UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

# REGARD SUR L'IM-PERFECTION MATHÉMATIQUE ET SES POSSIBILITÉS AU SECONDAIRE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAITRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

MARIE-LINE LAVALLÉE LAMARCHE

AOUT 2020

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

*Avertissement*

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

# REMERCIEMENTS

D'abord, je remercie mon directeur Jean-François Maheux pour l'espace de liberté qu'il m'a offert, pour sa confiance, pour son support, pour sa rigueur, pour son sens de l'humour et pour sa patience indéfectible.

Je remercie les membres du Laboratoire épistémologie et activité mathématique, particulièrement ceux qui étaient présents à mon arrivée ; Raquel, Aline, Karl, Sabrina, Geneviève, Jérôme. Ils m'ont catapulté à grande vitesse dans le monde de la recherche. Je n'aurais pu rêver de meilleur environnement initial. Merci.

Je tiens à remercier profondément la professeure Francesca Morselli de l'Université de Gênes. La générosité et les rétroactions qu'elle m'a offertes durant toute la durée de mon stage avec elle sont incomparables. Merci.

Merci aux étudiants que j'ai croisés pendant mon parcours à la maitrise. Particulièrement, Sarah et Mathieu qui ont été présents du début à la fin ; Fanny, Catherine, Charlotte, et Stéphanie dont tous les échanges me furent importants. Merci aux professeurs Caroline et Mireille avec qui j'ai eu de la chance de travailler. M.Tanguay, M.Hitt, Valériane, Luis, David, que ce soit dans le cadre de vos recherches, dans le contexte d'un comité de programme, ou dans le cadre d'un cours, je suis reconnaissante de votre contribution à ma formation et au climat de la maitrise à l'UQAM. Votre apport a été pour moi et continue d'être non-négligeable.

Pour finir, je ne peux passer sous silence le soutien continu que m'a offert ma grand-mère Yolande et ma mère Marie-Suzanne ; de même que le soutien continu de mon copain Guillaume qui ne cesse de me surprendre et de m'inspirer par son insaisissable soif d'apprendre. Merci.

« À la famille »

« Pour ce qui est de l’avenir, il ne s’agit pas de le prévoir,
mais de le rendre possible. »

Antoine de Saint-Exupéry (1948) Citadelle.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

(GENÈSE D'UNE) PROBLÉMATIQUE .............................................................13

1.1 Origine de mon questionnement – Ou : Pourquoi ai-je choisi d'enseigner les mathématiques ?.............................................................14

1.2 Un premier regard sur le côté imparfait des mathématiques .............................15

1.2.1 Cours d'histoire des mathématiques – Hiver 2013 .............................15

1.2.2 Cours Regards mathématiques – Automne 2013.............................21

1.2.3 Conférence de Jean-François Maheux – 28 septembre 2015 .............................23

1.2.4 Nouvelles lectures et discussions – Janvier 2016 .............................27

1.3 Un triple questionnement.............................................................30

CHAPITRE II

CARACTÉRISTIQUES DES DIMENSIONS PARFAITES ET IMPARFAITES DES MATHÉMATIQUES .............................................................32

2.1 Des manifestations mathématiques éclairant l'im-perfection : le cas des fractions étranges.............................................................33

2.1.1 Des objets mathématiques étranges et mathématiquement intéressants ..34

2.1.2 Le travail mathématique sur les fractions étranges.............................40

2.1.3 Toutes les erreurs ne sont pas égales ni éternelles. .............................47

2.1.4 L'imperfection encore plus présente qu'on le pense ? .............................53

2.1.5 Synthèse sur les fractions étranges.............................................................55

2.2 La perfection du point de vue de la philosophie .............................58

2.3 Des développements mathématiques éclairants l'im-perfection : le cas de la rigueur.............................................................62

2.3.1 De la rigueur « empirique » à la rigueur « calculatoire » ........................ 63

2.3.2 L'ajout d'une nouvelle façon d'être rigoureux ...................................... 66

2.3.3 Des débats autour d'une forme de rigueur « conceptuelle » ................... 69

2.3.4 La rigueur moderne : Le formalisme.................................................... 72

2.3.5 Retour de la rigueur vers l'algorithmique............................................. 76

2.3.6 Synthèse sur la rigueur ........................................................................ 83

CHAPITRE III

SIGNIFICATIONS POSSIBLES POUR L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE...... 85

3.1 Pourquoi apporter l'im-perfection des mathématiques à l'école ?.................. 85

3.1.1 Mettre les élèves au centre de la résolution de problèmes ...................... 86

3.1.2 Un meilleur contrôle et plus de confiance en mathématiques ................. 89

3.1.3 Libérer l'enfant, la nature des mathématiques et son activité ................. 94

3.1.4 Synthèse - Pourquoi apporter l'im-perfection des mathématiques à l'école ?................................................................................................. 97

3.2 L'im-perfection à travers quelques travaux/explorations en didactique des mathématiques ............................................................................................ 99

3.2.1 Le potentiel éducatif d'erreurs mathématiques...................................... 99

3.2.2 Des confusions autour des concepts de pente, échelle et angle ............ 105

3.2.3 Lorsque raisonnements empiriques et déductifs se côtoient…............... 108

3.2.4 Polysémie du procept, du langage et des symboles ............................. 112

3.2.5 Diverses possibilités de l'algorithme de division d'Euclide ................. 117

3.2.6 Langage imprécis et réponses précises................................................ 120

3.2.7 Des règles mathématiques *limitées* à exploiter .................................... 123

3.2.8 Synthèse - Comment amener et reconnaître des dimensions d'im-perfection mathématiques à l'école ?.................................................................. 127

CHAPITRE IV

EXPLORATIONS EMPIRIQUES......................................................................... 131

4.1 L'analyse conceptuelle vers la recherche d'une approche cohérente avec l'idée d'im-perfection........132

4.1.1 Les débuts........132

4.1.2 Analyse sur la notion d'analyse conceptuelle dans une perspective d'explorer l'im-perfection mathématique........134

4.1.3 Éléments de planification des séances........146

4.2 Explorations empiriques........155

4.2.1 Séances et classes d'exploration........156

4.2.2 Récit........157

4.2.3 Analyse de la séance........161

4.3 Bilan et impressions des explorations........167

CHAPITRE V

CONCLUSION........170

BIBLIOGRAPHIE........182

LISTE DES FIGURES


Figure Page

Figure 1.1 – Calcul réalisé à l'aide de Hiéroglyphes (XVIe siècle avant J.-C.) ......... 18

Figure 1.2 – Lemmes proposés par Archimède environ trois siècles av. J.-C ........... 18

Figure 1.3 – Exemple d'exploration de la cycloïde par Roberval vers 1634 ............. 19

Figure 1.4 – Deux sonas (d'après Gerdes, 2009) ..................................................... 25

Figure 1.5 – Lakatos 1984 ......................................................................................... 28

Figure 2.1 – *Mistake* et *misteak* (tiré de Carman, 1971, p.109) ................................ 35

Figure 2.2 – Énoncé d'un théorème (tiré de Fried & Goldberg, 2010) ...................... 48

Figure 3.1 – Cercle de rayon 3 en taxigéométrie (tiré de Borasi, 1993) ................. 102

Figure 3.2 – Trois triangles avec médiane (tiré de Chazan, 1993a, p.361) .............. 109

Figure 3.3 – Extrait de verbatim (tiré de Rowland,1996) ....................................... 122

Figure 3.4 – Expanded Law of Linearity ................................................................. 123

Figure 4.1 – Exemple de deux fractales différentes ayant le même motif de départ 151

Figure 4.2 – Différents types de fractales ............................................................... 151

Figure 4.3 – Extraits de la séance sur les fractales ................................................. 152

Figure 4.4 – Quelques questions de programmation ............................................. 153

Figure 5.1 – Exercice supplémentaire, tiré de Puissance 2, Grand Duc.................. 180

LISTE DES TABLEAUX


Tableau Page

Tableau 2.1 Tiré de Carman (1971, p.110) .......... 37

Tableau 2.2 Tiré de Carman (Traduction libre, 1971, p.112) .......... 38

Tableau 2.3 Tiré de Carman (traduction libre, 1971, p.112) .......... 39

Tableau 2.4 Tiré de Boas Jr (traduction libre, 1972, p.21) .......... 41

Tableau 2.5 Tiré de Fried & Goldberg (2010, p. 363) .......... 48

Tableau 3.1 Tiré de Mamolo (2010) .......... 115

Tableau 3.2 Tiré de Mamolo (2010) .......... 115

Tableau 3.3 Tiré de Mamolo (2010) .......... 116

# RÉSUMÉ

Cette recherche vise à explorer la nature des mathématiques en clarifiant ce que l'on entend par perfection et imperfection des mathématiques en éducation. Ce regard sur les mathématiques permettra de penser l'éducation mathématique et l'activité mathématique de la classe. Mes questions de recherches sont les suivantes :

- *En mathématiques, quelles sont les caractéristiques qui contribuent à définir ce qu'on peut voir comme la dimension parfaite et la dimension imparfaite des mathématiques ?*
- *Comment un regard sur la perfection-imperfection des mathématiques nous conduit-il à penser l'éducation mathématique des élèves ?*
- *À quoi peut ressembler une situation mettant en valeur une dualité perfection-imperfection des mathématiques, et que se passe-t-il lorsque des élèves sont mis en situation de vivre les mathématiques de cette manière ?*

Pour ce faire, les caractéristiques des dimensions parfaites et imparfaites des mathématiques ont été relevées. Ensuite, les significations possibles d'un tel regard pour l'éducation mathématique ont été explorées. Finalement, des explorations empiriques au secondaire ont permis d'illustrer la possibilité d'apporter ce regard différent en classe. L'im-perfection mathématique enrichie les possibilités mathématiques pour la classe du secondaire. L'animation de ce genre de séance est exigeante pour l'enseignant car beaucoup de mathématiques sont émergentes et imprévues. L'im-perfection des mathématiques représente une possibilité d'activités mathématiques différentes au Programme de formation en mathématique au secondaire du Québec qui mettent en valeur un certain côté humain, imparfait, beau, en construction et dynamique aux mathématiques.

Mots clés : perfection, imperfection, faire mathématique, activité mathématique, éducation mathématique, didactique des mathématiques, mathématique au secondaire.

# ABSTRACT

This research aims to explore the nature of mathematics by clarifying what it means by the perfection and imperfection of mathematics. This look at mathematics will make it possible to think of mathematical education and mathematical activity in these terms. My research questions are as follows:

- In mathematics, what are the characteristics that help define what can be seen as the perfect dimension and the imperfect dimension of mathematics?
- How does a look at the perfection-imperfection of mathematics lead us to think about the mathematical education of students?
- What is a situation that highlights a perfection-imperfection duality of mathematics can look like, and what happens when students are put in a situation of living mathematics in this way?

To do this, the characteristics of the perfect and imperfect dimensions of mathematics were described. Next, the possible meanings of such a look at mathematics in regard with education were explored. Finally, an empirical exploration in high school allowed to anchor the possibility of bringing different views of mathematics to the classroom (such as humanistic, in construction, un-perfect, dynamic, beautiful…).

Our findings are that the planning of this teaching is more demanding for the teacher because the mathematics are not predetermined and the teacher must be flexible according to the evolution of the mathematical possibilities created by the learners.

The use of im-perfect mathematics stimulated student interest in mathematics. They demonstrated active participation. Their problem solving allowed them to learn according to a logic that made them ask questions to deepen their mathematic knowledge. So, we can conclude looking at mathematics trough im-perfection lense could represent a possibility for high school mathematics education.


Keywords: perfection, imperfection, doing mathematics, mathematical activity, mathematics education, mathematics didactics, high school mathematics.

# INTRODUCTION

Cette recherche s'ancre dans une démarche exploratoire dans laquelle on vise à explorer la nature des mathématiques en éducation en clarifiant ce que l'on entend par perfection et imperfection des mathématiques. Ce regard sur les mathématiques va permettre de penser l'éducation mathématique et l'activité mathématique en classe.

Le premier chapitre présente la problématique, j'y décris la manière dont la vision parfaite des mathématiques que j'avais s'est radicalement transformée au fils d'événements et de mes rencontres mathématiques. Parallèlement à ces changements, mon regard sur la didactique et sur l'enseignement des mathématiques a aussi changé.

Le second chapitre expose des caractéristiques permettant d'éclaircir les dimensions parfaites et imparfaites des mathématiques.  D'abord, on s'intéresse à un corpus portant sur les « fractions étranges ». Ensuite, on explore un point de vue issu de la philosophie à propos de paradoxes de la perfection. Enfin, on se tourne vers des textes historiques et en philosophie des mathématiques qui tournent autour de la notion de rigueur et de ses changements.

Le troisième chapitre présente des motivations issues de l'éducation pour amener l'im-perfection mathématique en classe. Puis, on expose des manières variées de reconnaitre et apporter l'im-perfection en classe.

Le quatrième chapitre présente les développements de notre approche d'analyse conceptuelle en cohérence avec les mathématiques vue comme im-parfaites. Ensuite, on illustre un fragment de ce que ça peut être, travailler l'im-perfection en classe.

Enfin, le dernier chapitre offre au lecteur une conclusion de ce mémoire. J'y résume cette recherche et présente de nouveaux questionnements et les limites de ce travail.

# CHAPITRE I

# (GENÈSE D'UNE) PROBLÉMATIQUE

Ce chapitre relate mes questionnements initiaux autour de la nature des mathématiques et de ce que je nomme l'im-perfection mathématiques. Ce chapitre est divisé en trois sections, j'y présente divers événements de mon cheminement de formation en enseignement des mathématiques en ordre chronologique. D'abord, dans la section qui suit, j'expose ma vision initiale (et naïve) des mathématiques. Cette vision initiale était importante pour moi, car aussi naïve ou clichée qu'elle puisse être, elle représentait alors toute ma motivation à enseigner les mathématiques. Dans la seconde section du chapitre, je retrace les moments clés de mes expériences de formation qui sont venus secouer ma vision initiale et parfaite des mathématiques. Si ma vision des mathématiques parfaites s'effritait, alors ma motivation à me former en enseignement des mathématiques s'effritait aussi… Perdre ma vision initiale des mathématiques, c'était perdre tout sens à ma formation. Il me fallait donc remplacer cette vision naïve par autre chose, peu importe ce qu'elle pouvait être. Si les mathématiques ne sont pas parfaites, alors que sont-elles ? Que peuvent-elles être ? Et qu'est-ce que ça veut dire pour l'éducation ? Voilà, l'essence même de la problématique de ce mémoire autour de « l'im-perfection » des mathématiques. La dernière section du chapitre est la formulation de mes questions de recherche.

## 1.1 Origine de mon questionnement – Ou : Pourquoi ai-je choisi d'enseigner les mathématiques ?

L'idée qu'une carrière dans le domaine scientifique est stable, garante d'avenir et surtout facilement prévisible et contrôlable a longtemps été ancrée dans mes croyances. Les personnes de mon entourage qui ont fait le choix d'une telle carrière me disaient que ce choix s'est imposé de lui-même, de par sa nature rassurante. Contrairement aux carrières en arts où la perfection et le consensus me semblaient plus difficilement atteints, les carrières scientifiques où les mathématiques sont inévitables, m'apparaissaient contenir des solutions optimales et suivant certains principes universellement admis. Pour la majorité des gens qui m'entouraient (et pour moi-même avant !), atteindre le vrai et être à même de le démontrer, c'était le propre des mathématiques. Les mathématiques étaient parfaites, bonnes ou pas, blanches ou noires. Et c'est justement dans cette absence de doute que certains affirment encore pouvoir atteindre le vrai, la beauté, la pureté de la certitude, tout simplement. N'est-ce pas rassurant que de savoir que l'on a raison ? C'est d'ailleurs ce qui m'a fait quitter le domaine de la linguistique vers celui de l'enseignement des mathématiques : je cherchais un domaine où les débats terminologiques n'existaient pas, et où une parfaite exactitude, confortable et rassurante, pouvait être atteinte. Je pensais que les mathématiques me permettraient d'éviter l'usage des mots et l'explication des sens de ceux-ci. Il me semblait qu'en mathématique, contrairement en linguistique, tout pouvait être défini et uniformément compris par tous ; la science parfaite par excellence.

Je voulais enseigner les mathématiques, car je les voyais comme un savoir parfait.

Je voulais partager ce qui était beau, bon, certain et clair, et les présenter comme une base à pratiquement tout raisonnement critique possible. Telles que je les voyais, elles pouvaient être aussi la base à tout processus de création cohérent et efficace, et même comme base de langage. Naïvement, j'avais une intuition que les mathématiques, par leur nature « externe à l'homme » -parfaites-, pouvaient être transférées et adaptées à toutes situations humaines. C'était même pour moi le fondement de l'enseignement des mathématiques, et leur apprentissage devenait même un devoir. Et pourtant… Cette vision très forte et très présente, rigide et absolue, de la perfection des mathématiques allait bientôt être ébranlée. Dans la section qui suit, je retrace les moments clés des expériences et réflexions qui m'ont menée à m'intéresser au sujet de ce mémoire autour de « l'imperfection » des mathématiques. Ces moments clés sont venus chambouler la vision des mathématiques que j'avais alors.

## 1.2 Un premier regard sur le côté imparfait des mathématiques

### 1.2.1 Cours d'histoire des mathématiques – Hiver 2013

J'ai subi mon premier « choc mathématique » en 2013, alors que j'étais en deuxième année du baccalauréat en enseignement des mathématiques au secondaire. Dans un cours d'histoire des mathématiques, on nous a parlé de Gödel et de son théorème d'incomplétude. Soudainement, tout s'est figé autour de moi. L'incomplétude ? Ce que j'en comprenais alors est que les mathématiques ne sont peut-être pas un système logique complètement démontrable. Des « énoncés indémontrables » en mathématique, cette expression me semblait intrinsèquement si fausse, si laide… et pourtant c'était tout à fait possible. Je devais avoir mal entendu, car les mathématiques, n'est-ce pas, sont parfaites, un grand tout cohérent prévisible stable! Du moins, c'est ce qu'on m'a toujours raconté et c'est ce que j'ai toujours vécu… Comment se pouvait-il qu'après 15 ans de classes mathématiques (6 années au primaire, 5 au secondaires, 2 au CEGEP, 2 à l'université), d'« apprentissage » des mathématiques, on ne m'ait jamais dit au passage que notre noble discipline comportait peut-être des failles ? Pourquoi ce leurre ? Moi qui la voyais comme solution à tout. J'apercevais pour une première fois une limite possible à sa portée. Mes motivations à enseigner les mathématiques et mon monde s'en trouvaient renversés. À quoi avait donc servi notre éducation mathématique pendant tout ce temps ? Pour une première fois, on me présentait des mathématiques faillibles, et cette faillibilité était peut-être même plus fidèle à leur réelle nature ! Avais-je développé une vision des mathématiques erronée ? Les mathématiques authentiques, les vraies mathématiques étaient-elle finalement des mathématiques faillibles ?

Outre la rencontre du théorème de Gödel, ce cours d'histoire des mathématiques m'a sensibilisée au pouvoir des mathématiques dans le système d'éducation. Par exemple, lors de la Révolution française, les mathématiciens ont occupé une place importante au niveau politique et social. Charbonneau (1993) raconte que plus la révolution avançait, plus le système d'éducation se désintégrait. Or, la société française qui se reconstruisait sur des bases de « liberté, égalité, fraternité » ne pouvait laisser au hasard la construction d'un nouveau système d'éducation. Dans ce temps de grande révolution scientifique où l'on rêvait du citoyen libre, rationnel et éduqué, les mathématiciens avaient déjà de l'influence dans divers organismes de l'état. Ils ont orienté le débat en mettant les mathématiques au cœur du système d'éducation (Charbonneau, 1993). Ainsi, ces mathématiques sont devenues « le passage obligé pour une importante partie de l'élite nationale » (Charbonneau, 1993, p. 38).

La découverte de ce mouvement de l'histoire m'a rendue plus apte à identifier les besoins de la société en ce qui concerne les mathématiques à apprendre. Le choix des contenus mathématiques à apprendre n'est donc pas complètement indépendant de la société dans laquelle ils sont enseignés… Ces mathématiques scolaires sont donc déterminées au moins en partie par d'autres facteurs que les mathématiques elles-mêmes. Encore de nos jours, les conséquences de l'enseignement des mathématiques ne sont pas neutres. Par exemple, en France la sélection des élèves par la plupart des grandes écoles repose sur le niveau mathématique des élèves (Albouy & Wanecq, 2003). Au Québec, le choix d'une séquence mathématique au secondaire est source d'inégalité sociale, car une de ces options réduit de plus du ¾ les options de programme au CEGEP (Labrosse, 2013). Tous ces éléments ont eu pour effet d'amorcer une première réflexion sur les mathématiques que j'appelle maintenant « scolaires », et que je différencie des mathématiques au sens large. Ce qui me troublait le plus de cette expérience est qu'il m'a fallu un cours d'histoire des mathématiques à la formation des maitres pour que, pour une première fois, on aborde la nature et la fonction de sélection des mathématiques elles-mêmes. J'avais l'impression que les mathématiques scolaires se *devaient* d'être parfaites afin de répondre au rôle de sélection qu'on leur avait peut-être involontairement assigné. Aujourd'hui, je me demande si ce rôle de sélection est toujours nécessaire ? Et du même coup, leur image de perfection est-elle toujours nécessaire ?

Parallèlement à ce cours, je faisais une lecture dirigée de textes mathématiques anciens. Ces lectures de textes anciens directement produits par les mathématiciens d'une autre époque peuvent être comparées à un voyage dans le temps et l'espace (Guillemette, 2015). Via ces lectures souvent étonnantes, j'ai rencontré des formes de mathématiques qui sont venues encore une fois bousculer ma vision de celles-ci. Par exemple, j'ai été très surprise par Fermat (mathématicien français du 17e siècle) qui présentait ses résultats sans les démontrer. Personne dans la communauté scientifique ne semblait lui dire qu'il avait tort ou que c'était insuffisant et personne ne remettait en question son activité mathématique. Surtout, j'ai réalisé qu'il y a plus qu'une seule façon de faire des mathématiques et ces façons dépendaient du lieu, de l'époque et de la culture dans lesquelles les mathématiques étaient faites. Voici quelques passages auxquels j'ai été confrontée et qui ont alimentés mes réflexions en ce sens. Chacun de ces exemples a contribué à modifier l'image des mathématiques uniques, uniformes et parfaites que j'avais avant de commencer ma formation des maitres (tirés de Guillemette, 2015) :

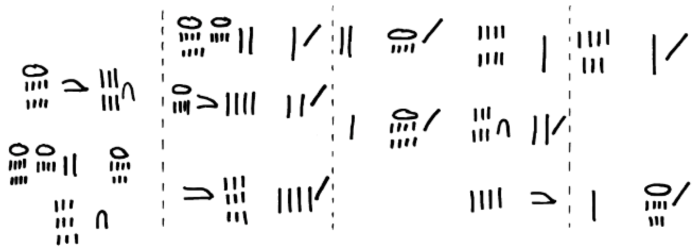

Figure 1.1 – Calcul réalisé à l'aide de Hiéroglyphes (XVIe siècle avant J.-C.)

Rédigé (probablement) par un scribe, si l'on ne m'avait pas dit que cette image était un calcul mathématique, j'aurais pu croire que c'était un motif particulier de tapisserie moderne. Pour me permettre d'apprécier et découvrir ces mathématiques, on a dû m'informer que : s'en était ; le sens des différents symboles ; l'énoncé du problème du papyrus de Rind. Cette image représente un algorithme de partitionnement d'un nombre. Ce même calcul fait à l'aide de l'algorithme de division traditionnelle dans nos écoles québécoises est très différent. Ce premier exemple est venu bousculer pour moi ce qui est mathématique ou non, notamment au niveau de l'apparence et de l'allure de ce qui est mathématique.

**Lemmes.**

1 *Si on retranche une grandeur d'une grandeur, et si le même point est centre de gravité à la fois de la grandeur entière et de la grandeur retranchée, ce même point est le centre de gravité de la grandeur qui reste.*

Figure 1.2 – Lemmes proposés par Archimède environ trois siècles av. J.-C

Ensuite, au-delà des symboles, ici j'arrivais à lire et à accéder au sens direct de cette traduction. Néanmoins une traduction supplémentaire s'est faite dans ma tête pour accéder au sens mathématique « traditionnel » (pour moi) de ce Lemmes. Le vocabulaire « mathématique » utilisé est ancré dans le réel et s'apparente au vocabulaire utilisé en physique. Ici, le centre de gravité est l'équivalent du point d'intersection des trois hauteurs de ce triangle (ou des trois droites passant par les sommets du triangle et dont chacune est perpendiculaire au côté opposé au sommet leur appartenant). Archimède réalisait des « théorèmes mécaniques ». Ce second exemple a changé pour moi ce que pouvait être les concepts mathématiques, car ici le centre de gravité était traité comme un objet mathématique. Je me demandais alors, y-a-t-il des limites à ce qu'on peut considérer comme objet mathématique ?

> ***Règle générale***
>
> **Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données) examinez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante : de tous ces mouvements composés en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.**

***Onzieme exemple, de la Roulette ou Trochoïde de M. de Roberval***

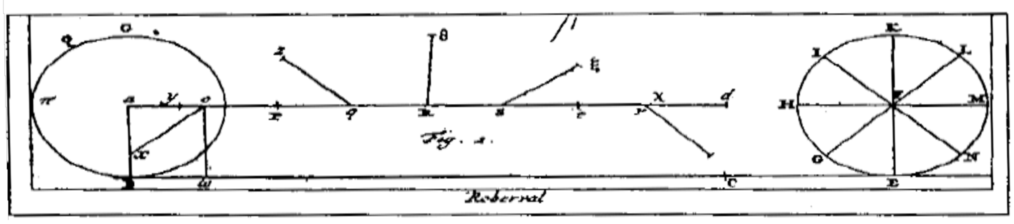

Figure 1.3 – Exemple d'exploration de la cycloïde par Roberval vers 1634

Ici, Roberval utilisait le mouvement pour générer une méthode permettant de tracer les tangentes (*touchantes* dans le texte) à un cercle. Sa méthode fonctionne et elle est défendue par Roberval à l'aide de principe mécanique (Guillemette, 2015). Ici, en utilisant des principes mécaniques pour justifier sa méthode pour tracer une tangente, Roberval utilise des arguments de nature empirique. Sa méthode fonctionne car « on le voit » et nécessairement c'est ce qui arrivera par « mouvement ». Dans cet exemple, la nature même du raisonnement mathématique me semble différente de ce à quoi j'ai été exposée dans mes expériences scolaires. Roberval ne prouve pas à l'aide d'une méthode déductive et formelle, mais bien à l'aide du mouvement. Je ne crois pas qu'un seul de mes enseignants de mathématiques passés aurait pu accepter une telle explication de ma part (en tant qu'élève). C'est pourquoi ces mathématiques au niveau des justifications émises ne me semblaient pas être mathématiques de prime abord. À tout le moins, elles n'étaient pas en correspondance avec ma vision des mathématiques initiales. Est-ce que la validité des mathématiques serait finalement dépendante d'une époque ?

Ma vision de l'activité mathématique s'est donc radicalement transformée tant sur leur apparence, sur la nature des concepts mathématiques possibles que sur la nature des raisonnements possibles. Ce qui était une activité formelle : très étroite, prédéterminée, contrainte (à l'image de mon expérience dans les mathématiques scolaires), abstraite, platonicienne, hors de nous, ordonnée, … est devenue une activité beaucoup plus libre, diversifiée et aussi beaucoup plus près de nos préoccupations humaines. Je découvrais un élargissement des possibilités mathématiques. J'ai réalisé que l'activité mathématique se révèle propre à chaque individu, car il n'y avait pas deux mathématiciens qui présentaient leurs résultats de la même façon. Elle est relative à la culture dans laquelle on baigne. En effet, à chacune des lectures j'ai vécu un véritable « choc culturel » (Barbin, 1997) car chacun des textes historiques nous présente des mathématiques bien différentes des mathématiques très formelles qui m'ont été présentées à l'école. Et j'en suis venue au constat qu'on ne peut pas vraiment parler des mathématiques d'aujourd'hui sans faire référence à : où nous sommes, et/ou avec qui nous parlons… Pour moi, finalement, le contexte social, culturel, historique dans lequel le mathématicien se trouve colore et définit l'activité mathématique qui y prend naissance. Ça aussi c'était une découverte qui venait secouer ma vision des mathématiques comme étant formelles, parfaitement unies et universelles.

Ces derniers éléments correspondent à ce que Hersh (1998) désigne comme une perspective socioculturelle et historique sur les mathématiques. Dans un bref[1] article, il explique ainsi qu'il y a d'autres visions des mathématiques que celles présentées par le formalisme. En effet, il propose que les mathématiques ne soient ni mentales, ni

---

[1] Hersh a aussi écrit um livre de plus de 300 pages sur le sujet. Ici, je fais référence à son court article.

tangibles, mais bien une vérité socioculturelle et historique. Au même titre, par exemple, que nos carrières, la religion, nos valeurs, l'histoire d'Hamlet, la bible, la théorie de l'évolution de Darwin et ce mémoire de maitrise qui sont tous des vérités socioculturelles, les mathématiques aussi en sont une. Certes, la bible matérielle « existe » en dehors de la religion, mais son existence en tant que parole divine n'existe qu'à l'intérieur d'une religion. Le sens et l'importance que l'on accorde à ces vérités socioculturelles sont définis par le contexte culturel d'une civilisation, à une époque donnée, auprès d'individus ciblés. En ce sens, elles n'auraient donc pas de réalité (ou du moins, pas la même réalité) en dehors de la culture où nous sommes.[2] Réalisant cela, j'ai mieux compris que la réalité des mathématiques « parfaites » est surtout le propre de la culture très formelle des mathématiques scolaires avec lesquelles j'ai grandi. Cette réalité est *une* manière de faire des mathématiques et d'autres façons de faire des mathématiques existent comme j'ai pu le découvrir à la lecture des divers textes historiques précédents.

### 1.2.2 Cours Regards mathématiques – Automne 2013

J'ai poursuivi mon baccalauréat en enseignement des mathématiques en mettant cette idée d'incomplétude et de relativité des mathématiques de côté, pour plutôt me centrer sur ma formation d'enseignante en mathématiques. J'ai donné le meilleur de moi-même à planifier des séquences d'enseignements selon des analyses conceptuelles réalisées au préalable. Pour chaque période d'enseignement – peu importe le sujet –, il me fallait définir mes objectifs, avoir une intention pédagogique, choisir des exercices en lien avec cette dernière et réaliser le tout en cohérence avec le programme. Pour

[2] Imaginons un instant que des extraterrestres existent. Nous leur envoyons les Éléments d'Euclide. Y reconnaitront-ils des mathématiques ? Imaginons un instant que les envois postaux au travers le temps existent. Nous envoyons un plan cartésien à ce scrible égyption. Reconnaitra-t-il une forme d'activités mathématiques ? Je n'ai pas réellement des réponses à ces questions…

moi, c'était ça la « didactique des maths » : des méthodes pour enseigner qui se raffinent de plus en plus dans le noble objectif de faire réussir les élèves. Apprendre « comment » faire fonctionner une classe ne m'aidait pas à retrouver un « pourquoi » au projet d'enseigner les mathématiques en général. Je me demandais aussi si ces élèves faisaient vraiment des mathématiques pendant ce temps. Ou étaient-ils en train de copier les mathématiques des autres ? Les mathématiques à enseigner ne reflétaient plus la nature personnelle, culturelle, sociale et historique de l'activité mathématique « authentique » que j'avais découverte notamment par la lecture des textes historiques.

Je ne trouvais pas dans cette partie de ma formation des réponses à cette question ni de sens réel à l'enseignement de ma discipline. Le vide et le manque de sens se faisaient de plus en plus évidents avec ma vision encore ambivalente des mathématiques à cette époque. J'ai pu en retrouver des échos en relisant les rapports de lecture qu'on m'a demandé de faire dans le cadre du cours *Regards mathématiques* à l'automne 2013. Ce cours mettait en perspective, très explicitement, les mathématiques scolaires avec l'activité mathématique plus largement. Globalement, l'approche très libre et expérientielle de ce cours me fournissait un modèle de la manière dont j'espère enseigner : sans contrainte rigide de contenu. Ce cours m'a aussi permis de questionner toutes les mathématiques, même les scolaires. Par exemple, on s'y demandait ce qu'élever une équation au carré veut dire et comment expliquer mathématiquement l'ajout de solutions que cette transformation engendre. À d'autres moments, on cherchait à expliquer comment un triangle isocèle dans un plan cartésien pourrait ne pas apparaître isocèle dans un plan non normé. J'écrivais alors en décembre 2013 :

> […] si l'on accepte un paradoxe mathématique dans l'ensemble des vérités mathématiques, alors il s'ensuivra l'effondrement d'une poutre du monument des mathématiques ! Parmi les principales qualités de la discipline mathématique se trouvent justement sa cohérence et sa rigueur.

On remarque dans cet extrait l'importance de la cohérence et de la rigueur que les mathématiques évoquent chez moi. Malgré les réflexions que j'avais eues l'année scolaire précédente dans le cadre de mon cours d'histoire des mathématiques (autour de la découverte de Gödel et des expériences avec les textes historiques) cette vision régulière et parfaite des mathématiques était toujours bien présente chez moi. C'est comme si elle ne pouvait absolument pas être détruite, comme si ma formation ou même la société me ramenait à cette vision des mathématiques parfaites et statiques…

Pourtant, les chocs des bousculements vécus à la découverte de Gödel et des textes historiques étaient bien réels ! Le temps avait-il apaisé le scandale dans mes pensées? Deux années de formation plus tard, on allait bientôt jeter de l'huile sur la flamme, encore bien vivante, de mes doutes !

### 1.2.3 Conférence de Jean-François Maheux – 28 septembre 2015

Lors de ma dernière session de baccalauréat, par curiosité, mais aussi en quête de sens en vue de ma carrière imminente en enseignement, j'ai assisté à quelques séminaires de didactique des mathématiques présentés dans le cadre de la Maitrise en didactique des mathématiques de l'UQAM. La première conférence, intitulée « Im|perfection et (activité) mathématique » m'a renversée. La conférence du professeur Maheux, abordait directement les notions de perfection et d'imperfection par rapport aux mathématiques. C'était la seconde fois durant mes études universitaires qu'on me parlait de la nature des mathématiques mais c'était la première fois que j'entendais l'idée, alors pour moi complètement excentrique, d'étudier franchement ce que pouvait être le côté imparfait des mathématiques, et ce, d'un point de vue presque philosophique. Ce projet, qui débutait alors, semblait s'arrimer à plusieurs de mes interrogations épistémologiques.

À l'écoute de cette conférence, comme un voyage de deux ans en arrière l'aurait fait, les mathématiques redevenaient relatives à un contexte, une personne, un lieu, une culture, une époque. Les mathématiques pouvaient même être non formelles, contenir des erreurs ou être source de controverse. À certains moments de l'histoire des mathématiques, des mathématiciens ont bien présenté des résultats en faisant des erreurs comme l'a fait Henri Poincarré au début du 20e siècle tout en étant accepté par la communauté. Alors, les mathématiques ne sont peut-être pas qu'uniquement infaillibles. À l'inverse, des mathématiques complètement acceptées de nos jours, telles que les nombres imaginaires ont été sources de controverses longtemps avant d'être acceptés dans l'édifice des mathématiques. Des mathématiciens reconnus comme Jérôme Cardan les qualifiaient de sophistes au 16e siècle et John Napier les qualifiaient d'absurdités à la même époque (Crowe, 1975). Dès lors, je réalisais que même ce qui fait objet de controverse peut s'avérer être valide mathématiquement. Encore plus étonnant pour moi, j'ai réalisé que les mathématiciens entre eux ne s'entendaient pas toujours. Je me demandais alors comment une science prétendument réellement dure ; noire ou blanche, « reine des sciences », pouvait ouvrir la porte à de tels débats. Surtout, si ces débats existent, pourquoi sont-ils complètement absents des salles de classe et même de notre culture générale ?[3]

En réponse à cette dernière question, j'ai mieux compris lors de cette conférence que notre manière d'enseigner les mathématiques comme une science achevée n'est pas étrangère à la vision des mathématiques que j'ai développée. En 1982, le Cockcroft Report affirmait qu'il est largement répandu dans les écoles que les mathématiques fournissent des moyens de communication “puissants, concis et non-ambigus”. Cette vision des mathématiques reflète une vision populaire des mathématiques basée sur une philosophie “absolutiste” tacite. Hardy (1992) présente, en ce sens, la confortable certitude mathématique : « 317 est un nombre premier, pas parce qu'on le pense, (…), mais parce qu'*il est ainsi*, parce que la réalité mathématique est construite ainsi. » (Rowland, 1996) Quelles pourraient-être les visions des mathématiques alternatives à cette vision absolutiste ? Est-ce que les mathématiques enseignées ne pourraient-elles

---

[3] En effet, dans bon nombre d'articles de journaux populaires, les références aux mathématiques « parfaites » sont continuellement présentes.

pas refléter la diversité des mathématiques que j'avais découverte au travers de mes expériences de formation ?

L'ethnomathématique a aussi été abordée au cours de cette conférence. En fouillant un peu par moi-même, j'ai découvert que l'habileté d'observer et de reproduire des motifs, tant numérique que géométrique, est d'une grande importance en Afrique (Zalavsky,1999). Les « sonas» (voir des exemples fig. 1.4) sont des dessins pour la plupart symétriques et monolinéaires. Ils sont une forme de dessin très « mathématique » qui s'est développée en Angola. Les experts de ces dessins ont développé des séries d'algorithmes géométriques pour générer ces motifs (Gerdes, 2000).

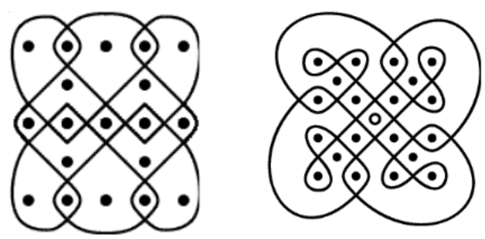

Figure 1.4 – Deux sonas (d'après Gerdes, 2009)

Reproduire de tels dessins demande de la méthode et une réflexion sur les algorithmes en jeu. Cette activité mathématique n'a pas les mêmes symboles ni l'allure générale de l'activité mathématique habituelle dans une classe. Il faut creuser sous la surface. Aller la dénicher. Mais dans le domaine de l'ethnomathématique, on considère quand même cela comme des mathématiques. La découverte de ce champ de recherche venait, une fois de plus, bousculer la vision très rigide des mathématiques tout en alimentant mon questionnement sur la pertinence et la légitimité des mathématiques scolaires.

Bref, la conférence m'interpella grandement, notamment en faisant des parallèles entre les mathématiques et l'esthétique Wabi-sabi (Maheux, 2016)[4] qui trouve « le beau » dans l'imperfection. J'aimais cette vision positive et non dramatique des mathématiques imparfaites. Ces idées, ce discours, ces concepts présentaient alors pour moi, sans que je ne les maitrise trop bien, une fenêtre compatible avec mes questionnements. C'est aussi pendant cette conférence que j'ai pleinement pris conscience du caractère quelque peu chaotique dans lequel les mathématiques se sont construites à travers son histoire (Lakatos, 1976 ; Kline, 1980). Dès lors, je réalisais que mes questions épistémologiques n'étaient peut-être pas si futiles. Les mathématiques devenaient alors critiquables, mais en même temps discutables, négociables, argumentables. À l'opposé d'être rigides et prédéterminées, elles devenaient flexibles, modulables et à déterminer. Elles formaient alors un monde entier où communication, raisonnement et même argumentation devenaient pertinents et essentiels. À travers cela, ce domaine que sont les mathématiques, redevenait enfin pour moi quelque chose qui vaut la peine d'être enseigné (ou vécu) en formation générale, en plus de correspondre plus fidèlement à ce que je voyais être sa nature. J'y voyais une sorte de retour vers une forme de mathématiques plus authentique, au sens où l'on cesserait (finalement) de cacher leurs possibles imperfections.

D'autant plus qu'une vision des mathématiques comme étant imparfaites me semblait considérablement élargir le champ des possibles pour l'enseignement. C'est ainsi que cette conférence m'a montrée explicitement que les objets d'études de la didactique des mathématiques pouvaient être de nature fondamentalement épistémologique, s'étendant bien au-delà des techniques d'enseignement. Je réalisais que la didactique des mathématiques pouvait m'aider à naviguer à travers mes questionnements personnels, et même de m'en faire découvrir de nouveau. À la fin de la conférence,

---

[4] L'esthétique japonnais Wabi-sabi – qui était au cœur de cette conférence – célèbre l'incomplétude et l'imperfection de la vie comme étant grandement esthétique.

Jean-François Maheux a offert aux étudiants de pouvoir travailler avec lui si le sujet les intéressait.

Il ne m'en fallait pas plus pour me décider et répondre positivement à l'appel. J'ai donc saisi ce qui, pour moi, m'apparaissait comme une occasion mathématique dès plus enrichissante : dévoiler et explorer autour de l'imperfection des mathématiques. Que pourrait être le rôle que joue l'imperfection des mathématiques dans le rapport aux mathématiques des élèves et des enseignants ? Et comment gérer toute cette imperfection ? Quelle richesse didactique, autant pour les élèves que les enseignants, pourrait ressortir de cette imperfection ? Mais aussi, qu'en est-il de la perfection ? Est-elle autant un leurre que je me l'imagine maintenant ? Pour commencer l'exploration de ces questions, on m'a suggéré de commencer par lire quelques articles de Raffaella Borasi, et d'éventuellement me joindre au projet que Jean-François Maheux mettait en place.

### 1.2.4 Nouvelles lectures et discussions – Janvier 2016

Dans une première série d'échanges, nous avons fait la lecture de deux textes de Borasi (1987, 1993) dans lesquels la chercheuse présente l'idée d'utiliser certaines « erreurs » mathématiques comme « tremplins » pour l'activité mathématique. Notre but était d'aller chercher des exemples de travail en éducation mathématique qui pouvait toucher le côté imparfait avec des élèves. Les « erreurs » dont Borasi parle sont de différents types et plusieurs d'entre elles correspondent plutôt à des curiosités mathématiques qui viennent déranger l'image des mathématiques comme un ensemble de propositions uniquement vraies ou uniquement fausses. Ses réflexions initiales autour de l'histoire me semblaient en cohérence avec une vision des mathématiques à la fois parfaite et imparfaite. Borasi justifie l'importance des erreurs en soulevant la place que celles-ci ont eue dans l'histoire, et dans la construction des mathématiques. Elle rappelle que c'est les échecs (« failure ») des tentatives de prouver le postulat des parallèles qui ont mené au développement de géométrie non euclidienne. Elle poursuit en rappelant que Lakatos a proposé plusieurs exemples historiques intéressants où des conjectures incorrectes et des résultats partiels ont fait partie d'activités mathématiques fructueuses. Rappelons-nous de la relation entre le nombre S de sommets, le nombre A d'arêtes et le nombre F de faces d'un polyèdre. Dans la communauté mathématique, l'expression S - A + F = 2 proposée par Euler fut considérée convenable pour les polyèdres de tous genres pendant plus de deux siècles. Placés devant les contre-exemples du cadre et du hérisson (fig.1.5), les mathématiciens ont dû préciser leur définition de polyèdre (Lakatos, 1984) en la rendant ainsi plus parfaite et moins imparfaite…

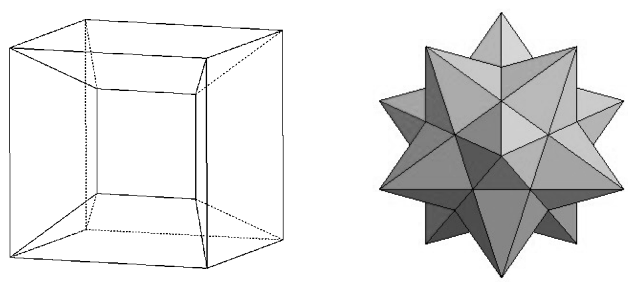

Figure 1.5 – Lakatos 1984

C'est ainsi que dans son introduction, Borasi (1993) nous rappelle que l'activité mathématique à travers l'histoire comporte une part d'imperfection. Pour moi, l'activité fait ressortir le côté parfait ou imparfait des mathématiques à travers du jeu entre l'accord et le désaccord des gens vis-à-vis l'activité produite. Initialement discrète, cette imperfection devient très évidente pour tous au moment où l'on propose une révision plus parfaite de l'activité en jeu. À l'évocation de Lakatos, le constat de cet espace de va-et-vient entre ce qui ne fonctionnait pas et qui fonctionnera, m'est soudainement devenu très évident et même essentiel à l'activité mathématique. Pourrait-on voir ces mouvements, et ces changements, comme une dialectique existante entre la perfection et l'imperfection en mathématiques ?

