1 \alpha_\ell \dots \alpha_1)$$

où $\delta_{b(\alpha_\ell), s(\beta_1)}$ est le delta de Kronecker. Le produit des éléments de base est étendu à tous les éléments de $\mathbf{k}Q$ par linéarité.

Exemple 1.4.4. Reprenons l'exemple 1.4.2 où $Q = 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. La forme générale d'un élément x de $\mathbf{k}Q$ est

$$x = \lambda_1 \epsilon_1 + \lambda_2 \epsilon_2 + \lambda_3 \epsilon_3 + \lambda_4 \alpha + \lambda_5 \beta + \lambda_6 \alpha\beta,$$

avec $\lambda_k \in \mathbf{k}$ pour $k = 1, \dots, 6$.

Le produit de deux éléments $x = \lambda_1\epsilon_1 + \lambda_2\epsilon_2 + \lambda_3\epsilon_3 + \lambda_4\alpha + \lambda_5\beta + \lambda_6\alpha\beta$ et $y = \kappa_1\epsilon_1 + \kappa_2\epsilon_2 + \kappa_3\epsilon_3 + \kappa_4\alpha + \kappa_5\beta + \kappa_6\alpha\beta$ est donné par

$$xy = \lambda_1\kappa_1\epsilon_1 + \lambda_2\kappa_2\epsilon_2 + \lambda_3\kappa_3\epsilon_3 + (\lambda_1\kappa_4 + \lambda_4\kappa_2)\alpha + (\lambda_2\kappa_5 + \lambda_5\kappa_3)\beta \\ + (\lambda_1\kappa_6 + \lambda_4\kappa_5 + \lambda_6\kappa_3)\alpha\beta.$$

Notons A l'algèbre de chemins $\mathbf{k}Q$. Notons également $\text{mod } A$ la catégorie des modules (à gauche) de dimension finie sur A , c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont des modules de dimension finie sur A , dont les morphismes sont les applications A -linéaires et dont la composition est usuelle pour les applications. Cette catégorie est abélienne.

Au long de cette thèse, nous utilisons une notation pour représenter les modules sur une algèbre de chemins $\mathbf{k}Q$ à l'aide de chiffres de 1 à n , où n est le nombre de sommets de Q_0 . Si le chiffre i apparaît dans la notation d'un module M , alors $\epsilon_i M \neq 0$. Par ailleurs, si le chiffre i est placé au-dessus du chiffre j dans la notation de M , alors il existe une flèche $i \xrightarrow{\alpha} j$ dans Q et $\alpha M \neq 0$.

Exemple 1.4.5. Considérons le module $M = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}$ sur l'algèbre $A = \mathbf{k}Q$ où $Q = 3 \xrightarrow{\beta} 2 \xrightarrow{\alpha} 1$ tel que décrit aux exemples 1.4.2 et 1.4.4. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in M$. Alors, $x_1 = 0$ et la multiplication par les éléments de A nous donne :

- $\epsilon_1(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$;
- $\epsilon_2(x_1, x_2, x_3) = (0, x_2, 0)$;
- $\epsilon_3(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, x_3)$;
- $\alpha(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$;
- $\beta(x_1, x_2, x_3) = (0, x_3, 0)$;
- $\alpha\beta(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$.

Cette notation présente ses limitations, surtout quand Q n'est pas un carquois de

type Dynkin. Cependant, elle suffit pour les besoins de cette thèse.

1.4.2 Catégories triangulées, dérivées et amassées

Les catégories dérivées ont initialement été étudiées par Verdier (Verdier, 1966). Nous les définissons ici dans le cadre des algèbres amassées. La présentation des prochaines sections est inspirée du chapitre *Cluster Characters* de livre *Homological Methods, Representation Theory, and Cluster Algebras* (Plamondon, 2018).

Premièrement, définissons les catégories triangulées.

Définition 1.4.6. Une *catégorie triangulée* \mathcal{T} est une catégorie k -linéaire munie d'un *foncteur de suspension*, c'est-à-dire un automorphisme k -linéaire $\Sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$, et d'une collection de *triangles distingués* (ou simplement, *triangles*), c'est-à-dire des suites de morphismes de la forme

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow \Sigma X$$

respectent les axiomes suivants :

(TR1) — La classe des triangles distingués est fermée par isomorphisme de triangles.

— Pour chaque objet X , la séquence $X \xrightarrow{\text{id}_X} X \rightarrow 0 \rightarrow \Sigma X$ est un triangle.

— Pour tout morphisme $X \xrightarrow{f} Y$, il existe un triangle $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow \Sigma X$.

(TR2) La suite $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$ est un triangle si et seulement si la suite $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma Y$ en est également un.

(TR3) Pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h} & \Sigma X \\ \downarrow u & & \downarrow v & & & & \downarrow \Sigma u \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' & \xrightarrow{h'} & \Sigma X' \end{array}$$

dont les rangées sont des triangles distingués, il existe un morphisme $w :$

$Z \rightarrow Z'$ tel que le diagramme résultant soit également commutatif, c'est-à-dire tel que $wg = g'v$ et $h'w = (\Sigma u)h$.

(TR4) Soit les triangles

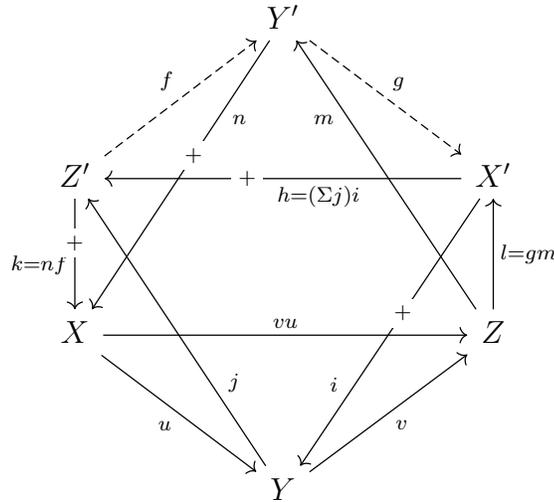
$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{u} Y \xrightarrow{j} Z' \xrightarrow{k} \Sigma X \\ Y &\xrightarrow{v} Z \xrightarrow{l} X' \xrightarrow{i} \Sigma Y \\ X &\xrightarrow{vu} Z \xrightarrow{m} Y' \xrightarrow{n} \Sigma X. \end{aligned}$$

Il existe un triangle

$$Z' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{h} \Sigma Z'$$

tel que $l = gm$, $k = nf$, $h = (\Sigma j)i$, $ig = (\Sigma u)n$, $fj = mv$.

Ce dernier axiome est appelé l'axiome octaédrique car on peut le représenter sous la forme d'un octaèdre où les facettes formées par des triangles orientés donnent les triangles distingués et les facettes formées par des triangles non orientés sont des diagrammes commutatifs. Le rectangle constitué des morphismes f , j , m et v , de même que celui constitué des morphismes g , i , n et u sont également commutatifs. Un symbole «+» sur une flèche $A \rightarrow B$ représente un morphisme $A \rightarrow \Sigma B$.



Remarquons que ces quatre axiomes impliquent que, pour un triangle $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} \Sigma X$, on obtient $gf = 0 = hg$.

Définitions 1.4.7. Un *complexe* d'objets de $\text{mod } A$ est une suite de morphismes

$$C = \dots \xrightarrow{d_{k-2}} C_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} C_k \xrightarrow{d_k} C_{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} \dots$$

telle que $d_{k+1} \circ d_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Le complexe est *borné* s'il existe i et j tels que $C_k = 0$ pour tout $k \leq i$ ou $k \geq j$ et il est *concentré* s'il existe i tel que $C_k = 0$ pour tout $k \neq i$.

Exemple 1.4.8. Prenons $Q = 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ comme à l'exemple 1.4.4. Voici un complexe d'objets de $\text{mod } A$ où $A = kQ$:

$$C = \dots \xrightarrow{d_{-2}} 0 \xrightarrow{d_{-1}} 0 \xrightarrow{d_0} 1 \xrightarrow{d_1} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \xrightarrow{d_2} 0 \xrightarrow{d_3} 0 \xrightarrow{d_4} \dots,$$

où d_1 est l'inclusion.

Définition 1.4.9. Un *morphisme* de complexes $f : C \rightarrow C'$ est une suite infinie $f = (f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ tel que le diagramme suivant commute, c'est-à-dire tel que $f_{k+1} \circ d_k = d'_k \circ f_k$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccc} C_k & \xrightarrow{d_k} & C_{k+1} \\ f_k \downarrow & & \downarrow f_{k+1} \\ C'_k & \xrightarrow{d'_k} & C'_{k+1} \end{array}$$

Exemple 1.4.10. Nous reprenons l'exemple 1.4.8 et nous construisons un morphisme de complexes :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \xrightarrow{d_{-2}} & 0 & \xrightarrow{d_{-1}} & 0 & \xrightarrow{d_0} & 1 & \xrightarrow{d_1} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \xrightarrow{d_2} & 0 & \xrightarrow{d_3} & \dots \\ & & \downarrow f_{-1} & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \cdot \\ \dots & \xrightarrow{d'_{-2}} & 0 & \xrightarrow{d'_{-1}} & 1 & \xrightarrow{d'_0} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} & \xrightarrow{d'_1} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} & \xrightarrow{d'_2} & 0 & \xrightarrow{d'_3} & \dots \end{array}$$

Ici, d_1 et f_1 sont injectifs, tandis que d'_1 et f_2 sont surjectifs.

Notons $\mathcal{C}^b(\text{mod } A)$ la catégorie de complexes bornés de $\text{mod } A$. Le *foncteur de décalage*, noté $[1]$, est un automorphisme de $\mathcal{C}^b(\text{mod } A)$ défini par $(C[1])_k = C_{k+1}$ et par $d_k^{C[1]} = -d_{k+1}^C$.

Un *morphisme d'homotopie nulle* est un morphisme de complexes $f : C \rightarrow C'$ tel qu'il existe des morphismes $s_k : C_k \rightarrow C'_{k-1}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ tels que $f_k = d'_{k-1}s_k + s_{k+1}d_k$. La *catégorie d'homotopie* $K^b(\text{mod } A)$ de $\text{mod } A$ est le quotient de $\mathcal{C}^b(\text{mod } A)$ par l'idéal de tous les morphismes d'homotopie nulle.

L'*homologie* d'un complexe C en degré i est l'objet

$$H_i(C) = \ker d_i / \text{im } d_{i-1}.$$

Un morphisme de complexe $f : C \rightarrow C'$ induit un morphisme $H_k(f) = H_k(C) \rightarrow H_k(C')$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Un *quasi-isomorphisme* est un morphisme de complexes tel que tous les morphismes induits par homologie sont des isomorphismes.

Définition 1.4.11. La *catégorie dérivée bornée* $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ est la catégorie obtenue de $K^b(\text{mod } A)$ en inversant tous les quasi-isomorphismes.

L'explication de l'inversion formelle d'un morphisme requiert des notions supplémentaires que nous n'introduisons pas dans cette thèse. Brièvement, les morphismes de $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ peuvent être décrits explicitement comme des toits $X \leftarrow X' \rightarrow Y$ où $X' \rightarrow X$ est un quasi-isomorphisme et $X' \rightarrow Y$ est n'importe quel morphisme de complexes. Les morphismes de cette nouvelle catégorie $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ peuvent également se calculer dans la catégorie d'homotopie $K^b(\text{mod } A)$ à l'aide de résolutions projectives.

Dans le cas d'un carquois Q acyclique, on peut aisément décrire les objets de $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ grâce à la proposition suivante.

Proposition 1.4.12. *Les objets indécomposables de $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ sont isomorphes à des complexes concentrés indécomposables (Happel, 1988, Lemme 5.2).*

Ainsi, tous les objets indécomposables de $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ sont de la forme $M[i]$, où M est un A -module indécomposable et $i \in \mathbb{Z}$. Ainsi, deux modules indécomposables

M et N sont isomorphes si et seulement si leurs objets correspondants $M[0]$ et $N[0]$ dans la catégorie dérivée bornée le sont également.

Définition 1.4.13. La catégorie amassée de Q un carquois acyclique est la catégorie d'orbites

$$\mathcal{C}_Q = \mathcal{D}^b(A)/(\tau^{-1} \circ [1])$$

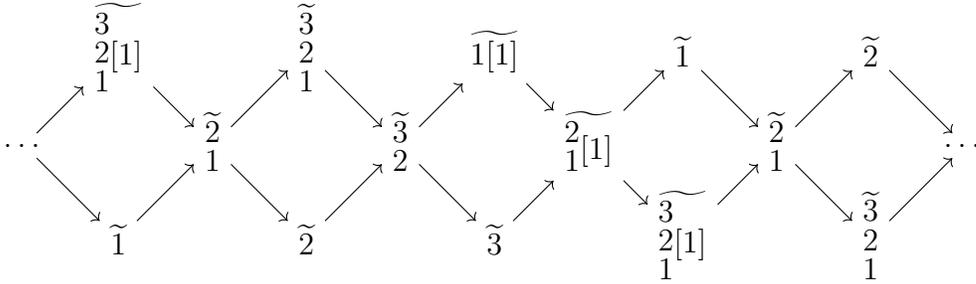
où τ est la translation d'Auslander-Reiten décrite à l'appendice A. Les objets de \mathcal{C}_Q , appelés *objets amassés*, sont ceux de $\mathcal{D}^b(A)$ et, pour tous objets X et Y ,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(X, Y) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(X, (\tau^{-1} \circ [1])^n Y),$$

(Buan *et al.*, 2006).

Exemple 1.4.14. Prenons $Q = 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Notons \widetilde{M} la classe d'isomorphie dans la catégorie amassée de l'objet M dans la catégorie dérivée bornée.

Nous représentons ici la catégorie amassée en écrivant tous les objets indécomposables et en ajoutant autant de flèches d'un objet à un autre que la dimension de l'espace vectoriel des morphismes irréductibles entre ces deux objets.



1.4.3 Propriétés de la catégorie amassée

Proposition 1.4.15. *Toute catégorie amassée est*

- triangulée (Keller, 2005) et le foncteur de suspension est le foncteur de décalage $[1]$ induit de la catégorie dérivée ;

- 2-Calabi-Yau, c'est-à-dire que pour tous objets amassés X et Y , il y a un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(X, Y[1]) \rightarrow D \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(Y, X[1]),$$

où $D = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(-, \mathbf{k})$ (Keller, 2005);

- Krull-Schmidt c'est-à-dire que tout objet amassé est isomorphe à une somme directe d'objets indécomposables et cette décomposition est unique à isomorphisme près et à permutation des facteurs près, (Buan et al., 2006, Proposition 1.2).

Exemple 1.4.16. On retrouve, par exemple, le triangle suivant dans la catégorie amassée décrite à l'exemple 1.4.14 :

$$\widetilde{2} \rightarrow \widetilde{1[1]} \rightarrow \widetilde{2_1[1]} \rightarrow \widetilde{1}.$$

Définition 1.4.17. Un objet amassé X est *rigide* si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(X, X[1]) = 0$.

Exemple 1.4.18. Reprenons l'exemple 1.4.14 et considérons l'objet amassé $X = \widetilde{2} \oplus \begin{smallmatrix} \widetilde{3} \\ 2[1] \\ \widetilde{1} \end{smallmatrix}$. On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(X, X[1]) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q} \left(\widetilde{2} \oplus \begin{smallmatrix} \widetilde{3} \\ 2[1] \\ \widetilde{1} \end{smallmatrix}, \widetilde{1} \oplus \widetilde{3} \right) = 0.$$

Il s'agit donc d'un objet rigide.

Définition 1.4.19. Un objet amassé T est *inclinant-amassé* si :

- T est rigide ;
- pour tout objet X , $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, X[1]) = 0$ si et seulement si X est une somme directe de facteurs directs de T .

Dans cette thèse, nous supposons de plus que tous les objets inclinants-amassés sont *basiques*, c'est-à-dire que leurs facteurs directs sont tous deux à deux non isomorphes.

Exemple 1.4.20. Reprenons l'exemple 1.4.14 et considérons l'objet amassé $T = \widetilde{1} \oplus \underset{1}{\widetilde{2}} \oplus \widetilde{3}$. D'une part,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, T[1]) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q} \left(\widetilde{1} \oplus \underset{1}{\widetilde{2}} \oplus \widetilde{3}, \widetilde{1[1]} \oplus \underset{1}{\widetilde{2[1]}} \oplus \widetilde{3} \right) = 0,$$

ce qui en fait un objet rigide. D'autre part, si X est un objet indécomposable et que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, X[1]) = 0$, alors $X[1] = \widetilde{2}$, $\widetilde{1[1]}$ ou $\underset{1}{\widetilde{3[1]}}$ et donc, X est un facteur direct de T . De même, si X est une somme directe de facteurs directs de T , $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, X[1]) = 0$. Ainsi T est un objet inclinant-amassé.

Proposition 1.4.21. *Un objet inclinant-amassé a n facteurs directs indécomposables (non isomorphes) (Buan et al., 2006, Théorème 3.3).*

Proposition 1.4.22. *(Buan et al., 2006) Toute catégorie amassée possède des objets inclinants-amassés.*

Exemple 1.4.23. Pour toute catégorie amassée, la somme directe de tous les objets projectifs indécomposables forme un objet inclinant amassé.

Définition 1.4.24. Deux objets amassés X et Y sont *compatibles* si

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(X, Y[1]) = 0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(Y, X[1]).$$

Exemple 1.4.25. Nous avons déjà calculé à l'exemple 1.4.18 que $\widetilde{2}$ et $\underset{1}{\widetilde{3[1]}}$ sont compatibles.

Pour deux objets amassés, notons $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_Q}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(X, Y[1])$. Par ailleurs, notons $\mathrm{add} X$ la catégorie additive engendrée par les facteurs directs de X .

Remarque 1.4.26. Soit $\{X_1, \dots, X_m\}$ un ensemble maximal d'objets rigides indécomposables deux à deux compatibles. Notons $X = \bigoplus_{k=1}^m X_k$. D'un côté,

$\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}(X, X) = 0$ et, d'un autre côté, si $\text{Ext}_{\mathcal{C}_Q}(X, Y) = 0$ pour un objet rigide et indécomposable Y , alors Y est dans $\text{add } X$. Ainsi, X est inclinant-amassé si tous les objets de \mathcal{C}_Q sont rigides.

Réciproquement, si $\bigoplus_{k=1}^m X_k$ est un objet inclinant-amassé, alors $\{X_1, \dots, X_m\}$ est un ensemble maximal d'objets deux à deux compatibles.

