

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE APPLIQUÉE AUX FONDS DISTINCTS

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
JULIE BÉLANGER

SEPTEMBRE 2020

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à sincèrement remercier mon entourage que ce soit ma famille ou mes amis pour leur support inconditionnel, et ce, peu importe la distance qui a pu nous séparer. Merci également à mes collègues aux cycles supérieurs des différentes universités à Montréal pour les discussions, leurs conseils et les beaux moments des dernières années.

Je remercie spécialement ma directrice de recherche, Anne Mackay, pour son soutien constant, ses précieux conseils et ses remarques judicieuses. Elle a su me guider et susciter mon intérêt pour la recherche en mathématiques tout au long de ma maîtrise.

Je tiens aussi à remercier les professeurs du département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal (UQAM) pour leurs questions et commentaires constructifs lors de ma présentation à l'un des séminaires des cycles supérieurs en mathématiques financières et actuarielles à l'UQAM.

Finalement, merci à ma soeur Annie Claude qui m'a appris à toujours me rendre au bout de mes rêves et de mes projets, tel celui de poursuivre mes études à la maîtrise en mathématiques financières et actuarielles.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX	vi
LISTE DES FIGURES	vii
RÉSUMÉ	ix
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I NOTIONS DE BASE	6
1.1 Utilité et aversion au risque	6
1.1.1 Le paradoxe de Saint-Petersbourg	7
1.1.2 Utilité isoélastique	11
1.2 Optimisation convexe et relaxation lagrangienne	14
1.2.1 Problème d'optimisation convexe standard	16
1.2.2 Relaxation lagrangienne	18
1.3 Marché financier	22
1.3.1 Notions de calcul stochastique	22
1.3.2 Portefeuille et investissement	27
1.3.3 Mesure neutre au risque	29
1.3.4 Complétude de marché	34
CHAPITRE II OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE PAR L'APPROCHE MARTINGALE	37
2.1 Problème d'optimisation dynamique de portefeuille	38
2.2 Problème statique d'optimisation du portefeuille	39
2.3 Stratégie d'investissement optimale	43
2.3.1 Dynamique du portefeuille optimal actualisé	44

2.3.2	Dynamique du portefeuille actualisé sous la stratégie optimale . .	46
2.4	Application en utilisant l'utilité isoélastique	47
CHAPITRE III OPTIMISATION SOUS LA GARANTIE D'UN FONDS DIS-		
TINCT		51
3.1	Problème d'optimisation avec le bénéfice résultant d'une option	51
3.2	Problème d'optimisation appliqué au fonds distinct	61
3.2.1	Dynamique du fonds et des actifs suite à l'incorporation de frais .	62
3.2.2	Problème d'optimisation dynamique appliqué au fonds distinct . .	65
3.2.3	Résolution du problème statique appliqué au fonds distinct	67
3.2.4	Problème de représentation appliqué au fonds distinct	68
CHAPITRE IV RÉSULTATS NUMÉRIQUES		71
4.1	Stratégies d'investissement du fonds distinct	73
4.2	Paramètres du fonds distinct	84
4.2.1	Frais appliqués au fonds distinct	84
4.2.2	Échéance du fonds distinct	90
4.3	Modélisation de l'aversion au risque	91
4.3.1	Caractérisation de l'aversion au risque de l'assuré	92
4.3.2	Évolution dans le temps d'un fonds distinct	97
CONCLUSION		99
ANNEXE A SOLUTIONS AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STO-		
CHASTIQUES		102
A.1	Solution à l'EDS du processus S	103
ANNEXE B CALCUL DU MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE POUR		
LA FONCTION D'UTILITÉ ISOÉLASTIQUE		104
B.1	Multiplicateur de Lagrange optimal de la proposition 2.1	104
B.2	Multiplicateur de Lagrange optimal du théorème 3.1	105

ANNEXE C PROPRIÉTÉS MARTINGALES	110
C.1 Démonstration que le processus stochastique $\xi\tilde{S}$ est une martingale . . .	110
ANNEXE D CALCUL DU TAUX DE FRAIS ÉQUITABLE LORSQUE LE FONDS DISTINCT EST ENTIÈREMENT INVESTI DANS L'ACTIF RIS- QUÉ	112
D.1 Détermination du taux de frais équitable à partir de l'équation (4.1) . . .	112

LISTE DES TABLEAUX

Tableau		Page
4.1	Contraintes appliquées à la stratégie optimale en (3.35)	74
4.2	Utilité du fonds distinct et gain certain équivalent	79
4.3	Exercice de la garantie du fonds distinct	82
4.4	Espérance du montant déboursé par l'assureur à l'échéance	83
4.5	$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\xi_T \left((F_T - G)^+ + G \right) \right]$	85
4.6	Taux de frais équitables : $G = f_{ini}$	88
4.7	Taux de frais équitables : $G = 0.75 \cdot f_{ini}$	89
4.8	Taux de frais équitables : T=15	91
4.9	Différence entre l'aversion au risque de la stratégie et de l'assuré, $c_s = 1.224\%$ et $c_f = 1.224\%$	95

LISTE DES FIGURES

Figure		Page
1.1	Utilité isoélastique sous différents niveaux d'aversion au risque	13
1.2	Propriétés des fonctions convexes et concaves de la définition 1.3 . .	15
1.3	Relaxation lagrangienne avec fonction d'optimisation concave	21
1.4	Relation entre ξ_t et S_t	34
2.1	Valeur terminale optimale en fonction de la valeur terminale de l'actif risqué	48
2.2	$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[U(X_T)]$ pour différentes proportions constantes ν_t pour tout $t \in [0, T]$	49
2.3	X_T^* obtenue par 100 000 simulations de Monte-Carlo	50
3.1	Résultat d'une option d'achat à l'échéance tel que défini en (3.1) . . .	52
3.2	Fonction d'optimisation originale et concavifiée	53
3.3	Dérivée de la fonction concavifiée $\tilde{u}$	58
3.4	Relation entre $\tilde{\xi}_t$ et $\tilde{S}_t$	65
4.1	Incidence du taux de frais sur les stratégies <i>Optimale</i> $[0, 2]$ et <i>Optimale</i> $[0, 1]$ pour une simulation	75
4.2	Distribution de $(F_T - G)^+ + G$ sous différentes stratégies	77
4.3	$(F_T - G)^+ + G$ sous l'interdiction de l'utilisation d'effet de levier . . .	78
4.4	Stratégie d'investissement optimale du fonds distinct pour $\gamma = 3$. . .	80
4.5	$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\xi_T((F_T^* - G)^+ + G)]$ pour $c_f = 2.448\% - c_s$	86
4.6	Impact sur F_T^* de la variation des taux de frais c_f et c_s	87

4.7	F_T pour différentes échéances avec $c_f = 1.224\%$ et $c_s = 1.224\%$	91
4.8	$(F_T^* - G)^+ + G$ pour différents γ	93
4.9	Impact de γ sur le fonds distinct	94
4.10	Incidence d'une variation de l'aversion au risque sur la stratégie <i>Optimale</i> $[0, 2]$ et <i>Optimale</i> $[0, 1]$ pour une simulation	96
4.11	Valeur espérée du fonds distinct jusqu'à l'échéance	98
4.12	Utilité espérée du fonds distinct jusqu'à l'échéance	98
B.1	Relation entre λ^* et x_{ini} de la proposition 2.1	105
B.2	Relation entre λ^* et x_{ini} du théorème 3.1	109

RÉSUMÉ

En considérant le marché financier du modèle de Black-Scholes, on étudie le problème d'optimisation de portefeuille pour un investisseur ayant une aversion au risque dans le contexte d'un fonds distinct. En imposant un nouveau marché financier fictif prenant en considération les frais du fonds distinct, on résout le problème d'optimisation à l'aide de l'approche martingale et en procédant à une concavification. De plus, on compare la solution théorique du problème d'optimisation à différentes stratégies d'investissement à l'aide de simulations de Monte Carlo du marché financier. En pratique, la stratégie d'investissement optimale théorique où l'on interdit l'utilisation d'effet de levier est plus avantageuse que la stratégie d'investissement traditionnelle à proportion constante du point de vue de l'assureur et de l'assuré. Afin de diminuer le taux de frais équitable, on propose de reporter l'échéance et de diminuer le niveau de garantie du fonds distinct. Par ailleurs, toujours d'un point de vue pratique, l'investisseur maximise davantage l'utilité espérée de l'assuré en utilisant une stratégie supposant que l'assuré a légèrement une plus grande aversion au risque que ce qu'il a en réalité.

Mots clés : Fonds distinct, théorie de l'utilité, optimisation de portefeuille, approche martingale, relaxation lagrangienne, technique de concavification

INTRODUCTION

Merton (1969) ouvrit la voie à une grande littérature en présentant un des premiers problèmes d'optimisation de portefeuille sur une période de temps continue pour un investisseur ayant une aversion au risque. En effet, mieux connu de nos jours comme le problème d'optimisation de Merton, Merton (1969) s'intéresse aux stratégies d'investissement et de consommation optimales maximisant l'utilité espérée dans un marché financier comportant deux actifs, soit un actif sans risque et un actif risqué. Merton (1969) généralise également ses résultats pour un marché financier comportant plusieurs actifs risqués et un actif sans risque. Les solutions sont obtenues en utilisant la technique de programmation dynamique. Merton (1971) prolonge son article précédent et obtient notamment des solutions explicites pour la grande famille de fonctions d'utilité à aversion absolue hyperbolique (HARA, *hyperbolic absolute risk aversion*). En s'intéressant au problème d'optimisation de Merton dans un contexte de marché financier où les actifs financiers sont modélisés par des mouvements browniens géométriques et en supposant qu'il existe une unique mesure neutre au risque, Cox et Huang (1989), Karatzas *et al.* (1987) et Pliska (1986) présentent une méthode de résolution simplifiée : l'approche martingale. On retrouve les notions de cette approche de façon plus détaillée entre autres dans les ouvrages de Korn (1997), Pennacchi (2008) et Björk (2012).

Carpenter (2000), quant à elle, est la première à s'intéresser au problème d'optimisation de portefeuille lorsque la richesse terminale est dotée d'une garantie financière.

Dans ce cas, la fonction objectif n'est pas concave. Carpenter présente la technique de concavification appliquée à la méthode martingale. La technique de concavification est étudiée de façon plus approfondie dans l'ouvrage de Reichlin (2013).

Ensuite, Lin *et al.* (2017) appliquent le problème d'optimisation de Carpenter (2000) dans le contexte de produits d'assurance liés à la performance de marchés boursiers ; c'est-à-dire un produit d'investissement dont le montant perçu par l'assuré à son décès et/ou à l'échéance dépend de la performance d'un actif sous-jacent et d'une garantie. Lin *et al.* (2017) étudient l'impact de la réglementation en ce qui a trait à la proportion d'un fonds ou d'un portefeuille d'investissement sur les résultats d'optimisation théoriques.

Il existe deux principales catégories de financement (pour l'assureur) de produits d'assurance liés à la performance de marchés boursiers : le financement par taux de participation et le financement par accumulation de frais. Chen *et al.* (2019) s'intéressent au problème d'optimisation avec fonction objectif non-concave appliqué dans le contexte de produits d'assurance liés aux marchés boursiers, mais en considérant l'incorporation de taxes et une contrainte de tarification équitable (en considérant un financement par taux de participation). Dans le même ordre d'idées, MacKay et Ocejo (2019) étudient le problème d'optimisation de portefeuille en ajoutant une contrainte de tarification équitable, mais dans le contexte d'un fonds distinct (*variable annuities*) où une garantie sur le bénéfice à l'échéance est financée par l'accumulation de frais.

Plus précisément, dans le même ordre d'idées qu'un fonds commun de placement, un fonds distinct est un type d'investissement mettant en commun plusieurs placements de différents investisseurs et dont la gestion d'investissement est assurée par le

détenteur du fonds. Cependant, offert uniquement par des compagnies d'assurance, le fonds distinct se distingue principalement du fonds commun placement par le fait qu'il soit doté d'une garantie (généralement de 75% à 100% du montant initial investi) à la date d'échéance ou au décès de l'investisseur. En effet, si le montant du placement est inférieur au montant de la garantie à la date d'échéance, par exemple, l'assureur assumera la différence afin que l'investisseur (l'assuré) reçoive au minimum le montant de la garantie du fonds distinct. Bien qu'habituellement le montant du placement puisse être retiré à n'importe quel moment moyennant des frais de pénalité, le fonds distinct est un type d'investissement à long terme, soit dont la date d'échéance se situe entre 10 et 20 ans. De plus, le capital investi dans un fonds distinct est protégé contre les créanciers en cas de faillite, ce qui peut s'avérer avantageux pour les propriétaires d'entreprise. Le principal inconvénient du fonds distinct est que les frais de gestion du fonds sont plus élevés que ceux du fonds commun de placement, car ils servent en partie à financer la garantie du fonds.

Également, chaque fonds distinct est associé à une catégorie de placement et possède des caractéristiques distinctes (garantie, date d'échéance, taux de frais appliqué, etc.). Le conseiller en sécurité financière propose initialement à l'assuré différentes options de fonds distincts notamment en fonction de sa tolérance au risque et de sa préférence en ce qui a trait aux catégories d'actifs (fonds d'actions, fonds indiciels, fonds du marché monétaire, etc.).

D'un point de vue mathématique, la garantie et le prélèvement de frais du fonds distinct complexifient grandement la modélisation et la résolution du problème d'optimisation d'investissement du portefeuille. Des outils mathématiques d'analyse convexe et des notions avancées de calcul stochastique applicables au marché financier modélisé doivent être judicieusement utilisés. La solution au problème d'optimisation de

portefeuille diffère grandement de la solution obtenue par Merton (1971) lorsqu'on étudie le problème dans le contexte d'un fonds distinct. De ce fait, un gestionnaire de placement d'un fonds distinct ne devrait pas utiliser la même stratégie d'investissement que pour un fonds commun de placement.

Comme l'article de Chen *et al.* (2019), l'article de MacKay et Ocejó (2019) fait partie des rares articles concernant les produits d'assurance liés aux marchés boursiers offrant une garantie à l'échéance à s'intéresser aux stratégies d'investissement principalement du point de vue de l'assuré. En effet, la littérature se penche particulièrement sur le point de vue de l'assureur (voir Lin *et al.* (2017), Boyle et Hardy (1997), Delong (2014), Bernard et Le Courtois (2012) et Moenig et Zhu (2018) par exemple).

Dans ce mémoire, on s'intéresse particulièrement à la stratégie d'investissement réaliste optimale d'un gestionnaire de placement d'un fonds distinct qui désire maximiser le gain d'un assuré ayant une aversion au risque. Pour ce faire, on étudie principalement le problème d'optimisation sans contraintes de MacKay et Ocejó (2019) et redérive les résultats en détails. Ainsi, toutes les notions avancées d'optimisation convexe et de mathématiques financières nécessaires à la modélisation et à la résolution du problème d'optimisation de portefeuille appliqué aux fonds distincts sont présentées et vulgarisées. De plus, des explications supplémentaires aux preuves de certains théorèmes utilisés ont été ajoutées pour en faciliter la compréhension au lecteur.

Par ailleurs, on prolonge la section d'illustrations numériques de MacKay et Ocejó (2019) en analysant de façon plus approfondie les résultats théoriques à l'aide de 100 000 simulations de Monte Carlo du marché financier sur une période d'investis-

sement. Pour ce faire, une discrétisation du temps est nécessaire puisqu'en pratique il n'est pas possible de rééquilibrer un portefeuille de façon continue. On s'interroge particulièrement sur l'applicabilité des résultats théoriques obtenus et propose des ajustements. De ce fait, on analyse l'impact de contraintes sur la stratégie d'investissement optimale afin de se placer dans un contexte davantage réaliste.

Ensuite, on procède notamment à différentes comparaisons avec des stratégies d'investissement réalistes jugées plus traditionnelles. Pour ce faire, on s'intéresse non seulement au point de vue de l'assuré (en analysant l'utilité espérée, les préférences face aux caractéristiques du fonds distinct et l'aversion au risque de l'assuré), mais également à celui de l'assureur (en étudiant les coûts pour l'assureur ainsi que la tarification équitable du fonds distinct). Finalement, on analyse l'évolution dans le temps d'un fonds distinct sous les différentes stratégies d'investissement étudiées.

L'organisation de ce mémoire va comme suit. Le chapitre 1 introduit les concepts d'utilité et d'aversion au risque et présente les notions d'optimisation convexe et de relaxation lagrangienne. Finalement, des concepts de base d'un marché financier ainsi que des notions importantes de calcul stochastique sont également présentés dans ce chapitre. Le chapitre 2 se concentre sur la méthode de résolution d'un problème d'optimisation de portefeuille par l'approche martingale. Au chapitre 3, on s'intéresse au problème d'optimisation de portefeuille dans le cas où la fonction objectif n'est pas concave. Ensuite, on applique le problème d'optimisation dans le contexte d'un fonds distinct. Finalement, une étude numérique des résultats obtenus au chapitre 3 est présentée au chapitre 4. On s'intéresse notamment au réalisme et à l'application pratique des résultats.

CHAPITRE I

NOTIONS DE BASE

Dans l'optique d'étudier le problème d'optimisation de portefeuille appliqué aux fonds distincts, une présentation des concepts d'optimisation et des notions de mathématiques financières est nécessaire. Ces outils mathématiques nous permettront tout d'abord de modéliser le problème d'optimisation étudié et nous offrent des propriétés qui sont utilisées pour sa résolution dans les chapitres suivants.

1.1 Utilité et aversion au risque

Cette section est principalement basée sur le premier chapitre de Pennacchi (2008) ainsi que sur l'ouvrage de Norstad (1999) et présente la théorie de l'utilité : l'approche standard utilisée lors de la modélisation de l'aversion au risque. Nous motivons, tout d'abord, cette technique et nous présentons, ensuite, son application au problème d'investissement de portefeuille.

1.1.1 Le paradoxe de Saint-Petersbourg

Le concept d'utilité a été introduit en 1738 par Daniel Bernoulli en proposant une solution au paradoxe de St-Petersbourg :

«Peter lance une pièce à répétition jusqu'à l'obtention du côté face. Ce dernier remet un ducat¹ à Paul dans le cas où le côté face est obtenu au premier lancé, deux ducats au deuxième lancé, quatre ducats au troisième, huit ducats au quatrième et ainsi de suite. Le gain est donc multiplié par deux à chaque lancé supplémentaire.»²

En interprétant le jeu précédent comme un actif risqué, on s'intéresse au prix que Paul serait prêt à payer pour participer au jeu. Pour ce faire, on est intuitivement porté à calculer l'espérance des gains futurs. Ainsi, en modélisant le problème ci-haut avec $p_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i$ étant la probabilité d'obtenir face pour la première fois au i ème lancé avec $i = 1, 2, 3, \dots$ et $x_i = 2^{i-1}$ représentant le gain au i ème lancé, l'espérance des gains, $\bar{x}$, est donc :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i 2^{i-1} \\ &= \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 4 + \frac{1}{16} \times 8 + \dots \\ &= \frac{1}{2} (1 + 1 + 1 + 1 + \dots) = \infty.\end{aligned}$$

1. Type de monnaie.

2. Traduction libre de Pennacchi (2008), p.5

On obtient, ici, «l'effet paradoxal» : la plupart des individus alloueraient une somme modérée (et non infinie) pour prendre part à ce jeu. C'est alors qu'intervient le concept de l'utilité. Selon cette théorie, un individu s'intéresse non pas aux gains potentiels, mais bien à l'utilité de ces gains. De ce fait, le montant accordé pour prendre part au jeu est lié à l'espérance de l'utilité des gains, $\bar{u}$.

Comme défini dans le premier chapitre (Introduction) de Norstad (1999), une fonction d'utilité représente la préférence subjective d'un individu/investisseur face à différents niveaux de richesse ainsi que le niveau de risque qu'il est prêt à prendre dans le bus d'augmenter son niveau de richesse. En d'autres mots, Ingersoll (1987) affirme dans son premier chapitre qu'il est possible de modéliser et quantifier la valeur subjective qu'un individu attribue à un montant d'argent par une fonction d'utilité. Le lecteur est référé à la section 1.1 d'Ingersoll (1987) et la section 1.1 de Pennacchi (2008) pour une intuition plus approfondie de la notion d'utilité.

On considère qu'un individu n'atteint jamais un niveau de satisfaction total de richesse. Chaque montant supplémentaire augmente son niveau de satisfaction. Ainsi, la fonction d'utilité est strictement croissante.

De plus, on suppose que l'utilité marginale (la dérivée de la fonction d'utilité par rapport à la richesse) est, quant à elle, strictement décroissante. Une justification de cette caractéristique provient du fait que le niveau de satisfaction d'un individu augmente de moins en moins rapidement plus son niveau de richesse augmente. Par exemple, un individu possédant initialement 5\$ obtient une plus grande augmentation de son utilité en recevant un montant de 10\$ en comparaison à un individu possédant initialement 500 000\$. En effet, pour ce dernier, l'ajout de 10\$ engendre une très faible variation de son niveau de satisfaction face à la richesse qu'il possède.

Un fait moins intuitif est le lien entre l'utilité et l'aversion au risque. L'aversion au risque est définie (notamment à la section 1.1.4 d'Ingersoll (1987)) comme étant la crainte d'un individu face à un risque ou à un événement incertain. Plus précisément, l'aversion au risque représente le fait qu'un individu hésite à entreprendre un événement comportant un gain très incertain plutôt qu'un autre événement comportant un gain potentiel plus petit, mais davantage certain. De ce fait, cette dernière justifie également la stricte concavité d'une fonction d'utilité d'un individu ayant une aversion au risque.

Puisque nous considérons un individu rationnel dont le niveau de satisfaction de richesse n'est jamais atteint et possédant une aversion au risque, on peut affirmer que sa fonction d'utilité est de forme croissante et strictement concave. Dans ce cas, il est possible de définir l'utilité, telle que présentée, entre autres, dans Chen *et al.* (2018) et Korn (1997) :

Définition 1.1. *Une fonction d'utilité $U : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ doit*

- *Être continûment différentiable (élément de $\mathcal{C}^1$) ;*
- *Être strictement croissante et strictement concave ;*
- *Satisfaire les conditions d'Inada : $\lim_{x \rightarrow 0} U'(x) = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} U'(x) = 0$.*

Les conditions d'Inada sont des conditions techniques qui assurent l'existence d'une solution. Elles proviennent de l'article d'Inada (1963) qui présente des conditions afin d'avoir un équilibre économique de croissance.

En représentant, maintenant, l'utilité des gains de Paul par la fonction $U_1(x) = \sqrt{x}$,

on obtient que l'utilité espérée de Paul est :

$$\begin{aligned}
 \bar{u} &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i U_1(x_i) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \sqrt{2^{i-1}} \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{i+1} \\
 &\approx 1.707.
 \end{aligned}$$

Ainsi, Paul serait prêt à participer au jeu en versant un montant unique offrant la même utilité espérée, communément appelé montant équivalent certain (*certainty equivalent*), soit 2.914 ducats. En effet, $U_1(2.914) = \sqrt{2.914} \approx 1.707$.

Définition 1.2. On définit le montant équivalent certain R pour une fonction d'utilité U et une variable aléatoire X par

$$U(R) = \mathbb{E}[U(X)], \quad (1.1)$$

dans le cas où $\mathbb{E}[U(X)] < \infty$.

Dans le paradoxe de St-Petersbourg, puisque l'utilité des gains croît à un rythme moins rapide que la décroissance des probabilités associées (à cause de la décroissance de l'utilité marginale), le montant alloué pour prendre part au jeu est une valeur finie. Ensuite, on constate que l'utilisation du concept de l'utilité dans le cas ci-haut reflète également le niveau de satisfaction du joueur (ou de l'investisseur) face à l'incertitude des gains futurs. Par exemple, si la fonction d'utilité avait plutôt été

de $U_2(x) = -x^{-2}$, représentant une plus grande aversion au risque³, Paul aurait été prêt à payer plutôt 1.323 ducats.

Finalement, comme mentionné au chapitre 1.1 de Pennacchi (2008), on pourrait s'interroger sur le cas où la fonction d'utilité croît au même rythme ou plus rapidement que le rythme auquel les probabilités décroissent (toujours dans le contexte du paradoxe de St-Petersbourg). Dans ce cas-ci, l'espérance de l'utilité divergerait. Cependant, Pennacchi justifie que puisque même l'individu le plus fortuné au monde possède une richesse finie ($< \infty$), personne n'est en mesure de proposer le jeu de lancement de pièce joué par Peter.

1.1.2 Utilité isoélastique

Pennacchi (2008) et Korn (1997) présentent notamment la grande famille de fonctions d'utilité à aversion absolue hyperbolique (HARA, *hyperbolic absolute risk aversion*) pouvant s'écrire sous la forme :

$$U_{HARA}(x) = \frac{1 - \tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} \left(\frac{\zeta x}{1 - \tilde{\gamma}} + \tilde{\beta} \right)^{\tilde{\gamma}}, \quad (1.2)$$

où $\tilde{\gamma} < 1$, $\tilde{\gamma} \neq 0$, $\zeta > 0$, $\left(\frac{\zeta x}{1 - \tilde{\gamma}} + \tilde{\beta} \right) > 0$.

Cette grande famille englobe les familles d'utilité à aversion absolue au risque constante (CARA, *Constant absolute risk aversion*) ($\tilde{\gamma} = -\infty$, $\tilde{\beta} = 1$) et la famille d'aversion relative au risque constante (CRRA, *Constant relative risk aversion*) ($\tilde{\gamma} < 1$, $\tilde{\beta} = 0$).

3. Des explications supplémentaires concernant les différents niveaux d'aversion au risque sont présentées plus loin à la sous-section 1.1.2.

Comme mentionné précédemment, l'aversion au risque est liée à l'utilité marginale. Ainsi, une mesure évaluant le degré d'aversion au risque doit s'attarder principalement sur l'utilité marginale plutôt que sur la fonction d'utilité même. L'aversion relative au risque, $A_r(\cdot)$, est une mesure utilisée afin de quantifier l'aversion au risque. Elle est définie par :

$$A_r(x) = xA(x),$$

où $A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}$ représente l'aversion absolue au risque d'Arrow-Pratt (*Arrow-Pratt measure of absolute risk-aversion*) et où $x > 0$ représente la richesse. On peut interpréter $A(x)$ comme un ratio du niveau d'aversion au risque par rapport au niveau d'augmentation de l'utilité face à une augmentation de la richesse, et ce, pour un niveau de richesse x .

Dans le cas d'un individu ayant une aversion au risque (dont la fonction d'utilité est présentée à la définition 1.1), l'aversion relative au risque est strictement positive puisque l'utilité marginale est strictement positive et la dérivée de l'utilité marginale est strictement négative. Plus particulièrement, dans le cas de la famille CRRA, puisque l'aversion relative est constante, l'aversion absolue au risque d'Arrow-Pratt décroît au même rythme que la richesse croît. Cette famille est fréquemment utilisée en finance, car son aversion relative au risque ne dépend pas du niveau de richesse auquel elle est évaluée. L'utilisation d'une fonction d'utilité de la famille CRRA simplifie les problèmes étudiés. Cependant, comme mentionné par Wakker (2008) (à la section *Analysis through the Arrow-Pratt index*), il est important de prendre en considération le domaine sur lequel la fonction d'utilité est étudiée.

Dans la famille de fonctions d'utilité CRRA, on retrouve la fonction d'utilité isoé-

lastique (*Power utility*). Cette dernière est obtenue en substituant $\zeta \equiv (1 - \tilde{\gamma})^{1-1/\tilde{\gamma}}$, $\tilde{\beta} \equiv 0$ et $\tilde{\gamma} \equiv (1 - \gamma)$ dans la fonction d'utilité HARA en (1.2) :

$$U(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{(1-\gamma)}, \quad (1.3)$$

où $\gamma > 0$, $\gamma \neq 1$. À l'aide de quelques manipulations algébriques, on obtient que γ représente le coefficient d'aversion relative au risque, soit $A_r(x) = \gamma$ pour tout $x > 0$.

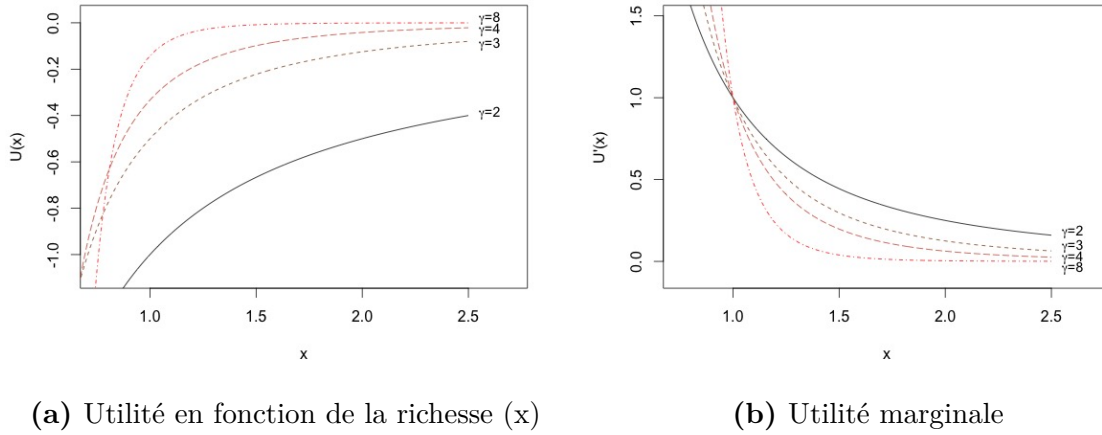


Figure 1.1: Utilité isoélastique sous différents niveaux d'aversion au risque

À partir de la figure 1.1, il est possible de constater que plus le paramètre γ est grand, plus l'aversion au risque est grande. De plus, on voit que pour les valeurs de $\gamma = 2$, $\gamma = 3$, $\gamma = 4$ et $\gamma = 8$, la différence de coefficient d'aversion relative au risque illustre bien la différence du niveau d'aversion au risque pour les niveaux de richesse entre 0 et 2. Par contre, on voit que les fonctions d'utilité pour $\gamma = 4$ et $\gamma = 8$ sont assez similaires pour un niveau de richesse supérieur à 2. Ceci illustre l'argument de Wakker (2008) présenté précédemment, soit qu'il est important de déterminer le coefficient d'aversion relative au risque en fonction du domaine du niveau de richesse

étudié.