Précisément en éducation mathématique, Borasi (1987) explique comment la discussion avec des élèves de certains cas particuliers (e.g. la simplification de $\frac{16}{64}$ en $\frac{1}{4}$ en éliminant les « 6 » en haut et en bas) peut conduire ceux-ci à développer leurs conceptualisations des idées mathématiques en jeu, se lancer dans des explorations mathématiques riches, et aussi enrichir leurs visions des mathématiques. Borasi (1987) affirme, en fournissant des exemples d'exploitation d'activités, que différents types d'erreurs peuvent être explorés suivant ces deux directions majeures :

1. Les erreurs peuvent être utilisées pour investiguer la nature de notions mathématiques fondamentales comme les notions de « preuve », d'« algorithme » ou de « définition ».
2. Une analyse du degré de véracité de certaines erreurs mathématiques peut aider à clarifier la nature de la « vérité » en mathématique. Par exemple, on peut demander : Dans quelles circonstances l'expression : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ est-elle vraie? Est-ce que l'expression $\frac{12}{4} + \frac{-3}{2} = \frac{12\ +-3}{4\ +\ 2} = \frac{9}{6}$ relève d'un cas particulier ? Pourquoi ?

Sans vraiment parler en termes d'imperfection, le travail de Borasi (1987, 1993) me fournissait un exemple très clair de la manière dont ce genre de réflexion pouvait prendre forme dans une recherche. Qui plus est, les activités qu'elle a développées pour générer une activité mathématique autour de ce qu'elle appelle « erreur » semblent particulièrement intéressantes pour aborder les enjeux qui me préoccupent. Néanmoins, là où je me distancie de Borasi (1993) est au niveau de mes motivations. Pour Borasi (1993), les activités et le cadre conceptuel qu'elle a créés, sont justifiés par une vision de l'erreur qui possède un grand potentiel éducatif. De mon côté, je me demande si en éducation mathématique la focalisation seule sur le côté parfait des mathématiques ne délaisse-t-elle pas un grand pan de ce que les mathématiques sont ? Puisqu'il me semble que pour moi, l'im-perfection n'est pas définie en terme d'« erreur », mais bien comme partie intégrante d'un processus d'activité mathématique authentique qui lui est dynamique et rempli de questionnements et même parfois faillible.

J'ai partagé ces lectures et réflexions lors d'une rencontre avec le groupe de Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématique dirigé par Jean-Francois Maheux et Jérôme Proulx. Nous en sommes venus à la conclusion qu'en effet, je pourrais organiser mon travail de recherche autour du jeu entre perfection et imperfection en m'appuyant sur le travail de Borasi. Cette rencontre du 20 janvier 2016 est devenue un point d'ancrage pour moi. Cela a confirmé mon intérêt à vouloir aller explorer ces idées des mathématiques à la fois parfaites et imparfaites (im-parfaites). Un triple questionnement est ressorti de cette rencontre. Je le présente dans la section suivante.

## 1.3 Un triple questionnement

Dans un premier temps, ma recherche vise à pousser cette réflexion sur la nature des mathématiques en me penchant plus à fond sur ces deux regards mathématiques aux polarités opposées. Plus précisément, je cherche à clarifier en mathématiques les qualificatifs permettant de juger d'une distinction entre la perfection et l'imperfection. Une des questions qui orientent ma recherche est donc la suivante :

- *En mathématiques, quelles sont les caractéristiques qui contribuent à définir ce qu'on peut voir comme la dimension parfaite et la dimension imparfaite des mathématiques ?*

D'autre part, je m'intéresse aussi à la manière dont cette réflexion sur les mathématiques pourrait nous amener à penser l'éducation mathématique des élèves. Il s'agit donc pour moi de développer une réflexion sur les motivations à amener un tel regard à l'école et les manières dont l'im-perfection mathématique peut se manifester en classe. Il s'agit de répondre à cette question :

- *Comment un regard sur la perfection-imperfection des mathématiques nous conduit-il à penser l'éducation mathématique des élèves ?*

Par ailleurs, cette réflexion ne serait pas complète sans un travail au niveau des activités qu'il serait possible d'envisager avec des élèves. Pour cette raison, j'explorerai brièvement la manière dont une conceptualisation en termes de perfection-imperfection peut nous conduire à penser des activités pour les élèves. On expérimentera l'une de ces activités avec quelques élèves afin de voir comment elle peut prendre forme concrètement. De ce point de vue, je pourrais ainsi formuler la troisième question guidant ma recherche:

- *À quoi peut ressembler une situation mettant en valeur une dualité perfection-imperfection des mathématiques, et que ce passe-t-il lorsque des élèves sont mis en situation de vivre les mathématiques de cette manière ?*

# CHAPITRE II

# CARACTÉRISTIQUES DES DIMENSIONS PARFAITES ET IMPARFAITES DES MATHÉMATIQUES

Je m'intéresse à mieux comprendre les mathématiques en tant qu'activité à deux dimensions, parfaite et imparfaite (im-parfaite), et les liens possibles en éducation avec une telle vision des mathématiques. Ce chapitre se consacre à la première partie de cet objectif, soit mieux comprendre les mathématiques im-parfaites.  Ce chapitre est divisé en trois sections.

Dans un premier temps (section 2.1), on s'intéresse à un corpus du domaine des mathématiques qui présente des manifestations éclairantes sur les deux dimensions. Le choix d'un corpus provenant du domaine des mathématiques découle du désir de clarifier cette vision des mathématiques im-parfaites à partir de points de vue ancrés en mathématiques. Le premier corpus tourne principalement autour de ce qu'on appelle les « fractions étranges »[5]. Les articles présentés ont été écrits dans les 50 dernières années, ils sont donc récents dans l'histoire des mathématiques. Les concepts mathématiques qui y sont abordés sont accessibles. L'ensemble permet d'explorer de manière pointue et avec une certaine profondeur l'activité mathématique autour du

---

[5] Pour aider la lecture, je reprends tout au long du texte cette appellation en fait assez tardive, on le verra, est dû à Fried et Goldberg (2010) (qui parle de *weird fractions*)

concept des fractions étranges. Évidemment, il n'est pas prétendu que ce corpus soit représentatif de l'activité mathématique en général, à toutes les époques, etc. Il s'agit plus modestement de considérer *un exemple* de ce que peuvent être les mathématiques d'aujourd'hui afin d'aider à préciser ce qu'on peut vouloir dire lorsqu'on parle des dimensions parfaites et imparfaites des mathématiques, et ce à une échelle assez fine de l'activité mathématique.

Dans un second temps (section 2.2), afin de continuer le travail de clarification des deux dimensions, on s'intéresse à un texte à propos de paradoxes de la perfection. Ce texte est issu du domaine de la philosophie.

Dans un troisième temps (section 2.3), on se tourne vers un corpus de textes qui présentent, de manière explicite, des arguments relatifs à la nature de l'activité mathématique qui contribuent à clarifier une vision des mathématiques comme im-parfaites. Par leur nature philosophique, les aspects relevés dans cette section ont une portée plus vaste ; ils invitent à ancrer l'idée de mathématiques im-parfaites dans les mathématiques de manière générale et dans le passé des mathématiques. Par contre, il ne s'agit évidemment que de quelques points de vue sur la question, ce corpus de textes ne se veut donc pas représentatif du discours en philosophie des mathématiques. Qui plus est, ils sont choisis spécifiquement pour leur côté parlant du point de vue de l'im-perfection. Il est possible de remarquer, par ailleurs, qu'ils orbitent autour des aspects moins formels des mathématiques et touchent à la question de rigueur mathématique.

## 2.1 Des manifestations mathématiques éclairant l'im-perfection : le cas des fractions étranges

Dans cette section, on s'intéresse à un corpus d'articles en mathématiques sur les fractions étranges. Ce corpus s'est démarqué par l'évidence des développements mathématiques autour d'un même concept entre le premier article paru en 1971 (Carman, 1971) et le dernier paru en 2013 (Stuffelbeam, 2013). On verra que la fraction étrange y passe d’un statut d’erreur curieuse et très ponctuelle à quelque chose de très généralisable et à propos de quoi algorithmes et théorèmes abondent. L’idée, ici, est donc d’observer l’activité, les résultats et les analyses qui sont présentés autour des fractions étranges en terme d’im-perfection afin d’éclairer ces dimensions d’im-perfections, c’est-à-dire de mieux comprendre ce que l’on peut vouloir dire quand on parle de l’im-perfection des mathématiques.

Dans cette section, on se penche donc principalement sur les quatre textes suivants :

- Mathematical misteaks (Carman, 1971) ;
- Anormalous Cancellation (Boas, 1972) ;
- A pumping lemma for invalid reductions of fractions (Fried et Goldberg, 2010);
- How Weird Are Weird Fractions? (Stuffelbeam, 2013).

Le premier texte, paru dans une revue destinée aux enseignants, présente l’idée de fractions étranges parmi une série de curiosités mathématiques différentes que l’auteur juge intéressantes à explorer. Les trois articles suivants sont publiés dans des journaux mathématiques et étudient, de manière précise, les fractions étranges en développant des théorèmes et des algorithmes sur cet objet.

### 2.1.1 Des objets mathématiques étranges et mathématiquement intéressants

#### 2.1.1.1 La fraction étrange en tant que « misteak » et le « misteak » en tant qu’objet mathématique.

Robert A. Carman (1971) commence son article *Mathematical misteaks* en s’intéressant à ce qu’il appelle des « simplifications illégales » ou « simplifications arithmétiques anormales »[6] à propos des fractions, dont l’exemple type est le bien connu 1~~6~~/~~6~~4=1/4. Le but de son article est de servir d’introduction à ce qu’il appelle

[6] Traduction de « freaks arithmetic cancellations » (Carman, 1971).

des *misteaks* en tant qu'objet mathématique. *Misteaks* est un jeu de mot avec le terme *mistakes* : Contrairement aux « erreurs » (*mistakes*), les *misteaks* sont des procédures qui, bien que fausses, produisent des résultats justes. Un des premiers exemples qu'il présente est le suivant :

**A. P. Darmoryad points out that**

$$\frac{143\cancel{1}\cancel{8}5}{170\cancel{1}\cancel{8}56} = \frac{1435}{17056}$$

**but mistakenly presents**

$$\frac{425\cancel{1}\cancel{9}\cancel{3}\cancel{5}345}{918\cancel{1}\cancel{9}\cancel{3}\cancel{5}5185} = \frac{425345}{9185185}$$

**as a misteak.[2] It is not; it is a mistake.[3]**

Figure 2.1 – *Mistake* et *misteak* (tiré de Carman, 1971, p.109)

Carman (1971) explique que la première fraction étrange est un *misteak* alors que la seconde est un *mistake*. Dans les deux cas, la procédure consistant à éliminer en pair les chiffres identiques au numérateur et au dénominateur afin de réduire une fraction est, évidemment, une procédure inexacte. La différence tient au fait que dans le premier cas, on a bel et bien trouvé une fraction équivalente à la première, alors que dans le second cas les deux écritures ne désignent pas le même nombre. Mais ce n'est pas tout. Si le *mistake* est une erreur dans le sens commun du terme, le *misteak*, dans les mots de Carman (1971), est un « *faux pas* » (en français dans le texte) mathématique qui se révèle intéressant s'il répond à trois caractéristiques bien définies : 1- Le *misteak* produit une réponse correcte ; 2- Le *misteak* est généralisable ; 3- le *misteak* permet de (re)valoriser une procédure généralement valide. Voyons comment ces caractéristiques peuvent nous éclairer sur des aspects des dimensions im-parfaites des mathématiques.

D'abord, remarquons que dans un système parfait, il n'est pas attendu que des procédures fausses donnent des résultats vrais. C'est pourquoi on voit ces procédures (les *misteaks*) comme des manifestations de la dimension « imparfaite » des mathématiques. En effet, les *misteaks* ont la particularité de ne fonctionner qu'à l'occasion. La procédure ici cesse de fonctionner aussitôt qu'on change les chiffres (1~~6~~/~~6~~4 fonctionne, mais pas 1~~5~~/~~5~~4, ni 3~~6~~/~~6~~7, ni même ~~6~~1/4~~6~~, etc.). On pourrait dire que c'est la particularité d'être valide seulement de temps à autre, voire même seulement pour des exceptions, qu'on rattache ici au côté imparfait : on le devine en tension avec l'idée de procédure standard, voire universelle qui elle éclaire en revanche sur ce qu'on retrouverait dans la dimension « parfaite ».

En examinant pourquoi Carman (1971) s'intéresse à des procédures imparfaites dont il donne plusieurs autres exemples, on peut commencer à voir un peu mieux les relations entre les deux dimensions.  La deuxième caractéristique des « faux pas » nous indique qu'un des intérêts des misteaks est d'expliquer ce qui fait que des manipulations fausses fonctionnent. Ceci implique de trouver la structure mathématique sous-jacente à une procédure particulière. L'existence de structures sous-jacentes permettant de comprendre pourquoi et quand une procédure fonctionne, se rattache bien à la perfection de notre système mathématique. En explorant les structures sous-jacentes, on peut identifier le contexte bien défini, et souvent très limité, où une procédure fonctionne. C'est-à-dire qu'il est possible de justifier ces algorithmes, possibilité qu'on peut voir comme une manifestation (très belle!) de la perfection des mathématiques. L'aspect justifiable ou démontrable des mathématiques énoncé par Carman (1971) fait partie de la dimension parfaite, ainsi les misteaks sont intéressants car ils se rattachent à cette dimension. On pourrait, cela dit, questionner ce lien. Une conséquence du théorème de Gödel est qu'on ne peut démontrer tous les énoncés mathématiques exprimables. Il se pourrait bien qu'une procédure « occasionnelle » ne soit finalement pas explicable. On connaît bien des exemples de procédures qui semblent très générales pour lesquelles nous n'avons pas de justifications : la *conjecture de Collatz* par exemple[7]. Bref, si ce qui est démontrable pointe du côté de la perfection, il faut donc

[7] On peut voir cette conjecture comme un algorithme permettant d'arriver à 1 à partir de n'importe quel nombre naturel. La procédure consiste a) diviser par 2 s'il est pair, ou b) le multiplier par 3 et ajouter 1 s'il est impair, puis c) répéter l'opération avec le résultat. Cette « méthode » semble toujours permettre

reconnaître qu'une autre dimension existe également, soit l'imperfection des indémontrables![8]

Présentant sa troisième caractéristique, Carman (1971) explique comment les procédures mathématiques que nous utilisons au quotidien sont particulièrement *bonnes*, les *misteak* pouvant être une manière de les redécouvrir en tant que telles. La dimension imparfaite des mathématiques réside-t-elle peut-être aussi dans l'idée que dans un système vraiment parfait, un contraste entre bonnes et moins bonnes procédures ne serait peut-être pas possible ? S'il est possible de donner de la valeur à une procédure, dire qu'elle est « meilleure » qu'une autre, est-ce parce qu'il existe des mathématiques qui sont moins parfaites que d'autres? Sans nous lancer dans de telles discussions, il est intéressant de remarquer que cette possibilité d'assigner certaines valeurs en mathématique est, en fait, assez commune : on juge une preuve élégante (ou non), un résultat intéressant (ou non), etc. Certaines de ces assignations ont fait l'objet d'une incorporation aux mathématiques elles-mêmes : par exemple, on mesure la vitesse d'un algorithme. Mais dire qu'une procédure est plus générale ou plus rapide n'est pas la même chose que d'affirmer que rapidité ou la généralité sont *préférables*. C'est de ce point de vue que la remarque de Carman (1971) ouvre la porte sur un autre aspect du côté imparfait des mathématiques. Son commentaire à propos de la beauté de l'exemple suivant va un peu dans le même sens :

| |
|---|
| higher-order freak arithmetic cancellations are difficult to find; a particularly beautiful specimen is $\frac{2\cancel{6}66}{6\cancel{6}65} = \frac{2\cancel{6}6}{6\cancel{6}5} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}$. |

Tableau 2.1 Tiré de Carman (1971, p.110)

d'arriver à 1, mais on ne sait pas pourquoi! Et de fait, John Conway (1972) a démontré que dans la « famille » des algorithmes du type 3x+1, certains devaient être indémontrables (mais, évidemment, on ne sait pas lesquels…).

[8] Nous reviendrons sur la possibilité de tout démontrer à la section 2.3 de ce chapitre.

Notons aussi comment Carman (1971) attire l'attention sur la difficulté de trouver certains types de fractions étranges. Est-ce à dire que le côté imparfait des mathématiques est difficile à observer? Moins important que le reste? Pour le moment, contentons-nous de remarquer que Carman (1971) nous présente, en fait, plus d'une vingtaine d'exemples *misteaks* de différents types, provenant de domaines variés des mathématiques, et souvent autour de concepts mathématiques que l'on croit connaitre de fond en comble, comme la fraction. Notons aussi que Carman (1971) tire ses exemples de diverses publications de divertissements mathématiques parus entre 1917 et 1969, couvrant ainsi environ 50 ans de curiosités mathématiques. D'un point de vue social et culturel, des manifestations « étranges » des mathématiques sont connues et ont intéressées jusqu'à un certain point les mathématiciens depuis bien longtemps. Les manifestations sous forme de *misteaks* de la dimension imparfaite des mathématiques sont donc sans doute un peu plus présentes, fréquentes, connues, que l'on ne pourrait le croire initialement.

2.1.1.2 L'imperfection mathématique : entre l'universel et le local

L'examen de quelques autres exemples présentés par Carman (1971) nous aide à mieux comprendre un aspect de ce qui est en jeu dans ces curiosités et ce que les dimensions parfaites et imparfaites des mathématiques peuvent désigner. L'exemple suivant illustre bien ce qui est proposé dans la suite de l'article :

| |
|---|
| En algèbre, on peut s'économiser beaucoup de chagrins et de maux de tête en éliminant simplement les opérations de multiplication. Par exemple : $$\begin{gathered}(5-3x)(7-2x)=(11-6x)(3-x)\\ 5-3x+7-2x=11-6x+3-x\\ 2x=2\\ x=1\end{gathered}$$ |

Tableau 2.2 Tiré de Carman (Traduction libre, 1971, p.112)

Carman (1971) présente ainsi une dizaine de différentes fausses manipulations ou faux raisonnements en lien avec l'algèbre. Comme pour les fractions étranges, ils ont la particularité de n'être « vrais » que pour certains nombres. Mais d'un autre côté, il apparaît très vite que certains de ces *misteaks* donnent lieu à une infinité de cas possibles. La procédure ne fonctionne pas tout le temps, mais elle fonctionne pour une infinité d'équations ! On pourrait dire que ce qui distingue le « faux pas » de la procédure acceptée, c'est l'étendue du domaine de validité. Un domaine de validité plus restreint, comme ceux des curiosités mathématiques examinées ici, serait associé à la dimension imparfaite. Mais peut-on vraiment parler, en mathématiques, de procédures « universelles »? Quelque chose d'aussi simple que la division ou l'extraction de racine ne sont-elles pas, de ce point de vue, des « curiosités » mathématiques (n'étant pas fermées sur ℕ ou ℤ, elles ne fonctionnent qu'à l'occasion… en plus de n'être pas définies sur certaines valeurs!). Pourrait-on trancher de manière précise et hiérarchiser en termes d'étendue d'une procédure ? C'est un peu ce que fait Carman dans la procédure suivante :

| |
|---|
| Nous sommes tous au courant que si $(x+a)(x+b)=0$,<br>alors ou $(x+a)=0$ et $x=-a$ ; ou bien $(x+b)=0$ et $x=-b$. Par une simple extension, on peut résoudre des équations bien plus difficiles.<br>Par exemple, si $(x+3)(2-x)=4$, alors par analogie, $(x+3)=4$ et $x=1$ ; ou bien $(2-x)=4$ et $x=-2$, ce qui est l'ensemble solution correct.<br>En général, c'est légal pour $(x+a)(b-x)=c$ si $c=a+b-1$. |

Tableau 2.3 Tiré de Carman (traduction libre, 1971, p.112)

La procédure du tableau 2.3 est une manifestation d'imperfection mathématique qui illustre le caractère poreux et perméable des dimensions parfaite et imparfaite des mathématiques, dans le sens où ces dimensions ne sont pas tranchées, ni complètement indépendante l'une de l'autre. Un algorithme dit général, c'est-à-dire qui fonctionne pour tous les réels, peut être repris (voir tab. 2.3, Carman, 1971, dit ici « par analogie») dans un contexte où, a priori, il ne fonctionne pas… sauf pour certains nombres[9]. On peut voir que Carman fait passer l'algorithme du parfait à l'imparfait lorsqu'on attache au côté parfait des mathématiques l'idée d'universalité d'une procédure et à la dimension imparfaite ce qui serait de l'ordre du « local ». Ainsi, selon l'angle d'approche une même manifestation peut représenter la dimension parfaite tout comme la dimension imparfaite, d'où cet aspect « poreux » entre ces deux dimensions. Aussi, on est forcé de se rappeler que les termes « universel » et « local » sont eux-mêmes bien difficiles à définir en mathématiques. Donc, un algorithme qui fonctionne pour « tous les réels » ne fonctionne pas nécessairement pour tous les « nombres » (e.g. nombres adiques, quaternions…), tandis qu'une procédure « locale » peut très bien fonctionner pour une infinité, dénombrable ou non, de cas. Ainsi, on peut parfois remarquer qu'une même procédure peut être associé à la dimension parfaite, et/ou à la dimension imparfaite des mathématiques selon les critères retenus pour observer une manifestation mathématique.

### 2.1.2 Le travail mathématique sur les fractions étranges

#### 2.1.2.1 L'apport du formalisme

Reprenant pour ainsi dire un des *misteaks* de Carman (1971), Boas Jr (1972) s'intéresse aux fractions étranges d'un point de vue purement mathématique. L'auteur s'attaque à la question en commençant par généraliser le problème à l'aide du formalisme. En fait, Boas Jr réalise la transformation de cas particuliers de fractions étranges vers le cas général de fractions étranges de nombres à deux chiffres au numérateur et

---

[9] Remarquons par ailleurs, concernant la « fréquence » des *misteaks* en mathématiques, que ces exemples suggèrent qu'on pourrait probablement partir de *n'importe quel* algorithme (ou relation) et le modifier de la sorte.

dénominateur et va même jusqu'à considérer les nombres ainsi écrits dans une base arbitraire *b* et non pas seulement en base 10. Le problème devient ceci :

| |
|---|
| Quand est-ce que $\frac{bx+y}{bz+x} = \frac{y}{z}$ ? |
| où $b$, $x$, $y$, $z$ sont des entiers positifs, $b \geq 2$ |
| et $x$, $y$, $z$ valent au minimum 1 et au maximum $b$ - 1 . |

Tableau 2.4 Tiré de Boas Jr (traduction libre, 1972, p.21)

Que peut-on apprendre des dimensions de perfection et d'imperfection des mathématiques à partir de ceci? Observons que le problème que Boas Jr communique semble clair, précis et bien délimité, surtout si on le compare à sa présentation chez Carman. Dans cette transformation, on peut voir que le formalisme représente une forme de langage « idéal » dans le sens où il communique de manière très claire et fine les relations en jeu dans le problème. Ce sont des caractéristiques qu'on rattache facilement à l'idée de perfection. Par contraste, on reconnaît dans ce qui est « informel » quelque chose qui pointe vers le côté imparfait des mathématiques : l'informel évoque souvent le vague, le mal défini, le flou, etc.

En même temps, le langage formel agit comme un cadrage bien particulier de ces relations, qu'il faut encore commenter pour mettre de côté les cas « triviaux » et voire même reformuler de manière encore plus générale (pourquoi se limiter aux fractions écrites avec 4 chiffres ?). Poser un problème ou formuler un énoncé vient donc toujours avec certaines limites. On pourrait aussi souligner que l'écriture formelle n'a rien d'évident ou de particulièrement transparent : il faut pouvoir la lire et la comprendre. Sa « perfection », par rapport au langage familier par exemple, s'accompagne d'exigences croissantes pour son interprétation. On connaît bien l'ouvrage *Principia Mathematica* qui représente l'entreprise de Whitehead et Russell (1910-1913, cité dans Russell, 1956) de fonder solidement l'édifice des mathématiques. En l'écrivant, ils se sont lancés dans une formalisation dont la densité symbolique rend la lecture de leur ouvrage pratiquement impossible. Il est de fait très peu lu (Russell, 1956). Ce même travail de Whitehead et Russell est malgré tout considéré comme une des plus grandes œuvres mathématiques du XXe siècle et a été très influente dans le développement de la logique.

Ceci nous éclaire sur les dimensions parfaite et imparfaite des mathématiques en précisant que tout ce qui est formel n'est pas nécessairement idéal ; ainsi la perfection, au sens d'une complète élucidation n'est pas systématiquement souhaitable. En effet, le formalisme et l'idée d'expliciter entièrement et absolument chaque vérité mathématique de manière impeccable (à partir d'un nombre fini de symboles) nuisent, dans certains cas, aux mathématiques et à l'activité mathématique. Russell (1956) explique en effet que le choix d'une formalisation unique pour l'ensemble du *Principia* a rendu certains chapitres plus difficiles : des langages sont mieux adaptés à certaines idées mathématiques ! Snapper (1979) explique par ailleurs pourquoi il est impossible d'avoir un langage mathématique idéal, parfait : pour parler d'un langage formel « L » ou le partager, on doit nécessairement utiliser une langue naturelle où les raisonnements ne sont justement pas « garantis »[10]. Mais si on range du côté de l'imperfection cette impossibilité d'un langage idéal, on peut voir dans cette limite quelque chose de positif. Elle nous rappelle qu'il est tout à fait possible de faire des mathématiques dans le langage familier ! C'est un outil des plus puissants du point de vue didactique (on en parlera au chapitre suivant) et il sert aussi les mathématiciens professionnels : Kline (1982) met en valeur le côté productif de plusieurs imprécisions mathématiques ; par exemple, on peut y voir l'imperfection du langage comme au service de la perfection en « devenir » au sens où elle permet aux maths de se faire, de se perfectionner. On peut penser que sans ambiguïté, il serait très difficile de dépasser les limites de ce qu'on « connait ». On aurait peut-être des maths « parfaites » du point de vue ce qu'on sait, mais on serait alors très limité.

[10] Je reviendrai sur la question de certitude un peu plus loin.

### 2.1.2.2 Trivialité versus exception

Mais ce n'est pas tout. Si on y regarde bien, Boas Jr (1972) nous montre en fait qu'il est possible de transformer une curiosité mathématique en une « question sérieuse » (note de l'auteur) de la théorie des nombres. Mais pour l'aborder, Boas Jr qui ne s'intéresse qu'aux fractions formées par 4 chiffres (deux au numérateur et deux au dénominateur), suggère de commencer par rapidement mettre de côté les cas « triviaux » comme $3\cancel{3}/\cancel{3}3=3/3$, et les cas où l'on ne fait qu'inverser le dénominateur avec le numérateur pour une fraction étrange déjà identifiée (p. ex. 64/16 est l'équivalent de 16/64).

Remarquons d'abord que les cas triviaux sont porteurs de façon de générer un nombre infini de fractions étranges : on a qu'à positionner les mêmes chiffres au numérateur et au dénominateur. On voudrait naturellement classer cette possibilité de créer un nombre infini de fractions étranges à partir d'une procédure d'une simplicité et d'une généralité évidente du côté des manifestations de la perfection des mathématiques. Par opposition, des manières de faire compliquées et non-évidentes définiraient davantage la dimension imparfaite des mathématiques (je reviendrai sur l'idée de complexité avec Chaitin, 2016). On pense ici encore à Russell (1956) qui valorise la simplicité sous forme d'une austérité qui va de pair avec cette vision. Mais est-ce si simple et si uniformément admis ? En lien avec le thème de la simplicité est celui de la « beauté », qu'on peut évidemment voir comme une des formes de la perfection. Plusieurs mathématiciens mettent ainsi de l'avant la simplicité comme critère de beauté, Sinclair (2006) explique :

> Mathematicians can be attracted by the visual appeal of certain mathematical entities, by perceived aesthetic attributes such as simplicity and order or by some sense of "fit" that applies to a whole structure. (Sinclair, 2006, p. 99)

Mais la beauté elle-même est quelque chose de socialement et historiquement déterminée, et parfois de manière tout à fait opposée. Maheux (2016) propose ainsi, en s'inspirant du courant esthétique japonaise Wabi-Sabi, de voir dans l'imperfection elle-même une forme de beauté. Si la perfection rime avec l'idée d'une beauté universelle, force est de constater que les mathématiques sont alors bien imparfaites de ce côté.

Revenons sur la mise au banc des cas triviaux par Boas Jr (1972) - et par Carman (1971) qui les ignore complètement. Cette mise au banc signale quelque chose d'important. Ce qui intéresse le mathématicien ici, ce sont les cas « non triviaux » de fractions étranges. Précédemment, nous avons associé une procédure simple à la dimension parfaite. Pourquoi alors mettre de côté les cas triviaux, et s'intéresser à ce qui peut sembler des exceptions ? Devrait-on voir comme une trace d'imperfection l'attention, très fréquente, donnée à ce qui est « exceptionnel »? Mais en même temps, on peut défendre l'idée que la non-trivialité d'un résultat éclaire plutôt la dimension parfaite des mathématiques.

En effet, on peut faire l'argument qu'un résultat non-trivial révèle l'existence de « subtilités », de quelque chose de fin, de délicat, qui explique son rapprochement avec l'idée de perfection. C'est ainsi que Hardy (1992) retient la non-trivialité d'une preuve comme critère de beauté en mathématique. Être un cas d'exception peut aussi vouloir dire être un résultat exceptionnel. On rapporte régulièrement dans les journaux la découverte d'un nouveau nombre premier et ce potentiel en apparence inépuisable de « perles » mathématiques peut être vu comme une manifestation du côté parfait des mathématiques qui, dans leur perfection, ne cesse de nous étonner. Si on y pense bien, la vaste majorité des concepts mathématiques sert en fait à *distinguer* les objets mathématiques en fonction de leurs *particularités* : tel nombre est entier et tel autre est un nombre irrationnel ; telle courbe est une fonction et tel autre un polygone régulier ; telle équation est du troisième degré ; et ainsi de suite. De ce point de vue, les fractions étranges ne sont qu'un nouvel ajout à la grande famille des idées mathématiques. La recherche de résultats d'exception de Boas Jr (1972) n'est donc peut-être pas différente de celle d'un nouveau nombre premier ou d'un 50$^{e}$ nombre de Mersenne. Réfléchir à ce qui est au final « signifiant » en mathématique montre donc la présence d'un jeu de nuances et de variations très subtiles vis-à-vis ce qui serait la perfection ou l'imperfection des mathématiques. Ainsi, l'appréciation de Hardy (1992) pour la non-trivialité d'une preuve s'accompagne souvent de la particularité de rendre « évident » de ce qu'elle tend à prouver… une fois la preuve faite ! Krull (1987) décrit par exemple son appréciation pour les preuves qui rendent les théorèmes évidents tout en illustrant les structures de mathématiques sous-jacentes de façon très simple et transparente.

#### 2.1.2.3 Traditions et conventions

Dans l'utilisation de preuves, des algorithmes de calcul et du symbolisme mathématique, on peut reconnaître une utilisation par Boas Jr (1972) de méthodes dites « traditionnelles » en mathématiques, des méthodes « reconnues ». Ces façons de faire, ne sont généralement pas controversées et donnent l'impression d'être presque permanentes en mathématiques : les remet-on jamais en question ? Le côté durable et conventionnel de certaines méthodes nous éclaire sur la dimension parfaite des mathématiques. Le consensus à propos de méthodes et de résultats mathématiques contribue à l'impression que les théorèmes, les algorithmes de calcul et les preuves existent hors du temps et de l'existence humaine, prenant ainsi un aspect immuable : les mathématiques sont alors de l'ordre de la « nature » ou même du « divin ». Ne dit-on pas que l'on découvre les mathématiques ?

Snapper (1979) analyse qu'à l'époque de la crise des fondements, un des facteurs importants ayant contribué à l'échec du courant intuitionniste est l'abandon par ce courant de certains théorèmes déjà prouvés, acceptés et reconnus. Ainsi, malgré la forte volonté d'alors de proposer des fondements cohérents aux mathématiques, les mathématiciens imaginent mal aller de l'avant sans préserver des résultats établis. D'autres débats dans l'histoire des mathématiques autour de l'axiome des parallèles d'Euclide fournissent aussi des manifestations de l'importance du côté conventionnel en mathématique. En effet, bon nombre de mathématiciens au XIXe siècle refusaient de reconnaître une légitimité aux géométries non euclidiennes, et ce même si elles étaient rigoureusement construites (Kline, 1975). La vraie géométrie était euclidienne et *Les éléments d'Euclide* incarnait la tradition mathématique dans ce qu'elle avait de plus parfait[11], comme l'ont écrit Kant (L'Abbé, 1963) et Frege (Toth, 2009) par exemple.

Par contraste, on pourrait associer la dimension imparfaite des mathématiques au fait de sortir de la tradition et des conventions. Le processus de simplification des fractions étranges serait ainsi une manière non traditionnelle d'opérer. On peut aussi penser à tous ces objets mathématiques « nouveaux » qui ont été à la source de débats dans la communauté : je pense aux nombres complexes et ou aux développements du calcul intégral, par exemple. Ils représentent la dimension imparfaite dans le sens où leurs présences dans des travaux mathématiques étaient initialement considérées « marginales », hors normes, et même carrément douteuses. Plusieurs concepts ont d'ailleurs gardé la trace de ces controverses dans leur nom[12]. Ainsi, si certaines méthodes et résultats semblent immédiatement acceptés par la communauté, le côté imparfait des mathématiques se traduit dans le fait que d'autres font, au contraire, l'objet de polémiques. Et il est donc non seulement possible de ne pas faire l'unanimité en mathématiques, mais il est possible aussi que l'objet d'une controverse finisse par être « universellement » accepté… ou mis de côté.

Revenons à l'article de Boas Jr (1972), où on peut voir des éléments de la tradition et des conventions mathématiques servant à éclairer un objet mathématique « anormal », une procédure non reconnue. Dans le travail de Boas Jr, les dimensions parfaite et imparfaite des mathématiques décrites ici s'alimentent mutuellement. L'existence d'une procédure douteuse permet l'entrée dans le monde mathématique parfait du

---

[11] Qu'est-ce qu'était la « vraie » géométrie avant Euclide ? J'y reviens dans la section 2.3 de ce mémoire.

[12] Irrationnel (vers 300 ans av. J-C), imaginaire (vers 1650) et non-euclidien (vers 1800) n'étaient pas des qualificatifs positifs au sein de leur société respective lorsque ces nombres ou espaces ont été décrits à l'époque de leur émergence.

concept, maintenant démystifié (au moyen du formalisme, d'une généralisation, du jeu de la preuve, etc.) de « fraction étrange ». Mais aussi, n'oublions pas que c'est, dès le départ, par contraste avec les procédures établies que celle permettant de réduire les fractions étranges a pu être identifiée. Les dimensions parfaites et imparfaites sont non seulement perméables comme on le disait plus haut mais elles ont aussi un aspect *interactif* au sens du dictionnaire Larousse : qui se dit de phénomènes qui agissent les uns sur les autres. Cette interactivité semble même, dans plusieurs cas, tout à fait productive. Les mathématiques comme système qui fonctionne « parfaitement » s'enrichit de nouveaux objets, de nouvelles méthodes, de nouveaux théorèmes ; et les idées mathématiques « imparfaites » qu'on y rencontre, gagnent en élaboration quand on les formalise, les généralise, en explore les conséquences. Cette interactivité est peut-être essentielle à ce qui fait ici, comme le dit Boas Jr, que les fractions étranges sont « intéressantes ».

### 2.1.3 Toutes les erreurs ne sont pas égales ni éternelles.

L'idée selon laquelle certaines erreurs mathématiques méritent une attention particulière est explicitement discutée par Fried et Goldberg (2010), qui proposent de différencier les erreurs mathématiques selon le niveau d'intérêt qu'elles suscitent. Comme Carman (1971) environ 40 ans plus tôt, ils portent leur attention sur les cas où des erreurs d'usages les mènent à des résultats corrects. Leur but est de démontrer que ces manières de faire des « réductions invalides » fonctionnent pour une infinité de fractions du même genre de spécimen que Carman (1971) a qualifiée de « difficiles à trouver » et « particulièrement belles » (voir tableau 2.1, sous-section 2.1.1).

#### 2.1.3.1 Ce qu'on prouve et ne prouve pas

L'élément particulier auquel s'intéressent Fried et Goldberg (2010) concerne la composition des chiffres formant une fraction étrange. Boas Jr (1972) s'est penché sur le cas de fractions à quatre chiffres dans différentes bases, mais le

« particulièrement beau cas » de Carman (1971), $\frac{2\cancel{666}}{\cancel{666}5} = \frac{2}{5}$, en compte huit ! Dans leur article, intitulé *A pumping lemma for invalid reductions of fractions*, les auteurs présentent une méthode permettant de produire une infinité de fractions de ce type en ajoutant (ils disent « gonflant », *pumping*) des chiffres à certaines fractions. Cela signifie que le cas de Carman n'était pas du tout un cas isolé. Ca tableau illustre le pompage avec la combinaison de chiffres « 120 », « 130 » et « 140 » de trois fractions :

$$\frac{1011}{11109} = \frac{10\mathbf{120}11}{11\mathbf{120}09} = \frac{10\mathbf{120120}11}{11\mathbf{120120}09} = \cdots = 0{,}0910072913853632\ldots$$

$$\frac{1012}{11119} = \frac{10\mathbf{130}12}{11\mathbf{130}19} = \frac{10\mathbf{130130}12}{11\mathbf{130130}19} = \cdots = 0{,}0910153790808526\ldots$$

$$\frac{1013}{11129} = \frac{10\mathbf{140}13}{11\mathbf{140}29} = \frac{10\mathbf{140140}13}{11\mathbf{140140}29} = \cdots = 0{,}0910234522418906\ldots$$

Tableau 2.5 Tiré de Fried & Goldberg (2010, p. 363)

Fried et Goldberg (2010) montrent qu'à partir d'une fraction étrange, un nombre infini de fractions étranges peut être produit en insérant continuellement un chiffre ou un bloc de chiffres à annuler. Les auteurs nomment ce processus d'insertion de chiffres le gonflage de la fraction et présentent un algorithme permettant de réaliser ce gonflage. Il est fascinant d'observer comment, quatre décennies après Boas Jr (1972), des mathématiciens reprennent à nouveau une idée mathématique qu'on pourrait dire marginale (essentiellement limitée aux mathématiques ludiques) pour la développer davantage. Tout comme Boas Jr (1972), leur travail est caractérisé par un recours au symbolisme, une certaine généralisation, et une démarche visant à prouver certains énoncés concernant la réduction invalide de fraction, dont voici un exemple :

**Theorem 1.** *Let $P_1$, $P_2$, $Q_1$, $Q_2$, $D$, $\beta$ define a weird fraction, and let $D$ have $r$ digits. If $P_1$, $P_2$, $Q_1$, $Q_2$, $D'$, $\beta$ define a weird fraction where $D'$ has $sr$ digits, it must be the case that $D'$ is composed of $s$ repetitions of $D$.*

Figure 2.2 – Énoncé d'un théorème (tiré de Fried & Goldberg, 2010)

On voit à nouveau le jeu producteur entre perfection et imperfection discuté plus haut. Mais un autre élément peut aussi attirer notre attention : c'est apparemment ici que pour la première fois on utilise l'expression « fraction étrange » (*weird fraction*). Cette dénomination nous fait passer d'un intérêt pour un processus dit invalide, anormal ou erroné à l'existence d'un objet mathématique en bonne et due forme, et pour lequel, si on y pense bien, le processus d'élimination de chiffre n'est plus anormal du tout. À partir de l'instant où la fraction étrange a été reconnue comme étant une grande famille de fractions qui peuvent être réduites par ce processus de réduction, il s'avère finalement que ce processus de réduction est idéal pour l'objet « fraction étrange ». Ce processus de réduction n'est donc plus anormal. On continuera cependant à affirmer que ce processus de réduction est invalide dans $\mathbb{Q}$, même s'il fonctionne pour des rationnels « d'exceptions ». Ce processus de réduction ne devient pas si différent de la division, qu'on pourrait dire « invalide » dans $\mathbb{N}$ même s'il fonctionne pour des naturels « d'exception ». La « nominalisation » d'un nombre conduisant à créer un concept à partir de cas est en fait assez commune en mathématique. Il existe ainsi des « nombres intouchables », comme par exemple 2, 5, 52 qui sont des nombres intouchables car un entier naturel est intouchable si et seulement s'il ne peut pas être exprimé comme la somme des diviseurs stricts d'un entier quelconque. Il existe des « nombres étrange », comme par exemple 70, car il est un nombre entier dont la somme des diviseurs propres est supérieure à lui-même et dont aucune somme d'un sous-ensemble de ses diviseurs ne correspond au nombre lui-même. Il existe aussi des « nombre canadiens parfaits » comme 125 en est un exemple car c'est un nombre dont la somme des diviseurs non triviaux est égale à la somme des carrés de ses chiffres. Et ainsi de suite, il existe d'autres types de nombres.

On parle même de nombres « quasi-parfaits » (entier dont la somme des diviseurs est égale à deux fois le nombre plus 1 : $s(n)=2n+1$), dont on ne connaît *aucun* exemple mais à propos desquels on énonce tout de même des théorèmes (Hagis et Cohen, 1982). (En effet, Hagis et Cohen ont continué à raffiner les connaissances à propos des nombres quasi-parfaits sans en présenter un seul exemple.) Les nombres quasi-parfaits montrent qu'en mathématique il est même possible de créer un concept à partir de cas *hypothétique* de nombre. D'un côté, on peut y voir une forme de perfection des mathématiques car elles permettent de travailler des objets inconnus. D'un autre côté, on peut aussi y voir une forme d'imperfection des mathématiques car elles permettent de travailler sur des familles de nombres dont il n'existerait aucun représentant... D'un côté, on sait comment sont ces objets s'il en existerait des exemples. D'un autre côté, on ne sait toujours pas s'ils en existent…

Certaines particularités du travail mathématique mises de l'avant par Fried et Goldberg (2010) éclairent aussi cet aspect producteur entre les dimensions parfaite et imparfaite. Les auteurs terminent leur article sur une série de questions. Ils remarquent que l'ordinateur leur a permis de faire un bon nombre d'observations et de généralisations expliquées par les théorèmes de leur article. Ils disent aussi qu'ils ont néanmoins rencontré, à l'aide de l'ordinateur, certaines généralisations pour lesquelles ils ne possèdent pas d'explication. La série présentée au tableau 2.5 (voir au début de la section 2.1.3.1) en est un exemple. Pour ce cas, les auteurs disent voir qu'il semble y avoir un lien entre les chiffres présents dans la fraction initiale et ceux utilisés pour la gonfler, mais sans pouvoir aller plus loin. Ils montrent donc des résultats de leur démarche mathématique qu'ils ne peuvent expliquer ou justifier, pointant par le fait même vers de nouveaux aspects des fractions étranges. Cette zone d'incertitude met à son tour en lumière les dimensions parfaite et imparfaite des mathématiques de deux manières différentes.

D'une part, cette manifestation d'incertitude nous éclaire qu'il existe des régularités mathématiques qui sont bien définies sur un échantillon donné, mais comme elles sont encore inexpliquées on ne peut garantir leur validité. Ce que les auteurs nous communiquent c'est que si une justification pour ce pattern existe et qu'il est possible de la trouver, ils ne la connaissent pas encore. Ils n'ont donc pas encore atteint un état de certitude à propos de cette régularité. Ils sont dans une zone grise qui pourrait les entrainer à investiguer davantage. On peut remarquer, dans ce côté plus incertain de leur discours, une part de l'activité vivante, mouvante et émergente du mathématicien. On voit qu'il se pose de nouvelles questions. À ce sujet, on peut se questionner : est-ce que l'imperfection sous la forme d'incertitude mène les mathématiques vers de nouvelles questions ? ; Peut-on attribuer un côté producteur à cette incertitude ?

D'autre part, on reconnaît ici directement une des conséquences pratiques des théorèmes d'incomplétude de Gödel : les auteurs laissent entendre que la possibilité même de trouver une justification à ce pattern est incertaine. Ce côté de l'incertitude mathématique est toujours omniprésent dans l'activité mathématique ; nous n'avons jamais aucune garantie a priori qu'un théorème puisse ou ne puisse pas être démontré. Mais ceci n'empêche pas Fried et Goldberd (2010) de poser la question. Et de fait, j'aborde dans un moment les progrès de Stuffelbeam (2013) sur ce point à la section 2.1.4. L'incertitude quant à l'existence d'une explication vient de pair avec l'espoir que cette explication existe. L'imperfection de l'état actuel de nos connaissances sur les fractions étranges est vue en tant que telle à la lumière d'un certain idéal de perfection, un monde mathématique dans lequel tout s'explique, se prouve ou se réfute.