1.4.4 Propriétés des objets inclinants-amassés

Proposition 1.4.27. *Soit $X = \bigoplus_{k=1}^{n-1} X_k$ un objet rigide et basique avec X_i un objet amassé indécomposable, pour $i = 1, \dots, n-1$. Il existe exactement deux objets amassés indécomposables Y et Z non isomorphes tels que $X \oplus Y$ et $X \oplus Z$ soient des objets inclinants-amassés (Buan et al., 2006, Théorème 6.8).*

Exemple 1.4.28. Comme à l'exemple 1.4.18, prenons l'objet rigide $X = \widetilde{2} \oplus \widetilde{\frac{3}{1}[1]}$. Les deux seuls objets inclinants-amassés à 3 facteurs directs indécomposables dont X est facteur direct sont $\widetilde{\frac{2}{1}} \oplus \widetilde{2} \oplus \widetilde{\frac{3}{1}[1]}$ et $\widetilde{2} \oplus \widetilde{1[1]} \oplus \widetilde{\frac{3}{1}[1]}$.

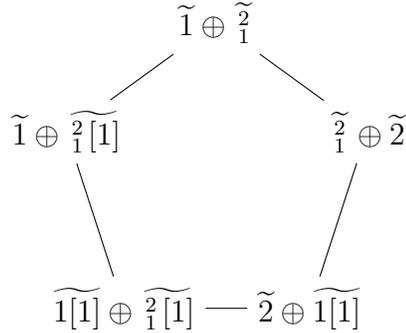
Cette dernière définition nous amène à définir un concept de mutations sur les objets inclinants-amassés. Pour un objet amassé X , notons $|X|$ le nombre de ses facteurs indécomposables.

Définition 1.4.29. Soit X un objet amassé tel que $|X| = n-1$ et Y et Z deux objets indécomposables tels que $X \oplus Y$ et $X \oplus Z$ soient des objets inclinants-amassés. La *mutation* en Y de $X \oplus Y$, notée $\mu_Y(X \oplus Y)$, est $\mu_Y(X \oplus Y) = X \oplus Z$.

Il est clair que la mutation est un procédé involutif.

Proposition 1.4.30. *Tous les objets inclinants-amassés de \mathcal{C}_Q sont reliés par suite de mutations (Buan et al., 2006, Proposition 3.5).*

Exemple 1.4.31. Prenons $Q = 1 \leftarrow 2$ et représentons toutes les mutations entre tous les objets inclinants-amassés.



Remarquons que ceci a la même forme que le graphe d'échange de \mathbb{A}_2 décrit à l'exemple 1.1.20.

1.5 Lien entre algèbres amassées et catégories amassées

Soit Q un carquois acyclique de type Dynkin et (X, Q) une graine.

Proposition 1.5.1. *Il existe un application bijective entre l'ensemble des variables amassées de $\mathcal{A}(X, Q)$ et l'ensemble des objets indécomposables de \mathcal{C}_Q telle que deux variables amassées sont compatibles si et seulement si leur image par cette application l'est (Caldero et Chapoton, 2006; Caldero et Keller, 2006; Caldero et Keller, 2008; Buan et al., 2007a; Buan et al., 2007b).*

Cette bijection en induit donc une entre les amas de l'algèbre amassée et les objets inclinants-amassés de la catégorie amassée.

Exemple 1.5.2. Prenons le carquois $Q = 1 \leftarrow 2$, dont l'algèbre amassée qu'il engendre a été étudiée à l'exemple 1.1.20 et dont l'ensemble des objets inclinants-amassés dans la catégorie amassée associée ont été listés à l'exemple 1.4.31. Nous

avons la bijection suivante qui préserve la compatibilité des objets : $x_1 \mapsto \widetilde{1[1]}$,
 $x_2 \mapsto \widetilde{\frac{2}{1}[1]}$, $\frac{x_2+1}{x_1} \mapsto \widetilde{1}$, $\frac{x_1+1}{x_2} \mapsto \widetilde{2}$ et $\frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2} \mapsto \widetilde{\frac{2}{1}}$.

CHAPITRE II

ASSOCIAÈDRE GÉNÉRALISÉ

L'associaèdre a été initialement défini comme un polytope dans \mathbb{R}^n dont les sommets correspondent aux différents parenthésages d'un mot de $n + 2$ lettres, (Tamari, 1951; Stasheff, 1963). Deux sommets sont liés par une arête si l'un s'obtient à partir de l'autre par une unique application de la règle d'associativité. Or, à un parenthésage d'un mot $a_1 \dots a_{n+2}$ de $n + 2$ lettres, on peut associer de façon bijective une triangulation du $n + 3$ -gone. Pour ce faire, on numérote les sommets du $n + 3$ -gone de 1 à $n + 3$ et on ajoute un arc entre les sommets i et j s'il y a une paire de parenthèses s'ouvrant en a_i et se fermant en a_{j-1} .

Exemple. La figure 2.1 représente l'associaèdre donné par le parenthésage d'un mot de quatre lettres, ainsi que les triangulations du pentagone correspondant à chaque parenthésage.

Il s'avère que les sommets de l'associaèdre correspondent également aux triangulations d'un $n + 3$ -gone et les arêtes, aux flips. On peut donc également voir l'associaèdre comme une réalisation du graphe d'échange de \mathbb{A}_n , c'est-à-dire comme un polytope dont les sommets correspondent aux amas d'une algèbre amassée de type \mathbb{A}_n et dont les arêtes correspondent aux flips reliant ces amas.

Définition 2.0.1. L'*associaèdre généralisé*, ou plus simplement *associaèdre*, est une réalisation du graphe d'échange d'une algèbre amassée (pas nécessairement

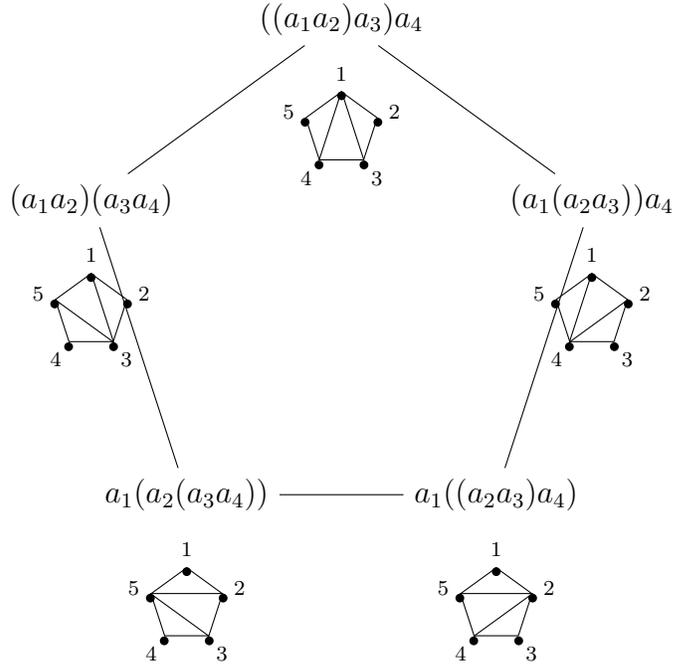


Figure 2.1. Projection dans \mathbb{R}^2 de l'associaèdre donné par le parenthésage d'un mot de quatre lettres avec la triangulation du pentagone associée à chaque mot de type \mathbb{A}_n).

Récemment, Arkani-Hamed, Bai, He, et Yan ont développé une nouvelle construction de l'associaèdre pour une algèbre amassée obtenue à partir d'un carquois de type \mathbb{A}_n linéairement orienté en établissant un lien avec la théorie des amplitudes de diffusion en physique, (Arkani-Hamed *et al.*, 2018). Leur construction a été généralisée en considérant tous les carquois acycliques de type Dynkin et expliquée par la théorie de la représentation, (Bazier-Matte *et al.*, 2018). Ce chapitre généralise à son tour une partie des résultats de cet article en réalisant l'associaèdre d'une algèbre amassée obtenue à partir de tous carquois de type Dynkin, pas forcément acyclique.

Nous commençons le chapitre en introduisant plusieurs notions mathématiques

essentielles à la fois pour expliquer notre construction de l'associaèdre (comme les algèbres inclinées-amassées à la section 2.1.1) et pour prouver la validité de cette construction (comme les classes de torsion à la section 2.1.2 et les index à la section 2.1.3). Nous détaillons ensuite la construction de l'associaèdre à la section 2.2. Nous montrons qu'il correspond à l'enveloppe convexe des vecteurs dimension des sous-modules d'un certain module donné (sections 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3). Grâce à ce résultat, nous démontrons la validité de notre construction à la section 2.3.4. Finalement, nous donnons quelques-unes de ses propriétés à la section 2.4, comme le fait que les normales à ses facettes sont des \underline{g} -vecteurs ou son lien avec le treillis des classes de torsion.

2.1 Préliminaires

2.1.1 Algèbre inclinée-amassée

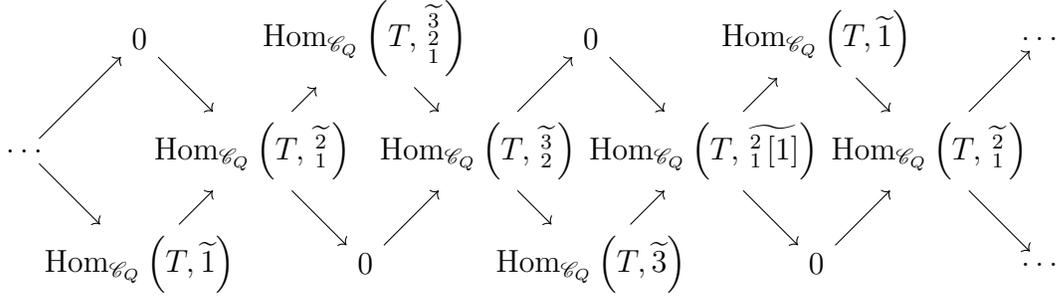
Soit un carquois Q de type Dynkin à n sommets et soit \mathcal{C}_Q la catégorie amassée formée à partir de Q .

Définition 2.1.1. Soit T un objet inclinant-amassé de \mathcal{C}_Q . L'algèbre d'endomorphismes $\text{End}_{\mathcal{C}_Q} T$ est une algèbre *inclinée-amassée*.

Tout au long de ce chapitre, nous considérons T un objet inclinant-amassé de la catégorie amassée \mathcal{C}_Q et B l'algèbre inclinée-amassée d'endomorphismes sur T : $B = \text{End}_{\mathcal{C}_Q} T$. Nous considérons également mod B , la catégorie des B -modules. En vertu de la proposition 1.4.21, décomposons T en somme directe d'objets indécomposables : $T = \bigoplus_{k=1}^n T_k$.

Exemple 2.1.2. Reprenons les exemples 1.4.14 et 1.4.20 avec $T = \tilde{1} \oplus \tilde{\frac{3}{2}} \oplus \tilde{3}$; nous numérotions $T_1 = \tilde{1}$, $T_2 = \tilde{\frac{3}{2}}$ et $T_3 = \tilde{3}$. Considérons l'algèbre $B = \text{End}_{\mathcal{C}_Q} T$. Nous illustrons ici cette algèbre en écrivant tous ses modules indécomposables en

plus du module 0 et en ajoutant entre deux modules un nombre de flèches égal à la dimension de l'espace vectoriel des morphismes irréductibles entre ces deux modules.



Afin d'alléger l'écriture des B -modules, notons les modules simples de l'algèbre B par $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, \tilde{\frac{2}{1}}) = a$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, \tilde{\frac{3}{2}}) = b$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, \tilde{\frac{2}{1}[1]}) = c$. En outre, notons $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, \tilde{1}) = \overset{a}{c}$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, \tilde{\frac{3}{1}}) = \overset{b}{a}$, et $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, \tilde{3}) = \overset{c}{b}$. Cette notation sera justifiée par le calcul du carquois ordinaire de B , introduit un peu plus tard.

La catégorie $\text{mod } B$ peut ainsi être décrite plus succinctement à la figure 2.2.

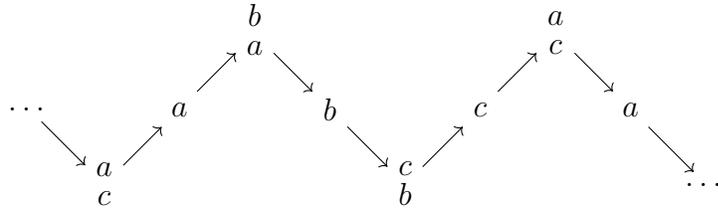


Figure 2.2. Catégorie de modules sur l'algèbre B

Il y a naturellement un foncteur entre la catégorie amassée et la catégorie de modules sur B :

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, -) : \mathcal{C}_Q \rightarrow \text{mod } B,$$

qui envoie l'objet X vers $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, X)$. Les modules projectifs indécomposables de $\text{mod } B$ sont de la forme $P_k = \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, T_k)$ pour $k = 1, \dots, n$, tandis que les

modules injectifs indécomposables de $\text{mod } B$ sont de la forme $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, T_k[2])$ pour $k = 1, \dots, n$.

Proposition 2.1.3. *Le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, -)$ induit une équivalence de catégories \mathbf{k} -linéaires entre $\mathcal{C}_Q/\langle \text{add } T[1] \rangle$ et $\text{mod } B$ (Buan et al., 2007a, Théorème 2.2).*

Ceci implique que, pour un objet amassé X de \mathcal{C}_Q , $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, X) = 0$ si et seulement si X appartient à $\text{add } T[1]$.

Le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, -)$ envoie les triangles de \mathcal{C}_Q

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$$

sur des suites exactes longues de $\text{mod } B$

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, Z[-1]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, Y) \\ \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, X[1]) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Définition 2.1.4. Un triangle *presque scindé* (ou *d'Auslander-Reiten*) dans \mathcal{C}_Q est un triangle $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ tel que :

- i) X et Z sont indécomposables ;
- ii) le triangle n'est pas scindé ;
- iii) tout non-isomorphisme $U \rightarrow Z$, où U est un objet indécomposable, se factorise par g ;
- iv) tout non-isomorphisme $X \rightarrow V$, où V est un objet indécomposable, se factorise par f ,

(Happel, 1988).

Exemple 2.1.5. Reprenons l'exemple 1.4.14. Le triangle

$$\widetilde{3} \rightarrow \widetilde{1[1]} \oplus \widetilde{3} \rightarrow \widetilde{2[1]} \rightarrow \widetilde{2} \quad (2.1)$$

est presque scindé, tandis que le triangle

$$\widetilde{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}}[1] \rightarrow \widetilde{1} \rightarrow \begin{matrix} \widetilde{3} \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \widetilde{3} \\ 2 \end{matrix} \quad (2.2)$$

ne l'est pas.

Proposition 2.1.6. *Un triangle presque scindé $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ est déterminé, à isomorphisme près, par X , (Happel, 1988).*

Proposition 2.1.7. *Les suites presque scindées (respectivement, les morphismes minimaux à gauche presque scindés) de $\text{mod } B$ sont induites par le foncteur*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, -)$$

des triangles presque scindés (respectivement, les morphismes minimaux à gauche presque scindés) de \mathcal{C}_Q , (Auslander et Reiten, 1977) et (Buan et al., 2007a, Proposition 3.2).

Exemple 2.1.8. La suite exacte presque scindée de B -modules

$$0 \rightarrow b \rightarrow \begin{matrix} c \\ b \end{matrix} \rightarrow c \rightarrow 0$$

provient du triangle presque scindé donné à l'exemple 2.1.5

$$\begin{matrix} \widetilde{3} \\ 2 \end{matrix} \rightarrow \widetilde{1}[1] \oplus \widetilde{3} \rightarrow \begin{matrix} \widetilde{2} \\ 1 \end{matrix}[1] \rightarrow \begin{matrix} \widetilde{2} \\ 1 \end{matrix}.$$

Proposition 2.1.9. *(Buan et al., 2007a, Corolaire 2.3) Il y a un nombre fini de B -modules indécomposables, soit autant que de $\mathbf{k}Q$ -modules indécomposables.*

Notons N le nombre de B -modules indécomposables et notons P_i le projectif en i , pour $i = 1, \dots, n$.

Définition 2.1.10. Le *vecteur dimension* d'un B -module M est

$$\underline{\dim}(M) = (\dim \text{Hom}_B(P_1, M), \dots, \dim \text{Hom}_B(P_n, M))$$

Exemple 2.1.11. Reprenons l'algèbre B donnée à l'exemple 2.1.2. Ses projectifs indécomposables sont $P_1 = \begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}$, $P_2 = \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}$ et $P_3 = \begin{smallmatrix} c \\ b \end{smallmatrix}$. Calculons $\underline{\dim}(a^2 \oplus \begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix})$:

$$\begin{aligned} \underline{\dim} \left(a^2 \oplus \begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix} \right) &= \left(\dim \operatorname{Hom}_B \left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}, a^2 \oplus \begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix} \right), \dim \operatorname{Hom}_B \left(\begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}, a^2 \oplus \begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix} \right), \right. \\ &\quad \left. \dim \operatorname{Hom}_B \left(\begin{smallmatrix} c \\ b \end{smallmatrix}, a^2 \oplus \begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix} \right) \right) \\ &= (3, 0, 1) \end{aligned}$$

Remarquons que le vecteur dimension d'un B -module M correspond également à la multiplicité des modules simples dans toute suite de composition de M .

Carquois ordinaire d'une algèbre

Nous travaillons à obtenir l'associaèdre de l'algèbre amassée donnée non pas par le carquois Q – que nous prenons forcément acyclique – mais par le carquois associé à l'algèbre B , qui peut contenir des cycles orientés. Nous donnons la construction de ce carquois Q_B dans cette sous-section.

Définition 2.1.12. Le *radical (de Jacobson)* $\operatorname{rad} \Lambda$ d'une \mathbf{k} -algèbre Λ est l'intersection de tous les idéaux à droite maximaux de Λ .

Exemple 2.1.13. Reprenons l'exemple 2.1.2 et calculons $\operatorname{rad} B$:

$$\operatorname{rad} B = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q} \left(\begin{smallmatrix} \tilde{3} \\ \tilde{1}, 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q} \left(\begin{smallmatrix} \tilde{3} \\ 2, \tilde{3} \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q} \left(\begin{smallmatrix} \tilde{3}, \tilde{1} \end{smallmatrix} \right).$$

Pour $i = 1, \dots, n$, il existe un idempotent primitif e_i de B tel que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, T_i) = e_i B$.

Définition 2.1.14. Le carquois *ordinaire* Q_B de l'algèbre B est un carquois tel que :

- l'ensemble des sommets de Q_B est en bijection avec $\{e_1, \dots, e_n\}$.

— pour deux sommets i et j de Q_B ,

$$|Q(i, j)| = \dim (e_i(\text{rad } B / \text{rad}^2 B)e_j).$$

Exemple 2.1.15. Reprenons l'exemple 2.1.2 et calculons le carquois Q_B où $B = \text{End}_{\mathcal{C}_Q}(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3)$ avec $T_1 = \tilde{1}$, $T_2 = \tilde{\frac{3}{1}}$ et $T_3 = \tilde{3}$. D'abord, précisons que e_k est le morphisme identité de $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_k, T_k)$ et que $\text{rad}^2 B = 0$. Notons l'ensemble des sommets de Q_B par $\{a, b, c\}$ où le sommet a correspond à e_1 , le sommet b correspond à e_2 et le sommet c correspond à e_3 . Ainsi, on trouve $|Q(a, b)| = |Q(b, c)| = |Q(c, a)| = 1$ et que, pour les autres choix de i et j , $|Q(i, j)| = 0$. Le carquois Q_B est illustré à la figure 2.3.