Par ailleurs, on peut remarquer que l'utilité marginale pour tous les niveaux de risque est de 1 lorsque le niveau de richesse est de 1. De ce fait, toutes les courbes à la figure 1.1a ont la même dérivée à $x = 1$. En comparant les différentes courbes, on remarque que, pour un niveau de richesse plus grand que 1, une personne ayant une plus grande aversion au risque ($\gamma = 8$) obtient une très légère augmentation de l'utilité en augmentant ce niveau de richesse. D'un autre côté, lorsque l'appétit au risque est plus grand ($\gamma = 2$, $\gamma = 3$ et $\gamma = 4$), on voit que l'utilité est fortement croissante lorsque la richesse augmente. On constate également que les courbes associées à une grande aversion au risque attribuent une utilité très faible (très négative) aux niveaux de richesse faibles.

De plus, la forme strictement concave croissante de l'utilité illustre le fait que pour un même niveau de variation de la richesse (positive et négative), le gain de l'utilité obtenu par une augmentation de la richesse est strictement inférieur à la perte de l'utilité obtenue par une diminution en valeur absolue.

1.2 Optimisation convexe et relaxation lagrangienne

Cette section est principalement basée sur les sections 4 et 5 de Boyd et Vandenberghe (2004) ainsi que sur l'article de Fisher (1981) et présente une méthode de résolution de problèmes d'optimisation avec contraintes.

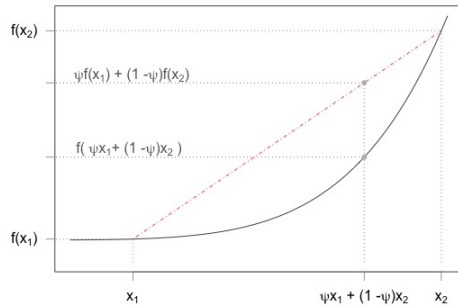
Tout d'abord, définissons deux familles de fonctions que nous utilisons dans les prochaines sections : les fonctions convexes et les fonctions affines.

Définition 1.3. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe lorsque pour tout $0 \leq \psi \leq 1$ et $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$:

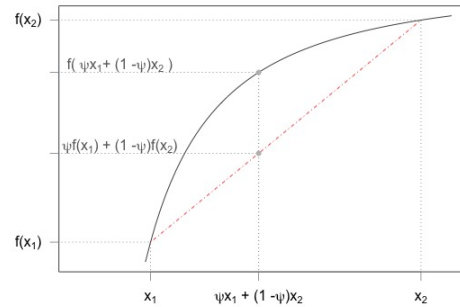
$$f(\psi x_1 + (1 - \psi)x_2) \leq \psi f(x_1) + (1 - \psi)f(x_2). \quad (1.4)$$

Une fonction concave a la même définition qu'une fonction convexe (présentée à la définition 1.3), mais où l'inégalité de l'équation (1.4) est remplacée par $\geq$. De plus, une fonction strictement convexe (strictement concave) possède les mêmes propriétés qu'une fonction convexe (concave), mais où le signe d'inégalité $\leq$ ($\geq$) de l'expression en (1.4) est remplacé par l'inégalité stricte, soit $<$ ($>$).

La figure 1.2 illustre un exemple pour chaque cas. On remarque, notamment, à la figure 1.2 que la corde des fonctions, soit la droite reliant deux points distincts de la fonction (représentée en pointillé), se trouve au dessus de la fonction f pour une fonction convexe et en dessous de la fonction pour une fonction concave.



(a) Fonction convexe



(b) fonction concave

Figure 1.2: Propriétés des fonctions convexes et concaves de la définition 1.3

Définition 1.4. Une fonction $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite affine si elle peut être représentée sous la forme :

$$g(x) = A^\top x + \tau \quad (1.5)$$

pour $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^n$, où $A^\top$ représente la transposée de A et $\tau \in \mathbb{R}$.

1.2.1 Problème d'optimisation convexe standard

Dans un problème d'optimisation convexe standard, on considère la variable d'optimisation $x \in \mathbb{R}^n$ et une fonction convexe, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, appelée fonction objectif. De façon générale, ce problème est de la forme :

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ \text{s.c. } & h_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & g_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (\text{O})$$

où $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions convexes définissant les contraintes d'inégalité et $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, des fonctions affines définissant les contraintes d'égalité.

De plus, le domaine du problème d'optimisation (O) est noté

$$\mathcal{D} : \mathbf{dom} f \cap \bigcap_{i=1}^m \mathbf{dom} h_i$$

et représente l'ensemble des points faisant partie du domaine de la fonction d'optimisation et également du domaine de chacune des fonctions définissant les contraintes. On peut omettre d'inclure le domaine des fonctions affines (g_j) dans $\tilde{\mathcal{D}}$ puisque leur domaine n'ajoute aucune restriction. On suppose que le domaine $\mathcal{D}$ est non nul. De plus, on dit que le problème d'optimisation (O) est réalisable lorsqu'il existe au moins

un point réalisable $x \in \mathcal{D}$ qui satisfait toutes les contraintes $h_i(x) \leq 0$ et $g_j(x) = 0$. Dans le cas contraire, le problème est dit irréalisable et il n'existe aucune solution.

Ensuite, on note o^* la solution au problème (O), soit :

$$o^* = \inf \left\{ f(x) \mid h_i(x) \leq 0, \ i = 1, \dots, m, \ g_j(x) = 0, \ j = 1, \dots, p \right\}$$

dans le cas où (O) est réalisable. Il faut noter qu'il est possible que $o^* = \pm\infty$. Lorsqu'il existe une suite de points réalisables x_w , $w = 1, 2, 3, \dots$ où $f(x_w) \rightarrow -\infty$ quand $w \rightarrow \infty$, alors $o^* = -\infty$ et le problème est dit non borné inférieurement. En d'autres termes, le problème est non borné inférieurement lorsqu'il existe une suite de points x réalisables faisant en sorte que $f(x)$ diminue de plus en plus sans atteindre de limite. Dans le cas où le problème est irréalisable, $o^* = \infty$ (conformément à la convention que l'infimum d'un espace vide est ∞ comme mentionné à la section 4 de Boyd et Vandenberghe (2004)).

Un point optimal x^* est un point réalisable tel que $f(x^*) = o^*$. Dans le cas où la fonction d'optimisation d'un problème de la forme (O) est strictement convexe, la solution est unique.

Considérons, maintenant, le problème de maximisation suivant :

$$\begin{aligned} & \max \tilde{f}(x) \\ \text{s.c. } & \tilde{h}_i(x) \leq e_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \tilde{g}_j(x) = b_j, \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned} \tag{C}$$

sur le domaine d'optimisation

$$\tilde{\mathcal{D}} : \mathbf{dom} \tilde{f} \cap \bigcap_{i=1}^m \mathbf{dom} \tilde{h}_i,$$

où $e_i, b_j \in \mathbb{R}$, $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'optimisation concave, $\tilde{h}_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions convexes et $\tilde{g}_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, des fonctions affines. De plus, on note c^* la solution à ce problème dans le cas où (C) est réalisable. Tel que mentionné au chapitre 4 de Boyd et Vandenberghe (2004), le problème (C) est l'équivalent de minimiser la fonction objectif convexe $-\tilde{f}$ comme présenté en (O). Également, il est possible de représenter les contraintes d'inégalité et d'égalité respectivement par $\tilde{h}_i(x) - e_i \leq 0$ et $\tilde{g}_j(x) - b_j = 0$ afin de retrouver la forme des contraintes du problème (O). Par les propriétés de transformations linéaires et puisqu'une simple soustraction de constante a été appliquée aux contraintes, ces dernières conservent leurs propriétés respectives. Les contraintes d'inégalité demeurent exprimées en termes de fonction convexes, et les contraintes d'égalité, en termes de fonctions affines.

De ce fait, la théorie concernant la minimisation d'une fonction objectif convexe avec contraintes s'applique également dans le cas de maximisation avec fonction objectif concave. Ainsi, dans les chapitres suivants, la théorie est appliquée à la maximisation de fonction objectif concave avec contraintes puisque nous nous attardons à un problème de maximisation dans les chapitres suivants.

1.2.2 Relaxation lagrangienne

L'idée principale de la relaxation lagrangienne est qu'il est possible de considérer un problème d'optimisation (convexe ou non) avec contraintes considéré «difficile» comme un problème d'optimisation simple comme mentionné dans Fisher (1981).

Par cette méthode, on dualise et simplifie le problème initial d'optimisation par un second problème d'optimisation sans contraintes auquel les contraintes initiales ont été incorporées. De ce fait, la résolution est grandement facilitée. Dans le cas où la dualité est forte (*strong duality*), la solution au problème dual est la même que celle du problème initial (appelé primal).

Considérons le problème d'optimisation convexe (C) et ajoutons comme conditions que $\tilde{f}, \tilde{h}_i, \tilde{g}_j \in \mathcal{C}^1$ pour tout i et j . Le lagrangien $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ correspondant au problème (C) est de la forme :

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \iota) := \tilde{f}(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i (\tilde{h}_i(x) - e_i) - \sum_{j=1}^p \iota_j (\tilde{g}_j(x) - b_j), \quad (1.6)$$

où $\lambda_i \geq 0$ et ι_j correspondent aux multiplicateurs de Lagrange des contraintes $\tilde{h}_i(x) \leq e_i$ et $\tilde{g}_j(x) = b_j$ respectivement. Le domaine du lagrangien est $\text{dom } \mathcal{L} = \tilde{\mathcal{D}} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$, et $\lambda \in \mathbb{R}^m$ et $\iota \in \mathbb{R}^p$ sont des vecteurs contenant les multiplicateurs de Lagrange associés au problème d'optimisation primal (C).

Puisque le lagrangien est basé sur le problème primal (C), nous cherchons maintenant à maximiser $\mathcal{L}(x, \lambda, \iota)$ sur l'ensemble des $x \in \tilde{\mathcal{D}}$. La fonction duale $J(\lambda, \iota)$ où $\lambda_i \geq 0$ est ainsi :

$$J(\lambda, \iota) := \sup_{x \in \tilde{\mathcal{D}}} \mathcal{L}(x, \lambda, \iota). \quad (1.7)$$

Le concept de la relaxation lagrangienne est d'appliquer une pénalité négative (faible) à tous les points de $\tilde{\mathcal{D}}$ qui ne respectent pas les contraintes $\tilde{h}_i(x) \leq e_i$ et $\tilde{g}_j(x) = b_j$. Puisque nous cherchons la valeur $x^* \in \tilde{\mathcal{D}}$ qui maximise $\mathcal{L}$, on sait que la fonction $J(\lambda, \iota)$ prendra toujours des valeurs supérieures ou égales à la solution du problème

de maximisation d'une fonction concave (C), c^* . Ainsi, on cherche donc la solution au problème dual :

$$\inf_{\lambda, \iota} J(\lambda, \iota). \quad (\hat{C})$$

On représente la solution au problème d'optimisation dual $(\hat{C})$ par j^* . On appelle la différence entre la solution du problème primal (C) et la solution du problème dual $(\hat{C})$, $(j^* - c^*)$, écart de dualité des solutions optimales (*optimal duality gap*).

Les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), présentées entre autres à la section 5.5.3 de Boyd et Vandenberghe (2004), indiquent les conditions suffisantes pour obtenir une dualité forte dans le cas où $\tilde{f}$ ainsi que toutes les contraintes $\tilde{h}_i$ et $\tilde{g}_j$ sont différentiables ; c'est à dire pour que l'écart de dualité des solutions optimales soit nul ($j^* = c^*$).

Théorème 1.1 (Conditions de KKT). *Considérons $\tilde{f}$ ainsi que toutes les contraintes $\tilde{h}_i$ et $\tilde{g}_j$ du problème (C) comme étant différentiables. Soit x^* , λ^* et ι^* satisfaisant les conditions de KKT suivantes :*

$$\begin{aligned} \tilde{h}_i(x^*) &\leq e_i, & i &= 1, \dots, m, \\ \tilde{g}_j(x^*) &= b_j, & j &= 1, \dots, p, \\ \lambda_i^* &\geq 0, & i &= 1, \dots, m, \\ (\tilde{h}_i(x^*) - e_i) \lambda_i^* &= 0, & i &= 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1.8)$$

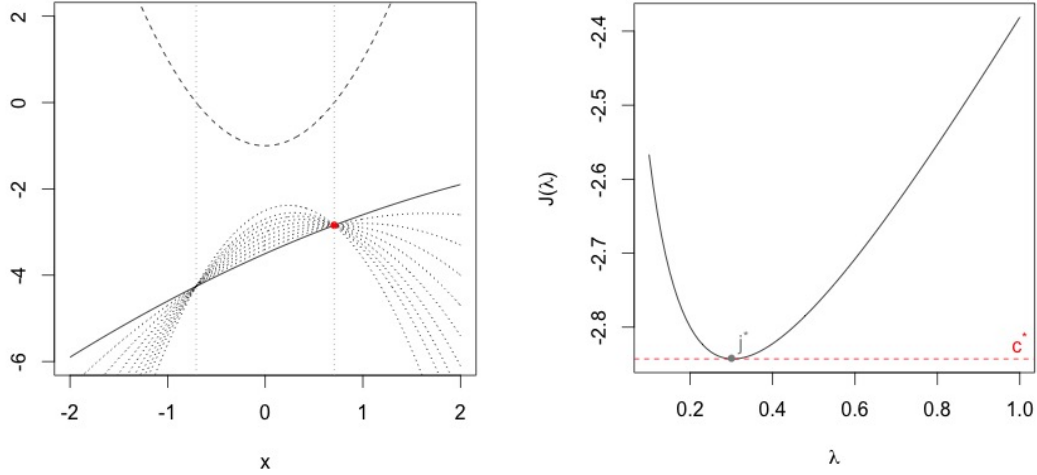
$$\nabla \tilde{f}(x^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla \tilde{h}_i(x^*) - \sum_{j=1}^p \iota_j^* \nabla \tilde{g}_j(x^*) = 0. \quad (1.9)$$

Alors x^* , λ^* et ι^* sont les valeurs des paramètres optimaux du problème primal (C) et du problème dual $(\hat{C})$ qui engendrent un écart de dualité nul.

Puisque $\lambda_i^* \geq 0$, $\mathcal{L}(x, \lambda^*, \iota^*)$ dont la forme est présentée en (1.6) est concave en x . La condition (1.9) provient du fait que x^* maximise $\mathcal{L}(x, \lambda^*, \iota^*)$ pour tout $x \in \tilde{\mathcal{D}}$. Ainsi, le gradient du lagrangien par rapport à x évaluée à x^* , λ^* et ι^* est nul.

Les valeurs des multiplicateurs de Lagrange optimaux contenus dans les vecteurs λ^* et ι^* sont obtenues en trouvant, tout d'abord, la solution algébrique de x^* à partir de l'équation (1.9) (cette dernière étant fonction de λ^* et ι^*). Ensuite, il suffit de substituer cette expression algébrique de x^* dans chacune des contraintes ($\tilde{h}_i(x^*) \leq e_i$ et $\tilde{g}_j(x^*) = b_j$) afin d'obtenir chacune des valeurs optimales de λ_i^* et ι_i^* respectivement. Il faut également s'assurer que la condition (1.8) soit respectée.

La figure 1.3 est inspirée des figures 5.1 et 5.2 de Boyd et Vandenberghe (2004) et présente un exemple de problème d'optimisation où la dualité est forte.



(a) Maximisation d'une fonction objectif concave

(b) Écart de dualité des solutions optimales de la figure 1.3a.

Figure 1.3: Relaxation lagrangienne avec fonction d'optimisation concave

À la figure 1.3a, la fonction objectif (en trait plein) est maximisée sur le domaine où la fonction de contrainte (en long pointillé) est inférieure ou égale à zéro, soit dans l'intervalle $[-0.707, 0.707]$. Le cercle plein de la figure 1.3a représente le point et la valeur optimale, soit, respectivement, $x^* = 0.707$ et $c^* = -2.84$. Les courbes en petit pointillé représentent le lagrangien $\mathcal{L}(x, \lambda)$ pour $\lambda = 0.1, 0.2, \dots, 1$. À la figure 1.3b, on voit que $J(\lambda) \geq c^*$, et on remarque notamment que $J(\lambda) = c^*$ uniquement lorsque $\lambda^* = 0.3$.

1.3 Marché financier

Dans cette section, on introduit certains concepts de base de la modélisation d'un marché financier. On s'intéresse particulièrement aux propriétés du marché financier du modèle de Black-Scholes. De plus, on présente des notions avancées de calcul stochastique applicables au marché financier. Ces dernières sont utilisées aux sections suivantes. En effet, ces notions sont des éléments important qui nous permettrons de résoudre le problème d'optimisation de portefeuille appliqué aux fonds distincts.

1.3.1 Notions de calcul stochastique

Soit $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$ un espace de probabilité. On retrouve notamment la définition et les propriétés du mouvement brownien dans Shreve (2004) à la section 3.3 (théorème 3.3.2) et à la section 2 de Lamberton et Lapeyre (1997).

Définition 1.5. *Un mouvement brownien standard, $W^{\mathbb{P}} := \{W_t^{\mathbb{P}}, t \geq 0\}$, est un processus stochastique adapté construit sur l'espace de probabilité $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$ et satisfaisant les propriétés suivantes :*

- *Pour tout $\omega \in \Omega$, $W_0^{\mathbb{P}}(\omega) = 0$;*
- *Pour tout $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$, les variables aléatoires $W_{t_1}^{\mathbb{P}} - W_{t_0}^{\mathbb{P}}$, $W_{t_2}^{\mathbb{P}} - W_{t_1}^{\mathbb{P}}$, $\dots$, $W_{t_k}^{\mathbb{P}} - W_{t_{k-1}}^{\mathbb{P}}$ sont indépendantes ;*
- *Pour tout $s, t \geq 0$, où $s < t$, la variable aléatoire $W_t^{\mathbb{P}} - W_s^{\mathbb{P}}$ est de distribution normale d'espérance 0 et de variance $t - s$;*
- *La trajectoire $t \rightarrow W_t^{\mathbb{P}}(\omega)$ est $\mathbb{P}$ -presque sûrement⁴ ($\mathbb{P}$ -p.s.) continue.*

On note par $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ la filtration engendrée par le processus $W^{\mathbb{P}}$, soit l'ensemble des tribus faisant en sorte que toutes les variables aléatoires $W_s^{\mathbb{P}}$ (pour $0 \leq s \leq t$) sont mesurables, et contenant également les ensembles de mesure nulle. On retrouve davantage d'explications sur cette filtration à la définition 3.3.3 de Shreve (2004).

Dans le secteur des mathématiques financières, on modélise la valeur des actifs par des processus stochastiques dans le but d'estimer les valeurs futures ou d'évaluer le risque de crédit d'une compagnie par exemple. Pour ce faire, la grande famille des processus de Lévy est souvent employée. Dans ce mémoire, on modélise le marché financier afin d'étudier le problème d'optimisation de portefeuille appliqué aux fonds distincts par des processus d'Itô. On retrouve notamment à la définition 4.4.3 de Shreve (2004) la définition d'un processus d'Itô.

4. Un événement presque sûr signifie que l'événement tient sur les sous-ensembles de Ω avec probabilité 1 tel que défini notamment à la section 4 de Rosenthal (2006). Ici, ceci signifie que $\mathbb{P}(\omega \in \Omega \mid t \rightarrow W_t^{\mathbb{P}}(\omega) \text{ n'est pas continue}) = 0$.

Définition 1.6. Soit $W := \{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ un mouvement brownien, et $\mathbb{F}$ la filtration engendrée par W . Un processus d'Itô est un processus stochastique de la forme

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t H_s ds + \int_0^t \varpi_s dW_s \quad (1.10)$$

avec Y_0 $\mathcal{F}_0$ -mesurable (nonrandom) et $H := \{H_s, 0 \leq T\}$ et $\varpi := \{\varpi_s, 0 \leq t \leq T\}$ sont des processus stochastiques adaptés à $\mathbb{F}$ tels que $\mathbb{E} \left[\int_0^t H_s^2 ds \right] < \infty$ et $\int_0^t |\varpi_s| ds < \infty$ pour tout $t \in [0, T]$.

On retrouve la plupart du temps les processus d'Itô sous leur forme différentielle. La forme différentielle du processus en (1.10) est

$$dY_t = H_t dt + \varpi_t dW_t. \quad (1.11)$$

Dans certains cas, les processus utilisés sont plutôt une combinaison de plusieurs processus d'Itô. Ainsi, il importe de définir la covariation quadratique de deux processus d'Itô. Celle-ci est entre autres définie au lemme 4.4.4 de Shreve (2004). La règle de multiplication pour processus d'Itô, permet, quant à elle, d'obtenir l'équation différentielle stochastique d'un produit de deux processus d'Itô (présentés à la définition 1.6). Cette dernière est notamment présentée au corollaire 4.6.3 de Shreve (2004).

Définition 1.7. Soit Y et Z deux processus d'Itô dont

$$dY_t = H_t dt + \varpi_t dW_t^{\mathbb{P}} \quad \text{et} \quad dZ_t = \widetilde{H}_t dt + \widetilde{\varpi}_t dW_t^{\mathbb{P}}.$$

Le processus de covariation quadratique $\langle Y, Z \rangle = \{\langle Y_t, Z_t \rangle, 0 \leq t \leq T\}$ est défini par

$$\langle Y_t, Z_t \rangle = \int_0^t \varpi_s \widetilde{\varpi}_s ds.$$

Théorème 1.2 (Règle de multiplication). *Soit deux processus d'Itô, $Y := \{Y_t, 0 \leq t \leq T\}$ et $Z := \{Z_t, 0 \leq t \leq T\}$. Alors,*

$$d(Y_t Z_t) = Y_t dZ_t + Z_t dY_t + d\langle Y_t, Z_t \rangle,$$

où $\langle Y, Z \rangle = \{\langle Y_t, Z_t \rangle, 0 \leq t \leq T\}$ correspond à la covariation quadratique des processus Y et Z .

Par ailleurs, lorsque le processus stochastique résulte d'une transformation appliquée à un mouvement brownien ou à un processus d'Itô certaines propriétés peuvent être appliquées. Le théorème 4.4.1 de Shreve (2004) présente la formule d'Itô-Doebelin qui est fréquemment utilisée sous sa forme différentielle pour obtenir la dynamique d'un processus qui est fonction du temps et d'un mouvement brownien.

Théorème 1.3 (Formule d'Itô-Doebelin pour mouvements browniens). *Soit $f(t, x)$ une fonction dont les dérivées partielles $\frac{\partial f(t, x)}{\partial t}$, $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2}$ sont définies et continues, et soit W un mouvement brownien standard. Alors, pour $0 \leq t \leq T$,*

$$f(t, W_t) = f(0, W_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s}(s, W_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, W_s) \right) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, W_s) dW_s. \quad (1.12)$$

En effet, la formule d'Itô-Doebelin pour mouvement browniens sous sa forme différentielle est :

$$df(t, W_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, W_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, W_t) \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, W_t) dW_t. \quad (1.13)$$

Un modèle de marché financier communément utilisé pour sa simplicité et ses propriétés techniques avantageuses est celui de Black-Scholes. Ce dernier considère un marché contenant un actif sans risque et un actif risqué. On note par $B := \{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ et $S := \{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ respectivement les processus stochastiques qui représentent les prix de ces derniers où T est un horizon de temps fini. L'équation différentielle que le processus B satisfait et l'équation différentielle stochastique (EDS) dont le processus S satisfait sont données par :

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1 \quad (1.14)$$

et

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{P}}, \quad S_0 = 1 \quad (1.15)$$

pour tout $t \in [0, T]$. De plus, le taux d'intérêt sans risque, $r \geq 0$, le taux de rendement de l'actif risqué $\alpha > 0$ avec $\alpha > r$, et la volatilité $\sigma > 0$ sont tous constants. Également, les processus B et S sont adaptés à la filtration $\mathbb{F}$. Ainsi, B et S sont des processus d'Itô.

En utilisant la formule d'Itô-Doeblin pour processus d'Itô on obtient, pour tout $0 \leq t \leq T$, la solution à l'EDS du processus S . Les détails sont présentés à l'annexe A. Les solutions aux équations différentielles (1.14) et (1.15) sont respectivement :

$$B_t = B_0 e^{rt} \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \quad (1.16)$$

et

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t^{\mathbb{P}} \right\} \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \quad (1.17)$$

1.3.2 Portefeuille et investissement

On note par X_t la valeur d'un portefeuille composé de Π_t unités d'actif risqué et de Γ_t unités d'actif sans risque au temps t sur une période de temps finie, soit $t \in [0, T]$. On considère les processus $\Pi := \{\Pi_t, 0 \leq t \leq T\}$ et $\Gamma := \{\Gamma_t, 0 \leq t \leq T\}$ comme étant adaptés à la filtration $\mathbb{F}$. On considère également que le montant initial investi dans le portefeuille est $X_0 = x_{ini} > 0$. Il est ainsi possible d'exprimer la valeur du portefeuille au temps t sous une forme générale par :

$$X_t = \Pi_t S_t + \Gamma_t B_t, \quad X_0 = \Pi_0 S_0 + \Gamma_0 B_0 = x_{ini}. \quad (1.18)$$

Par la suite, on pose ν_t , la proportion du portefeuille investie dans l'actif risqué et $(1 - \nu_t)$ la proportion investie dans l'actif sans risque au temps t . On définit donc le processus $\nu := \{\nu_t, 0 \leq t \leq T\}$ par :

$$\nu_t = \frac{\Pi_t S_t}{X_t}. \quad (1.19)$$

Le processus ν est appelé stratégie d'investissement. On a alors :

$$1 - \nu_t = \frac{\Gamma_t B_t}{X_t}. \quad (1.20)$$

Il en découle que le processus représentant la valeur du portefeuille est également adapté à la filtration $\mathbb{F}$. On note par $X^\nu := \{X_t^\nu, 0 \leq t \leq T\}$ le processus stochastique représentant la valeur du portefeuille sous la stratégie ν .

En outre, il faut noter qu'aucune restriction n'est imposée à ce que $0 \leq \nu_t \leq 1$.

Le marché financier est considéré parfaitement liquide⁵. En fait, on appelle effet de levier lorsque $\nu_t > 1$, soit lorsqu'on emprunte dans l'actif sans risque pour investir une plus grande valeur dans l'actif risqué.

Définition 1.8. Une stratégie d'investissement $\nu := \{\nu_t, 0 \leq t \leq T\}$ est dite autofinancée lorsque

$$dX_t^\nu = \Pi_t dS_t + \Gamma_t dB_t. \quad (1.21)$$

En d'autres termes, une stratégie d'investissement est autofinancée lorsqu'aucune injection ni retrait de capital n'est effectué au long de la période allant de 0 à T . De ce fait, la variation de la valeur du portefeuille est causée uniquement par la variation du prix des actifs composant le portefeuille.

Il s'ensuit des équations (1.14), (1.15) et (1.21) que la dynamique du portefeuille autofinancé X_t^ν est représentée par

$$\begin{aligned} dX_t^\nu &= \Pi_t dS_t + \Gamma_t dB_t \\ &= \Pi_t [\alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t^\mathbb{P}] + \Gamma_t [r B_t dt] \\ &= \frac{\nu_t X_t^\nu}{S_t} [\alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t^\mathbb{P}] + \frac{(1 - \nu_t) X_t^\nu}{B_t} [r B_t dt] \\ &= (\nu_t \mu + r) X_t^\nu dt + \nu_t \sigma X_t^\nu dW_t^\mathbb{P}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

où $\mu := \alpha - r$ représente le taux de rendement excédentaire (*excess appreciation rate*).

5. Comme mentionné à la section 2.1 de Björk (2012), un marché financier parfaitement liquide signifie qu'il est possible d'acheter et de vendre une quantité illimitée d'actifs. Plus précisément, il est possible d'emprunter un montant illimité de l'actif sans risque.