#### 2.1.3.2 Des erreurs bonnes pour les mathématiques

Revenons maintenant au propos que tiennent Fried et Goldberd (2010) au tout début de leur article. D'entrée de jeu, les auteurs annoncent que « toutes les erreurs ne sont pas égales » (traduction libre, Fried et Goldberd 2010, p.357) et nous invitent à porter attention sur un type d'erreur mathématique en particulier. Et, en portant attention à l'algorithme qu'ils ont développé et la naissance de cette nouvelle catégorie de nombres, il faut constater ici toute la pertinence des mathématiques qu'ils ont faites autour d'une procédure fausse. Fried et Goldberd semblent donner naissance à toute une problématique mathématique comparativement à Boas Jr (1972) qui semblait plus « clore » un problème relativement isolé.

Pour commencer, arrêtons-nous sur l'idée que les erreurs ne pas toutes égales. Ceci semble difficilement conciliable avec un monde parfait, une vision idéalisée des mathématiques faites de certitudes et de vérités absolues. Les auteurs ouvrent la porte à un monde de nuances autour de l'erreur mathématique. L'idée d'erreurs non égales signifie que certaines sont plus importantes ou négligeables que d'autres insinuant une forme de hiérarchie de l'erreur. À la différence de Carman (1971), qui incluait aussi dans sa distinction entre mistake et misteak la présence d'un certain potentiel du point de vue de l'*activité* mathématique[13], Fried et Goldberd (2010) place ce potentiel du côté des mathématiques elles-mêmes. Une bonne erreur est une erreur qui permet de faire des découvertes mathématiques, de formuler et prouver des théorèmes, de poser de nouvelles questions, etc. Le côté « généralisable » dont parle Carman (1971) est mis au service de la création de ce nouvel objet mathématique que sont les fractions étranges.

Du point de vue de l'im-perfection, ceci est parlant. D'un côté, on pourrait voir dans la hiérarchisation des erreurs une manifestation du côté parfait, qui cherche à ordonner, à intégrer différents phénomènes mathématiques. D'un autre côté, il est clair que cette démarche est pour ainsi dire imposée par la présence d'erreurs (le côté imparfait des mathématiques) potentiellement productives du point de vue mathématique. À travers la possibilité de faire « d'heureuses erreurs » (comme l'écrit le poète Ronsard[14]) l'imperfection ne fait pas que donner prise à la perfection : elle semble lui imposer de dire, voire de faire quelque chose par rapport à l'erreur en général et aux erreurs

---

[13] Troisième caractéristique du misteak : « le misteak permet de (re)valoriser une procédure généralement valide » (Traduction libre, Carman, 1970) Autrement dit, le *misteak* relève d'une procédure qui fonctionnent de manière occasionnelle – pas une seule fois, mais pas toujours.

[14] L'erreur décrite par Pierre de Ronsard dans son sonnet l'Erreur amoureuse est à la fois industrieuse – associée au travail et productive, heureuse et sainte–liée à un idéal de perfection. L'expression heureuse erreur s'insère donc bien ici.

productives en particulier. Évidemment, nous poussons ici un peu l'analyse : le phénomène n'est probablement pas si fréquent, mais nous apparaît bel et bien comme une possibilité.

Soulignons, en terminant avec Fried et Goldberg (2010), la manière dont le côté éphémère de certains éléments que nous avons rattachée à l'imperfection vient aussi servir, plus généralement, la dimension de perfection. Ce qui était difficile et mystérieux pour Carman en 1971, ne l'est plus en 2010 et le sera encore moins en 2013 (comme on le verra à la section suivante). Au fil du temps, des erreurs sont corrigées, des questions sont répondues, des imprécisions sont clarifiées, des exceptions sont expliquées, classifiées. En se développant à travers ceci, les mathématiques donnent l'impression de pouvoir éventuellement régler tous les problèmes auxquelles elles sont confrontées ! L'image de perfection des mathématiques vient peut-être, en partie, de l'expérience d'imperfections dont on se débarrasse. Une bonne erreur c'est peut-être aussi une erreur dont on peut se défaire. Les petites imperfections donnent l'occasion d'un perfectionnement facile, voir rassurant et qui contribuent aussi à nourrir une certaine image de l'entreprise mathématique dans son ensemble. On ne fait pas que poser un idéal de perfection. On observe *un mouvement* dans la direction de cet idéal. On s'en rapproche un peu chaque jour ! Il ne faut donc pas s'étonner du « boom » causé par la démonstration de Gödel à l'égard du fait que tout n'est pas démontrable ou réfutable en mathématique.

### 2.1.4 L'imperfection encore plus présente qu'on le pense ?

Pour compléter cette section autour de fractions étranges, nous allons brièvement examiner un dernier texte à leur sujet. Dans l'article *How weird are weird fractions?* Stuffelbeam (2013) se donne comme objectif de prouver que chaque fraction étrange est unique dans le sens où la partie à retirer est unique et elle ne pourrait pas être autre chose. L'auteur se place dans la continuité des travaux de Carman (1971), Boas Jr

(1972) et Fried et Goldberg (2010) qu'il cite en introduction. Il s'attaque à des questions soulevées par ces derniers. Le théorème qu'il démontre stipule que la combinaison de chiffres qui peut prendre la place de *D* dans une fraction étrange de la forme $\frac{(\text{Préfixes})_1 D (\text{Suffixes})_1}{(\text{Préfixes})_2 D (\text{Suffixes})_2}$ est une combinaison unique entièrement déterminée par la combinaison des préfixes et suffixes en jeu. Dit autrement, Stuffelbeam (2013) prouve que la combinaison de chiffres, permettant à une fraction d'être une fraction étrange, est unique.

Il y a dans l'idée de détermination de D à partir des suffixes et préfixes quelque chose qui peut nous informer sur le côté parfait des mathématiques. La prédétermination indique l'ordre et la prédictibilité. Cette prédétermination contraste avec ce qui serait sans raison, gratuit, voire hasardeux[15]. En montrant qu'il existe une structure déterminante entre les chiffres des fractions étranges, Stufflebeam (2013) vient donner une couche de perfection aux fractions étranges. Il se trouve qu'il fait aussi des fractions étranges des objets mathématiques finalement assez « ordinaires » dans la mesure où il prouve, ensuite, l'existence de préfixes et suffixes qui se combinent avec *n'importe quel* nombre naturel D pour former une série de fractions étranges de *n'importe quelle* puissance entière de la base. Peu importe la combinaison *D* de chiffres, il existe des $(\text{Préfixes})_1$, $(\text{Suffixes})_1$, $(\text{Préfixes})_2$ et $(\text{Suffixes})_2$ qui sont des entiers positifs tels que :

$$\frac{(\text{Préfixes})_1 D (\text{Suffixes})_1}{(\text{Préfixes})_2 D (\text{Suffixes})_2} = \frac{(\text{Préfixes})_1 \cancel{D} (\text{Suffixes})_1}{(\text{Préfixes})_2 \cancel{D} (\text{Suffixes})_2} = 10^a$$

Tout comme l'ensemble des nombres des rationnels qui admet n'importe quel nombre entier à ses numérateurs et dénominateurs, l'ensemble des fractions étranges peut admettre n'importe quel nombre à la place de *D* à ses numérateurs et dénominateurs. Finalement d'une certaine manière, par leur absence de limitations sur les chiffres

---

[15] On revient sur l'idée de hasard à la section 2.3.

qu'elles comportent, Stufflebeam (2013) montre que les fractions étranges, bien que particulières, ne sont pas si différentes des autres fractions. Stuffelbeam (2013) prouve même que tous les nombres rationnels peuvent être écrits avec au moins deux représentations différentes de fractions étranges (et dont les chiffres retirés seraient 0 et $\beta -1$, où $\beta$ représente la base du nombre rationnel initial). Ce résultat suggère, selon Stuffelbeam, que les fractions étranges sont finalement « très abondantes et après tout pas si étranges » (traduction libre, 2013 p. 209).

Mais ceci n'enlève rien au fait que l'on pourrait s'intéresser à de nouvelles *particularités* de ces objets pas si étranges : par exemple, y aurait-il une manière de caractériser les *réactions* de certaines de ces fractions à telle ou telle opération ? Pourrait-on inventer certaines « opérations étranges » autour de ces fractions? Le « potentiel d'imperfection » autour de ces objets ne s'épuisent pas nécessairement lorsqu'on les rattache, par certains aspects du moins, au côté parfait des mathématiques. Gagner des précisions et des nouvelles connaissances à propos de ces objets mathématiques semble faire en sorte que nous pouvons nous poser de nouvelles questions, ce qui indique qu'on ne sait pas encore tout sur ces objets…

### 2.1.5 Synthèse sur les fractions étranges

Dans cette section de chapitre sur les textes de Carman (1971), Boas Jr (1972), Fried et Goldberg (2010) et Stufflebeam (2013) autour des fractions étranges notre but était d'identifier certaines manifestations de l'activité mathématique illustrant les dimensions parfaites et imparfaites. Et à travers cela, nous voulions clarifier et mieux comprendre ces dimensions. Ainsi, nous avons parlé des aspects propres à leurs manifestations mathématiques respectives et de certains aspects propres à chacune des dimensions. Se faisant, nous avons commencé à répondre à ma première question de recherche :

- *En mathématiques, quelles sont les caractéristiques qui contribuent à définir ce qu'on peut voir comme la dimension parfaite et la dimension imparfaite des mathématiques ?*

Nous avons trouvé que le côté informel, local, étrange ou non-conventionnel des manifestations mathématiques semble davantage apparenté à la dimension imparfaite des mathématiques. À l'opposé, la beauté, l'unicité, la simplicité, le formalisme et la possibilité de démontrer et de justifier en mathématiques sont des aspects des mathématiques qui définissent surtout la dimension parfaite. Néanmoins, l'appartenance de certains critères à une dimension ou à une autre est parfois relative au contexte. Par exemple, nous avons remarqué que le langage formel n'est pas toujours idéal, car pour l'apprécier et le comprendre, il faut être capable de le lire. De plus, sur la beauté, nous avons remarqué que ce qui la définie est ancrée dans une culture. Le jugement de beauté n'est donc pas universel… Il n'est pas si « parfait ».

Des caractéristiques qui éclairent certains liens entre les deux dimensions parfaites et imparfaites ont aussi été soulevés. Comme une même manifestation mathématique peut, sous un certain angle, évoquer la dimension parfaite et, sous un autre angle, elle peut définir la dimension imparfaite, nous pensons que ces deux dimensions sont perméables l'une à l'autre. Il y a présence d'interactions entre les manifestations de la perfection mathématique et les manifestations de sa dimension opposée. À quelques reprises, nous avons remarqué qu'il y avait production de nouvelles mathématiques lorsque cette interaction se produisait. On peut apprécier ceci en faisant un parallèle entre le développement du concept de fractions étranges et le développement de la formule d'Euler tel que le présente Lakatos (1976) dans *Preuves et réfutations*. Borasi (1993) cite Lakatos dans le but de mettre en évidence les tensions entre les raffinements successifs, d'une conjecture, sa démonstration, et la définition du concept prouvé en lui-même, elle en parle en ces termes :

> Lakatos analysis shows the interplay between successive refinements of this statement [: In a polyhedron the relationship among the number of

> faces(F), sides (S) and vertices(V) is: V + F - S =2], its demonstration, and the definition of polyhedron itself. (Borasi, 1993, p. 126)

Borasi (1993) note que l'acte de définir progressivement un concept mathématique est aussi un moyen d'explorer un domaine mathématique. On pense que notre analyse des développements autour de la fraction étrange montre qu'un phénomène similaire s'est produit au cours des travaux faits sur les fractions étranges ; il y a eu raffinement successif et un domaine des mathématiques a été exploré. En effet, la définition d'une fraction étrange s'est transformée. En s'inspirant de la citation ci-haut, on remarque que l'analyse du corpus d'articles sur les fractions étranges montre une forme d'interaction entre les démonstrations, les définitions, et l'évolution des affirmations à leurs propos.

Effectivement, au fur et à mesure que les théorèmes apparaissent, la/les définitions de fractions étranges se précisent et se transforment : on se retrouve avec plus de certitudes, un plus grand domaine de validité, plus de formalisme, des explications plus fines (e.g. caractère prédéterminé) et ainsi de suite. Marfori (2010) est encore plus précis sur les manières dont des méthodes formelles agissent lorsqu'elles sont appliquées sur des concept informels : « The epistemic advantage of applying formal method to informal concepts would yield the desired result of a precise analysis of the informal notions implicit or explicit in ordinary mathematical practice.»(Marfori, 2010, p. 268) Mais on remarque aussi l'émergence de nouvelles questions, le besoin de nouvelles justifications et souvent à propos de cas parfois de plus en plus précis et locaux. Ces nouvelles questions peuvent être vues comme une forme d'imperfections sous forme d'inconnu. L'état de nos connaissances à ce sujet est encore incomplet, en ce sens, on pourrait affirmer que la perfection alimente aussi l'imperfection. On pourrait comparer ces mouvements entre les dimensions parfaites et imparfaites des mathématiques à des manifestations mathématiques de « raffinements successifs » au sens dont Borasi (1993, p. 126) l'utilise lorsqu'elle parle de Lakatos. Et lors de ces raffinements successifs, on en découvre un peu plus sur ce que l'on ne connaît pas. Ces manifestations informent sur le potentiel du passage de la dimension imparfaite vers la dimension parfaite et vice-versa. Il semble que l'interaction entre la dimension parfaite et imparfaite des mathématiques a un effet producteur d'avancées mathématiques. Et si ce passage se faisait continuellement ? et même infiniment ? Et si c'était inhérent ? Il semble que cette section a montré que le passage entre la perfection et l'imperfection mathématique pourrait même être moteur à l'activité mathématique.

## 2.2 La perfection du point de vue de la philosophie

La synthèse présentée à la fin de la section précédente me conduit assez naturellement sur le terrain de la philosophie et plus précisément au cœur du texte *Paradoxes of Perfection* par les philosophes Tatarkiewicz et Kasparek (1980). Ce que j'ai vu comme le passage d'une dimension à l'autre et comme potentiel moteur à l'activité mathématique peut être reconnu comme l'illustration d'un paradoxe de la perfection. Les philosophes expliquent que ce paradoxe à propos de la perfection remonte à Empedocles, un philosophe grec ayant vécu cinq siècles avant J-C. La perfection d'une chose dépend de son imperfection. La perfection ne peut pas être achevée puisque ce n'est que dans l'imperfection que l'on peut tendre vers la perfection ; c'est paradoxalement parfait ainsi. C'est donc que même lors parle de « raffinements successifs », même lorsque cette expression semble indiquer que l'on va vers une direction (celle de la perfection), il y a aussi quelque chose qui alimente et maintient l'imperfection, car la perfection reste inachevée.

En ce sens, Scaliger et Vanini - deux artistes du 16$^{e}$ siècle - ont énoncé que la perfection réside dans son imperfection puisque la vraie perfection repose sur l'incessante possibilité d'amélioration (Tatarkiewsky et Kasparek, 1980). Aussi en ce sens, Tatarkiewsky et Kasparek s'expriment à propos du monde : « If the world were so perfect that it did not leave room for new things, it would lack the greatest perfection: thus, if it were perfect, it would not be perfect (Tatarkiewsky et Kasparek, 1980, p.77).»

Donc, selon la conception de la perfection exposée par ces philosophes, on pourrait affirmer qu'en mathématiques la possibilité de créer découle d'imperfections et cette continuelle possibilité de création représente sa perfection.

L'origine de ce paradoxe découle de la coexistence dans le langage de deux conceptions de la perfection (Tatarkiewsky et Kasparek, 1980 ; Tatarkiewsky, 1979). La première définition du concept de perfection est précise et stricte, elle n'admet pas de gradation, elle désigne une qualité extrême de ce qui est complet, fini, achevé et entier. Ce n'est évidemment pas dans ce sens strict que l'on peut considérer les mathématiques comme étant complètes et parfaites. Sous un angle plus familier, dans une seconde définition, la perfection peut désigner quelque chose de très proche de « vraiment bon », qui répond parfaitement aux buts que nous nous sommes donnés, et qui possède de grandes vertus. Nous pourrions dire : « Ce scalpel est parfait ! ». En ce sens, l'apport du scalpel relève certes d'une qualité extrême, c'est probablement un excellent scalpel, et nous pourrions vouloir dire qu'il est parfait par rapport à l'utilité qu'il est supposé avoir, ou même qu'il est meilleur que les autres. Ce sens de la perfection ne fait pas écho à une idée d'achèvement de l'objet *en soi*, il est davantage relatif aux buts que nous donnons aux choses, ou relatif aux autres choses. On ne parle plus de perfection en soi, mais bien de perfection relative. C'est l'existence de cette nuance qui a pu mener à un paradoxe de la perfection énoncé par Vanini et Scaliger (deux écrivains du 16e siècle) lorsqu'ils affirment que la perfection dépend de l'incomplétude puisque l'incomplétude possède un potentiel pour du développement et la possibilité de compléter avec de nouvelles caractéristiques (Tatarkiewsky et Kasparek, 1980). Une autre manière de voir la nuance entre les deux vocables de la perfection est de considérer que la perfection dans son sens strict possède tous les avantages possibles. Ainsi, s'il y a de la place pour l'amélioration, c'est que l'objet ne possède pas tous les avantages possibles donc il n'est pas parfait. Il peut être amélioré et transformé. On peut le considérer comme en processus de perfectionnement, et non arrêté dans ses développements. Selon la vision de la perfection de Vanini et Scaliger c’est ce côté « incomplet » qui rend un objet si parfait et « vivant » (*alive* dans le texte). Ainsi, ce qui est parfait dans son sens familier est dynamique et imparfait dans son sens strict, complet et statique. Et inversement, ce qui serait parfait en son sens strict serait imparfait dans sens familier ; à la fois parfait et imparfait, de là le paradoxe.

Pour continuer sur les mathématiques, ces dernières ne seraient pas parfaites dans son sens strict, car elles sont inachevées dans leur sens incomplet. On a qu’à penser au théorème d’incomplétude de Gödel. Et, c’est justement les possibilités de développement qui les rendent si parfaites au sens large. Paradoxalement, elles sont donc à la fois parfaites au sens large et imparfaites au sens strict. Et le théorème d’incomplétude de Gödel vient justement montrer que les mathématiques ne peuvent pas être parfaites au sens strict, puisqu’elles ne peuvent être complétées. L’impossible complétude implique donc une éternelle possibilité d’avancement, un renouvellement continuel ; elle rend la fin *finale* de l’activité mathématique si invraisemblable. Dans cette perspective, la dimension parfaite au sens strict des mathématiques représente un idéal inatteignable. Tendre vers cet idéal représente ce que j’ai nommé le passage de l’imperfection à la perfection, ou le moteur à l’activité mathématique. Les caractéristiques des dimensions im-parfaites énoncées dans la section précédente représentent des propriétés idéales *à atteindre*.

Un second paradoxe de la perfection énoncé par Tatarkiewicz et Kasparek (1980) s’énonce ainsi : la prise de conscience de l’absolue imperfection des choses est une forme relative de perfection. Une forme de perfection mathématique dans ce contexte est donc de remarquer nos imperfections ; les perfections qui ne sont pas encore atteintes. En mathématiques, voir et nommer les imperfections est donc une forme de perfection. D’une certaine façon, le passage de l’imperfection vers la perfection n’est jamais complètement achevé et ne pourra jamais être complètement achevé car il y aura toujours des imperfections découvertes. Ainsi, en mathématiques, la perfection telle qu’on l’idéalise n’est qu’une approximation de la perfection idéale.

Tatarkiewicz et Kasparek (1980) nous éclairent donc sur la présence simultanée des dimensions parfaite et imparfaite des mathématiques. Les mathématiques sont parfaites, parce qu'il y a des imperfections. C'est la prise de conscience d'imperfections qui nous permet d'être conscient de la perfection. Ces deux dimensions s'éclairent et se justifient. On tend vers la perfection, car il y a imperfections. Il y a imperfections, car l'idéal de perfection n'est pas encore (et ne sera jamais) actualisé. Pour terminer cette section, et poursuivre la réponse à ma première question de recherche :

- *En mathématiques, quelles sont les caractéristiques qui contribuent à définir ce qu'on peut voir comme la dimension parfaite et la dimension imparfaite des mathématiques ?*

Il me semble que les philosophes présentés dans cette section éclairent le caractère essentiel de l'incomplétude mathématique afin que les mathématiques soient parfaites au sens large. Du même coup, ils éclairent aussi l'inévitable conséquence de cette incomplétude pour la perfection mathématique dans son sens strict. On voit mieux que la perfection mathématique au sens strict est impossible à atteindre si l'incomplétude existe. Au sens strict de la perfection, les mathématiques sont donc (heureusement) condamnées à rester dans l'inachèvement et dans l'imperfection.

Continuant mon travail d'éclairage des caractéristiques de dimensions parfaites et imparfaites, on remarque à partir de Tatarkiewicz et Kasparek (1980) que la possibilité continuelle de développement est centrale aux philosophes qui ont écrit sur les paradoxes de la perfection. Aller observer certains développements de l'histoire des mathématiques me permettrait d'éclairer de nouvelles caractéristiques des dimensions parfaites et imparfaites des mathématiques. C'est ce que je fais dans la section suivante en m'aidant de textes portant sur l'histoire des mathématiques et d'autres provenant de la philosophie des mathématiques. Un thème devait être choisi, mon regard s'est porté sur le thème de la rigueur.

## 2.3 Des développements mathématiques éclairants l'im-perfection : le cas de la rigueur

Nombreux sont ceux qui se sont intéressés aux développements des mathématiques : mathématiciens, philosophes, historiens, ethnologues et ainsi de suite. Certaines de ces réflexions m'amènent assez directement sur le terrain des dimensions parfaite/imparfaite des mathématiques. Une citation célèbre de Russell (1956), tirée de ses mémoires, illustre bien ceci :

> Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty […] sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show […] But I discovered that many mathematical demonstrations, which my teachers expected me to accept, were full of fallacies, and that, if certainty were indeed discoverable in mathematics, it would be in a new field of mathematics, with more solid foundations than those that had hitherto been thought secure. […] and after some twenty years of very arduous toil, I came to the conclusion that there was nothing more that I could do in the way of making mathematical knowledge indubitable. (Russell, 1956)

On pourrait s'intéresser à de nombreux thèmes se rapportant à l'im-perfection, comme la notion de certitude mentionnée par Russell (1956 ; voir aussi Kline,1982). Comme il faut cependant limiter ici notre analyse, un thème a été retenu : la question de la rigueur, qui sera abordé à travers quelques moments de développements marquants des mathématiques. Dans cette section, j'enchainerai en examinant les textes qui, bien que loin de faire le tour de la question, me permettent de dégager plusieurs nouveaux éléments pour comprendre ce que signifie, ou désigne, les dimensions de perfection et d'imperfection des mathématiques.

Barbin (2007) a montré que les manières d'être rigoureux changent au fil de l'histoire et au fil des développements mathématiques qui émergent. L'interprétation à donner à ces changements varie d'un auteur à l'autre. Pour Lakatos (1976) les variations dans la rigueur montrent que les mathématiques et sa rigueur sont *faillibles*[16]. Elles n'ont donc aucun statut de certitude permanent. Dieudonné (1982) réfute la thèse de Lakatos (1976), car même s'il reconnait qu'au sein de chaque théorie mathématique qui émerge la rigueur change, il affirme qu'à l'achèvement d'une théorie la rigueur parvient toujours à une forme de plateau à partir duquel « il n'y a plus jamais de contestations sur les résultats de la théorie. » (Dieudonné, 1982, p. 11) Ainsi, selon Dieudonné, la rigueur dans sa forme finale et achevée arrive à un certain état de permanence. Cet état s'apparenterait à une forme stricte de la perfection présentée par Tatarkiewicz et Kasparek (1980).

Dans le but d'explorer ces idées à propos de rigueur mathématique changeante au fil de son histoire et les potentiels moments de l'histoire où l'on a pris conscience d'imperfections, je présente plus en détail Barbin (2007) *Les avatars de la rigueur mathématique* qui fait le récit de l'histoire de la rigueur mathématique sous l'angle de ses changements. Aux événements choisis par Barbin (2007), j'en ai ajouté d'autres principalement tirés de Gillies (1992) *Revolution in mathematics* et de Dowek (2007) *La métamorphose du calcul.* Nous constaterons que les changements des normes de rigueur sont révélateurs des caractéristiques des dimensions parfaites et imparfaites des mathématiques. Nous discuterons ces changements en lien avec les dimensions parfaite et imparfaite des mathématiques à l'aide de textes tirés de la philosophie des mathématiques.

### 2.3.1 De la rigueur « empirique » à la rigueur « calculatoire »

De nombreux indices font croire que les Mésopotamiens donnaient une place centrale aux algorithmes ou méthodes permettant de résoudre des problèmes de la vie de tous

[16] Au sein d'une perspective faillible des mathématiques même ce qui est prouvé rigoureusement peut être renversé, aucune vérité n'a de statu permament.

les jours, mais aussi des problèmes arithmétiques « théoriques ». Cette idée est discutée en détail par Caratini (2002) qui donne de nombreux exemples de ce qu'on peut entendre par « calcul théorique » : il s'agit par exemple de connaitre les puissances successives de 225 ($225^2$, $225^3$, $225^4$, etc. sur la tablette OS 3816) pour lesquelles aucune utilité pratique ne semble envisageable. On peut voir dans cet intérêt pour le théorique la marque de changements épistémologiques importants par rapport à ce qu'on croit avoir été le travail mathématique environ 3000 ans av. J.-C. Le monde empirique ne suffisait pas pour répondre aux questions que l'on pouvait se poser sur les grands nombres. Un système mathématique sans méthode de calcul serait imparfait dans le sens où il ne pourrait pas répondre aux questions mathématiques que l'on se pose. La venue des méthodes de calcul touche aussi la notion de rigueur.

Si on y pense bien, lorsque le calcul a pour fonction de déterminer la grandeur d'un terrain, le moment de l'arrivée du soleil, ou le moyen de partager des quantités, on peut se servir d'observations de terrain pour valider le travail mathématique : la correspondance avec le monde réel peut alors devenir un excellent moyen de confirmation des mathématiques qui sont faites. Les nombres servent à décrire le monde qui les entoure. Qu'en est-il lorsqu'il est question de calcul théorique? Que dire du caractère *en pratique* rigoureux de $225^6 = 129\ 746\ 337\ 890\ 625$ ? La valeur d'un tel résultat repose en effet non pas sur sa vérifiabilité empirique (c'est un nombre plus de 500 fois plus grand que le nombre d'étoiles dans notre galaxie), mais sur sa justesse du point de vue des mathématiques elles-mêmes : des algorithmes utilisés ou des relations connues entre les nombres (par ex. puisque la puissance d'un nombre se terminant par 5 doit aussi se terminer par 5, on pourrait s'appuyer sur ceci pour valider le calcul). On peut donc très tôt voir, à travers l'intérêt pour les mathématiques « théoriques » la naissance d'une forme de rigueur calculatoire. L'analyse de Caratini (2002) nous permet ainsi de voir comment, à l'exactitude pratique et potentiellement vérifiable physiquement, il s'ajoute une justesse « purement mathématique » accompagnant la naissance de ces nouvelles questions/problèmes mathématiques.

On peut constater qu'à l'origine même de ce que l'on croit être le début des mathématiques au moins deux façons de valider les mathématiques ont très vite coexistées, alors que deux types de rigueur pouvaient être considérées. On pouvait valider en correspondance avec le monde réel ou on pouvait aussi vérifier la justesse de l'enchainement algorithmique. Ces deux façons d'être rigoureux ne s'attardent pas aux mêmes objets. En effet, dans un cas la rigueur se penchait empiriquement sur la validité du résultat alors que dans l'autre cas on vérifiait la validité de la méthode. Aborder ces différentes manières d'être rigoureux sous l'angle des dimensions parfaites et imparfaites des mathématiques nous amène à penser que le mathématicien qui s'intéressait aux problèmes théoriques avait la préoccupation ou l'intérêt de ne pas se laisser limiter par des préoccupations empiriques du monde. Peut-être cherchait-il à se libérer des moyens de validations du monde sensoriel, que même de nos jours certains considèrent incertains et trop approximatifs. On pourrait aussi se questionner sur diverses subtilités à propos de cet enjeu : est-ce l'inexactitude ou la variabilité, ou les limitations, ou l'imprécision du monde empirique qui a motivé les développements méthodologiques théoriques des mathématiques ? Cette question évoque ainsi de nouveaux éléments à propos de ce que la dimension imparfaite des mathématiques peut signifier pour les mathématiciens de cette époque.

On peut imaginer que la validation par correspondance avec le monde empirique ou la validation algorithmique était priorisée selon les contextes. L'idée de rigueur variant selon les contextes remet en question l'image souvent véhiculée de *la* rigueur mathématique constante et déterminée (Barbin, 2007). À propos de la perfection des mathématiques, on a tendance à associer « rigueur » à la perfection des mathématiques : un bon travail mathématique est un travail rigoureux. Mais qu'arrive-t-il s'il existe plusieurs façons (non équivalentes) de bien faire, plusieurs façons de bien valider ? Serait-ce que la dimension parfaite des mathématiques peut aussi être plurielle ? Devrait-on parler de dimension parfaite « en pratique » et « en calcul » ? Dans un premier temps, être rigoureux en pratique est une forme de perfection relative (dans son sens large) dans laquelle on répond parfaitement à nos buts. Dans un second temps, être rigoureux en calcul relève d'une perfection en soi, le calcul est complété à la perfection et on atteint l'idéal recherché. Ce qui est intéressant ici de remarquer est que peu importe la définition de la perfection que l'on choisit d'adopter, chacune de ces possibles visions de la perfection éclaire des caractéristiques d'une dimension imparfaite. D'un côté la perfection mathématique empirique rappelle la correspondance entre les résultats mathématiques et les objets empiriques. Ainsi, elle indique que les résultats qui ne seraient pas en correspondance seraient imparfaits. D'un autre côté, la perfection mathématique du calcul évoque la réalisation d'une méthode idéale. Dans ce contexte l'imperfection représente tout écart à l'algorithme idéalisé. Bien que la perfection empirique relève d'un sens large du concept de perfection et la perfection du calcul relève d'un sens strict du concept de perfection, chacune de ces deux façons d'être rigoureux dessine des dimensions parfaites et imparfaites qui se nourrissent mutuellement.

### 2.3.2 L'ajout d'une nouvelle façon d'être rigoureux

Dowek (2007) aborde ce qu'il nomme des « problèmes mathématiques théoriques » d'une toute autre manière. Selon cet auteur, l'origine des problèmes théoriques remonte au V$^{e}$ siècle avant J-C, en Grèce. Ces problèmes théoriques et abstraits s'éloignent de la vie de tous les jours et ne peuvent se résoudre par des méthodes de calculs seuls. Un exemple : « trouver un triangle rectangle et isocèle dont les trois côtés mesurent un nombre entier d'unités » (Dowek, 2007, p. 16). On ne s'intéresse pas à un champ de blé de surface triangulaire ni à une forme triangulaire formée par trois étoiles, mais bien à un triangle mathématique. Afin de travailler ces problèmes, un travail mathématique de qualité devait s'appuyer sur ce que Dowek (2007) nomme « raisonnement mathématique ». À la venue de ce type de raisonnement, un pas de plus est fait vers l'abstraction. Ce changement profond, voire révolutionnaire (Dunmore, 1992), a engendré des changements dans les manières de valider et de faire les mathématiques.

Arrivé sous la forme de démonstration déductive, le raisonnement mathématique est une suite de propositions qui s'enchainent selon des règles. C'est donc ici l'utilisation du raisonnement déductif qui garantit la validité du travail mathématique : une forme de rigueur différente de la rigueur « calculatoire » ou « empirique » évoquée en 2.3.1. Comment ce développement nous éclaire-t-il sur les dimensions parfaites et imparfaites des mathématiques ?

Il y avait, certes, des variations de manières de penser et de discourir sur la méthode et sur la connaissance au sein des penseurs de l'Antiquité. Aristote s'est intéressé beaucoup à la logique et la déduction. Platon a discuté grandement des faux raisonnements. Les pythagoriciens raisonnaient surtout sur les nombres... Les manières de faire des mathématiques et de les valider n'étaient donc pas homogènes. Mais on semble pouvoir dire que ces penseurs ont tous contribué à la naissance et la reconnaissance de ce qu'on nomme la démonstration en mathématique. L'apparition de ce qu'on appelle les syllogismes correspond à des changements importants au niveau de la rigueur (Barbin, 2007). Aristote est de ceux qui exigent l'utilisation de syllogismes dans des démonstrations scientifiques. La rigueur en période préhellénique se situait dans les méthodes, les outils de calculs, et dans le monde empirique. À l'ère grecque, le discours axiomatico-déductif des éléments d'Euclide devient une référence en matière de rigueur (Toth, 1969).

Une dimension parfaite des mathématiques s'associe alors étroitement à la méthode axiomatique. En effet, c'est la démonstration qui devient la manière ultime et convaincante de faire des mathématiques rigoureuses. Mais l'axiomatique d'alors n'évolue pas seule comme le présente Szabo (1964), en effet celle-ci se développe *avec* des représentations et des constructions empiriques. On prouve en faisait des dessins. Une forme de rigueur visuelle cohabite avec la rigueur de la démonstration. Les démonstrations d'alors reposent entièrement sur le langage naturel et sur des figures géométriques visuelles. Et elles ont peu à voir avec les démonstrations formelles d'aujourd'hui. Plusieurs preuves de cette époque sont aujourd'hui considérées imprécises, incomplètes, intuitives, etc. : des qualificatifs que l'on associerait aujourd'hui à la possibilité de faire des mathématiques de manière imparfaite ! D'une certaine façon, la dimension parfaite d'alors est pour ainsi dire en contradiction avec ce qui pourrait être la perfection des mathématiques d'aujourd'hui. Un très bon exemple en ce sens est justement *Les éléments* d'Euclide, qui jusque dans le milieu du XIXe siècle, constituait encore un document de référence où une vérité était atteinte (Kline, 1975). Même Kant vantait sa logique « qui n'a pu faire jusqu'ici [1787 après J.-C.] un seul pas de plus, et qu'elle semble, suivant toute apparence, avoir été complètement achevée et perfectionnée à sa naissance » (Kant, 1787) ! Grâce à cet ouvrage, les mathématiciens pouvaient justifier l'exactitude et la perfection de leurs mathématiques. Selon eux, leur science tendait vers la vérité (Toth, 1969). Pourtant, même le règne de cet ouvrage prit fin. Le célèbre postulat des parallèles laissait planer un doute. Certains croyaient que le postulat des parallèles n'était pas un postulat, mais bien un théorème « dont la démonstration restait à découvrir. » (Blanché, 1956, p. 5) Si l'ouvrage mathématique dit « parfait » pendant presque 2000 ans[17] a fini par être remis en question, alors on peut se demander si vraiment des objets mathématiques peuvent être complètement élucidés ou même être garanti d'infaillibilité. Éclairé de cet exemple, il semble que la dimension parfaite des mathématiques ne peut se revendiquer d'avoir un statut éternel… Sherry (1997) décrit la vision des mathématiques de Lakatos comme : « un ensemble de vérités, mais aucune d'elles n'a une place permanente » (traduction libre, Sherry, 1997, p.413). En effet, si les vérités mathématiques ne sont pas permanentes, alors à tout instant, elles peuvent être renversées, montrées comme fausses, mises en doute, et même déclarées comme imparfaites. D'un autre point de

---

[17] Dit parfait au sein de la communauté mathématique. Barbin(1999) a montré que des doutes ont été soulevés au sujet du postulat des parallèles bien avant le 19e siècle. Il existait néenmoins une forme de consensus assez établi au sein de la communauté mathématique sur la validité de la géométrie d'Euclide (Toth,2009).

vue, on peut voir que la possibilité de changer les pratiques mathématiques fait justement partie de la perfection des mathématiques. En ce sens, le côté non statique des vérités mathématiques est désiré. C'est ce qui permet de faire des (nouvelles) mathématiques, de faire des mathématiques une science vivante, dynamique, qui évolue, dans laquelle on peut se poser de nouvelles questions. Dans cette perspective, on pourrait voir les mathématiques comme parfaites par les possibilités de travaux (nouveaux) qu'elles confèrent. Sherry (1997) met ainsi de l'avant sa propre vision des mathématiques comme quelque chose qu'il est possible de « perfectionner » sans cesse, ce qui rappelle le paradoxe de la perfection exposé par Tatarkiewsky et Kasparek (1980 ; voir section 2.2).

Précisément, dans le cas des géométries euclidiennes, c'est « la confiance excessive accordée aux figures géométriques » (Barbin, 2007, p. 10) qui fut surtout critiquée. C'est donc qu'au sein même de la perfection d'autrefois, il résidait tout de même des traces d'imperfection au sens où le raisonnement déductif ne pouvait pas se passer des figures géométriques. La présence de ces figures rendait ces démonstrations parfaitement intelligibles, tout en entrainant de vives critiques 2000 ans plus tard… On (re)voit donc que, même sur une très grande échelle de temps, en mathématiques ce qui est parfait en un temps, ne l'est pas nécessairement pour toujours.

### 2.3.3 Des débats autour d'une forme de rigueur « conceptuelle »

Les perceptions sur l'évolution historique du concept de polyèdre illustrent un certain débat à propos de l'existence de concepts flous en mathématiques. Selon Sherry (1997) le concept de polyèdre tel que le voyait Euler[18] vers 1742 n'a pas changé ; ce sont les mathématiques qui ont (à postériori) ajusté les définitions du passé. Selon lui, il n'y

---

[18] L'histoire du concept de polyèdre en lien avec la formule d'Euler est brièvement énoncé à la section 1.2.4 de ce mémoire.

aurait pas de concepts mathématiques flous au moment où les mathématiques sont faites. Sherry (1997) précise aussi à propos de concepts qui ne seraient pas clairs : «[The] presumption that mathematics coexists with anomalies can survive only by supposing that mathematicians characteristically employ concepts which are unclear.» (Sherry, 1997, p. 410) On peut justement penser que les mathématiciens emploient des concepts qui ne sont définis que partiellement sans considérer cet emploi comme un manque de rigueur. En effet, en 1915, le père de la cybernétique Norbert Weiner s'exprimait ainsi à propos de l'emploi de concepts mathématiques flous :

> But even if the things with which mathematics deals are fictions, it must be admitted that we can handle these fictions (e.g. 1+1=2) without knowing how they are put together. The average mathematician neither knows, nor, I grieve to say, cares, what a number is. You may say if you like that his analysis is blunted and his work rendered unrigorous by this deficiency, but the fact remains that not only can he attain to a very great degree of comprehension of his subject, but he can make advances in it, and discover mathematical laws previously un- known. The whole logical analysis of the concept of number scarcely dates back forty years, yet the first mathematical use of numbers is lost in prehistoric antiquity. (Wiener, 1915, p. 569)

Selon Weiner (1915), il n'est pas nécessaire que les objets mathématiques soient définis clairement pour faire des mathématiques. On a qu'à regarder l'invitation de Carman (1971) à employer les fractions étranges, qui étaient alors très peu définies, pour trouver un exemple de cette particularité des mathématiques. Le passage de l'histoire des mathématiques qui suit montre que ce que l'on peut apparenter à une forme de rigueur conceptuelle. Cette forme de rigueur est à propos de la définition des objets mathématiques et cette dernière pourrait même être contre-productive à la découverte mathématique. La création et le développement du calcul infinitésimal est un bon exemple de grandes avancées mathématiques dans lesquelles les objets mathématiques employés n'étaient pas clairs et ont même été comparés à des « fictions utiles. » (Barbin, 2007, p. 11) Giorello (1992), qui raconte ces développements, illustre bien ce passage de l'histoire des mathématiques soutenant cette idée de concepts non clairs.

Les inventeurs de l’analyse utilisent, pour la première fois, le terme « dérivé » vers 1664. Plus tard, Berkerley (analysé par Giorello, 1992, p.154) a reproché à ces verbalisations de relever « d’intuitions vagues » et les a même nommés « ghosts of departed quantities ». Cependant, leurs détracteurs font erreur selon Giorello (1992). Tel que présenté par Giorello (1992), Newton et Leibniz ont simplement fait l'« erreur » d'élaborer leurs concepts de base du calcul intégral dans un langage différent de celui élaboré par Weierstrass et dans un cadre conceptuel différent de celui de Cauchy. Il rappellera que ces créateurs ont élaboré leur théorie avec leurs propres standards de rigueur. Ces standards de rigueur se devaient d’être nécessairement assez flexibles pour permettre l'élaboration d'une nouvelle théorie (Giorello, 1992). L'idée d’« assez flexible » revient à l'idée d'assouplir certains éléments des rigueurs : dans leur présent et au moment même de leur utilisation ! Comme si la rigueur, finalement, n'était pas obligatoire en contexte de création. Ce passage illustre un conflit entre ce que Giorello (1992, p. 146) nomme deux tâches opposées de la recherche : résoudre autant de problèmes possibles et être rigoureux autant que possible. Il semble qu’en mathématique on ne peut pas tendre autant que possible vers la perfection et la complétude, sans négliger parfois des caractéristiques de la perfection, dans ce cas-ci sous forme de rigueur conceptuelle. Giorello (1992) y voit une combinaison paradoxale de rigueur flexible qui procure des conditions favorables à la perception de connexions inattendues entre des objets communs. Ces connexions, qui permettent de tendre vers une élucidation des objets mathématiques et davantage de généralisation, se gagnent par l’usage d’une transgression des normes déjà en place. On voit ici une forme de plus d’interactions possibles entre les dimensions parfaites et imparfaites des mathématiques. Grosholz (1992), de son côté présente la notation productivement ambiguë de Leibniz vue comme *cruciale* pour les développements du calcul intégral. En insistant sur la nécessité de cette notation ambiguë, on peut déduire que la dimension parfaite et imparfaite en mathématique ne fait pas que se définir l’une l’autre comme un miroir le ferait. Dans ce cas, on voit que l’ambigüité propre à l’imperfection a enrichi et permis à la dimension parfaite des mathématiques de se déployer en permettant l'invention d'un tout nouveau domaine mathématique.

Évidemment, l'existence d'objets mathématiques flous soulève des questions importantes du point de vue de leur validité, voire même de leurs existences en tant que telles. Leibniz dans une de ses correspondances a réalisé 4 preuves erronées que $1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$. (Hitt, 2005) Ainsi, bien qu'une forme d'imperfection puisse être vue comme nécessaire à la création mathématique, elle n'empêche pas l'émergence d'énoncés mathématiques faux. De plus, certains objets ne résistent pas à l'épreuve d'un examen plus rigoureux. La fameuse intuition de Fermat, dont Wiles a apporté la preuve, montre qu'une fin heureuse est possible, mais ce n'est pas le cas de toutes grandes intuitions : par exemple *la conjecture d'Euler* généralisant *le théorème de Fermat* fut infirmée en 1966 au moyen d'un « simple »[19] contre-exemple ($27^5+84^5+110^5+133^5=144^5$)! Ce questionnement lié à la perfection des mathématiques est abordé dans la prochaine section, autour de la preuve qui s'est transformée avec l'arrivée du formalisme et les développements de la logique.

## 2.3.4 La rigueur moderne : Le formalisme

### 2.3.4.1 Les pièges du formalisme

Les développements de la logique se sont faits en changeant radicalement les façons de faire des propositions mathématiques et donc les manières d'être rigoureux ont changées aussi. Dowek (2007) précise que :

> (…) les propositions ne sont plus exprimées dans une langue naturelle, comme le français, mais dans un langage codifié, constitué de symboles de prédicats relationnels, de conjonctions de coordination, de variables et de quantificateurs. (Dowek, 2007, p. 68)

---

[19] On revient sur l'idée de simplicité à la sous-section 2.3.5.