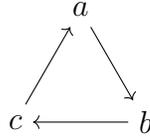


Figure 2.3. Carquois ordinaire de l'algèbre B

Remarque 2.1.16. Soit P_1, \dots, P_n les modules projectifs de $\mathbf{k}Q$ et $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ les objets inclinants-amassés correspondants. L'objet $P = \bigoplus_{k=1}^n \tilde{P}_k$ est un objet inclinant-amassé, car $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(\tilde{P}_i, \tilde{P}_j[1]) = 0$ pour tous $i, j = 1, \dots, n$. Notons C l'algèbre inclinée-amassée $C = \text{End}_{\mathcal{C}_Q} P$. On a $C \cong \mathbf{k}Q$ et $Q_C \cong Q^{\text{op}}$.

Proposition 2.1.17. *Soit U et $\mu_X(U)$ deux objets inclinants-amassés qui s'obtiennent par mutation l'un à partir de l'autre, $C = \text{End}_{\mathcal{C}_Q} U$ et $C' = \text{End}_{\mathcal{C}_Q} \mu_X(U)$ les algèbres inclinées-amassées correspondantes. Notons i le sommet de Q_C associé à l'objet indécomposable X , c'est-à-dire le sommet associé à $\text{End}_{\mathcal{C}_Q}(X, X)$. Alors,*

$$Q_{C'} = \mu_i(Q_C),$$

(Buan et al., 2008).

Exemple 2.1.18. Reprenons l'algèbre $B = \text{End}_{\mathcal{C}_Q} T$ donnée à l'exemple 2.1.2, où $T = \tilde{1} \oplus \tilde{\frac{3}{2}} \oplus \tilde{3}$. Mutons T en $\tilde{\frac{3}{2}}$ pour obtenir T'

$$T' = \mu_{\tilde{\frac{3}{2}}} T = \tilde{1} \oplus \tilde{3} \oplus \widehat{\frac{2}{1}[1]}.$$

Soit $B' = \text{End}_{\mathcal{C}_Q} T'$. On calcule que le carquois ordinaire $Q_{B'}$ de B' est

$$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3.$$

Ainsi, $\mu_2(Q_B) = Q_{B'}$, comme on peut facilement vérifier en utilisant l'algorithme de S. Fomin et A. Zelevinsky présenté à la section 1.1 du chapitre 1.

2.1.2 Classes et paires de torsion

Notre construction de l'associaèdre s'appuie également beaucoup sur les classes de torsion et leur bijection avec les objets inclinants-amassés. Les notions que nous présentons sur les classes de torsion serviront à la section 2.3, afin de démontrer la validité de notre construction, que nous présenterons plus tard, de l'associaèdre.

Définitions et propriétés

Nous définissons ici les classes de torsion et sans torsion dans le cadre qui nous intéresse, soit celui de la catégorie $\text{mod } B$ pour B une algèbre inclinée-amassée, même s'il est possible de les définir dans un cadre beaucoup plus large.

Définition 2.1.19. Une *classe de torsion* de $\text{mod } B$ est une sous-catégorie pleine de $\text{mod } B$ stable pour les quotients et les extensions. Une *classe sans torsion* de $\text{mod } B$ est une sous-catégorie pleine de $\text{mod } B$ stable pour les sous-modules et les extensions.

Notons $\langle M_1, \dots, M_n \rangle$ la sous-catégorie additive de $\text{mod } B$ engendrée par $M_1, \dots,$

M_n , c'est-à-dire la catégorie dont les objets ont comme seuls facteurs indécomposables M_1, \dots, M_n .

Exemple 2.1.20. Reprenons l'algèbre B décrite à l'exemple 2.1.2. La sous-catégorie $\mathcal{T} = \langle b, c, \frac{b}{a}, \frac{c}{b} \rangle$ est une classe de torsion de $\text{mod } B$, tandis que $\mathcal{F} = \langle c, \frac{a}{c} \rangle$ est une classe sans torsion de $\text{mod } B$.

Définition 2.1.21. Une *paire de torsion* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une paire de sous-catégories pleines de $\text{mod } B$ avec \mathcal{T} et \mathcal{F} tels que :

- i) $\text{Hom}_B(M, N) = 0$ pour tout M dans \mathcal{T} et tout N dans \mathcal{F} ;
- ii) si $\text{Hom}_B(M, -)|_{\mathcal{F}} = 0$, alors M est dans \mathcal{T} ;
- iii) si $\text{Hom}_B(-, N)|_{\mathcal{T}} = 0$, alors N est dans \mathcal{F} .

Exemple 2.1.22. La paire $(\langle a, \frac{a}{c} \rangle, \langle b, c, \frac{c}{b} \rangle)$ est une paire de torsion sur l'algèbre B décrite à l'exemple 2.1.2

Proposition 2.1.23. *Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une paire de torsion, alors \mathcal{T} est une classe de torsion et \mathcal{F} est une classe sans torsion.*

Par ailleurs, pour toute classe de torsion \mathcal{T} , il existe une classe sans torsion \mathcal{F} telle que $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ soit une paire de torsion. Similairement, pour toute classe sans torsion \mathcal{F} , il existe une classe de torsion \mathcal{T} telle que $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ soit une paire de torsion.

Exemple 2.1.24. Reprenons la classe de torsion $\langle b, c, \frac{b}{a}, \frac{c}{b} \rangle$ et la classe sans torsion $\langle c, \frac{a}{c} \rangle$ de l'exemple 2.1.20 et la paire de torsion $(\langle a, \frac{a}{c} \rangle, \langle b, c, \frac{c}{b} \rangle)$ de 2.1.22. Remarquons que $\langle a, \frac{a}{c} \rangle$ est une classe de torsion, que $\langle b, c, \frac{c}{b} \rangle$ est une classe sans torsion et que $(\langle b, c, \frac{b}{a}, \frac{c}{b} \rangle, \langle a \rangle)$ et $(\langle a, b, \frac{b}{a} \rangle, \langle c, \frac{a}{c} \rangle)$ sont des paires de torsion.

Proposition 2.1.25. *Soit \mathcal{T} une classe de torsion de $\text{mod } B$ et M un B -module. Il existe un sous-module de M , appelé partie de torsion de M par rapport à \mathcal{T} et noté $t_{\mathcal{T}}M$ tel que $t_{\mathcal{T}}M$ soit le plus grand sous-module de M contenu dans \mathcal{T} ,*

c'est-à-dire que tous les sous-modules de M contenu dans \mathcal{T} sont des sous-modules de $t_{\mathcal{T}}M$.

Exemple 2.1.26. Reprenons l'algèbre B décrite à l'exemple 2.1.2 et la classe de torsion $\mathcal{U} = \langle b, c, \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} c \\ b \end{smallmatrix} \rangle$ décrite à l'exemple 2.1.20. Considérons le B -module $M = a^2 \oplus \begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}$. Sa partie de torsion par rapport à \mathcal{U} est c .

Proposition 2.1.27. *Soit $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ une paire de torsion de $\text{mod } B$ et M un B -module. Le module $M/t_{\mathcal{T}}M$ est le plus grand quotient de M contenu dans \mathcal{F} .*

Exemple 2.1.28. Reprenons les exemples 2.1.24 et 2.1.26 et remarquons que a^3 est le plus grand quotient de M contenu dans $\langle a \rangle$.

La définition des classes de torsion et des classes sans torsion leur donne naturellement une structure de treillis, tel que stipulé dans la prochaine proposition.

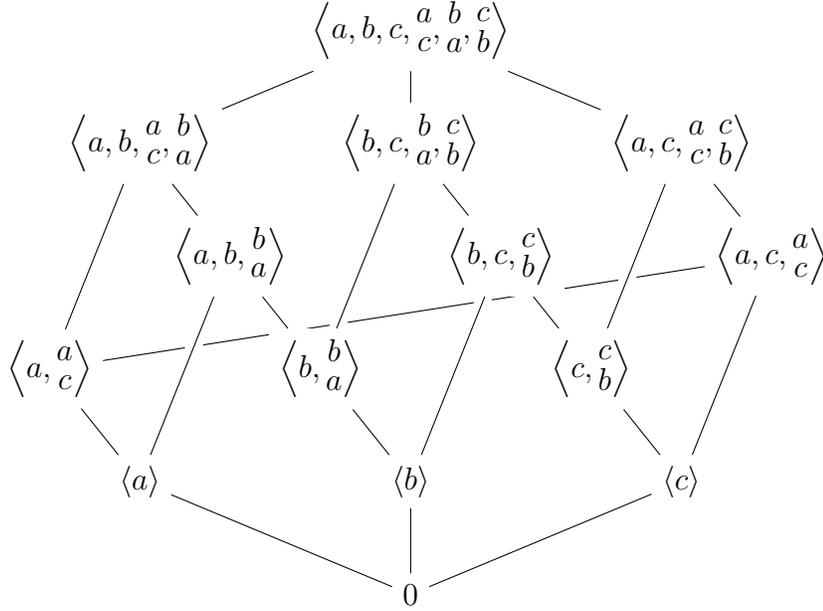
Proposition 2.1.29. *Les classes de torsion (sans torsion, respectivement) sur B forment un treillis par inclusion. L'infimum de deux classes de torsion (sans torsion, respectivement) est leur intersection et leur supremum est l'infimum de toutes leurs bornes supérieures, (Iyama et al., 2015, Théorème 1.3 et Proposition 2.3).*

Exemple 2.1.30. Construisons à la figure 2.4 le treillis des classes de torsion pour l'algèbre B décrite à l'exemple 2.1.2.

Lien avec les objets inclinants-amassés

Définition 2.1.31. Soit \mathcal{U} une classe de torsion de B . Un objet M de \mathcal{U} est Ext-projectif sur \mathcal{U} si $\text{Ext}_B^1(M, \mathcal{U}) = 0$.

Soit \mathcal{U} une classe de torsion. Notons $P(\mathcal{U})$ la somme directe de chaque objet de \mathcal{U} indécomposable Ext-projectif sur \mathcal{U} .

Figure 2.4. Treillis des classes de torsion sur l'algèbre B

Exemple 2.1.32. Reprenons la classe de torsion $\mathcal{U} = \langle b, c, \begin{smallmatrix} b & c \\ a & b \end{smallmatrix} \rangle$ de l'exemple 2.1.20. La suite exacte courte

$$0 \rightarrow b \rightarrow \begin{smallmatrix} c \\ b \end{smallmatrix} \rightarrow c \rightarrow 0$$

nous assure que $\text{Ext}_B^1(c, \mathcal{U}) \neq 0$. Toutefois, $\text{Ext}_B^1(b, \mathcal{U}) = 0$, $\text{Ext}_B^1(\begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}, \mathcal{U}) = 0$ et $\text{Ext}_B^1(\begin{smallmatrix} c \\ b \end{smallmatrix}, \mathcal{U}) = 0$. Ainsi, $P(\mathcal{U}) = b \oplus \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix} \oplus c$.

Pour un B -module M , notons également $\text{Gen } M$ la catégorie de tous les quotients de sommes directes de copies de M .

Proposition 2.1.33. *Soit T un objet inclinant-amassé de la catégorie amassée \mathcal{C}_Q et $B = \text{End}_{\mathcal{C}_Q} T$. Il y a une bijection entre les classes de torsion \mathcal{U} de $\text{mod } B$ et les objets inclinants-amassés U donnée par*

$$\mathcal{U} \mapsto U_1 \oplus U_2[1],$$

où $U_1 \oplus U_2[1]$ est un objet inclinant-amassé tel que $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, U_1 \oplus U_2[1]) = P(\mathcal{U})$, tel que U_1 n'a aucun facteur direct appartenant à $\text{add } T[1]$ et tel que U_2 est une

somme directe maximale de facteurs T_k de T tels que $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T_k, U_1) = 0$, et par

$$U \mapsto \text{Gen Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, U_1),$$

où $U = U_1 \oplus U_2[1]$ et $U_2[1]$ est une somme directe maximale de facteurs de U appartenant à $\text{add } T[1]$ (Adachi et al., 2013, Théorèmes 2.7 et 4.1).

Exemple 2.1.34. Reprenons l'exemple 2.1.32 avec $\mathcal{U} = \langle b, c, \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} c \\ b \end{smallmatrix} \rangle$ et $P(\mathcal{U}) = b \oplus \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} c \\ b \end{smallmatrix}$. On obtient

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q} \left(T, \begin{smallmatrix} \tilde{3} \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} \tilde{3} \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \tilde{3} \right) = P(\mathcal{U}).$$

De plus,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q} \left(T_k, \begin{smallmatrix} \tilde{3} \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \widetilde{\begin{smallmatrix} \tilde{3} \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}} \oplus \tilde{3} \right) \neq 0$$

pour tout facteur T_k de T . Donc, l'objet inclinant associé à \mathcal{U} est $\begin{smallmatrix} \tilde{3} \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} \tilde{3} \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \tilde{3}$.

Inversement, à l'objet inclinant-amassé $U = \begin{smallmatrix} \tilde{3} \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} \tilde{3} \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \tilde{3}$, on lui associe la classe de torsion

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \text{Gen Hom}_{\mathcal{C}_Q} \left(T, \begin{smallmatrix} \tilde{3} \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} \tilde{3} \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \tilde{3} \right) \\ &= \text{Gen} \left(b \oplus \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} c \\ b \end{smallmatrix} \right) \\ &= \langle b, c, \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} c \\ b \end{smallmatrix} \rangle. \end{aligned}$$

La bijection entre les objets inclinant-amassés et les classes de torsion nous permet de formuler la proposition suivante.

Proposition 2.1.35. *Dans le treillis des classes de torsion, une classe de torsion en couvre une autre si et seulement si les objets inclinant-amassés associés à ces classes s'obtiennent l'un à partir de l'autre par une mutation, (Adachi et al., 2013, Théorème 3.3).*

2.1.3 Index et \mathbf{g} -vecteurs

Tout comme les classes de torsion, les index et les \mathbf{g} -vecteurs jouent un rôle primordiale dans la démonstration de la validité de notre construction de l'associaèdre. Nous les introduisons donc ici en donnant quelques unes de leur propriétés.

Soit $U = \bigoplus_{k=1}^n U_i$ un objet inclinant-amassé et soit X un objet de la catégorie amassée. Il existe un triangle

$$U_b \rightarrow U_a \rightarrow X \rightarrow U_b[1], \quad (2.3)$$

avec $U_a, U_b \in \text{add } U$, (Keller et Reiten, 2007).

Précisons qu'en général, un tel triangle n'est pas presque scindé.

Définition 2.1.36. (Palu, 2008) Reprenons la notation introduite ci-dessus et écrivons $U_a = \bigoplus_{k=1}^n U_k^{a_k}$ et $U_b = \bigoplus_{k=1}^n U_k^{b_k}$. L'*index* de X par rapport à U est

$$\text{ind}_U X = (a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n).$$

Si $U = T$, on dit alors que $\text{ind}_T X$ est le *\underline{g} -vecteur* de X , noté $\underline{g}(X)$.

On note $\underline{g}(X)_k = a_k - b_k$ pour $k = 1, \dots, n$.

Bien que le triangle (2.3) n'est pas unique, l'index est tout de même bien défini.

Exemple 2.1.37. Reprenons la catégorie amassée \mathcal{C}_Q décrite à l'exemple 1.4.14, l'objet inclinant amassé $T = \widetilde{1} \oplus \widetilde{\frac{3}{2}} \oplus \widetilde{3}$ décrit à l'exemple 1.4.20 et la numérotation des facteurs indécomposables donnés à l'exemple 2.1.2, c'est-à-dire $T_1 = \widetilde{1}$, $T_2 = \widetilde{\frac{3}{2}}$ et $T_3 = \widetilde{3}$. Calculons $\underline{g}\left(\widetilde{\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}}[1]\right)$. Il existe un triangle

$$\widetilde{\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}} \rightarrow \widetilde{3} \rightarrow \widetilde{\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}}[1] \rightarrow \widetilde{\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}}[1].$$

Ainsi, $\underline{g}\left(\widetilde{\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}}[1]\right) = (0, -1, 1)$.

Notons $G_{\mathcal{C}_Q}$ (ou simplement G) la matrice des \underline{g} -vecteurs de tous les objets amassés indécomposables, c'est-à-dire la matrice dont les colonnes sont $\underline{g}(X)$ pour chaque objet amassé indécomposable X de \mathcal{C}_Q .

Exemple 2.1.38. Reprenons l'exemple 1.4.14 et calculons G . Chaque objet amassé indécomposable est inscrit au-dessus de la colonne à laquelle il est associé. Nous garderons cet ordre pour tous les autres exemples à partir de \mathcal{C}_Q tel que défini à l'exemple 1.4.14. On obtient

$$G = \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{2}_1 & \tilde{3}_2 & \tilde{2} & \tilde{3}_2 & \widetilde{1[1]} & \tilde{3} & \widetilde{2_1[1]} & \widetilde{3_2[1]} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 2.1.39. Soit T_i un facteur direct indécomposable de T . Son \underline{g} -vecteur est e_i , le vecteur de base standard. En effet, il existe un triangle

$$0 \rightarrow T_i \rightarrow T_i \rightarrow 0,$$

d'où le résultat.

Similairement, le \underline{g} -vecteur de $T_i[1]$ est $-e_i$, ce qu'on constate avec le triangle

$$T_i \rightarrow 0 \rightarrow T_i[1] \rightarrow T_i[1].$$

Notons également G_U la matrice des \underline{g} -vecteurs d'un objet inclinant-amassé U . La matrice G_U est donc composée d'un sous-ensemble des colonnes de G . De manière plus générale, notons G_U^V la matrice des index par rapport à un objet inclinant-amassé V d'un objet inclinant-amassé U . Remarquons donc que $G_U = G_U^T$, c'est-à-dire que l'objet par rapport auquel les index sont calculés n'est pas indiqué s'il s'agit de T .

Établissons quelques propriétés des \underline{g} -vecteurs et des index.

Proposition 2.1.40. *Soit T et U des objets inclinants-amassés et $B = \text{End}_{\mathcal{C}_Q} T$.*

a) *Il y un lien entre la matrice des index par rapport à T des facteurs directs de U et celle des index par rapport à U des facteurs directs de T :*

$$((G_U^T)_{\mathcal{C}_Q})^{-1} = (G_{D(T)}^{D(U)})_{\mathcal{C}_Q^{\text{op}}},$$

où $D(U) = \text{Hom}_{\mathbf{k}}(U, \mathbf{k})$ et $D(T) = \text{Hom}_{\mathbf{k}}(T, \mathbf{k})$.

b) *L'ensemble des index des facteurs directs d'un objet inclinant-amassé est linéairement indépendant. Plus précisément,*

$$\det(G_U) = \pm 1.$$

c) *Soit $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ un triangle de \mathcal{C}_Q induisant une suite presque scindée de B -modules. Alors*

$$\text{ind}_T X + \text{ind}_T Z = \text{ind}_T Y \tag{2.4}$$

La partie a est une réécriture d'une conséquence directe du théorème 1.2 et de l'égalité 1.13 de (Nakanishi et Zelevinsky, 2012) et la partie b découle directement de la partie a. La partie c est un cas particulier de (Palu, 2008, Proposition 2.2).