Définition 1.9. Une stratégie d'investissement $\nu := \{\nu_t, 0 \leq t \leq T\}$ est dite admissible lorsqu'elle est autofinancée, que $\int_0^T \nu_t^2 dt < \infty$ et que $X_t^\nu \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

À partir de la définition du processus X^ν représentant la valeur d'un portefeuille, nous sommes en mesure d'introduire la notion d'arbitrage (présentée entre autres à la définition 5.4.6 de Shreve (2004)).

Définition 1.10. Une opportunité d'arbitrage est définie comme le processus représentant la valeur d'un portefeuille $X^{arb} := \{X_t^{arb}, 0 \leq t \leq T\}$ satisfaisant :

- $X_0^{arb} = 0$;
- $\mathbb{P}[X_T^{arb} \geq 0] = 1$ et $\mathbb{P}[X_T^{arb} > 0] > 0$.

En d'autres termes, une opportunité d'arbitrage est qu'il est possible d'obtenir une valeur de portefeuille de coût initial nul n'engendrant aucune possibilité de perte, ainsi qu'une probabilité non nulle d'obtenir un gain.

1.3.3 Mesure neutre au risque

Cette section est principalement basée sur la section 5 de Shreve (2004) et présente la mesure neutre au risque dans un contexte de marché financier. Tout d'abord, plusieurs définitions et théorèmes sont énoncés. Ensuite, on procède à l'application de ces derniers au modèle de marché financier de Black-Scholes présenté à la sous-section 1.3.1.

Définition 1.11. Une $\mathbb{P}$ -martingale $M := \{M_t, 0 \leq t \leq T\}$ (ou martingale sous la mesure $\mathbb{P}$) est un processus stochastique défini sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ tel que :

- M_t est $\mathcal{F}_t$ — mesurable, pour tout $t \geq 0$;
- $\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [|M_t|] < \infty$ pour tout $t \geq 0$;
- $\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ pour tout $0 \leq s \leq t$.

Théorème 1.4 (Théorème de représentation martingale unidimensionnel). *On considère une $\mathbb{P}$ -martingale M sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Alors, il existe un processus adapté $\rho := \{\rho_t, 0 \leq t \leq T\}$ avec $\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\int_0^T \rho_t^2 dt \right] < \infty$, tel que*

$$dM_t = \rho_t dW_t^{\mathbb{P}}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.23)$$

Ensuite, on retrouve la définition d'équivalence de deux mesures de probabilité, entre autres, à la section 5.2.1 de Shreve (2004).

Définition 1.12. *Deux mesures de probabilité $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ construites sur le même espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ sont dites équivalentes lorsqu'elles assignent une mesure nulle aux mêmes événements.*

Théorème 1.5 (Théorème 1.6.7 de Shreve (2004) (Radon-Nikodym)). *Considérons les mesures équivalentes $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Il existe une variable aléatoire $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} > 0$ $\mathbb{P}$ — p.s. pour laquelle $\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right] = 1$ et*

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P} \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{F}. \quad (1.24)$$

On appelle $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ la dérivée de Radon-Nikodym .

Définition 1.13 (Théorème 5.4.3 de Shreve (2004)). *Une mesure neutre au risque $\mathbb{Q}$ est une mesure équivalente à la mesure $\mathbb{P}$ sous laquelle le processus de la valeur actualisée de l'actif risqué, $B^{-1}S := \{B_t^{-1}S_t, 0 \leq t \leq T\}$, est une martingale.*

Ainsi, comme mentionné à la section 5.2.2 de Shreve (2004) et par le théorème de représentation martingale unidimensionnel (théorème 1.4), il existe un processus adapté $\rho := \{\rho_t, 0 \leq t \leq T\}$ avec $\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\int_0^T \rho_t^2 dt \right] < \infty$ permettant de représenter la dynamique du processus de la valeur actualisée de l'actif risqué sous la forme :

$$d(B_t^{-1}S_t) = \rho_t dW_t^{\mathbb{Q}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Théorème 1.6 (Théorème 5.2.3 de Shreve (2004)(Théorème de Girsanov unidimensionnel)). *Soit $W^{\mathbb{P}} := \{W_t^{\mathbb{P}}, 0 \leq t \leq T\}$ un mouvement brownien construit sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathbb{F}$ la filtration engendrée par ce mouvement brownien et $\beta := \{\beta_t, 0 \leq t \leq T\}$ un processus adapté à la filtration $\mathbb{F}$. On définit*

$$Z_t = \exp\left\{-\int_0^t \beta_s dW_s^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2} \int_0^t \beta_s^2 ds\right\} \quad (1.25)$$

et

$$W_t^{\mathbb{P}} = W_t^{\mathbb{Q}} + \frac{1}{2} \int_0^t \beta_s ds,$$

et on suppose que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\int_0^T \beta_s^2 Z_s^2 ds \right] < \infty.$$

On pose $Z = Z_T$. Alors, $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z] = 1$ et sous la mesure $\mathbb{Q}$ donnée par le théorème 1.5, le processus $W^{\mathbb{Q}} := \{W_t^{\mathbb{Q}}, 0 \leq t \leq T\}$ est un mouvement brownien.

Tel que mentionné à la section 5.2 de Shreve (2004), en fait, $Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

Ensuite, on introduit $\xi := \{\xi_t, 0 \leq t \leq T\}$ le facteur d'actualisation stochastique. Ce dernier est une combinaison du facteur d'actualisation et de la dérivée de Radon-Nikodym présentée en (1.25) et au théorème 1.5 :

$$\xi_t := \exp \left\{ - \left(r + \frac{\theta^2}{2} \right) t - \theta W_t^{\mathbb{P}} \right\} = e^{-rt} \cdot \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}, \quad (1.26)$$

où

$$\theta := \frac{\mu}{\sigma}.$$

Par ailleurs, en appliquant la formule d'Itô-Doeblin sous sa forme différentielle présentée en (1.13) sur ξ_t défini en (1.26), la dynamique de ξ_t est :

$$d\xi_t = -r\xi_t dt - \theta\xi_t dW_t^{\mathbb{P}}. \quad (1.27)$$

De plus, le processus de la valeur actualisée de l'actif risqué $\xi S := \{\xi_t S_t, 0 \leq t \leq T\}$ est une martingale sous la mesure $\mathbb{P}$. Premièrement, puisque les processus stochastiques $\xi := \{\xi_t, 0 \leq t \leq T\}$ et $S := \{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ sont adaptés à la filtration $\mathbb{F}$, leur produit est également adapté à la filtration $\mathbb{F}$. La première condition de la définition d'une martingale à la définition 1.11 est donc satisfaite. Ensuite, à partir des définitions de ξ_t et S_t , en (1.26) et 1.17, respectivement, on obtient que $\xi_t S_t \sim \mathcal{LN} \left(- \left(r - \alpha + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} \right) t, (\sigma - \theta)^2 t^2 \right)$. Puisque la variable aléatoire $\xi_t S_t$ est toujours positive, $\xi_t S_t = |\xi_t S_t|$. De ce fait, la condition d'intégrabilité (deuxième condition de la définition 1.11) est satisfaite puisque tous les moments d'une distri-

bution lognormale sont finis. Finalement, pour ce qui est de la troisième propriété :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\xi_t S_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\exp \left\{ - \left(r - \alpha + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} \right) t + (\sigma - \theta) W_t^{\mathbb{P}} \right\} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \exp \left\{ - \left(r - \alpha + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\exp \left\{ (\sigma - \theta) (W_t^{\mathbb{P}} - W_s^{\mathbb{P}} + W_s^{\mathbb{P}}) \right\} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
&= \exp \left\{ - \left(r - \alpha + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\} \cdot \exp \left\{ (\sigma - \theta) W_s^{\mathbb{P}} + \frac{(t-s)}{2} (\sigma - \theta)^2 \right\} \\
&= \exp \left\{ - \left(r - \alpha + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} \right) s + (\sigma - \theta) W_s^{\mathbb{P}} \right\} \\
&= \xi_s S_s.
\end{aligned}$$

La troisième égalité a été obtenue en utilisant les propriétés du mouvement brownien présentées à la définition 1.5.

Ainsi, toutes les conditions de la définition 1.11 sont respectées et le processus ξS est bien une $\mathbb{P}$ -martingale.

En effectuant quelques manipulations algébriques, il est possible d'exprimer la variable aléatoire ξ_t en fonction de la variable aléatoire S_t définies respectivement en (1.26) et (1.17) :

$$\xi_t = \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^{-\frac{\theta}{\sigma}} \exp \left\{ \left(\frac{\theta \alpha}{\sigma} - \frac{\theta \sigma}{2} - r - \frac{\theta^2}{2} \right) t \right\}. \quad (1.28)$$

La relation entre les variables aléatoires S_t et ξ_t est dépeinte à la figure 1.4. Les paramètres utilisés à la figure 1.4 ainsi que pour toutes les illustrations des chapitres

suivants sont : $\alpha = 0.04$, $r = 0.02$, $\sigma = 0.2$ et $T = 10$ sauf s'il est spécifié autrement. De ce fait, $\mu = 0.02$ et $\theta = 0.1$.

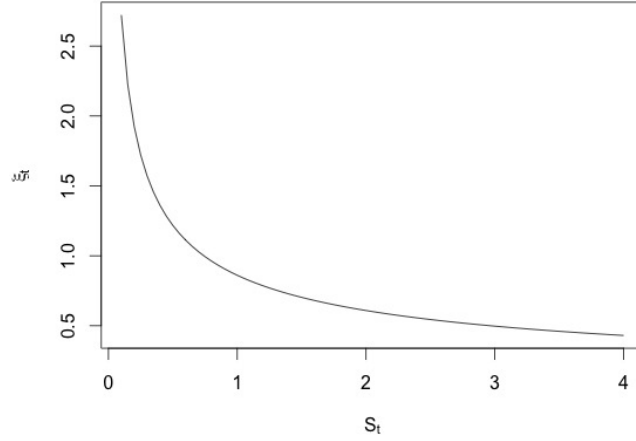


Figure 1.4: Relation entre ξ_t et S_t

1.3.4 Complétude de marché

Un produit dérivé est un produit financier dont la valeur dépend de la valeur d'actifs sous-jacents transigés sur le marché. Un droit contingent représente le bénéfice résultant d'un produit dérivé reçu à l'échéance (T). On le représente par une variable aléatoire, G_T , $\mathcal{F}_T$ -mesurable, non nulle et satisfaisant $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[|G_T|] < \infty$.

Plus particulièrement, on a que :

Définition 1.14. *Un droit contingent (contingent claim), G_T , est dit atteignable s'il existe une stratégie admissible ν sous laquelle la valeur d'un portefeuille X_T^ν est égale*

à la valeur du droit contingent à échéance. Soit

$$G_T = X_T^\nu \quad p.s.$$

Ensuite, les prochains théorèmes et définitions sont tirés de la section 5.4 de Shreve (2004) et présentent différents liens entre la mesure neutre au risque et la complétude de marché, en plus de propriétés des droits contingents dans un marché complet.

Théorème 1.7 (Premier théorème fondamental de tarification d'actifs). *Si le marché admet une mesure de probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}$, alors il n'existe aucune opportunité d'arbitrage (présentée à la définition 1.10).*

Définition 1.15. *Un marché est complet si tous les droits contingents sont atteignables.*

Théorème 1.8 (Second théorème fondamental de tarification d'actifs). *Soit un modèle de marché qui admet une mesure de probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}$. Le marché est complet si et seulement si la mesure de probabilité neutre au risque est unique.*

Lemme 1.1 (Lemme 5.4.5 de Shreve (2004)). *Soit $\mathbb{Q}$ une mesure neutre au risque et soit X_t^ν la valeur d'un portefeuille au temps t . Sous la mesure $\mathbb{Q}$, la valeur actualisée du portefeuille $B_t^{-1}X_t^\nu$ est une $\mathbb{Q}$ -martingale.*

À partir du lemme 1.1 ci-dessus et de la troisième propriété des martingales présentée

à la définition 1.11, on peut donc écrire :

$$x_{ini} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} X_T^\nu \right], \quad (1.29)$$

où x_{ini} représente le montant initial investi dans le portefeuille.

En fait, le marché financier du modèle de Black-Scholes est un marché complet. Des explications supplémentaires concernant la complétude du modèle de Black-Scholes sont présentées à la section 8.2 de Björk (2009). De ce fait, par la définition 1.15, tous les droits contingents sont atteignables.

Dans le cas du portefeuille présenté en (1.18) et à partir de la définition 1.13, on obtient qu'il existe une unique stratégie admissible $\nu := \{\nu_t, 0 \leq t \leq T\}$ telle qu'une valeur atteignable du portefeuille à l'échéance réplique $\mathbb{P}$ -p.s. le droit contingent G_T :

$$X_0^\nu + \int_0^T \nu_t dS_t + \int_0^T (1 - \nu_t) dB_t = G_T \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

En considérant, maintenant, la valeur terminale du portefeuille à l'échéance X_T^ν comme répliquant un droit contingent G_T , le lemme 1.13 et la définition 1.14 nous indiquent la première égalité de l'équation (1.30) :

$$x_{ini} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} G_T] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\xi_T G_T]. \quad (1.30)$$

La deuxième égalité de l'équation (1.30) provient de l'équivalence des mesures $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ ainsi que de la définition de ξ en (1.26).

CHAPITRE II

OPTIMISATION DE PORTEFEUILLE PAR L'APPROCHE MARTINGALE

À partir des notions présentées au chapitre 1, nous étudions dans ce chapitre-ci le problème d'optimisation de portefeuille et présentons l'approche martingale qui est utilisée dans la résolution du problème d'optimisation de portefeuille appliqué aux fonds distincts.

On s'intéresse, maintenant, au problème d'optimisation de Merton : on cherche la stratégie d'investissement optimale d'un investisseur ayant une aversion au risque afin de maximiser l'utilité espérée de sa richesse sur une période de temps continue. Merton (1971) prolonge son article précédent (Merton (1969)) et présente des solutions explicites dans le cas où la fonction d'utilité appartient à la famille HARA et où les actifs financiers sont représentés par des mouvements browniens géométriques. Pour ce faire, Merton utilise la méthode de programmation dynamique, soit en résolvant, entre autres, une équation de type Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Merton (1971) présente notamment le théorème de séparation en deux fonds qui affirme que lorsque les actifs sont représentés par des mouvements browniens géométriques, il est possible de représenter un marché financier par seulement un actif risqué (ou fonds mutuel composé d'une combinaison linéaire des actifs risqués du marché financier) et

un actif sans risque sans perte de généralité (voir théorème 2 de Merton (1971)). À l'aide des propriétés de complétude de marché, Cox et Huang (1989) présentent une méthode de résolution simplifiée au problème de Merton : l'approche martingale.

Ce chapitre est principalement basé sur le chapitre 2 de Björk (2012) et la section 3.4 de Korn (1997).

2.1 Problème d'optimisation dynamique de portefeuille

Toujours en considérant le modèle de marché de Black-Scholes, nous nous intéressons à l'ensemble des stratégies d'investissement admissibles, $\mathcal{A}(x_{ini})$, dépendant de la valeur initiale du portefeuille x_{ini} , tel que

$$\mathcal{A}(x_{ini}) := \left\{ \nu : X_0^\nu = x_{ini}, X_t^\nu \geq 0, \int_0^T (\nu_t X_t^\nu)^2 dt < \infty \mathbb{P} - p.s. \right\},$$

où le processus stochastique représentant la valeur du portefeuille sous la stratégie ν est noté $X^\nu := \{X_t^\nu, 0 \leq t \leq T\}$. De plus, il faut noter que, selon la définition 1.9, une stratégie d'investissement admissible est également autofinancée.

On s'intéresse plus particulièrement à la stratégie d'investissement optimale ν^* maximisant l'utilité de l'investisseur à l'échéance. On a donc le problème d'optimisation suivant :

$$\max_{\nu \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E}^\mathbb{P} [U(X_T^\nu)], \quad (\text{P})$$

où $U(\cdot)$ représente une fonction d'utilité telle que présentée à la définition 1.1.

La complétude de marché du modèle de Black-Scholes présentée à la section 1.3.4,

nous permet d'exprimer le problème d'optimisation dynamique initial (P) par un problème d'optimisation en deux étapes : un problème d'optimisation statique et un problème de représentation. Tout d'abord, en résolvant le problème d'optimisation statique, on détermine le droit contingent optimal Y^* qui maximise l'utilité espérée. Ensuite, la résolution du problème de représentation nous permet de déterminer la stratégie d'investissement optimale ν^* permettant de répliquer le droit contingent optimal Y^* , c'est-à-dire afin d'obtenir $Y^* = X_T^{\nu^*} \mathbb{P} - p.s.$

2.2 Problème statique d'optimisation du portefeuille

On cherche, premièrement, la valeur du droit contingent optimal Y^* maximisant l'utilité espérée. On pose le problème d'optimisation statique suivant :

$$\max_{Y \in \mathcal{Y}(x_{ini})} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [U(Y)], \quad (\text{D})$$

$$\mathcal{Y}(x_{ini}) := \left\{ Y : Y \geq 0 \text{ } \mathbb{P} - p.s., Y \text{ est } \mathcal{F}_T - \text{mesurable}, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-rT} Y] \leq x_{ini} \right\}.$$

L'inégalité de la contrainte budgétaire ($\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-rT} Y] \leq x_{ini}$) provient du fait que dans certains cas la forme que prend l'utilité à maximiser n'est pas strictement croissante (comme ce sera le cas à la section suivante). Ainsi, la valeur optimale Y^* pourrait nécessiter un coût initial inférieur à x_{ini} . Cependant, dans le contexte du problème (D), puisque la fonction $U(\cdot)$ est strictement croissante, la contrainte budgétaire tient toujours sous l'égalité, soit $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-rT} Y] = x_{ini}$.

Par ailleurs, étant donné que la fonction $U(\cdot)$ est strictement concave et que les

contraintes d'inégalité $Y \geq 0$ $\mathbb{P} - p.s.$ et $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}Y] \leq x_{ini}$ sont linéaires (donc convexes) la théorie d'optimisation convexe de la section 1.2 s'applique. De plus, puisque la fonction objectif du problème d'optimisation (D) est strictement concave, on sait que la solution est unique comme mentionné à la section 5.5.5 de Boyd et Vandenberghe (2004).

C'est à l'aide de la technique de relaxation lagrangienne présentée à la section 1.2.2 que nous abordons le problème d'optimisation statique défini précédemment. Cette dernière nous permet de passer du problème d'optimisation avec contrainte budgétaire (D) jugé difficile à un problème d'optimisation sans contraintes budgétaires jugé, quant à lui, facile.

Dans cette optique, on réécrit le problème d'optimisation (D) :

$$\max_{Y \in \mathcal{Y}(x_{ini})} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[U(Y)] \quad \text{s.c.} \quad \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\xi_T Y] \leq x_{ini},$$

où ξ_T est défini en (1.26) et $\mathcal{Y}(x_{ini})$ représente toutes les valeurs terminales admissibles du portefeuille telles que définies au problème (D).

À partir des concepts présentés à la sous-section 1.2.2, on introduit $\mathcal{L}(Y, \lambda)$, le lagrangien, et $\lambda \geq 0$, le multiplicateur de Lagrange, en combinant le problème d'optimisation et la contrainte budgétaire. La fonction duale $J(\lambda)$ est donc :

$$J(\lambda) = \sup_{Y \in \mathcal{Y}(x_{ini})} \mathcal{L}(Y, \lambda),$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(Y, \lambda) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[U(Y)] - \lambda \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\xi_T Y] - x_{ini} \right) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[U(Y)] - \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\lambda (\xi_T Y - x_{ini})] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[U(Y) - \lambda (\xi_T Y - x_{ini})],
\end{aligned} \tag{2.1}$$

pour tout Y admissible.

On procède à une maximisation trajectoire par trajectoire, c'est-à-dire pour chaque $\omega \in \Omega$, puisque aucune restriction n'est appliquée sur chaque trajectoire individuelle et sachant qu'on s'intéresse aux droits contingents finis $\mathbb{P}$ -p.s. Puisqu'une dérivation du lagrangien par rapport au droit contingent est effectuée afin de maximiser ce dernier, il est possible d'interchanger la dérivée et le terme d'espérance dans l'équation (2.1)⁶. En d'autres termes, on s'intéresse au lagrangien :

$$\tilde{\mathcal{L}}(y, \lambda) = U(y) - \lambda (\xi_T(\omega)y - x_{ini}), \tag{2.2}$$

où, par simplification d'écriture, $y = Y(\omega)$.

De ce fait, nous nous intéressons à la fonction duale $\tilde{J}(\lambda)$:

$$\tilde{J}(\lambda) = \sup_{y \in \mathcal{Y}(x_{ini})} \tilde{\mathcal{L}}(y, \lambda).$$

6. Des explications supplémentaires sont présentées à la section 3.4 de Korn (1997). De plus, il faut noter que λ^* est obtenue afin que la contrainte budgétaire soit satisfaite. Le fait de maximiser trajectoire par trajectoire n'affecte pas sa valeur.

On cherche maintenant la solution au problème dual :

$$\inf_{\lambda} \tilde{J}(\lambda). \quad (\hat{D})$$

Puisque la fonction objectif de même que toutes les contraintes du problème d'optimisation (D) sont différentiables, toute solution qui satisfait les conditions d'optimalité de KKT présentées au théorème 1.1 est optimale pour le problème d'optimisation primal (D) et dual ($\hat{D}$), et engendre ainsi un écart de dualité nul.

On cherche, tout d'abord, à maximiser le lagrangien en (2.2) en fonction de la valeur du droit contingent. En effet, la valeur du droit contingent qui engendre la solution au problème d'optimisation ($\hat{D}$) est obtenue en posant, premièrement, la dérivée partielle du lagrangien par rapport à y égale à zéro. On obtient ainsi la relation entre la valeur de y maximisant le lagrangien et le multiplicateur de Lagrange λ . Ainsi, en posant $\frac{\tilde{\mathcal{L}}(y, \lambda)}{\partial y}(y^*, \lambda^*) = 0$, la condition d'optimalité de KKT en (1.9) est satisfaite et on obtient la relation entre la valeur du droit contingent optimale y^* et λ^* :

$$U'(y^*) = \lambda^* \xi(\omega) \quad (2.3)$$

où la valeur du multiplicateur de Lagrange optimal λ^* est obtenue à partir de la contrainte budgétaire $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}Y^*] = x_{ini}$. De ce fait, toutes les conditions de KKT sont satisfaites.

Proposition 2.1 (Proposition 2.3.1 de Björk (2012)). *En considérant le problème d'optimisation (D), Y^* , la valeur du droit contingent optimal, est :*

$$Y^* = I(\lambda^* \xi_T), \quad (2.4)$$

où la valeur de λ^* est déterminée à l'aide de la contrainte budgétaire, soit

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} Y^* \right] = x_{ini}. \text{ Également, } I \text{ est l'inverse de la dérivée de la fonction d'utilité : } I(\cdot) := [U'(\cdot)]^{-1}.$$

Plus précisément, la valeur de λ^* est déterminée à partir de la contrainte budgétaire dont le principe est présenté en (1.30), soit en considérant que la valeur initiale du portefeuille est x_{ini} . Le calcul de la valeur de λ^* peut s'avérer assez complexe puisqu'elle dépend de la forme de Y^* obtenue à partir de l'équation (2.4). Dans certains cas, lorsqu'il est impossible d'isoler algébriquement la variable λ^* une approche numérique peut être utilisée.

2.3 Stratégie d'investissement optimale

À partir de la définition 1.15, la complétude de marché du modèle de Black-Scholes nous permet de répliquer $\mathbb{P}$ -p.s. la valeur optimale du droit contingent Y^* de l'équation (2.3) par un portefeuille $X_T^{\nu^*}$.

La deuxième partie de l'approche martingale consiste à déterminer la stratégie d'investissement optimale, soit la proportion optimale ν_t^* investie dans l'actif risqué pour tout $t \in [0, T]$.

Fait à noter, la suite de cette technique est similaire à la stratégie de couverture delta (*delta hedging*). Le théorème de représentation martingale unidimensionnel (énoncé au théorème 1.4) est utilisé afin de comparer les deux formulations différentes de la dynamique du portefeuille optimal actualisé, soit, premièrement, la dynamique obtenue à partir de l'équation (2.4) et, deuxièmement, à partir de la dynamique en (1.22).

Cette équivalence de problèmes d'optimisation est justifiée par la définition 1.15 ainsi que par le second théorème fondamental de tarification d'actif (présenté au théorème 1.8) confirmant que chaque droit contingent atteignable peut être parfaitement répliqué par une valeur terminale optimale du portefeuille de réplication $X_T^{\nu^*}$ sous une unique stratégie d'investissement admissible ν^* .

2.3.1 Dynamique du portefeuille optimal actualisé

Par la suite, par souci de clarté dans la notation, nous notons le processus stochastique représentant la valeur du portefeuille de réplication obtenue par l'équation (2.4) simplement par X ; tout en considérant que cette dernière dépend de la stratégie d'investissement ν ; $X \equiv X^\nu$. De ce fait, $X_T^* \equiv X_T^{\nu^*}$.

À partir de la valeur terminale optimale déterminée en (2.4), définissons le processus $\xi X^* := \{\xi_t X_t^*, 0 \leq t \leq T\}$ comme la valeur actualisée du portefeuille optimal à l'échéance. Étant donné l'existence et l'unicité de la mesure neutre au risque du modèle de Black-Scholes, nous obtenons :

$$\xi_t X_t^* = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\xi_T X_T^* \mid \mathcal{F}_t]. \quad (2.5)$$

Ainsi, il en découle du lemme 1.1 que, sous la mesure $\mathbb{P}$, la valeur actualisée du portefeuille $\xi_t X_t^*$ est une $\mathbb{P}$ -martingale. En appliquant le théorème de représentation martingale, il existe un processus adapté $h := \{h_t, 0 \leq t \leq T\}$ tel que

$$d(\xi_t X_t^*) = (\xi_t X_t^*) h_t dW_t^{\mathbb{P}}. \quad (2.6)$$

Sachant que le processus ξ est strictement positif et qu'il est adapté à la filtration $\mathbb{F}$, il est possible de réécrire l'équation (2.5) afin d'obtenir l'expression suivante pour X_t^* :

$$X_t^* = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\xi_T}{\xi_t} X_T^* \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.7)$$

Par la suite, il suffit d'appliquer la formule d'Itô-Doeblin sous sa forme différentielle (présentée en (1.13)) à la valeur optimale du portefeuille au temps t , X_t^* définie en (2.7), afin d'obtenir l'équation différentielle stochastique de ce dernier. De façon générale, on obtient que

$$dX_t^* = \left(\frac{\partial X_t^*}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X_t^*}{\partial W_t^2} \right) dt + \frac{\partial X_t^*}{\partial W_t} dW_t^{\mathbb{P}}. \quad (2.8)$$

De plus, sachant que le processus dont on cherche la dynamique est la valeur optimale du portefeuille actualisée obtenue en (2.5), on applique la règle de multiplication à $X^* := \{X_t^*, 0 \leq t \leq T\}$ et $\xi := \{\xi_t^*, 0 \leq t \leq T\}$. À partir de l'EDS de ξ définie en (1.27), de l'EDS de X^* obtenue en (2.8) et de la définition 1.7 de la covariation quadratique :

$$\langle \xi_t, X_t^* \rangle = - \int_0^t \theta \xi_s \frac{\partial X_s^*}{\partial W_s} ds.$$

Ainsi,

$$d\langle \xi_t, X_t^* \rangle = -\theta \xi_t \frac{\partial X_t^*}{\partial W_t} dt.$$

On obtient finalement que

$$\begin{aligned} d(\xi_t X_t^*) &= X_t^* d\xi_t + \xi_t dX_t^* + d\langle \xi_t, X_t^* \rangle \\ &= X_t^* \left(-r \xi_t dt - \theta \xi_t dW_t^{\mathbb{P}} \right) + \xi_t \left(\left(\frac{\partial X_t^*}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X_t^*}{\partial W_t^2} \right) dt + \frac{\partial X_t^*}{\partial W_t} dW_t^{\mathbb{P}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\theta \xi_t \frac{\partial X_t^*}{\partial W_t} dt \\
& = \xi_t \left(\frac{\partial X_t^*}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X_t^*}{\partial W_t^2} - r X_t^* - \theta \frac{\partial X_t^*}{\partial W_t} \right) dt + \left(\frac{1}{X_t^*} \frac{\partial X_t^*}{\partial W_t} - \theta \right) \xi_t X_t^* dW_t^{\mathbb{P}} \\
& = \left(\frac{1}{X_t^*} \frac{\partial X_t^*}{\partial W_t} - \theta \right) \xi_t X_t^* dW_t^{\mathbb{P}}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Le résultat (2.9) découle du lemme 1.1, soit le fait que le processus ξX^* est une $\mathbb{P}$ -martingale. Par conséquent, la dérive est égale à 0, soit $\frac{\partial X_t^*}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X_t^*}{\partial W_t^2} - r X_t^* - \theta \frac{\partial X_t^*}{\partial W_t} = 0$.