La rigueur ne s'exprime plus au travers le sens commun, mais bien par l'utilisation de règles rigides de la logique des prédicats. La rigueur mathématique du domaine de la logique a évolué avec le développement de l'expression de son langage spécifique. La rigueur ainsi décrite est à la fois le moyen et la finalité de faire des mathématiques pour les logiciens. On cherche à atteindre la rigueur en étant rigoureux. Ce qui caractérise grandement ce mouvement de l'histoire des mathématiques est le passage à la formalisation du langage logique : grâce à ce mouvement, le raisonnement mathématique devient objet d'étude en soi pour les mathématiciens du 20e siècle (Dowek, 2007, p. 71). Des unités de raisonnements se trouvent à être manipulées, comme les nombres où les énoncés géométriques le sont respectivement depuis la Mésopotamie et depuis les Grecques. On avance en perfection et en rigueur en formalisant la démarche davantage. Ces unités de raisonnements rendues objets mathématiques dénotent un pas d’abstraction supplémentaire. La rigueur mathématique se voit davantage dans la validité des implications que dans la validité des propositions qui y sont reliées. Cette nouvelle sorte de travail s’accompagne de nouvelles possibilités pour l’imperfection mathématique. En effet, ce « (…) que l’on gagne en rigueur, on le perd en objectivité. L’idéal logique risque de couper les liens des mathématiques avec la réalité et d’interdire toute application. » (Poincaré, 1905) Balacheff énonce des préoccupations similaires à Poincaré, décrivant les effets de ce qu’il nomme le « dogmatisme déductiviste » :

> L'effet le plus spectaculaire de cette conception des mathématiques [infaillibles] est la disparition de l'erreur [dans les méthodes], son effet le plus sournois serait la disparition du contenu - à cause de cela vouloir distinguer "mathématiques vides et mathématiques significative" est une préoccupation tout à fait pertinente. (Balacheff, 1982, p.3)

Ainsi, faire des mathématiques insensées (ou non signifiantes) devient un piège dans lequel il est plus facile de tomber. Ces mathématiques vides représentent une caractéristique récente de l’imperfection mathématique et cette caractéristique met en valeur une qualité des mathématiques qui semble toujours avoir été présente précédemment. Quelles soient parfaites ou non, les mathématiques faites ont toujours été significatives. En ce sens, elles répondaient à des questions que l'on se pose. Et ces questions étaient liées d'une manière ou d'une autre à notre monde physique, matériel ou dans le monde des idées. Avec les développements de la logique et du formalisme, des nouvelles structures ont été créées et ces structures « purement mathématiques » (et potentiellement vides) génèrent de nouvelles questions dont la pertinence peut être mise en doute.

Ce n'est pas la dernière fois qu'il y aura des tensions entre ce qui est dit « idéale » et la dimension imparfaite des mathématiques sous sa forme plus concrète et liée à la « réalité » et à ses « applications ». Nous y revenons à la section suivante. Barbin poursuit en affirmant qu'il est « exclu de considérer que la rigueur soit un but à elle seule. » (Barbin, 2007, p. 13) Dès lors, on réalise un peu plus que ce qui est idéal en mathématiques n'est pas absolu et que préciser les contours de cet idéal est un peu plus complexe que dresser une liste de critères…

#### 2.3.4.2 La preuve aujourd'hui : Est-elle toujours formelle ?

Aujourd'hui, la preuve formelle et sa syntaxe conditionnent grandement la vision standard de la preuve mathématique (Marfori, 2010). Cette preuve solide et garantie représente, d'une certaine manière, le résultat de la formalisation moderne de la méthode axiomatique des Grecques. Elle est celle que l'on nomme aussi communément démonstration formelle. Cette vision de la preuve, qui est fortement formalisée et associée au symbolisme, se lie à la dimension parfaite des mathématiques au sens où la preuve formelle est *garante* de validité. Elle représente le moyen de rigueur ultime. Selon Marfori (2010), la grande majorité des preuves existantes sont informelles dans le sens où elles ne sont pas purement le résultat d'une dérivation syntaxique et qu'elles contiennent ou bien des sauts dans le raisonnement, ou bien font appel à l'intuition. Une preuve informelle est selon Lakatos une « expérience de la pensée ». Au sujet des sauts de raisonnements, Sherry (1997) reconnait que sauter des pas de raisonnement est une pratique standard, mais précise à ce sujet que ces sauts de raisonnements ne constituent pas nécessairement un manque de rigueur. Les deux types principaux de preuves informelles qui représentent les plus grands défis pour les défenseurs de la vision standard de la preuve sont les preuves qui contiennent des raisonnements inductifs ou des raisonnements empiriques (Marfori, 2010). Nous proposons d'abord d'explorer quelques aspects des raisonnements inductifs qui révèlera diverses facettes de la rigueur mathématique et de l'im-perfection mathématique. Nous reviendrons sur les raisonnements empiriques à la section suivante.

Selon Sherry (1997), les raisonnements qui sont réellement faillibles sont ceux qui sont basés sur des raisonnements inductifs : ces raisonnements sont garantis par la validité de leur conséquence et non par une démonstration. *L'approche d'Euler*, par exemple, peut être considérée comme inductive (Sherry, 1997). Sur cette approche, au moins deux façons de voir sont mises de l'avant. Pour Sherry, ce qui est travaillé par ce type de raisonnement sera éventuellement ajusté et prouvé de manière déductive. Mais pour Lakatos (1984), ce qui est découvert par une approche inductive est faillible et peut être constamment renversé. Ces deux manières de voir les preuves inductives montrent qu'il est possible que ces raisonnements inductifs soient des manifestations d'un manque de rigueur, et donc d'imperfections liées au sens strict de la perfection mathématique. L'inachèvement et le faillibilisme nous parlent de la dimension imparfaite des mathématiques, mais pointent en même temps vers la dimension parfaite : on est à la recherche de preuves achevées et infaillibles. Sherry réinsiste sur l'importance de faire des mathématiques achevées en précisant qu'Euler tout comme Polya reconnaissaient l'importance d'une démonstration formelle pour qu'une œuvre mathématique soit achevée. En quoi alors les preuves informelles nous informent-elles à propos des mathématiques ? Pourquoi ces manières *informelles* portent-elles le titre de *preuves* ? Marfori (2010) présente un exemple de théorème qui peut éclairer cette dernière question. Le *théorème de Ramsey fini* a d'importantes applications en combinatoires, pourtant il n'est pas prouvable formellement dans l'axiomatique de Peano. La preuve informelle fait partie de la construction d'un résultat mathématique

(Sherry, 1997). On peut voir la preuve informelle comme la formulation d'une conjecture qui s'avère « mathématiquement vraie ». Être mathématiquement vrai, c'est seulement une forme de mathématique *en voie* d'être parfaite, de là son côté informel et imparfait. La preuve formelle, de son côté, est la formulation « parfaite » et déductive d'une conjecture mathématiquement vraie. Lorsque qu'une conjecture est formulée par une preuve formelle, elle est dite « *logiquement* valide ». Encore une fois, on voit une forme de gradation de la perfection au sens où ce qui est mathématiquement vraie, semble être moins parfait qu'un énoncé logiquement valide.

### 2.3.5 Retour de la rigueur vers l'algorithmique

Le domaine de la calculabilité a émergé au début du 20e siècle avec l'arrivée des machines à calculer et le 10e problème d'Hilbert[20]. Ce domaine a remis en valeurs certains raisonnements empiriques et l'emploi de certaines méthodes. C'est là que le domaine de la calculabilité a émergé. L'ensemble de ces changements ont bouleversé les manières d'être rigoureux en mathématique. Ainsi, l'objet mathématique « algorithme » a changé de statut avec la venue de ce domaine. L'algorithme ne sert plus uniquement à calculer, il permet nouvellement de *décider* de la démontrabilité ou non de la vérité d'une proposition (Dowek, 2007). L'algorithme peut finalement être un raisonnement mathématique en soi. Son utilisation peut être qualifiée de rigoureuse pour démontrer et non plus seulement pour calculer. L'algorithme comme outil de décision est une forme de retour à la rigueur calculatoire ; les mathématiques dépendent d'une procédure. En ce moment, et notamment grâce à la calculabilité, le calcul est de l'avant en mathématiques (Dowek, 2007). L'utilisation de l'ordinateur et de la

---

[20] Ce problème consiste à trouver une *méthode* (ayant un nombre fini d'étapes) par laquelle on peut juger de la solvabilité - à l'intérieur des nombres entiers - de n'importe quelle équation polynomiale à coefficients entiers.

prédominance du calcul soulève naturellement de nouvelles questions quant à la rigueur des mathématiques.

Du point de vue des raisonnements empiriques, le traitement du symbole représente trois enjeux importants pour les philosophes des mathématiques : le traitement du nombre de symboles, le traitement du symbole, et qui (ou quoi) traite ce symbole. Chacun de ces enjeux est lié à la rigueur et nous éclaire sur l'im-perfection. En explorant chacun de ces enjeux dans cette sous-section, j'aborde de nouveaux aspects liés à l'im-perfection.

Dans une preuve empirique, ou par exhaustion, la validité de cette dernière ne repose pas sur une démonstration formelle, mais sur l'examen d'un ensemble de cas (souvent très grand) par un humain ou, plus souvent, par un ordinateur. L'ordinateur, ou l'humain testera tous les cas possibles. On dira ensuite qu'on a fait la preuve. Ces preuves par exhaustion sont à distinguer avec le sens commun d'« avoir des preuves », qui correspond à avoir des « résultats empiriques », au sens de *voir* que ça marche. Châtelet (1987) souligne l'importance de faire des mathématiques comme on fait de la physique. La preuve mathématique empirique « a beaucoup en commun avec une expérience physique et que sa validité n'est pas absolue. Plutôt, sa validité dépend de sa reproductibilité. » (traduction libre, Châtelet, 1987, p.806). On peut dire que si sa reproductibilité est totale alors elle prouve que la conjecture est valide. Dans ce contexte, on pourrait dire que la preuve par exhaustion est possible.

Tymoczko (1979, présenté par Detlefsen et Luker, 1980) a soulevé un élément qui ajoute aux sources d'incertitude des raisonnements empiriques. Selon Tymoczko, l'idée de non-exhaustivité, qui dépend surtout du nombre de symboles à traiter d'une preuve empirique, vient mettre en doute sa validité. Le théorème des quatre couleurs est un exemple en ce sens. En effet, la seule façon de vérifier cas par cas ce théorème est d'utiliser un ordinateur. Pour ce chercheur, de *devoir* s'en remettre à l'ordinateur ajoute à l'incertitude. La vision et la place de ce critère de l'exhaustivité par l'homme ne sont pas homogènes. Pour d'autres, comme Detlefsen et Luker (1980), il ne change rien. Puisque tous les cas de preuves doivent être vérifiés, que ce soit l'homme ou l'ordinateur qui doivent vérifier, valider et confirmer la validité de celle-ci, l'entité qui valide ne fait que faire varier les sources des potentielles erreurs. Et pour tous les cas de preuves, peu importe ce qui valide, plus la longueur de la preuve augmente, plus l'incertitude de cette preuve augmente aussi. On peut être d'accord ou non sur l'importance à accorder sur l'entité qui valide, il n'en reste pas moins que celui qui fait les mathématiques est important pour les philosophes des mathématiques, car il peut faire varier la confiance que l'on a envers les mathématiques et donc envers leur degré de perfection.

Au traitement du nombre de symboles, on peut distinguer un autre enjeu, soit le traitement du symbole en tant que tel. Reconnaître ou reproduire ces symboles pointe vers des enjeux de fidélité et de correspondance entre ces symboles, leurs représentations et leurs interprétations. La correspondance parfaite est impossible entre les signes et les idées. En effet, d'une certaine manière, chaque théorie mathématique a une complexité finie, et se doit d'être plus simple que le monde des idées mathématiques pures qui a une complexité infinie (Chaitin, 2016, p.6). La complexité des mathématiques est un aspect des mathématiques qui vient limiter les possibilités de rigueur, dans le sens de développer une théorie mathématique complète et complètement isomorphique au monde qu'elle tente de représenter est impossible et même inintéressant. Cette complexité est aussi lié au manque de structure des mathématiques (dont on parlera dans deux paragraphes). Selon Chaitin, la théorie mathématique doit inévitablement être plus simple que la complexité des phénomènes qu'elle tente de généraliser, sans quoi la théorie n'aurait aucune utilité. La perfection éclairée de cette dualité simplicité-complexité semble s'incarner dans l'expression *simple* d'idées mathématiques *complexes*.

Or, cette complexité vient mettre en valeur le côté approximatif des mathématiques ; elles sont des représentations du monde, elles ne sont pas le monde. Une part de cette complexité ne pourra jamais s'exprimer et peut traduire un manque de structure des mathématiques (Chaitin, 2016). Cette incomplétude n'est pas considérée de manière dramatique. Chaitin (2016) précise que Gödel lui-même, le père du théorème d'incomplétude, ne voyait pas son théorème d'incomplétude comme une limite à ce que les mathématiques peuvent faire. Pour lui, son théorème confirme le caractère platonique des mathématiques et leur place dans le monde parfait des idées, car son théorème montre que les mathématiques ont une réalité en dehors de l'activité humaine. En dehors de l'activité humaine, tout le monde mathématique y est prédéterminé, et ce monde représente l'inatteignable idéal de perfection. Si les mathématiques présentent des vérités indémontrables, alors cela signifie qu'elles sont complètement indépendantes des présupposés humains ou de déductions logiques. Autrement dit, selon Gödel ces vérités indémontrables sont hors de portées de toutes considérations empiriques, culturelles, sociales humaines… Ce qui confirme toute la grandeur des mathématiques aux yeux du platonicien qu'était Gödel. On peut aussi considérer le travail de Chaitin (2016) sur la théorie axiomatique informatique de la même façon !

Quiconque connait un peu l'algorithmique sait bien que tout problème n'est pas programmable (« computable »), ce qui peut être relié au théorème de Gödel, et donc à l'imperfection de l'*activité* mathématique humaine. Une manière de présenter ceci dans le but de nous éclairer consiste à distinguer les problèmes « déterminés » de ceux qui sont « indéterminés » ou insolubles. Les problèmes pour lesquelles une ou des solutions existent forcément évoquent bien le côté parfait des mathématiques que l'ont fait. Mais l'existence de problèmes pour lesquels aucune solution n'est possible nous renvoie évidemment du côté de l'imperfection de notre activité mathématique. On inclut dans les « solutions » le fait de dire que le problème est insoluble. Par exemple, on sait qu'il n'existe pas de solution dans les rationnels pour $x^2=2$ : c'est un problème déterminé puisqu'on a la preuve de l'absence de solution. On ignore, par contre, si la conjecture de Goldbach[21] ou si le problème P = NP sont vrais ou faux, et s'il est possible d'arriver à une conclusion à leur propos. Ils sont donc doublement indéterminés au sens où il est aussi impossible de savoir s'ils sont déterminés ou non tant et aussi longtemps que nous ne les avons pas résolus.

Le caractère indéterminé des mathématiques est évidemment rattaché à l'imperfection des mathématiques. Cette indétermination peut aussi être vue comme un manque de structure aux mathématiques. Ce manque de structure est illustré par Chaitin (2016) lorsqu'il explique le problème d'arrêt de Turing. Le *problème de Turing* consiste à prouver qu'un programme qui ne s'arrête pas ne s'arrêtera jamais. Il existe des programmes qui font partie de la théorie axiomatique informatique (TAI) et dont les ordinateurs ne pourront pas trouver leur sortie ; ces programmes ne s'arrêteront donc jamais ; et on ne peut savoir s'ils s'arrêteront qu'en les lançant et on aura plus qu'à attendre... Selon Chaitin (2016), l'impossibilité de prédire la probabilité qu'un de ces programmes arrête ou non est une illustration de la complexité du système mathématique. Cette complexité du système mathématique explique le manque de structure des mathématiques.

La TAI permet tout de même de définir la *probabilité d'arrêt*, noté Ω, d'un programme.

> Ω est un nombre réel spécifique et chacun des bits qui le composent doit être un 0 ou un 1 et est déterminé mathématiquement. (…) [Bien que Ω ]soit bien défini mathématiquement, il est également violemment incalculable. La convergence est monstrueusement lente. (…) La probabilité d'arrêt Ω montre qu'il existe une quantité infinie de complexité irréductible en mathématique pure. (Traduction libre, Chaitin, 2016, p.7-8)

Ainsi, au sein de la théorie mathématique, il existe un objet mathématique dont le caractère hasardeux est défini. Cet objet, Ω, semble paradoxalement à la fois s'associer

---

[21] La conjecture de Goldbach s'énonce ainsi : tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

à la dimension parfaite et imparfaite, car à la fois défini et indéfini par son incalculabilité. Cet objet hasardeux et presque contradictoire par nature, on l'associe bien évidemment à la dimension imparfaite des mathématiques qui représente l'incohérence, le manque de structure et ce qui est imprédictible.

Bref, on est porté à ranger les raisonnements empiriques mathématiques du côté de la dimension imparfaite des mathématiques dû aux aspects incertain et approximatif du monde mathématique. Ces raisonnements empiriques, ne le sont pas au sens du monde physique, mais bien dans le monde des idées. Chaitin (2006) montre en quelque sorte que les aspects incertains et approximatifs de ce monde (non-physique) limitent les possibilités mathématiques. À propos de la rigueur, Gödel a mis un frein à une perfection (au sens strict) aux mathématiques faites par les humains, mais il l'a fait tout en suggérant pour ainsi dire l'existence d'un monde platonicien de vérités mathématiques qui ne dépendent pas de l'humain. La rigueur en mathématique joue donc un rôle crucial pour pallier la complexité du système mathématique et pour contribuer à faire tendre notre activité vers une forme de perfection.

Enfin, un dernier mot au sujet de la possibilité de se tromper en utilisant des procédures clôt cette sous-section. Selon Sherry (1997), le sens le plus *clair* (en italique dans le texte) d'un faux pas mathématique est l'échec de suivre une procédure *prescrite*. L'aspect prescriptif de certaines procédures[22] serait un aspect distinguant la perfection de l'imperfection mathématique. Ces procédures « prescrites » font écho aux côtés conventionnels et traditionnels de certaines manifestations de la dimension parfaite des mathématiques (aspects qui ont été nommés dans la section 2.1.2). Certaines procédures sont prescrites si elles semblent fonctionner, être indiscutables et considérées comme infaillibles et si elles passent l'épreuve du temps. Il est important

[22] On pourrait dire des procédures, comme Fried et Goldberg(2010) l'ont dit des erreurs : « Toutes les procédures ne sont pas égales » des procédures qui sont parfaites donc prescrites et d'autres qui ne le sont pas.

que ces procédures puissent garantir une certitude. À propos de l'exemple de l'algorithme d'addition, Sherry (1997) écrit : « If it were not possible to be certain of the latter sum, there would be no institution of addition » (Sherry, 1997, p. 394). Il y a donc un côté prescriptif et institutionnalisé dans les mathématiques qui semble appartenir à la dimension parfaite des mathématiques en raison de la certitude non discutée que ces manifestations confèrent à certaines procédures en mathématiques.

En contraste à cette vision des mathématiques, Davis (1972) souligne qu'en raison du monde réel dans lequel nous vivons, nous sommes contraints à faire des mathématiques qu'avec seulement un *certain* degré de certitude. Selon Davis (1972), le degré de cette certitude dépend de *qui* (ou *quoi*, en référence à l'ordinateur) fait les mathématiques et dans quelles circonstances. Aussi, et comme il a déjà été mentionné, le nombre d'opérations impliquées fait varier le degré de certitude avec lequel nous pouvons être convaincus de notre résultat. En effet, Davis (1972) ajoute qu'à chaque fois qu'un symbole est utilisé il y a toujours un certain pourcentage de chances qu'il soit interprété, utilisé et/ou produit de manière inadéquate. Il propose donc une vision probabiliste de la certitude mathématique dans laquelle la certitude diminue à chaque fois qu'un symbole de plus apparaît. Ce que cette vision de la certitude clarifie à propos des dimensions im-parfaites est une forme de gradation de la perfection. En effet, selon Davis 1972, on peut dire que nous sommes plus ou moins certains de tel ou tel théorème. On a envie d'associer la certitude à la dimension parfaite des mathématiques. Pourtant, le concept de perfection stricte relève d'une qualité extrême et n'admet pas de gradation selon Tatarkiewicz et Kasparek (1979). Lorsque la perfection s'associe au critère de certitude *graduée* alors il semble que sous ce critère les dimensions parfaites et imparfaites deviennent finalement moins tranchées et plus diffuses l'une dans l'autre.

La vision probabiliste des mathématiques de Davis contraste grandement à la vision de l'erreur de Sherry (1987). L'erreur mathématique chez Sherry (1987) est due à une action erronée. L'incertitude de l'activité mathématique chez Davis (1972) est surtout due à la mise en action des mathématiques. Mais, selon Sherry (1987), on arrive à dépasser les limites de la condition humaine en faisant des mathématiques. Selon lui, avec le temps et le travail de plusieurs on atteint une sorte de perfection. Les mathématiques sont un travail historique et collectif qui permet de surpasser les défaillances occasionnelles…

### 2.3.6 Synthèse sur la rigueur

Dans cette section, nous avons pu voir que différentes formes de rigueurs éclairent les caractéristiques qui contribuent à définir ce qu'on peut voir comme la dimension parfaite et la dimension imparfaite des mathématiques. Ce faisant j'ai continué de répondre à ma première question de recherche :

- *En mathématiques, quelles sont les caractéristiques qui contribuent à définir ce qu'on peut voir comme la dimension parfaite et la dimension imparfaite des mathématiques ?*

La rigueur au travers l'histoire des mathématiques a pris plusieurs formes ; tantôt calculatoire, plus tard empirique, ensuite formelle… Chacune des formes de rigueurs observée dessinait des aspects différents des dimensions parfaites et imparfaites en mathématiques. Ainsi, cette sous-section supporte l'idée que ces dimensions parfaites et imparfaites n'ont pas de statut permanent.

Cette sous-section a aussi permis de confirmer le caractère évolutif des mathématiques et de lier leur nature au paradoxe de la perfection énoncé par Empédocle au 5$^{e}$ siècle avant J.-C. tel que présenté par Vanini : « (…) perfection depends on incompleteness, since it possesses a potential for development and complementing with new characteristics » (Tatarkiewicz et Kasparek,1979).

De plus, en s'intéressant aux enjeux entourant la rigueur, on a pu remarquer certaines dualités de l'activité mathématique qui semblent à la fois parfaite et imparfaite. Par exemple, lorsqu'on parle d'« exactitude pratique », de « preuves informelles », de « rigueur flexible », … « exactitude », « preuve » et « rigueur », celles-ci pointent du côté de la perfection, tandis que « pratique », « informelle » et « flexible » semblent pointer du côté de l'imperfection, ou de l'imprécision. À chaque fois que ces qualificatifs ont été utilisés ensemble, c'était en contexte de création ou de validation mathématique. Lorsque des aspects de l'imperfection et de la perfection se croisent, il semblerait que ce soit porteur pour l'activité mathématique.

On peut aussi remarquer que les dimensions parfaites et imparfaites se côtoyaient lorsque des changements des manières de faire se produisaient en mathématiques. Ces moments de l'histoire pourraient donc être porteur pour partager une vision des mathématiques im-parfaites. Les nouvelles dualités qui ont été relevées au cours de ce chapitre sont simplicité- complexité, précision – imprécision, empirique – théorique, monde réel- monde des idées, utile-abstrait. Ainsi leurs appartenances à la dimension parfaite ou imparfaite ne sont pas absolues car ces dualités changent selon le contexte.

Je crois que cette section de chapitre insiste sur diverses formes d'incertitudes auxquelles nous sommes confrontées lorsqu'on fait des mathématiques. Des enjeux de correspondance et de fidélité à ce qui est ou ce qui devrait être sont très présents en mathématiques. On ne peut donc jamais se défaire de cet idéal à atteindre.

Finalement, ce chapitre est loin de tout élucider sur la perfection et l'imperfection des mathématiques. Des thèmes comme la beauté, le mysticisme, la certitude pourraient aussi être creusés davantage… Mais pourquoi et comment ce regard déjà riche sur l'activité mathématique peut-il venir enrichir l'éducation mathématique des élèves au secondaire ? Peut-on déjà l'observer en contexte éducatif mathématique, et si oui de quelles manières ? Ces questions nous mènent à notre prochain chapitre.

# CHAPITRE III

# SIGNIFICATIONS POSSIBLES POUR L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE

Dans ce chapitre, j'explore divers écrits en éducation mathématique dans lesquels je peux reconnaître certains aspects liés à l'im-perfection mathématique. L'objectif de ce chapitre est d'imaginer ce que l'im-perfection mathématique peut ou pourrait être en classe de mathématiques au secondaire. Ce chapitre est articulé autour d'une question à deux volets : *Pourquoi* et *Comment* amener et reconnaître des dimensions d'im-perfection mathématiques à l'école ? La première section du chapitre éclaire le *Pourquoi* en validant et justifiant la pertinence d'aller explorer ceci avec les élèves. La seconde section du chapitre présente des écrits en éducation mathématique qui m'aide à illustrer ce à quoi pourrait ressembler vivre l'im-perfection mathématique avec des élèves. Ces deux sections sont articulées autour de corpus de textes ayant la particularité d'aborder des objets – ou à des aspects des – mathématiques liés à l'im-perfection et qui se trouvent aussi dans le programme de formation québécoise au secondaire du Québec.

## 3.1 Pourquoi apporter l'im-perfection des mathématiques à l'école ?

Dans cette section, je m'intéresse à des arguments mis de l'avant par différents chercheurs à propos de la nature des mathématiques à l'école, de la résolution de problèmes, des buts de l'éducation mathématique et des effets de la vision des mathématiques sur son enseignement et son apprentissage. Ces arguments semblent suggérer qu'il serait opportun d'apporter un regard bi-dimensionnel im-parfait sur les mathématiques en éducation notamment pour motiver les mathématiques qui sont faites en classe.

### 3.1.1 Mettre les élèves au centre de la résolution de problèmes

Dans l'article *Toward a pedagogy of confusion* Stephen I. Brown (1993) montre qu'un raisonnement fallacieux mène à valoriser la clarté en éducation, en confondant *ce qui est* avec *ce qui doit être*. Selon Brown (1993), ce type de raisonnement explique en partie la façon dont les acteurs en éducation mathématique aux États-Unis valorisent les valeurs de clarté et de cohérence. Brown (1993) affirme que ce soutien inconditionnel à la cohérence déconnecte l'acte d'apprendre avec la vraie vie, qui elle, est fragmentée, non méthodique et incomplète. Ainsi, reconnaitre ces aspects en mathématiques reconnecterait l'acte d'apprendre avec la vraie vie. Il argumente donc en faveur d'une « pédagogie de la confusion » pour l'éducation mathématique.

On peut voir l'attrait de la clarté comme étant fortement relié à la dimension parfaite des mathématiques, alors que la confusion valorisée par Brown se rattache à ce qui serait la dimension imparfaite des mathématiques qui n'est pas nécessairement cohérente et claire, comme nous l'avons vu au chapitre précédent. Du point de vue de l'im-perfection mathématique, l'importance associée à la clarté, la cohérence en contexte éducatif ne peut se faire qu'au détriment des autres possibilités mathématiques. En effet des mathématiques tout à fait valables peuvent être faites, et ont été faites, autour d'incohérences et d'énoncés non-clairs ou ambigus. D'autre part, la confusion recherchée par Brown (1993) n'est pas le but ultime : son souhait est que nous respections l'importance de la confusion dans la recherche de clarté, dont on peut alors mieux apprécier les contours. On reconnaît bien ici la dynamique entre perfection et imperfection discutée au chapitre précédent au sens où une caractéristique de la dimension imparfaite des mathématiques alimentent le développement des caractéristiques de sa dimension parfaite.

Une valorisation de la confusion peut aussi relier la résolution de problème avec sa dimension personnelle en faisant place aux aspects émotionnels et personnels de la résolution de problème. Selon Brown (1993) ne chercher que la clarté est incompatible avec la vision qu'un problème est toujours dépendant de la personne qui le pose. Nier ce caractère personnel réduit grandement l'expérience mathématique des élèves que l'on semble vouloir empêcher de vivre avec le doute, les ambivalences, voire même de rencontrer des embuches. J'associe ces états émotionnels et obstacles personnels à la rencontre et la reconnaissance d'imperfections. Avec un regard sur l'imperfection, vivre ces états de confusion est une forme de perfection au sens où on cherche à tendre vers un idéal dont on se sait éloigné. En résolution de problème, l'état de confusion est donc « parfait », tout en étant étroitement associé à la dimension imparfaite des mathématiques par le côté local et personnel de la confusion. Brown précise aussi que décourager les élèves d'honorer et de souligner ces états de confusion représente un risque important. Par exemple, le risque que l'élève abandonne tout de suite lorsque viendra, inévitablement, un moment où il sera confus. Reconnaître ces états de confusion en classe de mathématiques serait donc un moyen de travailler la motivation des élèves à persévérer…

Ensuite, Dewey (1933), aussi cité par Brown, présente une autre facette positive du doute :

> Thinking begins in what may fairly enough be called a forked-road situation, a situation that is ambiguous, that presents a dilemma, that proposes alternatives. As long as our activity glides smoothly along from one thing to another… there is no call for reflection. (Dewey, 1933, p. 114 cité par Brown, 1993, p. 14)

La véritable pensée réflexive surgit, émane, du doute et de questionnements, et non pas lorsque les choix à prendre sont clairs. Or, Brown (1993) note que la rencontre d'ambiguïté en mathématique est connotée négativement en éducation. On la vit de manière non-plaisante. Pour l'éducation, l'auteur suggère qu'il pourrait être utile de considérer sérieusement les ambiguïtés non pas comme quelque chose à éviter, mais plutôt les voir de manières positives. Il ajoute que le développement d'un tel rapport face à ce qui rend confus peut retarder le moment où un étudiant « abandonnera » dans de telles situations. Ainsi, la confusion ne serait pas « que dans la tête de l'élève », mais aussi dans les mathématiques elle-même sous-forme d'ambiguïté.

Bref, l'article de Brown (1993) nous aide à préciser des apports possibles d'une vision im-parfaite des mathématiques. Une vision qui ne se limite pas seulement à des problèmes clairs et concis et qui laisse place à des problèmes ambigües. Cette ambiguïté pourrait permettre davantage d'espace et de possibilités mathématiques afin que les élèves s'approprient le problème à leur manière. Ainsi, l'aspect personnel de la résolution de problème serait reconnu comme partie intégrante de toutes résolutions. Une vision des mathématiques im-parfaite est donc compatible avec la dimension personnelle de la résolution de problème.

Brown (1993) montre aussi que l'emphase mise sur la clarté en éducation est telle qu'elle ne permet pas une « juste » vision de la nature des mathématiques et de la place que l'ambiguïté a prise au fil de l'histoire des mathématiques. Ainsi on observe un autre aspect très positif de la valorisation de la confusion et des ambiguïtés, qui ensemble pourraient contribuer à la persévérance et la résilience des élèves en résolution de problème. Comme le suggère Brown (1993), on peut apprécier les chemins qui mènent à des culs-de-sac.

Il semble que c'est précisément dans une perspective inclusive et ouverte à la confusion et aux aléas inévitables en mathématique qu'une éducation mathématique im-parfaite s'articule. En effet, une éducation mathématique valorisant l'im-perfection mathématique rend possible la reconnaissance et l'expérience d'aléas autant dans le corps mathématique que dans son activité. La confusion, pour celui qui fait les mathématiques, se retrouve à y être un indicateur que tout n'est pas encore élucidé. Elle indique qu'il y a des mathématiques à faire, elle indique que celui qui résout un problème est impliqué ; la confusion n'est donc pas toujours à éviter. Elle est même une avenue essentielle à valoriser et à exploiter pour faire des mathématiques.

### 3.1.2 Un meilleur contrôle et plus de confiance en mathématiques

Benn (2000) a écrit le chapitre *Mathematics : Certainty in an Uncertain World ?* dans lequel elle contraste les effets pour l'enseignement et apprentissage d'une vision absolutiste des mathématiques avec la vision faillible et humaine des mathématiques. Elle confirme que la vision des mathématiques dans laquelle on enseigne, ou apprend, a un impact sur les apprenants et les enseignants. Du même coup, elle fournit des arguments justifiant la présentation d'une vision faillible des mathématiques qu'on peut associer à la dimension imparfaite des mathématiques par le côté humain associé à cette vision des mathématiques.

#### 3.1.2.1 La vision absolutiste des mathématiques et ses effets

Un problème avec la vision absolutiste des mathématiques, vision très répandue en éducation, est que les mathématiques y sont considérées indépendantes de toutes cultures ou de tout contexte socio-politique (Benn, 2000 ; Rowland, 1996). Ainsi, lorsque les mathématiques sont enseignées, les grands mathématiciens sont cités de façon complètement décontextualisée de l'époque et du lieu de leur vécu. Ils sont présentés en tant que grands mathématiciens des mathématiques (qui sont en fait celles de l'Ouest) et leurs travaux sont des vérités absolues. « Cette séparation entre la culture et sa pertinence rend les mathématiques inaccessibles à ceux qui sont déjà éloignés de la société par un désavantage éducatif, de sexe, de race et de classe. » (Traduction libre, Benn, 2000, p. 112). Ces mathématiques véhiculent donc un aspect de neutralité culturelle qui n'est pas sans conséquence dans l'enseignement.

Cette vision des mathématiques est étroitement associée à la dimension parfaite des mathématiques lorsque cette dernière est considérée seule et complètement décontextualisée. Elle semble se suffire à elle-même et être parfaitement abstraite de toute réalité empirique ou culturelle. Ce faisant, elle délaisse pourtant un grand pan de ce que les mathématiques sont, ont été et peuvent être. En effet, d'un point de vue épistémologique, cette neutralité qui peut être associée à l'idée de perfection des mathématiques est présente au dépend de la pertinence culturelle et sociale. Celle-ci ne s'associe pas aussi bien à l'idée de perfection puisqu'elle n'est pas absolue au travers le temps, l'espace et la culture.

Les effets de l'enseignement au sein de cette vision neutre des mathématiques sont multiples. D'abord, Benn (2000) s'ancre dans les écrits de de Rogers (1969), Dewey (1964) et Knowles (1980) pour préciser que :

> Si les mathématiques sont perçues comme un ensemble de vérités fixes, invariables et indépendantes des préoccupations sociales, il est alors difficile d'y trouver de l'espace pour négocier ou pour utiliser des expériences de vie dans le processus d'apprentissage. (Traduction libre, Benn, 2000, p. 113).

On voit donc que la perception qu'un apprenant peut avoir des mathématiques influence la manière dont il se permettra de faire des mathématiques. Avec une perception de neutralité vient une vision rigide de la discipline. Cette rigidité tend à limiter les pratiques mathématiques… Ensuite, sur un tout autre aspect, le plaisir de faire des mathématiques semble aussi absent. Benn (2000) précise que Cross (1990:4, présenté par Benn, 2000) a noté que personne, ni au secondaire, ni au primaire ne semble apprécier les mathématiques ; pas même les enseignants. Benn ajoute qu'au sein de la vision absolutiste des mathématiques, les mathématiques perdent leur utilité. Cette vision des mathématiques fait écho aux mathématiques immotivées au sens de Chevallard (2007) lorsque ce dernier affirme qu'on ne connaît plus les utilités des mathématiques en dehors du contexte scolaire. Elles sont un objet d'enseignement ou d'apprentissage dont la finalité et l'utilité sont limitées aux propres frontières de l'objet enseigné (Benn, 2000). D'un côté, il y a cette idée de mathématiques utiles que l'on pourrait appliquées dans la vie de tous les jours et de l'autre côté, il y a ces mathématiques, souvent dites parfaites, formelles qui sont utiles et nécessaire pour construire des mathématiques libres de contradiction. Cette vision absolutiste des mathématiques lorsque utilisé en contexte d'enseignement semble donc à la fois élaguer toutes formes de mathématique informelles, empiriques et appliquées (bref, des mathématiques qui seraient jugées comme utiles par des élèves) et à la fois oublier de motiver et justifier la rigidité de la structure mathématique qu'elle présente.

Ainsi, l'ensemble des effets de cette vision très répandue en éducation mathématique motive donc une réflexion à envisager de possibles visions alternatives à la vision absolutiste des mathématiques. Ces effets motivent notre réflexion à envisager la possibilité d'un regard mathématique orienté sur ses im-perfections.

#### 3.1.2.2 Ressemblances et différences entre la vision faillible des mathématiques et l'im-perfection

À la vision absolutiste des mathématiques, une alternative existe. Effectivement, un nombre grandissant de mathématiciens et philosophes remettent en question ce côté certain et absolu des mathématiques. Ils considèrent que les mathématiques peuvent être vues comme une construction sociale et humaine (Benn, 2000). Au sein de la perspective faillible des mathématiques, elles n'y sont plus considérées comme prédéterminées, mais bien à-déterminer car elles sont faillibles et changeantes. Tel que Benn (2000) le souligne:

> Sociologists and mathematicians such as Ashley and Betebenner (1993) argue that philosophers have tried but failed to show how modern mathematics and science either pictured the world as it was or used a perfectly consistent meta language. They suggest that mathematics (…) reflects and magnifies cultural transformations. (Benn, 2000, p. 111)

Sous cet angle, la dimension im-parfaite des mathématiques ressemble beaucoup à la vision faillible des mathématiques telle que décrite par Benn (2000) car toutes mathématiques (parfaites et imparfaites) restent une sorte de vérité locale dont la validité dépend de la culture. Une vision des mathématiques im-parfaites ne peut pas voir les « vérités » mathématiques comme absolument et toujours certaines, puisqu'au sein d'une perspective faillible des mathématiques, telle que décrite par Benn (2000), la vérité mathématique est locale et utile à l'intérieur seule d'une pratique sociale, il devient donc ardu de prétendre détenir la certitude absolue. On reconnaît certaines ressemblances entre la dimension imparfaite des mathématiques et ce côté local donné aux mathématiques. Une vision im-parfaite des mathématiques permet donc de reconnaitre que les mathématiques ne sont pas d'une neutralité absolue et indépendante de contextes. Car d'un côté la dimension parfaite se lie facilement au regard absolutiste des mathématiques et de l'autre une perspective faillible s'associe à l'imperfection.

Aussi, le côté humain des mathématiques y est mis en valeur en contextualisant leur usage et leur émergence. On évite ainsi de les présenter sous un voile de fausse neutralité tout en se permettant d'évoquer et de faire vivre un côté plus négociable aux mathématiques. Les mathématiques y sont vues en tant que construction sociale non-finie. Il reste donc de l'espace pour accomplir, continuer et négocier les objets mathématiques avec lesquels on travaille. Le côté local, utile, contextualisé, négociable, social et inachevé sont des aspects de la vision faillible des mathématiques qui ont été relevés par Benn (2000) et qui font écho à la dimension imparfaite des mathématiques. En ce sens, ces aspects ne réfèrent pas à une vérité unique ni à une certitude absolue ; deux concepts que l'on peut facilement associer à la perfection. C'est que les manières de faire vivre la dimension imparfaite des mathématiques peuvent s'apparenter aux manières de faire vivre les mathématiques faillibles.

#### 3.1.2.3 La vision faillible des mathématiques et ses effets

La valorisation des aspects culturels et humains aux mathématiques engendre des effets que Benn (2000) a rapporté en observant deux exemples de travaux en éducations mathématiques ; les résultats d'un sondage national à propos d'un projet (des cours *Access*) du Département de l'éducation des adultes et de l'éducation permanente à l'Université d'Exeter (dont les résultats peuvent être lus dans Benn & Burton (1993) et Anderson (1990)) qui ont eu le souci d’enseigner les mathématiques en tant que construction humaine.

Dans le travail d’Anderson (1990, présenté par Benn, 2000), les séances de mathématiques se sont déroulées avec le souci que chacun puisse voir la pertinence des mathématiques à faire. On y a pris le temps de situer les implications historiques, culturelles et socio-politique des mathématiques (Benn, 2000). L’effet de voir les mathématiques de manières pertinentes, utiles, humaines et contextualisées a mené les élèves à vivre une augmentation de leur motivation et une augmentation de leur succès en mathématiques (Benn, 2000). Les manières de faire vivre cette perspective sont tout à fait compatibles avec l’im-perfection et semblent très profitables pour les apprenants en mathématiques. Ils fournissent donc des motivations à aller de l’avant avec une vision im-parfaite des mathématiques.

Ensuite, Benn (2000) souligne qu’au sein du projet de l’Université d’Exeter il y avait le besoin de construire la confiance des apprenants. Ils y sont parvenus en montrant qu’il était acceptable de se tromper et en mettant l’emphase sur les processus plutôt que sur les réponses. Le besoin de développer une attitude positive envers les mathématiques a été comblé en encourageant les élèves à devenir maitre et propriétaire de leur mathématique. Cela s’est fait en explorant tout en “jouant” (*messing around* dans le texte) avec les nombres. Ces approches ont mené à ce que les étudiants développent de la confiance et une forme de contrôle. Il est intéressant de remarquer qu’une vision des mathématiques im-parfaite est assez compatible avec les manières de fonctionner énumérées ci-haut. Cela ne diminue pas l’apport des erreurs et cela valorise l’exploration de concepts curieux. Il semble qu’un regard par l’im-perfection est assez flexible et ouvert sur toutes les dimensions possibles de l’activité mathématique pour permettre ces manières de faire. De plus, il est intéressant de remarquer que les tuteurs des groupes *Access* réussissaient avec les groupes qui avait des faibles niveaux d'éducation générale et des niveaux très bas d'accomplissements mathématiques et de confiance en mathématiques. C'est donc qu'une telle approche est possible et même potentiellement profitable pour les classes en difficultés qui présentent des caractéristiques similaires aux classes d'*Access*.

De plus, dans les cours *Access,* les élèves sont initiés à des mathématiques qui laissent placent à l'approche personnelle, interprétative et relative à chacun. Il est précisé que les étudiants sont susceptibles de rejeter les mathématiques qui leur sont présentées de « manière non personnelle et mécanique » (traduction libre, Burton, 1987, cité par Benn 2000, p.115). L'effet intéressant, ici, est qu'une perspective mathématique qui prend en compte les aspects personnels, interprétatifs et relatifs des mathématiques valorise l'erreur et l'exploration libre. Cela permet d'éviter de prédéterminer l'espace mathématique et son activité tout en liant cette approche à l'imperfection. Elle offre donc à chacun d'*être* en, et de *faire* des, mathématiques avec une certaine liberté.

### 3.1.3 Libérer l'enfant, la nature des mathématiques et son activité

Dans l'article publié en 1980 *On mathematics education: The Lakatosian revolution*, son auteur Joseph Agassi, un philosophe, énonce des positions critiques vis-à-vis l'école et ses buts ; à propos de la vision dichotomique des mathématiques et sur les manières dont l'éducation devrait se réaliser. Chacune de ces positions contribuent à justifier une vision des mathématiques im-parfaites.

Agassi (1980) analyse le système éducatif dans son ensemble. Il part de la prémisse suivante : « Chaque système a un but, et seuls les buts de ce système permettent de déterminer la validité ou l'invalidité de ce système. » Ainsi, pour juger de la valeur du système éducatif il faut, inévitablement, déterminer le but de l'éducation. Selon ce philosophe, si le but de notre système éducatif est de reproduire le système social duquel le système éducatif émerge, alors rien n'est à reprocher à notre système éducatif.

Or, l'auteur se permet de remettre en question ce présumé but de l'éducation. Plutôt ce but devrait être que nos successeurs fassent mieux que nous. Dès lors, notre système éducatif devrait générer des citoyens indépendants et libres. Il s'oppose donc à diriger, manipuler et motiver et/ou à toute autre forme de leadership en contexte éducatif car cette position injustifiée d'autoritarisme engendre la dépendance des individus envers le système. Plus récemment, Watson (2008) a aussi invité à une forme de rupture avec une autorité statique en éducation mathématique. Comme il le remarque, l'autorité en classe semble reposer sur les enseignants, les manuels et les régimes d'examen, et pas tant dans l'argumentation mathématique (Traduction libre, Watson, 2008, p.6).

Lorsqu'on considère les mathématiques en tant que relation entre perfection et imperfection, on ne peut justifier de figer une forme d'autorité mathématique dans un pôle ou dans l'autre car l'autorité se doit d'être à l'image des mathématiques, soient dynamiques et tendre vers la perfection. On semble donc éviter le piège d'une autorité fixe, arbitraire ou injustifiée. C'est dans cette vision de l'autorité qui ne manipule pas et qui ne s'impose pas aux élèves qu'Agassi propose ce qu'il nomme la révolution Lakatosienne qui rompt avec la tradition en mettant fin aux manuels et cahiers d'exercices. L'étude se fera plutôt par « *agenda* ». C'est-à-dire que ce sont les élèves qui décideront des situations qu'ils vont vivre. Agassi met en valeur deux effets de cette pratique.

D'abord la spécificité des mathématiques qui y sera étudiée : différentes classes réaliseront différents agendas puisque différentes mathématiques sont requises selon les situations. Selon Agassi (1980), un enseignement ancré dans cette pratique serait efficace en ce qui attrait à la spécificité des savoirs développés, et pour ne pas contraindre et restreindre les possibilités mathématiques. Par la suite, il précise que l'enseignement par agenda permet la participation active. Cette participation active est cohérente avec une vision im-parfaite des mathématiques en ce sens où les mathématiques y sont vues à construire et en construction et il ne peut y avoir de construction sans action, ni participation.