2.2 Construction de l'associaèdre

Rappelons que nous avons fixé au début de la section 2.1 un objet inclinant-amassé T à partir duquel nous calculons l'algèbre d'endomorphismes $B = \text{End}_{\mathcal{C}_Q} T$. Tel que mentionné précédemment, nous continuons de considérer cet objet T tout au long de ce chapitre.

Remarquons que, puisqu'il y a N B -modules indécomposables, c'est-à-dire N modules non nuls de la forme $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, X)$ avec X un objet amassé indécomposable,

il y a $N + n$ objets amassés indécomposables, en ajoutant ceux de la forme $T_i[1]$ pour $i = 1, \dots, n$. À chacun de ces $N + n$ objets amassés indécomposables X , associons une indéterminée x_X . Puis, à chacun des N B -modules indécomposables M , fixons une constante naturelle (possiblement nulle) c_M .

En vertu de la proposition 2.1.6, chacun des N objets amassés indécomposables X tels que $X \neq T_i[1]$ pour un certain $i = 1, \dots, n$ détermine un unique triangle presque scindé $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ de \mathcal{C}_Q , à isomorphisme près. Pour chacun de ces N triangles presque scindés, considérons la *relation de maille c_M -déformée* :

$$x_X + x_Z = x_Y + c_M, \quad (2.5)$$

où $M = \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, X)$ et où $x_Y = \sum_{k=1}^m x_{Y_k}$ si Y s'écrit comme somme directe d'objets indécomposables $Y = \bigoplus_{k=1}^m Y_k$. Notons \underline{c} le vecteur contenant chacune des constantes c_M pour M un B -module : $\underline{c} = (c_M)_{M \in \text{mod } B}$.

L'ensemble de toutes ces relations de mailles, que nous appelons les *relations de mailles \underline{c} -déformées*, définissent un espace affine de solutions, $\mathcal{E}_{\underline{c}}$.

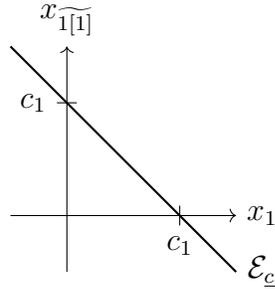
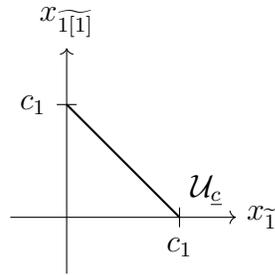
Exemple 2.2.1. Soit Q le carquois contenant un seul sommet et aucune flèche et soit $B = \mathbf{k}Q$. Il y a un seul $\mathbf{k}Q$ -module indécomposable, noté 1 et deux objets amassés indécomposables, notés $\widetilde{1}$ et $\widetilde{1[1]}$. Il y a donc deux indéterminées $x_{\widetilde{1}}$ et $x_{\widetilde{1[1]}}$ reliées par l'équation $x_{\widetilde{1}} + x_{\widetilde{1[1]}} = c_1$. Illustrons $\mathcal{E}_{\underline{c}}$:

Écrivons

$$\mathcal{U}_{\underline{c}} = \mathcal{E}_{\underline{c}} \cap \mathbb{R}_+^{N+n},$$

où, tel que défini précédemment, N est le nombre de modules indécomposables sur B , n est le nombre de sommets de Q et $N + n$ est le nombre d'objets indécomposables de \mathcal{C}_Q . Il s'agit de l'espace des solutions des relations de mailles \underline{c} -déformées avec $x_X \geq 0$ pour chaque objet amassé indécomposable X .

Exemple 2.2.2. Reprenons l'exemple 2.2.1 et illustrons $\mathcal{U}_{\underline{c}}$:

Figure 2.5. L'espace $\mathcal{E}_{\underline{c}}$ pour Q de type \mathbb{A}_1 Figure 2.6. L'espace $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ pour Q de type \mathbb{A}_1

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \pi : \quad \mathcal{E}_{\underline{c}} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_X)_{X \in \text{ind } \mathcal{C}_Q} &\mapsto (x_{T_i[1]})_{i=1, \dots, n} \end{aligned}$$

Cette application projette chaque point de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ sur ses coordonnées correspondant aux facteurs directs de T décalés.

Définissons $\mathcal{A}_{\underline{c}} = \pi(\mathcal{U}_{\underline{c}})$.

Exemple 2.2.3. Reprenons l'exemple 2.2.1 et illustrons $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ à la figure 2.7 :

Si $c_M > 0$ pour tout B -module indécomposable M , notons $\underline{c} > \underline{0}$. Le reste de ce chapitre servira à prouver le théorème suivant, puis à présenter les propriétés de cet associaèdre.

Théorème 2.2.4. *Si $c_M > 0$ pour tout B -module indécomposable M , alors l'es-*

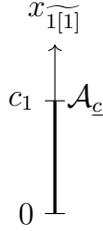


Figure 2.7. L'espace $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ pour Q de type \mathbb{A}_1

pace $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ est une réalisation de l'associaèdre de l'algèbre amassée donnée par Q_B .

2.3 Démonstration de la validité de la construction de l'associaèdre

Dans cette section, nous énonçons plusieurs résultats sur les espaces $\mathcal{E}_{\underline{c}}$, $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ et $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ pour prouver à la toute fin que $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ est un associaèdre.

2.3.1 Caractérisation de points de $\mathcal{E}_{\underline{c}}$ et $\mathcal{U}_{\underline{c}}$

Afin de prouver que $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ est une réalisation de l'associaèdre, nous caractérisons premièrement les points de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$. D'abord, nous donnerons un seul point de $\mathcal{E}_{\underline{c}}$, puis nous calculerons $\mathcal{E}_{\underline{0}}$ afin de pouvoir décrire $\mathcal{E}_{\underline{c}}$ à partir de notre solution particulière.

Écrivons

$$M_{\underline{c}} = \bigoplus_{M \in \text{ind } B} M^{c_M}.$$

Rappelons qu'en vertu du corolaire 2.1.9, il n'existe qu'un nombre fini de B -modules indécomposables puisque Q est un carquois de type Dynkin. Définissons le point $\underline{v}_{\underline{c}}$ de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ par $\underline{v}_{\underline{c}} = (v_X)_{X \in \text{ind } \mathcal{C}_Q}$, où

$$v_X = \dim \left(\text{Hom}_B \left(\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q} (T, X), M_{\underline{c}} \right) \right).$$

Exemple 2.3.1. Reprenons la catégorie amassée de l'exemple 1.4.14. Écrivons $M_{\underline{c}}$:

$$M_{\underline{c}} = a^{c_a} \oplus b^{c_b} \oplus c^{c_c} \oplus \begin{matrix} a & c & a \\ c & & \end{matrix} \oplus \begin{matrix} b & c & b \\ a & & \end{matrix} \oplus \begin{matrix} c & c & c \\ b & & \end{matrix}$$

Calculons $\underline{v}_{\underline{c}}$ (l'ordre des coordonnées et celui fixé à l'exemple 2.1.38) :

$$\underline{v}_{\underline{c}} = \left(\begin{array}{cccccccccc} c_c^a + c_a + c_b, & c_a + c_b, & c_b + c_b + c_c, & 0, & c_b + c_c, & 0, & c_c + c_c + c_a, & c_c + c_c, & 0 \\ \tilde{1} & \tilde{2} & \tilde{3} & \tilde{2} & \tilde{3} & \widetilde{1[1]} & \tilde{3} & \widetilde{2[1]} & \widetilde{3[1]} \end{array} \right)$$

Remarquons que $\underline{v}_{\underline{c}}$ est un point de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$. En effet, ce point respecte chacune des relations de maille \underline{c} -déformées. Par exemple,

$$\begin{aligned} v_{\tilde{1}} + v_{\tilde{2}} &= c_c^a + c_a + c_b = v_{\tilde{2}} + c_c^a \\ v_{\tilde{2}} + v_{\tilde{3}} &= c_a + c_b + c_b + c_c = v_{\tilde{3}} + v_{\tilde{2}} + c_a \end{aligned}$$

Par symétrie, il en est de même pour toutes les autres mailles.

Lemme 2.3.2. *Le point $\underline{v}_{\underline{c}}$ appartient à $\mathcal{U}_{\underline{c}}$.*

Pour alléger la preuve suivante, si $X = \bigoplus_{i=1}^m X_i$ avec X_1, \dots, X_m des objets indécomposables, notons $v_X = \sum_{i=1}^m v_{X_i}$. Par ailleurs, nous référons à plusieurs notions de l'appendice B.

Démonstration. Soit M un B -module indécomposable. Vérifions que $\underline{v}_{\underline{c}}$ respecte la relation de maille contenant c_M .

Premièrement, supposons que M n'est pas un module injectif. Dans ce cas, il existe une suite presque scindée dans $\text{mod } B$

$$0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

où $M'' = \tau^{-1}M$. Écrivons $M = \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, X)$, $M' = \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, X')$ et $M'' = \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, X'')$ avec X et X'' des objets indécomposables de $\mathcal{C}_Q X$. En vertu de la proposition 2.1.7, il existe un triangle

$$X \rightarrow X' \oplus Y \rightarrow X'' \rightarrow X[1]$$

avec Y un objet amassé tel $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, Y) = 0$. Nous cherchons à vérifier que

$$v_X + v_{X''} = v_{X'} + v_Y + c_M.$$

Pour ce faire, nous utilisons les notions contenues dans l'appendice B.

Par construction, $v_Y = 0$. En vertu de la proposition B.2 b, la suite presque scindée (2.6) dans $\text{mod } B$ induit une suite exacte dans la catégorie de foncteurs $\mathcal{F}un B$ définie à l'appendice B :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_B(M'', -) \rightarrow \text{Hom}_B(M', -) \rightarrow \text{Hom}_B(M, -) \rightarrow S_M \rightarrow 0,$$

où S_M est le foncteur simple en M . Appliquons les foncteurs à $M_{\underline{c}}$ pour obtenir une suite exacte de \mathbf{k} -modules :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_B(M'', M_{\underline{c}}) \rightarrow \text{Hom}_B(M', M_{\underline{c}}) \rightarrow \text{Hom}_B(M, M_{\underline{c}}) \rightarrow S_M(M_{\underline{c}}) \rightarrow 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} v_X + v_{X''} &= \dim \text{Hom}_B(M, M_{\underline{c}}) + \dim \text{Hom}_B(M'', M_{\underline{c}}) \\ &= \dim \text{Hom}_B(M', M_{\underline{c}}) + \dim S_M(M_{\underline{c}}) \\ &= v_{X'} + \dim S_M \left(\bigoplus_{N \in \text{ind } B} N^{c_N} \right) \\ &= v_{X'} + \dim \left(S_M(M^{c_M}) \oplus S_M \left(\bigoplus_{\substack{N \in \text{ind } B \\ N \neq M}} N^{c_N} \right) \right) \\ &= v_{X'} + c_M, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.

Deuxièmement, supposons que M est un module injectif non simple ; on peut donc écrire $M = \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, T_i[2])$ pour un certain $i = 1, \dots, n$. L'injectivité de M implique qu'il existe un morphisme minimal à gauche presque scindé $f : M \rightarrow$

$M/\text{soc } M$ dans $\text{mod } B$, (Assem *et al.*, 2006, Proposition 3.5 b), Chapitre IV). Ainsi, en vertu de la proposition 2.1.7, il existe un triangle dans \mathcal{C}_Q

$$T_i[2] \xrightarrow{\phi} X \rightarrow \tau^{-1}T_i[2] \rightarrow T_i[3],$$

où $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, X) = M/\text{soc } M$ et où ϕ est un morphisme minimal à gauche presque scindé. Remarquons que $\tau^{-1}T_i[2] = T_i[1]$.

Nous cherchons à vérifier que

$$v_{T_i[2]} + v_{T_i[1]} = v_X + c_M. \quad (2.7)$$

Soulignons que $v_{T_i[1]} = 0$ par construction de \underline{v}_c .

Continuons d'utiliser les notions contenues dans l'appendice B. En vertu de la proposition B.2 a, la suite presque scindée 2.6 dans $\text{mod } B$ induit une suite exacte dans $\mathcal{F}\text{un } B$:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_B(M/\text{soc } M, -) \rightarrow \text{Hom}_B(M, -) \rightarrow S_M \rightarrow 0.$$

Appliquons les foncteurs à M_c pour obtenir une suite exacte de \mathbf{k} -modules :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_B(M/\text{soc } M, M_c) \rightarrow \text{Hom}_B(M, M_c) \rightarrow S_M(M_c) \rightarrow 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} v_{T_i[2]} &= \dim \text{Hom}_B(M, M_c) \\ &= \dim \text{Hom}_B(M/\text{soc } M, M_c) + \dim S_M(M_c) \\ &= v_X + \dim S_M \left(\bigoplus_{N \in \text{ind } B} N^{c_N} \right) \\ &= v_X + \dim \left(S_M(M^{c_M}) \oplus S_M \left(\bigoplus_{\substack{N \in \text{ind } B \\ N \neq M}} N^{c_N} \right) \right) \\ &= v_X + c_M, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.

Finalement, supposons que M est un module injectif simple. On peut encore écrire $M = \text{Hom}_{\mathcal{E}_Q}(T, T_i[2])$ pour un certain $i = 1, \dots, n$. Par ailleurs, il n'existe aucun B -module N différent de M tel qu'il existe une application $M \rightarrow N$. Par conséquent, il existe également un triangle presque scindé

$$T_i[2] \rightarrow X \rightarrow T_i[1] \rightarrow T_i[3],$$

où ici, $X \in \text{add } T[1]$.

Puisque $v_X = 0 = v_{T_i[1]}$, on obtient

$$\begin{aligned} v_{T_i[2]} + v_{T_i[1]} &= v_{T_i[2]} \\ &= \dim(\text{Hom}_B(\text{Hom}_{\mathcal{E}_Q}(T, T_i[2]), M_{\underline{c}})) \\ &= \dim(\text{Hom}_B(M, M_{\underline{c}})) \\ &= c_M \\ &= v_X + c_M, \end{aligned}$$

tel que souhaité. □

Maintenant que nous connaissons une solution particulière de $\mathcal{E}_{\underline{c}}$, étudions $\mathcal{E}_{\underline{0}}$, c'est-à-dire les points de \mathbb{R}^{N+n} vérifiant les relations de mailles $\underline{0}$ -déformées. En effet, $\underline{x} \in \mathcal{E}_{\underline{c}}$ si et seulement si $\underline{x} = \underline{x}_0 + \underline{v}_{\underline{c}}$ pour un certain $\underline{x}_0 \in \mathcal{E}_{\underline{0}}$.

Pour ce faire, introduisons certaines notations par rapport aux \underline{g} -vecteurs. Notons \underline{g}_k le vecteur formé de la k -ième coordonnée du \underline{g} -vecteur de chaque objet amassé indécomposable $\underline{g}(X)$. Remarquons que \underline{g}_k n'est pas un \underline{g} -vecteur, bien qu'il soit construit à partir de \underline{g} -vecteurs. Il est maintenant possible de réécrire la matrice

G introduite à la sous-section 2.1.3 :

$$G = \begin{pmatrix} \underline{g}_1 \\ \vdots \\ \underline{g}_n \end{pmatrix}.$$

Lemme 2.3.3. *Soit $k = 1, \dots, n$. Le vecteur \underline{g}_k vérifie les relations de maille $\underline{0}$ -déformées.*

Démonstration. Il s'agit d'une reformulation de la partie c de la proposition 2.1.40. □

Lemme 2.3.4. *L'ensemble $\{\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n\}$ forme une base de $\mathcal{E}_\underline{0}$.*

Rappelons que, tel que défini au début de la section 2.2, $\mathcal{E}_\underline{c}$ représente l'espace des solutions aux équations de maille \underline{c} -déformées, $\mathcal{E}_\underline{0}$ représente l'espace des solutions aux équations de maille $\underline{0}$ -déformées. Puisque ces équations sont linéaires, notons E la matrice encodant le systèmes d'équations de mailles.

Démonstration. On sait que, pour tout $\underline{c} \in \mathbb{N}^N$, le système linéaire $E\underline{x} = \underline{c}$ admet comme solution $\underline{x} = \underline{v}_\underline{c}$. Par conséquent, E est de plein rang et l'espace de solutions $\mathcal{E}_\underline{c}$ est de dimension n ; en particulier, $\dim(\mathcal{E}_\underline{0}) = n$. Puisque, tel qu'énoncé au lemme précédent, l'ensemble $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$ vérifie les relations de maille $\underline{0}$ -déformées, il suffit de montrer que $\{\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n\}$ est un ensemble linéairement indépendant.

Considérons $\underline{x} \in \mathcal{E}_\underline{0}$ tel que $\underline{x} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \underline{g}_k$ et prouvons l'unicité des coefficients α_k pour $k = 1, \dots, n$. Pour ce faire, écrivons $\underline{x} = \alpha \cdot G$ avec $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. On déduit que $(x_{T_k})_{k=1, \dots, n} = \alpha \cdot G_T = \alpha \cdot I_n$. Donc, $\alpha = (x_{T_k})_{k=1, \dots, n}$. □

À partir des résultats précédents, nous pouvons maintenant décrire simplement les points de $\mathcal{E}_\underline{c}$.

Corolaire 2.3.5. *Un point \underline{x} appartient à $\mathcal{E}_{\underline{c}}$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que $\underline{x} = \underline{v}_{\underline{c}} + \alpha G$.*

Démonstration. La démonstration suit directement des lemmes 2.3.2 et 2.3.4. \square

Projection dans $\mathcal{A}_{\underline{c}}$

Utilisons les résultats précédents pour déduire des propriétés de l'espace $\mathcal{A}_{\underline{c}}$.

Corolaire 2.3.6. *Soit $\underline{x} = \underline{v}_{\underline{c}} + \alpha G$ un point de $\mathcal{E}_{\underline{c}}$. Alors, la projection de \underline{x} par π est donnée par $\pi(\underline{x}) = -\alpha$. En particulier, si $\underline{x} \in \mathcal{U}_{\underline{c}}$, alors sa projection dans $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ est donnée par $\pi(\underline{x}) = -\alpha$.*

Démonstration. Écrivons $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. En vertu de la remarque 2.1.39 et du corolaire 2.3.5,

$$x_{T_i[1]} = v_{T_i[1]} + \langle \alpha, \underline{g}(T_i[1]) \rangle = 0 + \langle \alpha, -e_i \rangle = -\alpha_i,$$

d'où $\pi(\underline{x}) = -\alpha$. \square

Remarque 2.3.7. Ainsi, la projection π induit un isomorphisme entre $\mathcal{E}_{\underline{c}}$ et \mathbb{R}^n et entre $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ et $\mathcal{A}_{\underline{c}}$.