Finalement, à partir des équations (2.9) et (2.6), on obtient que le processus h est tel que :

$$h_t = \left(\frac{1}{X_t^*} \frac{\partial X_t^*}{\partial W_t} - \theta \right). \tag{2.10}$$

2.3.2 Dynamique du portefeuille actualisé sous la stratégie optimale

D'autre part, en considérant une stratégie d'investissement ν , l'EDS du portefeuille est également représentée par l'équation (1.22). Ainsi, tel que justifié lors du passage du problème dynamique (P) au problème statique (D), il est possible d'obtenir la dynamique du portefeuille optimal actualisé en utilisant l'unique stratégie d'investissement optimale ν^* . De ce fait, en appliquant la règle de multiplication pour obtenir la dynamique de ce dernier, soit $\xi X^{\nu^*} := \{\xi_t X_t^{\nu^*}, 0 \leq t \leq T\}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
d(\xi_t X_t^{\nu^*}) &= \xi_t dX_t^{\nu^*} + X_t^{\nu^*} d\xi_t + d\langle \xi_t, X_t^{\nu^*} \rangle \\
&= \xi_t X_t^{\nu^*} \left((\nu_t^* \mu + r) dt + \nu_t^* \sigma dW_t^{\mathbb{P}} \right) \\
&\quad + \xi_t X_t^{\nu^*} \left(-r dt - \theta dW_t^{\mathbb{P}} \right) - \xi_t X_t^{\nu^*} \nu_t^* \theta \sigma dt \\
&= \xi_t X_t^{\nu^*} (\nu_t^* \sigma - \theta) dW_t^{\mathbb{P}}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

On obtient du résultat ci-haut en (2.11) et de l'équation (2.6) :

$$h_t = (\nu_t^* \sigma - \theta). \quad (2.12)$$

Finalement, en raccordant les résultats obtenus du processus $h = \{h_t, 0 \leq t \leq T\}$ en (2.10) et (2.12), on obtient :

$$\nu_t^* = \frac{1}{X_t^* \sigma} \frac{\partial X_t^*}{\partial W_t}. \quad (2.13)$$

2.4 Application en utilisant l'utilité isoélastique

Dans cette section, nous utilisons la fonction d'utilité isoélastique $U(\cdot)$ appartenant à la famille CRRA dont la forme est présentée en (1.3). Avec quelques manipulations algébriques, on obtient que

$$I(y) = [U'(y)]^{-1} = y^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad (2.14)$$

où $\gamma > 0$ et $\gamma \neq 1$.

En travaillant sous le modèle de Black-Scholes et en appliquant l'approche martingale présentée précédemment, à l'aide de l'équation (2.4) on obtient la valeur terminale optimale du portefeuille de réplication :

$$X_T^* = (\lambda^* \xi_T)^{-\frac{1}{\gamma}}. \quad (2.15)$$

Le calcul du multiplicateur de Lagrange optimal λ^* est présenté à l'annexe B.1.

Ainsi, la figure 2.1 illustre la valeur terminale optimale du portefeuille en fonction de la valeur de l'actif risqué à l'échéance à partir de l'équation (1.28).

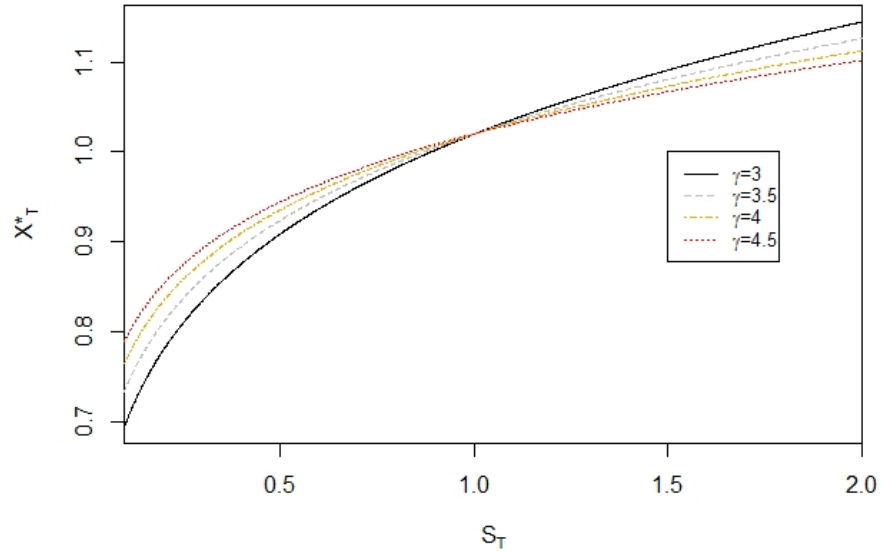


Figure 2.1: Valeur terminale optimale en fonction de la valeur terminale de l'actif risqué

On remarque à la figure 2.1 que plus le degré d'aversion au risque (γ) est élevé, plus la valeur du portefeuille optimale croît rapidement en fonction de la valeur de l'actif à l'échéance toutes choses étant égales par ailleurs. Le croisement des différentes courbes de valeurs terminales optimales est dû à la différence de valeurs du multiplicateur de Lagrange optimal λ^* associé à chaque courbe. En effet, la valeur de γ intervient dans le calcul de λ^* .

À partir de la proportion optimale définie en (2.13) appliquée à la fonction d'utilité isoélastique, on obtient une proportion optimale constante investie dans l'actif risqué

de $\frac{\mu}{\gamma\sigma^2}$. Cette proportion est appelée constante de Merton. En effet, ce résultat est bel et bien celui obtenu par Merton (1969, 1971) en utilisant la technique de programmation dynamique. En considérant les mêmes paramètres qu'à la section 1.3 et en posant $\gamma = 3$, la constante de Merton est d'une valeur de $\frac{1}{6}$. Par ailleurs, la figure 2.2, illustre que cette proportion constante maximise l'espérance de l'utilité du portefeuille à l'échéance.

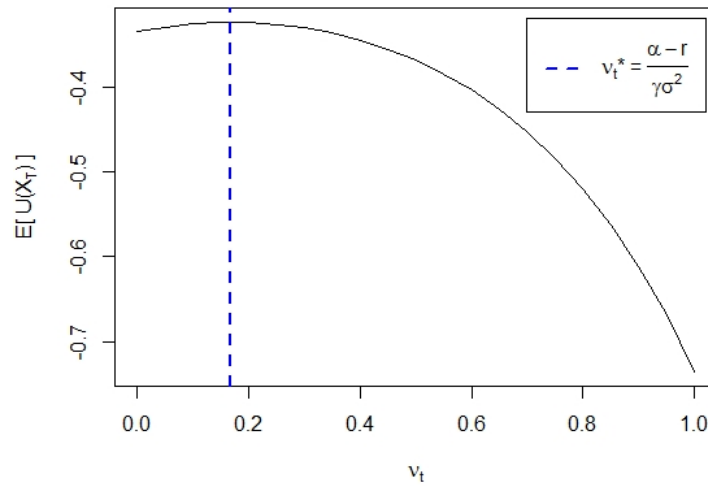


Figure 2.2: $\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [U(X_T)]$ pour différentes proportions constantes ν_t pour tout $t \in [0, T]$

Puisque qu'il existe deux façons possibles de simuler la valeur terminale optimale du portefeuille (en simulant le portefeuille X_T^* directement à l'échéance et par rééquilibrage en appliquant la stratégie d'investissement optimale ν^*), il est intéressant de comparer les résultats obtenus par ces dernières. Bien entendu, le fait de procéder par rééquilibrage nécessite une discrétisation du temps, ce qui engendre un biais.

En fait, lorsque nous comparerons différentes stratégies d'investissement dans les

prochaines sections, il sera nécessaire de discrétiser le temps afin de simuler des trajectoires de marché financier et de procéder par rééquilibrage de portefeuille.

On considère qu'une fréquence de rééquilibrage du portefeuille hebdomadaire (52 fois par année) est suffisante et engendre une assez bonne approximation des résultats et n'alourdit pas trop le temps de calcul. À la figure 2.3, la courbe rouge représente la distribution théorique (obtenue en trouvant la distribution du portefeuille optimal à maturité) et les bandes grises représentent la densité du portefeuille optimal terminal obtenue par rééquilibrage pour différentes fréquences.

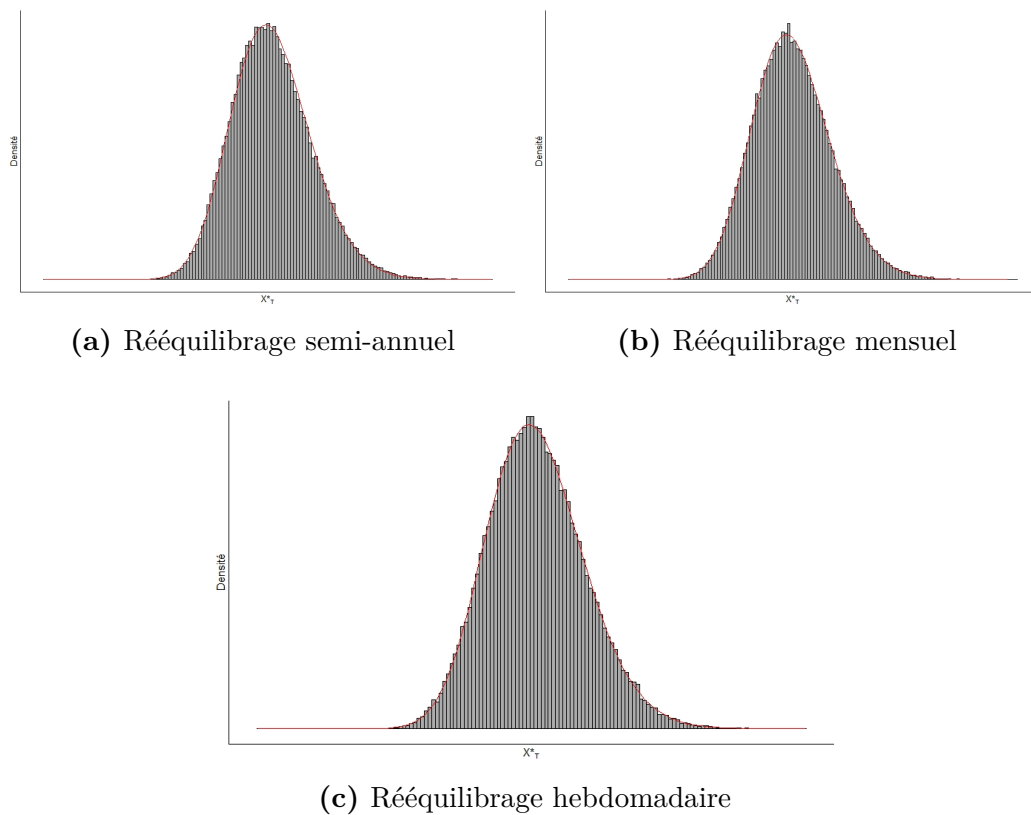


Figure 2.3: X_T^* obtenue par 100 000 simulations de Monte-Carlo

CHAPITRE III

OPTIMISATION SOUS LA GARANTIE D'UN FONDS DISTINCT

Dans l'optique d'appliquer les notions présentées aux chapitres précédents au contexte d'un fonds distinct, la section 3.1, principalement basée sur l'article de Carpenter (2000), présente la technique de concavification qui est utilisée à la section 3.2. On étudie le problème d'optimisation de portefeuille lorsque la richesse terminale est dotée d'une garantie financière. Ainsi, la forme de la fonction objectif étudiée dans cette section est semblable à celle qui est utilisée dans le problème d'optimisation de portefeuille appliqué aux fonds distincts. La section 3.2 est, quant à elle, principalement basée sur l'article de MacKay et Ocejo (2019) et présente la résolution du problème d'optimisation de portefeuille appliqué aux fonds distincts.

3.1 Problème d'optimisation avec le bénéfice résultant d'une option

Considérons une forme semblable au droit contingent d'une option d'achat additionné à une constante $K > 0$, soit

$$a(X_T - D_T)^+ + K, \tag{3.1}$$

où D_T représente le prix d'exercice ou la valeur de référence, $(\cdot)^+$ est équivalent à $\max(\cdot, 0)$ et $a > 0$.

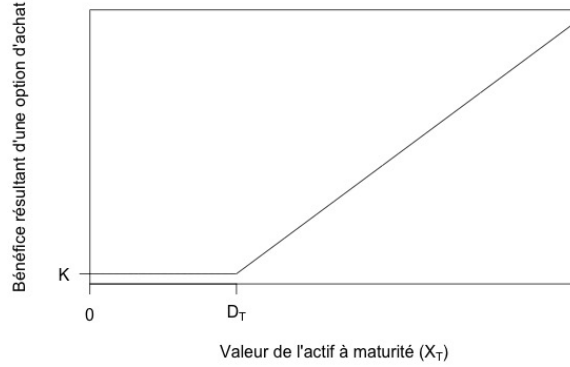


Figure 3.1: Résultat d'une option d'achat à l'échéance tel que défini en (3.1)

En outre, l'équation (3.1) pourrait représenter le montant perçu par un assuré à l'échéance sous un produit d'assurance lié aux marchés boursiers ayant une garantie de valeur K additionnée à l'excédent de l'actif X_T par rapport à une valeur de référence D_T (la garantie d'un fonds distinct par exemple) multiplié par un facteur a .

Dans le même ordre d'idée qu'à la section 2.1, on s'intéresse à l'optimisation de l'utilité du gain perçu à l'échéance, soit à la fonction $U(a(X_T - D_T)^+ + K)$. On constate que la fonction à optimiser n'est pas concave par rapport à la variable X_T comme il est dépeint à la figure 3.2. Il n'est donc pas possible d'appliquer directement les techniques de résolution d'optimisation convexe présentées au chapitre 2.

Tout d'abord, en s'intéressant davantage à la forme de la fonction d'optimisation,

définissons $u : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$u(x, d) = \begin{cases} U(a(x-d)^+ + K) & \text{pour } x \geq 0, \\ -\infty & \text{autrement.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Par conséquent, le problème d'optimisation du droit contingent d'une option d'achat peut être représenté en termes de la fonction $u(\cdot, \cdot)$, soit

$$\max_{X_T} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [u(X_T, D_T)] \quad \text{s.c.} \quad \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\xi_T X_T] \leq x_{ini}, \quad x_{ini} \geq 0. \quad (3.3)$$

Carpenter (2000) et Reichlin (2013) démontrent qu'il est possible de résoudre le problème d'optimisation à l'aide de la fonction concavifiée de u , $\tilde{u}$, soit la plus petite fonction concave dominant u .

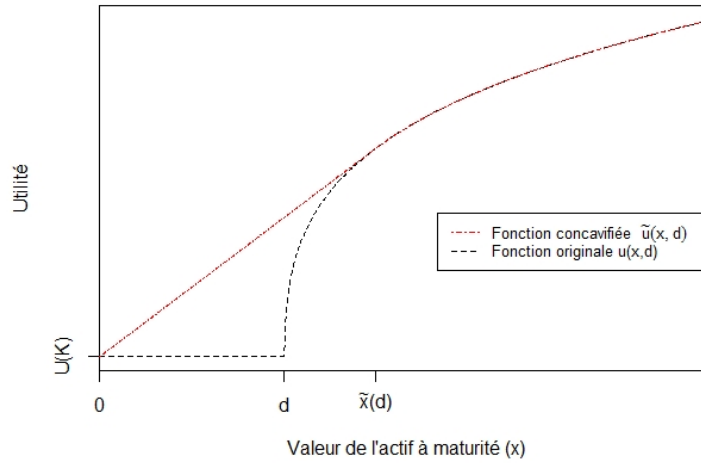


Figure 3.2: Fonction d'optimisation originale et concavifiée

Par la suite, c'est à l'aide de la fonction concavifiée que nous déterminons la valeur optimale du portefeuille de réplication à l'échéance. La fonction concavifiée est construite de façon à ce que la section de la fonction objectif se trouvant entre $x = 0$ et $x = \hat{x}(d)$ soit remplacée par la corde reliant ces deux points où $\hat{x}(d)$ est le point où la pente de la corde est égale à la dérivée de u évaluée à cet endroit. Par ailleurs, le lemme 3.1 tiré de Carpenter (2000) nous confirme l'existence de ce point $\hat{x}(d)$ pour toute valeur de $d > 0$. On appelle ce dernier point de concavification.

Lemme 3.1 (Lemme 1 de Carpenter (2000)). *Soit $u'(x, d) = \frac{\partial}{\partial x}u(x, d)$, pour $x > 0$. Pour chaque $d > 0$, il existe un unique point $\hat{x}(d) > 0$ tel que*

$$\frac{u(\hat{x}(d), d) - u(0, d)}{\hat{x}(d)} = u'(\hat{x}(d)).$$

Ainsi, la fonction concavifiée $\tilde{u} : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que

$$\tilde{u}(x, d) = \begin{cases} -\infty & \text{pour } x < 0, \\ u(0) + u'(\hat{x}(d), d)x & \text{pour } 0 \leq x \leq \hat{x}(d), \\ u(x, d) & \text{pour } x > \hat{x}(d). \end{cases} \quad (3.4)$$

Il en découle que la fonction $\tilde{u}$ est, quant à elle, concave en x . De plus, $\tilde{u}(x, d) \geq u(x, d)$ pour tout $(x, d) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ et $\tilde{u}(x, d) = u(x, d)$ pour $x = 0$ et pour toutes valeurs de $x \geq \hat{x}(d)$. On remarque que la valeur du point de concavification ne dépend pas des paramètres du marché financier, mais bien uniquement des paramètres de la structure du fond distinct ainsi que des paramètres de la fonction d'utilité.

En fait, il s'avère que la solution au problème d'optimisation (3.3), X_T^* , ne se situe jamais dans l'intervalle $(0, \hat{x}(D_T))$, soit dans l'intervalle où les deux fonctions, u et

$\tilde{u}$, différent.

Tout d'abord, en étudiant la fonction d'optimisation originale, théoriquement, X_T^* ne devrait jamais prendre des valeurs dans l'intervalle $(0, D_T]$ dû à la contrainte budgétaire. En effet, une valeur terminale dans l'intervalle $(0, D_T]$ engendre de plus amples coûts initiaux sans pour autant augmenter la valeur de l'utilité du gain (d'une valeur de $U(K)$). En outre, la justification du fait que la valeur terminale optimale du portefeuille ne se trouve pas non plus dans l'intervalle $(0, \hat{x}(D_T))$ est beaucoup moins directe. Par conséquent, cette justification ainsi que la preuve de l'unicité de la solution du problème d'optimisation (3.3) sont présentées plus loin. De plus, à la section 5 de Reichlin (2013), on démontre que, sous certaines conditions, la solution d'un problème de maximisation où la fonction objectif n'est pas nécessairement concave est également la solution de ce problème en utilisant la fonction objectif concavifiée. Les conditions sont : que la solution doit exister, l'espace de probabilité du problème d'optimisation doit être diffus (sans atome), une contrainte budgétaire initiale est imposée et la mesure neutre au risque doit être unique. Le problème d'optimisation (3.3) satisfait toutes ces conditions.

En pratique, on constate que certaines restrictions réalistes font en sorte que X_T^* prend parfois des valeurs dans l'intervalle $(0, \hat{x}(D_T))$. Des explications supplémentaires sont présentées au chapitre 4.

Suite à cette concavification, la fonction objectif est maintenant concave. On procède donc à la même méthode de résolution que celle du problème statique d'optimisation du portefeuille présentée à la section 2.2 en utilisant la fonction concavifiée 3.4. Ainsi, on obtient ainsi la solution au problème d'optimisation (3.3).

Théorème 3.1 (Théorème 1 de Carpenter (2000)). *Soit $\tilde{h} : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :*

$$\tilde{h}(y, d) = (I(y/a) - K) / a + d \quad \text{pour tout } y > 0 \text{ et } d > 0. \quad (3.5)$$

Supposons également que

$$\mathcal{X}(\lambda) := \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\xi_T \tilde{h}(\lambda \xi_T, D_T) \mathbf{1}_{\{\tilde{h}(\lambda \xi_T, D_T) > \hat{x}(D_T)\}} \right] < \infty \text{ pour tout } \lambda > 0. \quad (3.6)$$

Il existe un unique $\lambda^ > 0$ tel que $\mathcal{X}(\lambda^*) = x_{ini}$ et l'unique valeur optimale du portefeuille sur le droit contingent d'une option d'achat est*

$$X_T^* = \tilde{h}(\lambda^* \xi_T, D_T) \mathbf{1}_{\{\tilde{h}(\lambda^* \xi_T, D_T) > \hat{x}(D_T)\}}, \quad (3.7)$$

où $\mathbf{1}_\eta$ est la fonction indicatrice de l'événement η .

Également, comme mentionné à la proposition 2.1, la valeur de λ^* est déterminée à partir de la contrainte budgétaire.

Tout d'abord, définissons le concept de sous-gradient et présentons le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires qui sont utilisés dans la preuve du théorème 3.1.

Définition 3.1 (Inégalité du sous-gradient (section 23 de Rockafellar (1970))). *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ une fonction convexe définie au point x_0 . Un vecteur $\eta \in \mathbb{R}^n$ est appelé sous-gradient de f en x_0 lorsque*

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle \eta, x - x_0 \rangle, \quad \text{pour tout } x \in \text{dom}(f), \quad (3.8)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire attribué à l'espace $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 3.1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires). *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I . Posons a et b deux points de I et k un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors, il existe un unique point e compris entre a et b tel que $f(e) = k$.*

Preuve du théorème 3.1. La raison pour laquelle la valeur terminale optimale du portefeuille ne se situe pas dans l'intervalle $(0, D_T]$ provient du contexte financier. En effet, les valeurs terminales de portefeuille sur cet intervalle engendrent la même utilité qu'un portefeuille à l'échéance de valeur nulle ($U(K)$) en engendrant des coûts initiaux non nuls.

Par ailleurs, il importe de justifier le fait que X_T^* ne se situera, en fait, jamais dans l'intervalle $(0, \hat{x}(D_T)]$ et que cette solution est unique. La preuve de l'unicité de la solution est essentiellement tirée de l'annexe de Carpenter (2000).

Le théorème 3.1 est obtenu par le résultat (2.4) de la proposition 2.1. Ainsi, la valeur terminale du droit contingent optimal est définie par l'inverse de la dérivée de la fonction d'utilité de la fonction concavifiée. Nous nous intéressons donc au sous-différentiel de la fonction concavifiée $\tilde{u}(\cdot, d)$ (présentée en (3.4)) définie sur $[0, \infty) \times (0, \infty)$ par :

$$\tilde{u}'(x, d) = \begin{cases} [u'(\hat{x}(d), d), \infty) & \text{pour } x = 0, \\ \{u'(\hat{x}(d), d)\} & \text{pour } 0 < x \leq \hat{x}(d), \\ \{u'(x, d)\} & \text{pour } x > \hat{x}(d). \end{cases} \quad (3.9)$$

Similairement au concept du gradient d'une fonction (la dérivée par rapport à un

vecteur ou une direction), le sous-différentiel (*subdifferential*) de $u(\cdot, d)$ au point x_0 représente l'ensemble de tous les sous-gradients en ce point x_0 tel que défini à la section 23 de Rockafellar (1970). Contrairement au gradient, le sous-différentiel s'applique même dans le cas où la fonction n'est pas différentiable en tous points ; ce qui est le cas des fonctions $\tilde{u}(x, d)$ et $u(x, d)$ qui ne sont pas différentiables en $x = 0$. Dans le cas où la fonction est différentiable au point x_0 et finie dans l'entourage de x_0 , le sous-différentiel contient un seul élément, soit le gradient en ce point x_0 .

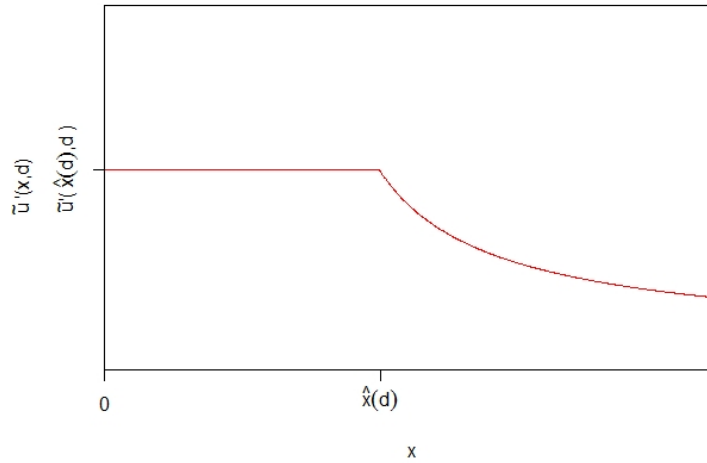


Figure 3.3: Dérivée de la fonction concavifiée $\tilde{u}$

Posons, maintenant, i comme étant l'inverse de $\tilde{u}'(x, d)$ défini en (3.9) et illustré à la figure 3.3. On a donc $i : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ donnée par :

$$i(y, d) = [(I(y/a) - K) / a + d] \mathbb{1}_{\{y < \tilde{u}'(\bar{x}, d)\}}. \quad (3.10)$$

Ainsi, à partir de la définition de i en (3.10) et avec un léger abus de notation on a,

en fait, que :

$$y \in \tilde{u}'(i(y, d), d), \quad \text{pour tout } d > 0. \quad (3.11)$$

Finalement, par le résultat (2.4) de la proposition 2.1 on a $Y^* = i(\lambda^* \xi_T, d)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} Y^* &= i(\lambda^* \xi_T, d) \\ &= [(I(\lambda^* \xi_T/a) - K) / a + d] \mathbb{1}_{\{\lambda^* \xi_T < \tilde{u}'(\tilde{x}, d)\}} \\ &= [(I(\lambda^* \xi_T/a) - K) / a + d] \mathbb{1}_{\{\lambda^* \xi_T < aU'(a(\tilde{x}-d)^+ + K)\}} \\ &= [(I(\lambda^* \xi_T/a) - K) / a + d] \mathbb{1}_{\{(I(\lambda^* \xi_T/a) - K) / a + d > \tilde{x}\}}. \end{aligned}$$

Ainsi, par la fonction indicatrice, on voit que nécessairement Y^* prendra une valeur non-nulle uniquement lorsque $Y^* > \tilde{x}$. Finalement, à partir de la définition 1.15, la complétude de marché du modèle de Black-Scholes nous permet de répliquer $\mathbb{P}$ -p.s. la valeur optimale du droit contingent Y^* . Ainsi, $Y^* = X_T^*$ $\mathbb{P}$ -p.s.

Maintenant, vérifions que la valeur du portefeuille d'investissement optimal X_T^* est unique.

Premièrement, à partir de l'équation (3.8) de la définition du sous-gradient à la définition 3.1 appliquée pour une fonction concave dans $\mathbb{R}$, pour chaque $y \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ et pour $m \in \tilde{u}'(x, d)$ tel que défini en (3.9) :

$$\tilde{u}(y, d) - \tilde{u}(x, d) \leq m(y - x). \quad (3.12)$$

En d'autres termes, le sous-différentiel évalué au point x est supérieur ou égal à la pente de la corde de la fonction concavifiée évaluée entre deux points x et y . Ce fait

est illustré à la figure 3.2 et découle de la définition de la fonction concavifiée (définie à la section 3.1) ainsi que du fait que l'opposée d'une fonction convexe est concave. De plus, l'inégalité de (3.12) est stricte lorsque $x > \hat{x}(d)$ et $y \neq x$ puisque $\tilde{u}$ est strictement concave pour $x > \hat{x}(d)$.

Deuxièmement, on remarque que $q(\lambda) = \mathbb{E}^\mathbb{P}[\xi_T i(\lambda \xi_T, D_T)]$ est une fonction strictement décroissante en termes du multiplicateur de Lagrange λ . Puisque $q(\lambda) \rightarrow \infty$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$ et $q(\lambda) \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (corollaire 3.1) confirme qu'il existe un unique λ^* tel que $x_{ini} = q(\lambda^*)$.

Troisièmement, à partir du résultat (2.4) de la proposition 2.1 ainsi que de la complétude de marché du modèle de Black-Scholes, on a $X_T^* = i(\lambda^* \xi_T, D_T)$. Posons $\hat{Y}$ comme un droit contingent atteignable qui n'est pas $\mathbb{P}$ -p.s. égale à X_T^* . On peut démontrer que la valeur terminale $\hat{Y}$ engendre une utilité espérée strictement inférieure à celle engendrée par X_T^* et ainsi démontrer l'unicité de X_T^* .

$$\mathbb{E}^\mathbb{P} [u(\hat{Y}, D_T) - u(X_T^*, D_T)] = \mathbb{E}^\mathbb{P} [u(\hat{Y}, D_T) - \tilde{u}(X_T^*, D_T)] \quad (3.13)$$

$$\leq \mathbb{E}^\mathbb{P} [\tilde{u}(\hat{Y}, D_T) - \tilde{u}(X_T^*, D_T)] \quad (3.14)$$

$$< \mathbb{E}^\mathbb{P} [\lambda^* \xi_T (\hat{Y} - X_T^*)] \quad (3.15)$$

$$= \lambda^* (\mathbb{E}^\mathbb{P} [\xi_T \hat{Y}] - x_{ini}) = 0. \quad (3.16)$$

(3.13) est justifiée par le fait que la fonction d'utilité et la fonction d'utilité concavifiée sont de mêmes valeurs pour tout $x \geq \hat{x}(D_T)$. (3.14) provient de la définition de fonction concavifiée présentée à la section 3.1. (3.15) est justifiée par les équations (3.12) et (3.11) évaluées en X_T^* . Finalement, (3.16) découle du résultat du théorème 3.1 ainsi que de la définition 1.14 d'atteignabilité d'un droit contingent appliqué dans le contexte d'optimisation (D). On obtient donc que $\mathbb{E}^\mathbb{P} [u(X_T^*, D_T)] > \mathbb{E}^\mathbb{P} [u(\hat{Y}, D_T)]$.