Ensuite, sur les manières de considérer un apprenant, on devrait, à partir du tout premier instant, prendre l'enfant comme un étudiant responsable et un vrai chercheur, puisque selon Agassi c'est par essai erreur, ou autrement dit par preuves et réfutations, que l'enfant va avancer de manière plus rapide. Il faudrait faire comme Lakatos et utiliser les interruptions auprès de l'enseignant comme principal moteur de progrès mathématiques de la classe (Agassi, 1980). Chacun des aspects des enseignements soulevés par Agassi l'est dans l'optique où on peut penser que l'enseignement par une vision im-parfaite ne mènerait pas les apprenants vers une passivité et une dépendance envers le système.

Agassi pointe aussi un problème de représentation des mathématiques en éducation. Il dénonce la vision dichotomique des mathématiques qui remonte au temps des grecques et qui divise le monde en deux soient entre nature et convention. D'un côté il y a les vérités par convention, opinion, apparence et d'un autre côté la vérité par raison, preuve, le savoir propre. Or, Agassi (1980) remarque que cette façon dichotomique de voir est encore très répandue dans nos mœurs : « In the whole field of western thought this dichotomy runs throught » (Agassi, 1980, p. 29). Si les mathématiques sont bien une dichotomie alors il n'y a vraiment rien à repenser en éducation mathématique puisque comme il le souligne, tout ce qui est en place au sein de notre système éducatif est cohérent avec cette manière de voir les mathématiques. Or, la question de ce que sont les mathématiques est une question ouverte dans laquelle il n'y a pas de consensus (Agassi, 1980 ; Benn, 2000 ; Ernest, 2014). Dès lors, se restreindre à l'enseigner telle une dichotomie, ne respecte pas la nature encore parfois débattue de la question de ce que sont les mathématiques. Il faudrait donc présenter les mathématiques autrement, présenter leur nature avec moins de certitude. Ensuite, à une échelle individuelle de l'apprenant, lorsque vient le temps d'apprendre les mathématiques et la logique, la dichotomie de la nature et convention est « épouvantable » (dreadful) car elle retire tous buts et objectifs du processus. Selon Agassi, la nature du vraie au sein d'une dichotomie ne laisse aucune place aux désirs et ambitions personnelles, et les conventions les rendent arbitraires.

Enfin, selon Agassi, aucun système ne peut prétendre à la vérité absolue, car les systèmes sont faits par les humains pour répondre à certains buts et objectifs déterminés. Et ces buts et objectifs peuvent être sujets à débat. Donc, la nature de ce que sont les mathématiques pourrait toujours être objet de négociation et ne devrait pas être imposer aux élèves. Agassi fournit une motivation éducative à une vision im-parfaite des mathématiques qui serait assez flexible et ouverte à la négociation pour tenir compte à la fois du développement de l'autonomie de celui qui fait les mathématiques et de l'incertitude quant à la vraie nature des mathématiques.

### 3.1.4 Synthèse - Pourquoi apporter l'im-perfection des mathématiques à l'école ?

Il me semble qu'il y a au moins un argument principal motivant une vision des mathématiques im-parfaites à l'école qui ressort des articles présentés dans cette sous-section. En effet, on peut remarquer que chacun des articles propose à sa manière une façon de motiver les élèves à faire des mathématiques.

Pour Brown (1993), la motivation des élèves augmentera en laissant place aux émotions de confusion en résolution de problème, car en résolution de problème la dimension personnelle est inévitable. Aussi, la motivation des élèves augmentera en considérant les ambiguïtés en mathématiques comme une force à adopter car les mathématiques sont souvent développées de manières hasardeuses en laissant place aux ambiguïtés.

Pour Benn (2000), c'est en mettant l'emphase sur les processus de construction des mathématiques et sur l'histoire des mathématiques que l'intérêt et la motivation des élèves augmentera. Selon cette chercheur, les mathématiques sont faillibles et représentent  des constructions humaines. Les présenter ainsi contribue à enlever leur voile de neutralité et à leur rendre une forme d'utilité.

Pour Agassi(1980), c'est en remettant l'autorité et la nature des mathématiques entre les mains du groupe que la pertinence de faire des mathématiques émergera. Ce chercheur nous rappelle que la nature des mathématiques est sujet à débat, leur nature se doit donc d'être libérée de tous présupposés. En laissant les élèves décider de ce que sont, ou seront leur mathématiques, on leur permet d'un même coup d'en faire quelque chose d'utile et spécifique à eux.

D'une certaine façon, on peut remarquer que s'est en s'ancrant dans ce qui selon eux, est une plus juste vision des mathématiques que chacun justifie que les élèves seront davantage motivés. En faisant des parallèles entre les visions des mathématiques présentées précédemment et l'im-perfection, on peut croire qu'apporter une vision des mathématiques im-parfaites à l'école permettrait une augmentation de la motivation des élèves à persévérer et à faire des mathématiques.

Qu'en est-il vraiment ? Y a-t-il déjà des travaux réalisés en classe sur l'im-perfection mathématique ? Bien que le thème de l'im-perfection mathématique semble peu abordé dans les écrits de recherche en éducation mathématique. Certains travaux permettent de nous offrir un aperçu des possibilités éducatives d'un tel regard sur les mathématiques. C'est ce que je tente de vous offrir dans la section suivante. En montrant ce qui a déjà été fait, je montre du même coup des possibles manières d'apporter l'im-perfection mathématique en classe.

## 3.2 L'im-perfection à travers quelques travaux/explorations en didactique des mathématiques

Dans cette section, on présente et on explore une série d'articles que l'on peut rapprocher du pôle « imparfait » des mathématiques. Dans ces articles, les auteurs explorent des concepts qui révèlent des aspects et/ou des objets mathématiques moins conventionnels. Il sera question : des travaux de Borasi (1993 ; 1996) autour du potentiel des erreurs ; des travaux de Chazan (1993a ; 1993b) sur les preuves empiriques ; du travail de Zalavsky et al. (2002) autour de la confusion de la pente ; du travail de Mamolo (2010) sur la polysémie des symboles ; du travail de Proulx et Biegiesel (2009) à propos des extensions de l'algorithme de division d'Euclide ; de la thèse de Rowland (1995) sur le langage vague ; et de l'article de Smith (1981) sur des règles mathématiques mal orientées. Chacun de ces écrits aborde la place et le rôle de mathématiques moins habituelles en éducation. On observera comment l'im-perfection en mathématiques peut être observée dans ces travaux et les manières dont ces travaux illustrent et suggèrent parfois des façons dont on pourrait exploiter et valoriser ces mathématiques en classe.

### 3.2.1 Le potentiel éducatif d'erreurs mathématiques

Les travaux de Borasi (1993, 1996) ont été réalisés dans le cadre de sa thèse dans laquelle elle développe une manière d'enseigner les mathématiques par enquête à partir d'erreurs mathématiques. Un de ses buts était de faire apprécier les mathématiques en exposant leur côté humain[23] ; en faisant voir et vivre aux apprenants que les

[23] Une vision humaniste des mathématiques est une branche des visions faillibles des mathématiques telle que décrites par Benn(2000). Cette vision insiste sur l'apport de l'homme dans la construction de cette discipline, les mathématiques sont vues en tant que construction humaine du même type que toutes autres disciplines humaines comme la littérature, l'histoire, la géographie, ...

mathématiques ont finalement beaucoup en commun avec toutes autres constructions humaines. Son approche d'enquête part de la prémisse selon laquelle les erreurs offrent des opportunités d'apprentissage riches pour les apprenants.

On relie les erreurs et la vision im-parfaite des mathématiques puisque dans le concept d'erreurs, il y a l'idée de tenir pour vrai ce qui est considéré faux par autrui (ou inversement). Ainsi, l'erreur s'associe simultanément à la vérité et à ce qui ne le serait pas, on peut donc naturellement la lier aux deux dimensions parfaite et imparfaite. On peut aussi vouloir lui donner une place au sein de cette vision des mathématiques en contexte d'éducation en raison de son potentiel pour l'apprentissage. C'est ce potentiel que Borasi a exploité dans ses travaux et que l'on présente dans cette sous-section. On considère ses travaux en tant qu'exemples d'utilisations et d'explorations d'im-perfections mathématiques aux services de l'éducation.

Son livre *Reconceiving Mathematics Instruction : A focus on Errors* (Borasi, 1996) montre qu'amener les élèves et étudiants à expérimenter personnellement les dimensions humaines de contenus mathématiques est hautement éducatif. Toute ses séquences d'enseignement sont basées sur une méthodologie de « teaching experiment » et chacune de ses séances ont en commun l'exploitation des erreurs. Ces erreurs sont préalablement travaillées par la chercheure au sein d'une analyse conceptuelle de l'objet mathématique sur lequel se centre la séquence d'enseignement. L'utilisation d'erreurs pour l'enseignement a permis à Borasi d'identifier différentes postures d'apprentissage (« *stance of learning* », Borasi, 1996, p. 137). Ces postures sont décrites en relation avec les contenus mathématiques à apprendre lors de ses séances. Lorsque ces contenus ne sont pas prédéterminés, elle nomme l'état des apprenants comme étant en posture d'enquête.

> Inquiry stance: Here neither the answers nor the questions directing the student's mathematical activity are perceived as necessarily predetermined, and detours as well as redefinitions of the original task are encouraged; questions (...) initiate exploration and reflection in totally new direction, and even invite students to challenge status quo. (Borasi, 1996, p. 137)

Cette posture d'apprentissage est inspirante pour l'exploration par une vision imparfaite des mathématiques. Effectivement, en continuité avec les affirmations de Benn (2000) et de Agassi (1980) au sujet des effets de la *liberté* et de l'*exploration* en mathématiques, il est pertinent que l'instigateur de l'activité mathématique (rôle attribué habituellement à l'enseignant) maintienne une constante ouverture aux manifestations mathématiques émergentes des élèves afin d'éviter de pré-déterminer le contenu mathématique de la séance. Maintenir cette posture d'enquête permet de remettre en question les mathématiques qui sont déjà « toutes faites ». Voici comment Borasi (1996) décrit les effets mathématiques d'une telle posture lorsque ses élèves travaillaient le cercle :

> Her incorrect procedure to solve the original problem of "finding the circle passing through *three* given points" indeed proved useful to pose and solve yet another problem I had not even considered before – "finding the circle(s) passing through *two* given points" It also provided some unexpected information about the solution to the new problem – the fact that all the centers of the circles would be on a straight line. (Borasi, 1996)

Explicitement, on voit un exemple où une procédure incorrecte a mené à de nouvelles questions mathématiques pertinentes. Borasi (1996) note aussi au passage que cette situation initiée par les élèves s'est avéré très motivante en plus de l'amener (la chercheure) vers une nouvelle découverte mathématique. Cet exemple illustre très bien ce qui pourrait avoir l'air une situation en classe de mathématiques valorisant l'imperfection.

Borasi (1993) fournit une autre belle illustration, cette fois plus précisément, sur ce que peut signifier : questionner les statu quo en mathématiques. Elle présente une analyse du concept de *définition* dans laquelle elle expose ce qui est généralement admis au sein de la communauté mathématique. Une définition devrait être minimalement : non-contradictoire ; non-circulaire ; utiliser une terminologie précise et sans ambiguïté ; isoler parfaitement le concept en question ; et aller à l'essentiel sans être redondante (Borasi, 1993).

Borasi (1993) questionne ensuite (et se questionne à propos de) chacun des critères, en insistant sur l'importance du contexte quand vient le temps de déterminer si une définition est bonne ou non, donc que ces critères ne sont pas absolus et suffisants en soi. Par exemple, une définition « parfaite » et typique du cercle, comme : Dans un plan, un cercle est un ensemble de points à égale distance d'un point (le centre) », qui semble respecter en tous points les critères d'une *bonne* définition mathématique, s'avère très étonnante lorsqu'on l'applique dans un plan quadrillé dans lequel les distances doivent être mesurées le long du quadrillé (soit un plan en taxigéométrie).

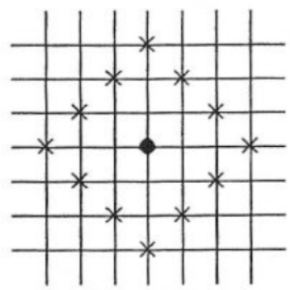

Figure 3.1 – Cercle de rayon 3 en taxigéométrie (tiré de Borasi, 1993)

L'image résultante d'un cercle de rayon 3 dans ce type de plan (fig. 3.1) ne correspond pas à l'image du cercle telle que l'on se l'imagine. Borasi (1993 ; 1996) rend explicite les contextes implicitement présents dans les définitions mathématiques, par exemple : Les distances se mesures dans toutes directions dans un plan en géométrie euclidienne. Ce type de prise de conscience supplémentaire me semble être un moyen de faire un pas vers la perfection mathématique, tout en prenant conscience de l'état d'im-perfection de notre précédente conception d'un cercle mathématiques. Ce travail sur les définitions remet en question l'*allure* de ce que nous croyons être un cercle et, en même temps, plus implicitement elle remet en question l'idée plus générale qu'il est possible d'élucider complètement tous les sens des objets mathématiques que l'on manipule. En ce sens, il s'agit d'ébranler une vision absolutiste des mathématiques, tout en avançant en perfection sur l'état de nos connaissances mathématiques. C'est en ce sens que le travail sur les définitions de cette chercheuse éclaire les manières dont on pourrait apporter une vision im-parfaite en classe de même que les manières dont elles affectent les perceptions que l'on peut avoir des mathématiques. En effet, une des principales retombées de ses expérimentations est une augmentation de l'appréciation du côté humain des mathématiques des élèves participant à sa recherche. Voici la citation qu'elle présente de deux de ses participants :

> M: I was thinking about, you know, when we come to an equation like that [$0^0$], when it just cannot be figured out by me, or by the next person, and then it just reminds me that this was all invented by people. It's not something like we are born and there is a tree and it has been there forever. It's like we invented this, out of our minds.
>
> K: I thought math … everything was going to be discovered in math has already been discovered and being a mathematician would be a really stupid thing to do because everybody already knows everything that there is to know. … But even the smallest thing is questionable. The same definition could get you something completely different, like with taxigeometry. (Borasi, 1996, p.166)

Ainsi, dans l'idée de préparer des séances mettant en valeur des dimensions de l'im-perfection en classe, la manière d'analyser le concept de définition, telle que développée par l'auteure, est intéressante et prometteuse pour faire des mathématiques, mais aussi pour changer la perception rigide et impersonnelle que certains élèves pourraient avoir des mathématiques. Pour analyser le concept de définition, elle a recherché de multiples manières possibles dont les critères généralement admis et généralement vrais sont limités par les contextes. En mettant en valeur les limites de validité des critères justifiant les définitions, elle met en valeur ce qui peut être vu im-parfait. Une telle approche pourrait être reprise en vue de se préparer à la réalisation de séance en classe autour de l'im-perfection. À partir d'un thème, le travail préalable à la séance serait de partir à la recherche des limites et des « bugs » des objets mathématiques associés au thème.

Dans un autre ordre d'idée, pour exploiter le potentiel des erreurs en action dans la classe, Borasi souligne qu'elle a réinvesti quelques éléments de ses analyses conceptuelles dans le but conscient de mettre en doute les conceptions des étudiants. Ce doute, elle le fait naitre à partir de situations conflictuelles, contrastantes et parfois même contradictoires : comme le contraste entre la définition du cercle ci-dessus et son résultat dans un plan en taxigéométrie (fig.3.1). Elle le considère comme un résultat positif et important de son approche. Cette attitude positive face au doute est un autre élément des travaux de Borasi qui est pertinent à l'approche des mathématiques im-parfaite, puisqu'une manifestation du doute peut être vue comme une forme de sensibilité à la contradiction dans laquelle une im-perfection mérite d'être clarifiée. Dans l'esprit d'amener les étudiants à douter par eux-mêmes et à *agir* sur ce doute, Hitt (2004) soulève que : « (…) les représentations sémiotiques produites par les étudiants peuvent jouer un rôle important pour déceler une contradiction logique ». C'est donc que si l'on veut aider les élèves en contexte mathématique contrastant ou contradictoire, alors les encourager à produire *leur* registre de représentations (dessins, schéma, tableau … nul besoin que leur représentation soit formelle) est une avenue prometteuse pour tendre vers la perfection. Cette posture bienveillante envers le sceptique et des formes de registres de représentations personnels (et utiles) semble tout à fait compatible, voire prometteuse, avec un travail des mathématiques im-parfaites.

Enfin, Borasi (1993) rappelle que l'on n'a pas toujours besoin de définition absolument rigoureuse pour opérer sur des objets mathématiques : il suffit d'en savoir assez. Son approche valorise une forme de savoir acceptable qui est suffisante pour atteindre les buts que l'on se donne. Ne visant pas nécessairement une parfaite élucidation des objets mathématiques, ni une forme de déterminisme, son approche montre une fois de plus sa compatibilité avec une vision im-parfaite des mathématiques. Dans ses résultats de 1993, elle relève la grande variété de questions que ses étudiants ont posées et les tentatives successives de raffinements des définitions du cercle qui lui rappellent les dialogues qui se déroulent dans *Preuves et réfutations* de Lakatos (1976). Elle constate aussi, qu'en séance, la possibilité d'interroger des formes d'activités mathématiques traditionnelles offre des opportunités de réflexions productrices de mathématiques. Les séances de Borasi avec les élèves illustrent bien de quoi aurait l'air une activité mathématique autour de l'im-perfection des mathématiques en plus d'exposer de potentiels bienfaits d'une telle approche.

### 3.2.2 Des confusions autour des concepts de pente, échelle et angle

Zalavsky et al. (2002) ont publié un rapport de recherche qui présentent des évidences de confusion relativement au concept de pente et à propos des liens qui peuvent être faits entre les représentations algébriques et géométriques de la pente, de l'échelle et de l'angle. Selon les chercheurs, l'augmentation de l'utilisation de logiciel pour l'enseignement, particulièrement l'utilisation de la fonction « zoom », a révélé quelques obstacles conceptuels associés aux liens entre les représentations géométriques et analytiques d'une fonction. Pour montrer l'existence de confusion autour de ces concepts, les chercheurs ont remis un questionnaire à 124 participants composé de deux tâches mathématiques simples, mais non standard, portant sur le comportement d'une pente à l'intérieur d'un changement d'échelle non homogène. Ensuite, 12 participants ont aussi été interviewés sur leurs réponses.

L'analyse des résultats a révélé deux approches principales. D'abord, une perspective *analytique* qui est caractérisée par une vision de la pente comme propriété de la fonction ; une dérivée ; le quotient de deux différences; ou un coefficient. La seconde perspective, dites *visuelle*, est caractérisée par la pente comme une propriété du graphique de la fonction, la pente varie lorsqu'il y a des changements non homogènes d'échelle. La pente est vue comme tan(α) ou en tant que quotient entre des longueurs de segments. Souvent, la perspective visuelle n'était plus viable dans la seconde tâche du questionnaire. S'il s'ensuivait chez les participants l'émergence d'une nouvelle perspective, ces participants étaient considérés par les auteurs ayant une approche mixte des tâches proposées.

Selon les chercheurs, une analyse de la tâche en elle-même a montré que la confusion découle notamment de l'isomorphisme (correspondance parfaite) assumé entre les représentations mobilisées. Seule l'approche purement analytique permettait d'éviter une incohérence au sein des démarches mathématiques.

Au contraire des autres articles présentés dans ce chapitre de mémoire, les 124 participants de l'étude de Zalavsky et al. (2002) ne sont pas que des élèves du secondaire. Ils sont aussi des enseignants de mathématiques, des futurs enseignants de mathématiques, des chercheurs en éducation mathématiques et des mathématiciens. Ainsi, puisque toutes les approches se sont retrouvées dans chacun des groupes interrogés, cet article montre que l'existence de confusion en mathématique, et donc de la potentielle pertinence d'une vision im-parfaite des mathématiques, s'étend même au-delà des études sous-graduées. En ce sens, Igor Kontorovich (2017) dans son article *When lecturers disagree on mathematics: The case of the root concept*, montre aussi clairement qu'on peut observer des désaccords et même des incohérences sur le sens d'objets mathématiques chez des professeurs de mathématiques au sein d'une même université. Dans ce contexte, une vision im-parfaite des mathématiques n'ajoute pas d'« imperfection » en éducation. Elle consiste plutôt à explicitement reconnaitre et considérer les im-perfections qui sont déjà présentes dans les interprétations mathématiques des différents acteurs en éducation. Et une tâche comme celle de Zalavsky et al. (2002) est un bon exemple permettant de révéler et explorer une forme d'imperfection.

Ainsi, pour poursuivre avec les confusions autour de la pente, l'analyse d'un point de vue mathématique de la tâche de Zalavsky et al. (2002) met l'emphase sur le dilemme qui concerne la pente et ce qui se passe lors d'un changement d'échelle non homogène : d'un côté, on peut voir la pente comme invariante au travers les changements d'échelle ; d'un autre côté on *voit* que la pente change. Les auteurs ont noté l'émergence de confusions, ils l'abordent ainsi dans l'article : « La confusion survient lorsque certaines hypothèses par défaut courantes mais non déclarées concernant l'isomorphisme entre les systèmes algébrique et géométrique sont sapés. » (Traduction libre, Zalavsky et al., 2002, p. 119) C'est donc que l'idée de correspondance parfaite entre ces systèmes d'approche des mathématiques est implicite. Cette perception de l'isomorphisme entre ces approches possède un très grand domaine de validité et semble très répandu! À ce sujet, les auteurs se demandent comment ils peuvent réconcilier les deux points de vue contradictoires (Zalavsky et al., 2002). Selon eux, s'il y a isomorphisme, alors il devrait y avoir bijection (correspondance parfaite) entre les éléments d'un système vers l'autre système. Une perspective visuelle « ruine » l'idée d'unicité entre chacun des éléments de chacune des représentations. Or, mon projet de recherche se distancie du travail de Zalavsky et al. (2002) sur un aspect important : leur vision des mathématiques. Dans une perspective par l'im-perfection, l'approche visuelle de la pente ne « ruine » rien. On ne cherche pas à réconcilier les deux visions (analytique et géométrique), ni à arriver à une forme d'« unicité » dans le système mathématique. La richesse mathématique, d'un point de vue de son potentiel producteur, réside justement au sein d'aspects mathématiques plus flous. Et c'est ce potentiel producteur de mathématiques qui est mis en évidence par Zalavsky et al. (2002) et que l'on cherche à apporter en classe. On ne cherche pas à tout « arranger », ni « clarifier » comme semble le proposer Zalavsky et al. (2002). Observer les mathématiques sous l'angle de leur im-perfection, c'est aussi d'accepter la confusion mathématique et de creuser ses possibilités (« creuser » à la manière dont Proulx et Beisiegel (2009) ont fait leurs mathématiques, voir sous-section 3.2.5).

Les manières dont on pourra réinvestir le travail de Zalavsky et al. (2002) en classe sont multiples, d'abord nous retenons que les confusions mathématiques sont possibles entre le passage d'une représentation à l'autre – surtout lorsque ces représentations sont supposées être bijectives. Nous retenons aussi le potentiel des confusions pour mettre en activité les élèves. Plus précisément, le thème du plan cartésien semble être un fertile terrain d'exploration mathématique. Aussi, nous observons que l'utilisation d'une tâche dite « non-standard » a permis l'émergence et l'accès à une grande diversité de raisonnement. Nous pensons donc que cette entrée, via une tâche non-standard, est une possibilité crédible à tester en classe. Enfin, sur une façon d'exploiter ce type de tâches, comme le souligne Zalavsky et al. (2002) citant Sela (2000):

> (…) discussions in the context of non-homogeneous change of scale can serve as a vehicle for sharpening the understanding of slope as well as reflecting on the underlying assumptions and implications of representation of functions in various coordinate systems (Sela, 2000, cité par Zalavsky et al., 2002, p. 139)

C'est en *discutant* des tâches non-standards que l'on mettra aussi en valeur la perfection des mathématiques. Par cette entrée, il est donc autant possible de travailler la dimension imparfaite que la dimension parfaite des mathématiques.

### 3.2.3 Lorsque raisonnements empiriques et déductifs se côtoient…

Chazan (1993a ; 1993b) a mené une étude en contexte de séances d'apprentissage de la géométrie dans lesquelles les élèves étaient amenés à travailler la mesure d'exemples et les preuves déductives. Il s'est intéressé aux perceptions que les élèves ont développées à propos de la preuve. Chazan (1993a) présente deux types de perceptions à propos de la preuve, dites erronées, que l'on peut observer dans la littérature et dans ses expérimentations.

Une première perception est de considérer un ou des exemples empiriques en tant que preuve valide. Les analyses de Chazan (1993a) montrent que les élèves manifestant ce type de perception de la preuve ont de *bonnes* raisons de le faire. En ce sens, un élève a justifié l'idée de « preuve à l'aide d'exemples » seulement si les exemples étaient choisis de sorte à couvrir tous les cas possibles de triangles (scalène avec un angle obtus, rectangle, scalène qu'avec des angles aigus, isocèles, équilatéraux). Un autre élève a justifié l'utilisation d'exemples en tant que preuve seulement dans le cas où le triangle utilisé en tant qu'exemple n'était pas particulier (il fallait que le triangle soit le plus général possible). On peut voir que malgré l'utilisation de preuves que l'on pourrait qualifier de faillibles, ces élèves avaient le souci d'être *justes* et de tendre vers une preuve la plus « générale » possible. On peut penser que les preuves de ces élèves *tendaient* vers la perfection. (Pouvons-nous même les considérer comme des exemples exemplaires ou même comme un exemple général?)

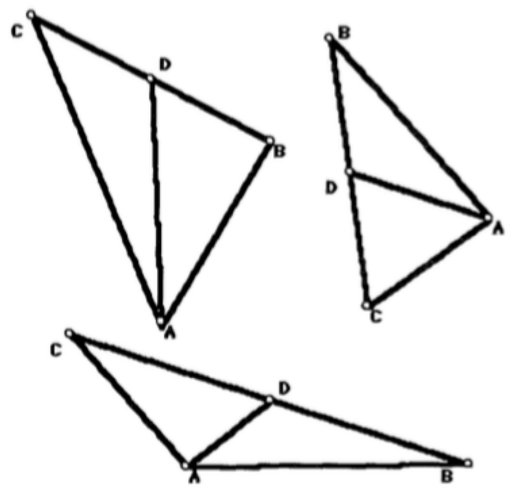


Fig. 1. Three triangles with medians drawn from vertex A.

Figure 3.2 – Trois triangles avec médiane (tiré de Chazan, 1993a, p.361)

On reconnaît ici une forme de tiraillement entre raisonnements empiriques faillibles et raisonnement empirique dont on voudrait affirmer l'infaillibilité. Ici, les élèves ont le souci d'être infaillibles, en utilisant un moyen faillible. Cette conception de l'exemple en tant que preuve semble fertile pour l'exploration des dimensions im-parfaites des mathématiques. Comment pouvons-nous faire vivre et travailler ce genre de tension entre raisonnements empiriques et cette volonté d'être infaillible ? Ou cette confusion entre un cas d'exemples et un exemple de cas ?

Déjà, le côtoiement, dans une même classe, de raisonnements par vérifications empiriques et de raisonnements par preuves déductives est un premier moyen pour explorer et exposer ces imperfections mathématiques. En effet, la juxtaposition des manières de raisonner empiriquement et déductivement a mené les élèves à questionner la valeur et l'importance de chacun de ces types de raisonnements (Chazan, 1993a).

Ensuite, Chazan (1993b) fait des suggestions afin de travailler la preuve et la validité de cette dernière. Deux aspects de la classe sont à considérer particulièrement : le rôle du groupe social et la participation active.

À propos du groupe social, le chercheur affirme qu'il serait important de laisser au groupe social la tâche de déterminer la validité d'une preuve. Ainsi, tel qu'expliqué par Chazan (1993b), un théorème en deviendrait un uniquement lorsque la classe déciderait unanimement que le théorème en est un. Pour l'enseignant, cela implique qu'il devra accepter que des théorèmes vrais soient considérés faux lorsque la classe n'est pas convaincue, et que des théorèmes faux soient considérés vrais si personne ne parvient à fournir de contre-exemple. Dans cette vision du groupe social que représente la classe, l'accord entre les résultats mathématiques reconnus par la communauté (au sens large) et ceux reconnus par la classe ne serait pas systématique.

On peut voir qu'il s'agit essentiellement pour l'enseignant de faire des mathématiques *avec* les élèves en refusant un potentiel recours à l'argument d'autorité. Les élèves construisent et négocient leurs mathématiques en leur conférant une dimension personnelle et une validité explicitée et justifiée au sein de leur groupe social. Une telle vision de l'importance du rôle du groupe social illustre une conséquence d'une vision im-parfaite des mathématiques en contexte éducatif : une participation active des élèves est nécessaire, sans quoi il n'y a pas de groupe social pour juger de la validité.

Dans le but de favoriser une participation active des élèves, Chazan (1993b) suggère que les élèves soient encouragés : à questionner chacun des pas du raisonnement tout comme la validité de la conclusion ; à soumettre des postulats aux groupes ; à rechercher des contre-exemples aux preuves de manuels ; à exposer les informations implicites qui ne sont pas présentes dans les preuves de manuels ; etc.

Ces actions, à mettre en place par l'enseignant, nous éclairent sur la façon dont on peut faire vivre l'im-perfection mathématique en classe. Chacune de ces actions cache une forme d'imperfections implicites aux mathématiques présentes. La première action suggère de remettre en question la validité, donc de potentiellement invalider ; la seconde action suggère de soumettre des postulats, donc de compléter les mathématiques ; la troisième suggère de contredire ; la dernière suggère qu'il n'y a pas eu complète élucidation du raisonnement d'une preuve. Bref, ces actions encouragent les élèves à ne pas considérer les mathématiques comme finies et parfaites.

La seconde perception des preuves que Chazan (1993a) a observé est la considération des preuves en tant qu'exemple empirique. Les élèves manifestant ce type de conception de la preuve ont été séparés en deux catégories par Chazan (1993a). D'abord, il y a ceux qui n'ont simplement pas compris le rôle des prémisses dans une preuve déductive ni l'intention derrière la présentation des preuves déductives. Sous notre regard par l'imperfection, un travail à propos des manières de présenter les preuves est lié aux normes et aux conventions mathématiques et donc à une forme de perfection. Puis la seconde catégorie d'élèves est composée des sceptiques ; ils comprennent le sens des prémisses, mais l'existence d'une preuve déductive n'empêche pas pour eux qu'il puisse exister un contre-exemple. Pour le chercheur, ce scepticisme est valable et potentiellement productif, c'est quelque chose qu'il voudrait encourager (Chazan,1993a). En effet, il montre une forme d'empathie pour ces élèves critiques puisqu'il reconnaît lui aussi que certaines preuves dans les manuels mériteraient d'être « réparées ». Cette idée de preuves à réparer n'est pas étrangère au développement des mathématiques dans l'Histoire. Notamment lorsqu'on pense au récit de Lakatos (1984).  Si questionner la structure d'une preuve peut se faire en étant dans une posture de sceptique, questionner la forme et les éléments implicites d'une preuve peut se faire par un travail sur les conventions mathématiques. À cet effet, Kontorovich et Zazkis (2017) affirment s'attendre à ce que les tâches dans lesquelles on explore des conventions mathématiques présentent l'existence d'explications plausibles avec d'autres explications concurrentes. Pour eux, ces multiples explications découlent d'incertitudes chez celui qui fait les mathématiques. Cette concurrence d'explications peut rendre celui qui fait des mathématiques incertain à propos de la validité de ses raisonnements. Kontorovich et Zazkis (2017) affirment aussi qu'amener cet état d'incertitude peut faciliter l'apprentissage des mathématiques.

C’est donc que des tâches liées à l’explicitation de conventions peuvent aider à l’apprentissage, en plus de s’ancrer naturellement dans une perspective im-parfaite des mathématiques dues aux incertitudes qu’elles font ressortir. En effet, les conventions s’articulent autour des concepts *d’arbitraire* et *de nécessaire* (Hewitt, 1999; Kontorovich, I., & Zazkis, 2017). Certaines conventions peuvent être perçues comme arbitraires lorsque pour les connaître on doit se les faire partager par un tiers comme un enseignant, un livre, internet, etc. D’autres conventions seront considérées comme nécessaires lorsqu’elles représentent des normes que les élèves peuvent déduire par eux-mêmes et même se convaincre à propos de leur certitude (Hewitt, 1999). Les caractéristiques de « nécessaires » et « arbitraires » semblent respectivement être des caractéristiques de la dimension parfaite et imparfaite, même si la convention et tradition semblent s’associer à la perfection. Chez les enseignants, les frontières - entre ce qui distingue les conventions nécessaires des conventions arbitraires - peuvent être floues et ce qui semble arbitraire pour quelqu’un qui apprend n’est pas nécessairement arbitraire d’un point de vue mathématique (Kontorovich et Zazkis, 2017). C’est donc que l’exploration des conventions mathématiques offre des possibilités de nuances et d’élucidations autant pour les enseignants que pour les élèves. Ceci constitue une autre occasion de profiter des dimensions im-parfaites des mathématiques au secondaire.

### 3.2.4 Polysémie du procept, du langage et des symboles

Mamolo (2010) affirme, en citant Byers (2007), que l’ambiguïté mathématique en éducation permet de nouvelles possibilités mathématiques et mène vers des compréhensions plus profondes. Le concept d’*ambiguïté* – un antonyme de *clarté* – s’associe naturellement à une dimension imparfaite des mathématiques. On peut en déduire que les traces d’ambiguïté mathématiques seraient un bon support ou un bon point de départ à des activités mathématiques autour de l’im-perfection en classe au secondaire. Mamolo (2010) identifie justement plusieurs sources d’ambiguïté mathématique parmi lesquelles on pourrait puiser pour faire vivre l'im-perfection mathématique en classe.

D'abord, elle présente brièvement le concept en éducation mathématique de *procepts* qui est relatif aux symboles mathématiques qui peuvent simultanément être interprétés comme processus et concepts ; ce double sens est ambigu. Ainsi, tous procepts portent un potentiel pour vivre l'im-perfection mathématique due au double sens qu'il enferme. Le symbole de la périodicité est un exemple intéressant de procepts pour une vision im-parfaite des mathématiques puisqu'il éclaire certaines zones floues mathématiques vues au secondaire, mais pas toujours discutées. Par exemple, $0,\overline{9}$ peut être perçu en tant que processus incomplet et inachevable, le nombre signifie alors 0,9999999... et ne peut signifier autre chose. Dans cette perception, on doit toujours ajouter un 9 de plus à chaque fois qu'on lui ajoute un 9. Le symbole « $\overline{\ }$ » représente un processus infini et est associé à l'idée d'infini potentiel. Sous un autre regard, on peut se convaincre que $0,\overline{9}$ vaut 1, le signe de périodicité est alors pris comme concept. Et simultanément, ces constats dépendent de la structure des nombres réels, car avec une théorie des infiniment petits, il n'y a pas d'égalité…Il semble donc que des procepts peuvent être porteurs d'une variation importante de sens et, dans le cas des nombres périodiques, faire écho à une forme d'infini potentiel et à une forme d'infini actuel… Est-ce que ce symbole mathématique (porteur de cette double signification) serait un objet mathématique idéal à amener en classe afin de travailler les divers sens de l'infini mathématique ? L'article de Mamolo ne nous offre pas de réponse claire à ce propos.

Par rapport au langage mathématique, Mamolo affirme qu'au niveau du lexique le langage n'est pas toujours clair. Lorsque des enfants identifient erronément le sens d'un mot ambigu dans une phrase mathématique, le sens auquel ils choisissent d'identifier le mot provient souvent du langage courant (Dunkin et Shire, 1991 présenté par Mamolo, 2010). Ce type d'ambiguïté découle donc du passage du registre courant au registre spécifique mathématique. Dans le contexte d'une classe de mathématiques en français, on peut penser que le mot *inverse* pourrait en être un bon exemple en ce sens. Affirmer que l'inverse de 34 est 43, ou même -34 (parce que l'inverse du positif c'est négatif (sic)), peut signifier que l'élève a choisi le sens du mot inverse dans la vie de tous les jours plutôt que le sens mathématique du mot inverse (qui ferait dire 1/34).

D'autres mots sont polysémiques à l'intérieur même du registre mathématique. Leurs significations dépendent du contexte mathématique spécifique. Une fois de plus on peut voir que la perfection d'un sens d'un mot, même mathématique, n'a rien d'absolu. Dans une classe en français, on peut reconnaître que le mot « diviseur »[24] est polysémique : un diviseur peut être un nombre qui en divise un autre sans reste, mais aussi être le nombre dans une division qui divise un second nombre (indépendamment de l'existence ou non d'un reste). Par exemple, 6 est un diviseur de 12, 18, 36, ... et 6 est aussi le diviseur dans la division : $32 \div 6$. Un regard sur l'im-perfection des mots mathématiques nous amène à penser que l'éducation mathématique pourraient exposer les ambiguïtés lexicales plutôt que les cacher. D'une certaine façon, ce qui est ambigu contient une zone d'ombre et c'est en la mettant en lumière que l'on va vivre des expériences mathématiques enrichies.

Au cœur de son article, Mamolo (2010) s'est intéressée aux cas d'ambiguïté des symboles qui dépendent du contexte mathématique : un phénomène qu'elle nomme polysémie des symboles. Elle s'est intéressée au cas du symbole de l'addition + et ses manières de se manifester dans différents registres mathématiques. Elle montre comment l'application de l'addition dans un nouveau registre mathématique *étend* le sens du symbole mathématique générant alors des ambiguïtés. Par exemple, Mamolo

[24] Zazkis (1998) a remarqué que *quotient* et *divisors* sont des mots ambigus en classe de mathématiques qui se déroule en anglais. J'ai trouvé mon exemple à partir de son travail.

montre et explique[25] que 1 + 2 en arithmétique des naturels peut être vue comme la cardinalité de l'union de deux ensembles (de cardinalité respectivement de 1 élément et de 2 éléments), le résultat de cette addition est représenté par le symbole 3.

| Symbole | Contexte | Sens | Écriture symbolique du résultat |
|---|---|---|---|
| 1 + 2 | Arithmétique | Cardinalité de l'union des ensembles de cardinalité de 1 et des ensembles de cardinalité de 2 | 3 |

Tableau 3.1 Tiré de Mamolo (2010)

Elle poursuit en exposant qu'en arithmétique modulaire, le sens d'une addition modulo 3 de 1 + 2 change de manière importante. On trouve le résultat 1 + 2 en additionnant (de manière habituelle) n'importe quel entier de la classe de congruence 1 modulo 3 : {... -5, -2, 1, 4, 7, ...} avec n'importe quel autre élément de la classe de congruence 2 modulo 3 : {...-4, -1, 2, 5, 8, ...}. Ce qui résulte d'une classe de congruence (1+2) modulo 3 qui revient à la classe de congruence 0 modulo 3 {...-6, -3, 0, 3, 6, ...}.

| Symbole | Contexte | Sens | Écriture symbolique du résultat |
|---|---|---|---|
| 1 + 2 | Arithmétique | Cardinalité de l'union des ensembles de cardinalité de 1 et des ensembles de cardinalité de 2 | 3 |
| | Arithmétique modulo 3 | Classe de congruence de (1+2) modulo 3 : {...-6, -3, 0, 3, 6, ...}.. | 0 |

Tableau 3.2 Tiré de Mamolo (2010)

Mamolo (2010) précise que les concepts, qui sont en jeux lors d'addition modulaire, sont difficiles et abstraits et qu'on ne les rend pas plus accessibles en les exprimant à l'aide d'un symbolisme qu'elle qualifie de « opaque ». Un regard sur cette polysémie

---

[25] Les explications mathématiques de cette page sont très très proches d'une traduction de Mamolo(2010).

expose certaines limites du symbolisme en contexte éducatif. Conséquemment, elle expose les possibilités en contexte d'éducation pour l'im-perfection. Les symboles de mêmes formes, comme le +, mais variant subtilement de sens, peuvent presque faire obstacle au nouveau sens qui prend place dans de nouveaux contextes. Observer cet exemple d'im-perfection du symbolisme mathématique permet d'éviter de tenir pour acquis, comme le dit Mamolo (2010), l'important changement de perspective nécessaire lorsque la polysémie des symboles reste tacite.

Le cas de l'arithmétique transfinie est aussi travaillé par l'auteure. L'arithmétique transfinie peut être vue comme une *extension* de l'arithmétique dans les naturels, en ce sens que les nombres transfinis représentent aussi des cardinalités, mais des cardinalités d'ensemble fini ou infini (Mamolo, 2010). Le sens de la combinaison des symboles +1, est radicalement transformé par rapport aux deux autres contextes précédents. Le +1 en arithmétique transfinie ne change pas la cardinalité d'un ensemble infini.

| Symbole | Contexte | Sens | Écriture symbolique du résultat |
|---|---|---|---|
| 2 + 1 | Arithmétique | Cardinalité de l'union des ensembles de cardinalité de 1 et des ensembles de cardinalité de 2 | 3 |
| | Arithmétique modulo 3 | Classe de congruence de (1+2) modulo 3 /...-3, 0,3,.../ | 0 |
| $N_0 + 1$ | Artihmétique transfinie | Cardinalité de l'ensemble $N \cup B$ | $N_0$ |

Tableau 3.3 Tiré de Mamolo (2010)

Pour elle, expliciter les variations des sens de l'addition aide à mieux saisir le concept d'additions, mais aussi des nombres transfinis et de dépasser l'impression que l'infini est « un gros nombre inconnu » (a *big unknown number*). Par l'explicitation des variations des sens, on éclaire bien plus que ce symbole seul, on éclaire aussi les concepts sous-jacents au symbole. En ce sens, un regard sur l'im-perfection mathématique n'incite pas à enseigner les imperfections ni à enseigner que les mathématiques sont imparfaites ni que les imperfections sont nécessaires et importantes en elles-mêmes. Mais elle incite à voir et reconnaitre que des im-perfections sont présentes en mathématiques sous forme de variations importantes de sens. Un regard sur ces im-perfections invite à générer des contextes favorisant l'accès aux sens des objets mathématiques avec lesquels on travaille *autour* des imperfections. Dans cette perspective, les imperfections mathématiques ne représentent pas une finalité éducative, mais bien un point de départ possible pour aller vers la perfection (ou diverses formes de perfection pourrait-on dire).

Finalement, Mamolo (2010), tout comme Chazan (1993b), souligne une manière de reconnaitre les effets que les ambiguïtés peuvent avoir en mathématiques. «As such, attending to the polysemy of symbols, either as a learner, for a learner, or as a researcher, may expose confusion or inappropriate associations that could otherwise go unresolved. »(Mamolo, 2010, p.259) Pour son lecteur, est-ce un simple partage d'information ou un avertissement ? Mamolo exprime ci-haut que l'im-perfection, sous la forme de la polysémie des symboles, peut révéler, faire ressortir des confusions qui ne ressortiraient pas autrement. Ce que Mamolo ne nous dit pas explicitement, c'est qu'il faut peut-être être prêt(e) à devenir confus(e) nous aussi. Aller explorer la polysémie des symboles c'est peut-être risquer d'exposer nos propres conceptions erronées.

### 3.2.5 Diverses possibilités de l'algorithme de division d'Euclide

Le travail d'analyse de l'algorithme de division fait par Proulx et Beisiegel (2009) met en valeur les limites, les conventions et les aspects implicites entourant l'utilisation de cet algorithme. Les auteurs explorent quatre différentes manières d'observer, d'exposer, de travailler et de penser l'algorithme de division d'Euclide dans lesquelles ils *jouent* aussi à diviser des nombres positifs comme négatifs. Se faisant, ils exposent le domaine de validité restreint de diverses conceptualisations de l'algorithme de division et illustrent très clairement et finement les manières dont ce genre de questions peut alimenter l'activité mathématique. Voici le genre de questions que les auteurs se posent : « Prenons une division très simple, comme 18 divisé par 4. Une réponse à cette opération est « 4 reste 2. » Cela dit, qu'en est-il de 3 reste 6, 2 reste 10, 5 reste -2 ?? » (Traduction libre, Proulx et Beisiegel, 2009, p. 411) Ce passage est un exemple concret de la manière dont une réflexion mathématique moins conventionnelle peut générer de nouvelles questions mathématiques intéressantes. Les multiples sens de la division explorés par les auteurs semblent comporter certaines limites de validité. Aucun des sens explorés par l'article ne peut expliquer toutes les conventions, implicites et sous-jacentes à l'utilisation de l'algorithme. Ils affirment que : « C'est dans la réflexion sur les différents sens possibles de la division que les conceptualisations deviennent mathématiquement intéressantes et signifiantes. » (Traduction libre, Proulx et Beisiegel, 2009, p. 415) Dans le même esprit que Proulx et Beisiegel (2009), nous concevons aussi ces réflexions intéressantes et signifiantes, toutefois pour amener notre regard sur l'activité mathématique sous l'angle de ses dimensions im-parfaites, il faut que leurs réflexions prennent vie *en classe*.