Lemme 2.3.8. *Soit $U = \bigoplus_{k=1}^n U_k$ un objet inclinant-amassé et soit $\underline{x} \in \mathcal{E}_{\underline{c}}$. Si on fixe $x_{U_k} = 0$ pour $k = 1, \dots, n$, alors \underline{x} est entièrement déterminé. Plus précisément,*

$$\underline{x} = \underline{v}_{\underline{c}} + -(v_{U_1}, \dots, v_{U_n}) (G_U)^{-1} G.$$

Démonstration. Appliquons le corolaire 2.3.5, écrivons $\underline{x} = \underline{v}_{\underline{c}} + \alpha G$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Ainsi,

$$(x_{U_1}, \dots, x_{U_n}) = (v_{U_1}, \dots, v_{U_n}) + \alpha G_U.$$

En vertu de la proposition 2.1.40 b, G_U est inversible, d'où le résultat. \square

Notons \underline{s}_U le point de \mathcal{E}_c associé à l'objet inclinant-amassé U , tel que décrit par le lemme 2.3.8.

Nous énonçons ici le corolaire suivant qui servira à la prochaine section.

Corolaire 2.3.9. *Soit U un objet inclinant-amassé. La projection de \underline{s}_U est donnée par*

$$\pi(\underline{s}_U) = (v_{U_1}, \dots, v_{U_n}) G_U^{-1}.$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe du lemme 2.3.8 et du corolaire 2.3.6. □

2.3.2 Polytope \mathcal{P}_c

La prochaine étape pour prouver que \mathcal{A}_c est un associaèdre est de le comparer avec l'enveloppe convexe des vecteurs dimension des sous-modules de M_c , que nous notons \mathcal{P}_c .

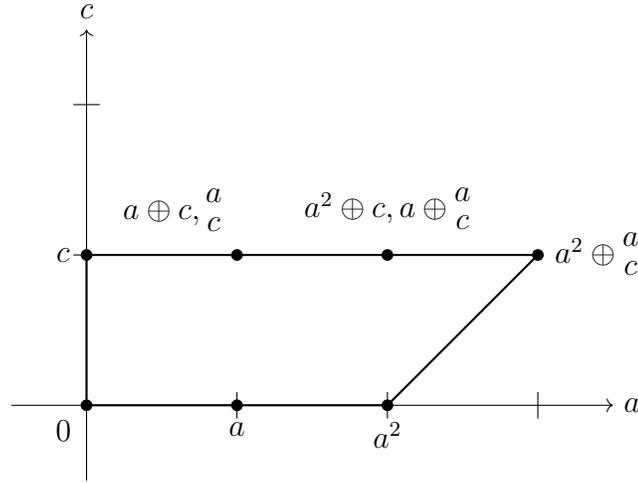
Exemple 2.3.10. Reprenons l'algèbre B à l'exemple 1.4.14 et considérons

$$M_c = a^2 \oplus_c^a.$$

Les sous-modules de M_c sont 0 , a , a^2 , c , $a \oplus c$, $a^2 \oplus c$, $\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}$, $a \oplus \begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}$ et $a^2 \oplus \begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}$. Le polytope \mathcal{P}_c est représenté à la figure 2.8. Chaque sous-module de M_c est indiqué à côté de son vecteur dimension.

Afin de prouver l'égalité entre l'associaèdre \mathcal{A}_c et l'enveloppe convexe \mathcal{P}_c , nous désirons décrire autrement \mathcal{P}_c . Commençons en statuant qu'il n'est pas nécessaire de considérer les vecteurs dimension de tous les sous-modules de M_c pour obtenir \mathcal{P}_c .

Proposition 2.3.11. *Le polytope \mathcal{P}_c est l'enveloppe convexe des vecteurs dimensions des parties de torsion, (Baumann et al., 2014, Corolaire 3.3).*

Figure 2.8. Polytope \mathcal{P}_c

Exemple 2.3.12. Continuons l'exemple 2.3.10. Le tableau suivant nous donne les parties de torsion de $M_c = a^2 \oplus \frac{a}{c}$ pour l'ensemble des classes de torsion.

Classes de torsion	Partie de torsion
$0, \langle b \rangle, \langle b, \frac{b}{a} \rangle$	0
$\langle c \rangle, \langle \frac{c}{b}, c \rangle, \langle \frac{c}{b}, b, c \rangle, \langle \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, b, c \rangle$	c
$\langle a \rangle, \langle a, b, \frac{b}{a} \rangle$	a^2
$\langle a, \frac{a}{c} \rangle, \langle a, c, \frac{a}{c} \rangle, \langle a, b, \frac{a}{c}, \frac{b}{a} \rangle, \langle a, c, \frac{a}{c}, \frac{c}{b} \rangle, \langle a, b, c, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b} \rangle$	$a^2 \oplus \frac{a}{c}$

En calculant le vecteurs dimension de chacune des parties de torsion données, on obtient exactement les sommets de \mathcal{P}_c .

Nous désirons maintenant montrer que l'enveloppe convexe \mathcal{P}_c , est en fait égale à l'enveloppe convexe de tous les points $\pi(\underline{s}_U)$ pour U un objet inclinant amassé. Pour ce faire, rappelons que, en vertu de la proposition 2.1.33, on peut associer de façon bijective à chaque objet inclinant-amassé U une classe de torsion \mathcal{U} .

Lemme 2.3.13. *Soit U un objet inclinant-amassé et \mathcal{U} la classe de torsion correspondante. Alors, la projection de \underline{s}_U donne le vecteur dimension de la partie de*

torsion de $M_{\underline{c}}$ par rapport à \mathcal{U} :

$$\pi(\underline{s}_U) = \underline{\dim}(t_{\mathcal{U}}M_{\underline{c}}).$$

Exemple 2.3.14. Reprenons la catégorie amassée décrite à l'exemple 1.4.14 et l'algèbre B décrite à l'exemple 2.1.2. Nous avons calculé à l'exemple 2.1.34 que l'objet inclinant-amassé $U = \tilde{\mathbb{3}}_2 \oplus \tilde{\mathbb{3}}_1 \oplus \tilde{\mathbb{3}}$ est associé par bijection à la classe de torsion $\mathcal{U} = \langle b, c, \frac{b}{a}, \frac{c}{b} \rangle$ et nous avons calculé à l'exemple 2.1.26 que $t_{\mathcal{U}}M_{\underline{c}} = c$ où $M_{\underline{c}} = a^2 \oplus \frac{a}{c}$. Son vecteur dimension est donc $\underline{\dim}(t_{\mathcal{U}}M_{\underline{c}}) = (0, 0, 1)$.

Parallèlement, utilisons le corolaire 2.3.9 pour calculer $\pi(\underline{s}_U)$ en réutilisant les exemples 2.3.1 et 2.1.38 pour connaître la valeur de \underline{v}_c et G_U :

$$\begin{aligned} \pi(\underline{s}_U) &= (v_{U_1}, \dots, v_{U_n})(G_U)^{-1} \\ &= (0, 0, 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Démonstration. Premièrement, calculons explicitement $\pi(\underline{s}_U)$. En vertu du corolaire 2.3.9, nous savons que $\pi(\underline{s}_U) = (v_{U_1}, \dots, v_{U_n})(G_U)^{-1}$. Développons ce produit en utilisant la proposition 2.1.40 a :

$$\left((G_U^T)_{\mathcal{C}_Q} \right)^{-1} = (G_U^T)_{\mathcal{C}_Q^{\text{op}}}.$$

Par la définition des index des facteurs directs de T par rapport à U dans $\mathcal{C}_Q^{\text{op}}$, la i -ième colonne de cette matrice est $(a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)^\top$ où $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont tels qu'il existe un triangle

$$U_b \rightarrow U_a \rightarrow T_i \rightarrow U_b[1] \tag{2.8}$$

dans $\mathcal{C}_Q^{\text{op}}$ où

$$U_a = \bigoplus_{k=1}^n U_k^{a_k}$$

et

$$U_b = \bigoplus_{k=1}^n U_k^{b_k}.$$

Notons $M_a = \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, U_a)$ et $M_b = \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, U_b)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} (\pi(\underline{s}_U))_i &= \langle (v_{U_1}, \dots, v_{U_n}), (a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n (\dim \text{Hom}_B(\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, U_k), M_{\underline{c}}) (a_k - b_k)) \\ &= \dim \left(\text{Hom}_B \left(\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q} \left(T, \bigoplus_{k=1}^n U_k^{a_k} \right), M_{\underline{c}} \right) \right) \\ &\quad - \dim \left(\text{Hom}_B \left(\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q} \left(T, \bigoplus_{k=1}^n U_k^{b_k} \right), M_{\underline{c}} \right) \right) \\ &= \dim(\text{Hom}_B(\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, U_a), M_{\underline{c}})) - \dim(\text{Hom}_B(\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, U_b), M_{\underline{c}})) \\ &= \dim(\text{Hom}_B(M_a, M_{\underline{c}})) - \dim(\text{Hom}_B(M_b, M_{\underline{c}})). \end{aligned}$$

Deuxièmement, comparons $t_{\mathcal{Q}} M_{\underline{c}}$ avec ce que nous venons d'obtenir. Le triangle 2.8 dans $\mathcal{C}_Q^{\text{op}}$ induit le triangle suivant dans \mathcal{C}_Q :

$$T_i \xrightarrow{\phi} U_a \rightarrow U_b \rightarrow T_i[1]. \quad (2.9)$$

En appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, -)$, on obtient la suite exacte longue dans $\text{mod } B$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, T_i) \xrightarrow{f} \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, U_a) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, U_b) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, T_i[1]). \quad (2.10)$$

Remarquons que $\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, T_i[1]) = 0$ car T est un objet inclinant-amassé. Nous avons donc une suite exacte courte

$$0 \rightarrow P'_i \rightarrow M_a \rightarrow M_b \rightarrow 0,$$

où $P'_i = \text{Hom}_{\mathcal{E}_Q}(T, T_i) / \ker f$ et où $f = \text{Hom}_{\mathcal{E}_Q}(T, \phi)$.

Appliquons $\text{Hom}_B(-, M_{\underline{c}})$ et $(-, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}})$ à cette suite exacte pour obtenir le diagramme commutatif suivant. Pour alléger la notation, écrivons $\text{Hom}_B(M, N) = (M, N)$ et $\text{Ext}_B^1(M, N) = {}^1(M, N)$ pour tous B -modules M et N .

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & (M_b, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) & \longrightarrow & (M_a, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) & \longrightarrow & (P'_i, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) \longrightarrow {}^1(M_b, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) \\
& & \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 & & \downarrow g_3 & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & (M_b, M_{\underline{c}}) & \longrightarrow & (M_a, M_{\underline{c}}) & \xrightarrow{h} & (P'_i, M_{\underline{c}}) & \longrightarrow & {}^1(M_b, M_{\underline{c}})
\end{array}$$

Selon la proposition 2.1.33, $\text{Hom}_{\mathcal{E}_Q}(T, U)$ est Ext-projectif sur \mathcal{U} . Comme U_b appartient à $\text{add } U$ et que $t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}$ est dans \mathcal{U} , on déduit que $\text{Ext}_B^1(M_b, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) = 0$. De plus, les applications g_1 , g_2 et g_3 sont injectives car elles sont induites de l'inclusion de $t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}$ dans $M_{\underline{c}}$. Finalement, l'image de toute application d'un module de \mathcal{U} vers $M_{\underline{c}}$ est nécessairement dans la partie de torsion de $M_{\underline{c}}$, ce qui signifie que toute application d'un module de \mathcal{U} vers $M_{\underline{c}}$ se factorise par $t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}$. Ainsi, les applications g_1 et g_2 sont également surjectives.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\dim((P'_i, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}})) &= \dim((M_a, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) - (M_b, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}})) \\
&= \dim(\text{Hom}_B(M_a, M_{\underline{c}})) - \dim(\text{Hom}_B(M_b, M_{\underline{c}})) \\
&= \pi(\underline{s}_U)_i.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, le morphisme ϕ du triangle 2.9 est un U -approximation de T_i , (Keller et Reiten, 2007). Ceci signifie que pour chaque objet U_c de $\text{add } U$ et pour chaque morphisme $\phi' : T_i \rightarrow U_c$, il existe $\psi : U_a \rightarrow U_c$ tel que $\phi' = \psi\phi$. Reformulons ce résultat appliquant $\text{Hom}_{\mathcal{E}_Q}(T, -)$ à ces objets et ces morphismes : Pour chaque B -module M_U de la forme $\text{Hom}_{\mathcal{E}_Q}(T, U_c)$ et pour chaque morphisme $f' : P_i \rightarrow M_U$, il existe $g : M_a \rightarrow M_U$ tel que $f' = gf$ (f est le morphisme donné dans la suite exacte 2.10). Ceci implique que $\ker f \subseteq \ker f'$. Prenons $M_U = t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}$ puisque $t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}$

appartient à la classe de torsion \mathcal{U} . On obtient alors

$$\dim(P'_i, t_{\mathcal{U}}M_{\underline{c}}) = \dim(P_i/\ker f, t_{\mathcal{U}}M_{\underline{c}}) = \dim(P_i, t_{\mathcal{U}}M_{\underline{c}}).$$

Ainsi, $\dim(P_i, t_{\mathcal{U}}M_{\underline{c}}) = \pi(\underline{s}_U)_i$, ce qui est le résultat voulu. \square

De ce résultat, nous tirons le corolaire suivant.

Corolaire 2.3.15. *Soit U et V deux objets inclinants-amassés reliés par mutation. Si $\underline{c} > 0$, alors, $\underline{s}_U \neq \underline{s}_V$.*

Démonstration. Notons \mathcal{U} et \mathcal{V} les classes de torsion associées à U et V respectivement. On sait que $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ ou que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ (proposition 2.1.35). Comme $\underline{c} > 0$, on déduit que $t_{\mathcal{U}}M_{\underline{c}}$ est un sous-module propre de $t_{\mathcal{V}}M_{\underline{c}}$ ou $t_{\mathcal{V}}M_{\underline{c}}$ est un sous-module propre de $t_{\mathcal{U}}M_{\underline{c}}$. Dans les deux cas, ceci implique que $\underline{\dim}t_{\mathcal{U}}M_{\underline{c}} \neq \underline{\dim}t_{\mathcal{V}}M_{\underline{c}}$. \square

Nous pouvons appliquer les résultats précédents pour écrire $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ comme une enveloppe convexe.

2.3.3 Sommets de l'associaèdre

Au cours de cette sous-section, nous prouvons que les sommets de $\mathcal{P}_{\underline{c}}$ sont également des sommets de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$, ce qui nous servira ensuite à prouver que $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ est un associaèdre. Pour commencer, prouvons que les sommets de $\mathcal{P}_{\underline{c}}$ appartiennent à $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ ou, de manière équivalente, que la pré-image par π des sommets de $\mathcal{P}_{\underline{c}}$ dans $\mathcal{E}_{\underline{c}}$ appartiennent à $\mathcal{U}_{\underline{c}}$.

Lemme 2.3.16. *Soit $U = \bigoplus_{k=1}^n U_k$ un objet inclinant-amassé et \underline{s}_U le point de $\mathcal{E}_{\underline{c}}$ associé. Le point \underline{s}_U est dans $\mathcal{U}_{\underline{c}}$.*

Démonstration. Soit X un objet indécomposable quelconque. Nous montrons ici que $(\underline{s}_U)_X \geq 0$ pour prouver que $\underline{s}_U \in \mathcal{U}_{\underline{c}}$. On sait qu'il existe un triangle dans \mathcal{C}_Q

$$T_b \rightarrow T_a \rightarrow X \rightarrow T_b[1]$$

avec $T_a = \bigoplus_{k=1}^m T_k^{a_k}$ et $T_b = \bigoplus_{k=1}^m T_k^{b_k}$. D'une part, ce triangle indique que $\underline{g}(X) = (a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$. D'autre part, ce triangle induit la suite exacte de B -modules

$$M_b \rightarrow M_a \rightarrow M_X \rightarrow 0,$$

où $M_X = \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, X)$, $M_a = \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, T_a)$ et $M_b = \text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, T_b)$.

Appliquons $\text{Hom}_B(-, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}})$ à cette suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_B(M_X, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) \rightarrow \text{Hom}_B(M_a, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) \rightarrow \text{Hom}_B(M_b, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}).$$

On déduit que

$$\dim \text{Hom}_B(M_X, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) \geq \dim \text{Hom}_B(M_a, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) - \dim \text{Hom}_B(M_b, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} v_X &= \dim \text{Hom}_B(M_X, M_{\underline{c}}) \\ &\geq \dim \text{Hom}_B(M_X, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) \\ &\geq \dim \text{Hom}_B(M_a, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) - \dim \text{Hom}_B(M_b, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) \\ &= \dim \text{Hom}_B(\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, T_a), t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) - \dim \text{Hom}_B(\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, T_b), t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) \\ &= \dim \text{Hom}_B\left(\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}\left(T, \bigoplus_{k=1}^n T_k^{a_k}\right), t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}\right) \\ &\quad - \dim \text{Hom}_B\left(\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}\left(T, \bigoplus_{k=1}^n T_k^{b_k}\right), t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) \dim \text{Hom}_B(\text{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(T, T_k), t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) \\ &= \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) \dim \text{Hom}_B(P_k, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Écrivons $\underline{s}_U = \underline{v}_c + \alpha \cdot G$. En vertu du corolaire 2.3.6, $\pi(\underline{s}_U) = -\alpha$ et, en vertu du lemme 2.3.13, $\pi(\underline{s}_U) = \underline{\dim}(t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}})$. Par conséquent,

$$\alpha = -\underline{\dim}(t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}).$$

En écrivant $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, on obtient plus précisément

$$\alpha_k = -\dim \operatorname{Hom}_B(P_k, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}).$$

Utilisons l'inéquation 2.11 pour calculer $(\underline{s}_U)_X$:

$$\begin{aligned} (\underline{s}_U)_X &= v_X + \alpha \cdot \underline{g}(X) \\ &= v_X + \sum_{k=1}^n \alpha_k \underline{g}(X)_k \\ &= v_X - \sum_{k=1}^n \dim \operatorname{Hom}_B(P_k, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) (a_k - b_k) \\ &\geq \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) \dim \operatorname{Hom}_B(P_k, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) - \sum_{k=1}^n \dim \operatorname{Hom}_B(P_k, t_{\mathcal{U}} M_{\underline{c}}) (a_k - b_k) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\underline{s}_U \in \mathcal{U}_{\underline{c}}$. □

Maintenant que nous savons que les points de la forme \underline{s}_U pour U un objet inclinant-amassé appartiennent à $\mathcal{U}_{\underline{c}}$, nous pouvons montrer que tous ces points sont des sommets de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ et, réciproquement, tous les sommets de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ sont de cette forme.