La détermination du multiplicateur de Lagrange optimal λ^* du théorème 3.1 ainsi que sa relation avec x_{ini} sont présentées à l'annexe B.2.

3.2 Problème d'optimisation appliqué au fonds distinct

Suite à la tendance, ces dernières années, des bas taux d'intérêt, les fonds distincts sont devenus une option d'épargne très primée. En effet, un fonds distinct représente une alternative d'investissement qui comprend une garantie, notée G , en cas de décès ou à l'échéance. En pensant à la période de pandémie mondiale de 2020 où les marchés boursiers connaissent des baisses fulgurantes au printemps 2020⁷, cette option d'investissement s'avère être très avantageuse pour les assurés.

Dans notre cas, on s'intéresse particulièrement à un produit financier offrant une garantie du montant perçu par l'assuré uniquement à l'échéance (*guaranteed minimum maturity benefit*) avec lequel l'assuré est certain de recevoir au minimum le montant de cette garantie à l'échéance. De ce fait, l'assureur s'engage à déboursier la différence entre le montant de cette garantie et la valeur du fonds distinct à l'échéance dans le cas où la valeur du fonds est inférieure à cette garantie. On considère également que l'assureur est toujours dans la possibilité d'honorer ses engagements et que l'assuré ne retire pas son investissement avant la date d'échéance. Finalement, afin de simplifier le problème d'optimisation, on considère que le fonds distinct comporte un seul assuré ayant une aversion au risque.

7. McCabe et Ostroff (2020); Enrich (2020); Lynch *et al.* (2020)

3.2.1 Dynamique du fonds et des actifs suite à l'incorporation de frais

On note le processus stochastique qui représente la valeur d'un fonds distinct par $F := \{F_t, 0 \leq t \leq T\}$. Par ailleurs, le gestionnaire d'investissement du fonds distinct détermine la proportion ν_t investie au temps t dans un actif risqué dont la valeur est représentée par la variable aléatoire S_t , et $(1 - \nu_t)$ dans un actif sans risque dont la valeur est représentée par la variable aléatoire B_t , dont les solutions des EDS sont représentées en (1.17) et (1.16) respectivement. On note F^ν le processus stochastique de la valeur du fonds sous la stratégie $\nu := \{\nu_t, 0 \leq t \leq T\}$.

Un taux de frais est appliqué au fonds tout au long de la période d'investissement $[0, T]$ dans le but principal de financer la garantie du fonds distinct. On note le processus stochastique représentant le montant total de frais prélevé du fonds distinct par $C := \{C_t, 0 \leq t \leq T\}$. Ensuite, nous nous intéressons à la décomposition du montant total de frais C_t en deux parties distinctes : la portion de frais proportionnelle au montant investi dans l'actif risqué liée au taux c_s , et la portion de frais proportionnelle au montant total du fonds liée au taux c_f . De plus, $c_s, c_f \geq 0$ sont des constantes. Ainsi, la dynamique du taux de frais total est :

$$dC_t = c_s \nu_t F_t^\nu dt + c_f F_t^\nu dt = (c_s \nu_t + c_f) F_t^\nu dt. \quad (3.17)$$

Parallèlement à la dynamique du portefeuille en (1.22) présentée à la section 1.3.2, l'équation différentielle stochastique du fonds distinct (comportant des frais prélevés) est représentée par

$$dF_t^\nu = \Pi_t dS_t + \Gamma_t dB_t - dC_t$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\nu_t F_t^\nu}{S_t} dS_t + \frac{(1 - \nu_t) F_t^\nu}{B_t} dB_t - dC_t \\
&= \nu_t \mu F_t^\nu dt + r F_t^\nu dt + \nu_t \sigma F_t^\nu dW_t^\mathbb{P} - dC_t
\end{aligned} \tag{3.18}$$

où $F_0^\nu = f_{ini} \in \mathbb{R}$ et avec les dynamiques dB_t et dS_t présentées en (1.14) et (1.15) respectivement. La seconde égalité a été obtenue à partir des définitions des processus Π et Γ de la section 1.3.2 appliquées dans le contexte de fonds distinct. L'ajout de frais au fonds distinct fait en sorte que l'équation différentielle stochastique ne correspond pas directement à celle d'une stratégie autofinancée comme présentée à la définition 1.21.

En substituant la dynamique du montant de frais total (3.17) dans l'équation (3.18), on obtient :

$$dF_t^\nu = (\nu_t(\mu - c_s) + r - c_f) F_t^\nu dt + \nu_t \sigma F_t^\nu dW_t^\mathbb{P}. \tag{3.19}$$

Enfin, on impose que le taux de frais appliqué à l'actif risqué soit inférieur au taux de rendement excédentaire ; c'est-à-dire que $c_s < \mu$. Ainsi, on enlève la possibilité d'avoir un taux de frais supérieur à l'excès de rendement produit par l'actif risqué. En posant

$$\tilde{\alpha} := \alpha - c_s - c_f, \quad \tilde{r} := r - c_f, \quad \tilde{\mu} := \tilde{\alpha} - \tilde{r},$$

l'équation (3.19) peut être réécrite comme

$$dF_t^\nu = (\nu_t \tilde{\mu} + \tilde{r}) F_t^\nu dt + \nu_t \sigma F_t^\nu dW_t^\mathbb{P}. \tag{3.20}$$

Ainsi, l'équation différentielle stochastique du fonds en (3.20) est de forme comparable à celle de l'équation d'un portefeuille autofinancé en (1.22). De plus, en posant

$$\tilde{\theta} := \frac{\tilde{\mu}}{\sigma}, \quad (3.21)$$

on obtient le facteur d'actualisation stochastique ajusté aux frais appliqués au fonds distinct :

$$\tilde{\xi}_t := \exp \left\{ - \left(\tilde{r} + \frac{\tilde{\theta}^2}{2} \right) t - \tilde{\theta} W_t^{\mathbb{P}} \right\}. \quad (3.22)$$

Dans le même ordre d'idées que l'équation (1.27), par la formule d'Itô-Doeblin pour mouvement brownien, on obtient que la dynamique de $\tilde{\xi}_t$ est donnée par :

$$d\tilde{\xi}_t := -\tilde{r}dt - \tilde{\theta}dW_t^{\mathbb{P}}. \quad (3.23)$$

En posant $\tilde{B}$ et $\tilde{S}$ tels que

$$d\tilde{B}_t = \tilde{r}\tilde{B}_tdt, \quad \tilde{B}_0 = 1, \quad (3.24)$$

et

$$d\tilde{S}_t = \tilde{\alpha}\tilde{S}_tdt + \sigma\tilde{S}_tdW_t^{\mathbb{P}}, \quad \tilde{S}_0 = 1, \quad (3.25)$$

donc

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp \left\{ \left(\tilde{\alpha} - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t^{\mathbb{P}} \right\} \quad \mathbb{P} - p.s., \quad (3.26)$$

il est possible de démontrer que le processus $\tilde{\xi}\tilde{S} = \{\tilde{\xi}_t\tilde{S}_t, 0 \leq t \leq T\}$ est une martingale sous la mesure $\mathbb{P}$ (la démonstration est placée à l'annexe C). On obtient ainsi un nouveau marché financier ajusté aux frais, équivalent au marché du modèle de Black-Scholes et donc complet.

Parallèlement à l'équation (1.28), il est également possible d'exprimer $\tilde{\xi}_t$ en fonction de $\tilde{S}_t$:

$$\tilde{\xi}_t = \left(\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_0} \right)^{-\frac{\tilde{\theta}}{\sigma}} \exp \left\{ \left(\frac{\tilde{\theta}\tilde{\alpha}}{\sigma} - \frac{\tilde{\theta}\sigma}{2} - \tilde{r} - \frac{\tilde{\theta}^2}{2} \right) t \right\}. \quad (3.27)$$

La figure 3.4 illustre la relation entre $\tilde{\xi}_t$ et $\tilde{S}_t$ et est comparable à la figure 1.4 qui illustre, quant à elle, la relation entre ξ_t et S_t .

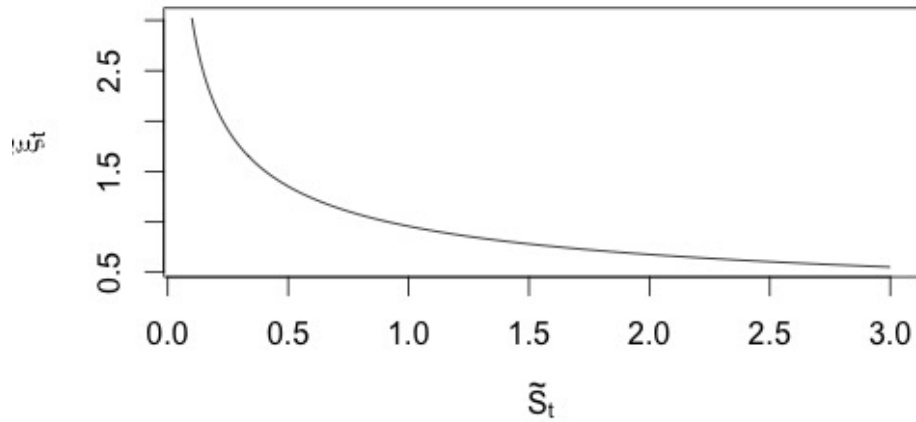


Figure 3.4: Relation entre $\tilde{\xi}_t$ et $\tilde{S}_t$

3.2.2 Problème d'optimisation dynamique appliqué au fonds distinct

En s'intéressant au point de vue de l'assuré, on cherche à maximiser l'utilité espérée du montant perçu à l'échéance par ce dernier avec un fonds distinct sachant qu'un

montant initial de f_{ini} est investi. Afin de pouvoir appliquer la méthode martingale présentée au chapitre 2, nous considérons le marché fictif présenté à la section 3.2.1. En effet, ce marché ajusté aux frais du fonds distinct correspond à un marché de Black-Scholes modifié et nous permet d'exprimer le problème d'optimisation sous une forme similaire au problème (P). On s'intéresse, d'abord, à l'ensemble des stratégies d'investissement admissibles sous le modèle ajusté aux frais de la section 3.2.1, $\tilde{\mathcal{A}}(f_{ini})$, tel que

$$\tilde{\mathcal{A}}(f_{ini}) := \left\{ \nu : \nu_t \text{ est } \mathcal{F}_t \text{-mesurable, } F_0^\nu = f_{ini}, F_t^\nu \geq 0, \int_0^T (F_t^\nu \nu_t)^2 dt < \infty \text{ } \mathbb{P} - \text{p.s.} \right\}.$$

Le modèle du fonds distinct s'apparente au modèle de l'équation (3.1), mais où les paramètres sont fixés à $a = 1$, $D_T = G$ et $K = G$. De ce fait, le problème d'optimisation (3.3) appliqué dans le contexte d'un fonds distinct est :

$$\max_{\nu \in \tilde{\mathcal{A}}(f_{ini})} \mathbb{E}^\mathbb{P} \left[U((F_T^\nu - G)^+ + G) \right], \quad (\tilde{P})$$

avec $U(\cdot)$ une fonction d'utilité présentée à la définition 1.1 et où le montant de la garantie du fonds distinct à l'échéance est noté par G .

En considérant le marché complet fictif ajusté aux frais, il est possible d'appliquer l'approche martingale du chapitre 2 et représenter le problème dynamique $(\tilde{P})$ par un problème d'optimisation statique ainsi qu'un problème de représentation.

3.2.3 Résolution du problème statique appliqué au fonds distinct

Tout d'abord, on obtient le problème statique dérivé du problème $(\tilde{P})$ en se penchant particulièrement sur le droit contingent d'un fonds distinct maximisant l'utilité espérée :

$$\max_{\tilde{Y} \in \tilde{\mathcal{Y}}(f_{ini})} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[U \left((\tilde{Y} - G)^+ + G \right) \right], \quad (\tilde{D})$$

$$\tilde{\mathcal{Y}}(f_{ini}) := \left\{ \tilde{Y} : \tilde{Y} \geq 0 \text{ } \mathbb{P} - \text{p.s.}, \tilde{Y} \text{ est } \mathcal{F}_T - \text{mesurable}, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} \tilde{Y} \right] \leq f_{ini} \right\}.$$

À l'aide de la technique de résolution d'un problème d'optimisation statique en marché complet de la section 2.2, nous sommes en mesure d'obtenir la valeur du droit contingent optimal.

Proposition 3.1 (Proposition 3.1 de MacKay et Ocejo (2019)). *Soit $U(\cdot)$ une fonction d'utilité telle que présentée à la définition 1.1. Par le théorème 3.1, la solution au problème d'optimisation statique :*

$$\max_{\tilde{Y} \in \tilde{\mathcal{Y}}(f_{ini})} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[U \left((\tilde{Y} - G)^+ + G \right) \right] \quad \text{s.c.} \quad \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\tilde{\xi}_T \tilde{Y} \right] \leq F_0 \quad (3.28)$$

est donnée par

$$\tilde{Y}^* = I(\lambda^* \tilde{\xi}_T) \mathbb{1}_{\{\lambda^* \tilde{\xi}_T < \hat{y}\}}, \quad (3.29)$$

où λ^* est tel que $\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\tilde{\xi}_T \tilde{Y}^* \right] = F_0$ et $\hat{y} \in (0, U'(G))$ est le point de concavification faisant en sorte que

$$\frac{U((\hat{y} - G)^+ + G) - U(G)}{\hat{y}} = U'(\hat{y}).$$

Démonstration. On remarque que la proposition 3.1 est un cas particulier du théo-

rème 3.1 où $a = 1$ et $C_T = K = G$ exprimé en termes de $\hat{y} = U'(\hat{f}(G))$, où $\hat{f}(G)$ est le point de concavification. $\square$

3.2.4 Problème de représentation appliqué au fonds distinct

La deuxième partie de la méthode de résolution du problème $(\tilde{P})$ consiste à résoudre le problème de représentation dans le contexte du marché ajusté aux frais de la section 3.2.1. Nous cherchons donc la proportion optimale du fonds distinct $\nu^* = \{\nu_t^*, 0 \leq t \leq T\}$ investie dans l'actif risqué engendrant la valeur du fonds à l'échéance répliquant $\mathbb{P} - p.s.$ le droit contingent $\tilde{Y}^*$ obtenu à la proposition 3.1.

Pour faire suite aux résultats obtenus à la section 2.4, nous considérons la fonction d'utilité isoélastique présentée en (1.3) dont l'inverse de la dérivée est présentée en (2.14).

Nous trouvons, tout d'abord, l'expression de la variable aléatoire représentant la valeur optimale du fonds distinct actualisée au temps t en utilisant la propriété martingale du processus stochastique $\tilde{\xi}F := \{\tilde{\xi}_t F_t, 0 \leq t \leq T\}$ sous la mesure $\mathbb{P}$. De ce fait, à partir de la valeur optimale du fonds distinct à l'échéance obtenue en (3.29) et en posant $F_T^{\nu^*} \equiv F_T^*$ pour alléger la notation, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_t F_t^* &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\tilde{\xi}_T F_T^* | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\tilde{\xi}_T (\lambda^* \tilde{\xi}_T)^{-\frac{1}{\gamma}} \mathbf{1}_{\{(\lambda^* \tilde{\xi}_T)^{-1/\gamma} > \hat{f}(D_T)\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[(\lambda^*)^{\frac{-1}{\gamma}} \tilde{\xi}_T^{(1-\frac{1}{\gamma})} \mathbf{1}_{\{\lambda^* \tilde{\xi}_T < \hat{f}(D_T)^{-\gamma}\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[(\lambda^*)^{\frac{-1}{\gamma}} \left(\frac{\tilde{\xi}_t \tilde{\xi}_T}{\tilde{\xi}_t} \right)^{(1-\frac{1}{\gamma})} \mathbb{1}_{\left\{ \lambda^* \frac{\xi_T}{\xi_t} < \frac{\hat{f}(D_T)^{-\gamma}}{\xi_t} \right\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= (\lambda^*)^{-\frac{1}{\gamma}} \tilde{\xi}_t^{(1-\frac{1}{\gamma})} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\left(\frac{\tilde{\xi}_T}{\tilde{\xi}_t} \right)^{(1-\frac{1}{\gamma})} \mathbb{1}_{\left\{ \frac{\tilde{\xi}_T}{\tilde{\xi}_t} < \frac{\hat{f}(D_t)^{-\gamma}}{\lambda^* \xi_t} \right\}} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

À partir de la définition de $\tilde{\xi}_t$ en (3.22), on a que conditionnellement à $\mathcal{F}_t$:

$$\frac{\tilde{\xi}_T}{\tilde{\xi}_t} \stackrel{\mathcal{D}}{=} e^{-Z} \quad \text{où} \quad Z \sim \mathcal{N} \left(\left(\tilde{r} + \frac{\tilde{\theta}^2}{2} \right) (T-t), \tilde{\theta}^2 (T-t) \right). \tag{3.31}$$

Ainsi, l'équation (3.30) peut être réécrite comme :

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}_t F_t^* &= (\lambda^*)^{-\frac{1}{\gamma}} \tilde{\xi}_t^{(1-\frac{1}{\gamma})} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^{-Z(1-\frac{1}{\gamma})} \mathbb{1}_{\left\{ Z < \ln \left[\frac{\hat{f}(D_t)^{-\gamma}}{\lambda^* \xi_t} \right] \right\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= (\lambda^*)^{-\frac{1}{\gamma}} \tilde{\xi}_t^{(1-\frac{1}{\gamma})} \Phi \left(\frac{\left(\tilde{r} + \frac{\tilde{\theta}^2}{2} \right) (T-t) - \tilde{\theta}^2 (T-t) (1 - \frac{1}{\gamma}) + \ln \left[\frac{\hat{f}(D_t)^{-\gamma}}{\xi_t \lambda^*} \right]}{\tilde{\theta} \sqrt{T-t}} \right) \\
&\quad \cdot e^{-\left(\tilde{r} + \frac{\tilde{\theta}^2}{2} \right) (T-t) (1-\frac{1}{\gamma}) + \frac{\tilde{\theta}^2}{2} (T-t) (1-\frac{1}{\gamma})^2}
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité a été obtenue par la proposition B.1.

Finalement, on note respectivement par $\phi(\cdot)$ et Φ la densité et la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite. On obtient que

$$F_t^* = (\lambda^* \tilde{\xi}_t)^{-\frac{1}{\gamma}} \Phi \left(j(\tilde{\xi}_t, t) \right) e^{-\left(\tilde{r} + \frac{\tilde{\theta}^2}{2} \right) (T-t) (1-\frac{1}{\gamma}) + \frac{\tilde{\theta}^2}{2} (T-t) (1-\frac{1}{\gamma})^2}, \tag{3.32}$$

où

$$j(\tilde{\xi}_t, t) = \frac{\left(\tilde{r} + \tilde{\theta}^2 \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2}\right)\right) (T - t) + \ln \left[\frac{\hat{f}(D_t)^{-\gamma}}{\tilde{\xi}_t \lambda^*} \right]}{\tilde{\theta} \sqrt{T - t}}.$$

Ensuite, en dérivant l'expression de la valeur terminale optimale par rapport à la variable $\tilde{\xi}_t$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_t^*}{\partial \tilde{\xi}_t} &= e^{-\left(\tilde{r} + \frac{\tilde{\theta}^2}{2}\right)(T-t)(1-\frac{1}{\gamma}) + \frac{\tilde{\theta}^2}{2}(T-t)(1-\frac{1}{\gamma})^2} \\ &\quad \cdot \left[\left(-\frac{1}{\gamma}\right) (\lambda^* \tilde{\xi}_t)^{-(1+\frac{1}{\gamma})} \Phi(j(\tilde{\xi}_t, t)) - (\lambda^* \tilde{\xi}_t)^{-\frac{1}{\gamma}} \phi(j(\tilde{\xi}_t, t)) \frac{1}{\tilde{\xi}_t \tilde{\theta} \sqrt{T-t}} \right] \\ &= -F_t^* \tilde{\xi}_t^{-1} \left[\left(\frac{1}{\gamma}\right) + \frac{\phi(j(\tilde{\xi}_t, t))}{\Phi(j(\tilde{\xi}_t, t))} \frac{1}{\tilde{\theta} \sqrt{T-t}} \right]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Par ailleurs, à partir de la définition de $\tilde{\xi}_t$ en (3.22), on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{\xi}_t}{\partial W_t} = -\tilde{\xi}_t \tilde{\theta}. \quad (3.34)$$

Le résultat (2.13) de la méthode de résolution du problème de représentation indique que la proportion optimale ν_t^* investie dans l'actif risqué au temps t est :

$$\begin{aligned} \nu_t^* &= \frac{1}{F_t^* \sigma} \frac{\partial F_t^*}{\partial W_t} \\ &= \frac{1}{F_t^* \sigma} \frac{\partial F_t^*}{\partial \tilde{\xi}_t} \frac{\partial \tilde{\xi}_t}{\partial W_t} \\ &= \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\tilde{\theta}}{\gamma} + \frac{\phi(j(\tilde{\xi}_t, t))}{\Phi(j(\tilde{\xi}_t, t))} \frac{1}{\sqrt{T-t}} \right], \end{aligned} \quad (3.35)$$

où la deuxième égalité est obtenue par la règle de dérivation en chaîne et la troisième égalité est obtenue en substituant les équations (3.33) et (3.34).

CHAPITRE IV

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

MacKay et Ocejó (2019) s'intéressent à l'application du problème de maximisation de l'utilité de l'assuré dans le contexte appliqué d'un fonds distinct et se penchent particulièrement sur la tarification équitable.

Dans ce présent chapitre, on s'interroge sur l'applicabilité des stratégies et résultats obtenus à la section 3.2.4. Également, on approfondit la section d'illustrations numériques pour l'optimisation sans contraintes de MacKay et Ocejó (2019). Finalement, on analyse l'impact du comportement d'un assuré (choix d'investissement, niveau de garantie du fonds distinct, échéance du fonds distinct et niveau d'aversion au risque).

Dans l'optique d'appliquer les résultats obtenus à la section 3.2.4, on procède à 100 000 simulations de Monte Carlo du marché financier et compare différentes stratégies d'investissement. Pour ce faire, les paramètres de base sont fixés de façon à correspondre avec ceux de MacKay et Ocejó (2019), soit $x_{ini} = 1$, $f_{ini} = 1$, $r = 0.02$, $\alpha = 0.04$, $\sigma = 0.2$ et $T = 10$ ans. Tel que justifié à la section 2.4, on considère qu'un rééquilibrage hebdomadaire du portefeuille est suffisant. On pose la garantie du fonds distinct égale au montant initial investi, soit $G = f_{ini} = 1$. De plus, on considère une fonction d'utilité isoélastique dont on fixe un paramètre d'aversion au

risque modérée de $\gamma = 3$ sauf dans le cas où il est spécifié autrement. Des explications supplémentaires concernant le niveau d'aversion au risque sont présentées plus loin dans ce chapitre.

Par ailleurs, nous nous concentrons sur le même taux de frais total que MacKay et Ocejo (2019), soit en s'assurant que $c_s + c_f = 2.448\%$, et que $c_s < \mu = 2.000\%$ tel que mentionné à la section 3.2.1. Parallèlement au principe de contrainte budgétaire présenté en (1.30), la tarification équitable du fonds distinct implique de trouver le taux de frais total qui satisfait :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} \left((F_T^\nu - G)^+ + G \right) \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\xi_T \left((F_T^\nu - G)^+ + G \right) \right] = f_{ini}, \quad (4.1)$$

avec ξ_T défini en (1.26) et f_{ini} représentant le montant initial investi dans le fonds distinct. Le taux de frais intervient dans le calcul de la valeur du fonds à maturité F_T^ν . Le cas spécifique lorsque le portefeuille est uniquement investi dans l'actif risqué est la stratégie qui pourrait sembler la plus dispendieuse pour l'assureur, soit celle qui l'expose au plus grand risque. Le taux de frais total équitable lorsque le portefeuille est uniquement investi dans l'actif risqué ($\nu_t = 100\%$ pour tout $t \in [0, T]$) est 2.448% . Les détails du calcul de l'obtention du taux de frais de 2.448% sont présentés à l'annexe D.

Fait à noter, le facteur d'actualisation stochastique ajusté $\tilde{\xi}_t$ utilisé à la section 3.2.1 est simplement un outil mathématique nous permettant d'appliquer la méthode martingale dans le contexte du fonds distinct. La tarification du fonds distinct se fait, quant à elle, sous la mesure neutre au risque $\mathbb{Q}$ comme défini par la théorie de tarification de produits financiers présentée à la section 1.3.4. Ainsi, les frais interviennent uniquement dans la variable aléatoire F_T^ν dans l'équation de tarification équitable du

fonds distinct (4.1).

4.1 Stratégies d'investissement du fonds distinct

On s'intéresse, tout d'abord, à la stratégie d'investissement optimale du problème d'optimisation appliqué au fonds distinct $(\tilde{P})$, $\nu^* := \{\nu_t^*, 0 \leq t \leq T\}$, présentée en (3.35). Comme mentionné par Carpenter (2000), dans le cas où $t \rightarrow T$ et que ξ_t (ou $\tilde{\xi}_t$) est suffisamment grand, soit quand S_t est très petit, la proportion investie dans l'actif risqué est infiniment grande : $\nu_t^* \rightarrow \infty$.

Afin de se mettre dans un contexte financier plus réaliste et d'éviter les erreurs computationnelles, nous considérons le cas où ν_t est borné pour tout $t \in [0, T]$ à 2, c'est-à-dire que $\nu_t \leq 2$ pour tout $t \in [0, T]$. On limite ainsi le montant emprunté dans l'actif sans risque (i.e. lorsque $\nu_t > 1$) de plus de la moitié de la valeur totale investie.

Également, comme soulevé par Lin *et al.* (2017), en pratique, il existe des réglementations de solvabilité en ce qui concerne la proportion de la richesse de l'assureur investie dans des actifs risqués. De plus, dans le contexte d'un fonds distinct en pratique, l'utilisation de l'effet de levier n'est pas réaliste. En effet, les montants initiaux investis de plusieurs assurés sont mis en communs et le détenteur du fonds distinct s'occupe de la gestion de placement de ce montant total. Il n'y a donc aucune possibilité d'effet de levier lors de la période d'investissement.

En fait, en simulant des trajectoires de la stratégie d'investissement optimale du fonds distinct en (3.35), il est possible de comparer la proportion du temps où la proportion investie dans l'actif risqué (ν_t) dépasse les bornes de 2 et de 1 pour

différentes combinaisons de frais. Les résultats de cette comparaison sont démontrés au tableau 4.1.

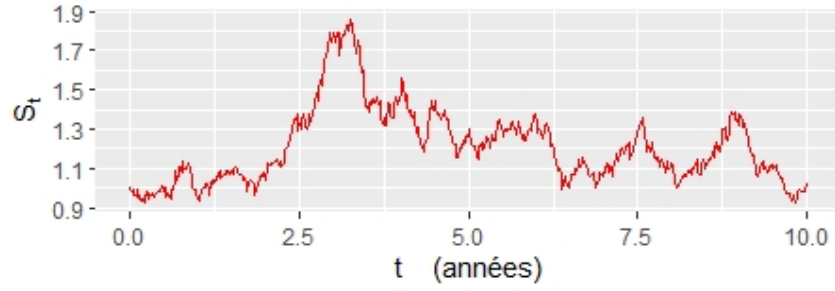
$(\forall t \in [0, T])$	Fréquence (%)			
	Aucun frais	$c_s = 0.000\%$ $c_f = 2.448\%$	$c_s = 1.224\%$ $c_f = 1.224\%$	$c_s = 1.800\%$ $c_f = 0.648\%$
$\nu_t \geq 2$	18.3	30.9	24.8	21.9
$\nu_t \geq 1$	48.1	69.4	57.0	47.6

Tableau 4.1: Contraintes appliquées à la stratégie optimale en (3.35)

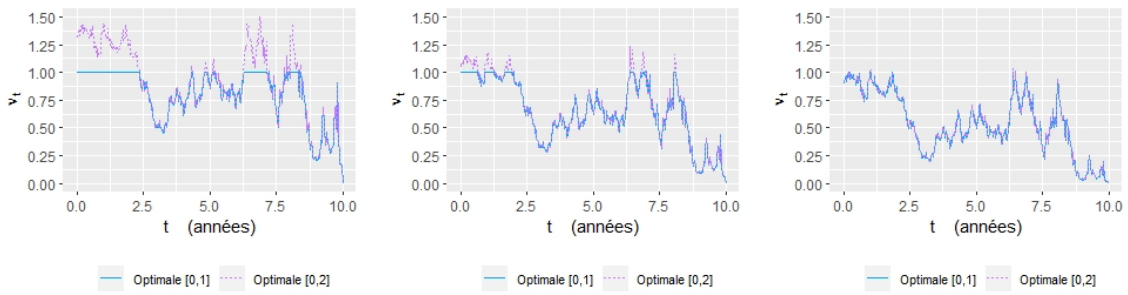
On s'aperçoit que la proportion investie dans l'actif risqué dépasse fréquemment les bornes de 2 et de 1. Aussi, plus le taux de frais appliqué sur l'actif risqué (c_s) est élevé, moins il est intéressant d'entreprendre le risque d'investir dans l'actif risqué, et donc plus les proportions ν_t^* pour tout $t \in [0, T]$ sont faibles. Dans ce cas, la stratégie optimale est moins souvent limitée par la contrainte computationnelle de $\nu_t \leq 2$ ou par l'interdiction de l'utilisation de l'effet de levier. Ce fait est illustré à la figure 4.1 pour une simulation de l'actif risqué.