En s'inspirant des manières dont ces allers-retours, un va et vient entre les dimensions parfaites et imparfaites des mathématiques prennent vie, on remarque qu'ils semblent être la directe conséquence des curiosités mathématiques qui ont été soulevées. On pourrait donc en classe proposer des déclencheurs sous forme de curiosités.

L'ensemble des réflexions des auteurs peut être vu comme une forme d'analyse conceptuelle de la division d'Euclide, dans laquelle on insiste sur les multiples *autres*[26] possibilités de cet algorithme. Leur travail, qui insiste sur la pluralité des sens mathématiques possibles et les limites de ces sens, illustre bien le genre de réflexion et travail mathématique qui pourrait être fait avec des élèves par une entrée sur l'im-

---

[26] *Autre* dans le sens de différentes des possibilités conventionnelles et traditionnelles.

perfection mathématiques. Car une vision im-parfaite des mathématiques se permet de questionner et de tester les limites des sens qui sembleraient préétablis. Proulx et Beigiesel (2009) montre ainsi qu'il est possible de « découvrir » de nouvelles possibilités mathématiques étonnantes au sein d'objets mathématiques avec lesquels on interagit depuis nos premières années de scolarité. En montrant qu'il est producteur de remettre en question des mathématiques, même celle qu'on pourrait croire les plus établies comme l'algorithme de division d'Euclide, les auteurs illustrent la portée possible d'un regard im-parfait sur les mathématiques en classe.

Dans les conclusions de l'article, les chercheurs affirment :

> This paper raises an intriguing phenomenon that is present within other mathematical topics – that depending on the aspect we pay attention to (convention, conceptualizations, calculator, long division), the orientations taken sometimes make sense and sometimes do not. (Proulx et Beisiegel, 2009, p. 421)

Il nous semble que le *phénomène intrigant*, dont parle les auteurs, représente l'essence même de l'activité mathématique. Ce phénomène, qui peut s'apparenter à une forme de validité locale aux conceptualisations mathématiques, semble être implicitement présent dans tous actes mathématiques selon la posture et le regard que l'on adopte. Une vision im-parfaite des mathématiques ne cherche pas à présenter les mathématiques comme étant relative dans le sens « relativiste absolu », mais bien que les mathématiques doivent être contextualisées pour faire du sens. On ne peut pas juger de la validité des mathématiques sans le contexte dans lequel ces mathématiques baignent. L'enjeu de la cohérence avec les différents aspects du contexte est donc primordial. Dans une perspective de voir et de vivre l'im-perfection, travailler cet enjeu c'est précisément faire des mathématiques. Étant donné qu'une vision im-parfaite est motivée par une vision épistémologique des mathématiques, le contenu de l'article Proulx et Beisiegel (2009) offre ainsi une excellente image de mathématiques que l'on voudrait faire en classe pour valoriser l'im-perfection.

### 3.2.6 Langage imprécis et réponses précises

Comme la croyance en des mathématiques dites absolues est très répandue et même généralement admise (Benn, 2000 ; Rowland, 1995), il n'est pas aisé d'accepter que les mathématiques puissent être vagues ou imprécises. En regard de l'objectif de la thèse de Rowland (1995), il est nécessaire que le lecteur de sa thèse puisse (au moins) envisager et (au mieux) voir cette dernière possibilité, car l'auteur tente d'exposer et comprendre certaines façons dont les participants utilisent le langage – spécialement le langage vague et imprécis – dans leurs conversations mathématiques. Ainsi, l'auteur a présenté explicitement des perspectives sur l'activité mathématique et sur le langage qui laissent place à l'imprécision. Ensuite, il a présenté et documenté quelques courants de pensée en éducation mathématique qui font honneur aux vérités contextuelles et « en construction » qui ont lieu au cours de l'activité mathématique. Ces perspectives et courants représentent, pour nous, des moyens de reconnaître des aspects de l'imperfection mathématique en éducation.

Rowland (1995) voit les mathématiques comme le résultat d'un processus. Il insiste sur le côté éphémère de toutes affirmations mathématiques et sur l'importance des processus de généralisation en mathématiques. Selon lui, une croyance provisoire est une composante essentielle de la pensée mathématique. Il cite Mason (1998) pour affirmer qu'en mathématiques tout énoncé est traité comme une conjecture modifiable (Mason, 1988 cité dans Rowland, 1995) et, donc, des opportunités pour tester et examiner de façon critique des conjectures devraient être fournies. Ainsi, il nous informe ici sur comment amener des formes éphémères et imparfaites de mathématiques. Présentez en classe des conjectures modifiables semble être une avenue permettant d'expérimenter les mathématiques sous forme de processus et de vivre le côté éphémère de certaines affirmations mathématiques qui ne seront valides que temporairement. Doublée à la possibilité d'arriver à un résultat mieux établi, on peut même contraster les imperfections précédentes à notre nouvelle apparente perfection.

À propos de la classe et du langage parlé, Rowland (1995) souligne que le langage parlé est un médium très tolérant ; dans le sens de flexible. Il cite un rapport qui affirme à propos du langage que : « puisqu'il est un médium tolérant, le langage parlé est nécessairement ambigu. » Rowland (1995) constate donc que les mathématiques *parlées* sont nécessairement ambiguës. Ce constat nous indique que le langage oral est probablement une manifestation fertile à l'ambiguïté mathématique. Pour nous ces ambiguïtés représentent une forme d'imperfection mathématique que l'on peut contraster avec un idéal.

Aussi à propos du langage, selon Rowland (1995), apprendre les mathématiques peut être vu comme un processus actif de construction où l'imprécision est expérimentée individuellement et exprimée socialement. Ce constat nous indique que générer des *interactions* ou imposer l'activité mathématique en *groupe* est probablement une manière pertinente de faire vivre l'imperfection mathématique si on veut pouvoir observer *l'expression d'imprécisions*. À ce propos, l'imprécision rend compliqué les conditions de vérités sémantiques des propos langagiers (Rowland, 1995). Il nous faudra donc sortir d'une vision dualiste de la vérité mathématique lorsqu'on observera le langage parlé. En ce sens, un regard par l'im-perfection mathématique (qui fournit des formes de gradation de la certitude (voir sous-section 2.3.5) est cohérent pour observer le langage, car il ne s'ancre pas dans une vision dichotomique et tranchée.

Afin d'explorer plus en profondeur l'importance du langage vague, Rowland a recueilli des données qui prenaient la forme de verbatim des enregistrements de ses entrevues généralement individuelles entre lui-même et un participant. À chacune des entrevues, Rowland présentait une tâche de généralisation au(x) participant(s). Il s'ensuivait ainsi une discussion autour de cette tâche.

Plus précisément à propos des manifestations du langage vague, les élèves dans les travaux de Rowland ont utilisé une classe de mot appelé en linguistique “hedges”, par exemple : *sort of*, *about*, *approximately*, *I think*, *maybe*, *perhaps*. Ces expressions supportaient des raisonnements mathématiques valides, malgré leur manque de précision. Voici un des nombreux passages analysés de la thèse de Rowland qui illustre une forme d’apport du langage vague pour les conversations mathématiques :

> Tim: OK, here's something left over from last week. We had 260=10=26 and sixties, sixty-fives, seventies, seventy-fives, 26x10=260. We also had 40=7=5.5 and 5.5x7=38.5 [Tim writes all these] OK? You remember that we talked about that?
>
> Susie: Yes, but if five or ten you do **it** with, **it** always comes out the same number.
>
> Tim : Yes, l was going to say that you said to me that sometimes ... [interrupted]
>
> Susie : And sometimes fifteen, twenty, twenty-five, thirty, thirty-five, fifty, fifty-five, sixty, sixty-five, seventy, seventy-five, eighty, eighty-five, ninety.
>
> Tim: Ninety-five?
>
> Susie : Yes.
>
> Tim : A hundred?
>
> Susie : Sometimes.
>
> Tim :A hundred and five?
>
> Susie : Sometimes. Any by five or by ten will sometimes do **it**.
>
> Tim : What will it do?
>
> Susie : You start with the same number as you end.

Figure 3.3 – Extrait de verbatim (tiré de Rowland,1996)

Dans cet échange et dans les échanges subséquents, Rowland explique que Susie est en train de construire une relation entre la division et la multiplication, mais qu’elle n’a pas de mots pour exprimer le lien entre ces deux termes. Ainsi, l’utilisation du pronom neutre à la 3e personne « it » vient palier à son manque lexical, tout en supportant la continuité de l’échange mathématique. L’ensemble des analyses de Rowland (1995) montrent que le langage vague est vital à l'activité mathématique en contexte de conjecture et de généralisation.

Rowland (1995) montre aussi qu'en mathématiques les résultats sont peut-être précis, mais les processus de négociation ne sont pas à court d'imprécisions (Zhang, 2011). Ainsi, l'écart entre la réponse et le discours et l'écart entre la justesse des réponses et l'imprécision des discours sont d'autant d'éléments mathématiques à observer qu'à exploiter pour reconnaître et exposer les dimensions im-parfaites mathématiques.

### 3.2.7 Des règles mathématiques *limitées* à exploiter

Smith (1981) illustre le potentiel du comportement inventif des apprenants en mathématiques lorsqu'ils inventent leurs propres règles mathématiques à partir des règles mathématiques reconnues par la communauté. Ces versions construites et personnelles de ces règles mènent à des conclusions généralement admises comme mathématiquement fausses. On peut, par exemple, en reconnaitre lorsque des élèves appliquent une variation de l'*Expanded Law of Linearity* :

*The Expanded Law of Linearity* (also known as "Distributivity Run Rampant"): Distribute anything at the drop of a hat.

Application: $(x+y)^2 = x^2 + y^2$.

There are many variations of this law, including:

(1) distribute whenever there are parentheses (e.g., $(uv)' = u'v'$);
(2) distribute whenever there is a sum (e.g., $\sqrt{x^2+9} = x+3$);
(3) multiply everybody by everybody else (e.g., $3(ab) = (3a)(3b)$);
(4) $f(x * y) = f(x) * f(y)$ for all functions $f$ and all operations $*$ (rare).

Figure 3.4 – Expanded Law of Linearity

Ou lorsqu'ils utilisent *The Double Negative Principle* : Deux signes négatifs forment un plus. Par exemple, $(-x)^{-3} = x^3$ . Smith (1981) présente plus d'une dizaine d'autres « règles » qu'on peut qualifier d'erronées, mais pas dénuées de fondements. D'une certaine manière, ces règles découlent d'une forme de généralisation abusive de d'autres règles et relève selon Smith (1981) d'un processus créatif, inductif et essentiel à l'apprentissage (et essentiel à la création mathématique selon Poincaré (1905)).

À ce propos, Wilensky (1995) montre qu'il est aussi possible de travailler l'intuition mathématique en contexte de probabilité à partir de tâches ancrées sur des paradoxes mathématiques. Il montre que son approche permet aux apprenants d'améliorer le raffinement et l'expression de leur compréhension des probabilités de manière plus efficace que s'ils avaient vécu un enseignement mathématique explicite. Son approche, par l'utilisation de paradoxes, illustre une manière supplémentaire dont l'im-perfection mathématique pourrait être amenée en classe et être mise directement au service du développement de l'intuition mathématique des élèves.

De son côté Smith, tout comme Wilensky (1995), loin d'être négative face à ces processus inductifs, adopte une approche très différente. Devant la présence de ces raisonnements inductifs, elle suggère que ces lois générées par les apprenants peuvent être attaquées de manière efficace. Ces lois constituent un point de départ pour cette chercheure. Le choix du vocable « attaquer » pour travailler les règles des élèves n'est pas tout à fait compatible avec une vision im-parfaite des mathématiques, car on ne recherche pas à « attaquer » ces lois, mais bien à les travailler et les exposer. Néanmoins, le reste de son approche est tout à fait compatible avec une vision im-parfaite des mathématiques, puisque ces règles, que l'on peut considérer comme *à ajuster*, et *à explorer*, représentent des occasions de faire des mathématiques dont le point de départ est, selon l'enseignant, imparfait et présent dans la classe. Pour ce faire, Smith invite les enseignants à voir les mathématiques de la même manière que leurs élèves et d'aller à la source de ce qu'elle nomme leur mécompréhensions (Smith, 1981). Une vision im-parfaite des mathématiques peut bien s'articuler sur ce principe puisque les mathématiques sont toujours vues à la fois vraie et fausse. Ainsi un enseignant qui irait au cœur de ce genre de raisonnement ne serait pas en train de « trahir » un genre d'idéal mathématique ni entrain de mélanger ses élèves. Il serait en train de faire des mathématiques avec un domaine de validité qui serait important à expliciter. En ce sens, un enseignant pourrait légitimement reconnaitre qu'il est très sensé d'*additionner* dans un exercice d'*addition*, $x^2 + x^2 = x^4$ ou de soustraire en contexte de soustraction : $x^2 - x^1 = x$ ; respectivement valide lorsque $x = \sqrt{2}$ et lorsque $x = 2$. Afin de travailler à partir de ces conceptions avec des élèves, Smith (1981) illustre quelques moyens par lesquels on peut faire vivre ces mathématiques. D'abord, utiliser des contre-exemples efficacement. Une vision imparfaite des mathématiques considère autant les méthodes valides que celles qui ne sont pas valides. Ainsi, dans une même séance, on pourrait par exemple présenter des expressions qui se ressemblent visuellement, mais qui ne se simplifient pas de la même façon car elles n'ont pas la même structure. Concrètement, afin de travailler les manières de simplifier des expressions algébriques, on peut insérer des expressions comme $\frac{x+3}{3}$ , qui ne se simplifie pas, parmi un ensemble d'expressions comme $\frac{4x+4}{4}$ qui se simplifie par l'« annulation » des 4.

Ensuite, intentionnellement poser des questions vrai-faux qui mobilisent des fausses lois souvent admises. Ces questions, vrai ou faux, sont volontairement ambigües dans un but d'élucider les règles ou les intuitions qui se trouvent derrière ces ambiguïtés. Un tel vrai ou faux : $\frac{x}{5} - \frac{x+1}{5} = \frac{1}{5}$ peut aider à travailler la distributivité en contexte de fraction, afin de mettre la distributivité en tension avec l'idée qu'un signe négatif a une portée limitée aux éléments près de lui, ou encore qu'on ne puisse pas distribuer plus d'une fois au sein d'un même problème, ou encore qu'on ne distribue qu'uniquement s'il y a des parenthèses. Un second exemple, de vrai ou faux pour travailler les lois des exposants serait $(3a^2)^3 = 9a^6$ qui met en tension les lois des exposants avec une règle qui dit que lorsqu'il y a une parenthèse et des exposants, alors on multiplie les exposants ensembles, ou encore que l'exposant n'affecte le nombre près de lui. On remarque que son approche par les vrai ou faux et par les contre-exemples est toujours réalisée en conscience de deux pôles de l'activité mathématiques : une reconnue comme vrai vers laquelle on veut tendre, et une autre personnelle et imparfaite conçue par les élèves. Smith ajoute qu'en classe, suivre ce type de questions par des discussions en plénière seraient un moyen qui fonctionnent bien pour atteindre et entendre les diverses conceptions présentes au sein de la classe. Dans une perspective de faire vivre des dimensions im-parfaites en classe, une part de travail à l'oral semble donc aussi profitable pour sensibiliser la classe aux variétés des contrastes des idées mathématiques présentes durant ces activités.

Travailler la reconnaissance de patrons mathématiques est une autre avenue possible selon Smith. Par exemple, $(x + y)(3x+2)$ est-ce une somme ou une multiplication ? Et $x + y(3x + 2)$ est-ce une somme ? Cela pourrait mener certaines « lois » mathématiques à être formulées selon leurs contextes d'applicabilité ; on élicite le domaine d'application des manières de calculer que l'on travaille. En effet, en transposant des règles mathématiques d'un contexte à l'autre, on travaille et expose les limites de validité d'un algorithme et on peut potentiellement aller voir les structures sous-jacentes aux fonctionnements des algorithmes, et ensuite développer de nouvelles compréhensions mathématiques... On peut remarquer que Smith (1981) utilise les règles « mal orientées » des élèves, un peu à la manière dont Carman (1971) suggérait d'utiliser ses « misteaks » en éducation. La différence entre ces deux auteurs est leur point d'entrée : Smith part de ses observations d'élèves, tandis que Carman part de ses observations sur les mathématiques.

Enfin, selon Smith, faire découvrir les règles et les non-règles serait aussi une manière de les travailler. Par exemple, calculer la valeur des expressions suivantes : $2^2 + 2^3$, $2^2 \times 2^3$ et $2^5$ permettrait à des élèves d'extrapoler des règles évidentes et de rejeter en même temps certaines non-règles. L'idée d'émettre et de juger explicitement de la validité des non-règles est particulièrement cohérente avec une vision im-parfaite des mathématiques dans laquelle les mathématiques sont aussi ce qui ne se fait que sous certaines conditions. Cela dit, une séance d'activité qui se vit au sein d'une vision imparfaite des mathématiques ne se limite pas à faire découvrir des lois *prédéterminées* qui fonctionnent, ou qui ne fonctionnent pas. On pourrait aussi questionner le fait d'engendrer de telles règles à partir du seul cas de calcul de certaines puissances en base 2. On se garderait ainsi quelques réserves à propos de l'étendue et de nos certitudes envers des règles émises par découverte à partir d'un seul cas. Les suggestions faites par Smith (1981) sont donc à prendre comme possibilités d'amorces à des séances valorisant l'im-perfection et pas comme ultime et seul dénouement possible à des séances valorisant l'im-perfection.

Finalement, voici une phrase qui illustre bien une des manifestations de l'im-perfection mathématiques en classe de mathématiques : « The process of learning mathematics almost inevitably generates mistakes until students can adjust their personal interpretation to matchup with the accepted version. » (Smith, 1981, p. 315) L'apprentissage des mathématiques génère inévitablement des enjeux, jusqu'à ce que les élèves parviennent à ajuster leur interprétation personnelle pour être en cohérence avec les mathématiques acceptées. Smith (1981) nous fournit ainsi une autre façon de voir et vivre l'im-perfection au sein de la classe mathématique. Faire des mathématiques comporte inévitablement une part d'imperfection, et l'ajustement des interprétations personnelles des élèves pour être en cohérence avec les mathématiques acceptées est une manière dont l'im-perfection des mathématiques peut vivre et s'observer en classe de mathématiques. L'apport de Smith (1981) à l'illustration des mathématiques qui seraient faites par l'im-perfection révèle et insiste sur une variété de manières d'*être* en mathématiques qui sont possibles.

### 3.2.8 Synthèse - Comment amener et reconnaître des dimensions d'im-perfection mathématiques à l'école ?

La synthèse de cette sous-section relève différentes dimensions de l'im-perfection qui me permettent de répondre à mes deux premières questions de recherche. Retiennent particulièrement mon attention l'idée de jouer avec l'ambiguïté, de s'intéresser à l'informel, et de travailler les raisonnements inductifs.

Quelle soit déjà présente, ou qu'elle soit à apporter, l'ambiguïté est un thème qui est revenu maintes fois chez les auteurs analysés dans ce chapitre. Brown (1993) rappelle qu'elle a eu un rôle important à jouer dans les développements de l'histoire des mathématiques. Zalavsky (2002) indique qu'elle est présente lorsque des perspectives visuelles rencontrent des approches analytiques. Mamolo (2010) affirme qu'on peut la croiser en contexte de polysémie. Mamolo et Brown ont une perspective particulièrement positive à son égard, la première suggère que l'ambiguïté offre des contextes pertinents pour faire ressortir des conceptions à travailler, et le second appui son importance pour des raisons de correspondance avec sa place en mathématique. Ces auteurs fournissent donc des arguments à la fois de nature éducative, et mathématiques à apporter l'ambiguïté en classe. Dans une perspective de faire des mathématiques im-parfaite avec des élèves, il me semble que cette dimension serait à être exploitée. Amener l'ambiguïté est même cohérent d'un point de vue de l'histoire des mathématiques. Certains passages de l'histoire de la rigueur ont montré que l'ambiguïté est productive et parfois même nécessaire à la création de nouvelles mathématiques.

Un second thème abordé à quelques reprises dans ce chapitre est la communication (en) mathématiques et l'importance du langage informel. Qu'elle soit abordée sous l'angle du symbolisme (Mamolo), du langage parlé (Rowland, 1996), des conventions (nécessaires et/ou arbitraires) (Hewitt, 1999), la communication mathématique semble souvent être vecteur d'im-perfection mathématique. C'est aussi en communiquant et en échangeant qu'on offrira aux élèves l'occasion de débattre, argumenter, expliquer et fournir des contre-exemple à la manière dont Chazan (1993) et Agassi (1980) le suggèrent en évoquant Lakatos (1976). Mais la communication n'est pas indépendante de l'enjeu autour du langage formel qui a été soulevé au chapitre 2. Ce dernier s'accompagne d'un besoin grandissant en interprétation. Il est aussi lié à l'enjeu de l'impossible correspondance parfaite entre les symboles, leurs représentations et leurs interprétations. Il semble qu'il y a toujours de la place pour l'amélioration en communication mathématique.

Par ailleurs, Zalavsky (2002) et Chazan (1993) soutiennent que des mathématiques intéressantes et pertinentes peuvent être faites lorsque des raisonnements « informels » (visuels par exemple) et formels sont sollicités dans une même situation. Cette cohabitation de ces deux approches des mathématiques est cohérente avec la cohabitation régulière de diverses formes de rigueurs en mathématiques qui ont été relevées au chapitre 2. Cette pluralités de rigueur, fait aussi écho au concept d'« utilité » car souvent les mathématiciens ont utilisés la rigueur dont ils avait besoin : la rigueur qui leur était utile. L'utilité serait une conséquence de présenter plusieurs approches mathématiques aux élèves engendrerait. Benn et Agassi ont tous présenté cette idée d'utilité au sens où elle serait une conséquence de leur approche respective. Le côtoiement d'approche de différentes nature (notamment visuelle et déductive) a l'effet d'exposer certaines ambiguïtés qui font écho aux regard im-parfait des mathématiques.

Finalement, les raisonnements inductifs occupent une place importante de ce chapitre et de ce mémoire. Proulx et Beisiegel (2009) montre une sorte de richesse que peux engendrer le raisonnement inductif. Smith (1981) reconnaît l'importance et la nécessité de ce type de raisonnement tout en fournissant quelques exemples exposants les limites de ce type de raisonnement. Pour Rowland (1996), les tâches de généralisations nécessitant des raisonnements inductifs sont au cœur toutes les expérimentations de sa thèse. Dans l'histoire des mathématiques, les raisonnements inductifs ont occupé une place majeure. Lakatos (1984) en a montré les limites, tout en montrant son potentiel, car beaucoup de mathématiques se sont fait partir de conjecture. Les raisonnements inductifs sont donc des moyens parfaits pour faire des mathématiques, tout en n'étant pas garant de leur validité ; ils peuvent maintenir constamment vivant un certain jeu entre la perfection et l'imperfection.

Ce chapitre est loin de clore la question du potentiel pour l'école des mathématiques im-parfaites. Les analyses faites sur ce thème dans ce chapitre et dans le précédent semblent ouvrir des portes vers de nouvelles questions et bien plus que de clore un enjeu éducatif. Dans ma problématique, j'ai mentionné que cette réflexion ne serait pas satisfaisante sans aller voir, au moins un peu, ce qui se passe du côté des élèves. Ma troisième question de recherche était alors :

- *À quoi peut ressembler une situation mettant en valeur une dualité perfection-imperfection des mathématiques, et que ce passe-t-il lorsque des élèves sont mis en situation de vivre les mathématiques de cette manière ?*

Cette question guide les explorations du prochain chapitre. Il reste encore beaucoup à accomplir pour pouvoir y répondre. Le prochain chapitre offre surtout un avant-goût de ce qui pourrait se passer.

# CHAPITRE IV

# EXPLORATIONS EMPIRIQUES[27]

Dans ce chapitre, je vous offre un aperçu de ce qui s'est passé lorsque des élèves ont vécus certaines dimensions d'une mathématique im-parfaite et les manières dont nous avons préparé ces situations.

À ce stade-ci de ma recherche de maitrise, suite aux réflexions et aux multiples possibilités que m'indiquent les chapitres précédents, je réalise qu'afin de *bien répondre* à ma 3e question de recherche à deux volets, il me faudrait peut-être toute une vie en recherche. Ainsi, j'invite mon lecteur à considérer le chapitre 4, non pas comme un chapitre qui validera les idées développées aux chapitre 2 et 3, mais bien comme une poursuite de notre envie, à ma direction et moi, d'explorer un peu la question du point de vue de la pratique. Il s'agit d'un petit aperçu de ce qui peut se passer lorsque l'on tente de mettre des élèves en situation de vivre les mathématiques dans une vision im-parfaite.

Dans la première section, je présente et j'analyse les débuts de ma première analyse conceptuelle dans une perspective de faire des mathématiques sous l'angle de la

[27] Une partie importante de ce chapitre est à l'origine d'une présentation faite au GDM 2018 à Drummondville, voir Maheux & Lavallée-Lamarche (2018).

perfection-imperfection. J'y explicite le contexte de sa création et quelques moments de sa genèse. Au sein de la deuxième section, on présente des fragments illustratifs d’im-perfection lorsque des élèves ont été mis en situation de vivre les mathématiques de cette manière. Précisément, je tente de présenter au moins un passage lié à chacun des thèmes plus importants qui sont ressorties dans les chapitres précédents. La troisième section est un bilan de ce chapitre. On fait un bref retour sur notre approche en lien avec nos expérimentations.

## 4.1 L’analyse conceptuelle vers la recherche d’une approche cohérente avec l’idée d’im-perfection

Cette section indique les manières dont mon regard sur l’im-perfection mathématique a influencé les manières de penser l’expérience des élèves en classe de mathématiques. La première sous-section aborde la notion d’analyse conceptuelle par le faire|mathématique dans une perspective im-parfaite. J’y explicite les balbutiements initiaux de notre approche, que je mets en lien ma vision de l’analyse conceptuelle à l’analyse conceptuelle telle que présentée par Thompson (2008). La deuxième sous-section présente brièvement les analyses conceptuelles qui ont découlées de ce travail de recherche. Elle présente les grandes lignes de quatre analyses conceptuelles construites dans le cadre de cette recherche. Pour chacune j’explique brièvement les manières dont leurs constructions ont été influencées par mon regard sur l’im-perfection mathématique développé dans les chapitres précédents.

### 4.1.1 Les débuts

Dès le début de mon travail avec Jean-François Maheux, mon directeur, on tentait d’imaginer ce qu’une éducation par l’im-perfection mathématique pourrait avoir l’air en termes d’activités et de manifestations mathématiques. On s’inscrivait dans une méthodologie exploratoire dans laquelle on cherchait à trouver comment faire vivre ces dimensions en classe sans préalablement prétendre savoir comment y parvenir.

L'arrivée d'un lieu de collecte de données a déclenché le début d'un travail explicite de préparation et de questionnement pour les séances en classe de mon travail de recherche. J'ai discuté sur les thèmes potentiels que l'on avait envie d'explorer. Nos discussions tournaient initialement autour des thèmes que l'on avait déjà survolés au cours des lectures réalisées pour l'écriture du chapitre 3 de mon mémoire. Nos conversations n'ont pas été enregistrées. J'écris ma démarche vers l'analyse conceptuelle à partir de mes souvenirs, des traces écrites que nous avions gardé de ces séances et des traces de nos échanges courriels. Lorsqu'il a été question de *choisir* le premier thème à aborder en classe, on n'arrivait pas à se fixer. Il y avait tant de possibilités et tellement d'incertitudes sur tout ; qu'est-ce que le *meilleur* thème ; comment les élèves vont-ils réagir ; comment l'enseignante va-t-elle réagir ? On voulait vraiment que notre première visite en pré collecte se passe bien.

On s'est alors demandé si on ne laisserait pas l'enseignant de la classe nous proposer des thèmes. Je me souviens que l'expression : "*All in*"[28], tirée du jeu de cartes Poker, m'est venue en tête. Si une vision im-parfaite des mathématiques est réellement viable en mathématiques, alors tous thèmes mathématiques devraient pouvoir fonctionner avec cette vision. On pourrait donc générer une activité en adéquation avec un regard im-parfait. Laisser le choix à l'enseignant n'était pas l'option la plus sécurisante car cette option semblait réellement comporter un risque d'exposer des limites importantes à notre approche. Cette option semblait, à ce moment-là, être le choix le plus rigoureux et cohérent avec notre recherche et une vision im-parfaite des mathématiques. Si vraiment les im-perfections mathématiques étaient aussi répandues qu'on le croyait, alors peu importe le thème, on allait pouvoir réaliser une bonne séance. Accepter de

---

[28] Il y avait probablement aussi un rire qui est venu avec ce moment. Un rire semblable à celui qu'on aurait avant de se lancer dans le vide ; avoir l'impression de faire de la haute voltige de la recherche.

s'en remettre à l'enseignant pour le choix du thème était une manière de réaliser un premier test sur la viabilité d'un regard im-parfait des mathématiques.[29]

Au travers des discussions avec l'enseignant de la classe, on lui a demandé s'il y avait un thème qui serait plus pertinent pour sa classe. Il nous a souligné que la classe travaillait Pythagore et les nombres irrationnels mais que la classe était davantage restée sur les procédures et les manipulations des objets. On ne savait pas où ce thème mènerait mathématiquement.

Il s'en est suivi un remue-méninge sous la forme de discussions et de rencontres peu formelles. On a commencé à relever des éléments mathématiques qui pouvaient être soumis à des négociations ou discussions de sens. On a réalisé que développer des idées mathématiques autour d'un thème ressemble beaucoup aux analyses conceptuelles que Borasi (1996) a faites au cours de ses travaux. En effet, comme Borasi, on n'y prédéterminait pas nécessairement les contenus, on effectuait beaucoup d'aller-retour, on découvrait même ce qu'on pouvait voir comme des erreurs... On pensait donc bien être sur une bonne voie ; cette méthodologie qu'on a nommée analyse conceptuelle dans une perspective de faire des mathématiques (Maheux et Lavallée-Lamarche, 2018) s'arrimait à notre perspective sur l'im-perfection et permettait une préparation aux séances. Dans la sous-section suivante je vous décris notre approche plus en détails.

### 4.1.2 Analyse sur la notion d'analyse conceptuelle dans une perspective d'explorer l'im-perfection mathématique

En écrivant cette sous-section, je n'ai pas d'autre but que d'exposer explicitement notre manière de réfléchir (de mon directeur et moi) sur : « (…) à quoi peut ressembler une situation mettant en valeur une dualité perfection-imperfection des mathématiques. »

---

[29] Tout en testant la confiance des chercheurs avec leur vision.

J'utilise l'article de Thompson *Conceptual analysis of mathematical ideas : some spadework at the foundation of mathematics education* publié en 2008, comme référent à notre approche par l'analyse conceptuelle par le faire|mathématique dans une perspective im-parfaite. Son article, par les différents thèmes qu'il aborde (cohérence mathématique, sens mathématique et compréhension en mathématique) me permet de situer notre manière de réfléchir à l'im-perfection par rapport aux thèmes abordés par Thompson. Afin d'éclairer les nuances entre notre approche de l'analyse conceptuelle et l'analyse conceptuelle telle que définie par Thompson (2008), j'ai fait l'exercice de prendre sa présentation dans les actes du colloque annuel du *Psychology of mathematics education* (PME) en discutant des différences et ressemblances au fur et à mesure qu'elles s'imposent dans la lecture de l'article.

Dans la première partie de cette sous-section, je présente trois observations de Thompson (2008) qui sont, d'une certaine manière, des axiomes de base de son article à lui. Ces observations, je les reprends et je fais l'exercice de les lier à la méthode d'analyse conceptuelle que l'on tente de développer et que l'on expérimente dans une perspective de faire des mathématiques dans une vision im-parfaite.

Dans une seconde partie, je reprends l'important enjeu pour Thompson (2008) et pour l'éducation mathématique de la cohérence des significations mathématiques. J'explore comment une analyse conceptuelle dans une perspective de faire des mathématiques im-parfaites peut être un tremplin pour l'émergence de sens mathématiques cohérents.

Dans la dernière partie, je reviens sur la méthode d'analyse conceptuelle dans une perspective de ***faire*** des mathématiques en revenant sur une citation choisie par Thompson (2008) pour présenter ce qu'est une analyse conceptuelle. On présente la manière dont cette citation peut être réinterprétée de manière cohérente et compatible avec la perspective de faire des mathématiques im-parfaites.

Avant de se lancer dans une exposition plus fine des différences et ressemblances, il est important de préciser que l'analyse conceptuelle telle que vue par Thompson (2008) peut contribuer à *augmenter la qualité de l'enseignement des mathématiques*. Tandis que dans notre vision des mathématiques, dans une perspective mathématique axée sur l'im-perfection, l'analyse conceptuelle sert l'éducation mathématique motivée par un point de vue épistémologique. Mon but est *d'augmenter l'authenticité* des expériences mathématiques des élèves du point de vue de ce que ça veut dire faire des mathématiques. Il y a donc une différence importante au sein de nos intentions de départs et cette différence transparait dans chacune des nuances décrites ci-bas.

#### 4.1.2.1 Les trois observations de Thompson

La première observation de Thompson (2008) porte sur la raison d'exister des éducateurs mathématiques (enseignants et professeurs). L'apprentissage des mathématiques par les élèves est la raison première de l'existence des éducateurs en mathématiques. Tout ce que les éducateurs des mathématiques font est explicitement ou implicitement lié au fait de faire apprendre des mathématiques. Suivant cette prémisse, la valeur de la contribution des éducateurs en mathématiques dépend donc de la manière dont les contributions alimentent et améliorent l'apprentissage des mathématiques. Cette observation est une manière possible de voir le rôle des éducateurs en mathématiques et cette vision est généralement assez bien acceptée.

Presque avec le même raisonnement, on peut considérer le rôle d'éducateur mathématique différemment en éclairant la situation sous un autre angle. Peut-être est-ce parce que l'on *fait* encore des mathématiques à l'école que nous avons une raison d'être en tant qu'éducateurs en mathématiques. Peut-être... Conséquemment, toutes les actions de l'éducation mathématique devraient être au service de rendre l'expérience mathématique des élèves plus pertinente, renouvelable et même amusante, si l'on suit le même raisonnement que Thompson. Le but, selon notre perspective, serait de maintenir et renouveler la pertinence de l'acte de faire des mathématiques à l'école.

Comment atteindre cet objectif ? Comment choisir ce qui est pertinent ou amusant pour autrui ? Pour l'école ? Comment continuer à *faire* des mathématiques à l'école ? Et comment contribuer à ces expériences ?

L'analyse conceptuelle dans une perspective de faire des mathématiques offre des orientations à ces précédentes questions. Dans cette perspective, aidée de l'analyse conceptuelle, on laisse à l'élève ou à la classe[30], le soin de choisir son propre agenda. Agassi le présente ainsi :

> And agenda-making is active student participation, and educational psychology is unequivocal about certain matters: there is no better trainning than by active participation, trial and error, etc. Here a few writers in different fields collude: Wiener in cybernetics, Piaget in developmental psychology, Chomsky in psycholinguistics, Popper in scientific method; they all favour active participation. (Agassi, 1980, p.30)

Sous cet angle, le rôle de l'éducateur mathématique n'est plus de contribuer en proposant des articulations de significations mathématiques avec la meilleure qualité ou cohérence possible. Son rôle est de proposer des pistes, des terrains, des sous-bois, pour faire des mathématiques les plus négociables possible. L'éducateur mathématique se doit de proposer des options d'agenda qui permettront d'ouvrir des discussions et de faire participer l'élève à son propre cheminement. L'analyse conceptuelle dans cette vision du rôle de l'éducateur devient une méthode de défrichage mathématique pour l'éducateur mathématique, une méthode pour proposer différentes avenues mathématiques envisageables. Elle est un point de départ pour des discussions et des travaux mathématiques. La seconde observation de Thompson n'a pas besoin d'être modifiée, ni nuancée pour venir soutenir le potentiel apport des analyses conceptuelles axées sur *faire* des mathématiques :

> (T)he vast majority of school students rarely experience a significant mathematical idea and certainly rarely experience reasoning with ideas (Stigler, Gonzales, Kawanaka, Knoll, & Serrano, 1999; Stigler & Hiebert,

[30] La classe inclut les élèves et son personnel enseignant.

> 1999). Their experience of mathematics is of procedure after procedure. This is not to say that various curricula do not aim for students to learn ideas. Rather, students do not experience any that are significant. (Thompson, 2008, p. 32)

Par l'utilisation du terme "*significant*", Thompson (2008) réfère aux idées qui sont fondamentales pour *apprendre* d'autres idées mathématiques. Il importe de préciser que dans la perspective de faire des mathématiques telles qu'on l'imagine, il est question d'explorer des idées qui sont signifiantes pour l'élève ou pour la classe. Il n'y a pas explicitement dans le discours de cette perspective la notion d'*apprendre*. Bien qu'*apprendre* peut être vu comme une conséquence inévitable de faire des mathématiques. L'analyse conceptuelle visant le *faire* des mathématiques propose des idées qui représentent des directions ou des leviers pour *faire* des mathématiques dans le but de proposer des expériences où les élèves peuvent raisonner librement avec des idées. Là où je vois que Thompson (2008) insiste sur la rencontre des significations pertinentes pour l'apprentissage et la construction des autres significations mathématiques, nous, on insiste sur la proposition d'occasions pour raisonner sur des idées non prédéterminées par l'enseignant ou le curriculum ; donc, faire des mathématiques qui seront choisies par la classe. Cette différence découle du fait que, l'éducateur mathématique ou l'enseignant, n'est pas dans ma perspective en position d'expert ou de supériorité sur le cheminement de l'élève. Les acteurs de la classe travaillent ensemble tout en ayant des rôles différents.

Les sens *développés*[31] par les élèves au travers de ces occasions de faire des mathématiques ne sont pas déterminées *a priori* par les éducateurs au sein de l'analyse conceptuelle. Le développement des sens "*prévus*" ou développement des travaux mathématiques est laissé entre les mains des élèves (ils sont imprévus - on pourrait les qualifier d'émergents ou spontanés). Le rôle de l'analyse conceptuelle selon la manière

---

[31] Remarque : On peut douter de l'existence des *significations mathématiques développées*.

qu’on propose est de développer un paysage mathématique où la classe pourra aller là où elle le voudra. Ça ne veut pas dire que l’on fait n’importe quoi, n’importe comment. Ça veut dire que l'on tente de *faire* des mathématiques en classe, à la manière que Lakatos (1976) pourrait le suggérer : on raisonne, on cherche, on se pose des problèmes, on valide, on argumente, on tente de convaincre, on débat, on crée des contre-exemples, on conjecture .... On cherche à faire des mathématiques qui sont caractérisées par leur Histoire, l'histoire de la classe, leurs manières de faire, les questions que l'on se pose, les problèmes que l'on se pose.... L'analyse conceptuelle dans ce contexte est le point de départ pour la recherche d'expériences mathématiques faisant avancer les mathématiques que l'on fait, par rapport aux mathématiques que l'on faisait hier.[32] Pour revenir sur l'observation de Thompson (2008) : raisonner avec des idées mathématiques n'est pas rare ; raisonner devient inévitable dans une perspective du *faire* des mathématiques. Enfin, voici la troisième observation de Thompson :

> (T)oo many mathematics teachers at all levels spend too little time at the outset of teaching a topic on having students become steeped in ideas and meanings that are foundational to it. (...) Teachers are too eager to condense rich reasoning into translucent symbolism. (Thompson, 2008)

Il pourrait être intéressant de discuter et de questionner les facteurs contribuant à cette tendance que Thompson a pu observer. Brièvement, dans la première observation de son article, il justifie son rôle d’éducateur mathématique dans le système de l'enseignement-apprentissage de l'école. Son rôle est d'alimenter ce système... D'autre part, dans sa troisième affirmation, il observe que ce système génère des manières de faire par les enseignants qu'il semble ne pas approuver "*too many mathematics teachers*...", "*Teacher are too eager*...". On peut formuler l'hypothèse que des éléments des expériences respectives et communes des enseignants les poussent à agir à leurs manières. Quelque chose me rend mal à l'aise dans cette observation/critique de Thompson. Pourquoi ne pas contester ce système, plutôt que de l'analyser de

[32] On s'éloigne du paradigme de l'enseignant-apprenant ou éducateur-éduqué.

l'intérieur ? On pourrait penser que c'est un autre des rôles possibles de l'éducateur mathématique ; *penser* l'éducation mathématique "*outside the box*" pour reprendre un vieil adage. Il justifie son rôle et ses actions par ce système, mais dénonce tous les autres acteurs de ce même système. Cette préoccupation de l'emplacement de l'observateur peut être vue de manière cohérente avec le chercheur De Lagasnerie, pour qui en 2016 lors d'une conférence, le devoir éthique de tout chercheur en sciences sociales[33] est de ne pas reproduire des systèmes (d'oppressions) en place.

Dans notre façon de voir l'analyse conceptuelle, on cherche à faire baigner les élèves dans un paysage d'idées, d'implications et de conséquences potentielles mathématiques. On développe cette méthode dans le but de valoriser le processus de faire des mathématiques riches par lesquelles la classe est sollicitée dans ses questionnements, ses tiraillements et ses justifications. L'idée d'une issue fixe à atteindre est moins importante, que l'expérience du processus d'actions mathématiques. Ces actions prennent naissances dans les avenues proposées par l'analyse conceptuelle qui fournit des possibilités d'avancées, mais aussi de faire des pas en arrière vers des concepts fondamentaux. On est à la fois en train de densifier et d'étendre le paysage mathématique. On ne cherche pas à réduire, ou rendre "propre" les mathématiques que l'on fait. Si elles deviennent propres ou translucides, ce sera sous l'initiative de la classe. Il est probable que cette translucidité mènera vers de nouvelles questions.

Certains mathématiciens diront que les mathématiciens doivent (ou peuvent selon Wiener, 1915) éviter de se questionner sur les sens des objets que l'on manipule, précisément sur la nature des nombres (Gowers, 2011). Cette idée de Gowers (2011) est nuancée et appuyée par son auteur dans un chapitre entier. Elle se résume à « un objet mathématique est ce qu'il fait » (Gowers, 2011, p. 18) et rappelle que même si

---

[33] Rappelons que l'éducateur en mathématiques est aussi souvent considéré comme chercheur en science sociale.

tous ne seront pas nécessairement en accord avec lui, il suggère que c'est une attitude possible à adopter. Comme cette attitude est partagée sans faire l'unanimité dans la communauté des mathématiciens et éducateurs mathématiques, il est intéressant d'en discuter et de voir comment cette idée peut être mise en relation avec la méthode d'analyse conceptuelle dans une perspective de faire des mathématiques.

Dans l'esprit où Thompson (2008) fait sa dernière observation, je me demande comment en tant qu'éducateurs en mathématiques, on peut soutenir l'état de *ne pas comprendre* ou soutenir l'acte de refuser de *se questionner* sur ce que l'on crée ou découvre. Si l'acte de questionner fait partie de faire des mathématiques, alors faire des mathématiques en classe peut impliquer de questionner nos propres manières de faire sans négliger les concepts qui sous-tendent ces manières de faire. En ce sens, limiter les possibilités de questionnements mathématiques, c'est limiter les raisonnements mathématiques possibles et donc les expériences mathématiques possibles. La méthode d'analyse conceptuelle dans une perspective de ***faire*** des mathématiques se positionne en opposition avec des limitations prédécidées et surtout justifiées par des individus hors de la classe. La liberté de questionnements et d'explorations est totale et est ouverte à la négociation dans la classe ; l'absence du curriculum est ce qui peut la caractériser de radicale par certains.

Le paysage mathématique proposé par l'analyse conceptuelle dans une perspective de faire ne représente pas une photo en deux dimensions, mais bien un paysage avec des perspectives, des textures, des reliefs, des dégradés de couleurs, du dynamisme, du beau et aussi du laid ; de la lumière et des ombres ; des détails et une vue d'ensemble. L'analyse conceptuelle du faire nous éloigne de tout produit mathématique fini et *translucide*. L'écriture d'une analyse conceptuelle écrite dans une perspective de faire des mathématiques se veut une expérience immersive dans un monde de possibilités mathématiques où les questionnements foisonnent et où il y a de l'espace pour des investigations claires et moins claires. Il n'en tiendra qu'à l'enseignant, ou l'éducateur, de proposer, d'étaler, de mettre la table, ou de présenter ce paysage à la classe afin de commencer des explorations ensemble, un pas à la fois. Simultanément cette manière de faire des mathématiques soutient l'idée de faire des mathématiques de manière non-violente au sens avancé par Guillemette (2017).