Lemme 2.3.17. *Soit U un objet inclinant amassé. Alors, \underline{s}_U est un sommet de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$.*

Démonstration. Considérons donc $U = \bigoplus_{k=1}^n U_k$. On sait qu'une face F de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ est donnée par un vecteur $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^{N+n}$ et par un scalaire $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tels que :

- pour tout $\underline{x} \in \mathcal{U}_{\underline{c}}$, $\langle \underline{\lambda}, \underline{x} \rangle \geq \lambda_0$;
- un point \underline{x} appartient à la face F si et seulement si $\langle \underline{\lambda}, \underline{x} \rangle = \lambda_0$.

Posons $\lambda_0 = 0$ et $\underline{\lambda} = (\lambda_X)_{X \in \text{ind } \mathcal{C}_Q}$ avec

$$\lambda_X = \begin{cases} 1 & \text{si } X \text{ est un facteur direct de } U; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que ces valeurs définissent une face de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$, car pour tout $\underline{x} \in \mathcal{U}_{\underline{c}}$,

$$\langle \underline{\lambda}, \underline{x} \rangle = \sum_{k=1}^n x_{U_k} \geq 0.$$

Par ailleurs, un point \underline{x} de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ appartient à la face F si et seulement si $x_{U_k} = 0$ pour $k = 1, \dots, n$. Or, en vertu du lemme 2.3.8, il existe un unique point de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ remplissant cette caractéristique et c'est \underline{s}_U . Puisqu'il s'agit du seul point d'une face donnée, on conclut qu'il s'agit plus précisément d'un sommet de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$. \square

Nous établissons maintenant que, réciproquement, tous les sommets de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ sont de la forme \underline{s}_U .

Lemme 2.3.18. *Si $\underline{c} > 0$, un point \underline{x} de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ est un sommet de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ si et seulement si $\underline{x} = \underline{s}_U$ pour un certain objet inclinant-amassé U .*

Démonstration. En vertu du lemme 2.3.17, nous savons que tous les points de la forme \underline{s}_U pour un certain objet inclinant-amassé U sont des sommets de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$. Il suffit donc de montrer qu'il n'existe pas de sommet de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ qui n'est pas de cette forme pour prouver ce nouveau lemme. Pour ce faire, considérons \underline{s}_U un sommet de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ avec $U = \bigoplus_{k=1}^n U_k$ un objet inclinant-amassé. Considérons également un sommet relié par une arête à \underline{s}_U . Sans perte de généralité, il repose sur les hyperplans $x_{U_k} = 0$ pour $k = 1, \dots, n-1$. Notons $V = \mu_{U_n} U$.

Puisque $\underline{c} > \underline{0}$, on sait que le sommet \underline{s}_V est sur l'arête considérée et que $\underline{s}_U \neq \underline{s}_V$, en vertu du corolaire 2.3.15. Il ne peut donc y avoir aucune autre sommet sur cette arête que \underline{s}_U et \underline{s}_V .

En appliquant le même raisonnement récursivement à chaque sommet, on arrive au résultat voulu. En effet, $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ est polytope et de ce fait, il compte un nombre fini de sommets et le graphe de ses sommets et arêtes est connexe. \square

Nous obtenons comme corolaire un résultat similaire au résultat précédent, mais à propos des sommets de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$.

Corolaire 2.3.19. *Si $\underline{c} > 0$, un point \underline{x} de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ est un sommet de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ si et seulement si $\underline{x} = \pi(\underline{s}_U)$ pour un certain objet inclinant-amassé U .*

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe de fait que la projection π induit un isomorphisme entre $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ et $\mathcal{A}_{\underline{c}}$, tel que statué à la remarque 2.3.7, et du lemme 2.3.18. \square

Remarquons que, puisque $\mathcal{E}_{\underline{c}}$ est un espace solution, il est aisément possible de généraliser notre construction pour considérer que $c_M \in \mathbb{Q}$, plutôt que $c_M \in \mathbb{N}$, pour tout B -module M indécomposable. Par continuité, on peut même considérer que $c_M \in \mathbb{R}$. Utilisons ce raisonnement pour prouver la proposition suivante.

Proposition 2.3.20. *Un point \underline{x} de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ est un sommet de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ si et seulement si $\underline{x} = \pi(\underline{s}_U)$ pour un certain objet inclinant-amassé U .*

Démonstration. Si $\underline{c} > 0$, l'énoncé est déjà prouvé. S'il existe au moins un B -module M indécomposable tel que $c_M = 0$, alors $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ correspond à une déformation d'un associaèdre $\mathcal{A}_{\underline{c}'}$ avec $\underline{c}' > \underline{0}$ dans lequel certains sommets sont fusionnés et certaines faces disparaissent. Ces sommets sont encore de la forme \underline{s}_U pour certains objets inclinants-amassés U . \square

2.3.4 Démonstration de la structure d'associaèdre de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$

Dans cette sous-section se trouve la démonstration principale du deuxième chapitre de cette thèse, soit celle que l'espace $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ est l'associaèdre de l'algèbre amassée donnée par Q_B . Nous considérons ici que $\underline{c} > \underline{0}$.

Notons le nombre de facteurs directs indécomposables d'un B -module M par $|M|$. Nous avons déjà associé de façon bijective les objets inclinants-amassés et les sommets de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$. Nous généralisons maintenant ce résultat aux faces de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ dans le lemme suivant.

Lemme 2.3.21. *Si $\underline{c} > \underline{0}$, les faces F de codimension m de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ correspondent de façon bijective à des objets rigides X tels que $|X| = m$ de la manière suivante :*

$$F \mapsto \bigoplus_{X \in E} X$$

où E est l'ensemble des objets amassés indécomposables X tels que F repose sur l'hyperplan $x_X = 0$ et

$$\bigoplus_{k=1}^m X_k \mapsto F$$

où F est l'unique face de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ reposant uniquement sur les hyperplans $x_{X_k} = 0$ pour $k = 1, \dots, m$.

Démonstration. Soit F une face de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ de dimension m' . Nous montrons premièrement que la cardinalité de E – l'ensemble des objets amassés indécomposables X tels que F repose sur l'hyperplan $x_X = 0$ – est $n - m'$. Nous savons, grâce au lemme 2.3.18 que c'est le cas pour $m' = 0$. Supposons, par induction, que les faces de dimension $m' - 1$ reposent sur exactement $n - m' + 1$ hyperplans de la forme $x_X = 0$. La face F comporte elle-même une face F' de dimension $m' - 1$, ainsi qu'un point \underline{x} qui n'appartient pas à F' . La face F repose sur $n - m$ des

$n - m' + 1$ hyperplans de la forme $x_X = 0$ sur lesquels la face F' repose, car F contient également \underline{x} . Ainsi, la cardinalité de E est égale à $n - m'$.

Deuxièmement, nous montrons que $\bigoplus_{X \in E} X$ est un objet rigide. Pour ce faire, remarquons que si F comporte un sommet \underline{s}_U , alors $E \subseteq \text{add } U$. Puisque U est un objet rigide, il en va de même pour $\bigoplus_{X \in E} X$.

Il est clair que, de cette façon, chaque face de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ est associée à un unique objet rigide et que deux faces différentes sont associées à deux objets rigides différents. Il reste donc à montrer que chaque objet rigide peut être associé à une face de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$.

Considérons donc un objet rigide $Y = \bigoplus_{k=1}^m Y_k$. Cet objet est un facteur direct de certains objets inclinants-amassés, (Buan *et al.*, 2006, Proposition 3.2). L'ensemble

$$\left\{ \underline{x} \in \mathcal{U}_{\underline{c}} \mid \sum_{k=1}^m x_{Y_k} = 0 \right\}$$

est donc non vide, puisqu'il contient tous les sommets associés aux objets inclinants-amassés dont Y est un facteur direct. Il s'agit d'une face de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ de codimension m .

La correspondance que nous avons établie entre les faces de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ et les objets rigides est manifestement une bijection. \square

Nous désirons maintenant un résultat similaire, mais au sujet des faces de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$, et non de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$. Pour ce faire, étudions la projection par π des faces de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$.

Lemme 2.3.22. *Un ensemble de points F de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ est une face de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ de dimension m si et seulement si $\pi(F)$ est une face de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ de dimension m .*

Démonstration. Ceci est une conséquence directe du lemme 2.3.21 et de la remarque 2.3.7, stipulant que π induit un isomorphisme entre $\mathcal{E}_{\underline{c}}$ et \mathbb{R}^n . En effet, ceci nous indique que toute la structure des faces de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ correspond à la structure des faces de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$. \square

Nous avons à présent tous les résultats nécessaires pour prouver que le théorème principal de ce chapitre, soit le théorème stipulant que $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ est un associaèdre.

Démonstration du théorème 2.2.4. On sait grâce au lemme 2.3.21 que les faces de codimension m sont associés à des objets rigides X tels que $|X| = m$. Le lemme 2.3.22 indique que c'est également le cas pour les faces de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$. En particulier, les sommets de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ correspondent à des objets inclinants-amassés, et donc également à des amas de l'algèbre amassée sur Q , en vertu de la proposition 1.5.1. De manière similaire, les arêtes de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ correspondent à des objets rigides X tels que $|X| = n - 1$. On peut donc voir chacune d'elles comme un ensemble de $n - 1$ variables amassées compatibles entre elles et compatibles avec les variables amassées des amas correspondants à chacune des deux extrémités de l'arête. Elles représentent donc les mutations entre les sommets.

Par conséquent, le 1-squelette de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ correspond au graphe d'échange des objets inclinants-amassés de \mathcal{C}_Q . Puisque T est un objet inclinant-amassé de \mathcal{C}_Q , que $B = \text{End}_{\mathcal{C}_Q} T$ et que Q_B est le carquois ordinaire de B , le 1-squelette correspond également au graphe d'échange d'une algèbre amassée donnée par Q_B .

Suivant la remarque 2.1.16,

$$Q_B = \mu'(Q_C) = \mu'(Q).$$

Comme l'algèbre amassée donnée par Q_B et par Q ont le même graphe d'échange, on conclut avec la première partie de cette preuve que $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ est l'associaèdre de l'algèbre amassée donnée par Q_B . \square

Exemple 2.3.23. Nous représentons à la figure 2.9 l'associaèdre que nous obtenons dans l'algèbre mod B décrite à l'exemple 2.1.2 en prenant $\underline{c} = (1, \dots, 1)$. Les objets inclinants-amassés sont écrits à côté des sommets qui leurs sont associés.

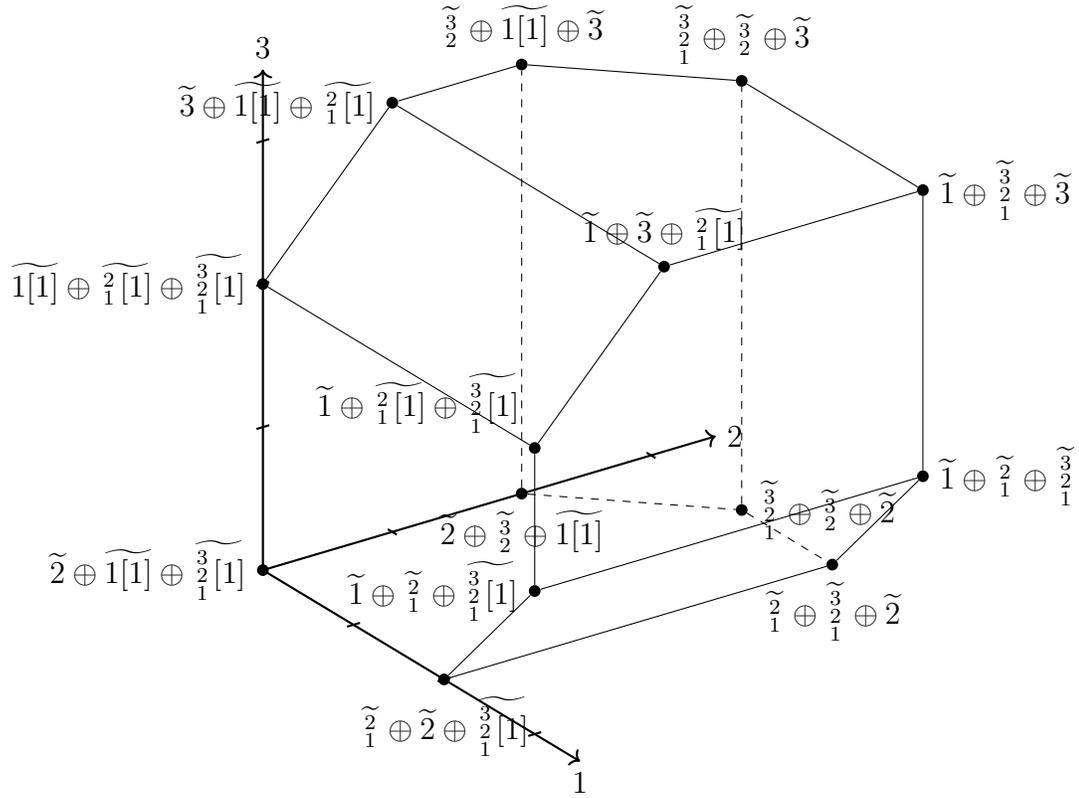


Figure 2.9. Associaèdre obtenu pour l'espace $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ à partir d'un carquois de type \mathbb{A}_3 cyclique

2.4 Propriétés de cette construction de l'associaèdre

2.4.1 Normales aux facettes

En vertu du théorème 2.2.4, chaque facette de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ est associée de façon bijective au seul objet indécomposable X telle qu'elle repose sur l'hyperplan $x_X = 0$. Une des particularités de notre associaèdre se trouve dans le lien entre cet objet indécomposable et le vecteur normale à la facette correspondante.

Proposition 2.4.1. *Supposons que $\underline{c} > \underline{0}$ et considérons F_X la facette de $\mathcal{U}_{\underline{c}}$ donnée par $x_X = 0$. La normale à la facette $\pi(F_X)$ de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ pointant à l'extérieur*

de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ est la demi-droite engendrée par $\underline{g}(X)$.

Démonstration. Écrivons

$$F_X = \{\underline{x} \in \mathcal{U}_{\underline{c}} \mid x_X = 0\} = \mathcal{U}_{\underline{c}} \cap \{\underline{v}_{\underline{c}} + \alpha \underline{g} \mid \alpha \in \mathbb{R}^n \text{ et } v_X + \langle \alpha, \underline{g}(X) \rangle = 0\}.$$

Ainsi,

$$\pi(F_X) = \mathcal{A}_{\underline{c}} \cap \{-\alpha \mid v_X + \langle \alpha, \underline{g}(X) \rangle = 0\} = \mathcal{A}_{\underline{c}} \cap \{\alpha \mid \langle \alpha, \underline{g}(X) \rangle = v_X\}.$$

On remarque donc que $\underline{g}(X)$ est normal à $\pi(F_X)$.

Montrons maintenant que $\underline{g}(X)$ pointe à l'extérieur de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$. Pour ce faire, considérons le point $\underline{y} + \lambda \underline{g}(X)$ de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ tel que $\underline{y} \in \pi(F_X)$. Le point $\underline{y} + \lambda \underline{g}(X)$ est la projection d'un point $\underline{x} = \underline{v}_{\underline{c}} - (\underline{y} + \lambda \underline{g}(X))G$ de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ en vertu du corolaire 2.3.6.

Calculons x_X :

$$x_X = v_X - \langle (\underline{y} + \lambda \underline{g}(X)), \underline{g}(X) \rangle = v_X - \langle \underline{y}, \underline{g}(X) \rangle - \lambda |\underline{g}(X)| = -\lambda |\underline{g}(X)|.$$

Comme $x_X \geq 0$, on déduit que $\lambda \leq 0$, de sorte que $\underline{g}(X)$ pointe à l'extérieur de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$. □

Dans le cas où il existe un B -module indécomposable M tel que $c_M = 0$, les normales aux facettes de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ sont un sous-ensemble des \underline{g} -vecteurs des objets indécomposables.

2.4.2 Lien entre l'associaèdre et le treillis des classes de torsion

La bijection entre les classes de torsion et les objets inclinants-amassés décrite à la proposition 2.1.33 induit un lien entre notre associaèdre et le treillis des classes de torsion sur B , que nous décrivons dans cette sous-section.

Soit U et V deux objets inclinants-amassés et \mathcal{U} et \mathcal{V} leur classe de torsion associée. En vertu de la proposition 2.1.35, \mathcal{U} couvre \mathcal{V} ou \mathcal{V} couvre \mathcal{U} si et seulement si U et V sont reliés par mutation. Ainsi, il existe une arête entre les sommets $\pi(\underline{s}_U)$ et $\pi(\underline{s}_V)$ de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ si et seulement si \mathcal{U} couvre \mathcal{V} ou \mathcal{V} couvre \mathcal{U} . Plus particulièrement, on obtient le corolaire suivant.

Corolaire 2.4.2. *Si $\underline{c} > \underline{0}$, alors le 1-squelette de $\mathcal{A}_{\underline{c}}$ correspond au treillis des classes de torsion en précisant que s'il y a une arête entre \underline{s}_U et \underline{s}_V et que $\underline{s}_U = \underline{s}_V + \underline{v}$ pour un certain $\underline{v} \in \mathbb{R}_+^n$, alors la classe de torsion associée au sommet \underline{s}_U couvre celle associée au sommet \underline{s}_V .*

Définition 2.4.3. Soit M un B -module. Deux classes de torsion \mathcal{U} et \mathcal{V} de B sont *équivalentes modulo M* , ce qu'on note $\mathcal{U} \equiv_M \mathcal{V}$, si $t_{\mathcal{U}}M = t_{\mathcal{V}}M$.

Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

Exemple 2.4.4. En vertu de l'exemple 2.3.10, les classes de torsion $\langle a, \begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix} \rangle$, $\langle a, c, \begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix} \rangle$, $\langle a, b, \begin{smallmatrix} a \\ c \\ b \\ a \end{smallmatrix} \rangle$, $\langle a, c, \begin{smallmatrix} a \\ c \\ b \end{smallmatrix} \rangle$, $\langle a, b, c, \begin{smallmatrix} a \\ c \\ b \\ a \\ b \end{smallmatrix} \rangle$ sont toutes équivalentes modulo $a^2 \oplus \begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}$.

Définition 2.4.5. Un *intervalle* I sur un treillis L est un sous-treillis de L qui s'écrit comme $I = \{x \in L | y \leq x \leq z\}$ avec $y, z \in L$.