Afin d'alléger la notation, nous notons :

- *Optimale* : le cas où les valeurs terminales du fonds distinct F_T ont été obtenues par la solution du problème statique (présentée à la proposition 3.1) ;
- *Optimale* $[0, 2]$: le cas où les valeurs terminales du fonds distinct $F_T^{\nu^{(2)}}$ ont été obtenues par la stratégie optimale en (3.35) limitée à une valeur inférieure ou égale à 2 ($\nu_t^{(2)} = \min(\nu_t^*, 2)$) pour tout $t \in [0, T]$;
- *Optimale* $[0, 1]$: le cas où les valeurs terminales du fonds distinct $F_T^{\nu^{(1)}}$ ont été obtenues par la stratégie optimale en (3.35), mais où l'utilisation d'effet de levier a été interdite ($\nu_t^{(1)} = \min(\nu_t^*, 1)$).



(a) Simulation de l'actif risqué

(b) $c_s = 0.000\%$ et
 $c_f = 2.448\%$ (c) $c_s = 1.224\%$ et
 $c_f = 1.224\%$ (d) $c_s = 1.800\%$ et
 $c_f = 0.648\%$ **Figure 4.1:** Incidence du taux de frais sur les stratégies *Optimale* $[0, 2]$ et *Optimale* $[0, 1]$ pour une simulation

Les stratégies *Optimale* $[0, 1]$ et *Optimale* $[0, 2]$ nous permettent en quelque sorte d'appliquer la stratégie optimale en (3.35) dans un contexte réaliste. Bien entendu, la stratégie optimale en (3.35) à laquelle une contrainte d'investissement est appliquée (*Optimale* $[0, 1]$ et *Optimale* $[0, 2]$), n'est sans doute plus optimale dans le contexte d'optimisation en ajoutant initialement la restriction d'investissement. Le lecteur est référé à la section 6 de Lin *et al.* (2017) qui étudient numériquement l'ajout de contrainte sur l'investissement dans le contexte d'optimisation d'un produit d'assurance lié à la performance de marchés boursiers.

Il est intéressant de comparer la performance des stratégies *Optimale*, *Optimale* $[0, 2]$ et *Optimale* $[0, 1]$ à la stratégie jugée plus traditionnelle où la proportion investie dans l'actif risqué est constante tout au long de la durée de l'investissement. On identifie cette stratégie pour les différentes proportions constantes $\nu_t = 100\%$, $\nu_t = 60\%$, $\nu_t = 40\%$ et $\nu_t = 20\%$ respectivement *100% risque*, *60% risque*, *40% risque* et *20% risque*. Afin de minimiser le bruit statistique qui résulte des calculs numériques, le même jeu de 100 000 simulations du marché financier est utilisé tout au long de la section 4.1.

On analyse également la solution au problème d'optimisation de portefeuille obtenue par Merton (1971) présentée à la section 2.4. On note *Constante Merton* le cas où la proportion fixe investie dans l'actif risqué est de valeur de la constante de Merton. Cette dernière est d'une valeur de 0.1667 lorsque $c_s = 0.000\%$ et $c_f = 2.448\%$, de 0.0647 lorsque $c_s = c_f = 1.224\%$ et de 0.0167 lorsque $c_s = 1.800\%$ et $c_f = 0.648\%$.

Pour les différentes répartitions de taux de frais du tableau 4.1, la fréquence où la proportion ν_t est limitée à 100% est assez élevée. En effet, imposer une contrainte sur la proportion investie dans l'actif risqué a une incidence importante sur la distribution de la valeur terminale du fonds distinct tel qu'on peut voir à la figure 4.2. Afin que les résultats de la figure 4.2 soient bien perceptibles, nous avons limité la valeur du montant perçu par l'assuré $((F_T - G)^+ + G)$ à la valeur de 3.

Plus particulièrement, la figure 4.3 illustre qu'en interdisant l'utilisation d'effet de levier, des valeurs terminales de fonds distinct dans l'intervalle non optimal $((0, \hat{F}(G)]$ tel que discuté à la section 3.1) peuvent être obtenues (où $\hat{F}(G)$ représente le point de concavification). De ce fait, il en découle une diminution de l'utilité espérée du fonds distinct tel que démontré au tableau 4.2.

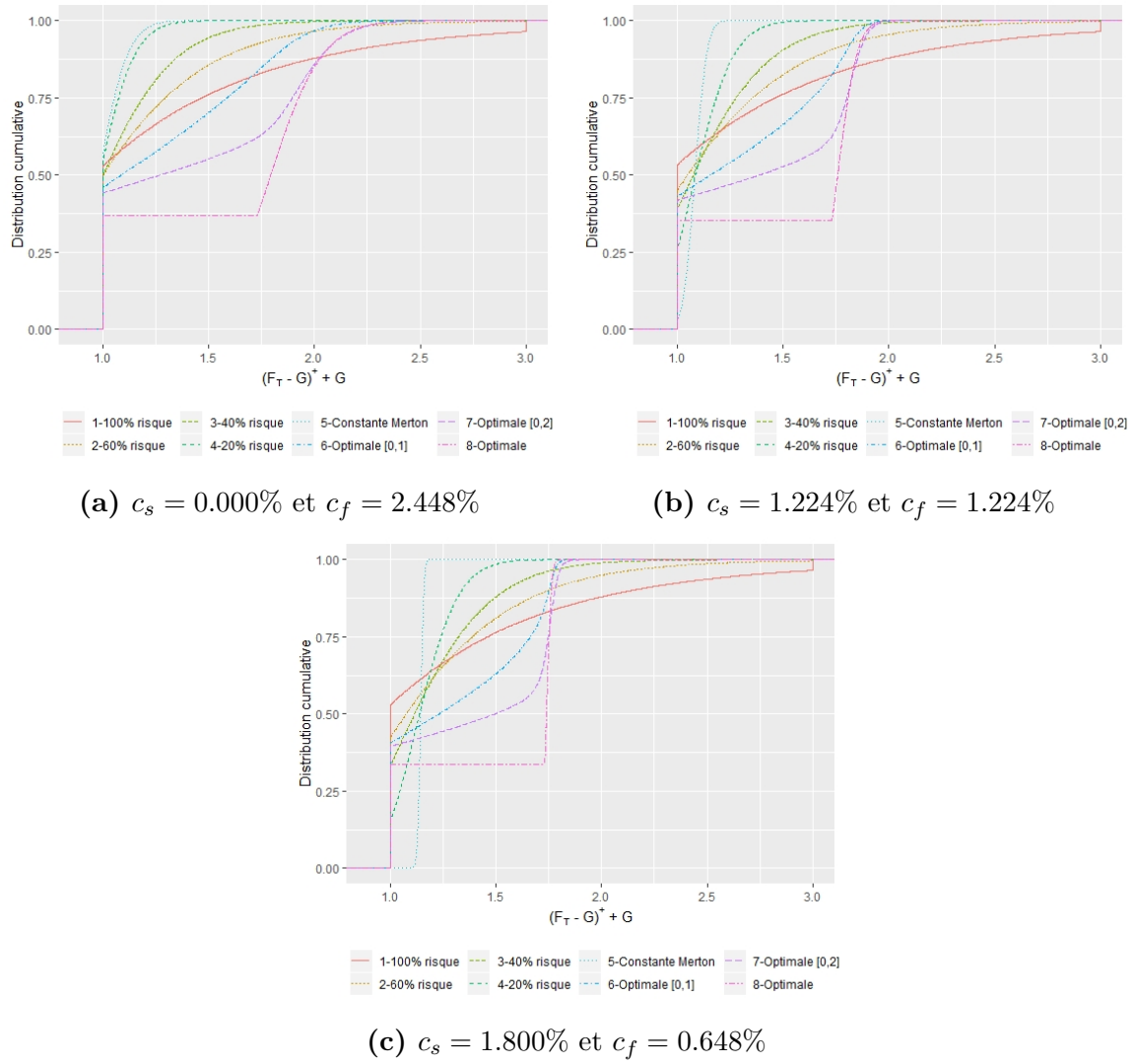


Figure 4.2: Distribution de $(F_T - G)^+ + G$ sous différentes stratégies

Par ailleurs, en considérant les valeurs des paramètres présentées au début de ce chapitre, on obtient que la valeur de $\hat{F}(G)$ est 1.732. De plus, comme mentionné à la section 3.1, le point de concavification ne dépend pas des paramètres modélisant le marché financier ; $\hat{F}(G)$ ne varie donc pas en fonction des différentes combinaisons

de frais.

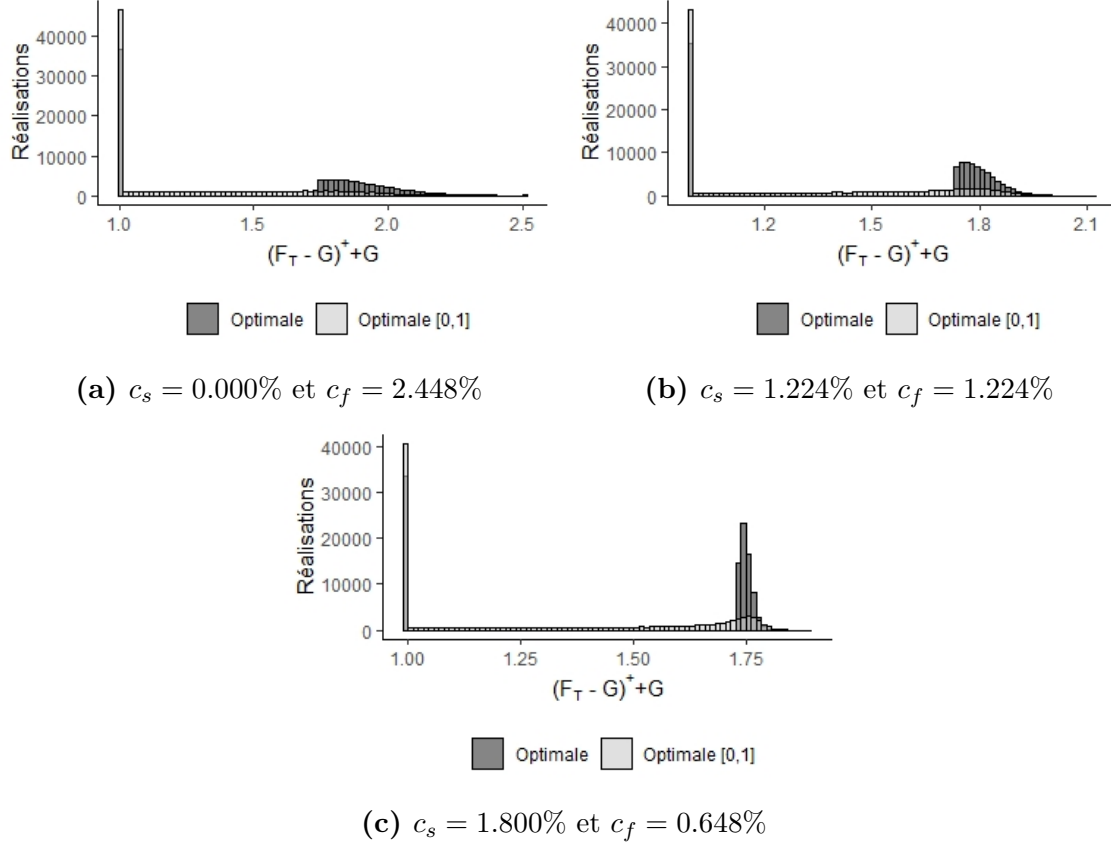


Figure 4.3: $(F_T - G)^+ + G$ sous l'interdiction de l'utilisation d'effet de levier

Pour bien interpréter les valeurs d'utilité espérée obtenues sous différentes stratégies, le gain certain équivalent R_T est également présenté au tableau 4.2. Ce dernier (défini à l'équation (1.1)) représente le montant certain à l'échéance engendrant un niveau équivalent d'utilité à l'utilité espérée du montant perçu à l'échéance d'un

investissement dans un fonds distinct. Ainsi :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[U \left((F_T - G)^+ + G \right) \right] = U(R_T). \quad (4.2)$$

Stratégie (ν)	$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[U \left((F_T - G)^+ + G \right) \right]$			R_T		
	$c_s = 0.000\%$ $c_f = 2.448\%$	$c_s = 1.224\%$ $c_f = 1.224\%$	$c_s = 1.800\%$ $c_f = 0.648\%$	$c_s = 0.000\%$ $c_f = 2.448\%$	$c_s = 1.224\%$ $c_f = 1.224\%$	$c_s = 1.800\%$ $c_f = 0.648\%$
Optimale	-0.272	-0.276	-0.276	1.355	1.345	1.345
Optimale [0, 2]	-0.320	-0.319	-0.315	1.250	1.253	1.259
Optimale [0, 1]	-0.359	-0.348	-0.341	1.181	1.198	1.211
100% risque	-0.375	-0.375	-0.375	1.155	1.155	1.155
60% risque	-0.399	-0.383	-0.376	1.120	1.142	1.153
40% risque	-0.423	-0.395	-0.381	1.087	1.125	1.146
20% risque	-0.462	-0.414	-0.386	1.041	1.099	1.138
Constante Merton*	-0.470	-0.426	-0.381	1.032	1.084	1.145

* La constante de Merton varie en fonction de la distribution des taux de frais.

Tableau 4.2: Utilité du fonds distinct et gain certain équivalent

Sans surprise, on remarque que la stratégie *Optimale* maximise l'utilité pour chacune des distributions de taux de frais. Le gain certain équivalent est supérieur d'au moins 6.8% sous la stratégie *Optimale* que sous les autres stratégies, et ce, pour les différentes distributions de taux de frais du tableau 4.2. De plus, il est plus avantageux pour l'assuré de suivre la stratégie optimale partiellement (*Optimale* [0, 1] par exemple) plutôt que d'investir entièrement le fonds dans l'actif risqué. On observe que la solution au problème d'optimisation de portefeuille obtenue par Merton (1971) présentée à la section 2.4 (lorsqu'aucune garantie n'est appliquée à l'échéance) est loin d'être optimale dans le cas où une garantie à l'échéance est appliquée.

On remarque, également, que relativement à une stratégie fixée, l'utilité espérée sous les trois distributions différentes de taux de frais sont très similaires, et ce, en par-

ticulier sous les stratégies *Optimale*, *Optimale* $[0,1]$ et *Optimale* $[0,2]$. La figure 4.4 illustre l'incidence d'une variation dans la distribution des taux de frais c_s et c_f . Il est intéressant de constater au tableau 4.2 que l'assuré a une légère préférence pour la répartition de taux de frais $c_s = 0.000\%$ et $c_f = 2.448\%$ seulement sous la stratégie *Optimale*. Par exemple, le gain certain équivalent est 0.7% plus élevé lorsque $c_s = 0.000\%$ et $c_f = 2.448\%$ que lorsque $c_s = 1.800\%$ et $c_f = 0.648\%$. Sous toutes les autres stratégies, l'assuré préfère la distribution $c_s = 1.800\%$ et $c_f = 0.648\%$.

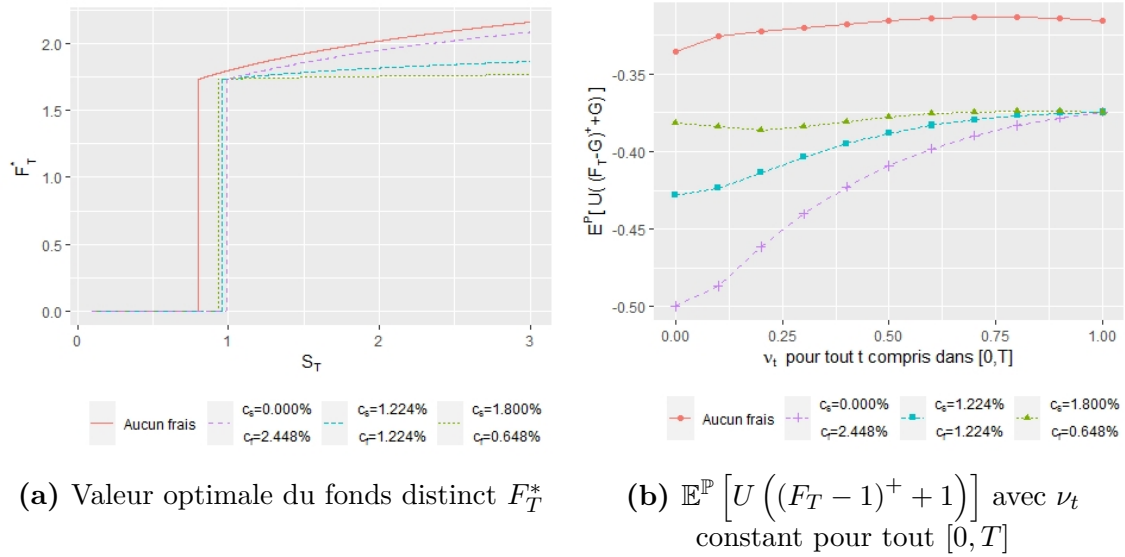


Figure 4.4: Stratégie d'investissement optimale du fonds distinct pour $\gamma = 3$

En fait, il était prévisible que l'assuré préférerait la combinaison de frais avec le taux c_f le plus bas possible. En effet, puisque nous considérons uniquement les combinaisons faisant en sorte que $c_s + c_f = 2.448\%$, on voit à partir de la dynamique du taux de frais total (3.17) et du fonds en (3.19) que le taux de frais total prélevé pendant la période de temps dt est proportionnel à $(c_f + \nu_t c_s)dt$. On constate que c_f est appliqué

en permanence en entier, et ce, peu importe la stratégie d'investissement. Donc, en interdisant l'effet de levier ($\nu_t \leq 1$), plus c_f est faible, plus le taux de frais total perçu par l'assuré est faible toutes choses étant égales par ailleurs. Ainsi, en réduisant la quantité totale de frais prélevée du fonds pour les stratégies à proportions constantes et la stratégie *Optimale* $[0, 1]$, l'utilité espérée de l'assuré est plus élevée.

Il est intéressant de comparer les valeurs du gain certain équivalent du tableau 4.2 au montant que l'assuré recevrait s'il avait uniquement investi dans l'actif sans risque sans frais⁸ jusqu'à l'échéance, soit $B_{10} = \exp^{(0.02 \cdot 10)} \approx 1.221$ (déterminée à partir de (1.16)). On voit que sous toutes les stratégies autres que *Optimale* et *Optimale* $[0, 2]$, soit les frais appliqués au fonds distinct du tableau 4.2 sont jugés trop élevés pour l'assuré ou soit l'assuré a une trop grande aversion au risque pour investir dans un fonds distinct. Les frais appliqués au fonds sont étudiés plus en profondeur à la sous-section 4.2.1. Il faut noter que le processus B modélisant l'actif sans risque est assez simpliste et est discutable d'un point de vue réaliste. En particulier, le fait que les paramètres d'un modèle soient constants pour une période de 10, 15 ou 20 ans peuvent apporter quelques interrogations. D'un autre côté, on constate que le gestionnaire du fonds distinct aurait tout intérêt à adopter la stratégie *Optimale* ou *Optimale* $[0, 2]$ plutôt que la stratégie traditionnelle à proportion constante. Malheureusement, ces dernières stratégies ne sont pas réalistes.

En comparant la fréquence à laquelle la garantie du fonds distinct est exercée au tableau 4.3 et l'espérance du montant déboursé par l'assureur au tableau 4.4, on voit que l'assureur préfère plutôt la combinaison de taux de frais $c_s = 1.800\%$ et $c_f =$

8. Il faut noter que les frais du fonds distinct du modèle étudié dans ce mémoire ont pour principal but de financer la garantie. On ne prend pas en considération les frais de gestion.

0.648%. En effet, avec cette combinaison, sous toutes les stratégies, la garantie est exercée moins souvent et l'espérance du montant à l'échéance déboursé par l'assureur pour honorer ses obligations est moindre.

Par contre, nous reviendrons sur la préférence de l'assureur à la section 4.2.1 puisqu'il est également important de prendre en compte la possibilité de profit ou de perte pour l'assureur sous toutes les combinaisons de frais. En d'autres mots, il faut s'assurer que la totalité des frais perçu du fonds (peu importe son ordre de grandeur) finance complètement le fonds distinct.

Stratégie (ν)	$\mathbb{P}[\mathbf{F}_T < \mathbf{G}]$ (%)		
	$c_s = 0.000\%$ $c_f = 2.448\%$	$c_s = 1.224\%$ $c_f = 1.224\%$	$c_s = 1.800\%$ $c_f = 0.648\%$
Optimale	37.1	35.3	33.6
Optimale, proportions entre $[0, 2]$	44.2	41.6	39.5
Optimale, proportions entre $[0, 1]$	45.9	42.9	40.4
100% actif risqué	52.9	52.9	52.9
60% actif risqué	49.7	44.6	42.3
40% actif risqué	49.5	38.3	33.1
20% actif risqué	54.1	25.2	15.2
Constante Merton	56.4	2.2	0.0

Tableau 4.3: Exercice de la garantie du fonds distinct

Au tableau 4.3, on remarque que dans le cas où une combinaison de taux de frais de $c_s = 0.000\%$ et $c_f = 2.448\%$ et où la proportion investie dans l'actif risqué est faible (20% *risque* et *Constante Merton*), la fréquence à laquelle la garantie est exercée est très élevée ; jusqu'à plus de 50% du temps. Par contre, au tableau 4.4, on constate que l'espérance du montant déboursé à l'échéance par l'assureur sous ces deux stratégies est assez faible, soit d'une valeur inférieure à 0.053. Ce fait peut être expliqué par la figure 4.2, où l'on remarque que la distribution des valeurs terminales du fonds

distinct est très concentrée. En effet, puisque la proportion investie dans l'actif risqué est faible, on restreint le caractère aléatoire de la valeur du fonds distinct à l'échéance (dans le modèle de Black-Scholes, l'actif sans risque est représenté par un processus stochastique déterministe tel que présenté à la section 1.3.1).

Stratégie (ν)	$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[(\mathbf{G} - \mathbf{F}_{\mathbf{T}})^+]$		
	$c_s = 0.000\%$ $c_f = 2.448\%$	$c_s = 1.224\%$ $c_f = 1.224\%$	$c_s = 1.800\%$ $c_f = 0.648\%$
Optimale	0.371	0.353	0.336
Optimale $[0, 2]$	0.266	0.249	0.234
Optimale $[0, 1]$	0.179	0.168	0.158
100% risque	0.194	0.194	0.194
60% risque	0.121	0.103	0.096
40% risque	0.086	0.059	0.048
20% risque	0.053	0.018	0.009
Constante Merton	0.048	0.000	0.000

Tableau 4.4: Espérance du montant déboursé par l'assureur à l'échéance

Plus concrètement, un des avantages du fonds distinct est de donner la possibilité à l'assuré d'investir dans un fonds contenant des actifs avec une possibilité de hauts rendements, comportant un risque associé à cette performance, tout en offrant une protection : la garantie à l'échéance. De ce fait, il est peu probable que le fonds distinct soit composé d'une très faible proportion d'actifs risqués.

Par ailleurs, on remarque également aux tableaux 4.3 et 4.4 que, bien que la garantie soit exercée plus souvent sous les stratégies *Optimale* $[0, 1]$ et *Optimale* $[0, 2]$, l'espérance du montant déboursé par l'assureur est nettement moindre que sous la stratégie *Optimale*. L'espérance du montant déboursé par l'assureur est également moindre sous la stratégie *Optimale* $[0, 1]$ que sous la stratégie *100% risque*, et ce, peu importe la combinaison des taux de frais.

On peut donc conclure que, jusqu'ici, du point de vue de l'assuré et celui de l'assureur, la stratégie *Optimale* $[0, 1]$ sous la répartition des taux de frais $c_s = 1.800\%$ et $c_f = 0.648\%$ est la plus avantageuse. En effet, parmi les stratégies étudiées, cette dernière est celle qui maximise davantage l'utilité de l'assuré d'un fonds distinct tout en minimisant le montant déboursé par l'assureur pour honorer la garantie du fonds distinct d'un point de vue réaliste. Il ne reste qu'à vérifier la possibilité de profit ou perte pour l'assureur sous cette stratégie jugée plus avantageuse afin de conclure que cette dernière est définitivement la plus idéale.

4.2 Paramètres du fonds distinct

4.2.1 Frais appliqués au fonds distinct

On s'intéresse, maintenant, à la valeur espérée actualisée du bénéfice résultant d'un fonds distinct dans le but d'analyser la possibilité de profit ou de perte pour l'assureur. En fait, l'assureur émet un fonds distinct à perte dès que le montant actualisé espéré perçu par l'assuré du fonds distinct au tableau 4.5 est supérieur au montant initial investi dans le fonds, soit $f_{ini} = 1$. L'accumulation de frais par l'assureur a pour objectif de financer la garantie. Ainsi, la valeur actualisée espérée du gain de l'assuré devrait être égale au montant initial investi f_{ini} tel que défini à l'équation de tarification équitable (4.1).

À partir des résultats du tableau 4.5, on en conclut que la combinaison de $c_s = 1.800\%$ et $c_f = 0.648\%$ est plus avantageuse pour l'assureur uniquement sous la stratégie *Optimale* puisque la valeur espérée actualisée du fonds distinct sous cette stratégie est moindre. On note tout de même que l'assureur émet le fonds distinct à perte pour la stratégie *Optimale* sous toutes les combinaisons de frais du tableau 4.5.

Stratégie (ν)	$\mathbb{E}^{\mathbf{P}} \left[\xi_{\mathbf{T}} \left((\mathbf{F}_{\mathbf{T}} - \mathbf{G})^+ + \mathbf{G} \right) \right]$		
	$c_s = 0.000\%$ $c_f = 2.448\%$	$c_s = 1.224\%$ $c_f = 1.224\%$	$c_s = 1.800\%$ $c_f = 0.648\%$
Optimale	1.187	1.159	1.152
Optimale $[0, 2]$	1.082	1.067	1.069
Optimale $[0, 1]$	0.988	1.003	1.013
100% risque	1.000	1.000	1.000
60% risque	0.923	0.944	0.956
40% risque	0.883	0.915	0.934
20% risque	0.844	0.888	0.918
Constante Merton	0.838	0.879	0.935

Tableau 4.5: $\mathbb{E}^{\mathbf{P}} \left[\xi_T \left((F_T - G)^+ + G \right) \right]$

De plus, on s'aperçoit que bien que la combinaison $c_s = 1.800\%$ et $c_f = 0.648\%$ minimise l'espérance du montant déboursé par l'assureur (voir le tableau 4.3 et le tableau 4.4), elle fait en sorte que l'assureur récolte en général moins de frais et même, dans certains cas, émet le fonds distinct à perte.

En fait, en considérant uniquement les stratégies d'investissement réalistes, l'assureur préfère en fait la combinaison de frais $c_s = 0.000\%$ et $c_f = 2.448\%$ puisque ce dernier récolte en général plus de frais et n'émet pas le fonds distinct à perte.

Maintenant, on étudie encore plus particulièrement l'impact d'une variation de la combinaison de frais c_s et c_f . La figure 4.5a, inspirée de la figure 1(B) de MacKay et Ocejo (2019), démontre qu'une stratégie plus risquée (en posant $\gamma = 2$ et $\gamma = 3$ par exemple) est davantage affectée par une variation du taux de frais c_s puisqu'elle dépend davantage de l'actif risqué. On remarque également que les valeurs optimales terminales actualisées du fonds distinct sous les différentes combinaisons de taux de frais sont nettement supérieures à f_{ini} . Donc, la tarification équitable du fonds

distinct avec une stratégie d'investissement *Optimale* ne peut pas être basée sur la combinaison $c_f + c_s = 2.448\%$.

Également, la figure 4.5b démontre que cette combinaison de tarification équitale de $c_f + c_s = 2.448\%$ est uniquement applicable à la stratégie 100% *risque*.