Comme dans toute aventure vécue par un groupe social, il y aura dans la classe des leaders qui se succéderont. La classe vivra des *impasses*, des moments plus clairs, des moments de *doutes*... On dit souvent que c'est au travers des *épreuves* que nous avançons. L'analyse conceptuelle axée sur le faire des mathématiques propose d'explorer de *beaux* paysages *accidentés*. Ce qui n'est pas si éloigné de ce que Brown (1993) suggérait pour apprécier les chemins qui mène à des culs-de-sac. On dit aussi souvent que c'est par nos choix que nous nous définissons. L'analyse conceptuelle axée sur faire des mathématiques propose un paysage où la classe peut *choisir* son expérience.

Ceux qui ont eu l'occasion de monter des montagnes pourront peut-être reconnaitre cette analogie : l'analyse conceptuelle de « faire des mathématiques » peut être vue comme une carte d'un grand parc comportant plusieurs sommets, plusieurs sentiers, plusieurs épreuves potentielles... Tout n'est pas connu. Tout est même potentiellement changeant. La rencontre de surprises et d'imprévus est possible. Les sommets sont des options parmi tant d'autres, le but étant rien de plus que d'explorer ensemble le territoire proposé, de le cartographier, d'expliquer ses fonctionnements, de justifier sa cohérence, sa non-cohérence, de repousser ses limites... Ceux qui se souviennent d'une vue sans horizon au sommet d'une montagne entourée de nuages gris opaques partagent peut-être cette pensée : la destination est beaucoup moins importante que les histoires vécues dans le chemin parcouru. Comme Fontenelle (1780) le soulignait dans ses dialogues, c'est la recherche qui est importante :

> Toutes les fciences ont leur chimere, après laquelle elles courent fans la pouvoir attraper ; mais elles attrapent en chemin d'autres connoiffances fort utiles. Si la Chymie a fa Pierre Philofophale, la Géométrie fa Quadrature

> du Cercle, l'Aftronomie fes Longitudes, les Mécaniques leur mouvement perpétuel ; il eft impoffible de trouver tout cela, mais fort utile de le chercher. (Fontenelle, 1780, p. 298)

Dans cette façon de voir la construction de l'analyse conceptuelle, l'objet de la recherche en mathématique est beaucoup moins important que l'acte, le geste, la mise en action de chercher et les réflexions en actions qui en font partie. En générant des analyses conceptuelles dans cette perspective, on n'axera pas vers un chemin précis, ou une signification précise à développer. On axera plutôt sur un terrain de discussion à négocier et sur des ensembles de significations variées à explorer.

#### 4.1.2.2 La cohérence des sens mathématiques

Trois commentaires de Thompson sur les sens et la cohérence ont été sélectionnés dans le but de clarifier la place du sens, de la cohérence et du curriculum dans la méthode de l'analyse conceptuelle dans une perspective de *faire* des mathématiques. D'entrée de jeu, Thompson souligne la place importante de la cohérence dans tous les échanges entre n'importe quels acteurs. Avec l'utilisation de l'enchainement de " always present in any discussion of ideas", on peut presque voir un côté universel et inévitable de la cohérence lorsque l'on communique des idées : « The issue of coherence is always present in any discussion of ideas. Ideas entail meanings, meanings overlap, and incoherence in meanings quickly reveals itself. » (Thompson, 2008, p. 32) Cette façon de voir les significations ancrées dans les idées supporte l'option de faire discuter des idées mathématiques en classe. Les incohérences qui se révèlent d'elles-mêmes au travers de discussions pourront être des enjeux de classe. Comme elles se révèlent "*toujours*" d'elles-mêmes au travers des discussions, en tant qu'éducateur des mathématiques, il n'est pas nécessaire, *a priori*, de les intégrer dans l'analyse conceptuelle de manière à les *éviter*, ou les contrôler. Au contraire, on veut les connaître pour mieux les exposer. Lorsque des incohérences surviennent en classe, elles se révèlent et peuvent être négociées et transformées si la classe manifeste cette envie de cohérence. Dans ce contexte, s'il existe des incohérences entre des idées développées, leurs rencontres seront inévitables. Surtout, pour l'éducateur dans l'action, elles seront indicatrices d'éléments mathématiques à travailler.

L'analyse conceptuelle, tel que Thompson (2008) la perçoit, propose une cohérence possible et déjà toute faite avant la rencontre même d'une classe avec le concept ciblé. Dans la perspective de faire des mathématiques, le poids de la cohérence est entre les mains de la classe. La cohérence est enjeu de négociation. Il n'y a pas de concepts ciblés *à apprendre*, il y a juste un thème à explorer.

En ne planifiant pas scrupuleusement toutes les mathématiques que l'on fait en classe, il est légitime de se questionner sur la progression des concepts mathématiques explorés, sur l'efficacité des mathématiques que l'on fait et sur la place du curriculum dans cette perspective. Sur ces enjeux, Thompson (2008) précise:

> Effectiveness might be a consequence of coherence, but it cannot define it. Nor does coherence imply logical progression of topics, at least from a mathematical point of view (Thompson, 1995). (...) Ultimately, coherence of a curriculum (intended, implemented, or experienced) depends upon the fit of meanings developed in it. (Thompson, 2008, p. 32)

Ainsi, de la cohérence en mathématique peut découler une efficacité mathématique. L'efficacité mathématique n'est donc pas nécessaire pour qu'une activité soit cohérente. On peut alors mettre la dimension de l'efficacité de côté au sein de notre analyse conceptuelle et laisser cette dernière entre les mains de l'action dans la classe si la classe désire s'y pencher. De plus, on peut aussi penser que le concept d'efficacité est propre à un contexte, à un lieu, à une action précise, à qui juge l'action... Se positionner sur cette idée d'efficacité avant toute activité avec les élèves concernés peut être considérée contradictoire avec le concept même d'efficacité.

De plus, selon Thompson (2008), la cohérence n'implique pas nécessairement une progression logique des sujets mathématiques. Très bien. On peut alors faire simplement des mathématiques, les mathématiques qui nous intéressent, sans qu'une "liste" ordonnée de sujets mathématiques soit imposée. On peut voir le curriculum comme un genre de liste de sujets mathématiques que l'on doit absolument travailler pour faire les bonnes mathématiques de notre système. Puisque l'on n'a pas besoin de progression logique de sujets, le curriculum ne serait alors pas nécessaire pour faire une activité mathématique cohérente. Si notre but est davantage de faire des mathématiques authentiques, plutôt que d'apprendre les mêmes significations mathématiques que tous, alors il ne semble pas exister de justification à l'existence d'un curriculum tel qu'il est dans sa forme actuelle selon notre manière de voir le rôle de l'éducation mathématique. On peut imaginer que l'on pourrait oublier le curriculum présent, pour nous permettre de vivre l'exercice de faire des mathématiques authentiques. Dans une perspective de faire des mathématiques en classe, ce qui est important serait d'arriver à générer des significations mathématiques en adéquation les unes avec les autres, peu importe *où* elles se *situent* dans le système des mathématiques des mathématiciens ou dans le système des mathématiques scolaires. L'analyse conceptuelle dans ce contexte est de proposer un espace où le développement de ces significations cohérentes entre elles est possible.

#### 4.1.2.3 La méthode d'analyse conceptuelle dans une perspective de faire des mathématiques

Enfin, un dernier commentaire de Thompson sur le sens de *comprendre* dans lequel on peut voir qu'il ne précise pas vraiment ce sens tout en renforçant son importance en éducation mathématique :

> The National Mathematics Advisory Panel final report calls repeatedly for balanced emphases upon conceptual **understanding** and procedural fluency. But it does not explain what conceptual **understanding** is or how one might teach for it. NCTM's Principles and Standards for School Mathematics repeatedly extols the community to have students **understand** the mathematics they learn so that they are better prepared to **understand** ideas they encounter in the future. But in not one of 857 instances in which the Principles and Standards uses "**understand**" and its derivatives does it explain what "to **understand** X" means. "**Understand**" is one of mathematics education's most primitive terms. (Thompson, 2008)

Malgré la longueur de la citation, et les sept instances de ''*understand*'' répertoriées (pour reprendre l'argument de Thompson), il n'a pas proposé de signification ni de précision sur le sens du mot comprendre. D'un point de vue de la recherche en éducation mathématique, on peut voir comme un avantage de lier l'éducation mathématique au faire des mathématiques plutôt qu'aux idées d'apprendre-comprendre ou enseigner qui sont des termes si difficiles à définir. Beaucoup d'éléments observables peuvent témoigner des possibilités de faire des mathématiques.[34] L'acte d'apprendre peut être considéré comme beaucoup moins observable. On évite ainsi, de manière presque opportuniste, de se questionner sur la difficile, grande question de la signification de comprendre quelque chose. La question de : « Qu'est-ce que, ou comment comprendre les mathématiques ? » est remplacée par des questions dont le cœur est de différente nature. Notamment : Qu'est-ce que faire des mathématiques ? Ou comment faire des mathématiques ? Comprendre les mathématiques est remplacé par le faire des mathématiques. Il semble que des réponses aux secondes questions sont accessibles par les cinq sens de l'être humain, ce qui est moins le cas lorsque l'enjeu est d'accéder à ce que *comprend* autrui.

Les exemples d'analyses conceptuelles de la sous-section suivante sont nos premières tentatives d'analyses conceptuelles dans une perspective de faire des mathématiques. Pour chacune d'elles, j'expliquer brièvement es chapitres précédents nous ont influencé.

### 4.1.3 Éléments de planification des séances

Suivant notre désir de poursuivre notre réflexion sur l'im-perfection mathématiques sur le terrain pratique, j'ai réalisé quatre analyses conceptuelles. Le but principal de nos explorations empiriques est d'éclairer le premier volet de ma dernière question de

---

[34] J'ai l'impression qu'il est plus facile d'être parfaitement d'accord sur faire des mathématiques, que sur s'il a appris des mathématiques. Cette idée pourrait surement être développée davantage (et sur beaucoup de pages...)

recherche, qui pourrait se formuler ainsi :

- *À quoi peut ressembler une situation mettant en valeur une dualité perfection-imperfection des mathématiques ?*

Dans cette sous-section, on illustre à quoi peuvent ressembler les planifications des situations mettant en valeur la dualité perfection-imperfection des mathématiques. Quatre séances ont été planifiées de manière indépendante. Pour chacun des thèmes, j'explicite les manières dont les éléments du regard sur l'im-perfection présentés dans les chapitres précédents ont influencé la construction de ces analyses. Elles sont à considérer comme point de départ des possibilités autour de ces thèmes. Chacune d'elle peut très bien être enrichie, et probablement de multiples manières. Postériori à nos séances, on a constaté que nos quatre analyses conceptuelles étaient globalement construites selon quatre axes de questionnements dont leur ordre séquentiel et leur importance au sein des planifications ne sont pas définis.

- Quelle est la nature des objets mathématiques impliqués ? (Ses diverses formes de représentations, d'écriture, l'historicité des objets impliqués ?)
- Algorithmiquement, quelles opérations peuvent être sollicitées ? Dans quel registre de représentations ? Quelles sont les limites et les possibilités des algorithmes ?
- Quelles extensions pour ces objets mathématiques ? Pouvons-nous nous poser de nouvelles questions dans des contextes différents ?
- Quelles preuves avons-nous de ces objets ? Ont-ils une existence empirique ?

On peut remarquer que ces quatre axes des questionnements représentent, d'une certaine façon, des éléments de réponses à ma seconde question de recherche :

- *Comment un regard sur la perfection-imperfection des mathématiques nous conduit-il à penser l'éducation mathématique des élèves ?*

Finalement, mon regard sur la perfection-imperfection des mathématiques m'a conduit à penser l'activité mathématique des élèves autour de ces quatre questions. Les sous-sections qui suivent illustrent plus concrètement comment un regard sur l'im-perfection mathématiques peuvent s'avérer riches pour penser le contenu des séances en mathématiques avec des élèves.

#### 4.1.2.1 Nombres irrationnels

Ce thème imposé par l'enseignant qui nous accueillait s'arrime très bien avec notre thème de recherche. Dans le 2e chapitre de ce mémoire, nous avons pu observer que les changements controversés dans l'histoire des mathématiques sont souvent porteurs de certaines caractéristiques des dimensions parfaites et imparfaites. Et l'arrivée des nombres irrationnels dans l'histoire des mathématiques a été controversée puisqu'elle a mis fin à l'entreprise pythagoricienne de prouver que « tout était nombre ».

Ensuite, avec la notion de développement décimal infini intrinsèquement lié au nombre irrationnel, vient le concept de l'infini. Par la nature « inatteignable » de l'infini, ce concept semble être porteur de quelque chose de vague et mal défini et donc porteur d'imperfection. On peut aussi voir une forme de paradoxe à l'idée qu'un nombre fini de symboles puisse représenter un nombre avec une infinité de chiffres, on peut aussi penser à l'infini potentiel et actuel… Bref, c'est quelques réflexions initiales m'ont encouragé à exploiter ce thème. Voici une série de réflexions que j'ai eu autour de ce thème :

- Les nombres irrationnels sont (souvent) définis par la négative (ex. Ils ne sont pas rationnels, ne peuvent s'écrire comme un rapport d'entiers, etc.).
- On peut « produire » avec précision (géométriquement) $\sqrt{2}$ ou $\pi$ par exemple sans pour autant pouvoir les mesurer exactement.
- On pense à des nombres précis, mais dont le développement décimal est infini, voire même inconnu.

- Comment multiplier des nombres non rationnels en écriture décimale ?
- Que nous dit la loi des exposants concernant la rationalité de $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$ ?
- Comment prouver que deux longueurs sont incommensurables ?
- Comment prouver l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et, en particulier, comment les Grecs l'ont-ils prouvée ?
- À quoi ressemble l'écriture des nombres irrationnels sous forme de fractions continues ?

Ces éléments nous ont servi à imaginer des déclencheurs, des questions, des relances, pour l'animation en classe. Un certain nombre de « tâches » possibles ont donc été imaginées et minimalement préparées en évitant de les prédéterminer. En voici quelques exemples :

- Discuter de « l'existence » de ces nombres.
- Faire produire des définitions et les examiner.
- Faire produire une longueur de $\pi$ ou $\sqrt{2}$ et tenter de la mesurer.
- Faire chercher la meilleure écriture décimale d tel que $d^2 \approx 2$.
- Présenter un pliage conduisant à une contradiction pour $\sqrt{2}$ rationnels.
- Faire construire $\sqrt{2}$, puis $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, etc. (spirale de Pythagore).
- Discuter des valeurs numériques données par les calculatrices pour $\sqrt{2}$, $\sqrt{13}$, etc.
- Tenter de multiplier à la main $\sqrt{2}$ x $\sqrt{2}$ pour trouver 2.

Toutes ces explorations ont été envisagées *pour une même séance*. Le but n'est pas, évidemment, de toutes les réaliser. La majorité de ce travail a été réalisé par des élèves seuls ou en plénière avec toute une classe.[35]

---

[35] Après nos expérimentations, une suggestion supplémentaire d'activité nous a été proposée. Cette idée est issue du dialogue entre Socrate et l'esclave Menon. Afin de concrètement mettre les élèves en action : remettre un carré de côté unitaire aux élèves et leur demander de construire un carré du double de l'aire

#### 4.1.2.2 Géométrie fractale

Nous avons choisi le thème de la géométrie fractale aussi en nous inspirant de l'histoire. Si l'arrivée des géométries non-euclidiennes ont été si controversées, peut-être que l'arrivée d'une géométrie différente pour les élèves seraient aussi une expérience faisant ressortir certaines dimensions d'im-perfection. Pour le déroulement de cette séance, on s'est inspiré de Borasi(1993) et avons tenté de faire énoncer par les élèves une bonne définition de ce que serait « une fractale ». Aussi, l'apparence d'une fractale, son esthétique n'a pas l'allure de ce qu'on pourrait s'attendre traditionnellement en mathématiques. On se demandait si les élèves seraient sensibles à une forme de beauté de ces formes géométriques. Enfin, on trouvait intéressant de travailler à faire une définition rigoureuse à partir de leur perspective visuelle. On y voit une forme de jeu entre la perfection de la meilleure définition possible et l'imperfection de nos sens qui permet tout de même de tendre vers la perfection d'une définition rigoureuse…

Encore à la recherche de « bugs » mathématiques, voici quelques réflexions que j'ai eu autour de ce thème :

- Présence de changements d'échelles, de répétitions et de similarités
- À partir d'un même « motif » deux (ou parfois plusieurs) itérations ultérieures différentes sont possibles et valides. (voir fig. 4.1, page suivante)
- On peut voir que certaines fractales sont « auto-référentiels », d'autres non.(voir fig. 4.2, page suivante)
- Paradoxe d'un périmètre infini dans un espace fini.
- Les fractales peuvent être vues comme des fractions de dimensions.

---

du carré initial. Cette idée est intéressant d'un point de vue de l'im-perfection afin de faire travailler les mathématiques à la fois dans une perspective visuel et déductive.

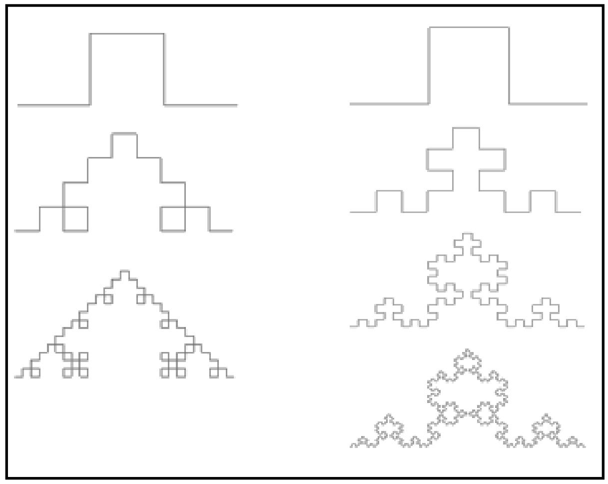

Figure 4.1 – Exemple de deux fractales différentes ayant le même motif de départ

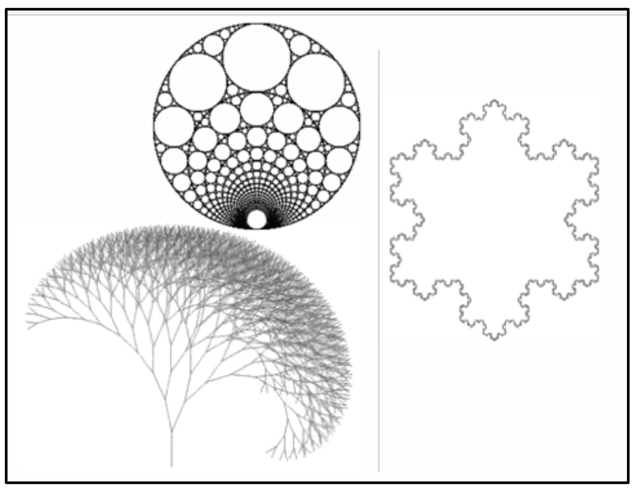

Figure 4.2 – Différents types de fractales

Ces éléments doublés de mon intention de travailler la définition d'une fractale, nous a mené à monter une présentation visuelle qui j'espérais, nous conduirait à la définition d'une fractale *faites par les élèves*. Voici quelques questions qui ont été présentées aux élèves lors de notre séance (voir fig. 4.3, page suivante) :

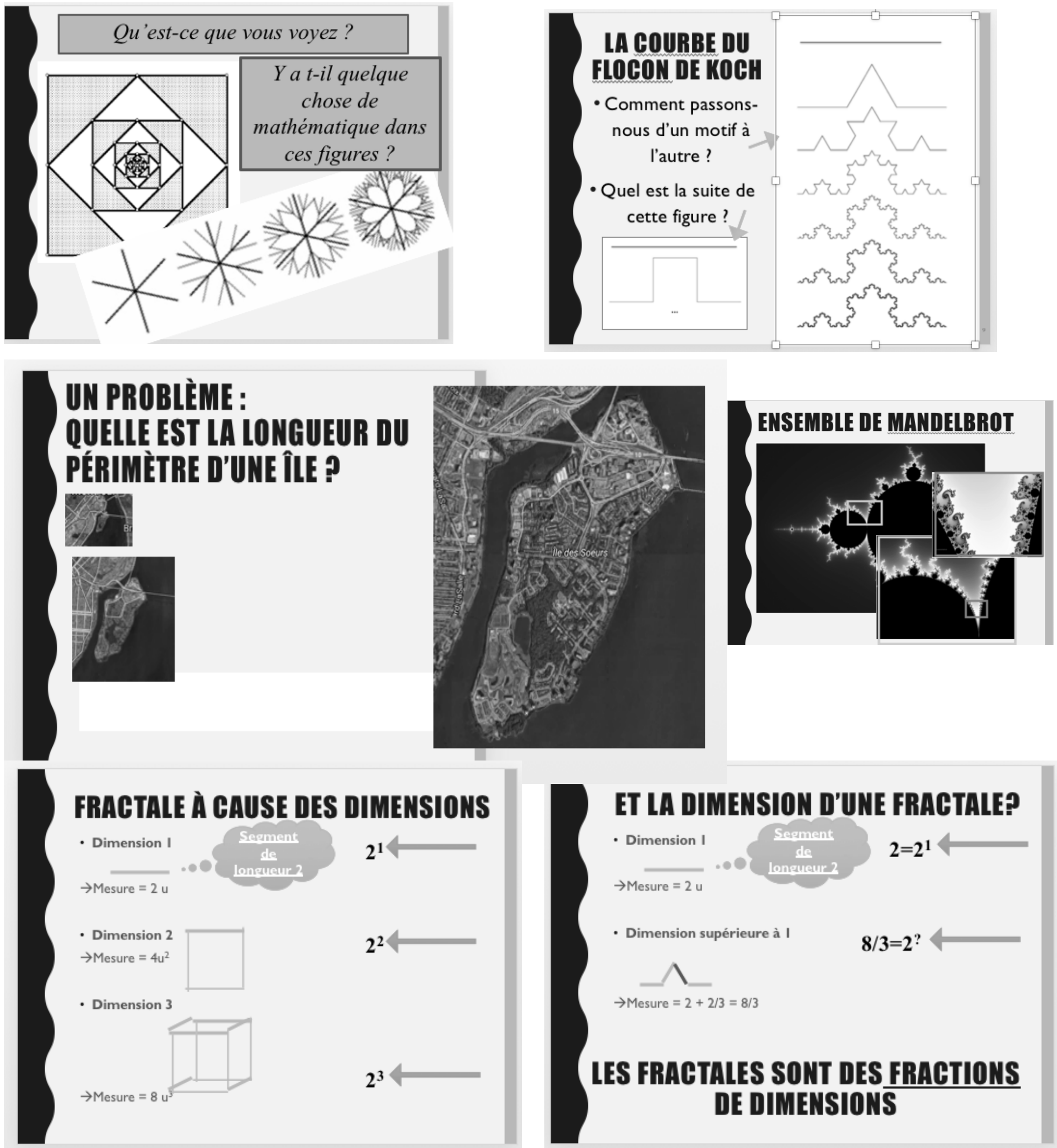


Figure 4.2 – Extraits de la séance sur les fractales

Ces diapositives n'ont pas toutes été présentées telles quelles. Elles ont été préparées dans le but d'être des éléments de discussions et d'actions *par* les élèves.

4.1.2.3 Création de listes de nombres

J'ai choisi ce thème avec l'intention principale de faire vivre un côté humain aux mathématiques. Dans l'Histoire, la nominalisation des nombres a mené à la création de beaucoup de nouveaux nombres. On espérait que les élèves se permettent aussi ce type de création. La séance a été pensée de sorte à ce que les élèves soient autonomes et en dyade. En cohérence avec l'approche de Rowland (1996), beaucoup d'enjeux autour de généralisation étaient présents dans les tâches, j'espérais ainsi accéder à leurs échanges verbaux et remarquer l'utilisation de langages vagues soutenant leur activité mathématique. L'activité commençait par une première partie où les élèves devaient programmer des listes de nombres, puis dans une deuxième partie on les amenait à programmer une suite de nombres qu'ils créeraient et nommeraient d'après leur nom.

Voici les premières questions de programmation :

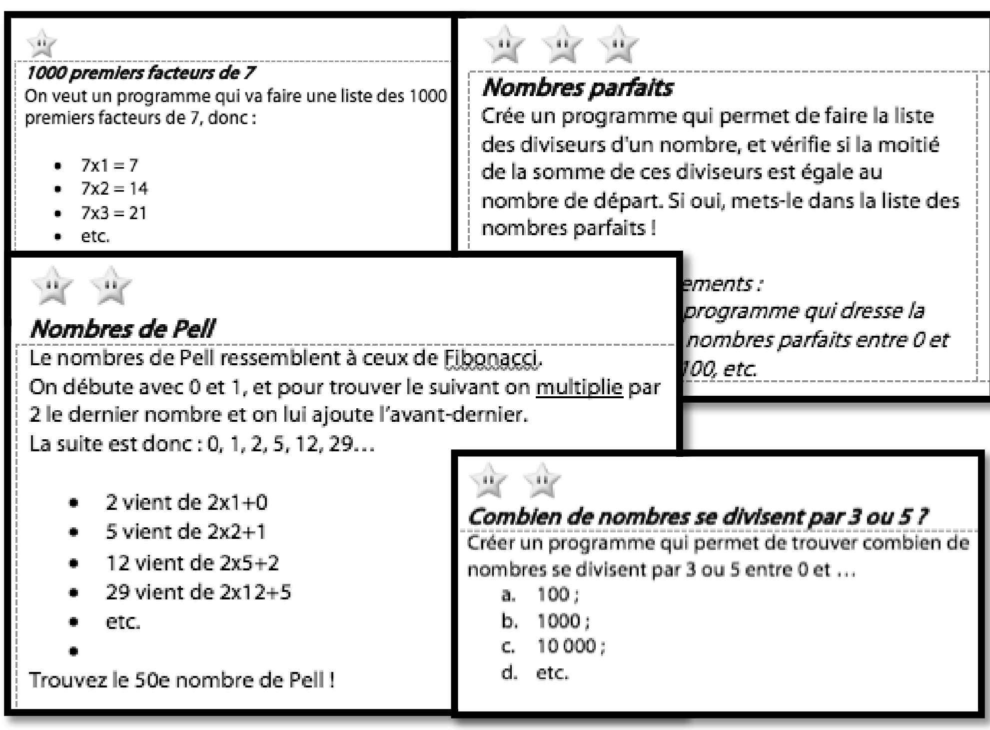


Figure 4.3 – Quelques questions de programmation

Certaines de ces questions menaient explicitement vers des questions de prolongements où les processus de généralisation étaient explicites. Par exemple, la question de prolongement à combien de nombre se divisent par 3 ou 5, était : *Il y a une répétition curieuse dans les réponses ! Comment l'expliquer ?*

Voici la suite de cette première phase d'activité :

- À ton tour de créer les nombres de "________________________________" (mets ton prénom ou ton nom par exemple). Invente et écris leur définition :
- Peux-tu, à la main, trouver les 2 ou 3 premier nombres de la suite que tu viens d'inventer ?
- Crée un programme qui dresse la liste (ou le début de la liste) de ces nouveaux nombres !
- Tes nombres ont-ils des propriétés particulières que tu n'avais pas prévues ? Par exemple :
  - Y a-t-il autant de nombres pairs que de nombres impairs ?
  - Y a-t-il des nombres carrés ou triangulaires ?
  - Y a-t-il des nombres de Fibonacci ou de Pell (voir le défi #4) ?
  - … Remarques-tu d'autres particularités ?

4.1.2.4 Les fractions étranges

Ce dernier thème a été choisi en regard de la richesse qu'on a pu observer autour de cet objet dans la section 2.1 de ce mémoire. On se demandait si une richesse similaire pourrait être observé en classe de mathématiques au secondaire et si cette richesse pouvait être créée *par* les élèves. Contrairement aux deux thématiques précédentes, pour cette quatrième séance, j'ai fait le choix de radicalement non-prédéterminé cette séance – l'enseignant qui prêtait sa classe a d'ailleurs donné complètement carte blanche pour une séance.

Comme point de départ, j'avais cette équation : $\frac{16}{64} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$ qui était doublée de la question suivante : « Pouvons-nous en trouver d'autre ? »

Ce qui suit est la liste d'actions possibles que j'avais en tête en vue de la séance. Cette liste d'actions découle d'une vision expérimentale des mathématiques.

- Essayer des exemples ; voir que ça marche (ou pas) ; voir ce que ça donne; …
- Chercher des limites; exploration plus organisée, systématique, informée, orientée/ Ou s'imposer des limites, comme se limiter qu'aux fractions à 4 chiffres.
- Analyser le phénomène ; regarder comment / pourquoi ça marche, sur des cas ou de manière générale
- Formuler une explication, ou une conjecture à partir d'exemples qui fonctionnent.
- Transformer quelque chose; changer les règles, définitions, conventions, chercher des alternatives (e.g. procédure plus simple ou plus rapide)
- Créer des nouveaux objets, ou de nouvelles procédures.
- Trouver des exemples où ça marche.
- Trouver un contre-exemple à une règle.

L'idée ici, comme dans les autres analyses conceptuelles, n'était pas de faire apprendre quelque chose sur les fractions étranges, mais bien de réinvestir ce que les élèves savaient (peut-être) déjà sur les fractions et d'utiliser leurs expériences antérieures au service de l'exploration mathématique de la classe autour de l'objet fraction étrange. En ne prédéterminant (très peu) cette séance on s'approche un peu plus de l'enseignement par agenda que suggère Agassi.

## 4.2 Explorations empiriques

Cette section présente un exemple d'une brève analyse d'exploration empirique avec des élèves. Elle constitue un aperçu de ce à quoi ressemble une situation mettant en valeur les dimensions im-parfaites des mathématiques. Je vous y présente les contextes de nos expérimentations, suivi d'un bref récit et enfin mes analyses d'un petit extrait, juste pour *voir* ce qui peut se passer.

### 4.2.1 Séances et classes d'exploration

Chacune de nos analyses conceptuelles a permis la mise en œuvre de situations mettant en valeur la dualité perfection-imperfection des mathématiques avec des élèves. Des six séances réalisées, trois ont été faites sur les fractions étranges et les trois autres correspondent aux thèmes des fractales, des nombres irrationnels et de créations de listes de nombres ayant certaines propriétés. Elles ont toutes été réalisées en présence de l'enseignant titulaire de la classe et d'au moins un chercheur qui anime.

Les nombres irrationnels, les fractales et les nouveaux nombres ont été abordés dans une classe de première année de second cycle du secondaire dite 'enrichie' à Montréal, l'enseignant de cette classe s'était porté volontaire auprès d'un conseiller pédagogique pour des activités mathématiques extracurriculaires.

Les séances sur les fractions étranges ont été réalisées avec trois classes dans une même école secondaire en banlieue de Montréal. Aucun de ces groupes n'était considéré « enrichi ». Une classe était en première année de premier cycle, une seconde classe était en deuxième année de premier cycle et, enfin, la troisième classe était en troisième année de dernier cycle. L'enseignant de cette classe a été sollicité pour réaliser une séance de mathématiques de niveau secondaire, mais extracurriculaire. Il a été sollicité afin d'obtenir de meilleurs rendements sonores lors de nos enregistrements.

Toutes les séances ont été enregistrées à l'aide de deux caméras et de petits enregistreurs sonores. La séance retenue pour offrir un aperçu plus détaillé des résultats s'est déroulée en deuxième année de premier cycle au secondaire. L'accès aux formulaires de consentement, la qualité sonore et visuelle des enregistrements ont motivés ce choix, puisque chacune des séances aurait tout aussi bien pu faire l'objet de récits et d'analyse, mais la qualité des enregistrements des données ne nous a pas permis cette pleine liberté, car il était très difficile de comprendre les enregistrements de certaines de nos séances. Les micros semblent avoir été trop loin. Mon but dans les sous-sections suivantes est d'illustrer un peu comment les choses se sont passées et faire voir la richesse du potentiel en termes d'im-perfection.

### 4.2.2 Récit

Il faut considérer ce récit de séance comme un simple exemple de ce que peut être un travail mathématique en classe dans une perspective des mathématiques im-parfaites. Cette séance s'est déroulée à la dernière période d'une journée de quatre périodes. Au début de la séance, j'ai effectué un bref retour sur les fractions et sur des manières de manipuler les fractions. Cette partie de la séance a été planifiée en collaboration avec l'enseignant. On y a travaillé davantage ce que j'ai nommé dans ma problématique des mathématiques scolaires. Les opérations travaillées et questionnées sont celles que l'enseignant avait déjà montrées aux élèves durant l'année scolaire. Par exemple, nous avons travaillé la « méthode du samouraï », une appellation locale créée par l'enseignant, qui consiste à éliminer les x de l'expression $\frac{2x}{x}$ en un seul trait de crayon comme ici : $\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}$ . À la suite du travail de cet exemple, j'ai enchainé en présentant la fraction $\frac{16}{64}$. Voici en détail ce qui en a découlé. Ce verbatim a duré un peu plus d'une dizaine de minutes.

> M (Moi-même) : J'ai 16 sur 64 et j'ai trouvé que si je barre les 6, j'obtiens 1 sur 4. Cette méthode-là, est-ce qu'elle fonctionne ?
>
> La classe[36], immédiatement : Oui.
>
> M : Oui ? Pourquoi ?

---

[36] L'utilisation du terme 'La classe' désigne au moins 5 élèves qui réagissent de la même manière. J'ai considéré ces réactions observables en tant que témoignage de la classe.

Paroles inaudibles, plusieurs élèves échangent, mais je réussis à entendre un élève distinctivement.

M, en réponse à l'élève 1 : Ah ! Oui, oui j'ai compris, je suis contente. Alors, si tu fais fois 16 en haut et en bas , dis-je en écrivant sur la fraction ¼, je répète : fois 16 ici, et fois 16 ici, on s'entend ?

Cesar : Ouais.

M : On va obtenir 16/64.

Cesar : Ouais.

Joseph, qui interrompt : Ben, 16 sur 64 debord, ça veut dire que ça égale un sur 4.

M : Oh, alors, bien la méthode fonctionne, est-ce que ça veut dire que je pourrais le faire tout le temps ?

La classe : Ouais.

M : Bon, on va vérifier, admettons qu'on prend 25/52, je barre les 5, il me reste 2/2.

La classe s'anime, plusieurs élèves échangent, des « non » diffus se font entendre.

Louis : Non, 25/52, ça ne donne pas 2/2 (inaudible).

M, qui est restée à l'écoute de l'élève inaudible: Ok, ok, fais que ça, j'encadre l'opération 25/52 = 2/2, ça ne marche pas, mais ça marche par exemple, j'encadre le 16/64=1/4. Ça, c'est non, j'écris *non* à côté de 25/52 = 2/2. Et ça, c'est oui, j'écris *oui* à côté de 16/64=1/4. Mais là, pourquoi là ça marche, et là ça ne marche pas ? Dans quel cas on aurait le droit de barrer les mêmes chiffres ?

La main de Zénon se lève instantanément, mais j'attends un tantinet avant de choisir son intervention afin de laisser un peu de temps de réflexions aux autres. Ce que Zénon dira restera inaudible.

(…)

M : Oh ! Ok ! Super ! On a quelque chose de vraiment cool là… Je ne sais pas c'est quoi ton nom ?

Zénon : Zénon.

M : Zénon me dit, et ce qu'on pourrait nommer la règle de Zénon, il faut que les nombres puissent se diviser entre eux. J'écris sa règle au tableau

M : Dans le fond ce que tu me dis, c'est quand même cool… Je reviens sur le tableau de nos calculs précédents. Si on cherchait vite un autre cas dans lequel il faut que les nombres puissent se diviser entre eux, on pourrait écrire 64/16, puis on pourrait barrer les 6, et ça nous donnerait bien 4/1. Ça marches-tu ?

La classe ne réagit pas clairement. Plusieurs échanges sont entendus au travers desquels plusieurs « Non » ressortent.

M : Non ? Là, ça ne marche plus ? En pointant le 64/16, il y a des élèves qui me disent que ça ne marche pas. Pourquoi est-ce que ça ne fonctionnerait pas ?

Court silence

M : 64 divisé par 16 ça donne bien 4. J'écris *= 4* à côté du *4/1*—après l'écriture de ce *= 4* à côté du 4/1, il n'y a plus jamais eu de contestations… mais ça je ne le savais pas encore.

Gregory : 16 plus 16 plus 16 plus 16 ça donne 64.

M : Oui.

Gregory : Et 16 fois 4 ça donne 64.

M : Oui.

Gregory : Mais 52… Oh, attend, attend, attend, 25 plus 25, ça fait 50 ! Il ne le dit pas, mais le son de sa voix, un décrescendo dénote d'une forme de désarroi.

M : Oui, ok, ok, lui il ne marche pas, on est d'accord. Mais moi je me demandais, lui, pointant 64/16, lui, il marches-tu ?

Gregory : Oui.

M : On pourrait essayer d'en trouver d'autres qui fonctionnent. Zénon a remarqué que 16/64 ça marche, et que 16/64 se divise entre eux. Alors, si on voulait en trouver d'autres, on pourrait essayer de trouver des nombres qui se divisent entre eux. Pour s'aider, est-ce qu'on connaît des nombres entre 0 et 100 qui se divisent entre eux.

Joseph ou Louis : Ouais. 10 et 100

M : Ok, alors 10 sur100…

Il s'ensuit une série de propositions de fractions dont les numérateurs et dénominateurs finissent tous par 0. Suite à l'écriture au tableau de la fraction 50/100, Yvan soulève ce qui me semble lui être un enjeu.

Yvan : 50 sur 100 ça, ça donne une demie. [Voulait-il dire par là que ça ne fonctionnait pas, car une demie ½ ne s'écrit pas comme 5/10 ? Je n'en suis pas certaine. C'est un peu en ce sens que je lui ai répondu.]

> M : Bien vu. 50/100 ça donne une demie. On obtient des fractions équivalentes, mais ce n'est pas une fraction irréductible, par contre la technique fonctionne, on a encore des choses de vraies. Par contre, tu as raison, si on demande d'utiliser une technique pour générer des fractions irréductibles, tu as raison que là, ça ne marche plus.
>
> Arsène : Un élève hors champ, mais près de la caméra s'adresse à son voisin au fond de la classe. La caméra capte les sons de leur échange. Eh, je pense que je *vois* quelque chose !
>
> Raoul : Rapidement, l'élève voisin à Arsène lève la main et prend la parole. 24sur48 ça fonctionne…
>
> M, je tente de rester aussi impassible que possible : Je parle en écrivant l'expression au tableau, 24/48 est-ce que ça fonctionne ? Là, je barre les 4, c'est cela, 2/8… Je suis interrompue par Raoul, mais je continue de parler. 2/8, c'est ¼.
>
> Raoul : Eh ça ne fonctionne pas.
>
> Arsène : C'est une demie, 24sur48 c'est une demie !
>
> M : … Ouais, c'est une demie de la vraie réponse hein, mais bel essai quand même. Tu sais dans le fond tu sais, on ***l'***a … Ma voix montre de l'hésitation, je gesticule beaucoup plus. Je crois chercher mes mots. On a la moitié, on a ***autre*** chose.
>
> Cesar : Après tu fais fois 2.
>
> La classe est particulièrement attentive et calme après l'intervention de Cesar.
>
> M : Ouais, on pourrait faire fois 2. On pourrait inventer une autre règle qui dirait : « On peut barrer les mêmes chiffres, puis faire fois 2 après. Et voici toute la famille des nombres qui marchent comme ça. » (Pause) Ensuite, bon, où s'en va-t-on avec ça ?

Au bout de ces dix minutes d'échanges, je me suis mise à penser à voix haute. C'était la 3e séance sur les fractions étranges que j'animais de la journée, je crois que je commençais à sentir une forme de fatigue. J'ai enchainé en revenant sur la question des fractions avec les 0 à la fin. Je leur ai demandé s'ils étaient convaincus que cela allait fonctionner tout le temps et les raisons pour lesquelles ils croyaient ce qu'ils croyaient. La première réponse fut : « Oui, parce que mon prof me l'a dit. » Et cette réponse semblait satisfaire la plupart des élèves. Finalement, cela faisait déjà plus d'une quarantaine de minutes que le groupe travaillait en plénière avec moi, étant satisfaite du travail que les élèves ont accompli pour clore le thème sur les fractions étranges, je leur ai proposé de trouver une fraction étrange en leur fournissant 3 chiffres qui la composaient : 19/9 et il manquait le 5 à la position des unités au dénominateur. Il s'ensuit une question que je n'ai jamais prévue.

> Gregory : Ça serait quoi une bonne manière de trouver le chiffre manquant, par essai-erreur ?
>
> M : Essaie erreur c'est une bonne manière. (…) [J'ai pris quelques secondes pour y réfléchir. Puis j'ai commencé mon raisonnement à voix haute :] 19 fois 6, tu vas déjà être en haut de 90 et quelque chose, et 19 fois 4 tu ne seras pas encore à 90. Le seul multiple de 19 qui arrive à quatre-vingt-dix et quelque chose, la seule possibilité à vérifier ça va être le 5.

Ce fragment de séance me permet déjà de relever quelques éléments intéressants.

#### 4.2.3 Analyse de la séance

Je propose d'analyser cette séance en relevant les enjeux propres à l'imperfection mathématique au fur et à mesure que ces enjeux se sont présentés au cours de la séance. Il faut voir cette analyse en tant qu'exemple du genre d'analyse qui pourrait être fait sur le thème de l'im-perfection. Je ne prétends pas que l'analyse qui suit répond avec justesse à ma 3e question de recherche, plutôt elle offre un aperçu de ce qu'une analyse complète pourrait avoir l'air.

Les éléments du récit sont en apartés. L'analyse que j'en fais est dans le corps principal du texte.

> M (Moi-même) : J'ai 16/64 et j'ai trouvé que si je barre les 6, j'obtiens ¼. Cette méthode-là, est-ce qu'elle fonctionne ?

Cette séquence a été lancée à l'aide d'un misteak de Carman (1971) et d'une « erreur » de Borasi (1996). La question est elle-même un peu vague. Que pourrais-je vouloir dire par « elle fonctionne ? », pour qui ? Pour quoi ? Quant à l'étendue et la validité de cette méthode, très vite une forme d'imperfection est ressortie dans nos échanges.

> M : Oh, alors, bien la méthode fonctionne, est-ce que ça veut dire que je pourrais le faire tout le temps ?

E : Ouais.

En tant que *misteak* cette manière de faire n'avait qu'une validité locale, puisqu'elle ne pouvait pas être déployée à n'importe quelle fraction. Lorsque l'enseignant a demandé si cette méthode fonctionne tout le temps, la première réaction de l'élève a été de répondre par l'affirmative. Cette réponse représente la première affirmation mathématique *faillible* d'un élève. C'est-à-dire une affirmation qui pourrait être contestée avec justesse.

Par ailleurs, on peut remarquer que l'enseignant n'a pas émis de jugement sur la validité de l'affirmation faite par l'élève. Plutôt l'enseignant a proposé de vérifier un autre exemple qui a finalement constitué un contre-exemple. L'exploration de cet exemple est cohérente avec la recommandation de Chazan (1993b) d'utiliser des contre-exemples en plus de représenter un potentiel *bug* au sens de Borasi (1996).

Comme on peut le voir dans ce qui suit, la classe s'est agitée suite au travail sur cet exemple. Aussi, l'enseignant ne s'est pas mis en position d'autorité et il a laissé l'autorité mathématique dans l'argumentation des mathématiques au sens de Watson (2008). Ce qui a mené Louis à affirmer que la méthode ne fonctionnait pas pour le contre-exemple 25/52. Cet élève a explicité ce qu'on peut voir comme un raffinement de ce que lui considère comme le domaine de validité de la méthode de réduction des fractions étranges.

M : Bon, on va vérifier, admettons qu'on prend 25/52, je barre les 5, il me reste 2/2.

La classe s'anime, plusieurs élèves échangent, des « non » diffus se font entendre.

Louis : Non, 25/52, ça ne donne pas 2/2.

Il s'ensuit ensuite « quelque chose de vraiment cool ». Zénon fait une hypothèse, une inférence dans laquelle à partir du cas 16/64, il affirme que les nombres formant la fraction doivent se diviser entre eux.

M : Oh ! Ok ! Super ! On a quelque chose de vraiment cool là… Je ne sais pas c'est quoi ton nom ?

> Zénon : Zénon.
>
> M : Zénon me dit, et ce qu'on pourrait nommer « la règle de Zénon », il faut que les nombres puissent se diviser entre eux. J'écris sa règle au tableau.