Proposition 2.4.6. *Les classes d'équivalence pour la relation \equiv_M de classes de torsion forment des intervalles sur le treillis des classes de torsion.*

Pour prouver ce résultat, nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 2.4.7. *Soit $(\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$ et $(\mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ deux paires de torsion. Alors, $(\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2, \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2)$ et $(\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2, \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2)$ sont également deux paires de torsion, (Iyama et al., 2015).*

Démonstration de la proposition 2.4.6. Soit M un B -module et $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ deux classes de torsion sur B telles que $\mathcal{T}_1 \equiv_M \mathcal{T}_2$.

Notons $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$. Il est clair que le plus grand sous-module de M contenu dans \mathcal{T} est $t_{\mathcal{T}_1}M = t_{\mathcal{T}_2}M$. Puisque $\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$, on obtient

$$\mathcal{T}_1 \equiv_M \mathcal{T} \equiv_M \mathcal{T}_2.$$

Considérons à présent \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux classes sans torsion telles que $(\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$ et $(\mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ soient des paires de torsion. Similairement, il est clair que le plus grand quotient de M contenu à la fois dans \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 est celui contenu dans leur intersection, c'est-à-dire dans $\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2$. Or on sait grâce au lemme 2.4.7 que $(\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2, \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2)$ est une paire de torsion. Ainsi,

$$M/t_{\mathcal{T}_1}M = M/t_{\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2}M = M/t_{\mathcal{T}_2}M,$$

ce qui implique que $t_{\mathcal{T}_1}M = t_{\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2}M = t_{\mathcal{T}_2}M$ et donc, que

$$\mathcal{T}_1 \equiv_M \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2 \equiv_M \mathcal{T}_2.$$

Finalement, considérons une troisième classe de torsion \mathcal{T}_3 telle que

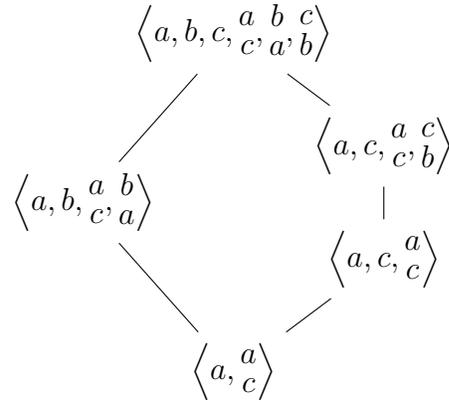
$$\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_3 \subseteq \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2.$$

De ce simple fait, on déduit que $t_{\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2}M$ est un sous-module de $t_{\mathcal{T}_3}M$ qui est lui-même un sous-module de $t_{\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2}M$. Or, nous avons déjà démontré que $\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2 \equiv_M \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2$ et donc que $t_{\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2}M = t_{\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2}M$. Il s'ensuit que ces deux parties de torsion sont aussi égales à $t_{\mathcal{T}_3}M$ et ainsi, que

$$\mathcal{T}_1 \wedge \mathcal{T}_2 \equiv_M \mathcal{T}_3 \equiv_M \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2$$

Puisque le treillis L des classes de torsion est fini, le fait que l'infimum inf et le supremum sup de deux classes de torsion équivalentes ainsi que toutes les classes de torsion entre inf et sup soient également équivalent à elles signifie que la classe d'équivalence est un intervalle. Plus précisément, il s'agit de l'intervalle $\{x \in L \mid \inf \leq x \leq \sup\}$. \square

Exemple 2.4.8. Reprenons l'exemple 2.4.4 qui listait toutes les classes de torsion dans une certaine classe d'équivalence modulo $a^2 \oplus_c^a$: $\langle a, \frac{a}{c} \rangle$, $\langle a, c, \frac{a}{c} \rangle$, $\langle a, b, \frac{a}{c}, \frac{b}{a} \rangle$, $\langle a, c, \frac{a}{c}, \frac{c}{b} \rangle$, $\langle a, b, c, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b} \rangle$ Nous obtenons l'intervalle suivant.



Remarque 2.4.9. Même si les classes d'équivalence sont des intervalles, nous n'obtenons pas une congruence de treillis. Une *congruence de treillis* est une relation d'équivalence telle que si $x_1 \equiv x_2$ et $y_1 \equiv y_2$, alors $x_1 \wedge y_1 \equiv x_2 \wedge y_2$ et $x_1 \vee y_1 \equiv x_2 \vee y_2$, (Reading, 2005). En effet, on peut trouver plusieurs exemples de classes de torsion équivalentes modulo un B -module, mais ne respectant pas cette propriété.

Exemple 2.4.10. Considérons le B -module $M = \frac{b}{a} \oplus_b^c$ On obtient $\langle a \rangle \equiv_M \langle a, c, \frac{a}{c} \rangle$ et $\langle b, \frac{b}{a} \rangle \equiv_M \langle a, b, \frac{a}{c}, \frac{b}{a} \rangle$, mais

$$\langle a \rangle \wedge \langle b, \frac{b}{a} \rangle = 0 \not\equiv_M \langle a, \frac{a}{c} \rangle = \langle a, c, \frac{a}{c} \rangle \wedge \langle a, b, \frac{a}{c}, \frac{b}{a} \rangle$$

et

$$\langle a \rangle \vee \langle b, \frac{b}{a} \rangle = \langle a, b, \frac{b}{a} \rangle \not\equiv_M \langle a, b, c, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{a}{c} \rangle = \langle a, c, \frac{a}{c} \rangle \vee \langle a, b, \frac{a}{c}, \frac{b}{a} \rangle.$$

CHAPITRE III

UNISTRUCTURALITÉ

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous nous intéressons à la structure fondamentale des algèbres amassées. La notion d'unisstructuralité des algèbres amassées a été introduite en 2014 (Assem *et al.*, 2014c) : une algèbre amassée est unisstructurale si l'ensemble de ses variables amassées détermine ses graines. Assem, Schiffler et Shramchencko ont également conjecturé que toute algèbre amassée est unisstructurale.

Cette conjecture a d'abord été prouvée pour les algèbres amassées de type Dynkin ou de rang 2, (Assem *et al.*, 2014b), et pour les algèbres amassées de type \tilde{A} , (Bazier-Matte, 2016a). Pour ce dernier cas, la clé de la preuve repose sur le modèle géométrique des algèbres amassées, soit la triangulation d'une couronne. Nous reprenons dans ce chapitre cette technique, mais nous la généralisons à toutes les algèbres amassées provenant d'une surface sans ponctions respectant une propriété supplémentaire (conjecture 3.2.4). Nous utilisons également l'existence d'une base positive, la *base des bracelets*, (Musiker *et al.*, 2013; Thurston, 2014), et les relations d'écheveau.

Peu de temps après la publication de ce résultat, Cao et Li ont prouvé que toute algèbre amassée est unisstructurale (Cao et Li, 2020).

3.1 Définitions et historique de l'unistructuralité

Différentes algèbres amassées peuvent être isomorphes comme anneau sans avoir le même graphe d'échange. Des notions plus fortes de morphisme et d'isomorphisme d'algèbres amassées ont donc été introduites et étudiées par I. Assem, R. Schiffler et V. Shramckencko, (Assem *et al.*, 2012; Assem *et al.*, 2014c), ainsi que par I. Assem, G. Dupont et R. Schiffler, (Assem *et al.*, 2014a). Ici, nous n'utiliserons pas pleinement ce formalisme, mais simplement la notion suivante, (Assem *et al.*, 2014c).

Définition 3.1.1. Soient $\mathcal{A}(X, Q)$ une algèbre amassée et \mathcal{X} l'ensemble des variables amassées. Elle est dite *unistructurale* si pour toute graine (Y, R) qui engendre par mutation \mathcal{X} , il y a un isomorphisme entre les graphes d'échange $\Gamma(X, Q)$ et $\Gamma(Y, R)$ et les deux algèbres amassées ont les mêmes amas (à permutation des variables amassées au sein des amas près) (Assem *et al.*, 2014c, Section 5.1).

Exemple 3.1.2. Reprenons l'algèbre amassée $\mathcal{A}(X, Q)$ donnée à l'exemple 1.1.20 avec $(X, Q) = x_1 \leftarrow x_2$ et prouvons qu'elle est unistructurale. Pour ce faire, montrons que toute graine contenant des variables amassées de \mathcal{X} mais qui n'est pas une graine de $\mathcal{A}(X, Q)$ n'engendre pas le même ensemble de variables amassées.

Par exemple, prenons la graine

$$x_1 \xrightarrow{m} \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1 x_2}$$

formée à partir d'un carquois à m flèches. En la mutant dans la direction de x_1 , on obtient la graine

$$\frac{(x_1 + x_2 + 1)^m + (x_1 x_2)^m}{x_1^{m+1} x_2^m} \xleftarrow{m} \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1 x_2},$$

qui contient un élément qui n'est pas une variable amassée. Il faut recommencer le raisonnement avec n'importe quelle graine initiale qui n'est pas une graine

de $\mathcal{A}(X, Q)$; on obtient chaque fois des éléments qui ne sont pas des variables amassées de $\mathcal{A}(X, Q)$. Ainsi, $\mathcal{A}(X, Q)$ est unistructurelle.

Il est possible de reformuler la définition d'unistructuralité sans la condition sur les graphes d'échange.

Proposition 3.1.3. *Une algèbre amassée $\mathcal{A}(X, Q)$ dont l'ensemble de variables amassées est \mathcal{X} est unistructurelle si et seulement si pour toute algèbre amassée $\mathcal{A}(Y, R)$ dont l'ensemble de variables amassées est également \mathcal{X} , les deux algèbres amassées ont les mêmes amas (à permutation des variables amassées au sein des amas près).*

La démonstration de cette proposition s'appuie sur les lemmes suivants.

Lemme 3.1.4. *Le même amas (à permutation de ses variables amassées près) ne peut pas apparaître dans deux graines différentes, (Gekhtman et al., 2008, Théorème 4).*

Lemme 3.1.5. *Deux amas appartiennent à deux graines adjacentes du graphe d'échange si et seulement si ils ont exactement $n - 1$ variables amassées en commun, (Gekhtman et al., 2008, Théorème 5).*

Démonstration de la proposition 3.1.3. Si l'ensemble des amas d'une algèbre amassée est connu, en vertu du lemme 3.1.4, il est possible de construire son graphe d'échange en appliquant lemme 3.1.5. Ainsi, deux algèbres amassées possédant les mêmes amas possèdent automatiquement des graphes d'échanges isomorphes. \square

Assem, Schiffler et Shramchenko ont posé comme conjecture que toute algèbre amassée est unistructurelle (Assem et al., 2014c). Ils ont également prouvé que les algèbres amassées de type fini ou de rang 2 sont unistructurelles (Assem et al.,

2014c; Assem *et al.*, 2014b). Par la suite, il a été montré que les algèbres amassées de type $\tilde{\mathbb{A}}$ sont également unistructurelles (Bazier-Matte, 2016a). Nous présentons dans ce chapitre le théorème suivant (Bazier-Matte et Plamondon, 2020).

Théorème 3.1.6. *Si la conjecture 3.2.4 est vérifiée pour une certaine surface sans ponction, alors l'algèbre amassée sans coefficients provenant de cette surface est unistructurelle.*

La conjecture 3.2.4 est présentée à la section suivante. Suite à ce travail, Cao et Li ont démontré l'unistructuralité de toute algèbre amassée (Cao et Li, 2020).

3.2 Démonstration de l'unistructuralité

Avant de présenter une preuve de l'unistructuralité, il est nécessaire de présenter quelques définitions et résultats supplémentaires concernant les algèbres amassées provenant de surface sans ponction, (Thurston, 2014).

Définition 3.2.1. Des intersections *triviales* d'une multicourbe sont des intersections qui découpent une boucle contractile.

Une multicourbe avec intersection triviale peut toujours être représentée plutôt comme une multicourbe sans intersection triviale en prenant différents représentants de la classe d'isotopie de ses courbes. Nous considérons donc toujours des multicourbes sans intersections triviales.

Définition 3.2.2. Une multicourbe est *raide* si elle ne comporte aucune boucle contractile, ni monogone contractile. Elle est *nulle* si elle comporte un monogone contractile.

Remarquons que si une multicourbe M est nulle, alors $x_M = 0$, où x_M l'élément de \mathcal{F} associé à M (voir la sous-section 1.3.3 du chapitre 1).

Définition 3.2.3. Un point d'intersection d'une multicourbe est *positif* si les deux multicourbes obtenues par lissage à ce point sont raides ou nulles, avec au moins une non nulle.

L'existence de points d'intersection positifs dans des multicourbes sous certaines hypothèses a été prouvée, (Thurston, 2014, Lemme 5.2).

Conjecture 3.2.4. Soit S une surface marquée sans ponction et M une multicourbe composée uniquement d'arcs internes sur S . Alors, il existe une série de lissages à partir de M à des points d'intersection positifs donnant une multicourbe M' non nulle composée uniquement d'arcs internes compatibles.

Pour une surface vérifiant les conditions de la conjecture précédente, toute la preuve de l'unisstructuralité repose sur ce dernier corolaire.

Corolaire 3.2.5. Soit $\mathcal{A}(X, Q_T)$ une algèbre amassée provenant d'une surface vérifiant la conjecture 3.2.4 et x_1 et x_2 des variables amassées. Alors,

$$x_1 x_2 = \sum_{b \in \mathcal{B}} m_b b + \sum_{b' \in \mathcal{B}'} m_{b'} b'$$

avec $m_b, m_{b'} \in \mathbb{N}$ pour tout $b \in \mathcal{B}, b' \in \mathcal{B}'$, et

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} m_b > 0.$$

Démonstration. Considérons M la multicourbe contenant les arcs associés aux variables x_1 et x_2 . Supposons que la conjecture 3.2.4 est vérifiée avec la multicourbe M . Il existe donc une série de lissages à des points d'intersection positifs donnant une multicourbe M' composée uniquement d'arcs internes compatibles. Notons \mathcal{M} le multiensemble des autres multicourbes obtenues par ces lissages. Comme uniquement des lissages à des points d'intersection positifs ont été effectués, tous les éléments de \mathcal{M} sont raides ou nuls. Notons $x_{M'}$ l'élément dans \mathcal{F} associé à

M' et notons $x_{M''}$ l'élément dans \mathcal{F} associé à un élément M'' de \mathcal{M} . On obtient alors

$$x_1 x_2 = x_M = x_{M'} + \sum_{M'' \in \mathcal{M}} x_{M''}.$$

Puisque pour tout élément non nul M'' de \mathcal{M} , la multicourbe M'' ne contient pas de boucle contractile, on sait que le développement de x''_M dans la base des bracelets est positif, (Thurston, 2014, Théorème 2). On sait également que $x_{M'}$ est un élément de \mathcal{B} . Par conséquent, on obtient le résultat voulu. \square

Nous prouvons maintenant le théorème principal du dernier chapitre de cette thèse, soit le théorème 3.1.6 qui stipule que les algèbres amassées provenant d'une surface marquée sans ponction et dont les multicourbes d'arcs internes respectent la conjecture 3.2.4 sont unistructurelles.

Démonstration du théorème 3.1.6. Soit $\mathcal{A}(X, Q)$ une algèbre amassée provenant d'une surface marquée (S, M) sans ponction et dont les multicourbes d'arcs internes respectent la conjecture 3.2.4, où $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Notons par \mathcal{X} l'ensemble des variables amassées de $\mathcal{A}(X, Q)$. Soit $\mathcal{A}(Y, R)$ une deuxième algèbre amassée dont nous notons l'ensemble des variables amassées par \mathcal{Y} . Supposons que $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$.

Remarquons que, comme conséquence de cette hypothèse, X et Y ont le même nombre d'éléments, soit la cardinalité de la base de transcendance du corps ambiant commun.

Nous adaptons la preuve du Lemme 3.1 de (Bazier-Matte, 2016a) pour montrer que Y est un amas de $\mathcal{A}(X, Q)$.

Considérons deux variables amassées y_1 et y_2 compatibles dans $\mathcal{A}(Y, R)$ et prouvons leur compatibilité également dans $\mathcal{A}(X, Q)$. Sans perte de généralité, on

peut de plus supposer que y_1 et y_2 appartiennent à Y . Ces variables, en tant que variables amassées de $\mathcal{A}(X, Q)$, sont associées à des arcs internes de (S, M) . On sait grâce au lemme 3.2.5 que

$$y_1 y_2 = \sum_{b \in \mathcal{B}} m_b b + \sum_{b' \in \mathcal{B}'} m_{b'} b', \quad (3.1)$$

avec $m_b \geq 0$ pour tout $b \in \mathcal{B}$, $m_{b'} \geq 0$ pour tout $b' \in \mathcal{B}'$ et

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} m_b > 0.$$

Rappelons que \mathcal{B} (\mathcal{B}' respectivement) est l'ensemble des produits de polynômes de Laurent associés à des arcs dans des multicourbes \mathcal{C} -compatibles (\mathcal{C}' -compatibles respectivement). Ainsi, \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont définis à partir de la structure de $\mathcal{A}(X, Q)$.

Considérons, dans un premier temps, le cas où $\sum_{b' \in \mathcal{B}'} m_{b'} b' = 0$ et donc que $y_1 y_2 = \sum_{b \in \mathcal{B}} m_b b$. Puisque $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}_+(Y)$ en vertu du théorème 1.2.2 et que le terme de gauche est un monôme en Y , on déduit que la somme $\sum_{b \in \mathcal{B}} m_b b$ contient un seul terme, qui doit être un monôme qui plus est. Nous notons ce terme $m_b b = m_b \prod_{k=1}^m v_k$, où v_k est une variable amassée pour $k = 1, \dots, m$. Comme $y_1 y_2 = \prod_{k=1}^m v_k$, chaque variable amassée v_k est un monôme en Y et donc, une variable amassée de Y en vertu de la proposition 1.2.4. Ainsi, $b = y_1 y_2$ est sa décomposition en variables amassées compatibles dans $\mathcal{A}(X, Q)$.

Dans un deuxième temps, supposons que $\sum_{b' \in \mathcal{B}'} m_{b'} b' \neq 0$. Par définition, \mathcal{B} est un ensemble de monômes d'amas. En vertu du théorème 1.2.2, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}_+(\mathcal{X})$, d'où $\sum_{b \in \mathcal{B}} m_b b \in \mathcal{L}_+(\mathcal{X})$. On peut donc écrire

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} m_b b = \frac{p_{\mathcal{X}}}{m_{\mathcal{X}}},$$

où $p_{\mathcal{X}}$ est un polynôme à coefficients positifs en \mathcal{X} , tandis que $m_{\mathcal{X}}$ est un monôme en \mathcal{X} . Changeons à nouveau la notation pour écrire $p_{\mathcal{X}}$ et $m_{\mathcal{X}}$ comme des

polynômes de Laurent en Y à coefficients entiers :

$$p_{\mathcal{X}} = \frac{p'_Y}{m'_Y} \text{ et } m_{\mathcal{X}} = \frac{p''_Y}{m''_Y}.$$

L'équation 3.1 devient alors

$$y_1 y_2 = \frac{p_Y}{m_Y} + \frac{\frac{p'_Y}{m'_Y}}{\frac{p''_Y}{m''_Y}},$$

ce qui est équivalent à

$$p'_Y m_Y m''_Y = m'_Y p''_Y (m_Y y_1 y_2 - p_Y).$$

Dans le côté gauche de cette égalité, on retrouve un polynôme en Y avec des coefficients positifs, alors qu'il est le résultat d'une différence, tel qu'exprimé par le côté droit de l'égalité. Comme $m_Y y_1 y_2$ est un monôme, on déduit que p_Y est également un monôme. Plus précisément, il s'agit du même monôme avec un coefficient plus petit. Ceci est une contradiction à l'indépendance algébrique puisque les variables amassées s'écrivent comme polynôme de Laurent *à coefficients positifs* en Y . Il s'ensuit que $\sum_{b' \in \mathcal{B}'} m_{b'} b' = 0$ le développement dans la base des bracelets du produit $y_1 y_2$ en variables amassées compatibles est simplement $y_1 y_2$.