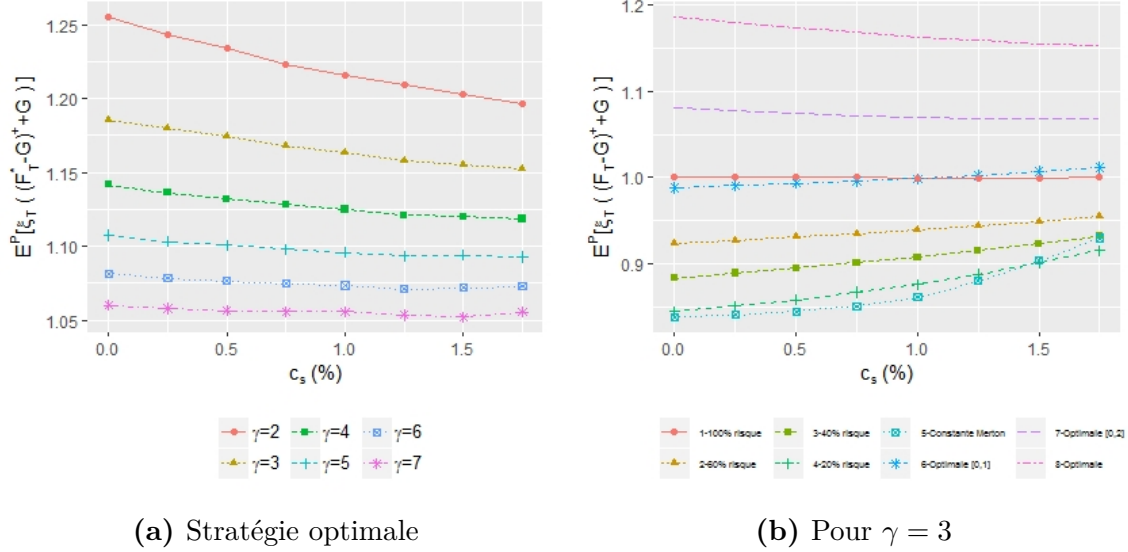


Figure 4.5: $E^P \left[\xi_T \left((F_T^* - G)^+ + G \right) \right]$ pour $c_f = 2.448\% - c_s$

Ensuite, on voit à la figure 4.6a que la combinaison des taux de frais choisie joue un rôle dans la distribution du fonds distinct optimal à l'échéance. En comparant quatre distributions de taux de frais différentes, on remarque qu'un taux de frais s'appliquant à l'actif risqué (c_s) élevé restreint la possibilité d'avoir des valeurs de fonds optimal élevées. En fait, lorsque le taux de frais c_s est élevé et que l'actif risqué est favorable, une grande partie de cette performance est convertie sous forme de frais accumulés par l'assureur. Les figures 4.6b et 4.6c confirment qu'une variation du taux de frais c_s a un impact beaucoup plus grand qu'une variation du taux de

frais c_f sur la distribution des valeurs terminales optimales du fonds distinct.

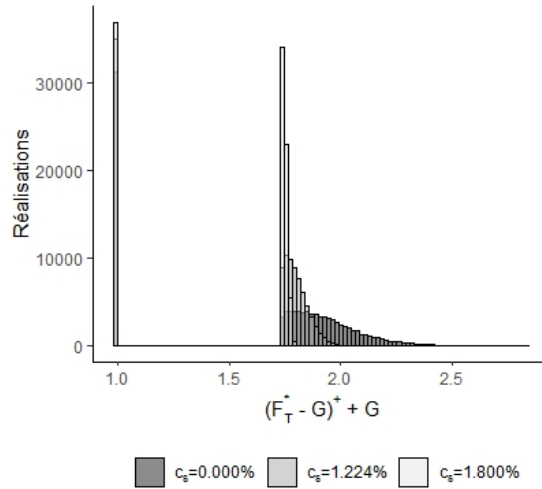
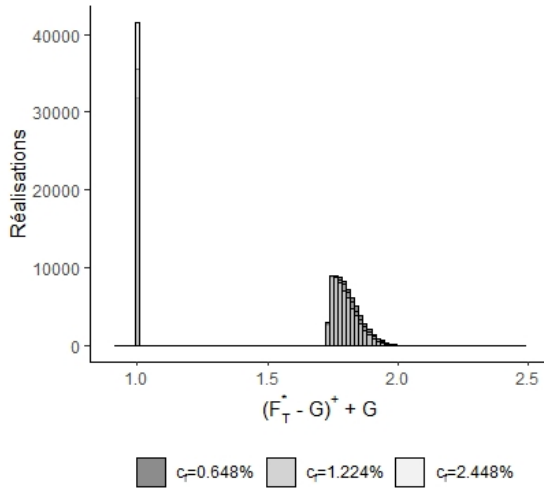
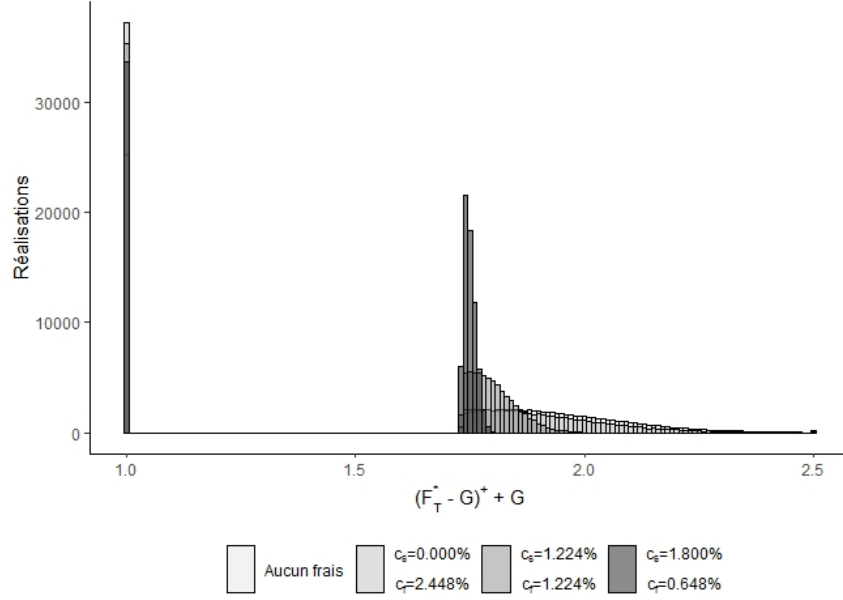


Figure 4.6: Impact sur F_T^* de la variation des taux de frais c_f et c_s

On s'intéresse, maintenant, au taux de frais équitable du fonds distinct, soit les taux de frais faisant en sorte que l'équation (4.1) est satisfaite. Le tableau 4.6 illustre les taux de frais équitables du fonds distinct selon les différentes stratégies d'investissement.

Stratégie (ν)	c_f (%)		
	$c_s = 0.000\%$	$c_s = 1.224\%$	$c_s = 1.800\%$
Optimale	9.3	6.6	5.5
Optimale $[0, 2]$	4.7	3.0	2.3
Optimale $[0, 1]$	2.2	1.3	1.3
100% risque	2.4	1.2	0.6
60% risque	0.9	0.2	n/a
40% risque	0.4	n/a	n/a

Tableau 4.6: Taux de frais équitables : $G = f_{ini}$

Étant donné que l'espérance du montant déboursé par l'assureur est d'une valeur nulle sinon très faible lorsqu'une proportion constante de valeur de la constante de Merton ou de 20% est investie dans l'actif risqué, la valeur de la garantie est elle aussi nulle ou sinon très faible (voir tableau 4.4). Dans ces deux cas spécifiques, aucun taux de frais équitable n'est applicable. Ce fait s'explique par la modélisation du marché financier par le modèle de Black-Scholes qui ne capte pas tous les risques qu'un marché financier comporte en pratique. En effet, il est très peu probable en pratique qu'un produit financier comportant une garantie soit de coût nul.

De plus, dans certains cas d'investissement avec proportion constante (*60% risque*, *40% risque*), l'espérance du montant déboursé par l'assureur pour honorer la garantie à l'échéance est très faible tel que démontré au tableau 4.4. Ainsi, uniquement l'application d'un taux de frais de base c_f de valeurs de 1.224% ou 1.800% surcharge l'assuré. Il est donc indiqué au tableau 4.6 que les taux de frais équitables dans ces

cas précis sont non-applicables (n/a).

Il découle du tableau 4.4 comportant l'espérance du montant déboursé par l'assureur les résultats au tableau 4.6. En effet, les taux de frais équitables sous la stratégie *Optimale* $[0, 1]$ sont moindres que ceux d'un fonds distinct entièrement investi dans l'actif risqué. De plus, on voit qu'effectivement une combinaison de $c_s + c_f = 2.448\%$ surcharge l'assuré en frais pour toutes les stratégies autres que *Optimale* et *Optimale* $[0, 2]$ comme conclu à partir des résultats du tableau 4.2.

Les taux de frais équitables du tableau 4.6 pourraient sembler élevés du point de vue d'un assuré. Un assureur ou un conseiller en sécurité financière pourrait donc proposer un fonds distinct avec une garantie moins élevée à l'assuré. L'Autorité des Marchés Financiers (2020) indique que les garanties de fonds distincts offertes sur le marché peuvent aller de 75% à 100% du montant initial investi dans le fonds. Le tableau 4.7 contient les taux de frais équitables pour différentes stratégies lorsque $G = 0.75 \cdot f_{ini}$. Ces derniers sont nettement inférieurs aux taux de frais du tableau 4.6.

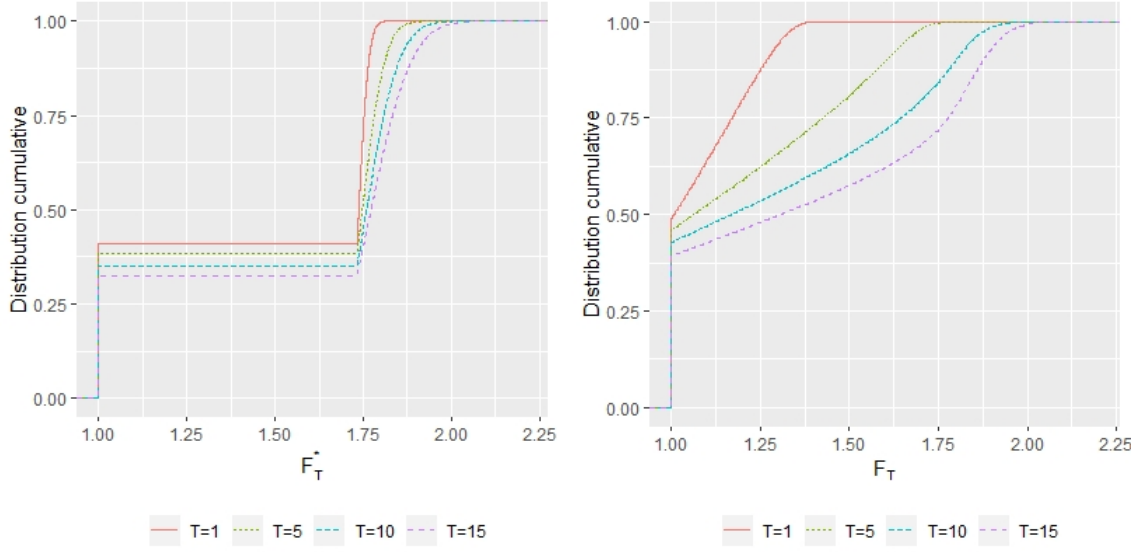
Stratégie (ν)	c_f (%)		
	$c_s = 0.000\%$	$c_s = 1.224\%$	$c_s = 1.800\%$
Optimale	2.2	0.8	0.4
Optimale $[0, 2]$	1.0	0.1	n/a
Optimale $[0, 1]$	0.5	n/a	n/a
100% risque	0.7	n/a	n/a
60% risque	0.2	n/a	n/a

Tableau 4.7: Taux de frais équitables : $G = 0.75 \cdot f_{ini}$

4.2.2 Échéance du fonds distinct

En général, différentes possibilités d'échéance s'offrent initialement à une personne désirant investir dans un fonds distinct en fonction de ses besoins, soit 10, 15 ou 20 ans par exemple selon l'Autorité des Marchés Financiers (2020). Comme on peut remarquer à la figure 4.7, une échéance du fonds distinct plus éloignée engendre une plus grande probabilité d'obtenir une valeur terminale de fonds distinct élevée sous la stratégie *Optimale*. Cet effet est encore plus notable lorsqu'on compare la distribution des valeurs terminales de fonds distincts avec différentes échéances sous la stratégie *Optimale* $[0,1]$. On remarque, également, que plus l'échéance du fonds distinct est éloignée, plus la probabilité que la garantie à l'échéance soit exercée est faible. Ce fait s'explique par la tendance croissante de la valeurs des processus stochastiques modélisant l'actif risqué et de l'actif sans risque. Ce fait est illustré notamment à la figure 4.12. En effet, même avec l'application de frais, la valeur espérée des deux processus croît avec le temps.

De plus, on voit au tableau 4.8 que les taux de frais équitables sous différentes stratégies sont nettement plus faibles que ceux du tableau 4.6. Puisque la valeur de l'actif sans risque et de l'actif risqué est de plus en plus grande, l'assureur honore la garantie de moins en moins souvent et le montant à compenser est moindre. La valeur de la garantie est donc de moins en moins dispendieuse. De ce fait, un assuré désirant un taux de frais équitable moindre tout en désirant une garantie du montant initial total ($G = f_{ini}$) pourrait plutôt opter pour un fonds distinct avec une échéance plus éloignée.

(a) Sous la stratégie *Optimale*(b) Sous la stratégie *Optimale* $[0,1]$ **Figure 4.7:** F_T pour différentes échéances avec $c_f = 1.224\%$ et $c_s = 1.224\%$

Stratégie (ν)	c_f (%)		
	$c_s = 0.000\%$	$c_s = 1.224\%$	$c_s = 1.800\%$
Optimale	4.0	2.3	1.6
Optimale $[0, 2]$	2.3	1.0	0.6
Optimale $[0, 1]$	1.2	0.4	0.1
100% risque	1.5	0.3	n/a
60% risque	0.5	n/a	n/a
40% risque	0.2	n/a	n/a
20% risque	0.0	n/a	n/a

Tableau 4.8: Taux de frais équitables : $T=15$

4.3 Modélisation de l'aversion au risque

Bien que nous ayons supposé que l'assuré possédait un paramètre d'aversion au risque de $\gamma = 3$, il est certain que le niveau d'aversion au risque est relatif à chaque individu.

Par ailleurs, comme mentionné par Wakker (2008), le paramètre d'aversion au risque doit être méticuleusement déterminé en fonction du domaine sur lequel la fonction d'utilité est évaluée. Puisque la distribution du fonds à l'échéance (F_T) sous chacune des différentes stratégies étudiées se situent entre 0 et 3 (voir figure 4.2 pour un appui visuel), on considère que les différentes valeurs de paramètre d'aversion au risque (γ) se situant entre 2 et 7 reflètent bien la différence de niveau d'aversion au risque (voir figure 1.1). Il faut également noter qu'en réalité, ni l'assuré et ni le gestionnaire de placement du fonds ne connaissent le véritable degré d'aversion au risque de l'assuré. Il est donc intéressant d'étudier l'impact du paramètre d'aversion au risque sur la valeur terminale d'un fonds distinct avant l'application de la garantie, sur l'utilité de l'assuré ainsi que sur la perception de l'évolution de la valeur du fonds distinct jusqu'à l'échéance.

4.3.1 Caractérisation de l'aversion au risque de l'assuré

Tout d'abord, en complément à la figure 4.8, la figure 4.9a illustre l'impact du paramètre d'aversion au risque γ sur la valeur terminale du fonds distinct avant l'application de la garantie. On voit qu'une stratégie d'investissement pour un assuré ayant une très forte aversion au risque ($\gamma = 5$, $\gamma = 6$ et $\gamma = 7$) engendre une répartition de valeurs optimales du fonds distinct plus conservatrice en comparaison aux stratégies d'investissement pour un assuré plus favorable au risque ($\gamma = 2$, $\gamma = 3$ et $\gamma = 4$). Dans ce dernier cas, les valeurs terminales sont en général plus faibles. Par contre, la garantie d'un fonds distinct est exercée moins souvent pour un assuré ayant une aversion plus grande au risque puisque la valeur optimale du fonds distinct est non nulle pour un plus grand ensemble de valeurs de l'actif risqué S_T .

La figure 4.9b est inspirée de la figure 1(C) de MacKay et O'Keefe (2019) et illustre le fait que l'utilité espérée de l'assuré est assez stable pour différentes combinaisons de taux de frais c_s et c_f ayant pour somme totale 2.448%. Par contre, la valeur de l'utilité espérée augmente plus l'assuré est prêt à tolérer le risque (pour $\gamma = 2$, $\gamma = 3$ et $\gamma = 4$ par exemple).

En pratique, le fonds distinct est basé sur le même principe que le fonds commun de placement : regrouper plusieurs placements d'investisseurs. Bien entendu, la principale différence entre ces deux produits financiers est que le fonds distinct inclut une garantie à l'échéance. Sachant que l'aversion au risque est propre à chaque individu, on s'intéresse aux répercussions sur un individu ayant une faible aversion au risque ($\gamma = 3$) d'une stratégie ne concordant pas avec son niveau d'aversion au risque.

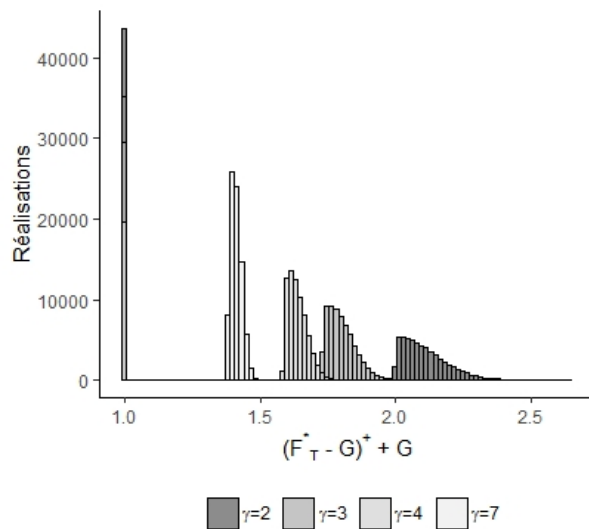


Figure 4.8: $(F_T^* - G)^+ + G$ pour différents γ

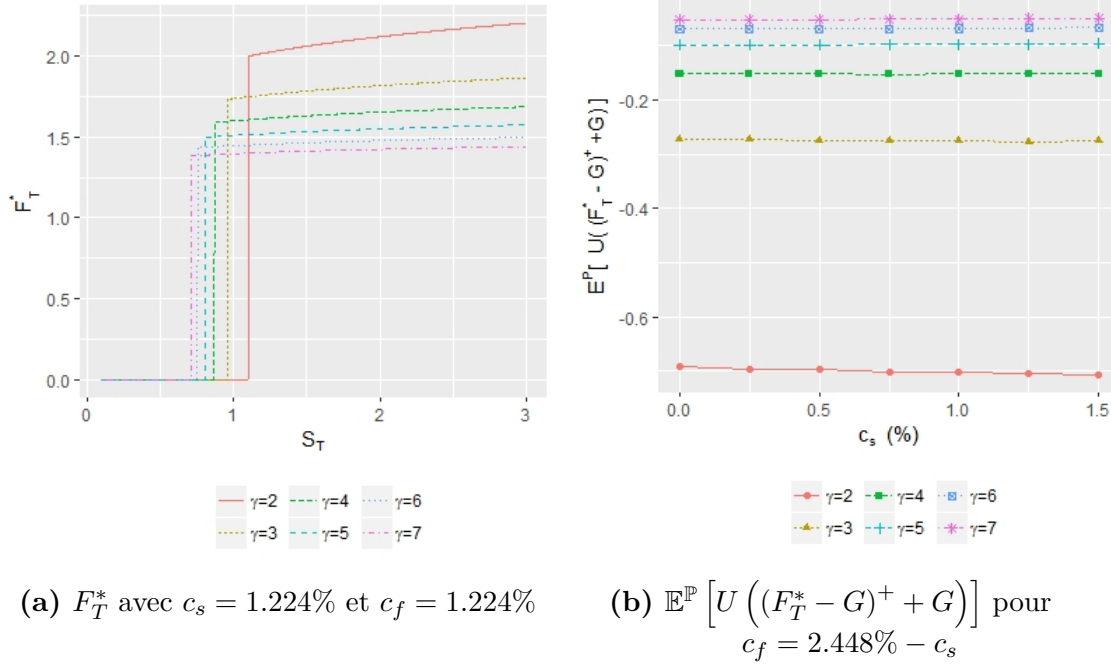


Figure 4.9: Impact de γ sur le fonds distinct

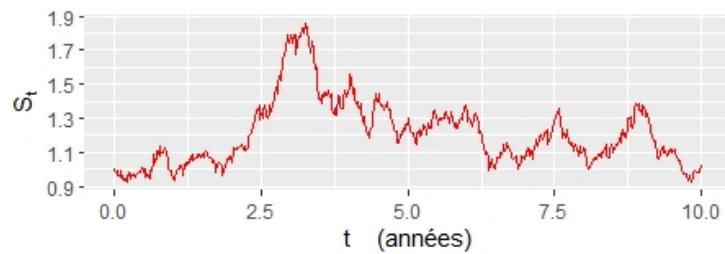
Ainsi, parallèlement au tableau 4.2, le tableau 4.9 contient les valeurs de l'utilité espérée pour cet individu dans le cas où les différentes stratégies d'investissement ont été basées sur un niveau d'aversion au risque de paramètre $\gamma = 2$, $\gamma = 3$, $\gamma = 4$ et $\gamma = 7$. $U_{\gamma=3}$ représente la fonction d'utilité isoélastique définie en (1.3) de paramètre $\gamma = 3$.

On remarque que sous les stratégies *Optimale* $[0, 2]$ et *Optimale* $[0, 1]$, l'investisseur maximise davantage l'utilité espérée de l'assuré en utilisant une stratégie supposant que l'assuré a légèrement une plus grande aversion au risque que ce qu'il a en réalité (soit en considérant une valeur du paramètre γ légèrement plus grande que celle qui représente le plus adéquatement le niveau d'aversion au risque de l'assuré).

Stratégie (ν)	$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\mathbf{U}_{\gamma=3} ((\mathbf{F}_{\mathbf{T}}^{\nu} - \mathbf{1})^+ + \mathbf{1})]$				$\mathbf{R}_{\mathbf{T}}$			
	$\gamma = 2$	$\gamma = 3$	$\gamma = 4$	$\gamma = 7$	$\gamma = 2$	$\gamma = 3$	$\gamma = 4$	$\gamma = 7$
Optimale	-0.283	-0.276	-0.279	-0.300	1.329	1.346	1.339	1.291
Optimale $[0, 2]$	-0.325	-0.319	-0.318	-0.329	1.240	1.252	1.254	1.233
Optimale $[0, 1]$	-0.353	-0.348	-0.347	-0.351	1.190	1.199	1.200	1.194

Tableau 4.9: Différence entre l'aversion au risque de la stratégie et de l'assuré, $c_s = 1.224\%$ et $c_f = 1.224\%$.

Cette constatation qui peut sembler surprenante est en partie expliquée par le fait que les stratégies *Optimale* $[0, 2]$ et *Optimale* $[0, 1]$ limitent l'investissement dans l'actif risqué. Ainsi, un individu ayant une faible aversion au risque ($\gamma = 3$ par exemple) désirant investir de façon plus risquée pour aller chercher un plus haut rendement (en utilisant l'effet de levier par exemple) est restreint par la contrainte imposée ($\nu_t^{(1)} = \min(\nu_t^*, 1)$ ou $\nu_t^{(2)} = \min(\nu_t^*, 2)$). De ce fait, les stratégies *Optimale* $[0, 2]$ et *Optimale* $[0, 1]$ s'avèrent être plus conservatrices que la stratégie *Optimale* pour le même paramètre d'aversion au risque et tendent à se rapprocher de la stratégie *Optimale* sous un paramètre d'aversion au risque plus élevé. Ce fait est bien illustré à la figure 4.10 où la stratégie *Optimale* $[0, 1]$ pour un paramètre d'aversion au risque de $\gamma = 3$ de la figure 4.10b est semblable à la stratégie *Optimale* $[0, 2]$ déterminée pour un individu ayant un paramètre d'aversion au risque de $\gamma = 4$ illustrée à la figure 4.10c. On peut voir aux figures 4.10c et 4.10d que la contrainte appliquée à la stratégie *Optimale* semble avoir peu de répercussions.



(a) Simulation de l'actif risqué

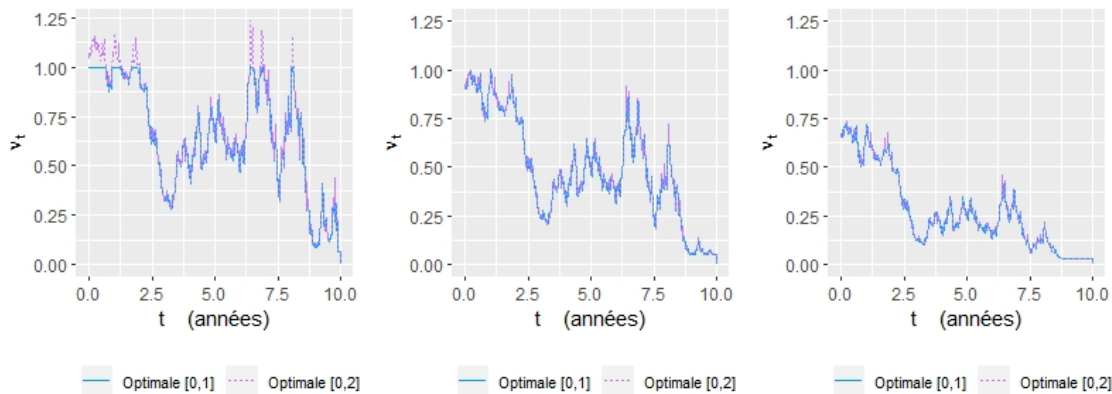
(b) Considérant $\gamma = 3$ (c) Considérant $\gamma = 4$ (d) Considérant $\gamma = 7$

Figure 4.10: Incidence d'une variation de l'aversion au risque sur la stratégie *Optimale* $[0, 2]$ et *Optimale* $[0, 1]$ pour une simulation

Par contre, on constate au tableau 4.9 que même si les stratégies *Optimale* $[0, 2]$ et *Optimale* $[0, 1]$ déterminées pour un individu avec $\gamma = 3$ sont légèrement plus conservatrices, elles sont considérées trop risquées pour un individu ayant une grande aversion au risque (avec $\gamma = 7$). La figure 4.10b et la figure 4.10d illustrent bien un exemple de la variation de la stratégie d'investissement *Optimale* pour différents niveaux d'aversion au risque.

Finalement, on constate à la figure 4.1 et à la figure 4.10 que plus la valeur de l'actif risqué est grande, plus la proportion investie dans ce dernier est faible. La stratégie

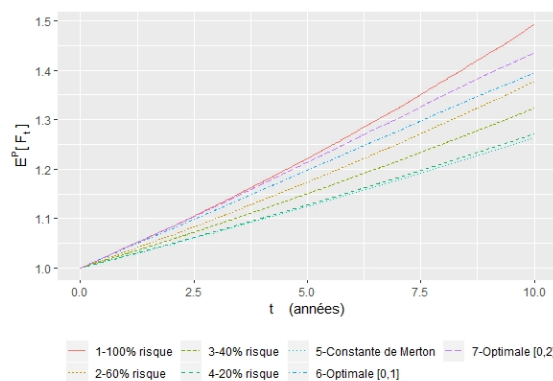
d'investissement est donc représentative de l'aversion au risque de l'assuré et protège ce dernier contre les chutes du marché. D'un autre côté, la proportion investie dans l'actif risqué est grande lorsque le marché se rapproche de sa valeur initiale (S_0) pour ainsi profiter des remontées de ce dernier.

4.3.2 Évolution dans le temps d'un fonds distinct

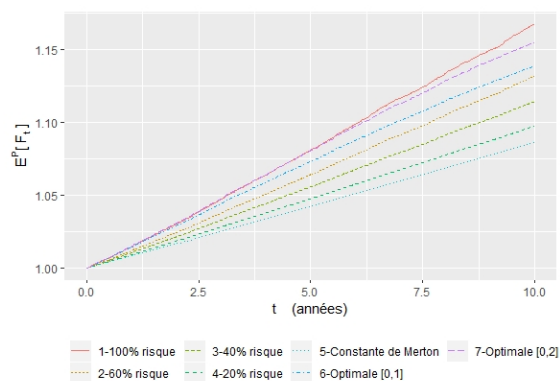
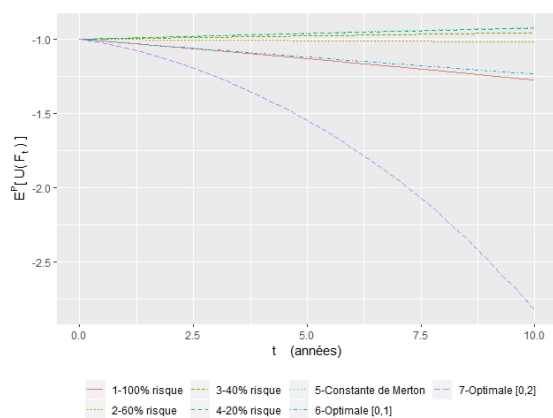
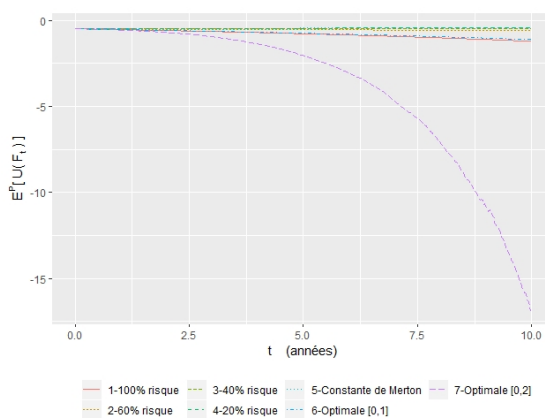
On s'intéresse, maintenant, à l'évolution du fonds distinct dans le temps sous différentes stratégies en considérant que la garantie est uniquement appliquée à l'échéance. On constate que l'aversion au risque a un impact important dans le choix de la stratégie d'investissement.