Zénon n'a pas nécessairement exprimé sa généralisation de la meilleure manière possible. On sait que tous les nombres réels peuvent se diviser entre eux. L'implicite dans sa réponse c'est que les nombres *formant les numérateurs et dénominateurs* de la fraction peuvent se diviser de sorte qu'il n'y ait *pas de restes*, ou *pas de partie décimale* au résultat de cette division. Son affirmation était donc incomplète dans un certain sens, car imprécise, mais le langage vague que Zénon a utilisé lui a permis d'exprimer l'idée que l'un des nombres formant le dénominateur ou numérateur devait être multiple de l'autre nombre formant cette fraction. L'idée mathématique qui dépassait le langage mathématique utilisé par Zénon est cohérente avec les conclusions à propos du langage vague de Rowland (1995).

Ensuite, la règle de Zénon, bien qu'elle n'ait pas été infirmée durant la séance, a tout de même une portée limitée. En effet, son affirmation mathématique peut être considérée faillible si nous voulions la généraliser pour tous les cas possibles de fractions étranges. Nous n'avons qu'à observer le cas 26/65 pour nous en apercevoir. D'un autre côté, sa règle était aussi parfaitement en adéquation pour les fractions étranges dont la fraction irréductible est une fraction unitaire, car sa règle fonctionne pour $\frac{16}{64}$ et pour $\frac{19}{95}$ qui sont respectivement égale à $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$, mais sa règle n'est pas suffisante. Ainsi, si nous en avions eu la chance, nous aurions pu préciser ou bien les objets auxquels s'appliquent la règle, ou bien la règle elle-même. Bref, ce passage de notre séance touche beaucoup d'aspects différents des dimensions parfaites et imparfaites des mathématiques. Ce qui est aussi intéressant à remarquer, c'est que malgré les limites que l'on peut identifier *a posteriori* à sa règle, pour la classe, cette règle est restée une vérité faillible qui n'a pas été renversée. On pourrait dire que la classe a fait ses mathématiques avec les normes de rigueur qui lui convenaient.

Ensuite, dans le but d'illustrer la règle de Zénon à l'aide d'un exemple, l'enseignant a utilisé une fraction étrange « triviale » par rapport à 16/64. Sous le regard *expert*, on pourrait croire que l'utilisation d'une fraction étrange triviale aurait entrainé aussi une réponse triviale.

> M : (…) Si on cherchait vite un autre cas dans lequel il faut que les nombres puissent se diviser entre eux, on pourrait écrire 64/16, J'écris 64/16 puis on pourrait barrer les 6, et ça nous donnerait bien 4/1. J'écris = 4/1. Ça marches-tu ?
>
> La classe ne réagit pas clairement. Plusieurs échanges sont entendus au travers desquels plusieurs « Non » ressortent.

Dans son article Mamolo (2010) a précisé que de travailler la polysémie des symboles pouvait faire ressortir des conceptions qui ne n'apparaitraient pas autrement… La réaction confuse et non uniforme de la classe me semble être un indice du fait que les élèves participent activement aux mathématiques de la classe, de même que les élèves vivaient une forme de questionnements ou voyaient une forme d'imperfection que l'enseignant ne saisissait pas encore. D'où la question qui a suivi :

> (…)
>
> M : Pourquoi est-ce que ça ne fonctionnerait pas ?
>
> [Court silence]
>
> M : 64 divisé par 16 ça donne bien 4. [J'écris = *4* à côté du *4/1*—après l'écriture de ce = *4* à côté du 4/1, il n'y a plus jamais eu de contestations… sur la validité de cette fraction étrange triviale.]

Qu'est-ce qui a dérangé les élèves ? Était-ce le symbolisme utilisé ? Peut-être est-ce l'écriture de la fraction 4/1 qui les a dérangés. Je ne peux que faire des suppositions…

Nous avons continué à chercher d'autres fractions qui s'apparentent aux fractions étranges en nous basant sur la règle de Zénon. Certains raisonnements et dires des élèves ont mis en valeur le côté informel et empirique des mathématiques. Par exemple :

> Arsène : [Un élève hors champ, mais près de la caméra s'adresse à son voisin au fond de la classe. La caméra capte les sons de leur échange.] Eh, je pense que je *vois* quelque chose !

> Raoul : [Rapidement, l'élève voisin à E_7 lève la main et prend la parole.]
> 24 sur 48 ça fonctionne !

L'usage du mot « voir » n'est pas anodin, et qui plus est, Arsène voit « quelque chose ». Sa réaction, sa manière de décrire ce qu'il fait en cherchant en mathématique est directement lié à Chatelet (1987) lorsqu'il affirme et réaffirme les ressemblances entre les manières de faire en mathématiques et en physique. Aussi sur le langage, lorsque l'élève utilise le mot « ça », il aurait été intéressant que l'enseignant lui demande ce qu'il voulait dire par « ça ». L'utilisation de ce mot, est similaire à l'utilisation du « it » en anglais tel qu'il a été utilisé par des participants dans la thèse de Rowland(1996). On peut donc y observer un rôle au langage vague. De plus, à propos des mathématiques faites par cet élève, cette fraction 24/48 par rapport aux fractions étranges, elle est très particulière. Dans le but d'explorer les fractions étranges, elle représente même un particulièrement beau spécimen, pour reprendre l'expression de Carman (1971). Même si elle ne s'identifie pas parfaitement aux fractions étranges, on retrouve tout de même dans ce cas une certaine appartenance, régularité, ou « pattern ». Cette fraction « presque » étrange pourrait représenter un tout nouveau domaine de questionnement, un peu comme l'ont été les triplets « presque » pythagoriciens (Frink, 1987). Bref, cette représentation est une fraction étrange approximative, après réduction elle n'en diffère que par un facteur 2.

Le prochain passage illustre brièvement certaines motivations à aller de l'avant avec l'exploration de mathématiques im-parfaites.

> M [Je tente de rester aussi impassible que possible] : [Je parle lentement en écrivant l'expression au tableau] 24/48 est-ce que ça fonctionne ? Là, je barre les 4, c'est cela, 2/8… [Je suis interrompue par Arsène, mais je continue de parler.] 2/8, c'est ¼.
>
> Raoul : Eh ça ne fonctionne pas.
>
> Arsène : C'est une demie, 24 sur 48 c'est une demie !

D'abord, les mathématiques de cette partie de la séance ont avancé sous la forme de réfutation (comme dans *Preuves et réfutations* de Lakatos). L'enseignant s'est fait interrompre, et surtout les élèves ont participé activement aux mathématiques faites : deux idées qui ont été présentées par Agassi (1980). Lorsqu'Arsène a terminé sa phrase avec exclamation, on peut entendre qu'il était impliqué personnellement dans *son* activité mathématique ; l'idée d'impliquer l'élève dans sa résolution de problème est importante pour Brown (1993).

Ensuite, l'enseignant dans sa réponse a utilisé un « ***l'***» qui a effet de pointer ou référer vers une *chose* dont l'enseignant n'a toujours pas trouvé les mots pour l'exprimer et ne les trouvera d'ailleurs jamais durant cette séance. Puis, il utilise le mot ***autre*** qui n'a aucun comparatif explicite dans le contexte : autre que quoi ? Bien que très vague, l'utilisation de ces marqueurs linguistiques permet de communiquer l'existence d'une subtilité, ou d'un phénomène mathématique dont il est aussi témoin. Sa réaction montre qu'il est aussi plongé en activité mathématique *authentique* au sens où il n'est pas dans une séance où tout est prédéterminé ; il n'avait certainement pas prévu cette fraction « presque » étrange.

> M : … Ouais, c'est une demie de la vraie réponse hein, mais bel essai quand même. Tu sais dans le fond tu sais, on ***l'***a … Ma voix montre de l'hésitation, je gesticule beaucoup plus. Je cherche mes mots. On a la moitié, on a ***autre*** chose.
>
> Cesar : Après tu fais fois 2.
>
> La classe est particulièrement attentive et calme après l'intervention de Cesar.

L'attention soutenue de la classe peut être un indice de motivation et d'implication des élèves de cette classe de secondaire 2. L'enseignant a eu tout au long de la séance le souci de présenter les mathématiques de manière la plus humaine possible. On peut voir des traces de cette préoccupation par le fait qu'il a nommé la règle de Zénon, au nom de Zénon, par le fait qu'il n'a jamais jugé de la validité d'une affirmation d'un élève. Et là, un élève se lance dans ce qui peut sembler assez audacieux en mathématiques et très en contraste avec les mathématiques ou dichotomiques, un élève manifeste en pleine classe et devant tous un comportement inventif (Smith, 1981). Cet élève s'est octroyé le droit d'ajuster le cas de fraction presque étrange 24/48 en ajoutant une règle à faire. Ce faisant, il fait fonctionner la règle. La règle devenue un enchainement de règles a perdu en simplicité pour gagner en validité. C'est un peu ce que l'enseignant verbalise dans sa réplique.

> M : Ouais, on pourrait faire fois 2. On pourrait inventer une autre règle qui dirait : « On peut barrer les mêmes chiffres, puis faire fois 2 après. Et voici toute la famille des nombres qui marchent comme ça. » (Pause) Ensuite, bon, où s'en va-t-on avec ça ?

Mais l'enseignant va plus loin, il se permet ensuite de proposer la création d'une famille de nombres par la nominalisation de la procédure ; phénomène très présent dans l'histoire des mathématiques. L'enseignant aurait pu aussi nommer cette famille de nombres au nom de César qui a proposé cette règle supplémentaire.

## 4.3 Bilan et impressions des explorations

La question qui guidait ma recherche en terrain empirique était la suivante :

- *À quoi peut ressembler une situation mettant en valeur une dualité perfection-imperfection des mathématiques, et que ce passe-t-il lorsque des élèves sont mis en situation de vivre les mathématiques de cette manière ?*

Les quatre analyses conceptuelles présentées dans la section 4.1 de ce chapitre montre une certaine diversité des possibilités mathématiques à faire en classe autour de l'im-perfection. Il faut garder en tête que ce ne sont que quatre illustrations des multiples possibilités qu'offrent ce regard. À chaque fois qu'une paire de qualificatifs définissant respectivement la perfection et l'imperfection sont volontairement mise en tension dans une classe, on peut faire l'hypothèse qu'une activité mathématique im-parfaite pourrait prendre place.

Du côté de ce qui peut se passer en classe, la mini-analyse présentée ici ne permet pas de faire un bilan très riche Je rappelle que mon but était d'amener une première fois mon regard théorique sur le terrain. En ce sens, la mini-analyse en elle-même atteint cet objectif. Ces expériences pratiques me permettent tout de même de faire quelques premiers remarques sur « *ce qui se passe*. » Les voici.

Je réalise que « *ce qui se passe* » n'implique pas que les élèves, mais bien un *groupe* qui implique *toute la classe* : élèves et enseignant. L'enseignant se retrouve, lui aussi, en posture d'enquête dans laquelle il doit à la fois rester ouvert et gérer les imprévus. Cette posture n'est pas facile à maintenir puisqu'il s'agit pour l'enseignant de lâcher prise[37] sur les contenus du cours *en cours*. Sa gestion du contenu mathématique devient une forme de non-gestion volontairement prévue. Cette expérience en est aussi une d'humilité pour l'enseignant qui se refuse d'avoir recours à l'argument d'autorité. Lorsque des élèves sont mis en situation de vivre les mathématiques de manière im-parfaite, l'enseignant (et les élèves) qui tente de tendre vers la perfection mathématique doit rester calme tout en réagissant aux imprévus. Être à l'aise *à remarquer* toutes formes d'imperfections, en plus d'être apte *à y réagir* à l'instant présent. Y réagir de sorte que les négociations des mathématiques qui suivront tendent idéalement vers une forme de perfection mathématique. Nos explorations empiriques ont montré que les situations dans lesquelles les élèves rencontrent l'im-perfection mathématique sont complexes pour l'enseignant.

Du point de vue des actions mathématiques qui ont été posées par les élèves durant l'ensemble des séances, nous avons observé qu'ils ont proposé des hypothèses ; formulé de nouvelles règles mathématiques ; justifier les mathématiques qu'ils font ; proposé des définitions de termes. Un des effets de notre approche a donc été d'amener les élèves à (faire) parler leurs mathématiques – sans que cela ait été un de nos objectifs

---

[37] Pour l'enseignant cette posture est professionnellement déstabilisante puisque rappelons qu'il est communément attendu de lui qu'il sache « gérer sa classe », de même qu'au Québec, on lui reconnaît légalement une autonomie sur les déroulements de ses cours.

initiaux. Étant donné que les mathématiques se faisaient beaucoup par des échanges, la dimension sociale s'est avérée inévitable en contexte de classe.

Sur le travail d'explorations mathématiques, nos séances ont plongé nos groupes en pleine improvisation où les mathématiques découvertes (ou créées) fournissent un terrain structurant, sans pourtant qu'on cesse de questionner les structures présentes. Le contexte de classe des mathématiques im-parfaites est un contexte exigeant pour toutes personnes qui s'y impliquent, car les débordements sont fréquents, débordements que l'on peut aussi voir comme une forme de richesse inhérente à l'im-perfection mathématique

# CHAPITRE V

# CONCLUSION

J'aimerais d'abord revenir rapidement sur l'ensemble du chemin parcouru par ce mémoire. Dans un premier temps, je vous ai présenté la vision très parfaite des mathématiques que j'avais et que j'ai associé à mes expériences mathématiques « scolaires ». Je vous ai ensuite raconté que ma vision initiale des mathématiques a été secouée par le théorème de Gödel, par les manières de faire des mathématiciens au travers l'Histoire, par l'ethnomathématique, par les travaux de Borasi sur l'erreur en éducation, et par la conférence de Jean-François Maheux… Ce dernier m'a montré que la didactique des mathématiques pouvait s'arrimer à mes questionnements.

Dans un second temps, j'ai exposé des caractéristiques permettant de préciser les dimensions parfaites et imparfaites des mathématiques. J'ai procédé d'abord en observant les développements d'un objet mathématique : la fraction étrange. À force de relever diverses caractéristiques de ces dimensions, j'en suis venu à voir que le passage de la dimension parfaite à la dimension imparfaite est une forme de moteur à l'activité mathématique. Même que selon certains philosophes, parler de perfection sans imperfections est insensé. C'est donc que chacun des pôles est nécessaire à l'existence de l'autre. J'ai poursuivi le travail d'éclaircissement conceptuel par l'observation des changements d'un concept mathématique : la rigueur. On en vient à voir que les caractéristiques de ces dimensions ne sont pas absolues ni fixes et sont en interactions. On peut observer les contours diffus de ces dimensions par les tensions qui se présentent entre : langages naturels/symbolisme, incertitude/certitude, local/global, indémontrable/démontrable, trivial/particulier, tradition-convention/marginale-nouvelle, informelle-formelle, déductif/empirique, éphémère/permanent, vague/clair… Pour ne nommer que ces paires-là. Les passages d'une dimension à l'autre se font notamment par extension, précision, raffinement, ajustement, nominalisation. On en retient que les mathématiques sont tout sauf figées, achevées ou absolues.

Cette partie de ma recherche m'a permis de trouver des éléments de réponses à ma première question de recherche :

- *En mathématiques, quelles sont les caractéristiques qui contribuent à définir ce qu'on peut voir comme la dimension parfaite et la dimension imparfaite des mathématiques ?*

Ce travail de caractérisation des mathématiques m'a permis de constater qu'à chaque fois que l'on mentionne que quelque chose est « certain » ou « beau » en mathématiques, cette affirmation cache aussi de l'information à propos de ce qui serait « laid » ou « incertain ». La culture mathématique dans laquelle nous baignons a tendance à nous faire oublier l'autre penchant des mathématiques.

Dans un troisième temps, on a discuté des raisons motivant à amener l'im-perfection mathématique en classe. Être plus en correspondance avec la vraie vie, présenter une vision plus humaine des mathématiques et laisser plus de liberté aux enfants sont autant de raisons d'apporter cette vision des mathématiques en classe.

On a ensuite cherché comment apporter et reconnaître l'im-perfection en classe. L'ambiguïté, l'inventivité, la flexibilité et l'humanisme (parfois sous forme de préoccupation sociale) sont des thèmes très présents dans les écrits explorés en éducation mathématique. On remarque l'ambiguïté mathématique et l'inventivité des élèves sont deux éléments déjà présents en classe sur lesquels on peut mettre à profit. La flexibilité est souvent parlée comme une aptitude à détenir ou à travailler en contexte de travail mathématique. Et une vision humaine des mathématiques selon les auteurs est une conséquence, un moyen, ou une motivation de travailler des mathématiques différentes. Ensuite, à propos de ma seconde question de recherche :

- *Comment un regard sur la perfection-imperfection des mathématiques nous conduit-il à penser l'éducation mathématique des élèves ?*

En ayant une conscience claire du caractère bidimensionnel de l'im-perfection mathématiques, on a tendance à penser l'éducation mathématiques de manière plus ouverte. Limiter les mathématiques à faire devient presque contre-nature, car une vision des mathématiques im-parfaites, c'est de voir les mathématiques qui sont à construire, sans toutefois les prédire. On recherche aussi une authenticité d'expérience pour les élèves. Que leur problème mathématique soit un véritable problème pour *eux*. Certes, ce ne sont là que quelques éléments qui sont ressortis. Cette « réponse » à ma deuxième question de recherche est particulièrement incomplète. Une réflexion pourrait être plus approfondie notamment sur ses implications possibles en termes de pratiques scolaires, de curriculum, de ressources éducatives, etc.

Dans un quatrième temps, on a développé notre approche d'analyse conceptuelle cohérente avec notre manière de voir les mathématiques im-parfaites. Nous avons réalisé quelques explorations empiriques qui me semblent modestes par rapport au travail théorique qui précède notre passage sur le terrain. Bien que je considère que nos expérimentations amènent convenablement notre travail théorique sur le terrain, il reste du travail à faire pour mieux comprendre ce qui se passe lorsque les élèves sont mis en situation de vivre les mathématiques de cette manière. Nos expérimentations et analyses présentées dans ce travail de recherche ne représentent qu'un modeste point de départ de ce qui pourrait être fait. On a pu voir qu'il est possible de stimuler l'activité mathématique d'élèves du secondaire par le biais de séances tournant autour de mathématiques im-parfaites.

Enfin, quant à ma troisième question de recherche :

- *À quoi peut ressembler une situation mettant en valeur une dualité perfection-imperfection des mathématiques, et que ce passe-t-il lorsque des élèves sont mis en situation de vivre les mathématiques de cette manière ?*

Je crois avoir suffisamment bien répondu à la première partie de cette dernière, soit : à quoi peut ressembler une situation mettant en valeur l'im-perfection. J'ai fourni quatre exemples différents d'analyses conceptuelles qui sont très variées quant à leurs thèmes. Sur ce qui se passe lorsque les élèves sont mis en action, est la partie de cette recherche qui reste particulièrement à approfondir. Il m'apparaît évident que les élèves mis en actions dans le cadre de mes quatre expérimentations ont fait des mathématiques, mais de quelles natures ? Comment ces expériences mathématiques sont-elles vécus par les élèves ? Que s'y passe-t-il plus finement ? Dans le futur, je crois que des expériences en sous-groupes serait profitable afin de saisir qualitativement et avec plus de finesse la nature des expériences vécues. Cela représente une limite importante de ma recherche.

J'aimerais terminer cette conclusion par quelques impressions en lien avec mes expérimentations en classe. Je crois qu'on pourrait y trouver plusieurs pistes de recherche méritant d'être approfondies ultérieurement.

<u>Impression numéro 1</u> : Changement dans le rapport aux mathématiques

J'ai l'impression que nos séances ont mis en valeur certaines sensibilités aux mathématiques que les élèves ont, mais qu'on n'a peu souvent la chance de voir. Par exemple, alors que j'ai passé une séance à questionner des procédures algorithmiques mathématiques, la plupart des élèves participants se sont questionnés sur les algorithmes et les liens entre les nombres présents. Un élève en fin de séance m'a explicitement demandé et avec un sincère intérêt : *Dans le fond, sommes-nous en train de faire de la philosophie des mathématiques ?*

Cette anecdote est représentative de plusieurs autres petits échanges qui se sont produits au cours de nos expérimentations empiriques. J'ai l'impression qu'ils incarnent une forme de changement de la vision des mathématiques que l'élève avait avant la séance, car manifestement pour lui, partir à la recherche de d'autres cas possibles de fractions étranges ne semblaient pas être pour lui d'être quelque chose de simplement « mathématique ». J'ai l'impression que ce type d'activités autour de l'im-perfection peut travailler la perception que les élèves ont des mathématiques à la manière dont Borasi (1996) le souligne.

Impression numéro 2 : Motivation des élèves

Beaucoup d'auteurs analysés au chapitre 3 soulignaient qu'un changement de la présentation des mathématiques pouvait contribuer à l'augmentation de la motivation des élèves (Borasi, Brown, Benn, Agassi, Chazan). Nos expérimentations sont honnêtement plus mitigées en ce sens. Voici mon impression sur chacune de nos quatre séances réalisées en classe.

Séance sur les irrationnels / Première séance dans la classe A. Une dizaine d'élèves participaient activement. Le reste de la classe était beaucoup plus effacé. Aux yeux de l'enseignant titulaire de la classe, c'est comme si certains bugs mathématiques étaient vraiment importants pour nous (chercheurs et enseignant) mais pour les élèves ces bugs n'en étaient pas vraiment.

Séance sur les fractales /Deuxième séance dans la classe A. Les élèves ont particulièrement apprécié cette séance. À la fin de cette dernière, l'ensemble de la classe a « applaudit » notre séance. Qu'est-ce que ça signifie pour la motivation ? Je n'en suis pas certaine, mais j'aime croire que lorsqu'on apprécie un moment, on est motivé à participé. Et j'ai pu remarquer des interventions fréquentes de l'ensemble des élèves tout au long de la séance.

Séance sur la création des listes de nombre /Troisième séance dans la classe A. Participation active et constante tout au long de la séance.

Séance sur les fractions étranges / Première et seule séance dans trois autres classes. Le bilan motivationnel est plus inégal. La meilleure réponse de participation fut en secondaire 1 où l'ensemble des élèves ont bien répondu activement.

Bref, il n'est pas confirmé que les séances autour de l'im-perfection motivent davantage les élèves, mais… dans la classe où nous nous sommes présentés le plus souvent, il me semble que la motivation devenait de plus en plus grande et avec de plus en plus de constance, alors cet aspect pourrait être quelque chose à observer sur le long terme.

Impression numéro 3 : Fait ressortir l'inattendu

Je vous énumère ici, quatre moments ou aspects complètement inattendus qui se sont produits ou manifestés lors de nos séances sur l'im-perfection. Ces manifestations mathématiques nous ont surpris, moi la chercheure, tout comme cela a surpris les enseignants respectifs de ces classes.

Séance sur les irrationnels et séances sur les fractions étranges : Certes, on s'attendait à ce que les élèves utilisent leur calculatrice pour répondre à certaines de nos questions. Néanmoins, lorsqu'on leur demandait de trouver une autre explication, la *ténacité* avec laquelle les élèves tenaient et s'ancraient dans leur calculatrice pour justifier tout a été un peu déstabilisante autant pour la chercheure que pour les enseignants, que pour le conseiller pédagogique qui observait. On ne s'y attendait pas à ce point-là.

<u>Séance sur les irrationnels</u> : Une élève, dites douée par son enseignant, a soutenu un argumentaire avec le reste de la classe fort longtemps, presque avec obstination, pour défendre l'idée que s'il y a une racine carrée elle doit absolument toujours garder son symbole de racine carré pour conserver l'exactitude du résultat et ce même si nous parlons de racine de 4, ou racine de 1. Selon elle, racine de quatre n'est pas exactement égale à 2, de même que racine de 1 n'est pas exactement égale à 1. Ce moment a beaucoup surpris son enseignant, alors que pour moi je voyais une forme de polysémie donnée à ce symbole qui serait lié au concept de procept tel qu'exposé par Mamolo (2010). L'élève faisait une distinction claire (et erronée) entre le processus de la racine carré d'un nombre carré et le résultat de ce processus.

<u>Séance sur les irrationnels</u> : Un élève dans la moyenne a parlé de manière très intuitive et très claire du concept de limite pour expliquer la valeur de l'écriture décimale d'un nombre irrationnel. Son enseignant ne s'attendait pas à ce que ce type de raisonnement provienne de lui.

<u>Séance sur les fractions étranges</u> : Ni la chercheure, ni l'enseignant n'avions prévu que les élèves penseraient, pour trouver d'« autres cas possibles », à barrer les 0 en fin de fraction comme dans $\frac{1\cancel{0}}{2\cancel{0}}$ . Pour beaucoup de ces élèves de secondaire 1, c'était une véritable découverte. En même temps, la chercheure au sein d'une vision im-parfaite en moi appréciait que ces élèves aient personnalisés leur problème de mathématiques, un peu comme Brown (1993) le souhaiterait. Ensuite, une élève a découvert par essai-erreur qu'elle pouvait aussi barrer les 0 « avant » comme dans : $\frac{\cancel{0,00}1}{\cancel{0,00}3}$ . Nous avons été étonnés que les élèves découvrent en travaillant les fractions étranges des « trucs » applicables directement dans leur programme de formation de l'école québécoise. Nous n'avons pas pensé qu'une telle retombée puisse être possible.

Bref, selon les dires des enseignants avec lesquels nous avons travaillé, il semblerait que ces séances ont offerts des moments où ils leurs étaient possibles d'observer une nouvelle facette de certains de leurs élèves. Il semblerait donc que l'affirmation de Mamolo (2010) que les situations d'ambiguïté, ou de polysémie, fasse ressortir des éléments auxquels on ne s'attend pas puisse être valide au sein de notre vision des mathématiques. Je reconnais que les anecdotes éclairées ici ne confirme rien, plutôt j'affirme que sur la base du bref aperçu que j'expose, il serait intéressant de poursuivre des observations en ce sens.

Finalement, on retiendra que voir et travailler les mathématiques im-parfaites en classe ne rend pas les mathématiques plus faciles, ni plus accessibles, simplement, plus fidèles à leur histoire et à la diversité des points de vue à leur sujet.

Aout 2020

Quelle est la principale retombée de ce mémoire ?

D’abord et surtout, elle propose un regard différent sur les mathématiques qui est aussi une alternative à la vision absolutiste des mathématiques. À partir de ce regard, d’autres situations d’activités mathématiques peuvent très bien être créées et développées par d’autres. Je pense que le développement de ce regard est la principale retombée de ce mémoire.

Quelles sont les principales questions qui m’habitent ? Comment poursuivre sur les mêmes idées ?

D’abord, je me demande si ce regard pourrait être pertinent à développer chez les futurs enseignants au secondaire, et de quelle manière ce regard pourrait-il leur être utile ?

Ensuite, dans le même esprit que la question précédente, je me demande si ce regard pourrait être contributif à la formation continue ? À postériori je réalise que cette démarche sur l’im-perfection m’a demandé de travailler et de faire énormément de mathématiques différentes et variées. J’ai l’impression que la variété de ces expériences mathématiques a contribué grandement au développement de ma confiance en mes mathématiques en classe. Bref, une approche par le *faire* des mathématiques im-parfaite me semblerait pertinente à la formation continue afin de continuer à maintenir et enrichir les habiletés de résolutions de problèmes des enseignants. Cette hypothèse est à vérifier.

Finalement, je crois que pour poursuivre sur ces idées, il faut se permettre certaines digressions. En ce sens, le meilleur conseil qu’on m’a donné durant ces années de maitrise est venu d’un chercheur italien rencontré à Gênes. Il m’a dit : « Vous ne pouvez pas tout faire. C’est une maitrise. Vous devez faire des choix. » Il a enchainé avec : « C’est une maitrise. Amusez-vous, c’est le moment de le faire. »

<u>Qu’est-ce que cette grande démarche m’a apporté (d’autre) ?</u>

- Point de vue personnel :

À plus d’une reprise dans ma problématique initiale, j’ai mentionné « mathématiques authentiques », on m’a aussi souvent questionné sur ce que je voulais dire. Au début j’ai cru que ces mathématiques authentiques étaient les mathématiques des mathématiciens, ces « vraies » mathématiques, mais encore une fois je faisais fausse route. C’est en écrivant ce mémoire que je crois avoir compris que les seules mathématiques authentiques sont celles que nous faisons nous-même – et non celle des autres. Ainsi, lorsque je parle de mathématiques « authentiques », ce sont les mathématiques telle que je les vois, et vous en avez une description détaillée de ma vision dans ce mémoire.

- Point de vue d’enseignante de mathématiques :

Le travail de ce mémoire m’a aidé à trouver un sens à l’enseignement des mathématiques. Lorsqu’un problème mathématique devient un acte personnel (au sens de Brown, 1993), ça implique que si j’interviens auprès d’un élève, alors je suis consciente que j’interviens dans sa sphère personnelle. L’enseignante en moi intervient donc avec une sensibilité accrue car des dimensions personnelles (comme les émotions, leur orgueil, leur inquiétude, leur confiance) sont présentes… Aider un élève dans un problème mathématique devient l’acte de l’aider *personnellement*. Et c’est dans cette dimension personnelle que j’ai trouvé un sens à enseigner les mathématiques. D’une certaine façon, aider les élèves dans leur problème (mathématiques) personnels, c’est une manière de les aider à se connaître eux-mêmes.

Pour bien illustrer ce que je veux dire, permettez-moi de vous glisser un exemple issu de ma pratique d’enseignement. Je travaillais avec une élève dite « en difficulté ». Cette dernière faisait constamment des inférences fausses. C’était à se demander si elle ne faisait pas que dire des choses au hasard... J’ai seulement réussi à l’aider lorsque j’ai réalisé qu'elle avait un sens de l'observation particulièrement bon, ou valide mathématiquement. Par exemple dans cette image :

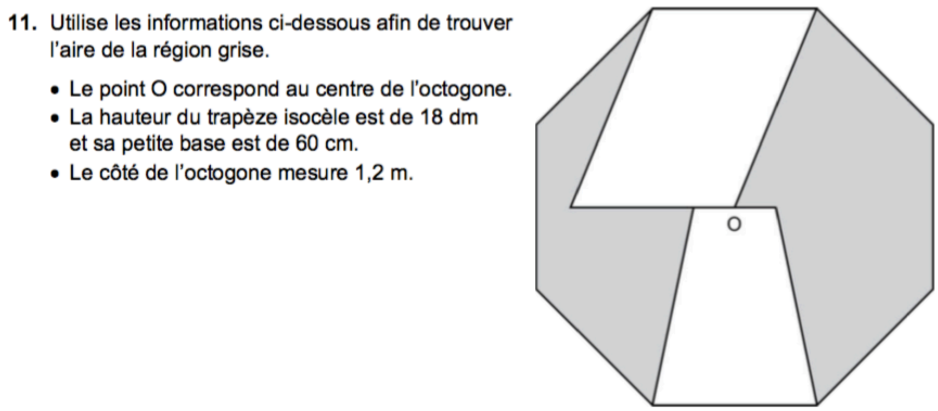


Figure 5.1 – Exercice supplémentaire, tiré de Puissance 2, Grand Duc.

Il faut *voir*, que la hauteur du trapèze est aussi celle du parallélogramme. Pour cette élève faire ce constat n'était pas une difficulté. Je l'ai alors encouragé à s'appuyer sur ce sens. Son sens de l'observation lui apportait beaucoup plus d'inférences valides que tout autre manière de raisonner. Dès lors ses résultats se sont mis à s'amélioré car elle avait enfin trouvé quelque chose *en elle* sur quoi se fier, se valider et se contre-valider. Alors, à la question, « pourquoi enseigne-t-on les mathématiques ? » Pour moi c'est pour fournir des occasions aux élèves à mieux se connaître… pour mieux raisonner.

Sur un tout autre aspect, un autre enseignant m'a demandé « À quoi ça sert [un regard im-parfait sur les mathématiques] ? » Cette question m'a fait bien rire. S'il est question de « planification » de cours… À l'heure actuelle, je ne sais pas si ce regard sur les mathématiques a une grande utilité pour planifier des séances de mathématiques en classe régulière. Cela dit, il y a tellement de moments où en enseignant on agit et ré-agit dans l'imprévu. Cette démarche m'a apporté et m'apporte beaucoup par rapport à mes manières d'*être* en mathématiques avec mes élèves : mes réactions dans l'action sont constamment teintées par ce regard. J'ai par exemple découvert avec une élève que la formule $\frac{D \times d}{2}$ avait un énorme domaine de validité pour le calcul de l'aire des quadrilatères.

- Point de vue de la chercheure :

Cette grande démarche m'a apporté beaucoup beaucoup de nouvelles questions.

# BIBLIOGRAPHIE


Agassi, J. (1980). On mathematics education: The Lakatosian revolution. For the Learning of Mathematics, 1(1), p. 27-31.

Albouy, V., & Wanecq, T. (2003). Les inégalités sociales d'accès aux grandes écoles suivi d'un commentaire de Louis-André Vallet. *Économie et statistique*, *361*(1), p. 27-52.

Balacheff, N. (1982). Construction des connaissances mathématiques, l'approche de Imre Lakatos. *Publications mathématiques et informatiques de Rennes*, *2*, p. 1-12.

Barbin, E. (1997). Histoire et enseignement des mathematiques: Pourquoi? Comment?. *Bulletin AMQ*, 37(1), p. 20-25.

Barbin, E. (2007). Les avatars de la rigueur mathematique. *Pour la science*, *356*, p. 10-13.

Benn, R. (2000). Mathematics: Certainty in an uncertain world?. Dans Coben, D., O'Donoghue, J., & Fitzsimons, G. E. (dir.), *Perspectives on adults learning mathematics : Reasearch and practice* (p. 109-118). Dordrecht, Netherlands : Springer science & business media.

Blanché, R. (1956). *L'axiomatique*. Paris : Presses universitaires de France.

Boas Jr, R. P. (1972). Anomalous cancellation. *The two-year college mathematics journal*, *3*(2), p. 21-24.

Borasi, R. (1993). Appreciating the humanistic elements within mathematical content: The case of definitions. Dans White, A (dir.), *Essays in Humanistic Mathematics* (p. 123-139). Washington DC : Mathematical Association of America.

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the learning of Mathematics*, *7*(3), p. 2-8.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction : A focus on Errors*. Norwood, NJ : Ablex.

Brown, S. I. (1993). Towards a pedagogy of confusion. Dans White, A (dir.), *Essays in Humanistic Mathematics* (p. 107-122). Washington DC : Mathematical Association of America.

Caratini, R. (2002). *Les mathématiciens de Babylone*. Paris : Presses de la Renaissance.

Carman, R. A. (1971). Mathematical misteaks. *The Mathematics Teacher*, *64*(2), p. 109-115.

Chaitin, G. J. (2004). Thoughts on the Riemann hypothesis. *The Mathematical Intelligencer*, *26*(1), p. 4-7.

Chaitin, G. (2016). Doing mathematics differently. *Inference : Internationnal review of science*, *4*(1). Récupéré le 2 septembre 2016 de https://inference-review.com/article/doing-mathematics-differently

Charbonneau, L. (1990). La révolution française : Les mathématiciens au pouvoir. *Bulletin AMQ, 30*(2), p. 17-23.

Chatelet, G. (1987). L'enchantement du virtuel. *Chimères.*, *2*(1), p. 64-82.

Chazan, D. (1993a). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational studies in mathematics*, *24*(4), p. 359-387.

Chazan, D. (1993b) Emperical proof : Instructional implications of a research project on students' understandings of the differences between empirical verification and mathematical proof. Dans Schwartz, J., Yerushalmy, M. ,Wilson B. (dir.), *The Geometric Supposer: What is this a case of?* (p. 107-116). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Chevallard, Y. (2007) Les mathématiques à l'école: pour une révolution épistémologique et didactique. *Bulletin de l'APMEP*, *471*, p. 439-461. Récupéré de http://numerisation.univ-irem.fr/AAA/AAA07091/AAA07091.pdf

Crowe, M. J. (1975). Ten "laws" concerning patterns of change in the history of mathematics. *Historia Mathematica*, *2*(2), p. 161-166.

Detlefsen, M., & Luker, M. (1980). The four-color theorem and mathematical proof. *The Journal of Philosophy*, *77*(12), p. 803-820.

Dewey, J. (1933) *How we think*. Boston D.C. : Heath and Company.

Dewey, J. (1964) *Democracy and education.* London : Macmillan.

Dieudonné, J. (1982). La notion de rigueur en mathématiques. Communication présentée au *Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, (11). Paris. Récupéré de http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1982___11_A1_0

Dowek, G. (2007). *Les métamorphoses du calcul Une étonnante histoire des mathématiques*. Paris: Le Pommier.

Dunmore, C. (1992). Meta-level revolutions in mathematics. Dans Gillies, D. (dir.), *Revolutions in mathematics* (p. 209-225). Oxford: Clarendon Press.

Ernest, P. (2014). Certainty in mathematics: Is there a problem. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, *28*, p. 1-22.

Fontenelle, F. (1780). Entretiens sur la pluralité des mondes, augmentés des dialogues des morts. Marseilles : Chez Jean Mossy. Récupéré de https://scholar.google.com/scholar?hl=fr&as_sdt=0%2C5&q=fontenelle+1780&btnG=

Fried, M. N., & Goldberg, M. (2010). A pumping lemma for invalid reductions of fractions. *The College Mathematics Journal*, *41*(5), p. 357-364.

Frink, O. (1987). Almost pythagorean triples. *Mathematics Magazine*, *60*(4), p. 234-236.

Gerdes, P. (2009) Quelques aspects culturels-historiques du développement des mathématiques en Afrique. Communication présenté à l'*Espace mathématique francophone*, Dakar, Maputo.

Gerdes, P. (2000). *Le cercle et le carré: Créativité géométrique, artistique et symbolique de vannières et vanniers d'Afrique, d'Amérique, d'Asie et d'Océanie*. Paris :L'Harmattan.

Gillies, D. (dir.). (1992). *Revolutions in mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Giorello, G. (1992). The "fine structure" of mathematical revolutions: Metaphysics, legitimacy, and rigour. The case of the calculus from Newton to Berkeley and Maclaurin. Dans Gillies, D.(dir.), *Revolutions in mathematics* (p. 134-168). Oxford: Clarendon Press.

Gowers, T. (2002) *Mathematics: A very short introduction*, Oxford : Oxford University Press.

Grosholz, E. (1992). *Was Leibniz a mathematical revolutionary?*. Dans Gillies, D. (dir.), *Revolutions in mathematics* (p. 117-133). Oxford: Clarendon Press.

Guillemette, D. (2015). *L'histoire des mathématiques et la formation des enseignants du secondaire: sur l'expérience du dépaysement épistémologique des étudiants* (Thèse doctorale). Université du Québec à Montréal. Récupéré de https://archipel.uqam.ca/7164/

Hagis, P., & Cohen, G. L. (1982). Some results concerning quasiperfect numbers. *Journal of the Australian Mathematical Society*, *33*(2), p. 275-286.

Hardy, G. H. (1992). *A mathematician's apology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hersh, R. (1998). What is mathematics, really?. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *6*(2), p. 13-14.

Hewitt, D. (1999) Arbitrary and necessary part 1: A way of viewing the mathematics curriculum. *For the Learning of Mathematics*, *19*(3), p. 1-9.

Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. Dans Lemoyne, G. (dir.), *Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : complexité et diversité des cadres d'étude. Revue des Sciences de l'Éducation. XXX*(2), (p. 329-354)

Hitt, F. (2005). L'argumentation, la preuve et la démonstration dans la construction des mathématiques: des entités conflictuelles? Une lettre de Godefroy Guillaume Leibnitz à Chrétien Wolf (1713). Dans les *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec GDM 2004* (p. 135-146).

Kant, E. (2001). *Critique de la raison* pure. Paris: Flammarion.

Kline, M. (1975). Les fondements des mathématiques. *La recherche*, *54*, p. 200-208.

Kline, M. (1982). *Mathematics: The loss of certainty*. Oxford : Oxford University Press.

Knowles, M. (1980) (2e éd.) *The modern practice of adult education from pedagogy to andragogy.* Chicago: Chicago Association Press.

Kontorovich, I. (2017). When lecturers disagree on mathematics: The case of the root concept. Communication présentée au 10e Congrès de recherche européenne en éducation mathématiques, Dublin, Irelande.

Kontorovich, I., & Zazkis, R. (2017). Mathematical conventions: Revisiting arbitrary and necessary. *For the Learning of Mathematics*, *37*(1), p. 29-34.

Kreisel, G. (1967). Informal rigour and completeness proofs. Dans Lakatos, I. (dir.), *Problems in the philosophy of mathematics* (p. 138-186). Amsterdam : North-Holland

Krull, W. (1987). The aesthetic viewpoint in mathematics. *The Mathematical Intelligencer*, *9*(1): p. 48–52.

L'Abbé, M. (1963). *Quelques aspects des mathématiques contemporaines*. Montréal : Beauchemin.

Labrosse, J. (2013). *Les répercussions de la démocratisation ségrégative des séquences mathématiques au secondaire, expliquées selon l'approche boudonnienne mémoire*. (Mémoire de maîtrise). Université Laval. Récupéré de https://corpus.ulaval.ca/jspui/handle/20.500.11794/24004

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations*. Paris : Hermann.

Maheux, J.F. & Lavallée-Lamarche, M. L. (2018). L'analyse conceptuelle du point de vue d'une approche par le faire| mathématique. Dans les *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec GDM 2018* (p. 142-152).

Maheux, J. F. (2016). Wabi-sabi mathematics. *Journal of Humanistic Mathematics*, *6*(1), p. 174-195.

Mamolo, A. (2010). Polysemy of symbols: signs of ambiguity. *The Mathematics Enthusiast*, *7*(2), p. 247-262.

Marfori, M. A. (2010). Informal proofs and mathematical rigour. *Studia Logica*, *96*(2), p. 261-272.

Poincaré, H. (1970). *La valeur de la science*, 1905. Paris : Flammarion.

Proulx, J., & Beisiegel, M. (2009). Mathematical curiosities about division of integers. *The Mathematics Enthusiast*, *6*(3), p. 411-422.

Rogers. C. R (1969). *Freedom to learn*. Ohio: Merrill Publishing Company.

Rowland, T. (1995). *Vagueness in mathematics talk* (Thèse doctorale). Open University, Royaume-Uni.

Russell, B. (1956) *Portraits From Memory And Other Essays*. New York : Simon & Schuster.

Sherry, D. (1997). On mathematical error. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, *28*(3), p. 393-416.

Sinclair, N. (2006). The aesthetic sensibilities of mathematicians. Dans Sinclair, N. Pimm, D. & Higginson, W.(dir.), *Mathematics and the Aesthetic* (pp. 87-104). New York : Springer.

Smith, B. D. (1981). Misguided mathematical maxim-makers. *The Two-Year College Mathematics Journal*, *12*(5), p. 309-316.

Snapper, E. (1979). The three crises in mathematics: Logicism, intuitionism and formalism. *Mathematics Magazine*, *52*(4), p. 207-216.

Stuffelbeam, R. (2013). How weird are weird fractions?. *The College Mathematics Journal, 44*(3), p. 202-209.

Szabó, Á. (1960). The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitions and axioms. *Scripta Mathematica*, *XXVII* (I), p. 27-49, (II), p. 113-139.

Tatarkiewicz, W., & Kasparek, C.(trad.) (1979). Perfection: The term and the concept. *Dialectics and Humanism*, *6*(4), p. 5-10.

Tatarkiewicz, W., & Kasparek, C. (trad.) (1980). Paradoxes of perfection. *Dialectics and Humanism*, *7*(1), p. 77-80.

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundation of mathematics education. Dans *Proceedings of the annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics, 1* (p.31-49). Morelia, Mexico.

Toth, I. (1969). Non-euclidean geometry before Euclid. *Scientific american*, *221*(5), p. 87-101.

Tóth, I. (2009). *Liberté et vérité: Pensée mathématique & spéculation philosophique*. Paris- Tel Aviv : L'Éclat.

Watson, A. (2008). School mathematics as a special kind of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *28*(3), p. 3-7.

Wiener, N. (1915). Is mathematical certainty absolute?. *The Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Methods*, *12*(21), p. 568-574.

Wilensky, U. (1995). Paradox, programming, and learning probability: A case study in a connected mathematics framework. *The Journal of Mathematical Behavior*, *14*(2), p. 253-280.

Zaslavsky, C. (1999). *Africa counts: Number and pattern in african cultures*. Chicago : Chicago Review Press.

Zaslavsky, O., Sela, H., & Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(1), p. 119-140.

Zhang, G. (2011). Elasticity of vague language. *Intercultural Pragmatics*, *8*(4), p. 571-599.