Ainsi, la compatibilité de deux variables amassées dans $\mathcal{A}(Y, R)$ assure leur compatibilité dans $\mathcal{A}(X, Q)$. Il s'ensuit non seulement que les amas de $\mathcal{A}(Y, R)$ sont des amas de $\mathcal{A}(X, Q)$, mais également le contraire : les amas de $\mathcal{A}(X, Q)$ sont des amas de $\mathcal{A}(Y, R)$.

En effet, soit le carquois R' tel que (Y, R') soit une graine de $\mathcal{A}(X, Q)$. Écrivons $R' = R'_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} R'_m$ comme union disjointe de carquois connexes. Considérons de plus Y_1, \dots, Y_n les amas adjacents à Y dans le graphe d'échange de $\mathcal{A}(Y, R)$. En vertu du lemme 3.1.5, Y_1, \dots, Y_n sont aussi les amas adjacents de Y dans $\mathcal{A}(X, Q)$ puisque pour $i = 1, \dots, n$, Y_i diffère de Y par une seule variable.

Or, les amas adjacents dans le graphe d'échange nous permettent de déduire, grâce aux relations d'échange, le carquois associé à une graine, à changement d'orientation de toutes les flèches près, d'une composante connexe. Ainsi, on peut écrire R comme union disjointe de carquois $R = R_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} R_m$ avec $R'_k = R_k$ ou $R'_k = R_k^{\text{op}}$ pour $k = 1, \dots, m$. Dans tous les cas, on conclut que $\mathcal{A}(Y, R)$ et $\mathcal{A}(Y, R')$ ont les mêmes amas, et donc que $\mathcal{A}(Y, R)$ et $\mathcal{A}(X, Q)$ ont les mêmes amas. Grâce à la proposition 3.1.3, ceci implique l'universalité de $\mathcal{A}(X, Q)$.

□

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous nous sommes penchés d’abord sur la réalisation du graphe d’échange d’une algèbre amassée, puis sur l’unistrialité des algèbres amassées. Il est maintenant prouvé que toute algèbre amassée, provenant de surface ou non, est unistrialité (Cao et Li, 2020) ; la question est donc close. Il serait toutefois assurément intéressant de déterminer dans quels cas la conjecture 3.2.4 est vérifiée, ce qui nous donnerait une démonstration alternative de l’unistrialité, tout à fait différente de celle de Cao et Li.

Par ailleurs, notre méthode de réalisation de graphe d’échange des algèbres amassées concernait uniquement les algèbres amassées de type Dynkin. Elle n’a pas encore été généralisée à d’autres types d’algèbre et, bien que la méthode pour le faire reste à travailler, rien n’indique, à priori, qu’on ne puisse pas appliquer nos résultats à un cadre plus large. Il serait donc intéressant de tenter d’obtenir une méthode de réalisation du graphe d’échange d’une plus grande classe d’algèbres amassées, voire de toutes les algèbres amassées. Padrol, Palu, Pilaud et Plamondon ont déjà généralisé cette construction de l’associaèdre pour les algèbres amassées de type fini et pour une certaine classe d’algèbre aimable en étudiant de manière plus générale l’éventail des \underline{g} -vecteurs, (Padrol *et al.*, 2019).

APPENDICE A

TRANSLATION D'AUSLANDER-REITEN

Le but de cet appendice est d'introduire brièvement la translation d'Auslander-Reiten, à la fois dans une catégorie de modules et dans la catégorie amassée.

A.1 Catégorie de modules

Considérons Λ une \mathbf{k} -algèbre de dimension finie.

La *couverture projective* d'un Λ -module M est une paire (P, f) où P est un Λ -module projectif et où $f : P \rightarrow M$ est un épimorphisme qui induit un isomorphisme $f' : P/\text{rad } P \rightarrow M/\text{rad } M$.

Soit M un Λ -module. Il existe une suite exacte

$$P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

appelée une *présentation projective minimale*, de Λ -modules projectifs telle que $f_0 : P_0 \rightarrow M$ et $f_1 : P_1 \rightarrow \ker f_0$ soient des couvertures projectives. Notons $(-)^t$ le foncteur $\text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda) : \text{mod } \Lambda \rightarrow \text{mod } \Lambda^{\text{op}}$ et appliquons ce foncteur à la suite exacte ci-dessus. On obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow M^t \xrightarrow{f_0^t} P_0^t \xrightarrow{f_1^t} P_1^t \rightarrow \text{Coker } f_1^t \rightarrow 0.$$

La *transposée* de M , notée $\text{Tr } M$, est $\text{Tr } M = \text{Coker } f_1^t \in \text{mod } \Lambda^{\text{op}}$.

Cette correspondance $M \mapsto \text{Tr } M$ induit un foncteur dual \mathbf{k} -linéaire

$$\text{Tr} : \text{mod } \Lambda / \mathcal{P} \rightarrow \text{mod } \Lambda^{\text{op}} / \mathcal{P}^{\text{op}},$$

où \mathcal{P} est l'idéal de tous les morphismes sur Λ qui se factorisent par des Λ -modules projectifs.

La *translation d'Auslander-Reiten* dans la catégorie de modules $\text{mod } \Lambda$ est $\tau = \text{Hom}_{\mathbf{k}}(-, \mathbf{k}) \text{Tr}$.

A.2 Catégorie dérivée bornée et catégorie amassée

Considérons à présent l'algèbre de chemins $A = \mathbf{k}Q$ pour Q un carquois acyclique et la catégorie dérivée bornée $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, telle qu'expliqué à la section 1.4.2.

Considérons X un objet de la catégorie dérivée bornée. Sa translation d'Auslander-Reiten dans cette catégorie est donnée par

$$\tau(X) = \left(X \otimes^L \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A, \mathbf{k}) \right) [-1]$$

où $-\otimes^L \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A, \mathbf{k})$ est le foncteur dérivé à gauche du produit tensoriel avec $\text{Hom}_{\mathbf{k}}(A, \mathbf{k})$ sur l'algèbre A . Ce foncteur transforme le projectif en k en l'injectif en k dans la catégorie dérivée bornée.

Exemple A.2.1. Reprenons l'algèbre de chemins décrite à l'exemple 1.4.4 donnée par le carquois $Q = 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ et calculons la translation d'Auslander-Reiten du complexe concentré en $\frac{3}{2}$. Dans la catégorie dérivée bornée, ce complexe est isomorphe à la résolution projective de $\frac{3}{2}$:

$$\dots 0 \rightarrow 1 \rightarrow \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

En appliquant le foncteur $-\otimes^L \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A, \mathbf{k})$, on obtient le complexe

$$\dots 0 \rightarrow \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \rightarrow 3 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Ce complexe est isomorphe au complexe concentré en ${}^2_1[1]$. Ainsi,

$$\tau \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La translation d'Auslander-Reiten $\tau_{\mathcal{D}}$ dans la catégorie dérivée bornée induit une translation d'Auslander-Reiten $\tau_{\mathcal{C}_Q}$ dans la catégorie amassée : pour chaque objet X de la catégorie dérivée bornée,

$$\tau_{\mathcal{C}_Q} \widetilde{X} = \widetilde{\tau_{\mathcal{D}}(X)},$$

(Keller, 2005).

APPENDICE B

CATÉGORIE DE FONCTEURS

Nous donnons ici quelques définitions et résultats tirés de (Assem *et al.*, 2006, Section 4.6 et Appendix 2).

Soit Λ une \mathbf{k} -algèbre de dimension finie. Considérons $\mathcal{F}\text{un } \Lambda$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs \mathbf{k} -linéaires covariant de la catégorie $\text{mod } \Lambda$ – catégorie de modules à droite de dimension finie – à la catégorie $\text{mod } \mathbf{k}$ – catégorie de \mathbf{k} -espaces vectoriels de dimension finie. Pour deux tels foncteurs $F_1, F_2 : \text{mod } \Lambda \rightarrow \text{mod } \mathbf{k}$, on définit l'ensemble $\text{Hom}(F_1, F_2)$ comme étant l'ensemble de tous les morphismes fonctoriels $\phi : F_1 \rightarrow F_2$.

Les objets projectifs de $\mathcal{F}\text{un } \Lambda$ sont donnés par $\text{Hom}(M, -)$ pour chaque Λ -module M tandis que les objets simples de $\mathcal{F}\text{un } \Lambda$ sont donnés par

$$S_M = \text{Hom}(M, -) / \text{rad}(M, -)$$

où M est un Λ -module indécomposable (Assem *et al.*, 2006, Chapitre 4, corollaire 6.7). Par ailleurs, pour M' un module indécomposable, si $M' \simeq M$, alors $\dim S_M(M') = 1$ et si $M' \not\simeq M$, alors $\dim S_M(M') = 0$.

Soit $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow M$ des homomorphismes de Λ -modules. Si $fg = 1_N$, g est une *section* (de f).

La notion de section nous permet de définir celle d'homomorphisme minimal à

gauche presque scindé.

Définition B.1. Un homomorphisme de Λ -modules $f : M \rightarrow N$ est *minimal à gauche presque scindé* si :

- pour tout endomorphisme $g \in \text{End } N$ tel que $gf = f$, g est un automorphisme ;
- f n'est pas une section ;
- pour tout Λ -homomorphisme $g : M \rightarrow L$ qui n'est pas une section, il existe $g' : N \rightarrow L$ tel que $g'f = g$.

Proposition B.2. (Assem et al., 2006, Théorème 6.11, chapitre 4) Soit M un Λ -module indécomposable.

a) Le module M est injectif et $f : M \rightarrow M'$ est minimal à gauche presque scindé si et seulement si la suite exacte de foncteurs induite

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(M', -) \xrightarrow{\text{Hom}_\Lambda(f, -)} \text{Hom}_\Lambda(M, -) \xrightarrow{\pi_M} S_M \rightarrow 0$$

est une résolution projective minimale de S_M dans $\mathcal{F}\text{un } \Lambda$.

b) Le module M n'est pas injectif et la suite $0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est presque scindée si et seulement si la suite de foncteurs induite

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(M'', -) \xrightarrow{\text{Hom}_\Lambda(g, -)} \text{Hom}_\Lambda(M', -) \xrightarrow{\text{Hom}_\Lambda(f, -)} \text{Hom}_\Lambda(M, -) \xrightarrow{\pi_M} S_M \rightarrow 0$$

est une résolution projective minimale de S_M dans $\mathcal{F}\text{un } \Lambda$.

RÉFÉRENCES

- Adachi, T., Iyama, O. et Reiten, I. (2013). τ -tilting theory. *Compositio Mathematica*, 150(3), 415–452.
- Arkani-Hamed, N., Bai, Y., He, S. et Yan, G. (2018). Scattering forms and the positive geometry of kinematics, color and the worldsheet. *Journal of High Energy Physics*, 2018(5).
- Assem, I., Brüstle, T., Charbonneau-Jodoin, G. et Plamondon, P.-G. (2010). Gentle algebras arising from surface triangulations. *Algebra and Number Theory*, 4(2), 201–229.
- Assem, I., Dupont, G. et Schiffler, R. (2014a). On a category of cluster algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 218(3), 553–582.
- Assem, I., Schiffler, R. et Shramchenko, V. (2012). Cluster automorphisms. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 104(6), 1271–1302.
- Assem, I., Schiffler, R. et Shramchenko, V. (2014b). Addendum to cluster automorphisms and compatibility of cluster variables. *Glasgow Mathematics Journal*, 56(3), 719–720.
- Assem, I., Schiffler, R. et Shramchenko, V. (2014c). Cluster automorphisms and compatibility of cluster variables. *Glasgow Mathematics Journal*, 56(3), 705–718.
- Assem, I., Simson, D. et Skoworoński. (2006). *Elements of the representation theory of associative algebras. Volume 1, Techniques of representation theory*. London Mathematical Society student texts ; 65. Cambridge, UK : Cambridge University Press.
- Auslander, M. et Reiten, I. (1977). Representation theory of artin algebras V : Methods for computing almost split sequences and irreducible morphisms. *Communications in Algebra*, 5(5), 519–554.
- Baumann, P., Kamnitzer, J. et Tingley, P. (2014). Affine Mirković-Vilonen polytopes. *Publications Mathématiques de L’IHÉS*, 120(1), 113–205.

- Bazier-Matte, V. (2016a). Unistructuralité of cluster algebras of type \tilde{A} . *J. Algebra*, 464, 297–315.
- Bazier-Matte, V. (2016b). *Unistructuralité des algèbres amassées de type \tilde{A}* . (Mémoire de maîtrise). Université de Sherbrooke.
- Bazier-Matte, V., Douville, G., Mousavand, K., Thomas, H. et Yıldırım, E. (2018). ABHY Associahedra and Newton polytopes of F -polynomials for finite type cluster algebras. *arXiv e-prints*, p. arXiv :1808.09986.
- Bazier-Matte, V. et Plamondon, P.-G. (2020). Unistructuralité of cluster algebras from unpunctured surfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 148, 2397–2409.
- Buan, A. B., Marsh, R., Reineke, M., Reiten, I. et Todorov, G. (2006). Tilting theory and cluster combinatorics. *Advances in Mathematics*, 204(2), 572–618.
- Buan, A. B., Marsh, R. J. et Reiten, I. (2007a). Cluster-tilted algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 359(1), 323–332.
- Buan, A. B., Marsh, R. J. et Reiten, I. (2008). Cluster mutation via quiver representation. *Comment. Math. Helv.*, 83(1), 143–177.
- Buan, A. B., Marsh, R. J., Reiten, I. et Todorov, G. (2007b). Clusters and seeds in acyclic cluster algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 135(10), 3049–3060.
- Caldero, P. et Chapoton, F. (2006). Cluster algebras as Hall algebras of quiver representations. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 81(3), 596–616. 17 pages ; 2 figures ; the title has changed ! some other minor modifications.
- Caldero, P. et Keller, B. (2006). From triangulated categories to cluster algebras II. Dans *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, volume 39, 983–1009.
- Caldero, P. et Keller, B. (2008). From triangulated categories to cluster algebras. *Inventiones Mathematicae*, 172(1), 169–211.
- Çanakçı, I., Lee, K. et Schiffler, R. (2015). On cluster algebras from unpunctured surfaces with one marked point. *Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B*, 2, 35–49.
- Cao, P. et Li, F. (2020). Unistructuralité of cluster algebras. *Compositio Mathematica*, 156(5), 946–958.
- Cerulli Irelli, G., Keller, B., Labardini-Fragoso, D. et Plamondon, P.-G. (2013). Linear independence of cluster monomials for skew-symmetric cluster algebras. *Compos. Math.*, 149(10), 1753–1764.

- Fomin, S., Shapiro, M. et Thurston, D. (2008). Cluster algebras and triangulated surfaces. Part I : Cluster complexes. *Acta Mathematica*, 201(1), 83–146.
- Fomin, S. et Zelevinsky, A. (2002). Cluster algebras I : Foundations. *Journal of the American Mathematical Society*, 15(2), 497–529.
- Fomin, S. et Zelevinsky, A. (2003). Cluster algebras II : Finite type classification. *Inventiones mathematicae*, 154(1), 63–121.
- Fomin, S. et Zelevinsky, A. (2007). Cluster algebras IV : Coefficients. *Compositio Mathematica*, 143(1), 112–164.
- Gekhtman, M., Shapiro, M. et Vainshtein, A. (2008). On the properties of the exchange graph of a cluster algebra. *Math. Res. Lett.*, 15(2), 321–330.
- Gross, M., Hacking, P., Keel, S. et Kontsevich, M. (2018). Canonical bases for cluster algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 31(2), 497–608.
- Happel, D. (1988). *Triangulated Categories in the Representation of Finite Dimensional Algebras*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press.
- Iyama, O., Reiten, I., Thomas, H. et Todorov, G. (2015). Lattice structure of torsion classes for path algebras. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 47(4), 639–650.
- Keller, B. (2005). On triangulated orbit categories. *Documenta Mathematica*, 10, 551–581.
- Keller, B. et Reiten, I. (2007). Cluster-tilted algebras are Gorenstein and stably Calabi–Yau. *Advances in Mathematics*, 211(1), 123 – 151.
- Lee, K. et Schiffler, R. (2015). Positivity for cluster algebras. *Annals of Mathematics*, 182(1), 73–125.
- Muller, G. (2016). Skein and cluster algebras of marked surfaces. *Quantum Topology*, 7(3), 435–503.
- Musiker, G., Schiffler, R. et Williams, L. (2013). Bases for cluster algebras from surfaces. *Compositio Mathematica*, 149(2), 217–263.
- Musiker, G. et Williams, L. (2013). Matrix formulae and skein relations for cluster algebras from surfaces. *International Mathematics Research Notices*, 2013(13), 2891–2944.

- Nakanishi, T. et Zelevinsky, A. (2012). On tropical dualities in cluster algebras. *Algebraic Groups and Quantum Groups*, p. 217–226.
- Padrol, A., Palu, Y., Pilaud, V. et Plamondon, P.-G. (2019). Associahedra for finite type cluster algebras and minimal relations between \mathbf{g} -vectors. *arXiv e-prints*, p. arXiv :1906.06861.
- Palu, Y. (2008). Cluster characters for 2-Calabi–Yau triangulated categories. *Annales de l’Institut Fourier*, 58(6), 2221–2248.
- Plamondon, P.-G. (2018). *Cluster Characters*, Dans I. Assem et S. Trepode (dir.). *Homological Methods, Representation Theory, and Cluster Algebras*, (p. 101–125). Springer, CRMS Short Course.
- Reading, N. (2005). Lattice congruences, fans and Hopf algebras. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 110(2), 237–273.
- Stasheff, J. (1963). Homotopy associativity of h -spaces I & II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108(2), 275–312.
- Tamari, D. (1951). *Monoides préordonnés et chaînes de Malcev*. (Thèse de doctorat). Université Paris Sorbonne.
- Thurston, D. P. (2014). Positive basis for surface skein algebras. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(27), 9725–9732.
- Verdier, J.-L. (1966). *Des Catégories Dérivées des Catégories Abéliennes*. (Thèse de doctorat). École Normale Supérieure de Paris.