Tel qu'on le remarque à la figure 4.11, l'application de frais restreint la performance de la valeur espérée du fonds distinct tout au long de la mise en effet du fonds distinct. On constate également que la stratégie qui maximise davantage la valeur espérée du fonds distinct est la stratégie *100% risque* suivie ensuite des stratégies *Optimale* $[0, 2]$ et *Optimale* $[0, 1]$.

En comparaison avec la figure 4.11, la figure 4.12 prend en considération le risque qu'engendre chacune des stratégies. On constate, en fait, que la stratégie *Optimale* $[0, 2]$ est en espérance celle qui convient le moins à l'assuré pour la période $[0, T)$. En effet, la stratégie optimale maximise l'utilité de l'assuré uniquement à l'échéance et en considérant que la garantie à l'échéance G est honorée par l'assureur.



(a) Sans frais

(b) $c_s = 1.224\%$ et $c_f = 1.224\%$ **Figure 4.11:** Valeur espérée du fonds distinct jusqu'à l'échéance(a) $\gamma = 2$ et $c_s = c_f = 1.224\%$ (b) $\gamma = 3$ et $c_s = c_f = 1.224\%$ **Figure 4.12:** Utilité espérée du fonds distinct jusqu'à l'échéance

CONCLUSION

Suite à la période de pandémie mondiale de 2020 où les marchés boursiers connaissent des baisses fulgurantes en plus de la tendance ces dernières années des bas taux d'intérêt, les fonds distincts s'avèrent plus avantageux que jamais pour les assurés.

Dans ce mémoire, on s'intéresse au problème d'optimisation de Merton appliqué au fonds distinct en considérant un marché complet où l'actif risqué est représenté par un mouvement brownien géométrique. Des notions théoriques telles que le concept d'aversion au risque, l'optimisation convexe, la relaxation lagrangienne et la théorie concernant la représentation mathématique d'un marché financier sont introduites et vulgarisées au chapitre 1. Ensuite, à partir de ces notions, on applique au chapitre 2 la méthode martingale à un problème d'optimisation de portefeuille en considérant un investisseur ayant une aversion au risque. On entre dans le vif du sujet au chapitre 3 en présentant d'abord la méthode de concavification et ensuite en résolvant le problème d'optimisation de portefeuille dans le contexte d'un fonds distinct. La solution est obtenue en posant un marché financier fictif ajusté aux frais et en appliquant la méthode martingale, et par le fait même, la technique de relaxation lagrangienne. De plus, on concavifie la fonction objectif puisque cette dernière n'est pas concave à cause de l'incorporation de la garantie à l'échéance du fonds distinct. Au chapitre 4, on prolonge non seulement l'analyse numérique de la section d'optimisation sans contraintes de l'article de MacKay et Ocejo (2019), mais on conclut que les stratégies d'investissement optimales théoriques ne sont pas réalistes d'un point de vue pratique.

De ce fait, on analyse l'impact de contraintes sur la stratégie d'investissement optimale afin de se placer dans un contexte davantage réaliste. Il s'avère que la stratégie d'investissement optimale où l'on interdit l'utilisation d'effet de levier est, en pratique, préférable à la stratégie d'investissement plus traditionnelle avec proportion constante du point de vue de l'assureur, mais aussi du point de vue de l'assuré : elle maximise l'utilité espérée et engendre des taux de frais équitables moindres. Il faut noter que la stratégie optimale où l'on interdit l'effet de levier n'est sans doute pas la plus optimale dans un contexte d'investissement avec contraintes. Par contre, elle nous offre une solution alternative afin d'évaluer la solution d'investissement optimale dans un contexte réaliste. Il est également important que le fonds distinct soit tarifé de façon équitable : pour ne pas surcharger l'assuré, mais également pour que l'assureur n'émette pas le fonds distinct à perte. Dans le cas où le taux de frais surchargerait l'assuré, il est préférable pour ce dernier d'investir simplement dans l'actif sans risque plutôt que dans un fonds distinct. Deux options sont également étudiées afin de diminuer les taux de frais équitables chargés à l'assuré : une baisse du niveau de la garantie et un report de l'échéance du fonds distinct. Par ailleurs, puisqu'il est difficile de déterminer précisément le niveau d'aversion au risque d'un assuré, il est préférable pour l'assuré que l'assureur suppose un niveau d'aversion légèrement supérieur ou égal au niveau d'aversion au risque de l'assuré.

Suite à ces analyses, il en découle plusieurs questions de recherche. Tout d'abord, puisqu'un fonds distinct est composé d'un regroupement d'investissements de plusieurs assurés, il serait intéressant d'étudier le problème d'optimisation en prenant en considération l'utilité totale des assurés du fonds distinct ayant différents niveaux d'aversion au risque. De plus, on pourrait intégrer une variation du niveau d'aversion au risque de l'assuré et des paramètres du modèle du marché financier dans le temps

dans le contexte d'un fonds distinct. On pourrait également intégrer la probabilité de décès et la probabilité que l'assuré quitte le fonds distinct avant l'échéance. Finalement, dans le même ordre d'idée que Chen *et al.* (2019), l'incorporation de frais administratifs ou de taxes pourrait être envisagée afin d'analyser l'impact sur le taux de frais équitable.

ANNEXE A

SOLUTIONS AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

En utilisant la formule d'Itô-Doeblin pour processus d'Itô présentée notamment sous le théorème 4.4.6 de Shreve (2004) il est possible de déterminer, pour tout $t \in [0, T]$, la solution à l'équation différentielle de $S := \{S_t, 0 \leq t \leq T\}$.

Théorème A.1 (Formule d'Itô-Doeblin pour processus d'Itô). *Soit $f(t, x)$ une fonction dont les dérivées partielles $\frac{\partial f(t, x)}{\partial t}$, $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2}$ sont définies et continues, et soit Y un processus d'Itô. Alors, pour $0 \leq t \leq T$,*

$$f(t, Y_t) = f(0, Y_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, Y_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, Y_s) dY_s + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, Y_s) \right) d\langle Y_s, Y_s \rangle,$$

où $\langle Y, Y \rangle$ est le processus de covariation quadratique du processus Y avec lui-même.

Le processus d'Itô et la covariation quadratique sont présentés à la définition 1.6 et à la définition 1.7 respectivement.

Par ailleurs, pour $f(t, s) = \ln(s)$, on a que

$$\frac{\partial f(t, s)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f(t, s)}{\partial s} = \frac{1}{s} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f(t, s)}{\partial s^2} = -\frac{1}{s^2}.$$

A.1 Solution à l'EDS du processus S

Posons, $f_S(t, S_t) = \ln(S_t)$. De plus, puisque $\langle S_s, S_s \rangle = \int_0^s \sigma^2 S_u^2 du$, $d\langle S_s, S_s \rangle = \sigma^2 S_s^2 ds$. À partir de l'EDS du processus S en (1.15) et en appliquant la formule d'Itô-Doeblin pour processus d'Itô présentée au théorème A.1, on obtient que

$$\begin{aligned}
 \ln(S_t) &= f_S(t, S_t) \\
 &= \ln(S_0) + \int_0^t \frac{1}{S_s} dS_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{S_s^2} \sigma^2 S_s^2 ds \\
 &= \ln(S_0) + \int_0^t \frac{1}{S_s} \left(\alpha S_s ds + \sigma S_s dW_s^{\mathbb{P}} \right) - \frac{1}{2} \sigma^2 t \\
 &= \ln(S_0) + \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t^{\mathbb{P}}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient la solution de l'EDS du processus S :

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t^{\mathbb{P}} \right\} \quad \mathbb{P} - p.s.$$

ANNEXE B

CALCUL DU MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE POUR LA FONCTION D'UTILITÉ ISOÉLASTIQUE

B.1 Multiplicateur de Lagrange optimal de la proposition 2.1

Tel que démontré à la section 2.1, le multiplicateur de Lagrange optimal, λ^* , est déterminé à partir de la contrainte budgétaire sous la mesure $\mathbb{Q}$. Ainsi, en considérant l'utilité isoélastique présentée en (1.3) et à l'aide de l'équation (1.30) et de la valeur terminale optimale obtenue en (2.15), nous avons :

$$\begin{aligned}
 x_{ini} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} X_T^*] \\
 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} (\lambda^* \xi_T)^{-\frac{1}{\gamma}}] \\
 &= \exp\{-rT\} (\lambda^*)^{-\frac{1}{\gamma}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ \left(\left(r + \frac{\theta^2}{2} \right) T + \theta W_T^{\mathbb{P}} \right) \left(\frac{1}{\gamma} \right) \right\} \right] \\
 &= \exp \left\{ -rT + \left(r + \frac{\theta^2}{2} \right) \frac{T}{\gamma} \right\} (\lambda^*)^{-\frac{1}{\gamma}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ \frac{\theta}{\gamma} W_T^{\mathbb{P}} \right\} \right] \\
 &= \exp \left\{ -rT + \left(r + \frac{\theta^2}{2} \right) \frac{T}{\gamma} \right\} (\lambda^*)^{-\frac{1}{\gamma}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ \frac{\theta}{\gamma} (W_T^{\mathbb{Q}} - \theta T) \right\} \right] \\
 &= \exp \left\{ -rT + \left(r - \frac{\theta^2}{2} \right) \frac{T}{\gamma} \right\} (\lambda^*)^{-\frac{1}{\gamma}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ \frac{\theta}{\gamma} (W_T^{\mathbb{Q}}) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$= (\lambda^*)^{-\frac{1}{\gamma}} \exp \left\{ -rT + \left(r - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^2}{2\gamma} \right) \frac{T}{\gamma} \right\}.$$

En isolant λ^* on obtient :

$$\lambda^* = (1/x_{ini})^\gamma \exp \left\{ (1 - \gamma) \left(r + \frac{\theta^2}{2\gamma} \right) T \right\}.$$

Cette relation est illustrée à la figure B.1.

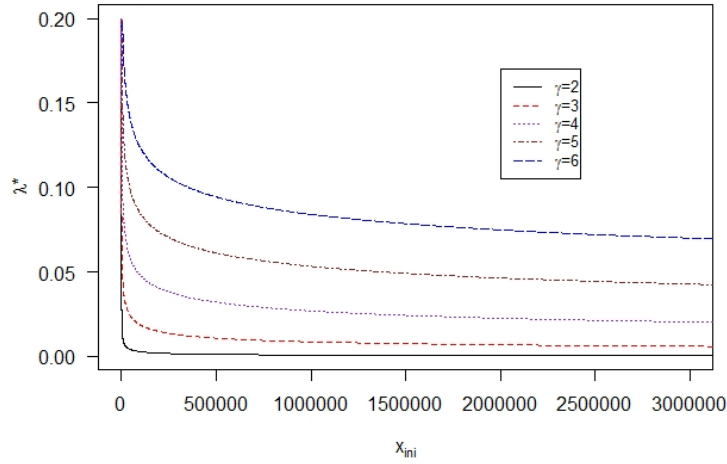


Figure B.1: Relation entre λ^* et x_{ini} de la proposition 2.1

B.2 Multiplicateur de Lagrange optimal du théorème 3.1

Tout d'abord, la proposition 2 de Tiong (2000) nous sera utile dans la détermination de la valeur du multiplicateur de Lagrange optimal λ^* du théorème 3.1 dans le contexte du problème d'optimisation (3.3).

Proposition B.1 (Proposition 2 de Tiong (2000)). *Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $k, Z \in \mathbb{R}$. Alors,*

$$\mathbb{E} \left[e^{ZX} \mathbb{1}_{\{X > k\}} \right] = \Phi \left(\frac{(\mu + \sigma^2 Z) - k}{\sigma} \right) e^{\mu Z + \sigma^2 Z^2 / 2} \quad (\text{B.1})$$

où Φ représente la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

Le même principe qu'à la section B.1 s'applique afin de déterminer la valeur du multiplicateur de Lagrange optimal dans le contexte d'optimisation de l'utilité du droit contingent d'une option d'achat. Ainsi, à partir du théorème 3.1 on obtient :

$$\begin{aligned} x_{ini} &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\xi_T X_T^*] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\xi_T \left(\left[\left(\frac{\lambda^* \xi_T}{a} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} - K \right] \frac{1}{a} + d \right) \mathbb{1}_{\left\{ \left[\left(\frac{\lambda^* \xi_T}{a} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} - K \right] \frac{1}{a} + d > \hat{x}(d) \right\}} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

En effectuant quelques manipulations algébriques sur l'événement caractérisant la fonction indicatrice, on obtient :

$$\left\{ \left[\left(\frac{\lambda^* \xi_T}{a} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} - K \right] \frac{1}{a} + d > \hat{x}(d) \right\} = \left\{ \left(\frac{\lambda^* \xi_T}{a} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} > (\hat{x}(d) - d) a + K \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{\lambda^* \xi_T}{a} < [(\hat{x}(d) - d) a + K]^{-\gamma} \right\} \\
&= \left\{ \xi_T < \frac{a}{\lambda^*} [(\hat{x}(d) - d) a + K]^{-\gamma} \right\} \\
&= \left\{ \exp \{-Y\} < \frac{a}{\lambda^*} [(\hat{x}(d) - d) a + K]^{-\gamma} \right\} \\
&\quad (B.3) \\
&= \left\{ Y > -\ln \left(\frac{a}{\lambda^*} [(\hat{x}(d) - d) a + K]^{-\gamma} \right) \right\}
\end{aligned}$$

où (B.3) a été obtenue en réexprimant ξ_T défini en (1.26) par

$$\xi_T \stackrel{\mathcal{D}}{=} e^{-Y} \quad \text{avec} \quad Y \sim \mathcal{N} \left(\left(r + \frac{\theta^2}{2} \right) T, \theta^2 T \right), \quad (B.4)$$

où l'égalité en distribution est notée $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$.

Afin d'alléger la notation, posons :

$$\widetilde{K}(\lambda^*, \hat{x}(d)) := -\ln \left(\frac{a}{\lambda^*} [(\hat{x}(d) - d) a + K]^{-\gamma} \right).$$

Ensuite, on peut réécrire (B.2) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
x &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\xi_T \left(\left[\left(\frac{\lambda^* \xi_T}{a} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} - K \right] \frac{1}{a} + d \right) \mathbb{1}_{\{Y > \widetilde{K}(\lambda^*, \hat{x}(d))\}} \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\xi_T}{a} \left(\frac{\lambda^* \xi_T}{a} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} \mathbb{1}_{\{Y > \widetilde{K}(\lambda^*, \hat{x}(d))\}} + \xi_T \left(d - \frac{K}{a} \right) \mathbb{1}_{\{Y > \widetilde{K}(\lambda^*, \hat{x}(d))\}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\lambda^*}{\alpha} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\xi_T^{(1-\frac{1}{\gamma})} \mathbb{1}_{\{\tilde{K}(\lambda^*, \xi_T) > \hat{x}(d)\}} \right] + \left(d - \frac{K}{\alpha} \right) \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\xi_T \mathbb{1}_{\{Y > \tilde{K}(\lambda^*, \hat{x}(d))\}} \right] \\
&= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\lambda^*}{\alpha} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^{-(1-\frac{1}{\gamma})Y} \mathbb{1}_{\{\tilde{K}(\lambda^*, \xi_T) > \hat{x}(d)\}} \right] + \left(d - \frac{K}{\alpha} \right) \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^{-Y} \mathbb{1}_{\{Y > \tilde{K}(\lambda^*, \hat{x}(d))\}} \right].
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Finalement, à partir de la proposition B.1, l'équation (B.5) devient :

$$\begin{aligned}
x_{ini} &= \frac{(\lambda^*)^{-1/\gamma}}{a^{(1-1/\gamma)}} \exp \left\{ - (1 - 1/\gamma) \left(r + \frac{\theta^2}{2} \right) T + (1 - 1/\gamma)^2 \frac{\theta^2}{2} T \right\} \Phi(d_{1,T}) \\
&\quad + \left(d - \frac{K}{a} \right) \exp \{ -rT \} \Phi(d_{2,T}),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
d_{1,T} &= \frac{\left(r + \frac{\theta^2}{2} \right) T - (1 - 1/\gamma) \theta^2 T - \tilde{K}(\lambda^*, \hat{x}(d))}{\theta \sqrt{T}}, \\
d_{2,T} &= d_{1,T} - \frac{\theta T}{\gamma \sqrt{T}}.
\end{aligned}$$

Puisqu'il n'est pas possible d'isoler algébriquement le λ^* satisfaisant la contrainte budgétaire, une approche numérique est plutôt utilisée afin d'obtenir la valeur de λ^* pour un x_{ini} donné. La relation entre x_{ini} et λ^* est dépeinte à la figure B.2.

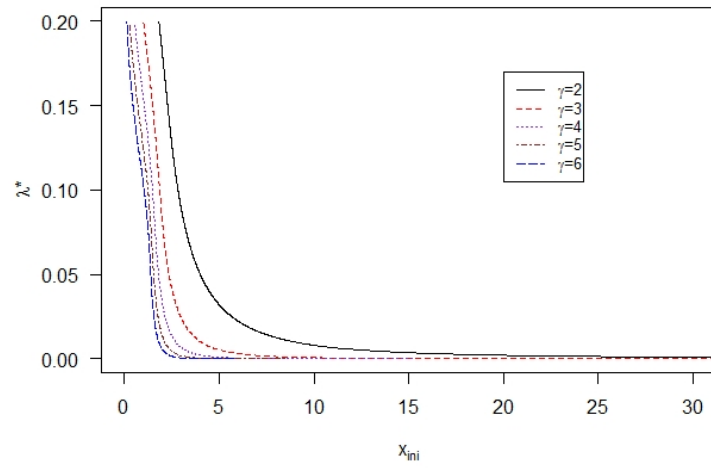


Figure B.2: Relation entre λ^* et x_{ini} du théorème 3.1

ANNEXE C

PROPRIÉTÉS MARTINGALES

C.1 Démonstration que le processus stochastique $\tilde{\xi}\tilde{S}$ est une martingale

Nous pouvons affirmer que le processus stochastique $\tilde{\xi}\tilde{S} := \{\tilde{\xi}_t\tilde{S}_t, t \geq 0\}$ défini sur l'espace de probabilité filtré $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}\}$ est une $\mathbb{P}$ -martingale, et donc satisfait les conditions présentées à la définition 1.11. En effet, puisque $\tilde{\xi}$ et $\tilde{S}$ sont chacun adaptés à la filtration $\mathbb{F}$, le produit des deux l'est aussi. Ensuite, à partir des définitions de $\tilde{\xi}_t$ et $\tilde{S}_t$, en (3.22) et (3.26), respectivement, on obtient que $\tilde{\xi}_t\tilde{S}_t \sim \mathcal{LN}\left(-\left(\tilde{r} - \tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\theta}^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}\right)t, (\sigma - \tilde{\theta})^2 t^2\right)$. Puisque la variable aléatoire $\tilde{\xi}_t\tilde{S}_t$ est toujours positive, $\tilde{\xi}_t\tilde{S}_t = |\tilde{\xi}_t\tilde{S}_t|$. De ce fait, la condition d'intégrabilité est satisfaite puisque tous les moments d'une distribution lognormale sont finis.

Finalement, à partir des définitions de $\tilde{\xi}_t$ et $\tilde{S}_t$ en (3.22) et (3.26), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [\tilde{\xi}_t\tilde{S}_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\exp \left\{ - \left(\tilde{r} - \tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\theta}^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} \right) t + (\sigma - \tilde{\theta}) W_t^{\mathbb{P}} \right\} | \mathcal{F}_s \right] \\ &= \exp \left\{ - \left(\tilde{r} - \tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\theta}^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\} \cdot \\ &\quad \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\exp \left\{ (\sigma - \tilde{\theta}) (W_t^{\mathbb{P}} - W_s^{\mathbb{P}} + W_s^{\mathbb{P}}) \right\} | \mathcal{F}_s \right] \end{aligned}$$

$$= \exp \left\{ - \left(\tilde{r} - \tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\theta}^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\} \cdot \exp \left\{ (\sigma - \tilde{\theta}) W_s^{\mathbb{P}} + \frac{(t-s)}{2} (\sigma - \tilde{\theta})^2 \right\} \quad (\text{C.1})$$

$$= \exp \left\{ - \left(\tilde{r} - \tilde{\alpha} + \frac{\tilde{\theta}^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} \right) s + (\sigma - \tilde{\theta}) W_s^{\mathbb{P}} \right\} \\ = \tilde{\xi}_s \tilde{S}_s. \quad (\text{C.2})$$

avec $\tilde{\theta}$ défini en (3.21) et où (C.1) provient des propriétés du mouvement brownien présentées à la définition 1.5. Finalement, on voit que (C.2) satisfait la troisième propriété d'une martingale. Ainsi, toutes les conditions sont satisfaites afin de vérifier que le processus $\tilde{\xi} \tilde{S}$ est une martingale.

ANNEXE D

CALCUL DU TAUX DE FRAIS ÉQUITABLE LORSQUE LE FONDS DISTINCT EST ENTIÈREMENT INVESTI DANS L'ACTIF RISQUÉ

D.1 Détermination du taux de frais équitable à partir de l'équation (4.1)

Le frais équitable d'un fonds distinct est celui qui en moyenne n'engendre aucune perte ni aucun profit à l'assureur. En d'autres mots, la somme des frais déduite du fonds distinct et accumulée par l'assureur correspond à la somme espérée qu'il devra déboursier afin d'honorer la garantie du fonds distinct à l'échéance.

On s'intéresse au cas particulier où le fonds distinct est uniquement investi dans l'actif risqué ($\nu_t = 1$ pour tout $t \in [0, T]$). La dynamique du processus stochastique représentant le fonds distinct est donc l'équivalent à la dynamique de l'actif risqué (3.25) en considérant que les frais c_f et c_s sont constamment appliqués au fonds.

Ainsi, à partir de l'équation de tarification équitable en (4.1) et en posant les paramètres du fonds distinct $a \equiv 1$ et $C_T = K \equiv G$, le taux de frais équitable est celui qui satisfait :

$$f_{ini} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} \left((F_T - G)^+ + G \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} \left((\tilde{S}_T - G)^+ + G \right) \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} \tilde{S}_T \mathbf{1}_{\{\tilde{S}_T > G\}} \right] + G \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} \mathbf{1}_{\{\tilde{S}_T \leq G\}} \right], \tag{D.1}
\end{aligned}$$

avec le processus $\tilde{S}$ tel que défini en (3.26). En utilisant la proposition B.1 et les propriétés de la distribution $\mathcal{LN}\left(\left(r - (c_s + c_f) - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right)$ de $\tilde{S}_T$ sous la mesure $\mathbb{Q}$, l'équation (D.1) devient :

$$f_{ini} = e^{-(c_s + c_f)T} \Phi(d_{3,T}) + e^{-rT} G \Phi(d_{4,T}), \tag{D.2}$$

avec

$$\begin{aligned}
d_{3,T} &= \frac{\left(r - (c_s + c_f) + \frac{\sigma^2}{2}\right)T - \ln(G)}{\sigma\sqrt{T}}, \\
d_{4,T} &= -d_{3,T} + \sigma\sqrt{T}.
\end{aligned}$$

On peut obtenir le taux de frais total équitable $(c_s + c_f)$ qui satisfait l'équation (D.2) ci-dessus en procédant de façon numérique. Par exemple, en utilisant la fonction *uniroot* en R , on obtient un taux de frais équitable de 2.448% pour les paramètres du chapitre 4. On obtient plutôt un frais équitable de 0.745% pour une garantie de $G = 0.75 \cdot f_{ini}$ et toutes choses étant égales par ailleurs au chapitre 4, et 1.533% pour un fonds distinct ayant une échéance de $T = 15$ et toutes choses étant égales par ailleurs au cas de base du chapitre 4.

RÉFÉRENCES

- Autorité des Marchés Financiers (2020). Fonds distincts - 8 questions répondues. Récupéré le 1 mai 2020 de <https://lautorite.qc.ca/grand-public/investissements/fonds/fonds-distincts/>
- Barsky, R. B., Juster, F. T., Kimball, M. S. et Shapiro, M. D. (1997). Preference parameters and behavioral heterogeneity : An experimental approach in the health and retirement study. *The Quarterly Journal of Economics*, 112(2), 537–579.
- Bernard, C. et Le Courtois, O. (2012). Asset risk management of participating contracts. *Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance*, 6(2).
- Björk, T. (2009). *Arbitrage theory in continuous time*. Oxford University Press.
- Björk, T. (2012). Equilibrium theory in continuous time. *Lecture Notes*, 2.
- Boyd, S. et Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimisation*. Cambridge University Press.
- Boyle, P. P. et Hardy, M. R. (1997). Reserving for maturity guarantees : Two approaches. *Insurance : Mathematics and Economics*, 21(2), 113–127.
- Carpenter, J. N. (2000). Does option compensation increase managerial risk appetite? *The Journal of Finance*, 55(5), 2311–2331.

- Chen, A., Hieber, P. et Nguyen, T. (2018). Constrained non-concave utility maximisation : An application to life insurance contracts with guarantees. *European Journal of Operational Research*.
- Chen, A., Hieber, P. et Nguyen, T. (2019). Constrained non-concave utility maximization : An application to life insurance contracts with guarantees. *European Journal of Operational Research*, 273(3), 1119–1135.
- Cox, J. C. et Huang, C.-f. (1989). Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process. *Journal of Economic Theory*, 49(1), 33–83.
- Delong, Ł. (2014). Pricing and hedging of variable annuities with state-dependent fees. *Insurance : Mathematics and Economics*, 58, 24–33.
- Enrich, D. (2020). Trump is losing money in the markets, too. *The New York Times*.
Récupéré le 22 mai 2020 de <https://www.nytimes.com/2020/03/14/business/trump-wealth-markets-coronavirus.html>
- Fisher, M. L. (1981). The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. *Management Science*, 27(1), 1–18.
- Inada, K.-I. (1963). On a two-sector model of economic growth : Comments and a generalization. *The Review of Economic Studies*, 30(2), 119–127.
- Ingersoll, J. E. (1987). *Theory of financial decision making*, volume 3. Rowman & Littlefield.
- Karatzas, I., Lehoczky, J. P. et Shreve, S. E. (1987). Optimal portfolio and consumption decisions for a “small investor” on a finite horizon. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 25(6), 1557–1586.

- Korn, R. (1997). *Optimal portfolios : stochastic models for optimal investment and risk management in continuous time*. World Scientific.
- Lamberton, D. et Lapeyre, B. (1997). *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses.
- Lin, H., Saunders, D. et Weng, C. (2017). Optimal investment strategies for participating contracts. *Insurance : Mathematics and Economics*, 73, 137–155.
- Lynch, D. J., Heath, T., Telford, T. et Long, H. (2020). U.s. stock market suffers worst crash since 1987, as americans wake up to a new normal of life. *The Washington Post*. Récupéré le 22 mai 2020 de <https://www.washingtonpost.com/us-policy/2020/03/12/markets-stocks-today-coronavirus/>
- MacKay, A. et Ocejo, A. (2019). Portfolio optimization with a guaranteed minimum maturity benefit and risk-adjusted fees. *Available at SSRN 3486858*.
- McCabe, C. et Ostroff, C. (2020). Stocks plunge 10% in dow's worst day since 1987. *The Wall Street Journal*. Récupéré le 22 mai 2020 de <https://www.wsj.com/articles/global-stocks-follow-u-s-markets-lower-11583975524>
- Merton, R. C. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty : The continuous-time case. *The Review of Economics and Statistics*, 247–257.
- Merton, R. C. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory* 3, 373–413.
- Moenig, T. et Zhu, N. (2018). Lapse-and-reentry in variable annuities. *Journal of Risk and Insurance*, 85(4), 911–938.

- Norstad, J. (1999). An introduction to utility theory. *Unpublished manuscript at [http://homepage. mac. com/j. norstad](http://homepage.mac.com/j.norstad).*
- Pennacchi, G. G. (2008). *Theory of asset pricing*. Pearson/Addison-Wesley Boston.
- Pliska, S. R. (1986). A stochastic calculus model of continuous trading : optimal portfolios. *Mathematics of Operations Research*, 11(2), 371–382.
- Reichlin, C. (2013). Utility maximization with a given pricing measure when the utility is not necessarily concave. *Mathematics and Financial Economics*, 7(4), 531–556.
- Rockafellar, R. T. (1970). *Convex analysis*. Numéro 28. Princeton University Press.
- Rosenthal, J. S. (2006). *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific Publishing Company.
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance II : Continuous-time models*, volume 11. Springer Science & Business Media.
- Tiong, S. (2000). Valuing equity-indexed annuities. *North American Actuarial Journal*, 4(4), 149–163.
- Wakker, P. P. (2008). Explaining the characteristics of the power (crra) utility family. *Health economics*, 17(12), 1329–1344.